

**Ein Beitrag zur Bestimmung der von dreidimensionalen
Körperschallquellen abgestrahlten Luftschalleistung mit der
Direkten Finiten Elemente Methode**

Von der Fakultät Maschinenbau der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Max Kraus
aus Köln

Hauptberichter:	Prof. Dr. rer. nat. G. Hübner
Mitberichter:	o. Prof. Dr.-Ing. habil. L. Gaul
Tag der mündlichen Prüfung:	20. Dezember 2007

Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik
der Universität Stuttgart

2007

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik (IAM) der Universität Stuttgart und wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 404 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. Gerhard Hübner danke ich für die Betreuung meiner Arbeit. Die gemeinsamen Diskussionen über die Physik der Schallabstrahlung haben wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Lothar Gaul, Institutsdirektor des IAM, möchte ich mich für die Unterstützung und die Begutachtung meiner Arbeit bedanken.

Meinen Kolleginnen und Kollegen am IAM danke ich für die Hilfsbereitschaft und die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Auch all denjenigen, die in irgendeiner Form zur Entstehung der Arbeit beigetragen haben, sei herzlich gedankt.

Stuttgart, Juni 2007

Max Kraus

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur der Formelzeichen	8
Kurzfassung	13
Abstract	16
1 Einleitung	18
2 Einführung in die Direkte Finite Elemente Methode (DFEM)	19
2.1 Grundprinzip der Schalleistungsbestimmung mit der DFEM	19
2.2 Berechnung ebener Körperschallstrahler	22
2.3 Berechnung dreidimensional ausgedehnter Körperschallstrahler	25
2.3.1 Berechnungsprinzip	25
2.3.2 Berechnung der Schalleistungsmodifikation eines Monopols	27
2.3.2.1 Einseitige Schalleistungswechselwirkung	27
2.3.2.2 Bestimmung der Schwingungsdaten der Gegenbelegung	29
2.3.2.3 Schalleistungsmodifikationsfaktor M	31
2.3.3 Programmablauf des DFEM-Algorithmus für 3D-Körper	35
2.3.4 Schalleistungsberechnung mit der 3D-DFEM am Beispiel des Kugelstrahlers 0-ter Ordnung	38
2.4 DFEM-Messverfahren	42
3 Berechnung der Schalleistungsmodifikation eines Monopols mittels Kreissegment-Integration (KSI)	48
3.1 Vorüberlegungen	48
3.2 Ersatz einzelner Gegenbelegungselemente durch Kreisringteil-Segmente	52
3.2.1 Herleitung	52
3.2.2 Anwendung der KSI an analytischen Beispielen	55
3.2.2.1 Monopol über einer quadratischen Platte	55

3.2.2.2 Monopol im Nordpol einer starren Kugel	58
3.3 Ersatz rechteckförmiger Maschinenoberflächen durch Kreisringteil- Segmente	61
3.3.1 Herleitung	61
3.3.2 Anwendung der KSI-Grobdiskretisierung an analytischen Beispielen	65
3.3.2.1 Monopol über einer Rechteckplatte	65
3.3.2.2 Monopol auf einem Würfel	68
3.4 Analytisches Beispiel zur Bestimmung der Gesamtschalleistung	70
3.5 Messtechnisches Beispiel zur Bestimmung der Gesamtschalleistung	74
3.6 Zusammenfassung zu Kapitel 3	78
4 Bestimmung der schalleistungsrelevanten Wechselwirkungsabstände am kugelförmigen Körper	81
4.1 Vorbemerkung	81
4.2 Berechnung der abgestrahlten Schalleistung von kugelförmigen Körpern mit beliebiger Schwingungsverteilung	82
4.2.1 Schalleistung eines Doppelmonopols auf einer starren Kugel	82
4.2.2 Kugel-DFEM	85
4.2.2.1 Algorithmus einer DFEM für kugelförmige Körper mit beliebiger Schwingungsverteilung	85
4.2.2.2 Validierung der Kugel-DFEM am Beispiel des Kugelstrahlers 0-ter und 1-ter Ordnung	86
4.3 Bestimmung von Modifikationsfaktoren für den Wechselwirkungsterm der Standard-3D-DFEM	88
4.4 Überprüfung der Modifikationsfaktoren anhand des Schalldruckfeldes	94
4.5 Anwendung der Modifikationsfaktoren am Beispiel des Doppelmonopols auf einer starren Kugel	98
4.6 Zusammenfassung zu Kapitel 4	103
5 Ausblick	105

A Exakte Schalleistungen für ausgewählte Strahleranordnungen	106
A.1 Kreisförmige Kolbenmembran 0-ter Ordnung	106
A.2 Kugelstrahler (n, m)-ter Ordnung	107
A.3 Monopol im Nordpol einer starren Kugel	109
A.4 Doppelmonopol auf einer starren Kugel	109
A.4.1 Vorgehensweise und Grundformeln	109
A.4.2 Mathematische Beschreibung einer exzentrischen Kugelkappe	110
A.4.3 Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} einer exzentrischen Kugelkappe	112
A.4.4 Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} eines exzentrischen Monopols	113
A.4.5 Schalleistung eines exzentrischen Monopols	114
A.4.6 Schalleistung eines exzentrischen Doppelmonopols	114
B Schalldruckfeld des Nordpolkappenstrahlers	116
Literatur	117

Nomenklatur der Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

Zeichen Einheit Bezeichnung

a_n	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	flächennormale Komponente der Schwingbeschleunigung $a_n(t) = \hat{a}_n \sin(\omega t + \varphi_a)$
c	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Phasengeschwindigkeit des Schalls im umgebenden gasförmigen Schallträgermedium
d	1 m	Abstand, Durchmesser
d_{ij}	1 m	Abstand zwischen den Schallquellen i und j
f	$1 \frac{1}{\text{s}}$	Frequenz
I_n	$1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	flächennormale Komponente der Schallintensität
k	$1 \frac{1}{\text{m}}$	Wellenzahl
K_i	1	Beitrag eines i-ten Gegenbelegungselementes zur Schallleistungsmodifikation eines Monopols der Primärbelegung
L	1 m	Strahlerabmessung, Kantenlänge
m	1	(Schwingungs-)Ordnung eines Strahlers
M_d	1	Schallleistungsmodifikation eines Monopolstrahlers (Verhältnis der vom Monopol bei Anwesenheit eines Streukörpers abgestrahlten Schallleistung zur Vollraumschallleistung)
M_0	1	Näherungslösung für M_d für einen Monopol in unmittelbarer Nähe eines Streukörpers
n	1	(Schwingungs-)Ordnung eines Strahlers
\vec{n}_i	1	flächennormaler Einheitsvektor der i-ten Teilfläche; $ \vec{n}_i = 1$
N	1	Anzahl
p	1 Pa	Schalldruck $p(t) = \hat{p} \sin(\omega t + \varphi_p)$
P	1 W	Schallleistung
P_Σ	1 W	Gesamtschallleistung eines Systems aus Schallquellen

P_i	1 W	Einzelchalleistung der Quelle i
P_{ij}	1 W	Wechselwirkungsleistung der Quellen i und j
q	$1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	Schallfluss; $\hat{q} = \hat{v}_n \Delta S$
r	1 m	Radius eines Kugelkoordinatensystems (r, ϑ, φ)
r_i, r_a	1 m	Innenradius, Außenradius eines Kreisringteils
r_0	1 m	Radius einer Kugel oder Kolbenmembran
S	1 m^2	Flächeninhalt
t	1 s	Zeit
t_1, t_2	1 s	Berechnungszeit des 1. bzw. 2. Berechnungsschritts der 3D-DFEM (Schalleistungsmodifikation bzw. Schalleistungsberechnung)
v_n	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	flächennormale Komponente der Luftschallschnelle bzw. Schwingschnelle $v_n(t) = \hat{v}_n \sin(\omega t + \varphi_v)$
x, y, z	1 m	Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems

Griechische Formelzeichen

Zeichen Einheit Bezeichnung

α_{12}	1	Amplitudenmodifikationsfaktor des DFEM-Wechselwirkungsterms
β_{12}	1	Abstandsmodifikationsfaktor des DFEM-Wechselwirkungsterms
β_i	1 rad	Winkel zwischen der Richtung des ungestörten Schnellektors und dem entgegengesetzten, flächennormalen Vektor $-\vec{n}_i$
γ_{nm}	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Entwicklungskoeffizient für den Kugelstrahler (n, m)-ter Ordnung
ΔL_W	1 dB	Differenz von Schalleistungspegeln
ΔM	1 dB	Abweichung des DFEM-Modifikationsfaktors M_0 von einer exakten Lösung
ΔS_i	1 m^2	Flächeninhalt eines i-ten Elementes
$\Delta \varphi$	1 rad	Öffnungswinkel eines Kreisringteils

φ	1 rad	Winkel konstanter Höhe eines Kugelkoordinatensystems (r, ϑ, φ) ; $\varphi = 0 \dots 2\pi$.
φ_{ij}	1 rad	Phasendifferenz der Schwingung zwischen Schallquelle i und j.
ϑ	1 rad	Winkel eines Kugelkoordinatensystems (r, ϑ, φ) ; $\vartheta = 0 \dots \pi$, vom Nordpol zum Südpol definiert
λ_L	1 m	Luftschall-Wellenlänge
θ_{ij}	1 rad	Winkeldifferenz zwischen den Ortsvektoren der Monopole i und j auf einer starren Kugel
ρ	$1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	mittlere Dichte des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
σ	1	Schallabstrahlgrad (normierte Schallleistung)
$\sigma^{(n)}$	1	Schallabstrahlgrad eines Kugelstrahlers n-ter Ordnung
ω	$1 \frac{1}{\text{s}}$	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$
Ω_i	1 rad	Raumwinkel der Schallabstrahlung eines Monopols i (Vollraum: $\Omega_i = 4\pi$, Halbraum: $\Omega_i = 2\pi$)
ψ_{ij}	1 rad	Phasendifferenz der Schwingung zwischen Schallquelle i und j

Indizes

Zeichen Bezeichnung

A	Aufpunkt
Do	Doppelmonopol
e	Einzel(-leistung)
ex	exakt
exz	exzentrisch
El	Elemente
fein	KSI mit Feindiskretisierung (Netz der Standard-DFEM)
G	Gegenbelegung, Grenzwert
ges	gesamt

gg	gegenphasig
grob	KSI mit Grobdiskretisierung (1 oder 4 Kreissegmente pro Rechteckoberfläche)
K	Kappe
KS	Kreissegmente
Ku	Kugel
LF	Lotfußpunkt
m	Mittelpunkt eines Elements
M, Mon	Monopol
mod	modifiziert
n	flächennormale Komponente x_n eines Vektors \vec{x}
NP	Nordpol
q	quadratisch
r	radiale Komponente
sub	Subdiskretisierung
ww	Wechselwirkung
φ	Komponente in Umfangsrichtung
ϕ	Umfangsrichtung

Symbole und Funktionen

Zeichen Bezeichnung

g_1	Schalleistungsmodifikation eines (Vollraum-)Monopols auf einer starren Kugel
g_2	abstandsabhängiger Anteil der Schalleistungswechselwirkung von zwei Monopolen auf einer starren Kugel
$H_m^{(2)}(k r_0)$	Hankelfunktion 2. Art (Zylinderfunktion 3. Art) m-ter Ordnung
j	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$
$J_m(k r_0)$	Besselfunktion (Zylinderfunktion 1. Art) m-ter Ordnung
$N_m(k r_0)$	Neumannfunktion (Zylinderfunktion 2. Art) m-ter Ordnung

$P_n(x)$	Legendre-Polynom n-ter Ordnung
$\tilde{P}_n(x)$	normiertes Legendre-Polynom n-ter Ordnung
$P_n^m(x)$	dem Legendre-Polynom n-ter Ordnung zugeordnete Legendrefunktion
$\tilde{P}_n^m(x)$	dem normierten Legendre-Polynom n-ter Ordnung zugeordnete Legendrefunktion
$\text{Re}\{x\}$	Realteil einer komplexen Variable $x = a + j b$; $\text{Re}\{a + j b\} = a$
$\text{Rnd}[\dots]$	Rundung auf die nächste ganze Zahl
\hat{x}	Amplitude (Spitzenwert) einer harmonischen Größe $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$
\tilde{x}	Effektivwert von $x(t)$: $\tilde{x} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$; für harmonische Größen gilt $\tilde{x} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$
$ x $	Betrag von x : $ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
x^*	konjugiert komplexer Wert einer komplexen Variable $x = a + j b$; $x^* = a - j b$
x^*	modifizierte oder normierte Größe

Abkürzungen

di	direkter Abstand zwischen zwei Monopolen (durch einen Körper hindurch)
FFT	Fast-Fourier-Transformation
KSI	Kreissegment-Integration
ob	kürzester oberflächengeführter Abstand zwischen zwei Monopolen (um einen Körper herum)
teil	Gegenbelegung mit Teildiskretisierung (nur im „Sichtbereich“)
voll	Gegenbelegung mit Volldiskretisierung (gesamte Oberfläche)

Kurzfassung

Die Hauptbeurteilungsgröße der Schallemission von Maschinen und technischen Anlagen ist die Schalleistung. Eines der effektivsten und praktikabelsten Verfahren zur Bestimmung der von schwingenden Oberflächen abgestrahlten Luftschalleistung ist die Direkte Finite Elemente Methode (DFEM). Diese in Kapitel 2 ausführlich beschriebene Berechnungsmethode ermöglicht aufgrund ihrer Einfachheit sehr kurze Berechnungszeiten bei gleichzeitig sehr geringem Speicherplatzbedarf. Sowohl die Schallstrahler als auch die starre Umgebung werden durch ein Netz von Monopolen ersetzt. Die insgesamt abgestrahlte Schalleistung ergibt sich dann durch die Summe der Monopol-Einzelleistungen und die Summe der Wechselwirkungsleistungen aller Monopolpaarungen. Da diese Monopole bei der Anwesenheit von Streukörpern nicht mehr in den Vollraum abstrahlen, muss zunächst die Rückwirkung der starren Umgebung auf die Schalleistungsabstrahlung der Monopole durch Modifikationsfaktoren berücksichtigt werden. Die Berechnung dieser Schalleistungsmodifikationsfaktoren dauerte bisher insbesondere bei höheren Frequenzen deutlich länger als die eigentliche Schalleistungsberechnung, da eine frequenz- bzw. abstandsabhängige Subdiskretisierung von Elementen der Umgebung durchgeführt werden musste.

Um die Gesamtrechenzeit der DFEM zu senken, wurde in Kapitel 3 eine neue Methode zur Bestimmung der Schalleistungsmodifikationsfaktoren entwickelt, die auf eine Subdiskretisierung verzichtet. Dabei wird jedes Oberflächenelement durch ein Kreisringteil mit gleichem Flächeninhalt ersetzt, so dass anstelle der zeitaufwändigen Summation der Subelemente eine analytische Integration erfolgen kann. Da die Form des Kreisringteils ein Integrationsgebiet darstellt, das an die radialsymmetrischen Abstrahleigenschaften eines Monopols angepasst ist, kann für das Integral eine Stammfunktion angegeben werden, so dass die Berechnung der Modifikationsfaktoren mit einer einfachen Formel durchgeführt werden kann.

Die Anwendung dieser Methode, die als Kreissegment-Integration (KSI) bezeichnet wird, ergab verglichen mit der alten Methode eine 10 bis 100mal kürzere Gesamtrechenzeit – je nach Frequenzbereich und Elementanzahl – bei mindestens gleicher Genauigkeit. Verglichen mit der Standard-BEM ist die Standard-DFEM mit KSI jetzt etwa 100mal schneller und benötigt kaum Speicherplatz. Die KSI bot auch die Möglichkeit, sehr große ebene Oberflächenbereiche von starren Körpern mit sehr

wenigen Segmenten zu diskretisieren, wodurch zusätzlich Rechenzeit gespart werden konnte. In künftigen Arbeiten ist noch zu untersuchen, inwiefern die Anwendung eines Multigrid-Verfahrens den quadratischen Rechenaufwand der eigentlichen Schalleistungsberechnung weiter senken kann.

Durch ihre Einfachheit besitzt die DFEM allerdings nicht die guten Konvergenzeigenschaften der BEM. Die größten systematischen Abweichungen werden von den Wechselwirkungsabständen zwischen den Monopolpaaren verursacht. In Kapitel 4 wurde daher untersucht, wie die Wechselwirkungsabstände eines Doppelmonopols auf einer starren Kugel zu wählen sind. Dazu wurde zunächst eine exakte Schalleistungslösung für den beliebig schwingenden und beliebig auf einer starren Kugel angeordneten Doppelmonopol hergeleitet. Aus den Einzelleistungs- und Wechselwirkungstermen dieses Kugel-Doppelmonopols wurde – analog zur ebenen Platte bzw. zum Vollraum – eine 3D-DFEM aufgebaut, die die starre Kugel in die Herleitung einbezieht und somit alle an der Kugel auftretenden Beugungseffekte berücksichtigt. Die guten Konvergenzeigenschaften zeigten, dass die Genauigkeit dieser Kugel-DFEM nur noch von der Diskretisierungsdichte abhängt. Der Wechselwirkungsterm der Kugel-DFEM wurde nun mit dem Wechselwirkungsterm der Standard-3D-DFEM verglichen. Die Untersuchungen zeigten zunächst, dass der Wechselwirkungsterm der Standard-3D-DFEM betragsmäßig zu groß ist. Um den exakten Term zu erhalten, muss die Amplitude des DFEM-Terms mit zunehmender Frequenz immer stärker gemindert werden. Die größten Minderungen sind notwendig, wenn sich zwei Monopole auf der Kugel fast gegenüberliegen. Desweiteren ist der Wechselwirkungsabstand zwischen den Monopolen bis zu 20% größer zu wählen als der kürzeste oberflächengeführte Abstand, insbesondere dann, wenn sich zwei Monopole auf der Kugel fast gegenüberliegen und wenn sich die Luftschallwellenlänge in der Größenordnung der Kugelabmessungen befindet.

Die Untersuchungsergebnisse deuten an, dass auch für maschinenbautypische Geometrien einfache Korrekturfaktoren für den DFEM-Wechselwirkungsterm bereitgestellt werden können, um die Rechengenauigkeit zu erhöhen.

Weiterführende Untersuchungen sollten sich auf die statistische Absicherung der DFEM-Rechengenauigkeit konzentrieren. Vorher sollte eine Auswahl allgemeingültiger Modellierungsregeln festgelegt werden, um den Untersuchungsaufwand zu reduzieren. Als Entscheidungshilfe könnten zunächst weitere Untersuchungen der Wechselwirkungsterme erfolgen, wie sie in Kapitel 4 an der Kugel durchgeführt

wurden. Beispielsweise könnte eine 3D-DFEM entwickelt werden, die alle Beugungseffekte an einem Ellipsoid oder an einem Sphäroid enthält. Für die Praxisanwendung wäre auch die Wechselwirkung eines beliebig auf einer quaderförmigen Maschinenkapsel angeordneten Doppelmonopols interessant. Eine solche Untersuchung könnte mit der Randelementmethode durchgeführt werden.

Das Fernziel sind Modellierungsregeln für allgemein gestaltete Maschinenoberflächen, die bei einer bestimmten Frequenz und einer bestimmten Diskretisierungsdichte eine für die Praxis ausreichende Genauigkeit garantieren. Die Angabe der Genauigkeitsgrenzen kann in Form von statistischen Grenzen erfolgen, wie sie bei der internationalen Standardisierung von Messverfahren üblich sind, wo z.B. mit 95% Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Genauigkeit garantiert wird.

Abstract

The main sound emission quantity of interest for machines and technical equipment is the sound power. One of the most effective and feasible methods for calculating the sound power radiated by vibrating surfaces is the Direct Finite Element Method (DFEM). Due to its simplicity, this calculation method allows for a very fast calculation with a very small amount of memory. The vibrating surface is replaced by a net of elements, where every element is represented by a monopole placed in the element center. The total radiated sound power is determined by the sum of the single sound powers individually generated by all single monopoles and additionally by the sum of the interaction sound powers generated by the combination of all monopole pairs. These monopoles primarily radiate into free space. Because the presence of scattering objects has an influence on the radiation properties of a monopole, the sound power of each monopole must be modified by a modification factor. Until now the calculation of these modification factors has taken much more time than the actual sound power calculation, especially at higher frequencies, because a frequency and distance dependent subdiscretization of the environmental elements had to be made.

A new methodology for determining the modification factors has been developed which outperforms the classical subdiscretization method in terms of calculation time (chapter 3). According to this method, each surface element is replaced by a segment in the form of an annulus section, so that an analytic integration can be carried out. For this integral, a simple antiderivative exists, so that the calculation of the modification factors may be performed using a simple formula instead of the time-consuming subdiscretization.

The analytical and practical examples showed that the application of the new methodology led to a total calculation time that is about 10 to 100 times smaller than the old calculation methodology - depending on the frequency range and the total number of elements - but with the same accuracy. Compared with the standard boundary element method (BEM), the standard DFEM now calculates the sound power circa 100 times faster and needs a much smaller memory size. The presented methodology also offers the possibility to discretize very large plane surfaces on rigid bodies with very few segments, which additionally reduces calculation time.

Future investigations will determine whether the implementation of a multigrid-method for the actual sound power calculation can reduce the quadratic numerical costs of the standard DFEM.

However, due to its simplicity and the approximation of physical effects, the DFEM cannot achieve the good accuracy and convergence properties of the BEM. The largest systematic deviations are caused by the interaction distances between the monopole pairs. Thus in chapter 4 the influence of the interaction distance of a double monopole placed on a rigid sphere is investigated. For this investigation an exact solution is derived for the sound power radiated from a rigid sphere on which a double monopole has been arbitrarily placed. Based on the single and the interaction sound powers from this double monopole, a 3-dimensional DFEM was constructed which models all diffraction effects on the sphere. Convergence studies show that the accuracy of this sphere-DFEM is solely dependent on the discretization density.

The exact interaction term obtained using the sphere-DFEM is then compared to that computed using the standard DFEM. The investigations showed that the amplitude of the standard DFEM interaction term has to be reduced with growing frequency to yield the exact interaction term. The largest reductions have to be made when the two monopoles are situated nearly on opposite sides of the sphere. Additionally the interaction distances between the monopoles have to be chosen up to 20 % larger than the shortest distance along the sphere surface, especially when the two monopoles are nearly on opposite sides of the sphere and when the wavelength is on the order of the sphere dimensions.

The results suggest that modification factors for the DFEM interaction term could be determined in this manner for typical engineering geometries in order to obtain better accuracy.

Future investigations will concentrate on the statistical characterization of the DFEM accuracy. First, modeling rules should be established for arbitrarily shaped machines. Additional investigations of the interaction terms would serve as a supplemental modeling aid. For example, analog to the sphere-DFEM, a 3-dimensional DFEM could be developed which models diffraction effects on an ellipsoid or a spheroid. The interaction term for the case of a double monopole arbitrarily placed on a cuboid is also of practical interest. Such an investigation could be realized with the BEM. The long-term objective is the formulation of modeling rules for arbitrarily shaped machines, which guarantee a certain maximum deviation in a certain frequency range for a certain discretization density. The accuracy limits could be given in form of statistical limits according to the limits used for the international standardization of measurement methods, where for example a certain accuracy is guaranteed with a probability of 95 %.

1 Einleitung

Für die kostengünstige Entwicklung und Optimierung von lärmarmen Produkten sind Simulationsprogramme interessant, die möglichst schon aus der Konstruktionszeichnung heraus Vorhersagen über die Schallemission machen können. Solche Programme sollten einerseits einen geringen Rechenaufwand benötigen und einen geringen Speicherplatzbedarf besitzen, andererseits aber die jeweils gesuchte akustische Zielgröße für die Anforderungen in der Praxis genau genug bestimmen können. Besonders wichtig ist hierbei die Bestimmung der abgestrahlten Schalleistung. Sie ist die Hauptbeurteilungsgröße der Schallemission technischer Schallquellen, da sie die Gesamtmenge des abgestrahlten Lärms weitgehend entfernungs- und umgebungsunabhängig kennzeichnet.

Zur Berechnung der von schwingenden Maschinenoberflächen abgestrahlten Schalleistung stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung, die in [13] ausführlich beschrieben werden. Die herkömmlichen Berechnungsverfahren wie die Randelementmethode (BEM) [27] und die Multipolstrahlersynthese gehen den Umweg über die Schallfeldgrößen (Schalldruck, Schallschnelle, Schallintensität), um die Schalleistung zu bestimmen. Dagegen ist die von Hübner [1] [2] [5] entwickelte Direkte Finite Elemente Methode (DFEM) direkt auf die Berechnung der Schalleistung ausgerichtet. Durch die Nutzung fertiger Schalleistungsterme von Elementarstrahlern (hier: Monopole) bietet die DFEM sowohl das Potential zu einem geringen Rechenaufwand als auch die Möglichkeit zur Untersuchung der physikalischen Zusammenhänge bei der Schalleistungsentstehung und –wechselwirkung auf schwingenden Maschinenoberflächen.

Die DFEM wurde von Rieger [9] für zweidimensionale Schallstrahler messtechnisch validiert und im wesentlichen von Gerlach [13] als Näherungsverfahren zur Berechnung und Messung dreidimensionaler Körperschallquellen erweitert.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun erstens eine Reduzierung des DFEM-Rechenaufwands (Kapitel 3) und zweitens – da die größten systematischen Abweichungen durch die Wechselwirkungsterme verursacht werden – die Untersuchung der schalleistungsrelevanten Wechselwirkung von Doppelmonopolen an einem kugelförmigen Körper (Kapitel 4).

2 Einführung in die Direkte Finite Elemente Methode (DFEM)

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten der DFEM kurz beschrieben und zusammengefasst werden. Eine ausführliche Darstellung der Herleitungen und Grundlagen ist in den Literaturstellen [3] [5] [8] [13] zu finden. Weitere wichtige Publikationen zur DFEM sind im Literaturverzeichnis von [1] bis [15] aufgeführt.

2.1 Grundprinzip der Schalleistungsbestimmung mit der DFEM

Die DFEM ist direkt auf die Berechnung bzw. Messung der von schwingenden Maschinenoberflächen abgestrahlten Luftschalleistung ausgerichtet. Betrachtet man ein dreidimensional verteiltes System aus N verschiedenartigen Schallquellen, die mit verschiedenartigen Abstrahleigenschaften oder Schallerzeugungsmechanismen in ein umgebendes Gas abstrahlen, so kann man die insgesamt abgestrahlte Schalleistung P_{Σ} bei dissipationsfreier Schallausbreitung durch Integration der flächennormalen Komponente der Schallintensität auf einer Hüllfläche S bestimmen (Bild 2.1).

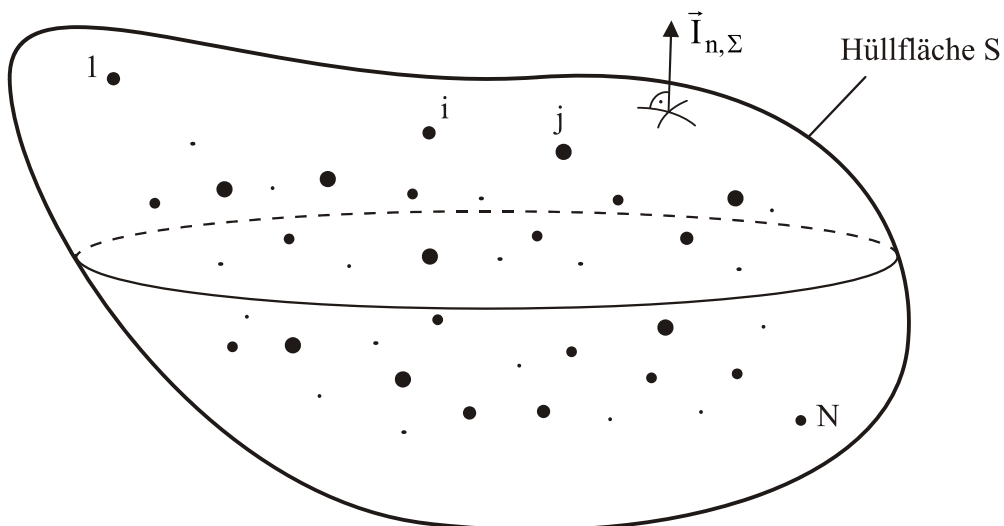


Bild 2.1: Bestimmung der abgestrahlten Gesamtschalleistung von N Schallquellen in den Vollraum mittels Hüllflächenintegration.

Durch Überlagerung der von den einzelnen Schallquellen erzeugten Schalldruck- und Schallschnellekomponenten erhält man nach dem Superpositionsprinzip die flächennormale Komponente der Schallintensität auf der Hüllfläche mit

$$\begin{aligned}
 I_{n,\Sigma} &= \overline{(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N)(v_{n,1} + v_{n,2} + v_{n,3} + \dots + v_{n,N})}^t \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \overline{p_i v_{n,i}}^t}_{I_{n,i}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \overline{p_i v_{n,j}}^t}_{I_{n,ij}}, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

einzelner Strahler
Wechselwirkung der Strahler

wobei die p_i und $v_{n,i}$ die von der i -ten Schallquelle bei Abwesenheit aller anderen Schallquellen im Aufpunkt erzeugten Schalldrücke bzw. flächennormalen Schallschnellen darstellen. Mit Gleichung (2.1) erhält man dann die gesuchte Gesamtschalleistung durch Integration über die gesamte Hüllfläche S :

$$\begin{aligned}
 P_\Sigma &= \oiint_S I_{n,\Sigma} dS \\
 &= \oiint_S \left[\sum_{i=1}^N I_{n,i} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N I_{n,ij} \right] dS \quad (2.2) \\
 &= \sum_{i=1}^N P_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N P_{ij}
 \end{aligned}$$

Wie Gleichung (2.2) zeigt, kann die Gesamtschalleistung durch die Einzel- und Wechselwirkungsleistungen der beteiligten Schallstrahler ausgedrückt werden. Hier bedeutet P_i die Einzelschalleistung der Schallquelle i (bei Abwesenheit aller anderer Schallquellen) und P_{ij} die Wechselwirkungsleistung, die sich aus der Wechselwirkung der i -ten und j -ten Schallquelle ergibt. Da die P_i und die P_{ij} zwar für Elementarstrahler (wie Monopole, Dipole, Kugelstrahler, usw.) bekannt sind, im allgemeinen aber nicht für beliebig gestaltete Schallquellen, werden die Schallquellen bei der DFEM-Schalleistungsberechnung durch Monopole¹ modelliert. Für in den Vollraum abstrahlende, harmonisch² schwingende Monopole sind die Einzelleistungen durch

$$P_i = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_i^2}{2}, \quad (2.3)$$

und die Wechselwirkungsleistungen durch

¹ Die Benutzung von Dipolen als Elementarstrahler wird in [4] dargestellt

² Die Berechnung für stochastische Zeitabhängigkeit wird in [3] dargestellt

$$P_{ij} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{2} \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad (2.4)$$

gegeben [3].

Die auftretenden Formelzeichen bedeuten

- ρ - mittlere Dichte des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
- c - Schallgeschwindigkeit des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
- k - Wellenzahl
- \hat{q}_i - Schallflussamplitude des i-ten Monopols
- d_{ij} - Abstand zwischen Monopol i und Monopol j
- φ_i - Phase des Schallflusses des i-ten Monopols

Bei einem System aus N Monopolen ergibt sich damit die abgestrahlte Gesamtschallleistung zu

$$P = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \left(\sum_{i=1}^N \frac{\hat{q}_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{2} \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right). \quad (2.5)$$

Die Gesamtschallleistung kann folglich mit der DFEM direkt aus Körperschall- und Geometriedaten berechnet werden, ohne den Umweg über die Luftschallfeldgrößen (Schalldruck p , Schallschnelle v , Normalkomponente der Schallintensität I_n) auf einer Hüllfläche zu gehen, wie es bei den Hüllflächenverfahren üblich ist.

Ein ähnliches Verfahren zur Bestimmung der Schallenergie im Nahfeld einer schwingenden Platte mit einer Verteilung von Kugelstrahlern wird von Nolte in [28] und [29] beschrieben.

2.2 Berechnung ebener Körperschallstrahler

Ist ein schwingender, beliebig umrandeter ebener Oberflächenbereich in eine (unendlich ausgedehnte) starre Ebene eingebettet, so erfolgt die Schallleistungsberechnung analog zu Gleichung (2.5). Allerdings strahlen die Monopole nun in den Halbraum ab. Der Term 4π unter der Schallkennimpedanz ρc ist daher durch den Term 2π (Halbraumabstrahlung) zu ersetzen. Der schwingende Oberflächenbereich wird durch ein Elementnetz diskretisiert. Jedes Element wird durch einen Monopol ersetzt, der im Zentrum des Elementes angeordnet wird. Der i -te Monopol bekommt die Schallflussamplitude³ $\hat{q}_i = \hat{v}_{n,i} \Delta S_i$ zugewiesen, die sich aus dem Produkt der flächennormalen Schwingschnelle $\hat{v}_{n,i}$ und dem Oberflächeninhalt ΔS_i des i -ten Elementes zusammensetzt. Anstelle der Schwingschnelle kann auch die Schwingbeschleunigung $\hat{a}_{n,i}$ über den Zusammenhang $\hat{v}_{n,i} = \hat{a}_{n,i} / (ck)$ herangezogen werden. Die Schnelleverteilung kann für analytische Untersuchungen vorgegeben oder bei einer messtechnischen Anwendung z.B. mit Beschleunigungsaufnehmern bestimmt werden.

Die von dem schwingenden Oberflächenbereich abgestrahlte Gesamtschallleistung ergibt sich demnach durch

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\rho c}{2\pi} k^2 \left(\sum_{i=1}^N \frac{\hat{v}_{n,i}^2}{2} \Delta S_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\hat{v}_{n,i} \hat{v}_{n,j}}{2} \Delta S_i \Delta S_j \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right) \\
 &= \frac{\rho}{2\pi c} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\hat{a}_{n,i}^2}{2} \Delta S_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\hat{a}_{n,i} \hat{a}_{n,j}}{2} \Delta S_i \Delta S_j \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Gleichung (2.6) kann auch direkt aus der Rayleighschen Methode [16] zur Berechnung der Schallabstrahlung ebener Strahler abgeleitet werden [10] [11] [12].

³ In der Literatur findet man den Schallfluss q auch unmittelbar als Richtungsableitung des Schalldruckes p definiert, d.h. $q = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = \nabla p \cdot \vec{n}$. Aus dem Impulssatz in der Form $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p$ ergibt sich dann bei harmonischen Schallvorgängen die Schallflussamplitude zu $\hat{q} = \rho \omega \hat{v}_n$. Nach dieser Definition besteht der Schallfluss aus der Dichte ρ und der Beschleunigungsamplitude $\omega \hat{v}_n$. Dieses Verständnis eines Schallflusses wird von dem Grundansatz der DFEM, Gl. (2.5), durch das durchgängige Auftreten des Produktes $q k \sim v_n \omega$ ebenfalls umfasst.

Als einfaches Rechenbeispiel soll die Schalleistung bestimmt werden, die von einer gleichphasig schwingenden kreisförmigen Kolbenmembran mit Radius r_0 abgestrahlt wird. Die Kolbenmembran wird entsprechend Bild 2.2 gleichmäßig in N_r Kreistringe eingeteilt, die wiederum gleichmäßig in Umfangsrichtung unterteilt werden. Aufgrund der gleichphasigen Schwingungsverteilung bekommt jeder Monopol dieselbe Schwingschnelle $\hat{v}_{n,i} = \hat{v}$ zugewiesen, für die Phasenwinkel gilt $\varphi_i = 0$.

Bild 2.3 zeigt die Abweichung der mittels DFEM berechneten Schalleistung von der exakten Lösung (s. Anhang A.1). Mit steigender Diskretisierungsdichte erhöht sich die Genauigkeit. Die Pfeile markieren diejenige Frequenz, bei der die Diskretisierungsdichte etwa 8 Monopole pro Luftschallwellenlänge beträgt. Die Abweichungen sind hier stets kleiner als 0.5 dB. Dies bestätigt die in der Akustik übliche Faustregel, dass bei einer Diskretisierungsdichte von 8 bis 10 Elementen pro Luftschallwellenlänge gute Ergebnisse zu erwarten sind.

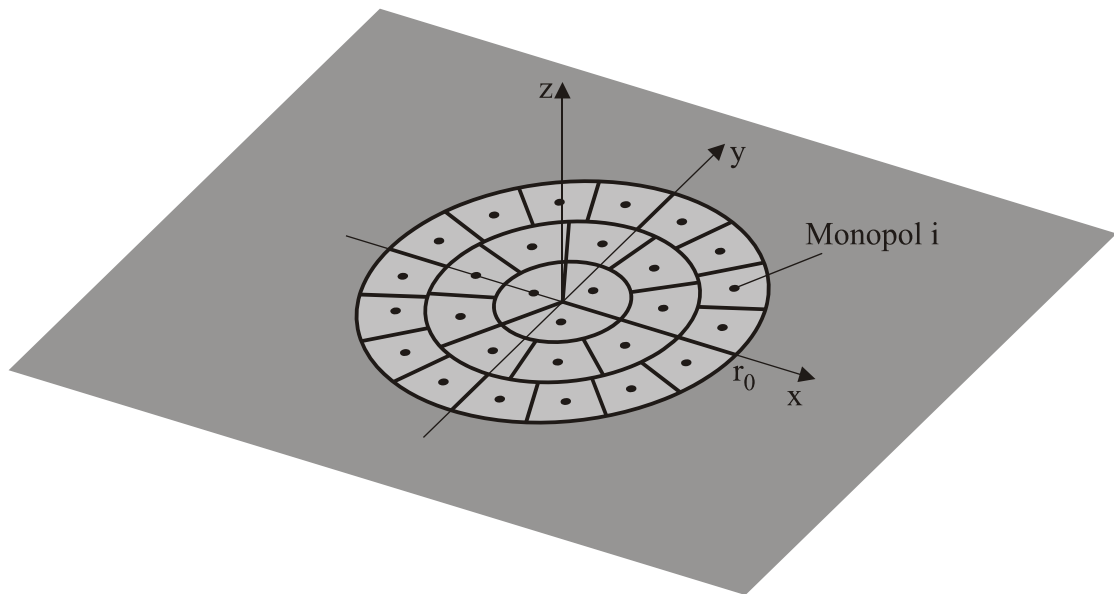


Bild 2.2: Gleichmäßige Diskretisierung einer eingebettet schwingenden kreisförmigen Kolbenmembran in $N_r = 3$ Kreistringe.

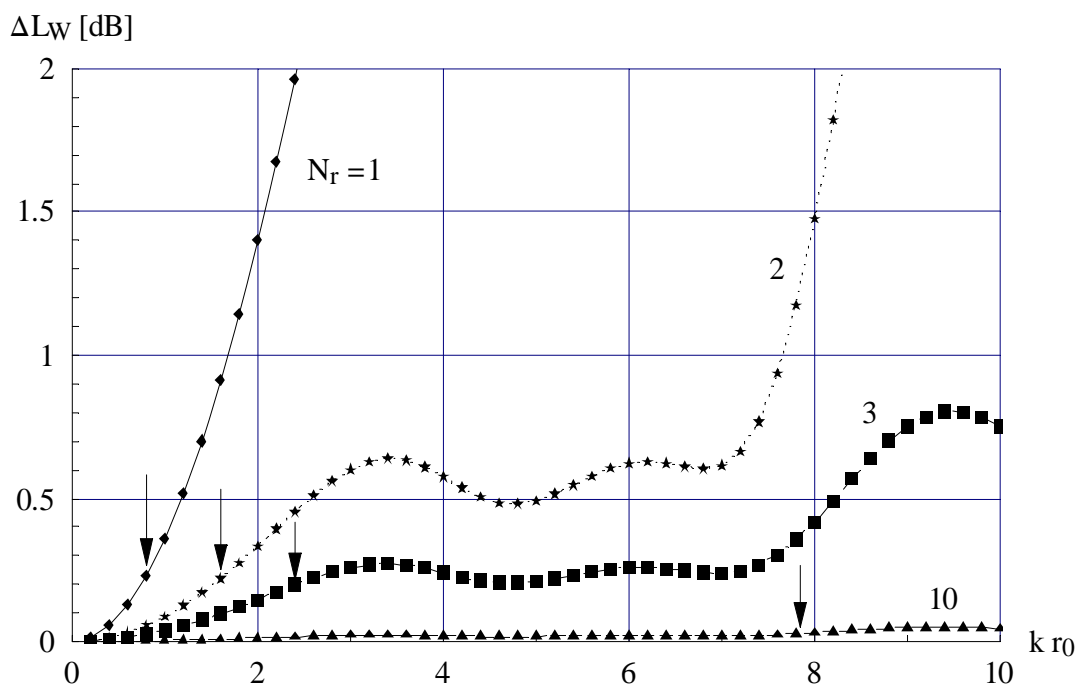


Bild 2.3: Abweichung der mittels DFEM berechneten Luftschallleistung von der exakten Lösung für eine kreisförmige Kolbenmembran bei verschiedenen Diskretisierungsdichten mit N_r Kreistringen. Die Pfeile markieren eine Diskretisierungsdichte von 8 Monopolen pro Luftschallwellenlänge.

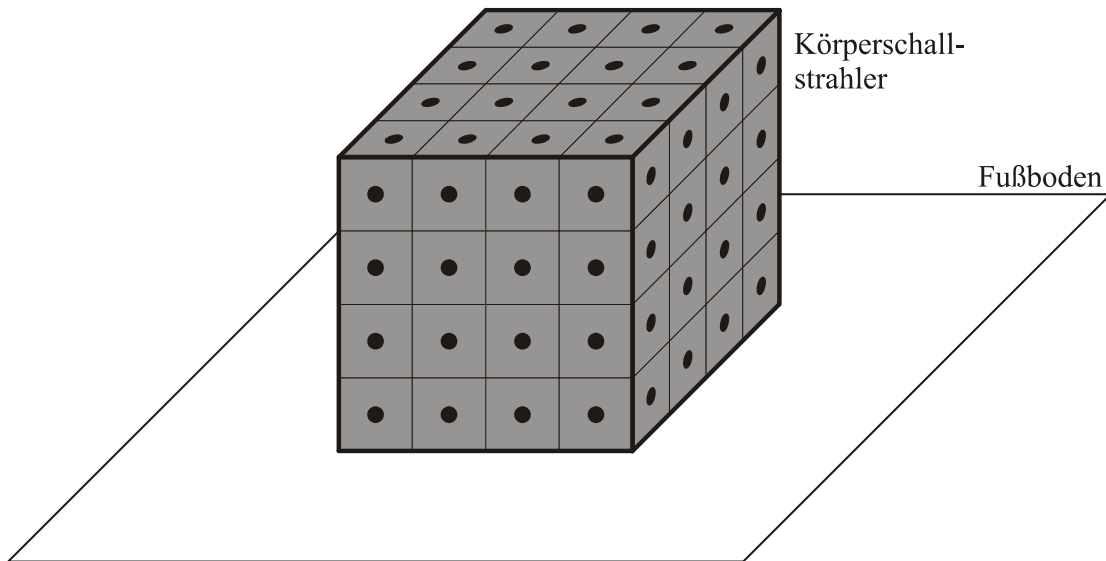
2.3 Berechnung dreidimensional ausgedehnter Körperschallstrahler

2.3.1 Berechnungsprinzip

In den vorausgehenden Abschnitten wurden Strahleranordnungen betrachtet, die ungestört in den Vollraum bzw. in den Halbraum abstrahlen. Diese Strahleranordnungen konnten daher durch Monopolbelegungen ersetzt werden, die ebenfalls in den Vollraum (Raumwinkel $\Omega = 4\pi$) bzw. in den Halbraum (Raumwinkel $\Omega = 2\pi$) abstrahlen. Bei beliebig gestalteten, dreidimensional ausgedehnten Strahlern treten aber auch Effekte wie Reflexion und Beugung auf. Die Abstrahlung der DFEM-Monopolbelegung wird dementsprechend nicht in den Vollraum oder Halbraum erfolgen, sondern von den jeweiligen Umgebungsbedingungen abhängig sein. Daher wurde von Hübner [7] [8] vorgeschlagen, den Einfluss von Streukörpern auf die Abstrahleigenschaften eines (ungestört in den Vollraum abstrahlenden) Monopols durch eine Monopol-Gegenbelegung zu ermitteln, mit deren Hilfe die Randbedingungen einer flächennormalen Schnelle $v_n = 0$ auf der Oberfläche von starren Streukörpern erfüllt wird. Dieser Ansatz wurde von Gerlach [13] genutzt, um die DFEM-Berechnung auf beliebige dreidimensional ausgedehnte Körperschallstrahler zu erweitern. Die 3D-DFEM-Berechnung erfolgt wie in Bild 2.4 dargestellt. Zunächst werden zwei Monopolbelegungen bereitgestellt: eine (Primär-) Belegung mit Monopolen, die aktiv an der Schalleistungsabstrahlung bzw. Schalleistungswechselwirkung beteiligt sind, und eine passive (Sekundär-) Belegung, die für die Streukörpersimulation neben der aktiven Belegung auch die nicht schwingenden Oberflächenbereiche der Umgebung umfasst (Boden, Wand, andere Maschinenoberflächen, usw.). Im ersten 3D-DFEM-Schritt wird nun mit Hilfe der passiven Monopolbelegung für jeden aktiven Monopol der Schalleistungsmodifikationsfaktor M_i berechnet. Dieser Modifikationsfaktor gibt an, das Wievielfache der Vollraumschalleistung der i -te Monopol der aktiven Belegung aufgrund der starren Umgebung abstrahlt ($M_i = 1$ bedeutet Vollraumabstrahlung, $M_i = 2$ bedeutet Halbraumabstrahlung). Nach der Modifikation der Einzelschalleistungs- und Wechselwirkungsterme in Gleichung (2.3) und (2.4) mit den M_i erfolgt im zweiten 3D-DFEM-Schritt die eigentliche Schalleistungsberechnung

Element-Netze:

Aktive (Primär-)Monopolbelegung für die schwingenden Bereiche



Passive (Sekundär-)Monopolbelegung für die starre Umgebung

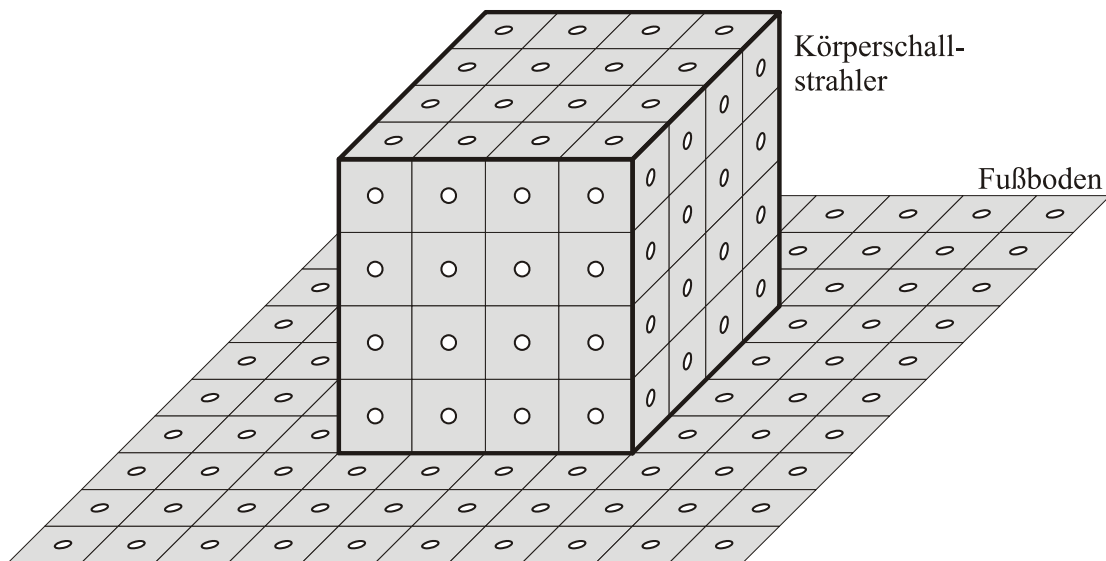
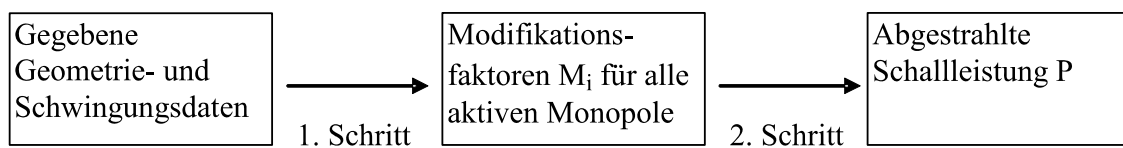
Berechnungsablauf:

Bild 2.4: Prinzip der Schalleistungsberechnung mit der DFEM für dreidimensional ausgedehnte Körperschallstrahler.

mit den Monopolen der aktiven Belegung analog zur Vollraumrechnung nach Gleichung (2.5).

Diese Vorgehensweise bei der SchalleLeistungsbestimmung stellt zunächst nur eine Näherungsmethode dar. Beispielsweise werden keine Wechselwirkungen der aktiven Monopole aufgrund von Reflexionen an der starren Umgebung berücksichtigt. Auch die Berechnung der im folgenden Abschnitt geschilderten Modifikationsfaktoren ist nur eine Näherung, da die Randbedingungen der starren Oberfläche nur nacheinander erfüllt werden, obwohl eigentlich alle Randbedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssten, wie es z.B. bei der Randelementmethode durch Lösen eines Gleichungssystems gewährleistet wird.

2.3.2 Berechnung der SchalleLeistungsmodifikation eines Monopols

Bringt man einen mit konstanter Schallflussamplitude schwingenden Monopol in die Nähe eines Streukörpers, so ändert sich die vom Monopol abgestrahlte Schalleistung. In der 3D-DFEM-Berechnung gibt der SchalleLeistungsmodifikationsfaktor M an, das Wievielfache der Vollraum-Schalleistung ein Monopol aufgrund der starren Umgebung abstrahlt. Dabei wird die starre Umgebung durch eine Monopol-Gegenbelegung simuliert. Eine ausführliche Darstellung der Herleitung und der Vorgehensweise ist in [13] zu finden.

2.3.2.1 Einseitige SchalleLeistungswechselwirkung

Grundbaustein für die Berechnung des Modifikationsfaktors M ist die von Hübner [7] [8] [14] [15] hergeleitete einseitige SchalleLeistungswechselwirkung von zwei Monopolen. Die Schalleistung, die ein Monopol bei Anwesenheit eines zweiten Monopols abstrahlt, kann entsprechend Bild 2.5 mittels Hüllflächenintegration ermittelt werden. Die auf der Hüllfläche um Monopol 0 vorgefundene flächennormale Schallintensität $I_{n,0}$ ergibt sich aus den von Monopol 0 und 1 erzeugten Schalldruckwerten p_0 bzw. p_1 und den flächennormalen Schallschnellen $v_{n,0}$ bzw.

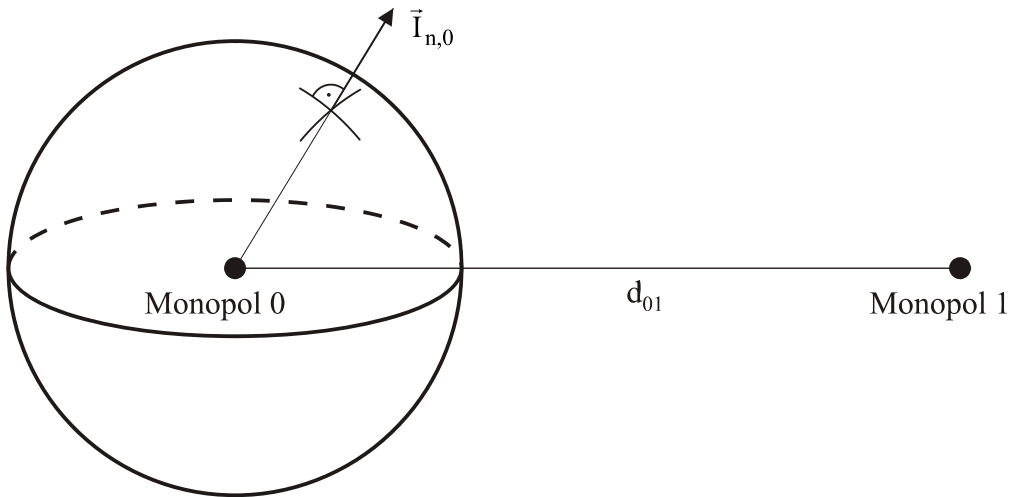


Bild 2.5: Herleitung der einseitigen Schalleistungswechselwirkung mittels Hüllflächenintegration um Monopol 0.

$v_{n,1}$ zu

$$I_{n,0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (p_0 + p_1) (v_{n,0} + v_{n,1})^* \right\}. \quad (2.7)$$

Die von Monopol 0 insgesamt abgestrahlte Schalleistung $P_{0,\Sigma}$ erhält man durch Integration über die Hüllfläche mit

$$\begin{aligned} P_{0,\Sigma} &= \oint\!\!\!\oint_{\text{Kugel 0}} I_{n,0} \, dS \\ &= \oint\!\!\!\oint_{\text{Kugel 0}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_0 v_{n,0}^* \} \, dS + \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{\text{Kugel 0}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_1 v_{n,1}^* \} \, dS}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{\text{Kugel 0}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_0 v_{n,1}^* \} \, dS}_{=0} + \oint\!\!\!\oint_{\text{Kugel 0}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_1 v_{n,0}^* \} \, dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der erste Term entspricht der ungestörten Schalleistungsabstrahlung von Monopol 0 und ergibt für harmonische Schwingungen die bereits bekannte Vollraum-Einzelschalleistung

$$P_0 = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_0^2}{2}. \quad (2.9)$$

Der zweite Term verschwindet aufgrund des Energiesatzes (unter der Voraussetzung einer dissipationsfreien Schallausbreitung innerhalb der Hüllfläche). Der dritte Term

verschwindet ebenfalls, da die Integration über eine Wechselwirkungsintensität, deren Schnellekomponente von einer außerhalb der Hüllfläche liegenden Quelle stammt, keinen Schalleistungsanteil liefert. Im Gegensatz dazu ergibt der vierte Term durch Integration über eine Wechselwirkungsintensität, deren Schnellekomponente von einer innerhalb der Hüllfläche liegenden Quelle stammt, den Schalleistungsanteil

$$P_{p1v0} = \frac{\rho c}{\Omega_1} k^2 \frac{\hat{q}_0 \hat{q}_1}{2} \frac{\sin(k d_{01} + \varphi_0 - \varphi_1)}{k d_{01}}, \quad (2.10)$$

wobei der Abstrahlwinkel Ω_1 des außerhalb der Hüllfläche liegenden Monopols 1 noch offen gelassen wird. Die von Monopol 0 bei Anwesenheit von Monopol 1 insgesamt abgestrahlte Schalleistung $P_{0,\Sigma}$ ergibt sich folglich aus der ursprünglichen Schalleistung P_0 nach Gleichung (2.9) und der einseitigen Wechselwirkungsleistung nach Gleichung (2.10) zu

$$P_{0,\Sigma} = P_0 + \frac{\rho c}{\Omega_1} k^2 \frac{\hat{q}_0 \hat{q}_1}{2} \frac{\sin(k d_{01} + \varphi_0 - \varphi_1)}{k d_{01}}. \quad (2.11)$$

Dementsprechend strahlt der Monopol 0 bei Anwesenheit einer Gegenbelegung von N_G Monopolen die Schalleistung

$$P_{0,\Sigma} = P_0 + \sum_{i=1}^{N_G} \frac{\rho c}{\Omega_i} k^2 \frac{\hat{q}_0 \hat{q}_i}{2} \frac{\sin(k d_{0i} + \varphi_0 - \varphi_i)}{k d_{0i}} \quad (2.12)$$

ab.

2.3.2.2 Bestimmung der Schwingungsdaten der Gegenbelegung

Mit Gleichung (2.12) kann der Einfluss einer starren Umgebung auf den Monopol 0 bestimmt werden, wenn die Schwingungseigenschaften der Gegenbelegungsmonopole so festgelegt werden, dass die Randbedingung einer verschwindenden flächennormalen Schnelle $v_n = 0$ auf der starren Oberfläche erfüllt wird. Dazu werden die Monopole der Gegenbelegung nach Bild 2.6 in der Mitte der Teilflächenelemente ΔS_i angeordnet und erzeugen dort die (Gegen-)Schnelle $v_{n,i}^{(G)}$, um die von Monopol 0 bei ungestörter Ausbreitung vorhandene flächennormale Schnelle $v_{n,0}$ zu kompensieren.

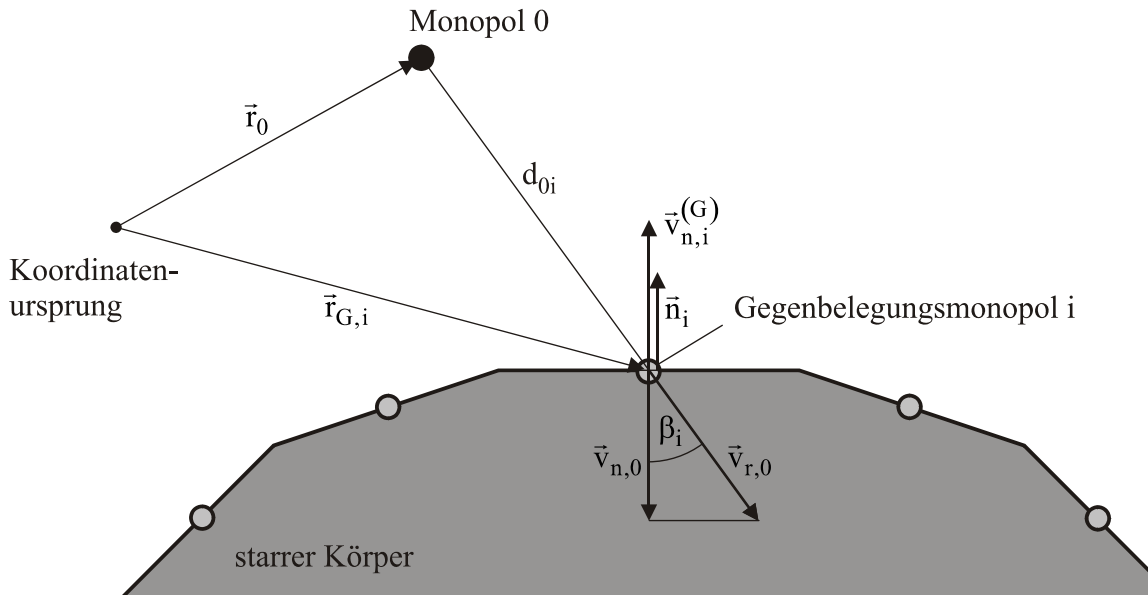


Bild 2.6: Erfüllung der Randbedingungen einer starren Oberfläche durch eine Monopol-Gegenbelegung.

Schwingt der Monopol 0 harmonisch mit der Schallflussamplitude \hat{q}_0 und der Phase φ_0 , so muss vom i -ten Gegenbelegungsmonopol die Gegenschnelle

$$v_{n,i}^{(G)} = -v_{n,0} = \frac{1}{4\pi d_{0i}} \sqrt{1 + \frac{1}{(k d_{0i})^2}} \hat{q}_0 k \cos(\beta_i) e^{j\left(\omega t - k d_{0i} - \arctan\left(\frac{1}{k d_{0i}}\right) + \frac{\pi}{2} + \varphi_0\right)} \quad (2.13)$$

erzeugt werden [13]. Dabei beschreibt der Term $\cos(\beta_i)$ die Projektion der Schnelle von Monopol 0 in die Elementnormalenrichtung mit

$$\cos(\beta_i) = \frac{-(\vec{r}_{G,i} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}_i}{|\vec{r}_{G,i} - \vec{r}_0|} \quad (2.14)$$

Die auftretenden Größen sind definiert als

- β_i - Winkel zwischen der Richtung des ungestörten Schnellevektors $(\vec{r}_{G,i} - \vec{r}_0)$ und des der i -ten Teilfläche ΔS_i zugeordneten, entgegengesetzten flächennormalen (Einheits-)Vektors $-\vec{n}_i$
- \vec{r}_0 - Ortsvektor des Monopols 0
- $\vec{r}_{G,i}$ - Ortsvektor des i -ten Gegenbelegungsmonopols
- \vec{n}_i - Flächennormaler (Einheits-)Vektor der i -ten Teilfläche
- d_{0i} - Abstand zwischen Monopol 0 und (Gegenbelegungs-)Monopol i

Aus Gleichung (2.13) können direkt die Schallflussamplitude $\hat{q}_i^{(G)}$ und die Phase φ_i des i -ten Monopols der Gegenbelegung abgelesen werden:

$$\begin{aligned}\hat{q}_i^{(G)} &= \hat{v}_{n,i}^{(G)} \Delta S_i = \frac{1}{4 \pi d_{0i}} \sqrt{1 + \frac{1}{(k d_{0i})^2}} \hat{q}_0 k \cos(\beta_i) \Delta S_i \\ \varphi_i &= \varphi_0 - k d_{0i} - \arctan\left(\frac{1}{k d_{0i}}\right) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (2.15)$$

Aus Gleichung (2.15) ist ersichtlich, dass die Schwingungsdaten der Gegenbelegungsmonopole neben den Geometriedaten nur von den Schwingungsdaten des Monopols 0 abhängen. Man spricht daher bei den Gegenbelegungsmonopolen auch von gesteuerten Monopolen.

2.3.2.3 Schalleistungsmodifikationsfaktor M

Ausgehend von Gleichung (2.12) sowie den Schwingungsdaten der Gegenbelegung aus Gleichung (2.15) ergibt sich die von Monopol 0 bei Anwesenheit eines Streukörpers abgestrahlte Schalleistung zu

$$P_{0,\Sigma} = P_0 \underbrace{\left(1 - \sum_{i=1}^{N_G} \frac{1}{\Omega_i} K_i\right)}_{M_{d,0}} \quad (2.16)$$

mit der Abkürzung

$$K_i = \frac{1}{d_{0i}^2} \sqrt{1 + \frac{1}{(k d_{0i})^2}} \sin\left(2 k d_{0i} + \arctan\left(\frac{1}{k d_{0i}}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \frac{(\vec{r}_{G,i} - \vec{r}_0) \vec{n}_i}{|\vec{r}_{G,i} - \vec{r}_0|} \Delta S_i. \quad (2.17)$$

Dementsprechend berechnet sich der als Vielfaches der Vollraumschalleistung P_0 definierte Schalleistungsmodifikationsfaktor $M_{d,0}$ zu

$$M_{d,0} = 1 - \sum_{i=1}^{N_G} \frac{1}{\Omega_i} K_i. \quad (2.18)$$

Da die Raumwinkel Ω_i der Gegenbelegungsmonopole zunächst nicht bekannt sind, wurde von Gerlach [13] eine Näherung für $M_{d,0}$ entwickelt, die folgende Annahmen macht:

1. Nur die Gegenbelegungsmonopole in unmittelbarer Nähe von Monopol 0 tragen wesentlich zur Modifikation bei.
2. Unmittelbar benachbarte Gegenbelegungsmonopole strahlen in denselben Raumwinkelbereich ab.
3. Die Summation kann aufgrund der sehr kleinen K_i von sehr weit entfernten Gegenbelegungsmonopolen über die gesamte Summe erstreckt werden.

Dadurch ergibt sich für den Schalleistungsmodifikationsfaktor die Näherung

$$M_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_G} K_i} \quad (2.19)$$

Eine deutliche Reduzierung des Rechenaufwandes bei gleichzeitig nur geringem Genauigkeitsverlust bietet die Weiterführung des Gedankengangs der 3. Annahme, indem entsprechend Bild 2.7 nur diejenigen Gegenbelegungsmonopole bei der Berechnung von M_0 berücksichtigt werden, die im so genannten „Sichtbereich“ des Monopols 0 liegen.

Desweiteren kann es notwendig sein, dass Elemente der Gegenbelegung nicht nur durch jeweils einen einzelnen Monopol ersetzt werden, sondern dass eine Subdiskretisierung durchzuführen ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn bei einer messtechnischen Ermittlung der Schwingungsamplituden und Phasen die Elemententeilung entsprechend der Körperschallwellenlänge vorgenommen wird, die in der Praxis meistens größer ist als die für die Schallabstrahlungsberechnung maßgebliche Luftschallwellenlänge.

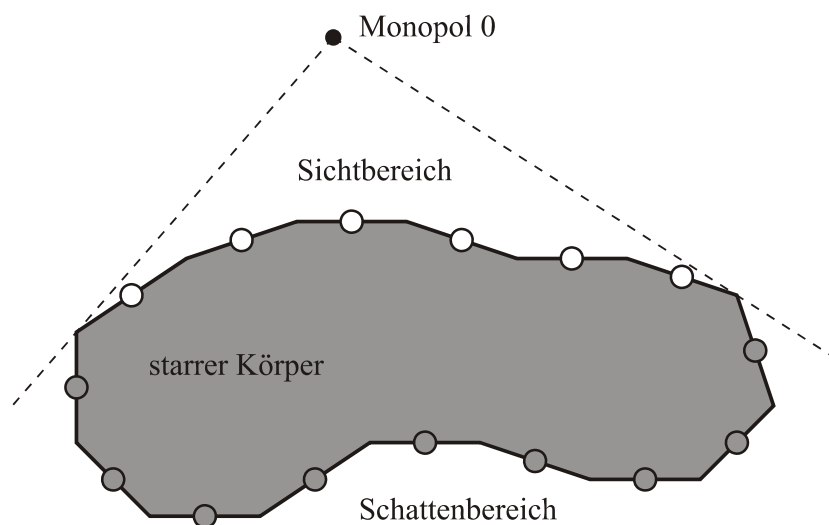
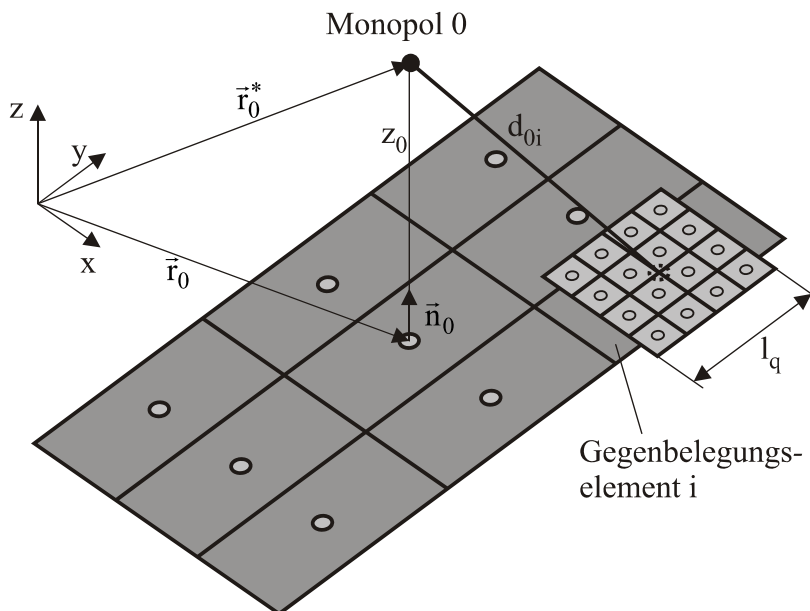


Bild 2.7: Gegenbelegungsmonopole im Sichtbereich (weiß) und Schattenbereich (dunkelgrau) von Monopol 0.

Die Bestimmung einer abstands- und frequenzabhängigen Diskretisierungsdichte der Subdiskretisierung wurde von Gerlach entsprechend Bild 2.8 durchgeführt und entspricht dem Prinzip eines einfachen Multigrid-Verfahrens. Zunächst wird ein i -tes Gegenbelegungselement (unabhängig von seiner Form) durch ein quadratisches Element mit gleichem Flächeninhalt ΔS_i ersetzt, wodurch die Seitenlänge mit $l_q = \sqrt{\Delta S_i}$ gegeben ist. Aus dem Verhältnis des Abstands d_{0i} (vom Monopol 0 zum Zentrum des i -ten Gegenbelegungselementes) zur Seitenlänge l_q kann dann durch Tabelle 2.1 die Diskretisierungsdichte bestimmt werden. Der Parameter i_{sub} ist hierbei die Anzahl der Gegenbelegungsmonopole entlang der Kante des Quadrates.

Aus dem Verhältnis d_{0i}/l_q ist zunächst noch keine Frequenzabhängigkeit der Diskretisierungsdichte erkennbar. Hier muss aber berücksichtigt werden, dass die Berechnung des Modifikationsfaktors voraussetzt, dass der zu modifizierende Monopol 0 vor dem Streukörper liegen muss. Da bei der 3D-DFEM-Berechnung die Monopole der aktiven Belegung auf dem Streukörper liegen, müssen diese Monopole für die Gegenbelegungsrechnung, wie ebenfalls in Bild 2.8 dargestellt, in Abhängigkeit von der Wellenzahl k geringfügig um einen Betrag $z_0 = 0.2/k$ in Richtung des



d_{0i}/l_q	i_{sub}
≥ 15	1
8...15	2
6...8	4
4...6	6
2...4	10
1...2	20
0.5...1	40
0.2...0.5	100
0.05...0.2	400
≤ 0.05	2000

Bild 2.8: Ersatz eines i -ten Gegenbelegungselementes durch ein quadratisches Element mit Subdiskretisierung ($i_{\text{sub}} \times i_{\text{sub}}$ Subelemente).

Tabelle 2.1: Ermittlung der Anzahl der Subdiskretisierungsmonopole i_{sub} zu Bild 2.8.

Elementnormalenvektors herausgerückt werden. Dies entspricht etwa $1/30$ der Luftschallwellenlänge, d.h. bei einer Frequenz von $f = 100$ Hz wird ein Herausrücken von $z_0 \approx 0.1$ m nötig. Bei höheren Frequenzen kann insbesondere das Element, aus dem der Monopol 0 herausgerückt wird, eine hohe Diskretisierungsdichte der Subdiskretisierung erfordern, da in diesem Fall der Abstand d_{0i} sehr klein wird gegenüber l_q , was einen großen Rechenaufwand bewirkt. Die Behebung dieses Problems wird ausführlich in Kapitel 3 untersucht.

2.3.3 Programmablauf des DFEM-Algorithmus für 3D-Körper

Wie bereits in Kapitel 2.3.1 erläutert, wird zunächst die Oberfläche der Schallstrahler und die Oberfläche der in der Umgebung befindlichen (starren) Streukörper mit Elementen diskretisiert, die anschließend durch zwei Monopolbelegungen ersetzt werden. Die aktive Monopolbelegung (N Monopole) ersetzt die schwingenden Oberflächenbereiche, d.h. die unmittelbar an der SchalleLeistungsabstrahlung und SchalleLeistungswechselwirkung beteiligten Schallstrahler. Die passive (Gegen-) Belegung (N_G Monopole) simuliert die Rückwirkung der starren Umgebung auf die aktiven Monopole und umfasst zusätzlich zu den Schallstrahlern auch die nicht schwingenden Bereiche (Wand, Boden, usw.). Für jeden (Gegenbelegungs-)Monopol muss bekannt sein:

- $\vec{r}_{G,i} = \{x_i; y_i; z_i\}$ - Ortsvektor zum i-ten Diskretisierungspunkt (im Zentrum der zugehörigen Teilfläche)
- ΔS_i - Teilflächeninhalt des i-ten Diskretisierungspunktes
- $\vec{n}_{G,i} = \{n_{x,i}; n_{y,i}; n_{z,i}\}$ - oberflächennormaler (Einheits-)Vektor des i-ten Diskretisierungspunktes

Die 3D-DFEM-Berechnung der abgestrahlten Gesamtschalleistung erfolgt dann in zwei Schritten:

1. Schritt: Berechnung der SchalleLeistungsmodifikation

Die Berechnung des Modifikationsfaktors $M_{0,i}$ ist für alle N Monopole der aktiven Belegung durchzuführen. Dazu wird der jeweils zu modifizierende aktive Monopol i um den Abstand $z_0 = 0.2/k$ in Richtung des Normalenvektors \vec{n}_i aus der Oberfläche des Schallstrahlers herausgerückt, d.h. als Ortsvektor des aktiven Monopols ist für die Gegenbelegungsrechnung

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i + \frac{0.2}{k} \vec{n}_i \quad (2.20)$$

zu verwenden.

Mit allen Monopolen $j=1 \dots N_G$ der Gegenbelegung, für die $\frac{(\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_i^*) \cdot \vec{n}_j}{|\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_i^*|} < 0$ gilt

(Gegenbelegungsmonopol j im „Sichtbereich“ des aktiven Monopols i), ist der SchalleLeistungsmodifikationsfaktor

$$M_{0,i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_G} K_j} \quad (2.21)$$

mit der Abkürzung

$$K_j = \frac{1}{d_{ij}^2} \sqrt{1 + \frac{1}{(k d_{ij})^2}} \sin \left(2k d_{ij} + \arctan \left(\frac{1}{k d_{ij}} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \frac{(\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_i^*) \cdot \vec{n}_j}{|\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_i^*|} \Delta S_j \quad (2.22)$$

zu berechnen. Der Abstand d_{ij} ist der (direkte) Abstand zwischen dem herausgerückten aktiven Monopol i und dem j -ten Monopol der Gegenbelegung. Der Term K_j muss bei Bedarf mit einer Subdiskretisierung nach Kapitel 2.3.2.3 bestimmt werden.

2. Schritt: Berechnung der Gesamtschalleistung

Die Berechnung der Gesamtschalleistung P erfolgt nach Gleichung (2.5) unter Einbindung der Modifikationsfaktoren $M_{0,i}$. Danach ergibt sich die von den N Monopolen der aktiven Belegung insgesamt abgestrahlte Schalleistung zu

$$P = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \left(\sum_{i=1}^N M_{0,i} \frac{\hat{q}_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \sqrt{M_{0,i}} \sqrt{M_{0,j}} \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{2} \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\varphi_{ij}) \right). \quad (2.23)$$

Da die Wechselwirkungsleistungen symmetrisch sind ($P_{ij} = P_{ji}$), kann der Rechenaufwand für die Doppelsumme halbiert werden, indem man schreibt

$$P = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \left(\sum_{i=1}^N M_{0,i} \frac{\hat{q}_i^2}{2} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sqrt{M_{0,i}} \sqrt{M_{0,j}} \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{2} \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\varphi_{ij}) \right). \quad (2.24)$$

Die Formelzeichen bedeuten

- ρ - mittlere Dichte des umgebenden Gases
- c - Schallgeschwindigkeit des umgebenden Gases
- k - Wellenzahl
- $M_{0,i}$ - Schalleistungsmodifikationsfaktor des i -ten Monopols der aktiven Belegung
- \hat{q}_i - Schallflussamplitude des i -ten Monopols der aktiven Belegung (analytisch oder messtechnisch bestimmt aus der flächennormalen Schwingschnelleamplitude $\hat{v}_{n,i}$ und dem Teilflächeninhalt ΔS_i mit $\hat{q}_i = \hat{v}_{n,i} \Delta S_i$)

- φ_{ij} - Phasendifferenz des Schallflusses zwischen Monopol i und j, d.h.
 $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$
- d_{ij} - kürzester Abstand entlang der Oberfläche zwischen Monopol i und j

Für den Wechselwirkungsabstand d_{ij} kann anstelle des kürzesten oberflächengeführten Abstands auch der direkte Abstand (durch den Körper hindurch) gewählt werden. Die Untersuchungen von Gerlach [13] ergaben aber, dass der oberflächengeführte Abstand die genaueren Ergebnisse liefert, wie das folgende Rechenbeispiel des Kugelstrahler 0. Ordnung zeigt.

2.3.4 Schalleistungsberechnung mit der 3D-DFEM am Beispiel des Kugelstrahlers 0-ter Ordnung

Für die Überprüfung der 3D-DFEM-Berechnungsvorschrift eignet sich insbesondere der kugelförmige Strahler, da sowohl für die Modifikation der Monopolschalleistung als auch für die Gesamtschalleistung exakte Lösungen zur Verfügung stehen.

Die Kugel wird gleichmäßig diskretisiert. Dazu werden N_g Monopolschichten parallel zum Äquator unter dem Winkel

$$\vartheta_j = \pi \frac{j-0.5}{N_g} \quad (j=1, \dots, N_g) \quad (2.25)$$

vom Nordpol aus angeordnet. Die Anzahl der Monopole in Umfangsrichtung ϕ ergibt sich für die j -te Schicht aus

$$N_{\phi(j)} = \text{Rnd} \left[2 N_g \sin(\vartheta_j) \right], \quad (2.26)$$

wobei $\text{Rnd}[\dots]$ die Rundung auf die nächste ganze Zahl bedeutet. Die Winkeleinteilung in ϕ -Richtung berechnet sich dann zu

$$\phi_{i(j)} = \frac{2 \pi i}{N_{\phi(j)}} \quad (i=1, \dots, N_{\phi(j)}). \quad (2.27)$$

Jedem Diskretisierungspunkt wird der Flächeninhalt

$$\Delta S_{(j)} = \frac{2 \pi r_0^2}{N_{\phi(j)}} \left[\cos \left(\pi \frac{j}{N_g} \right) - \cos \left(\pi \frac{j+1}{N_g} \right) \right] \quad (2.28)$$

zugewiesen. Im vorliegenden Fall sind die aktive und die passive Monopolbelegung identisch. Für den mit der Schwingschnelleamplitude \hat{v} schwingenden Kugelstrahler 0. Ordnung sind die Schallflussamplituden durch $\hat{q}_1 = \hat{v} \Delta S_1$ und die Phasen mit $\varphi_1 = 0$ gegeben ($l=1, \dots, N_{\text{ges}}$). Die DFEM-Berechnung wird für den Frequenzbereich $kr_0 = 1 \dots 10$ mit $N_g = 12$ Monopolschichten durchgeführt, wodurch sich insgesamt $N_{\text{ges}} = 184$ Monopole für die Belegungen ergeben.

Die exakte Schalleistungsmodifikation eines Monopols auf einer starren Kugel ist in Anhang A.3 angegeben. Bild 2.9 zeigt die Abweichung der DFEM-Modifikation von dieser exakten Lösung. Die maximale Abweichung bei einer Teildiskretisierung der Oberfläche (im „Sichtbereich“) beträgt etwa 0.9 dB. Sie kann durch Erhöhung der

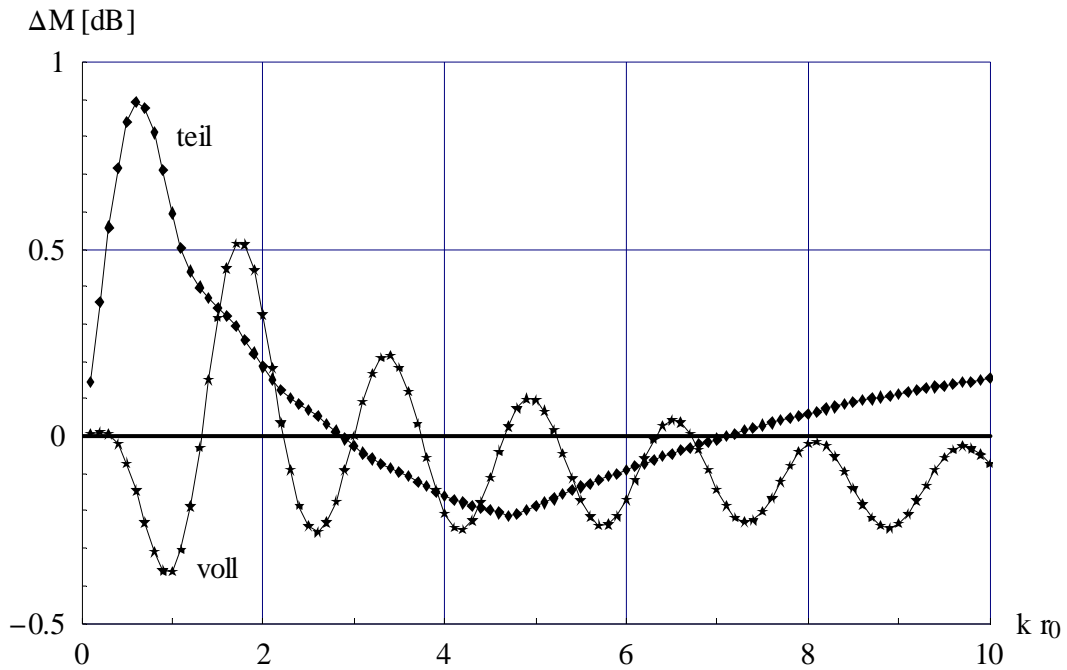


Bild 2.9: Abweichung der Schallleistungsmodifikation von der exakten Lösung für einen Monopol auf einer starren Kugel mit Teildiskretisierung (Gegenbelegungsmonopole nur im „Sichtbereich“) und Volldiskretisierung (gesamte Kugel).

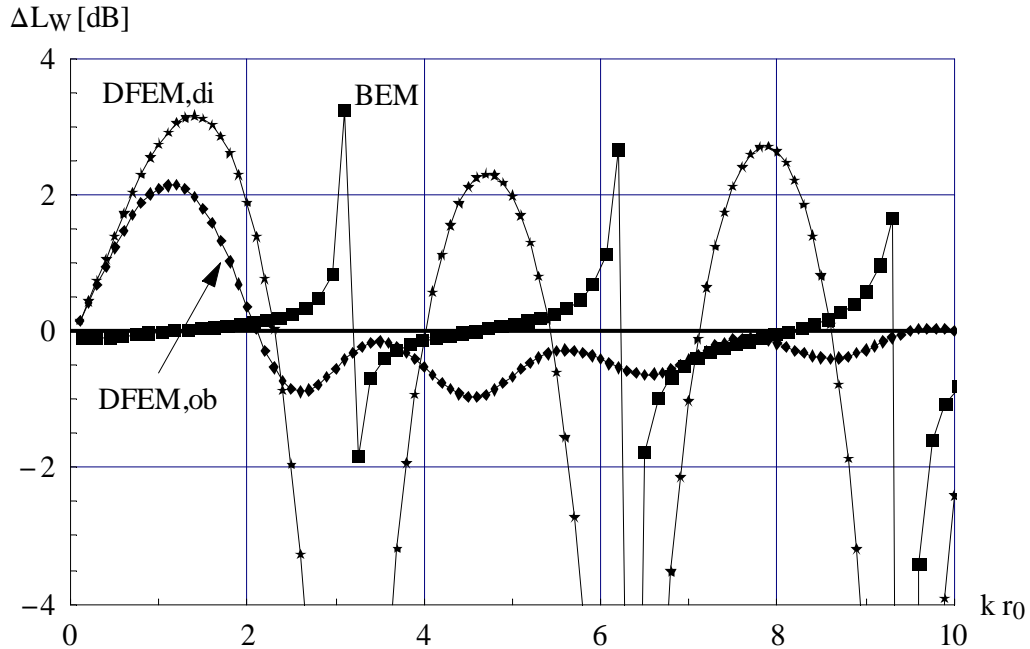


Bild 2.10: Abweichungen der berechneten Schallleistungen von der exakten Lösung für einen Kugelstrahler 0. Ordnung. (—◆— DFEM mit oberflächengeführtem Wechselwirkungsabstand, ...★... DFEM mit direktem Wechselwirkungsabstand, ---■--- BEM ohne Singularitätsvermeidung).

Diskretisierungsdichte nur geringfügig gemindert werden. Dies liegt daran, weil die DFEM-Modifikationsberechnung nur eine Näherung ist, bei der die Randbedingungen nicht alle gleichzeitig erfüllt werden, so dass geringe systematische Abweichungen enthalten bleiben. Eine Volldiskretisierung der Oberfläche ergibt nur für tiefe Frequenzen eine höhere Genauigkeit, erhöht aber gleichzeitig auch den Rechenaufwand.

Die Abweichung der berechneten Gesamtschalleistung von der exakten Lösung nach Anhang A.2, Gleichung (A.5) ist in Bild 2.10 dargestellt. Die DFEM-Schalleistung wurde einmal unter Verwendung der direkten und einmal unter Verwendung der kürzesten oberflächengeführten Abstände berechnet. Die üblicherweise in der DFEM benutzten oberflächengeführten Abstände (ob) ergeben für $k r_0 < 2$ eine maximale Abweichung von 2.1 dB, die sich nur etwa zu einem Drittel aus der Abweichung der Modifikationsberechnung zusammensetzt. Dass die maximale Abweichung im tieffrequenten Bereich auftritt, ist typisch für die DFEM. Berücksichtigt man, dass aufgrund der in ISO 3745, 3744, 3746 und 9614 [31]-[35] zur Beurteilung der Maschinengeräusch-Emission festgelegten A-bewerteten Schalleistung erst Frequenzen ab einigen 100 Hz interessieren, so sind auch unter Ingenieurgesichtspunkten zumindest für kleine Maschinen wie mit einem Durchmesser von weniger als 0.5 m noch Verbesserungen der DFEM-Genauigkeit wünschenswert. Auch die physikalischen Ursachen für die Abweichungen im tieffrequenten Bereich sind noch zu klären.

Verglichen mit den oberflächengeführten Abständen führt die Verwendung der direkten Abstände (d_i) zu größeren Abweichungen. Insbesondere für die Frequenzen $k r_0 \approx \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ treten sehr große Abweichungen von deutlich mehr als 10 dB auf. Ein Vergleich mit einem einfachen Randelement-Kollokationsverfahren ohne Singularitätsvermeidung zeigt, dass diese Frequenzen mit denen der BEM-Singularitäten zusammenfallen und dass die Abweichungen bei der DFEM-Kurve deutlich ausgeprägter sind. Dies ist erstaunlich, da bei der DFEM kein Gleichungssystem gelöst werden muss, so dass keine Singularitäten auftreten können. Der Zusammenhang mit den BEM-Singularitäten könnte aber die Möglichkeit eröffnen, analog zu den Singularitätsvermeidungsmethoden bei den Randelementen (Schenck [22], Burton-Miller [23]) ein Korrekturverfahren für die DFEM zu entwickeln, mit dem die Abweichungen bei der Benutzung der direkten Abstände deutlich geringer werden.

Dies ist insbesondere von Interesse, weil die Benutzung der direkten Abstände wesentlich einfacher ist als die der kürzesten oberflächengeführten Abstände.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Wechselwirkungsterme die größten Anteile bei den Abweichungen ausmachen und dass insbesondere die Wahl der schalleistungsrelevanten Wechselwirkungsabstände von großer Bedeutung ist. Diese Problematik ist daher Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 4.

2.4 DFEM-Messverfahren

Das DFEM-Messverfahren unterscheidet sich vom DFEM-Berechnungsverfahren nur dadurch, dass die in Gleichung (2.20) und (2.23) auftretenden Geometrie- und Schwingungsdaten messtechnisch ermittelt werden. Zur Validierung des dreidimensionalen DFEM-Messverfahrens wurde von Gerlach in [13] die Schallleistungsabstrahlung von mehreren maschinenbautypischen Geräten und Anlagen gemessen (Maschinenkapsel, Rohrleitungsabschnitt, Heizkörper, Elektromotor (1 MegaWatt), Druckwasserbehälter). Am Beispiel der Maschinenkapsel-Messung (ausführlich beschrieben in [13], S. 125 ff) soll im folgenden der Ablauf und die Leistungsfähigkeit des DFEM-Messverfahrens kurz erläutert werden.

Der Messablauf wird in Bild 2.11 dargestellt. Nachdem die Oberfläche des Körperschallstrahlers in ein Elementnetz eingeteilt und die Mitten der Elemente als Messpunkte markiert wurden, erfolgt die Messung der Schwingungsdaten mit zwei piezoelektrischen Beschleunigungsaufnehmern. Dabei werden mit Aufnehmer B die flächennormalen Beschleunigungsamplituden $\hat{a}_{n,i}$ für jeden Messpunkt i gemessen.

Die Phase φ_i wird durch Vergleich mit dem Aufnehmer A ermittelt, der sich als Referenzmesspunkt während der gesamten Messung an derselben Position befindet. Zur schmalbandigen Ermittlung der Schwingungsdaten als Funktion der Frequenz wird ein FFT-Analysator eingesetzt (FFT mit 400 Linien, Linienbandbreite $\Delta f = 8$ Hz, obere Grenzfrequenz 3200 Hz), an dessen Ladungseingänge die Beschleunigungsaufnehmer angeschlossen sind. Die Messdaten werden an einen PC weitergegeben, wo die Daten für die DFEM-Rechnung überarbeitet werden. Anschließend wird die DFEM-Schallleistungsberechnung durchgeführt.

Im vorliegenden Fall hat die untersuchte quaderförmige Maschinenkapsel in Bild 2.12 Abmessungen von 800 mm x 580 mm x 500 mm und besteht aus 2 mm dicken Stahlblechen, die auf einen inneren Rahmen aus 40 mm x 40 mm Vierkantrohr aufgeschweißt sind. Im Innern der Maschinenkapsel befindet sich ein Schwingerreger, der über einen Stab Schwingungen in eine der langen Seitenflächen einleitet.

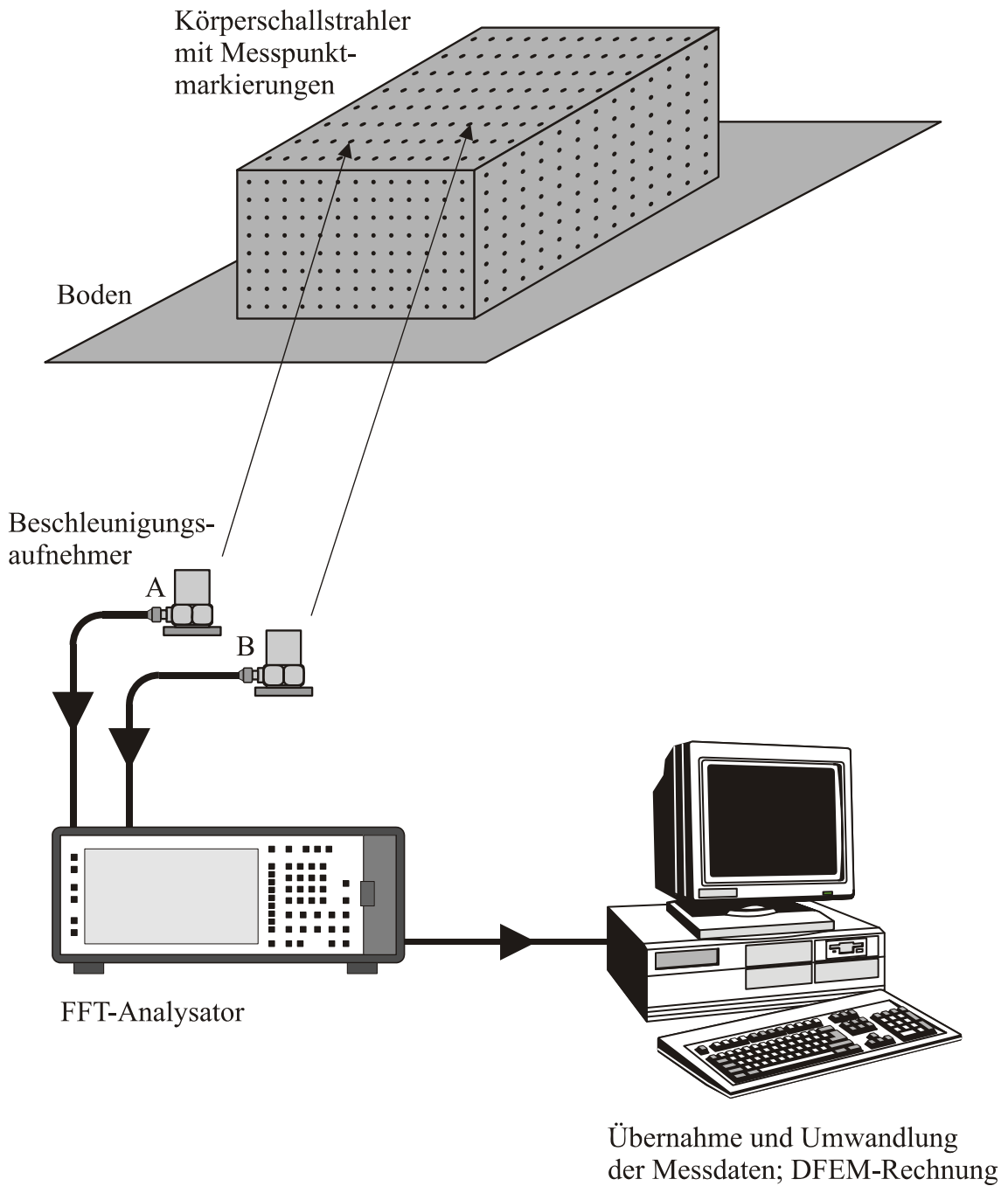


Bild 2.11: Prinzip der Ermittlung der abgestrahlten Schallleistung mit dem DFEM-Messverfahren.



Bild 2.12: Untersuchte Maschinenkapsel mit Scanning-Einrichtung für das Schallintensitäts-Hüllflächenverfahren (Schallintensitätssonde an der Scanning-Einrichtung).

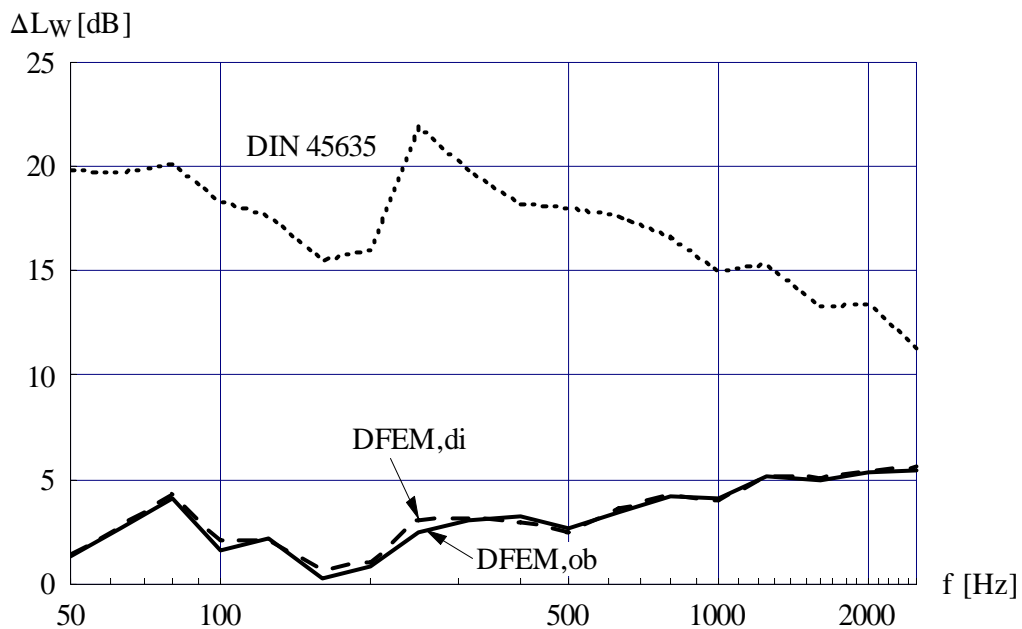


Bild 2.13: Abweichungen der DFEM-Schalleistungen von der mittels Schallintensitäts-Hüllflächenverfahren ermittelten Schalleistung für die mit weißem Rauschen angeregte Maschinenkapsel von Bild 2.12. (di = direkte Wechselwirkungsabstände, ob = kürzeste oberflächengeführte Wechselwirkungsabstände)

Die Oberfläche der Maschinenkapsel wurde in 784 Teilflächen bzw. Diskretisierungspunkte eingeteilt, wobei die Messpunkte im Durchschnitt einen Abstand von 48 mm zueinander haben. Der Fußboden wurde für die Gegenbelegungsberechnung zusätzlich mit 2352 Diskretisierungspunkten im Abstand von etwa 100 mm belegt. Die aktive Monopolbelegung umfasste folglich 784 Monopole, die Gegenbelegung 3136 Monopole. Um die mit der DFEM (in Terzpegeln) ermittelte Schalleistung zu überprüfen, wurde zusätzlich eine Intensitätshüllflächenmessung durchgeführt (maschinengeführte Scanning-Messung auf einer näherungsweise halbkugelförmigen Hüllfläche nach ISO 9614-2 [32]).

Die Abweichung der mit DFEM berechneten Schalleistung von der mit Intensitätsmessung bestimmten Schalleistung bei einer Anregung der Maschinenkapsel mit weißem Rauschen (Frequenzbereich 2...2000 Hz) ist in Bild 2.13 abgebildet. Die Benutzung der direkten und kürzesten oberflächengeführten Wechselwirkungsabstände führt hier bei der DFEM-Berechnung zu fast gleichen Ergebnissen. Verglichen mit dem genormten Körperschallverfahren (ISO/TR 7849 [30]), bei dem auf die Erfassung der Phasendifferenzen verzichtet und der Schallabstrahlgrad $\sigma = 1$ gesetzt wird, weisen die DFEM-Ergebnisse eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit dem Intensitätsverfahren auf. Insbesondere bei tiefen Frequenzen kann man deutlich erkennen, dass die Annahme von $\sigma = 1$ beim genormten Körperschallverfahren nur eine (viel zu hohe) obere Grenze für die abgestrahlte Schalleistung darstellt. Der aus dem Summenspektrum berechnete A-bewertete Summenpegel weicht bei der DFEM nur um 4 dB vom Intensitätsverfahren ab, beim genormten Körperschallverfahren aber 17 dB, was für die Praxis zu ungenau ist.

Um die DFEM-Messgenauigkeit in Abhängigkeit von der Diskretisierungsdichte zu untersuchen, wurden an der Maschinenkapsel zusätzlich Messungen mit unterschiedlichen Diskretisierungsdichten durchgeführt (54, 188 und 784 Messpunkte), wobei der Frequenzbereich der Anregung mit weißem Rauschen erweitert wurde. Die Auswertung erfolgte für Terzfrequenzen von 50 Hz bis 5000 Hz. Bild 2.14 zeigt die Abweichungen der DFEM-berechneten Schalleistungspegel von den als Sollwert benutzten Pegeln der Schallintensitätsmessung. Man kann deutlich erkennen, dass mit der Zunahme der Diskretisierungsdichte die Genauigkeit zu höheren Frequenzen hin erhöht wird, so dass der Messaufwand dem interessierenden Frequenzbereich angepasst werden kann.

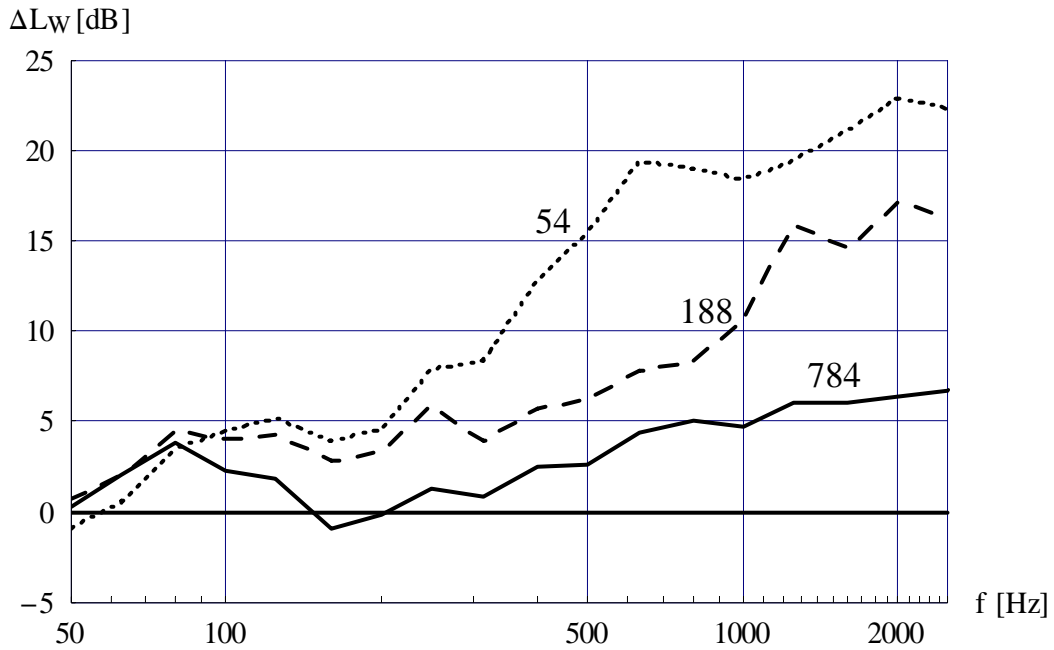


Bild 2.14: Abweichung der DFEM-Schalleistungspegel von den Pegeln des Schallintensitäts-Hüllflächenverfahrens bei der messtechnischen Bestimmung der von der Maschinenkapsel (Bild 2.12) bei Anregung mit weißem Rauschen abgestrahlten Schalleistung bei verschiedenen Diskretisierungsdichten (54, 188 und 784 Messpunkte).

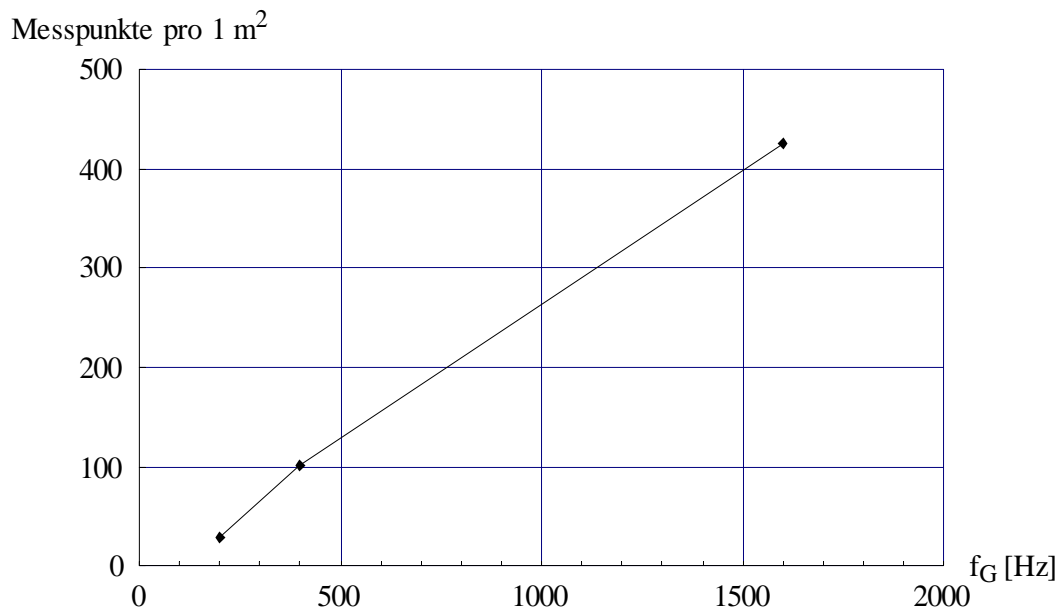


Bild 2.15: Anzahl der erforderlichen Messpunkte pro 1 m² schallabstrahlender Oberfläche für eine obere Frequenzgrenze f_G des Anwendungsbereiches der DFEM bei einer maximal zulässigen Abweichung von 6 dB.

Lässt man eine maximale Abweichung von 6 dB zu, so ergibt sich aus Bild 2.14 die in Bild 2.15 dargestellte Kurve für die Grenzfrequenz, bis zu welcher mit einer bestimmten Diskretisierungsdichte gemessen werden darf. Insbesondere im Bereich tiefer Frequenzen, in dem das genormte Körperschallverfahren weitestgehend versagt, erhält man mit einer verhältnismäßig geringen Anzahl von Messpunkten eine akzeptable Messunsicherheit.

3 Berechnung der Schalleistungsmodifikation eines Monopols mittels Kreissegment-Integration (KSI)

3.1 Vorüberlegungen

Die in Kapitel 2.4 beschriebene messtechnische Bestimmung der abgestrahlten Luftschalleistung einer mit Rauschen angeregten Maschinenkapsel erfordert für die zu berechnenden 347 Frequenzlinien auf einem 1.4 GHz-PC eine Berechnungszeit von mehr als 5 Stunden. Davon entfällt der größte Anteil der Rechenzeit auf den ersten Schritt der 3D-DFEM-Berechnung, also auf die Berechnung der Schalleistungsmodifikation M , die den Einfluss der starren Umgebung auf die Schalleistungsabstrahlung der aktiven (Primär-)Monopole berücksichtigt. Bild 3.1 zeigt, dass im vorliegenden Fall die Berechnung des ersten DFEM-Schrittes bei einer Frequenz von 50 Hz etwa 20mal länger dauert als der zweite Schritt, bei 2000 Hz aber bereits etwa 300mal länger. Dieser Anstieg wird dadurch bedingt, dass bei der Modifikationsberechnung eine frequenz- bzw. abstandsabhängige Subdiskretisierung der Gegenbelegungselemente erfolgen muss (vgl. S. 33).

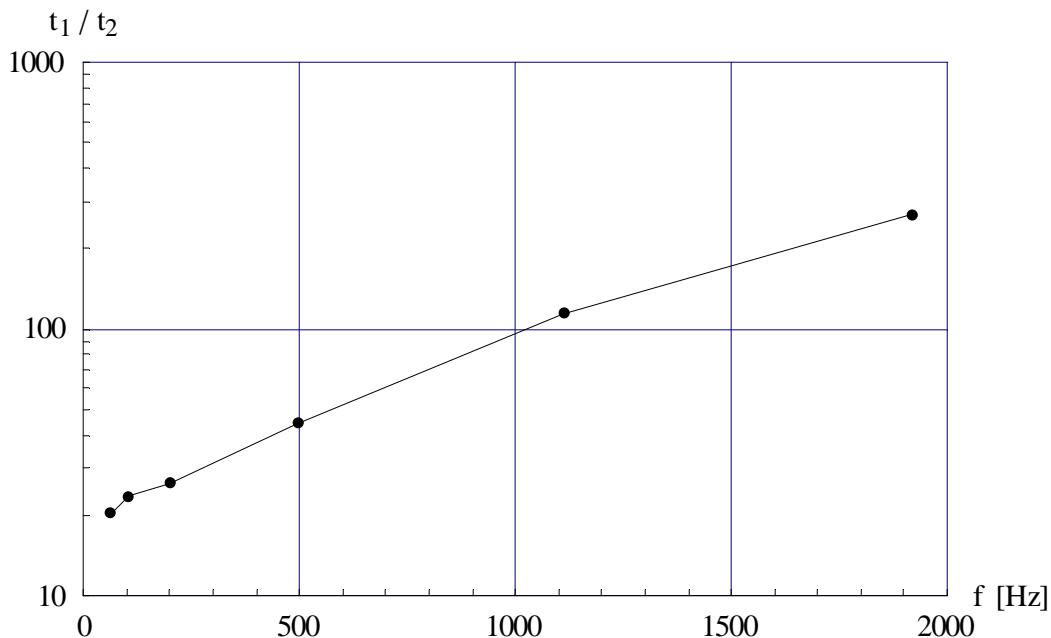


Bild 3.1: Verhältnis der Berechnungszeiten von Modifikationsberechnung t_1 und Schalleistungsberechnung t_2 für die messtechnische Bestimmung der abgestrahlten Luftschalleistung von einer Maschinenkapsel mit Rauschanregung (s. S. 44).

Ein erster Ansatz zur Reduzierung der Rechenzeit besteht darin, die Subdiskretisierung durch eine Integration zu ersetzen. Wie sich nachfolgend zeigen wird, kann im vorliegenden Fall sogar eine analytische Integration durchgeführt werden, wenn ein Integrationsgebiet gewählt wird, das an das radialsymmetrische Abstrahlverhalten der zu modifizierenden Monopole angepasst ist.

Nach Gleichung (2.21) wird die Rückwirkung von N_G Gegenbelegungselementen der starren Umgebung auf einen zu modifizierenden Monopol A durch die Schalleistungsmodifikation

$$M_{0,A} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_G} K_j} \quad (3.1)$$

beschrieben, wobei der Beitrag des j-ten Gegenbelegungselementes durch die Abkürzung

$$K_j = \frac{1}{d_{Aj}^2} \sqrt{1 + \frac{1}{(k d_{Aj})^2}} \sin \left(2k d_{Aj} + \arctan \left(\frac{1}{k d_{Aj}} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \frac{(\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n}_j}{|\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_A|} \Delta S_j \quad (3.2)$$

gegeben ist. Zunächst kann Gleichung (3.2) vereinfacht und umgeformt werden. Die in Bild 3.2 erläuterten Größen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n}_j &= -z_A \\ |\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_A| &= d_{Aj} = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_A^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\sin \left(2k d_{Aj} + \arctan \left(\frac{1}{k d_{Aj}} \right) - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{k^3 d_{Aj}^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{(k d_{Aj})^2}}} \left(\frac{\sin(2k d_{Aj})}{(k d_{Aj})^4} - \frac{\cos(2k d_{Aj})}{(k d_{Aj})^3} \right)$$

Damit erhält man die deutlich einfachere Form

$$K_j = -z_A k^3 \left(\frac{\sin(2k d_{Aj})}{(k d_{Aj})^4} - \frac{\cos(2k d_{Aj})}{(k d_{Aj})^3} \right) \Delta S_j, \quad (3.4)$$

so dass im Falle einer Subdiskretisierung alle Subelemente den Beitrag

$$K_j = -z_A k^3 \sum_{i_x=1}^{i_{x,\max}} \sum_{i_y=1}^{i_{y,\max}} \left(\frac{\sin(2k d_{A,i_x i_y})}{(k d_{A,i_x i_y})^4} - \frac{\cos(2k d_{A,i_x i_y})}{(k d_{A,i_x i_y})^3} \right) \Delta S_{i_x i_y} \quad (3.5)$$

liefern.

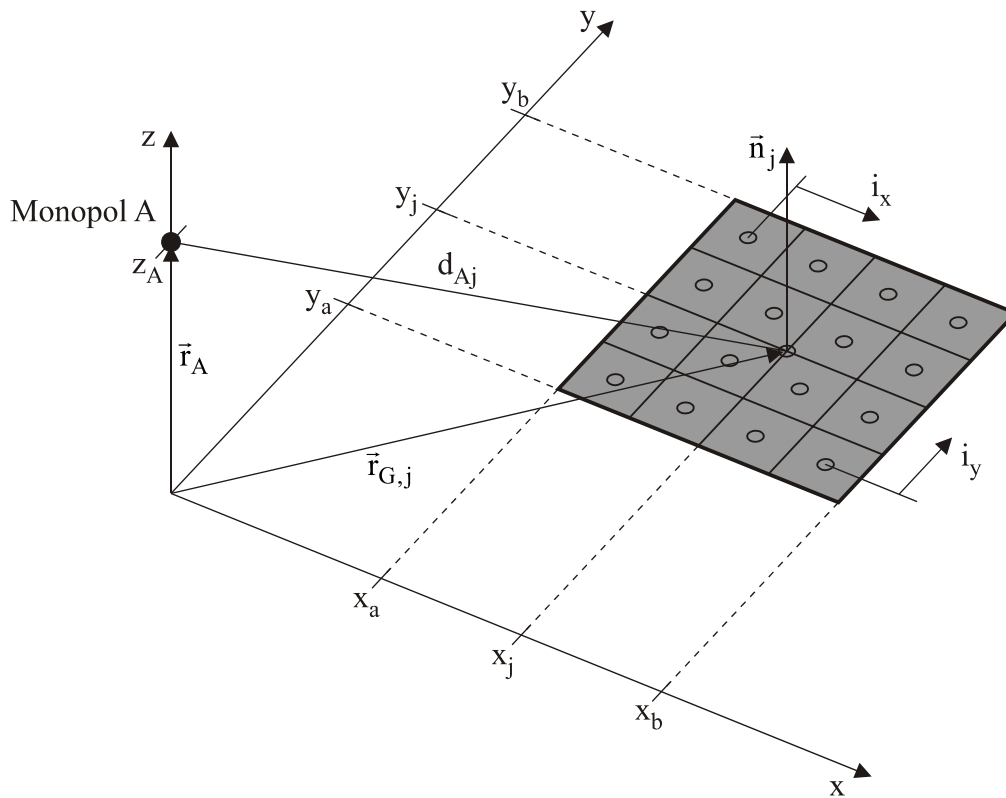


Bild 3.2: Skizze zur Rückwirkung eines mit 4×4 Monopolen subdiskretisierten quadratischen Elements j der Gegenbelegung auf den Monopol A

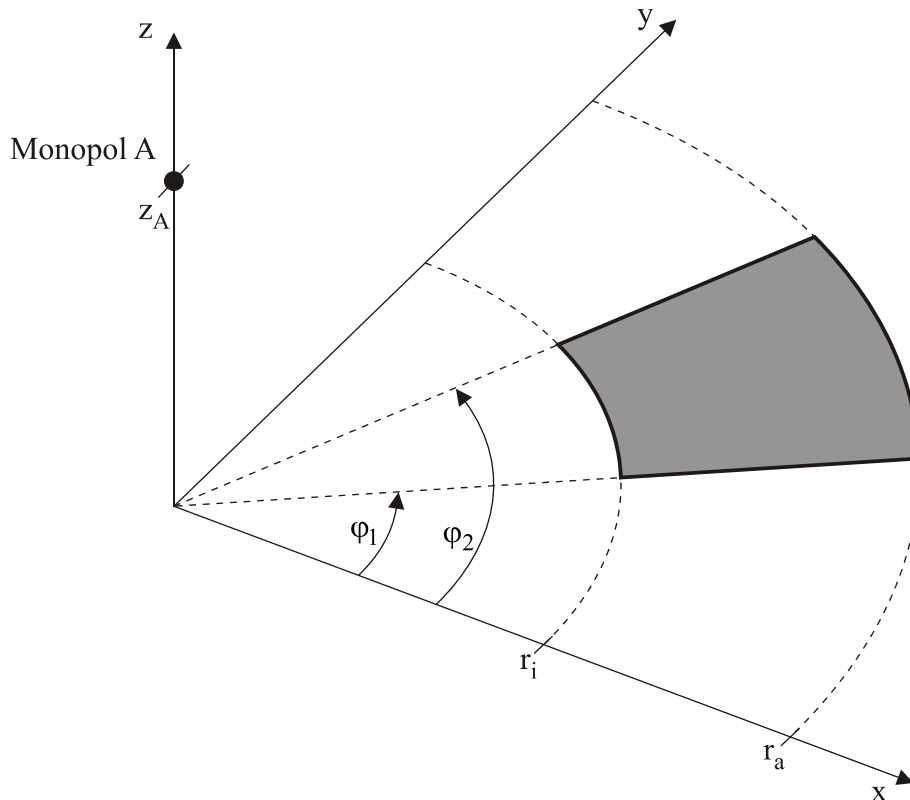


Bild 3.3: Skizze zur Rückwirkung eines Kreisringteil-Elements der Gegenbelegung auf den Monopol A

Ersetzt man nun in Gleichung (3.5) die Summen durch Integrale, so ergibt sich in kartesischen Koordinaten

$$K_j = -z_A k^3 \int_{x=x_a}^{x_b} \int_{y=y_a}^{y_b} \left(\frac{\sin(2 k d)}{(k d)^4} - \frac{\cos(2 k d)}{(k d)^3} \right) dx dy, \quad (3.6)$$

wobei der Abstand d vom Monopol A zu einem infinitesimalen Oberflächenelement $dS = dx \cdot dy$ durch

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z_A^2} \quad (3.7)$$

gegeben ist. Bei näherer Betrachtung des Integranden in Gleichung (3.6) zeigt sich, dass bei einer Integrationsfläche in Form eines Kreisringteils (Bild 3.3) eine einfache Stammfunktion für das Integral existiert. Sie kann leicht unter Benutzung von Zylinderkoordinaten bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i}^{r_a} \left(\frac{\sin\left(2 k \sqrt{r^2 + z_A^2}\right)}{\left(k \sqrt{r^2 + z_A^2}\right)^4} - \frac{\cos\left(2 k \sqrt{r^2 + z_A^2}\right)}{\left(k \sqrt{r^2 + z_A^2}\right)^3} \right) r dr d\varphi = \\ & = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{-2k^4} \cdot \frac{\sin\left(2 k \sqrt{r^2 + z_A^2}\right)}{r^2 + z_A^2} \Bigg|_{r=r_i}^{r_a} = \quad (3.8) \\ & = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{-2k^4} \cdot \left(\frac{\sin\left(2 k \sqrt{r_a^2 + z_A^2}\right)}{r_a^2 + z_A^2} - \frac{\sin\left(2 k \sqrt{r_i^2 + z_A^2}\right)}{r_i^2 + z_A^2} \right) \end{aligned}$$

Die einfache Form der Stammfunktion in Gleichung (3.8) legt nahe, ein Element der Gegenbelegung nicht, wie bisher bei der Gegenbelegungsrechnung üblich, durch ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu ersetzen und die Berechnung mit einer zeitaufwändigen Monopol-Subdiskretisierung durchzuführen. Vielmehr kann bei einem Ersatz eines Gegenbelegungselementes durch ein Kreisringteil mit gleichem Flächeninhalt eine einfache Stammfunktion verwendet werden, bei der gewissermaßen eine unendlich feine Diskretisierungsdichte vorhanden ist. Es ist allerdings zu beachten, dass dieses Kreisringteil das ursprüngliche Gegenbelegungselement „schalltechnisch gut genug“ abdeckt. Dies wird in den folgenden Abschnitten näher untersucht.

3.2 Ersatz einzelner Gegenbelegungselemente durch Kreisringteil-Segmente

3.2.1 Herleitung

Die in Kapitel 3.1 durchgeführten Vorüberlegungen zeigten, dass bei der Berechnung der Schalleistungsmodifikation auf eine zeitaufwändige Subdiskretisierung verzichtet werden kann, wenn die Gegenbelegungselemente durch Kreisringteile und nicht, wie bisher bei der 3D-DFEM üblich, durch quadratische Elemente ersetzt werden. Um diese neuen Elemente von den gewöhnlich benutzten Elementen deutlich zu unterscheiden, werden die Kreisringteil-Elemente im folgenden kurz als „Kreis-Segmente“ bezeichnet und ihre Anwendung bei der Gegenbelegungsberechnung als Kreissegment-Integration (KSI).

Zur Berechnung der Schalleistungsmodifikation eines Monopols mit der KSI ist es notwendig, zunächst die Abmessungen der jeweiligen Kreissegmente zu bestimmen, d.h. Innenradius r_i , Außenradius r_a und Öffnungswinkel $\Delta\varphi$. Für eine sinnvolle Berechnungsvorschrift hat es sich gezeigt, dass zwei Fälle unterschieden werden sollten:

1. Liegt der Lotfußpunkt A_{LF} des zu modifizierenden Monopols A außerhalb des zu ersetzenden Gegenbelegungselements (Bild 3.4), so können die Abmessungen bestimmt werden, indem sowohl der Flächeninhalt ΔS als auch der Mittelpunkt $(x_m, y_m, 0)$ von Gegenbelegungselement und Kreissegment identisch gewählt werden. Desweiteren wird der Kreissegment-Durchmesser in radialer und in Umfangsrichtung gleichgesetzt, d.h. $d_r = d_\varphi$. Damit erhält man die Abmessungen des Kreissegments mit der Abkürzung

$$r_m = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \text{ zu}$$

$$\begin{aligned} r_i &= r_m - 0.5\sqrt{\Delta S} \\ r_a &= r_m + 0.5\sqrt{\Delta S} \\ \Delta\varphi &= \frac{\sqrt{\Delta S}}{r_m} \end{aligned} \quad (3.9)$$

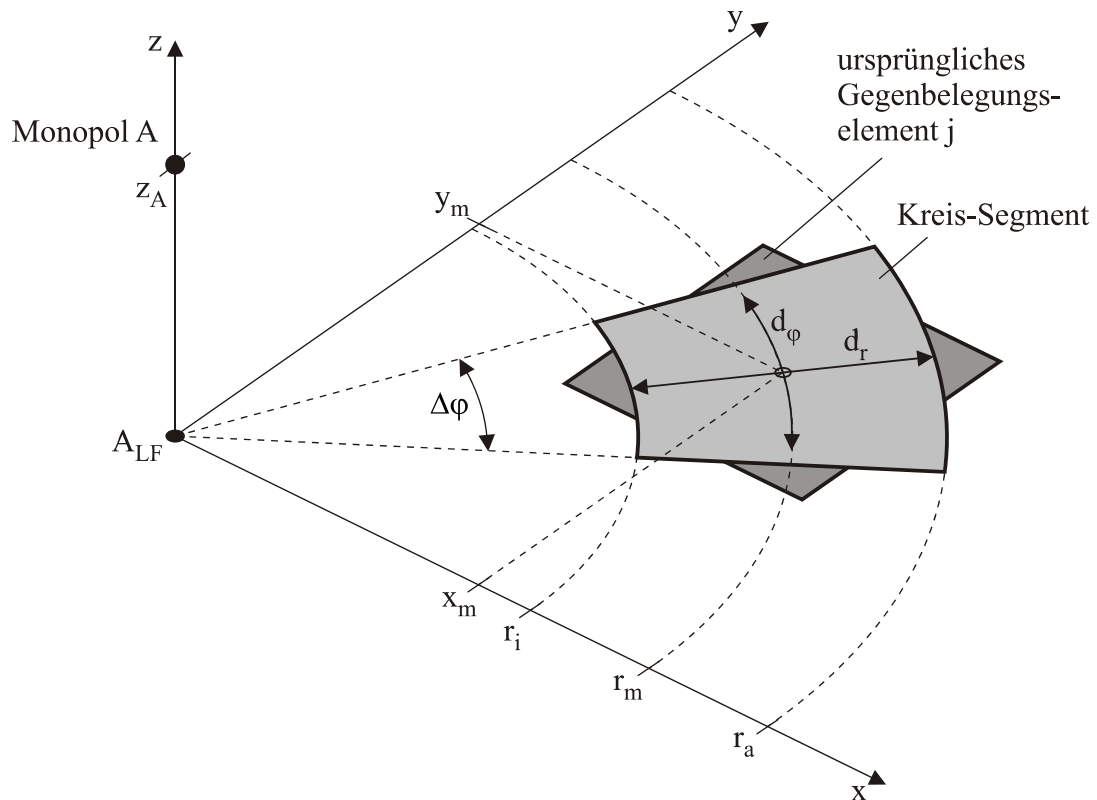


Bild 3.4: Bestimmung der Kreissegment-Abmessungen bei einem Lotfußpunkt A_{LF} außerhalb des zu ersetzenden Gegenbelegungselementes j .

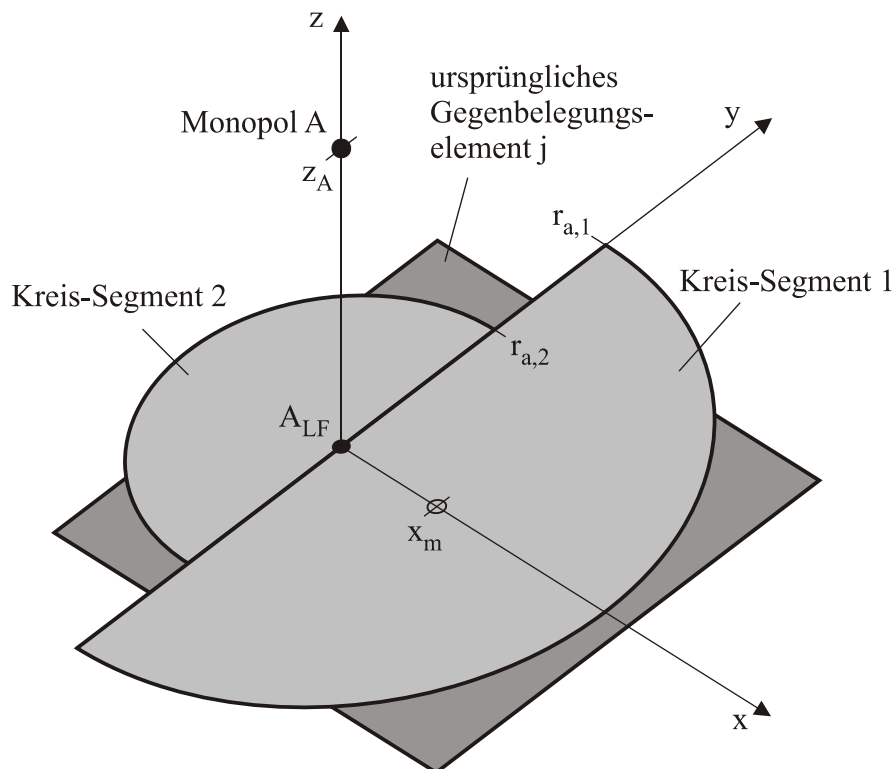


Bild 3.5: Bestimmung der Kreissegment-Abmessungen bei einem Lotfußpunkt A_{LF} auf dem zu ersetzenden Gegenbelegungselement j .

2. Liegt der Lotfußpunkt A_{LF} des zu modifizierenden Monopols A auf dem zu ersetzenden Gegenbelegungselement (Bild 3.5), so können die Abmessungen bestimmt werden, indem zwei halbkreisförmige Kreissegmente zur Abdeckung benutzt werden. Die Flächeninhalte ΔS_1 und ΔS_2 ergeben sich aus der Lage des Lotfußpunktes verglichen mit dem Elementmittelpunkt, wobei davon ausgegangen wird, dass das zu ersetzende Gegenbelegungselement wie bei der herkömmlichen 3D-DFEM zuerst durch ein Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{\Delta S}$ ersetzt wird und anschließend das Quadrat durch die beiden Kreissegmente mit

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \sqrt{\Delta S} \left(0.5\sqrt{\Delta S} + r_m \right) \\ \Delta S_2 &= \sqrt{\Delta S} \left(0.5\sqrt{\Delta S} - r_m \right)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Dadurch können die Kreissegment-Abmessungen in der Form

$$\begin{aligned}r_{i,1} &= r_{i,2} = 0 \\ r_{a,1} &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \Delta S_1} \\ r_{a,2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \Delta S_2} \\ \Delta\varphi_1 &= \Delta\varphi_2 = \pi\end{aligned}\quad (3.11)$$

dargestellt werden.

Wird die obige Berechnungsvorschrift auf alle Gegenbelegungselemente einer zu modellierenden starren Oberfläche angewendet, so erhält man die Abmessungen von N_{KS} Kreissegmenten, mit denen die Gegenbelegungsrechnung der 3D-DFEM für einen Monopol A analog zu Gleichung (3.1) erfolgen kann mit

$$M_{0,A} = \frac{1}{1 + \frac{k}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_{KS}} z_j \Delta\varphi_j \left(\frac{\sin(2k d_{a,j})}{(2k d_{a,j})^2} - \frac{\sin(2k d_{i,j})}{(2k d_{i,j})^2} \right)}\quad (3.12)$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned}z_j &= -(\vec{r}_{G,j} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n}_j \\ d_{i,j} &= \sqrt{r_{i,j}^2 + z_{A,j}^2} \\ d_{a,j} &= \sqrt{r_{a,j}^2 + z_{A,j}^2}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Wie Gleichung (3.12) zeigt, ist die Berechnungsvorschrift verglichen mit Gleichung (3.1) deutlich einfacher geworden, und sie benötigt keine frequenzabhängige Subdiskretisierung. Die Berechnung für ein Gegenbelegungselement erfolgt fast so schnell wie bei der alten Berechnungsvorschrift ohne Subdiskretisierung. In den folgenden Abschnitten wird die Anwendbarkeit von Gleichung (3.12) überprüft.

3.2.2 Anwendung der KSI an analytischen Beispielen

3.2.2.1 Monopol über einer quadratischen Platte

In diesem Abschnitt soll am Beispiel einer quadratischen Platte die Diskretisierungsmethode mit Kreissegmenten betrachtet und mit den Ergebnissen der Standard-Berechnungsmethode verglichen werden. Um die Leistungsfähigkeit der Kreissegment-Integration besser vergleichen zu können, wird bei der Standard-Methode auf eine Subdiskretisierung verzichtet.

Bild 3.6 zeigt einen Monopol A zentral über einer quadratischen Platte angeordnet. Die Platte wird beispielhaft mit einer Diskretisierung von 5×5 Gegenbelegungsmonopolen bzw. Kreissegmenten dargestellt. Für die Berechnung der Schalleistungsmodifikation $M_{0,A}$ wird eine Diskretisierung von 15×15 Monopolen bzw. Kreissegmenten festgelegt.

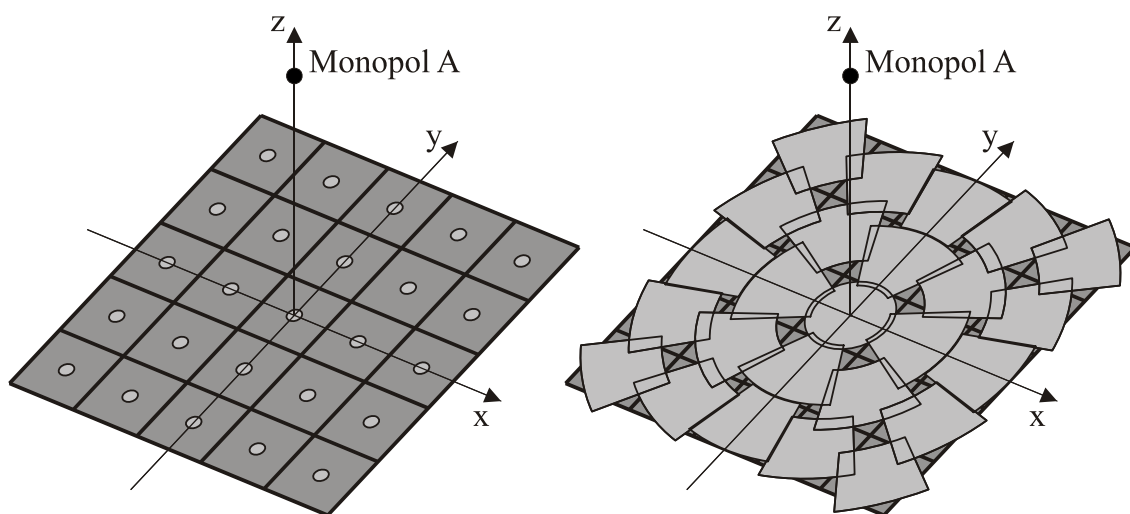


Bild 3.6: Diskretisierung einer quadratischen Platte bei einem zentral über der Platte angeordneten Monopol A. Links: mit 5×5 Monopolen (Standard-DFEM), rechts: mit 5×5 Kreissegmenten (KSI).

Die Höhe des zu modifizierenden Monopols wird entsprechend der 3D-DFEM-Berechnungsvorschrift für die aktiven (Primär-)Monopole abhängig von der Wellenzahl k mit $z_A = 0.2/k$ gewählt.

In Bild 3.7 werden die Ergebnisse von drei verschiedenen Monopol-Positionen betrachtet: Monopol zentral über der Platte, über einem Kantenelement und über einem Eckenelement. Die mit der Raute gekennzeichneten Kurven sind diejenigen M_A , die sich durch eine Integration über die Quadratfläche ergeben, d.h. die man bei einer unendlich feinen Diskretisierungsdichte erhalten würde. Die Pfeilmarkierungen kennzeichnen diejenige Frequenz, bei der eine Diskretisierungsdichte von 8 Elementen pro Luftschallwellenlänge λ_L vorliegt. Nach der in der Akustik üblichen Faustregel ist bis zu dieser Frequenz noch mit einer guten Genauigkeit zu rechnen.

Die mit der Standard-Methode bestimmten $M_{0,A}$ zeigen für tiefe Frequenzen eine sehr gute Übereinstimmung mit der Integral-Lösung, weichen aber bereits deutlich vor der Pfeilmarkierung immer mehr davon ab, da keine Subdiskretisierung durchgeführt wurde. Die KSI zeigt über den gesamten Frequenzbereich eine sehr gute Übereinstimmung, – auch weit über die Pfeilmarkierung hinaus. Die Rechenzeit für die KSI ist nur geringfügig größer als die der Standard-Methode ohne Subdiskretisierung.

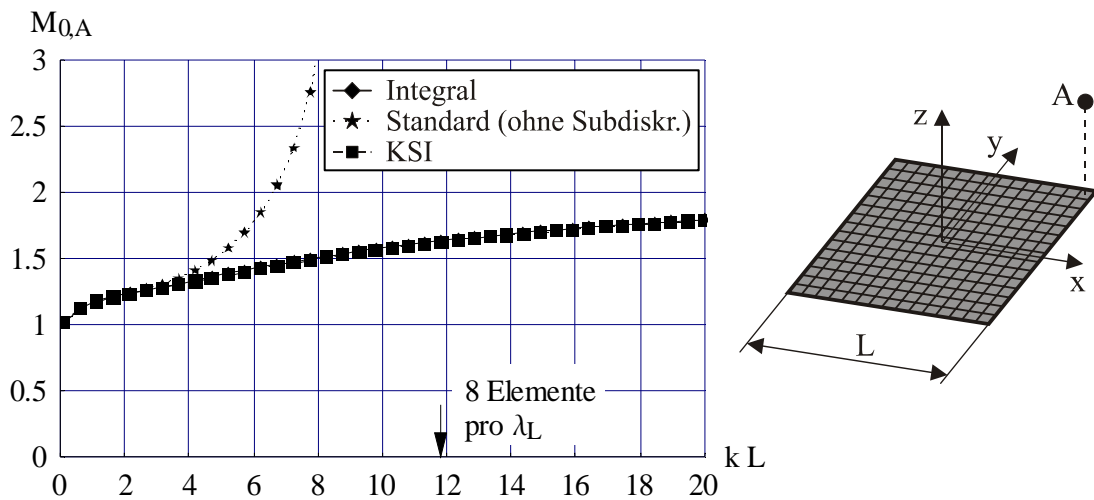
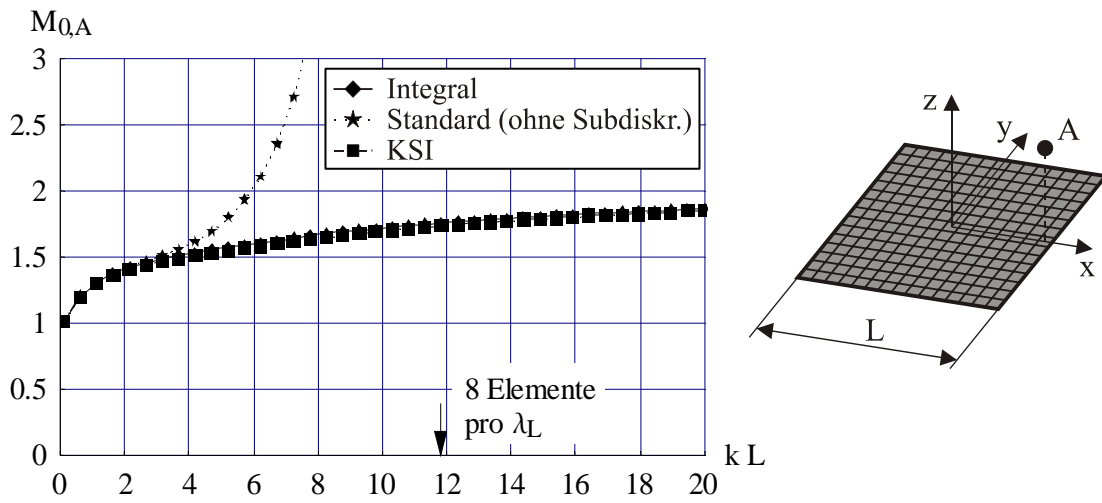
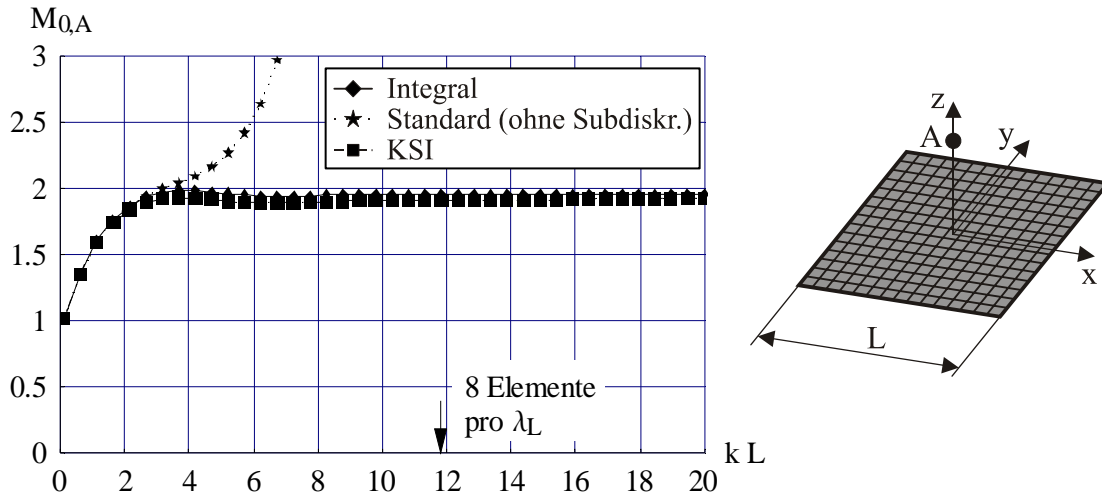


Bild 3.7: Schallleistungsmodifikation $M_{0,A}$ eines Monopols A im Abstand $z_A = 0.2/k$ über einer quadratischen Platte. Oben: Monopol zentral angeordnet, Mitte: über einem Kantenelement, unten: über einem Eckenelement.

3.2.2.2 Monopol im Nordpol einer starren Kugel

Die im vorherigen Abschnitt untersuchte Geometrie war von ebener Form, d.h. alle Gegenbelegungsmonopole bzw. Kreissegmente waren in einer Ebene angeordnet. Es soll nun der Fall einer räumlichen Anordnung betrachtet werden. Hierzu eignet sich der Fall eines Monopols im Nordpol einer starren Kugel, da hier eine analytische Lösung verfügbar ist (Anhang A.3).

Die Kugel mit Radius $r_0=1$ wird nach Bild 3.8 gleichmäßig mit Gegenbelegungsmonopolen bzw. Kreissegmenten diskretisiert. Die Anzahl der Gegenbelegungselement-Schichten wird für die Untersuchung mit $N_g = 12$ festgelegt. Dadurch ergibt sich eine Gesamtanzahl von 156 Gegenbelegungselementen. Entsprechend der 3D-DFEM-Berechnungsvorschrift wird der Monopol A im Nordpol um $z_A = 0.2/k$ aus dem zugehörigen Oberflächenelement herausgerückt. Bei der Standard-Berechnungsvorschrift wird keine Subdiskretisierung durchgeführt.

Bild 3.9 zeigt, dass die Standardmethode erst ab einer Diskretisierungsdichte von etwa 8 Elementen pro Luftschallwellenlänge ($k r_0 = \pi$) immer mehr von der exakten Lösung abweicht. Dies kann trotz des leichten Überschwingens bei $k r_0 \approx 2$ als gutes Ergebnis angesehen werden.

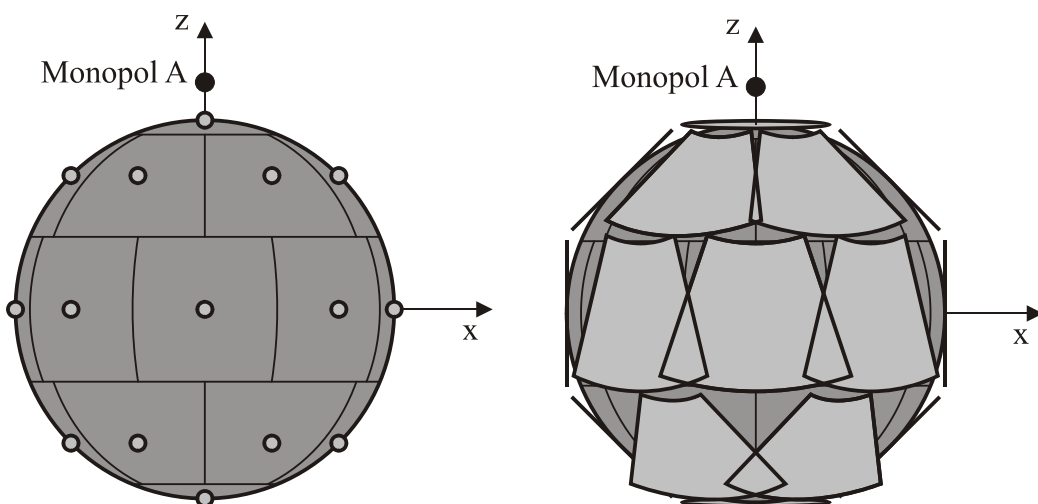


Bild 3.8: Diskretisierung einer starren Kugel mit $N_g = 5$ Element-Schichten. Links: mit Gegenbelegungsmonopolen (Standard-DFEM), rechts: mit Kreissegmenten (KSI).

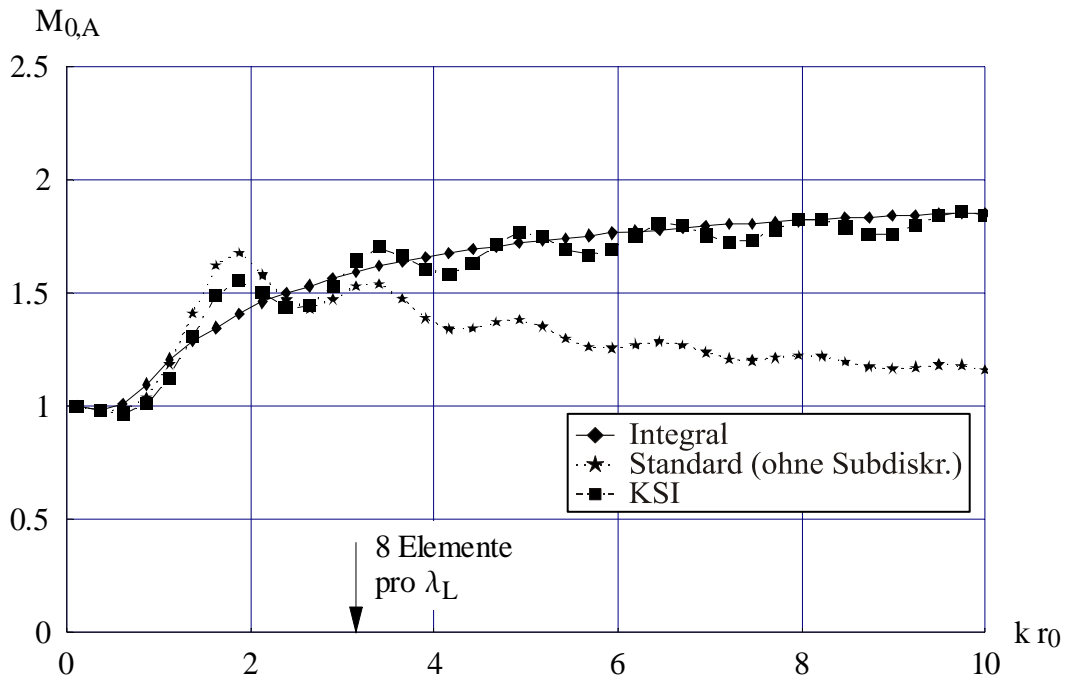


Bild 3.9: Schalleistungsmodifikation $M_{0,A}$ für einen Monopol im Nordpol einer starren Kugel. Diskretisierung mit $N_g = 12$ Element-Schichten bzw. 156 Gegenbelegungselementen.

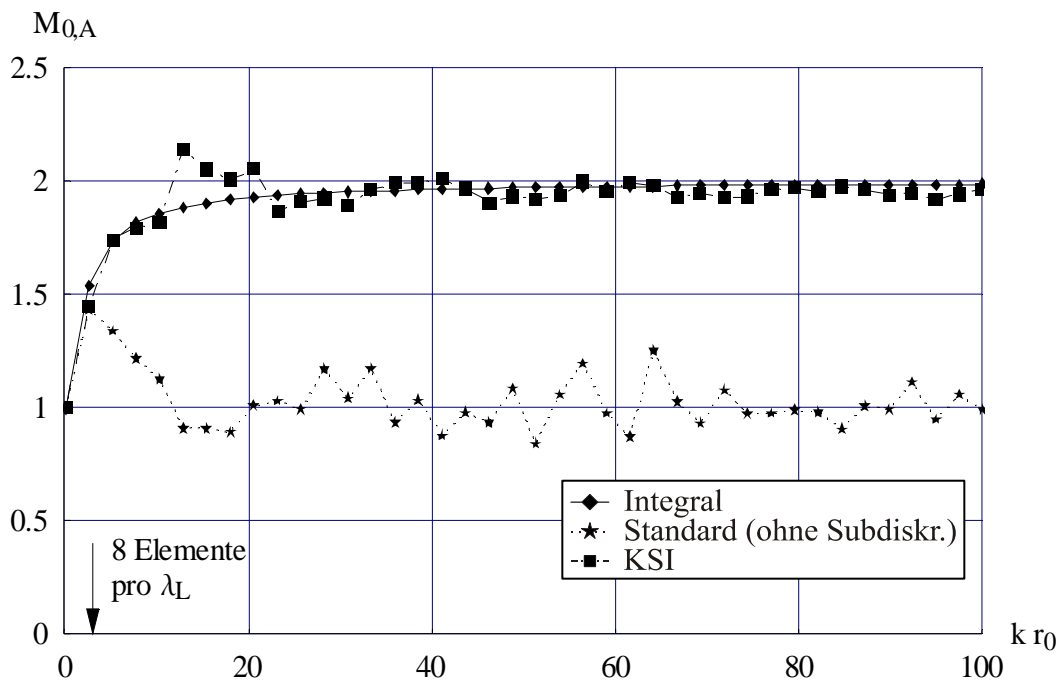


Bild 3.10: wie Bild 3.9, aber erweiterter Frequenzbereich

Die KSI liefert dagegen auch weit oberhalb dieses Bereiches sehr gute Ergebnisse (Bild 3.10). Daraus folgt, dass auch bei einer sehr groben Diskretisierungsdichte gute Ergebnisse erzielbar sind, wenn die Oberfläche gut genug mit Kreissegmenten abgedeckt wird. Mit einer gröberen Diskretisierung würde sich wiederum der Rechenaufwand und damit auch die Berechnungszeit verkürzen.

3.3 Ersatz rechteckförmiger Maschinenoberflächen durch Kreisringteil-Segmente

3.3.1 Herleitung

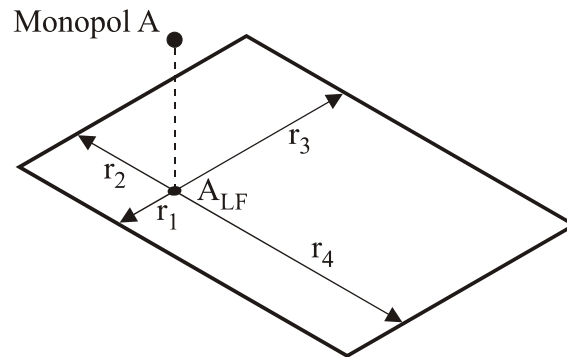
Die in Kapitel 3.2 durchgeführten Untersuchungen zeigten, dass man bei der Gegenbelegungsrechnung mit der Kreissegment-Integration auch bei einer sehr groben Diskretisierungsdichte gute Ergebnisse erzielen kann, bzw. dass man fast frequenzunabhängig diskretisieren kann – vorausgesetzt, die Oberfläche wird mit Kreissegmenten gut genug abgedeckt. Dadurch ist es möglich, auch sehr großflächige ebene Bereiche wie Boden oder starre Wände durch sehr wenige Kreissegmente zu ersetzen. Dies soll in diesem Abschnitt am Beispiel von in der Praxis häufig auftretenden rechteckförmigen Oberflächenbereichen angewendet werden.

Nachfolgend werden zwei Diskretisierungsmethoden betrachtet:

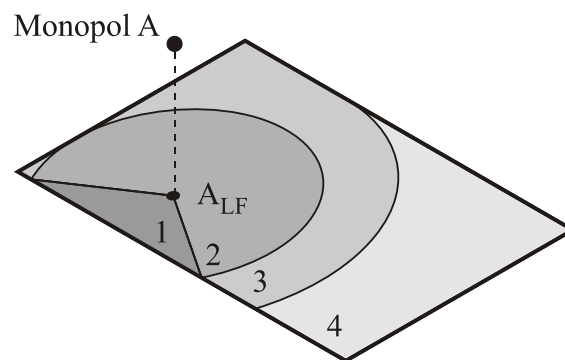
1. Ersatz eines Rechtecks durch nur 1 Kreissegment
2. Ersatz eines Rechtecks durch maximal 4 Kreissegmente

Bei der ersten Methode ergeben sich die Abmessungen des Kreissegments (Innenradius r_i , Außenradius r_a und Öffnungswinkel $\Delta\varphi$) direkt aus den Gleichungen (3.9) bis (3.11). Die Berechnung der Schallleistungsmodifikation M_0 erfolgt dann mit Gleichung (3.12), wobei die Anzahl der Kreissegmente $N_{KS} = 1$ zu setzen ist. Eine deutlich bessere Abdeckung ist bei der zweiten Methode zu erwarten, bei der höchstens 4 Kreissegmente verwendet werden. Dabei ist zur Bestimmung der Kreissegmentdaten zunächst zu unterscheiden, ob der in die Rechteck-Ebene projizierte Lotfußpunkt A_{LF} des zu modifizierenden Monopols direkt auf dem Rechteck liegt (Bereich I), seitlich davon (Bereich II) oder diagonal zum Rechteck (Bereich III). Die Bestimmung der Abmessungen erfolgt dann je nach Bereich wie in den Prinzipskizzen Bild 3.11 bis 3.13 dargestellt in 3 Schritten. Im ersten Schritt werden die Abstände des Lotfußpunktes zu den Kanten bzw. Eckpunkten des Rechtecks bestimmt. Diese Informationen werden dann im zweiten Schritt zur Einteilung der Rechteckoberfläche genutzt, um den zu bestimmenden Kreissegmenten einen Oberflächeninhalt zuzuweisen. Im dritten Schritt erfolgt die Bestimmung der Kreissegmentdaten r_i , r_a und $\Delta\varphi$. Anschließend kann M_0 mit Gleichung (3.12) berechnet werden, wobei die Anzahl der Kreissegmente je nach Bereich $N_{KS} = 3$ bzw. 4 beträgt.

Schritt 1: Bestimmung der Abstände zu den Rechteckseiten



Schritt 2: Zuordnung der Oberflächenbereiche ΔS_{1-4}



Schritt 3: Bestimmung der Abmessungen ($r_i, r_a, \Delta\varphi$)₁₋₄

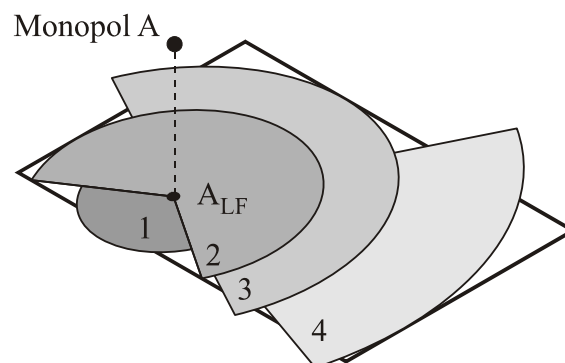
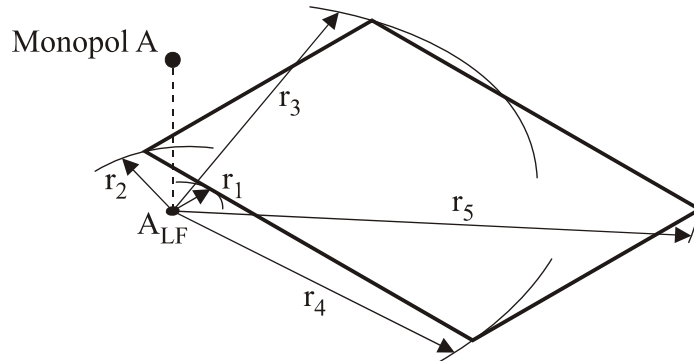
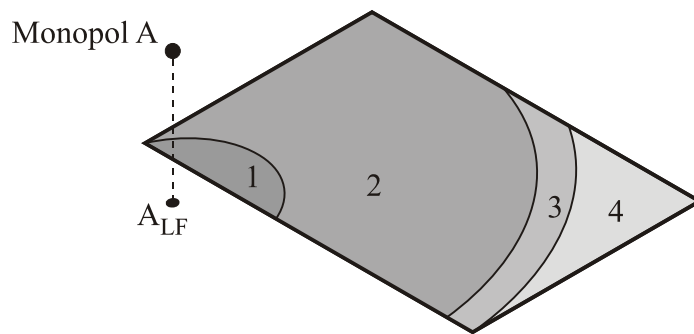


Bild 3.11: Bestimmung der Kreissegmentabmessungen bei einem Lotfußpunkt A_{LF} auf dem Rechteck (Bereich I).

Schritt 1: Bestimmung der Abstände zur nächstgelegenen Rechteckseite und den Ecken



Schritt 2: Zuordnung der Oberflächenbereiche ΔS_{1-4}



Schritt 3: Bestimmung der Abmessungen $(r_i, r_a, \Delta\varphi)_{1-4}$

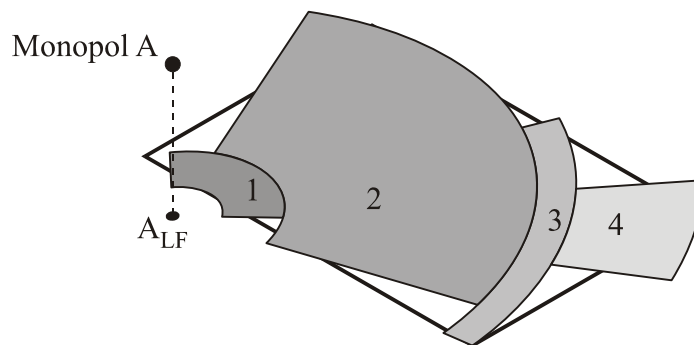
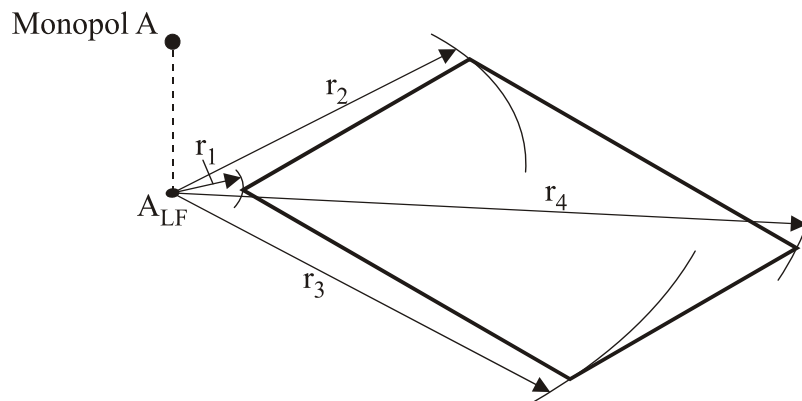
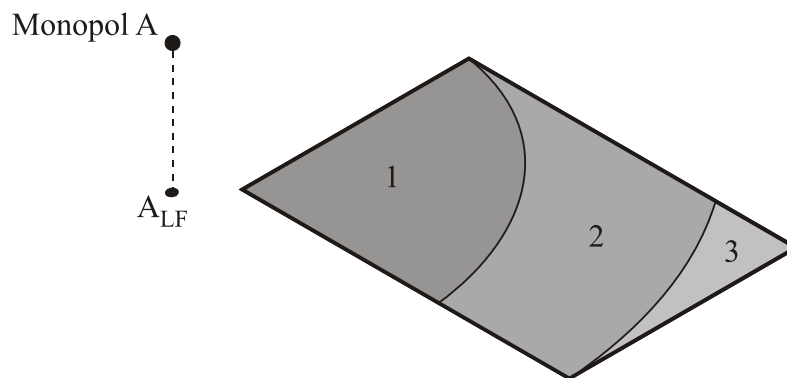


Bild 3.12: Bestimmung der Kreissegmentabmessungen bei einem Lotfußpunkt A_{LF} seitlich vom Rechteck (Bereich II).

Schritt 1: Bestimmung der Abstände zu den Ecken



Schritt 2: Zuordnung der Oberflächenbereiche ΔS_{1-3}



Schritt 3: Bestimmung der Abmessungen ($r_i, r_a, \Delta\phi$)₁₋₃

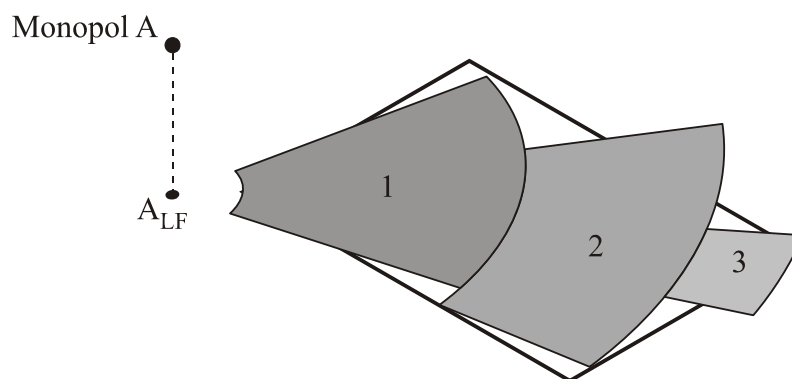


Bild 3.13: Bestimmung der Kreissegmentabmessungen bei einem Lotfußpunkt A_{LF} diagonal zum Rechteck (Bereich III).

3.3.2 Anwendung der KSI-Grobdiskretisierung an analytischen Beispielen

3.3.2.1 Monopol über einer Rechteckplatte

Der Vergleich der beiden Abdeckmethoden erfolgt zunächst an der quadratischen Platte mit Kantenlänge L und 3 Monopolpositionen (analog zu Kapitel 3.2.2.1, Bild 3.7). Als Maß für die Güte der Abdeckung werden in Bild 3.15 die berechneten Schallleistungsmodifikationsfaktoren $M_{0,A}$ mit der Integral-Lösung verglichen, d.h. mit der Lösung, die man bei einer unendlich feinen Diskretisierungsdichte erhält.

Bei einem zentral über der Platte angeordneten Monopol ergeben beide Methoden erwartungsgemäß sehr gute Ergebnisse, da die quadratische Platte in beiden Fällen im Grunde durch eine Kreisplatte mit gleichem Flächeninhalt ersetzt wird, so dass die Abdeckung für beide Methoden sehr gut erfolgt. Auch im Falle eines Kanten- und Eckenmonopols liefert die Abdeckung mit 4 Kreissegmenten noch sehr gute Ergebnisse.

Die Abdeckung mit nur einem Kreissegment dagegen weicht insbesondere beim Eckenmonopol, wo der Modifikationsfaktor zu höheren Frequenzen hin gegen 1 strebt, deutlicher ab. Hier kann man bereits fast von einem Versagen sprechen. Dies kommt daher, weil bei der Modellierung der Platte durch das Kreissegment der Monopol wie in Bild 3.14 zwar über der Platte aber nicht über dem Segment liegt und dadurch scheinbar fast in den Vollraum abstrahlt ($M_0 = 1$).

Dieses Problem tritt noch deutlicher auf,

wenn anstatt einer quadratischen Platte eine Rechteckplatte betrachtet wird. Um bei der Abdeckung von Rechtecken das maximal nutzbare Seitenverhältnis zu bestimmen, wurden Untersuchungen mit umfangreichen Variationen von Frequenz und 3D-Position des zu modifizierenden Monopols durchgeführt. Das Seitenverhältnis des Rechtecks wurde bis zu 10:1 variiert.

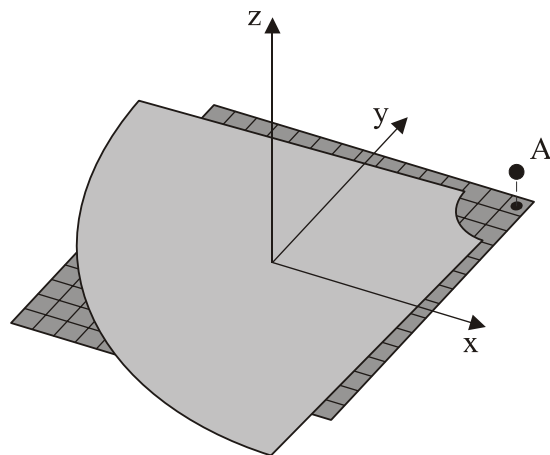


Bild 3.14: Modellierung einer Quadratplatte mit nur einem Kreissegment für einen Monopol A über einem Eckenegment.

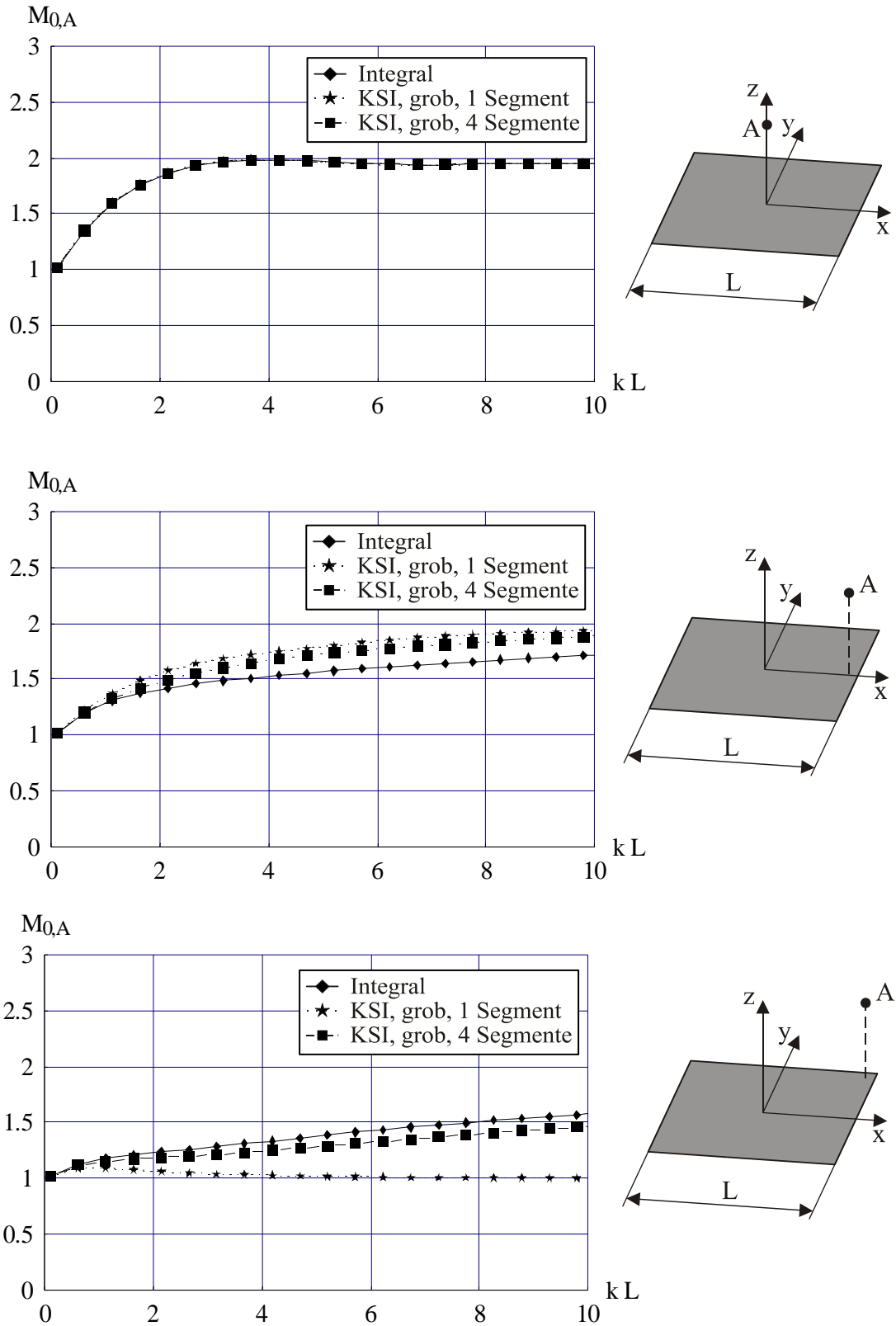


Bild 3.15: Schalleistungsmodifikation $M_{0,A}$ für einen Monopol A im Abstand $z_A = 0.2/k$ vor einer quadratischen Platte bei einer KSI-Grobdiskretisierung. Oben: Monopol zentral angeordnet, Mitte: im Kantenbereich, unten: im Eckenbereich.

Bei einer Abdeckung durch nur ein Kreissegment ergeben sich bereits beim Quadrat Abweichungen von fast 3 dB, wenn der Monopol sich in geringer Höhe nahe am Rand der Platte befindet und die Luftschallwellenlänge sich in der Größenordnung der Geometrieabmessungen befindet. Insbesondere bei lang gestreckten Rechtecken tritt das bereits erwähnte Problem auf, dass der Monopol über dem ursprünglichen Gegenbelegungselement aber nicht über dem Kreissegment liegt, oder umgekehrt. Dadurch treten Abweichungen von bis zu 3 dB auf. Mit zunehmender Höhe z_A des Monopols verringert sich diese Abweichung. Ab etwa einem Drittel der größten Seitenabmessung sind bereits wieder gute Ergebnisse mit Abweichungen von ≤ 0.5 dB erzielbar.

Die Abdeckung mit 4 Segmenten zeigt ein deutlich besseres Verhalten. Auch hier treten die größten Abweichungen am Rand des Rechtecks auf, und zwar bei einer Positionierung an der breiteren Seite. Aber selbst bei einem Seitenverhältnis von 10:1 ergeben sich nur maximale Abweichungen von höchstens ± 1 dB.

Da die Berechnungszeit bei der Abdeckung mit 4 Kreissegmenten nur wenig größer ist als bei der Abdeckung mit einem Kreissegment, kann für die großflächige Abdeckung von Rechteckbereichen von vorneherein die sicherere Methode mit den 4 Kreissegmenten benutzt werden. Von der Rechenzeit her gesehen lohnt sich eine Grobabdeckung mit 4 Kreissegmenten, wenn ein Rechteck ursprünglich mit mehr als 30 herkömmlichen Elementen diskretisiert wurde.

3.3.2.2 Monopol auf einem Würfel

Bisher wurde die Abdeckung großflächiger Rechteckbereiche mit 1 bzw. 4 Kreissegmenten nur am ebenen Beispiel untersucht. Jetzt soll ein aus Rechtecken zusammengesetzter 3D-Körper betrachtet werden. Dazu wird als einfaches Beispiel ein Würfel mit der Kantenlänge L verwendet. Analog zum vorhergehenden Abschnitt werden drei Monopolpositionen betrachtet, wobei der Monopol auch hier um $z_A = 0.2/k$ aus einer ursprünglich mit 15×15 Monopolen diskretisierten Quadratfläche herausgerückt wird. Um die Güte der Abdeckung zu untersuchen, wird in Bild 3.16 als Referenz die Integrallösung herangezogen, d.h. diejenige Lösung, die man bei einer vollständigen Abdeckung bzw. bei einer unendlich feinen Diskretisierungsdichte erhalten würde.

Auch am 3D-Körper zeigt die Methode mit 4 Kreissegmenten ein deutlich besseres Verhalten. Die maximale Abweichung tritt bei der zentralen Anordnung mit etwa ± 0.5 dB auf, und zwar wie bei den Rechteckuntersuchungen in einem Frequenzbereich, bei dem die Luftschallwellenlänge λ_L in die Größenordnung der Körperabmessungen kommt (hier: $\lambda_L = L$ für $kL = 2\pi$).

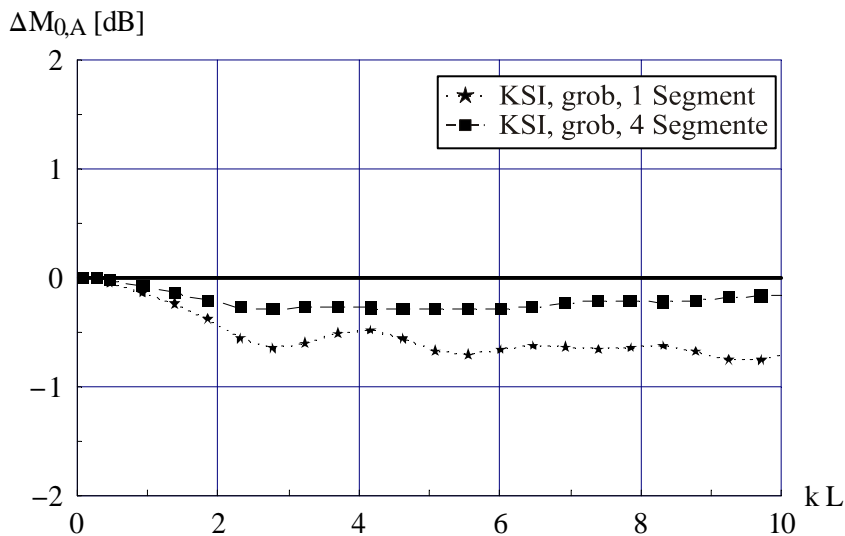
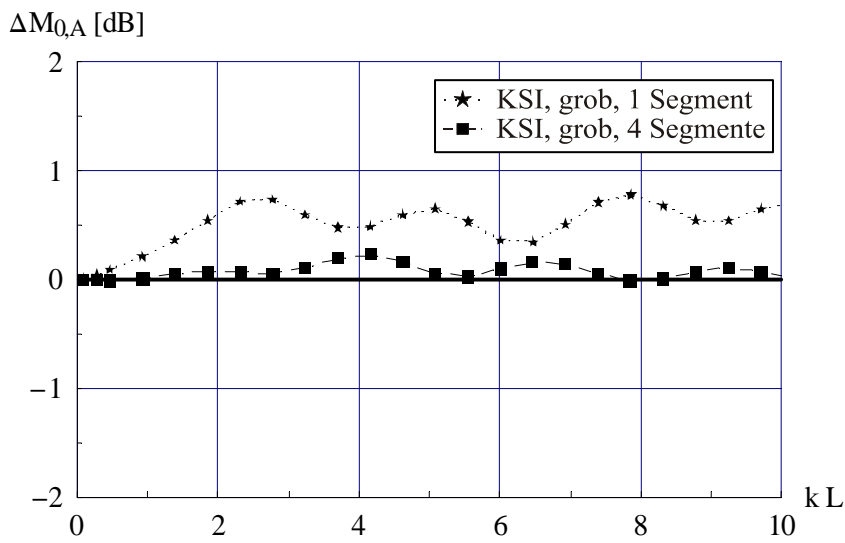
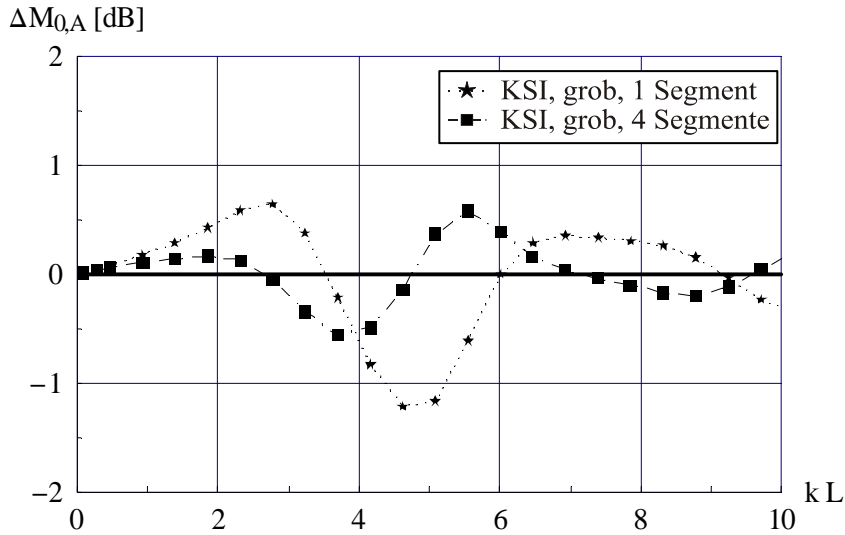


Bild 3.16: Abweichung der Schalleistungsmodifikation $M_{0,A}$ für einen Monopol im Abstand $z_A = 0.2/k$ über einem Würfel bei einer KSI-Grobdiskretisierung mit 1 bzw. 4 Kreissegmenten pro Würfelseite. Oben: Monopol zentral angeordnet, Mitte: im Kantenbereich, unten: im Eckenbereich.

3.4 Analytisches Beispiel zur Bestimmung der Gesamtschalleistung

Bisher wurde nur der erste Schritt der 3D-DFEM-Schalleistungsberechnung betrachtet, die Berechnung der Schalleistungsmodifikation. Nun soll untersucht werden, welchen Einfluss die KSI-Berechnungsmethoden auf die Rechenzeit und die Genauigkeit bei der Berechnung der Gesamtschalleistung haben.

Als analytisches Anwendungsbeispiel wird ein Würfel gewählt, der nach Bild 3.17 so mit quadratischen Elementen diskretisiert wird, dass für jede Frequenz eine Diskretisierungsdichte von etwa 9 Monopolen pro Luftschallwellenlänge garantiert wird. Bei einer Kantenlänge von $L=1\text{ m}$ und einer Schallgeschwindigkeit von $c=340\text{ m/s}$ erhält man damit die in Tabelle 3.1 aufgeführten Frequenzen, die den aufgrund der A-Bewertung für das menschliche Ohr interessanten Frequenzbereich abdecken.

Zur Generierung der Oberflächen-Schwingungsverteilung dient ein gegenphasig schwingendes Monopolpaar, das im Innern des Würfels auf der x-Achse bei $x_M = \pm 0.25\text{ m}$ positioniert wird. Nimmt man die Würfeloberfläche zunächst als durchlässig an, so erzeugt der in den Vollraum abstrahlende Doppelmonopol auf der Würfeloberfläche eine flächennormale Schnellekomponente, die als Schwingschnelle der Oberfläche interpretiert werden kann. Die mit dieser Oberflächen-Schnelleverteilung berechnete DFEM-Schalleistung kann anschließend mit der Schalleistung des Doppelmonopols

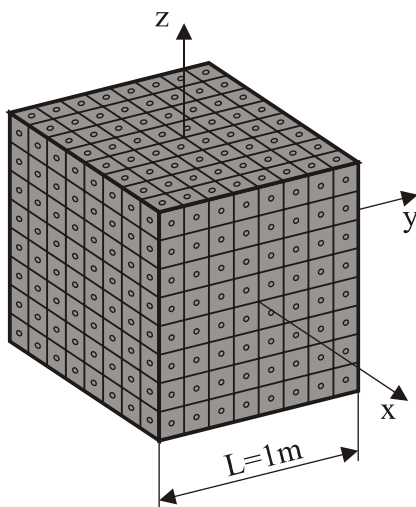


Bild 3.17: DFEM-Würfeldiskretisierung mit 8×8 Elementen pro Seitenfläche

$N_{\text{El, Kante}}$	$N_{\text{El, ges}}$	f [Hz]	$k L$
8	384	300	5.5
16	1536	600	11.1
32	6144	1200	22.2
64	24576	2400	44.4
128	98304	4800	88.7

Tabelle 3.1: DFEM-Diskretisierung des Würfels mit den zugehörigen Frequenzen

$$P_{\text{Do,gg}} = \frac{\rho c}{4\pi} \frac{k^2}{2} \left(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \frac{\sin(k d_{12})}{k d_{12}} \right) \quad (3.14)$$

verglichen werden.

Die drei Berechnungsmethoden der KSI unterscheiden sich entsprechend der Diskretisierungsdichte in

1. Feindiskretisierung (Netz der Schalleistungsberechnung)
2. Grobdiskretisierung mit 4 Kreissegmenten pro Seitenfläche
3. Grobdiskretisierung mit 1 Kreissegment pro Seitenfläche

Die Auswirkung der KSI auf die Rechenzeit der Gesamtschalleistungsberechnung ist in Bild 3.18 dargestellt. Bei einer Verwendung der KSI-Feindiskretisierung (Kurve 2), die dasselbe Netz benutzt wie die Standard-DFEM (1), wird die Rechenzeit deutlich reduziert. Bei einer Verwendung der KSI mit Grobdiskretisierung von 4 Kreissegmenten (3) bzw. nur 1 Kreissegment (4) pro Würfelseite kann nur noch eine geringe zusätzliche Minderung der Rechenzeit erzielt werden, da hier der zweite Schritt der DFEM-Berechnung sehr viel länger dauert als der erste Schritt. Wie Bild 3.19 zeigt, dauert der erste Berechnungsschritt bei 100.000 Elementen und einer Grobdiskretisierung von 4 Kreissegmenten weniger als ein Tausendstel des zweiten Berechnungsschrittes. Dies eröffnet die Möglichkeit, durch die Anwendung eines Multigrid-Verfahrens für den zweiten Schritt der DFEM-Berechnung den quadratischen Rechenaufwand zu senken und eine weitere Rechenzeiterparnis bei einer großen Anzahl von Elementen zu erzielen.

In Bild 3.18 ist zusätzlich der Rechenzeitaufwand von vergleichbaren Berechnungen mit Randelement-Verfahren (BEM) abgebildet, die am Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik der Universität Stuttgart durchgeführt wurden. Die Berechnung der Schalleistung mit diesen Verfahren dauert deutlich länger als mit der DFEM. Die Standard-BEM (5) sind ca. 100mal langsamer als die DFEM mit KSI (2). Für große Elementanzahlen kann die Berechnungszeit und der Speicherplatzbedarf durch eine Verwendung der Fast Multipole BEM (6) [24]-[26] reduziert werden. Für Rechnungen mit 100.000 Elementen liegt der Speicherplatzbedarf aber immer noch in der Größenordnung von 1 GByte, während bei der DFEM zusätzlich zu den Geometrie- und Schwingungsdaten nur etwa 1 MByte benötigt wird. Aufgrund ihrer Einfachheit weist die DFEM allerdings nicht die guten Konvergenzeigenschaften der Randelemente auf.

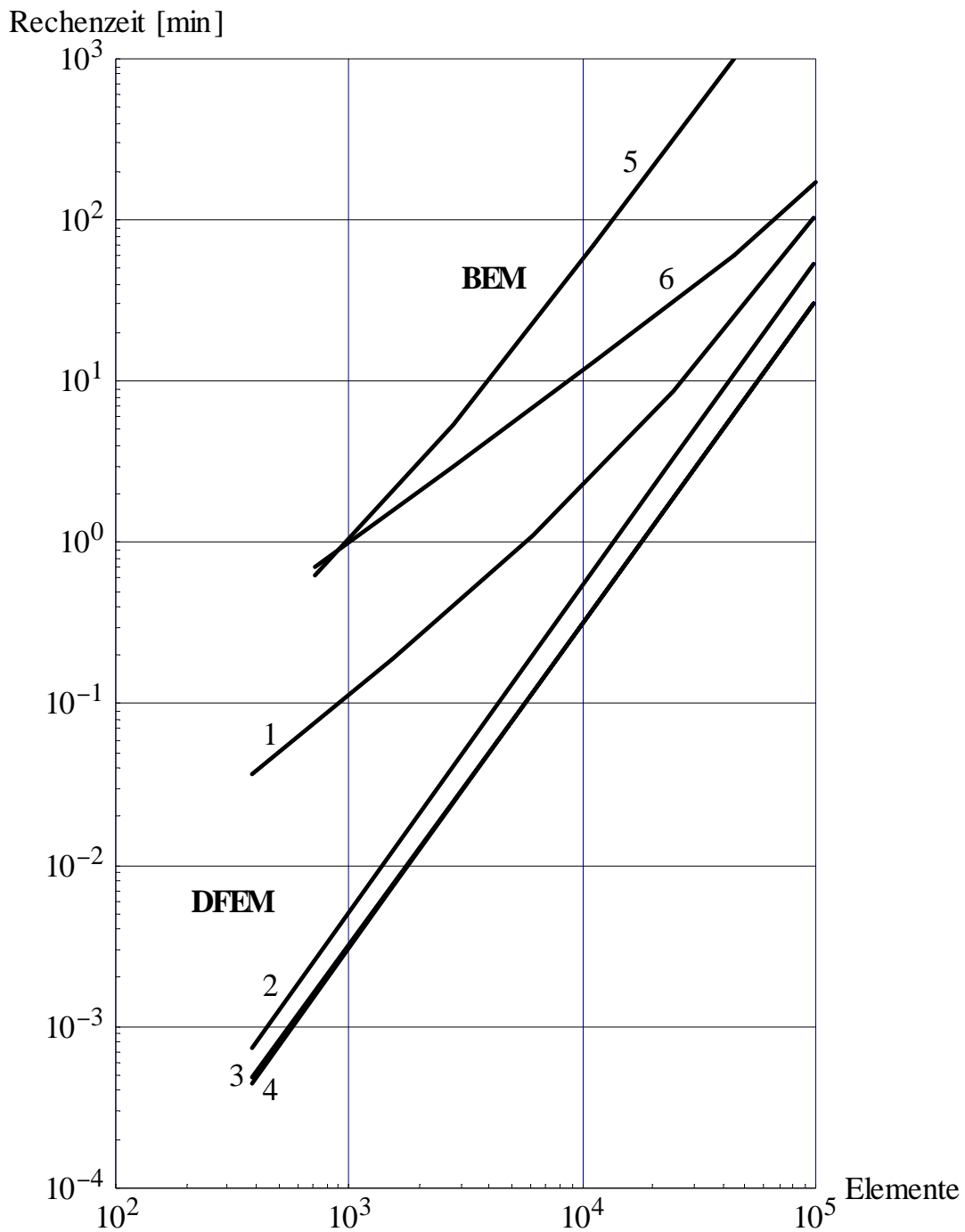


Bild 3.18: Rechenzeiten verschiedener 3D-Berechnungsverfahren zur Bestimmung der von einer schwingenden Oberfläche abgestrahlten Luftschallleistung.

- 1: Standard-DFEM
- 2: DFEM mit KSI, Feindiskretisierung (Netz der Standard-DFEM)
- 3: DFEM mit KSI, Grobdiskretisierung (4 Segmente)
- 4: DFEM mit KSI, Grobdiskretisierung (1 Segment)
- 5: Standard-BEM
- 6: Fast Multipole BEM

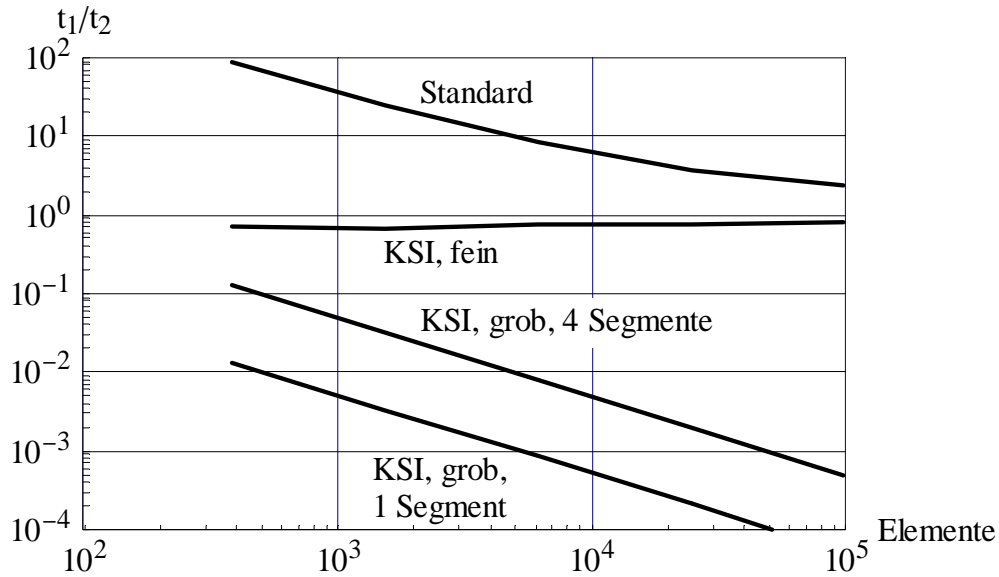


Bild 3.19: Vergleich der Berechnungszeiten des ersten und zweiten Berechnungsschrittes der DFEM für verschiedene Diskretisierungsmethoden bei der Gegenbelegungsberechnung.

Abschließend wird in Bild 3.20 die Abweichung der DFEM-Schalleistung von der exakten Lösung nach Gleichung (3.14) betrachtet. Bei allen Rechnungen ergeben sich Abweichungen von weniger als 1 dB. Die Unterschiede, die durch die verschiedenen Berechnungsmethoden der Schalleistungsmodifikation entstehen, sind gering und weisen durch den gleichartigen Kurvenverlauf auf noch bestehende systematische Abweichungen hin, die auch vom zweiten Berechnungsschritt stammen.

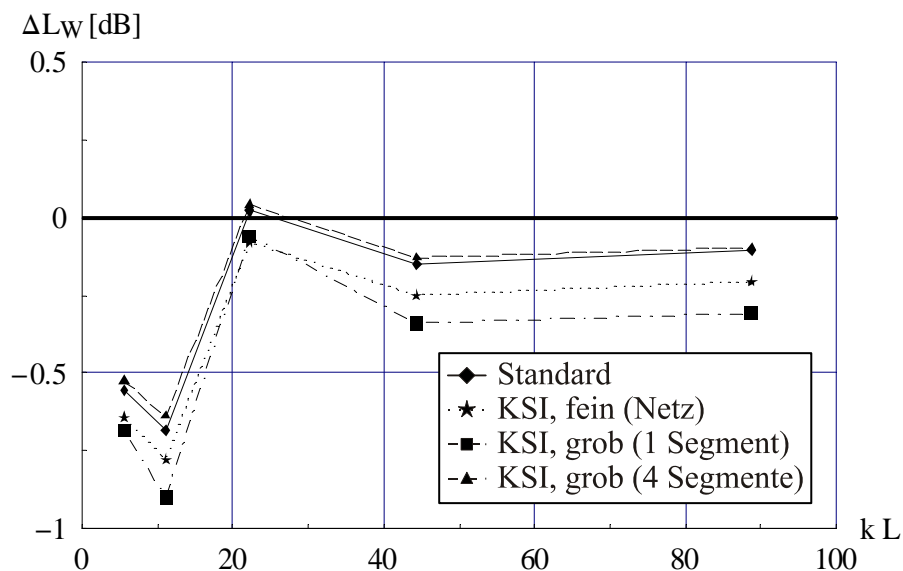


Bild 3.20: Abweichung der von einer schwingenden Würfeloberfläche abgestrahlten Luftschalleistung von der exakten Lösung (gegenphasig schwingender Doppelmonopol im Innern des Würfels).

3.5 Messtechnisches Beispiel zur Bestimmung der Gesamtschalleistung

Ausgangspunkt der Überlegungen, die zu den neu entwickelten KSI-Berechnungsmethoden für die Schalleistungsmodifikation führten, war die Feststellung, dass die Modifikationsberechnung bei der Gesamtschalleistungsberechnung zu der in Kapitel 2.4 beschriebenen Messung an der Maschinenkapsel mit Rauschanregung sehr viel länger dauerte als die eigentliche Schalleistungsberechnung. Es soll nun an diesem messtechnischen Beispiel geprüft werden, wie sich die KSI auf die Rechenzeit und die Genauigkeit der Gesamtschalleistungsberechnung auswirkt. Die drei KSI-Methoden unterscheiden sich wie im vorhergehenden Abschnitt entsprechend der Diskretisierungsdichte in

1. Feindiskretisierung (Netz der Schalleistungsberechnung)
2. Grobdiskretisierung mit 4 Kreissegmenten pro Rechteckfläche
3. Grobdiskretisierung mit 1 Kreissegment pro Rechteckfläche.

Für die KSI-Grobdiskretisierungen werden Messobjekt und Umgebung nach Bild 3.21 in 9 Rechtecke unterteilt.

Bild 3.22 zeigt die Berechnungszeit pro Frequenzlinie für den Frequenzbereich bis 2000 Hz. Der Anstieg der Rechenzeit bei der Standard-Berechnungsmethode wird durch die frequenz- bzw. abstandsabhängige Subdiskretisierung der Gegenbelegungselemente verursacht.

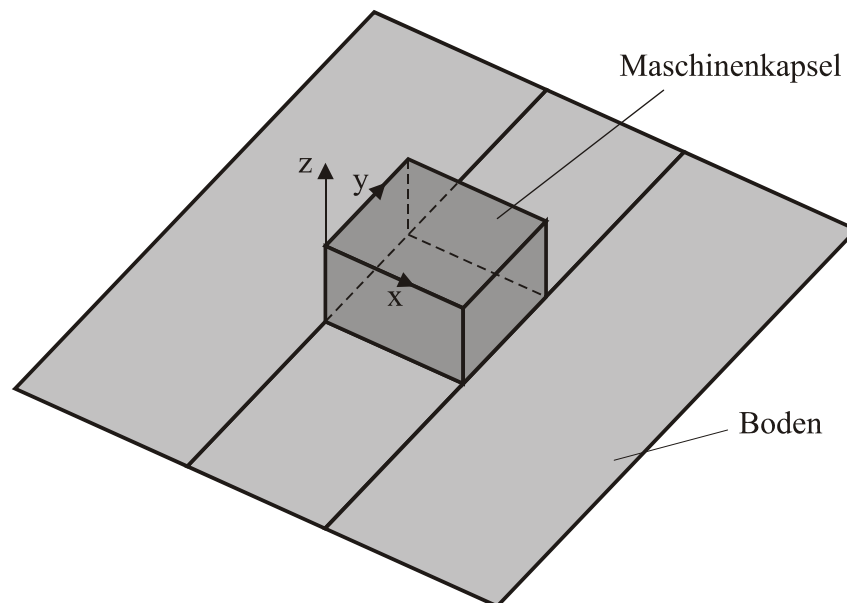


Bild 3.21: Aufteilung der Versuchsanordnung in 9 Rechteckbereiche zur Abdeckung mit Kreissegmenten.

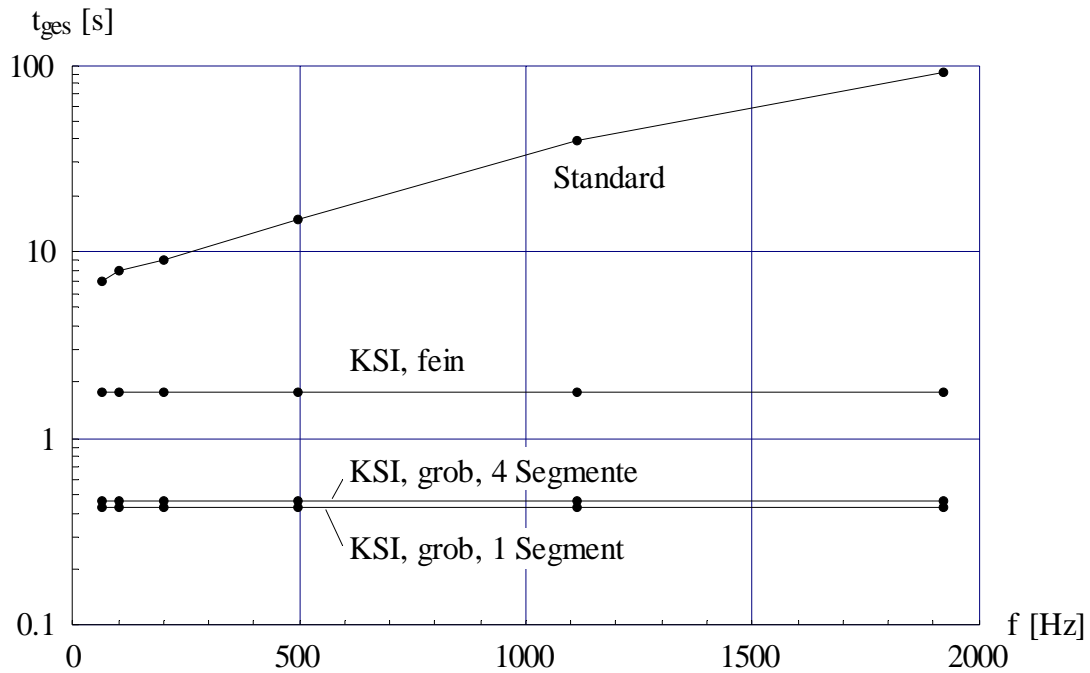


Bild 3.22: Berechnungszeit pro Frequenzlinie der Gesamtschallleistungsberechnung mit der 3D-DFEM bei verschiedenen Methoden für die Berechnung der Schallleistungsmodifikation.

Die Berechnungszeiten der KSI-Methoden sind frequenzunabhängig und erlauben dadurch eine gute Vorhersagbarkeit der gesamten Berechnungsdauer. Die KSI ermöglicht bei tiefen Frequenzen eine Reduktion der Rechenzeit von etwa einer Größenordnung, bei 2000 Hz von etwa zwei Größenordnungen. Die Gesamtdauer der Berechnung für die 347 Frequenzlinien von ursprünglich 5 h 36 min mit der alten Berechnungsmethode wird auf die in Tabelle 3.2 angegebenen Zeiten verkürzt. Dies bedeutet bei der KSI-Feindiskretisierung eine 33mal kürzere Rechenzeit, bei den KSI-Grobdiskretisierungen reduziert sich die Rechenzeit um mehr als das 100fache.

Berechnungsmethode	t_1 [s]	t_2 [s]	t_{ges} [s]	Verkürzungsfaktor
Standard	20042	118	20160	-
KSI, fein (Netz)	491		609	33
KSI, grob (4 Segmente)	43		161	125
KSI, grob (1 Segment)	29		147	137

Tabelle 3.2: Berechnungszeiten der DFEM-Rechnung für die Maschinenkapsel-Messung bei verschiedenen Methoden für die Berechnung der Schallleistungsmodifikation.

Die Abweichung der berechneten Schalleistung von der mit einer Hüllflächen-Intensitätsmessung ermittelten Schalleistung ist in Bild 3.23 und 3.24 dargestellt. Wie schon bei den analytischen Untersuchungen in Kapitel 3.4 zeigt die KSI-Feindiskretisierung über den gesamten Frequenzbereich einen nur um 0.1 bis 0.2 dB unterschiedlichen Verlauf zur Standard-Berechnungsmethode und ist somit sehr gut geeignet als direkten Ersatz für die alte Methode, d.h. man erhält eine deutlich reduzierte Rechenzeit bei gleicher Genauigkeit. Auch die KSI-Grobdiskretisierung mit 4 Kreissegmenten pro Rechteck-Oberflächenbereich liefert sehr ähnliche Ergebnisse und kann für eine weitere Rechenzeiterparnis sorgen, insbesondere dann, wenn auch der 2. Schritt der 3D-DFEM-Rechnung noch verkürzt würde (z.B. durch ein Multigrid-Verfahren). Die Grobdiskretisierung mit nur einem Kreissegment pro Rechteck-Oberflächenbereich weicht deutlicher von der alten Berechnungsmethode ab. Für höhere Frequenzen (Bild 3.24) ergibt sich offensichtlich eine bessere Annäherung an die mit Intensitätsmessung bestimmte Schalleistung. Dies ist aber auf die in Kapitel 3.3.2.1 angesprochenen Probleme zurückzuführen. Für einige Frequenzlinien und einige Monopole der Primärbelegung ergaben sich auch Modifikationsfaktoren $\ll 1$ und $\gg 8$, was hier physikalisch keinen Sinn macht. Diese Zahlenwerte wurden dann entsprechend auf 1 hoch gesetzt bzw. auf 8 herunter gesetzt. Die KSI-Grobdiskretisierung mit nur einem Kreissegment pro Rechteck-Oberfläche sollte aufgrund ihrer Unzuverlässigkeit bei der allgemeinen Anwendung eher vermieden werden.

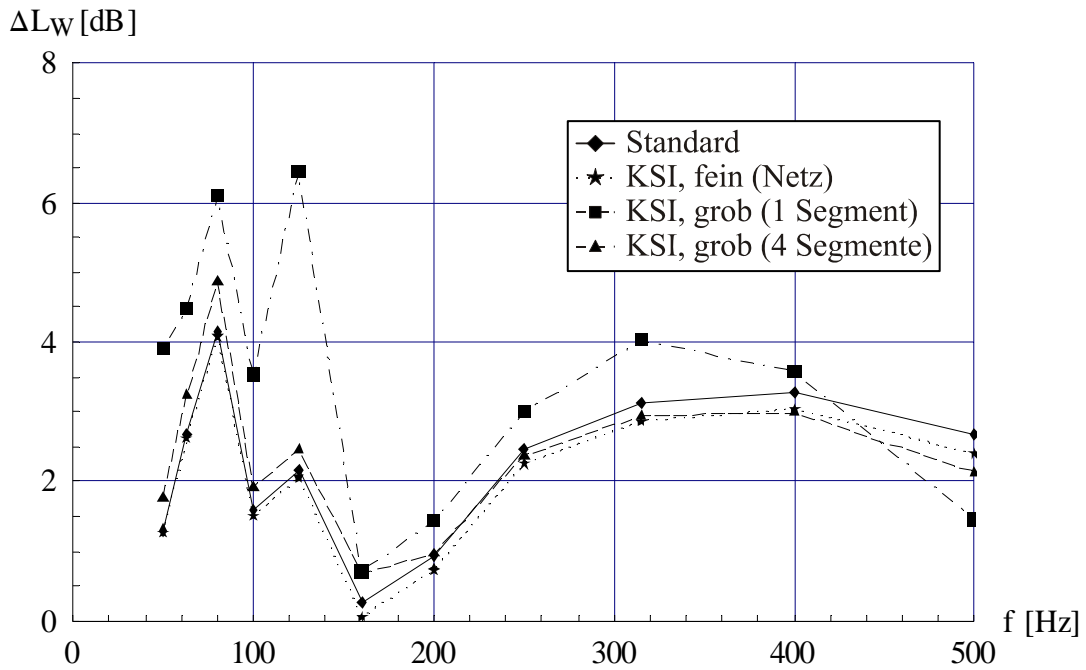


Bild 3.23: Abweichung der DFEM-Schalleistungspegel von den Pegeln der Intensitäts-Hüllflächenmessung für eine mit weißem Rauschen angeregte Maschinenkapsel bei verschiedenen Methoden zur Gegenbelegberechnung.

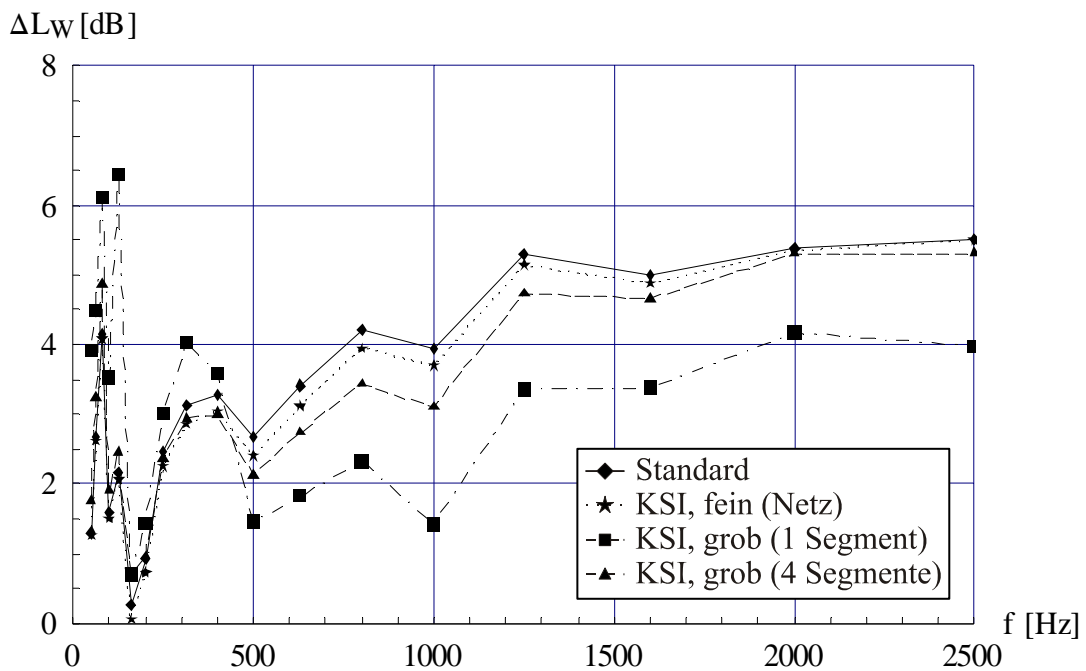


Bild 3.24: wie Bild 3.23, aber erweiterter Frequenzbereich

3.6 Zusammenfassung zu Kapitel 3

Die Schalleistungsberechnung mit der 3D-DFEM erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird für alle aktiven (Primär-)Monopole die Schalleistungsmodifikation berechnet, die die Veränderung der Schalleistungsabstrahlung der Monopole aufgrund der starren Umgebung berücksichtigt. Im zweiten Schritt wird die eigentliche Schalleistungsberechnung durchgeführt, bei der die Einzel- und Wechselwirkungsleistungen der aktiven Monopole aufsummiert werden. Der erste Berechnungsschritt dauert bei typischen Anwendungsrechnungen sehr viel länger als der zweite Schritt, da insbesondere zu höheren Frequenzen hin eine frequenz- bzw. abstandsabhängige Subdiskretisierung der Gegenbelegungselemente durchgeführt werden muss. Zur Reduzierung der Rechenzeit wurde im Rahmen dieses Abschnitts eine neue Berechnungsmethode entwickelt, die auf die zeitaufwändige Subdiskretisierung verzichtet. Dabei wird jedes Element der Gegenbelegung so durch ein Kreisringteil („Kreis-Segment“) ersetzt, dass die Berechnung durch eine Integration erfolgen kann. Da das Integral bereits vor dem eigentlichen Rechnungsstart berechnet wurde, erfolgt die Modifikationsberechnung mit einer einfachen Stammfunktion. Diese als Kreissegment-Integration (KSI) bezeichnete Vorgehensweise wurde in Kapitel 3.2 an verschiedenen Rechenbeispielen (Monopol vor einer quadratischen Platte und vor einer Kugel) angewendet und zeigte verglichen mit der alten Berechnungsmethode bei deutlich reduzierter Rechenzeit eine mindestens gleiche Genauigkeit. Insbesondere bei einem Monopol, der im Nordpol einer Kugel angebracht wurde, zeigte sich selbst bei sehr hohen Frequenzen noch eine hohe Genauigkeit. Daraus ließ sich der Schluss ziehen, dass durch die Verwendung der KSI eine frequenzunabhängige Diskretisierungsdichte genutzt werden kann, wenn die starre Oberfläche eines Körpers gut genug mit Kreissegmenten abgedeckt wird.

Ausgehend von dieser Überlegung wurde in Kapitel 3.3 die Grobdiskretisierung von in der Praxis häufig auftretenden rechteckförmigen Oberflächenbereichen mit nur einem und mit 4 Kreissegmenten untersucht. Am Beispiel der Rechteckplatte konnte gezeigt werden, dass die Grobdiskretisierung mit nur einem Kreissegment nur dann sicher anwendbar ist, wenn sich ein zu modifizierender Monopol zentral über der Platte oder in größerer Entfernung davon befindet. Die Grobdiskretisierung mit 4 Kreissegmenten dagegen ermöglichte selbst bei Seitenverhältnissen der Rechteckplatte von 1:10 für

beliebige Monopolpositionen über den gesamten Frequenzbereich noch eine Genauigkeit von ± 1 dB. Auch am Beispiel eines Monopols, der an drei verschiedenen Positionen über einem starren Würfel angeordnet wird (zentral, Kante, Ecke), zeigte die Grobdiskretisierung mit 4 Segmenten eine bessere Genauigkeit mit einer maximalen Abweichung von ± 0.5 dB von der Integrallösung.

Nachdem die neuen Methoden erfolgreich zur Berechnung der Schalleistungsmodifikation eingesetzt wurden, konnte die Auswirkung auf die Rechenzeit und die Genauigkeit bei der Berechnung der Gesamtschalleistung betrachtet werden. In einem analytischen Beispiel wurde in Kapitel 3.4 ein Würfel herangezogen, der so mit quadratischen Elementen diskretisiert wurde, dass im Frequenzbereich von 300 bis 4.800 Hz eine Diskretisierungsdichte von 9 Elementen pro Luftschallwellenlänge garantiert wurde. Die Schwingungsverteilung auf der Würfeloberfläche wurde von einem Doppelmonopol im Innern des Würfels erzeugt, so dass gleichzeitig eine exakte Lösung zur Überprüfung der berechneten DFEM-Schalleistung bereitstand.

Die KSI-Methoden zur Berechnung der Schalleistungsmodifikation ermöglichten für kleine Elementanzahlen von einigen 100 Elementen eine um etwa zwei Größenordnungen kürzere Rechenzeit. Bei 100.000 Elementen ergab sich immerhin noch eine Verkürzung von etwa einer Größenordnung, wobei auch hier noch eine weitere Reduzierung der Rechenzeit möglich zu sein scheint, wenn der zweite Berechnungsschritt der 3D-DFEM-Berechnung z.B. durch die Anwendung eines Multigrid-Verfahrens schneller erfolgt. Verglichen mit den Standard-BEM ist die DFEM mit KSI nun etwa um einen Faktor 100 schneller. Bei der Berechnung der Gesamtschalleistung traten für alle KSI-Methoden Abweichungen von weniger als 1 dB auf.

Abschließend wurden die neuen Berechnungsmethoden an einem messtechnischen Beispiel, einer mit Rauschen angeregten Maschinenkapsel, angewendet. Für die 347 zu berechnenden Frequenzlinien benötigte die KSI-Feindiskretisierung, die das Netz der Schalleistungsberechnung nutzt, 33mal weniger Rechenzeit als die alte Berechnungsmethode, wobei die Abweichung der Schalleistung zur alten Methode nur etwa 0.2 dB betrug. Die KSI-Feindiskretisierung eignet sich daher hervorragend als Ersatz für die alte Berechnungsmethode. Die KSI-Grobdiskretisierungen waren mehr als 100mal schneller als die alte Berechnungsmethode, wobei allerdings nur die Diskretisierung mit 4 Kreissegmenten pro Rechteckoberfläche gute Ergebnisse lieferte.

Insgesamt ergaben die Untersuchungen folgende wesentliche Ergebnisse:

- Reduzierung der Rechenzeit um einen Faktor 10 bis 100 bei gleicher Genauigkeit
- Möglichkeit der Modellierung großer ebener Oberflächenbereiche von starren Körpern (hier: Ersatz von Rechteck-Oberflächenbereichen beliebiger Größe mit maximal 4 Kreissegmenten)
- neue Standard-DFEM mit KSI ca. 100mal schneller als Standard-BEM
- Option auf eine weitere Rechenzeitreduzierung bei großen Elementanzahlen (z.B. durch ein Multigrid-Verfahren)

4 Bestimmung der schalleistungsrelevanten Wechselwirkungsabstände am kugelförmigen Körper

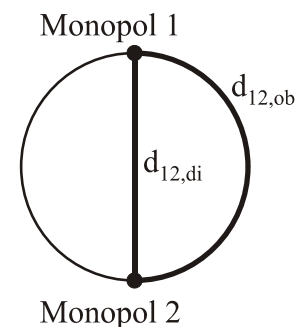
4.1 Vorbemerkung

Für ebene Abstrahlprobleme und für Vollraumprobleme berechnet die DFEM die abgestrahlte Schallleistung bis auf den Diskretisierungsfehler exakt. Für die Berechnung der von dreidimensional ausgedehnten Körpern abgestrahlten Schallleistung bei Anwesenheit von Streukörpern wurde von Hübner et al. [7] [8] [13] eine Näherung entwickelt, die mit der in Kapitel 2.3.3 ausführlich beschriebenen Rechenvorschrift

$$P_{\text{ges}} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \left(\sum_{i=1}^N M_i \frac{\hat{q}_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \sqrt{M_i} \sqrt{M_j} \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{2} \frac{\sin(k d_{ij})}{k d_{ij}} \cos(\psi_j - \psi_i) \right) \quad (4.1)$$

berechnet wird. Dabei steuern die Wechselwirkungsabstände d_{ij} den größten Anteil zu den verbleibenden systematischen Abweichungen bei (vgl. Kapitel 2.3.4), weshalb sie in diesem Kapitel Gegenstand weiterführender Untersuchungen sind.

Bisher wurden in der DFEM zwei Definitionen für die d_{ij} verwendet: der direkte Abstand (durch den Körper hindurch) und der kürzeste oberflächengeführte Abstand (um den Körper herum). Zur Untersuchung der Wahl der Wechselwirkungsabstände wurde von Gerlach ([13], S. 94 ff) der Sonderfall betrachtet, dass zwei Monopole im Nordpol und im Südpol auf einer starren Kugel angeordnet werden, die mit gleichen Schallflussamplituden gleichphasig bzw. gegenphasig Schall abstrahlen. Für die Berechnung der insgesamt abgestrahlten Schallleistung wurde einmal der direkte Abstand $d_{12,di}$ verwendet und einmal der kürzeste oberflächengeführte Abstand $d_{12,ob}$. Die Untersuchungen von Gerlach zeigten, dass der oberflächengeführte Abstand die genaueren Ergebnisse lieferte. Dies lässt sich dadurch erklären, dass bei der DFEM-Modellierung die Schallwellen nicht durch die starre Oberfläche hindurch laufen dürfen, sondern um die Kugel herumlaufen müssen. Die Untersuchungen von Gerlach zeigten aber auch, dass der kürzeste oberflächengeführte Abstand nicht der physikalisch



richtige Abstand sein kann, da sich immer noch systematische Abweichungen ergaben, d.h. bei einer Erhöhung der Diskretisierungsdichte erhielt man keine weitere Annäherung an die vorgegebene exakte Lösung.

Daher soll im folgenden die Betrachtung der Wechselwirkungsabstände über die von Gerlach betrachteten Sonderfälle hinaus verallgemeinert werden, so dass Monopolpaare mit beliebiger Position, Schallflussamplitude und Phasendifferenz auf einer starren Kugel untersucht werden können. Dazu wird in Kapitel 4.2 zunächst der exakte Schallleistungs-Wechselwirkungsterm eines Doppelmonopols auf einer starren Kugel hergeleitet. Dieser exakte Wechselwirkungsterm wird in Kapitel 4.3 mit dem Wechselwirkungsterm der Standard-3D-DFEM verglichen, so dass Aussagen über den gesuchten Wechselwirkungsabstand gemacht werden können. Die Ergebnisse werden in Kapitel 4.4 anhand des Schalldruckfeldes überprüft und in Kapitel 4.5 am Beispiel eines Doppelmonopols auf einer starren Kugel angewendet.

4.2 Berechnung der abgestrahlten Schallleistung von kugelförmigen Körpern mit beliebiger Schwingungsverteilung

4.2.1 Schallleistung eines Doppelmonopols auf einer starren Kugel

Die Herleitung der Schallleistungsformel für den beliebig auf einer starren Kugel angeordneten Doppelmonopol wird ausführlich in Anhang A.4 beschrieben. Die vom Doppelmonopol abgestrahlte Schallleistung kann demnach analog zum Doppelmonopol im Vollraum in der DFEM-üblichen Darstellungsform

$$P_{\text{DoM, Ku}} = P_1 + P_2 + 2 P_{12} \quad (4.2)$$

als Summe der Monopol-Einzelleistungen

$$P_i = \underbrace{\frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_i^2}{2}}_{\text{Vollraum-}} \underbrace{\left(\frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma^{(n)} \right)}_{g_1} \quad (4.3)$$

(mit $i = 1, 2$) und den Wechselwirkungsleistungen

$$P_{12} = P_{21} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_1 \hat{q}_2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \underbrace{\left(\frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_{n(\cos(\theta_{12}))} \sigma^{(n)} \right)}_{g_2} \quad (4.4)$$

geschrieben werden. Die Einzelleistungen setzen sich aus der bereits bekannten Monopol-Vollraumleistung und der Schalleistungsmodifikation

$$g_{1(kr_0)} = \frac{1}{(kr_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma^{(n)} \quad (4.5)$$

zusammen, die den Einfluss der starren Kugel auf die Schalleistungsabstrahlung eines Monopols berücksichtigt (Bild 4.1). Für tiefe Frequenzen ($kr_0 \rightarrow 0$) strebt g_1 gegen 1, was einer Vollraumabstrahlung entspricht, d.h. die Kugel stört die Abstrahlung des Monopols nicht. Für hohe Frequenzen ($kr_0 \rightarrow \infty$) strebt g_1 gegen 2. Dies entspricht einer Halbraumabstrahlung, d.h. die Kugel erscheint dem Monopol zunehmend wie eine unendlich ausgedehnte Ebene. Zusätzlich zu den in der Standard-DFEM verwendeten Größen tritt hier neben dem Kugelradius r_0 der Schallabstrahlgrad des Kugelstrahlers n -ter Ordnung $\sigma^{(n)}$ auf (s. Anhang A.2).

Die in den Wechselwirkungstermen enthaltene Reihenentwicklung

$$g_{2(kr_0, \theta_{12})} = \frac{1}{(kr_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos(\theta_{12})) \sigma^{(n)}, \quad (4.6)$$

wird in Bild 4.2 dargestellt. Der in der Legendre-Funktion P_n auftretende Winkel θ_{12} stellt die Winkeldifferenz zwischen den Ortsvektoren der Monopole 1 und 2 dar, wobei Monopol 1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit in den Nordpol gesetzt werden kann. Wird Monopol 2 ebenfalls im Nordpol positioniert ($\theta_{12} = 0$), so gilt $g_{2(kr_0, \theta_{12})} = g_{1(kr_0)}$, d.h. die in der Schnittfläche $\theta_{12} = 0$ enthaltene Kurve der Schalleistungsmodifikation g_1 kann als Wechselwirkung eines Monopols mit sich selbst betrachtet werden.

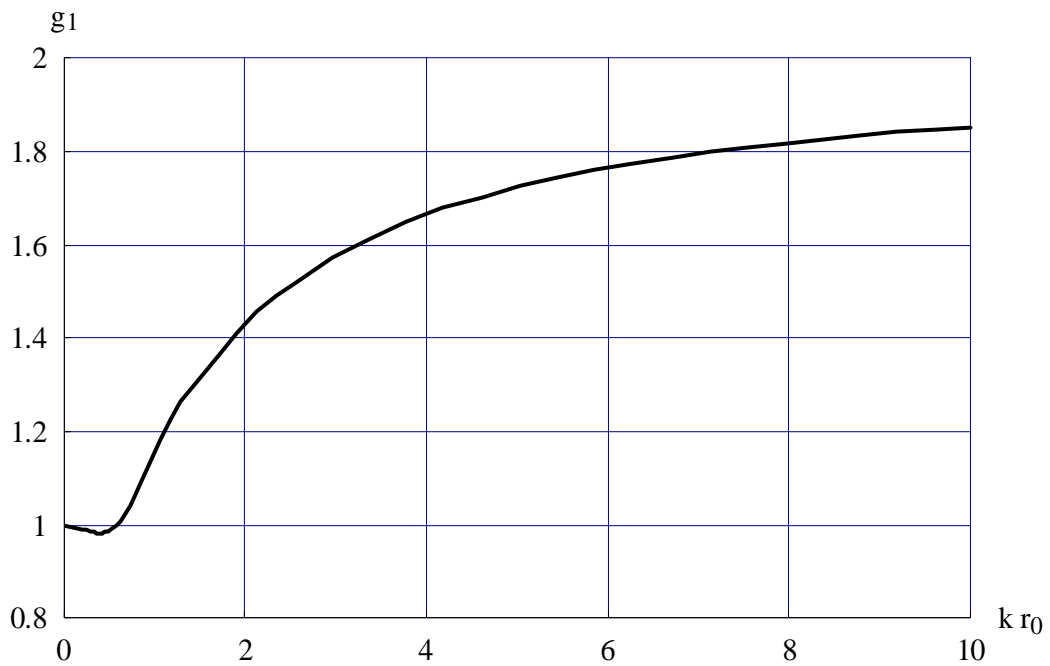


Bild 4.1: Schallleistungsmodifikation g_1 nach Gleichung 4.5.

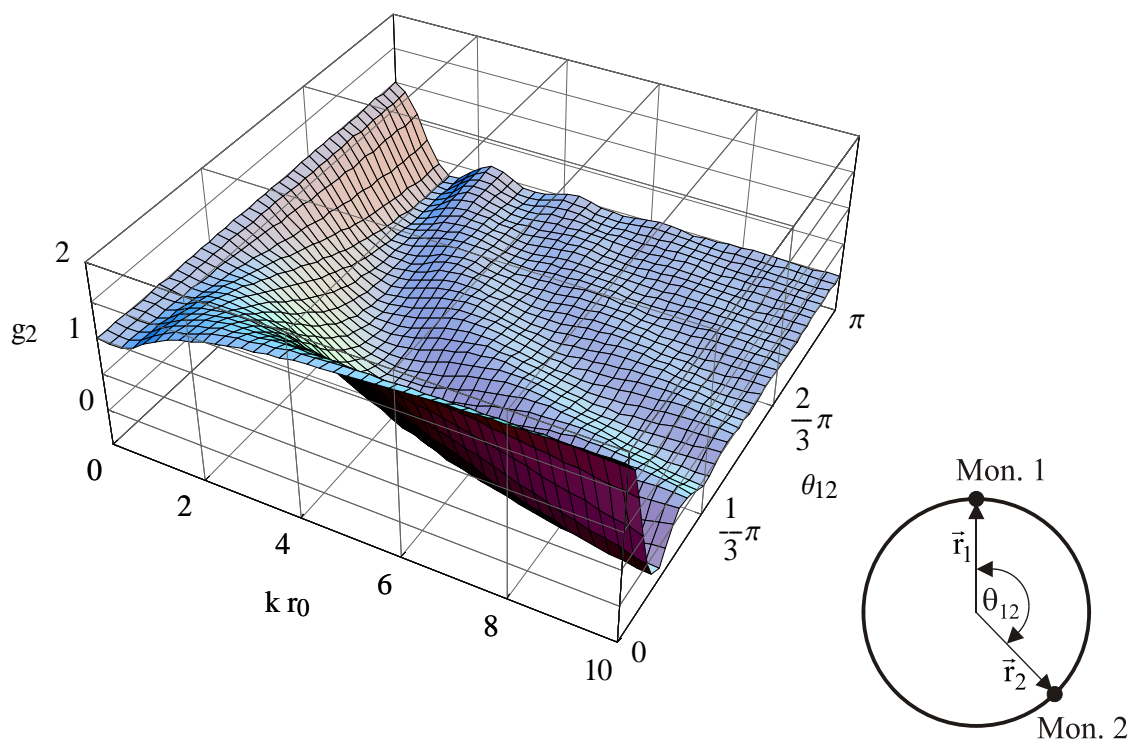


Bild 4.2: Wechselwirkungsfunktion g_2 nach Gleichung 4.6.

4.2.2 Kugel-DFEM

4.2.2.1 Algorithmus einer DFEM für kugelförmige Körper mit beliebiger Schwingungsverteilung

Die in Kapitel 4.2.1 dargestellten exakten Schalleistungsterme können auf elegante Art überprüft werden. Analog zur Anwendung der DFEM bei der eingebettet schwingenden Platte kann nämlich der Doppelmonopol auf der starren Kugel als Baustein für eine „Kugel-DFEM“ benutzt werden. Dementsprechend setzt sich die von einer mit Monopolen diskretisierten Kugel insgesamt abgestrahlte Schalleistung aus der Summe der Einzelleistungen und Wechselwirkungsleistungen von Kugel-Doppelmonopolen zusammen. Diese Kugel-DFEM enthält dann alle an der Kugel auftretenden Beugungseffekte, so dass die Schalleistung von einer mit beliebiger Schwingungsverteilung schwingenden Kugel bis auf den Diskretisierungsfehler „exakt“ berechnet wird.

Diskretisiert man eine Kugel mit N Monopolen, so ergibt sich mit den Gleichungen (4.3) und (4.4) die insgesamt abgestrahlte Schalleistung zu

$$P_{Ku} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \left(g_{1(kr_0)} \sum_{i=1}^N \frac{\hat{q}_i^2}{2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{2} g_{2(kr_0, \theta_{ij})} \cos(\varphi_{ij}) \right) \quad (4.7)$$

mit den Abkürzungen

$$g_{1(kr_0)} = \frac{1}{(kr_0)^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (2n+1) \sigma_{(kr_0)}^{(n)} \quad (4.8)$$

$$g_{2(kr_0, \theta_{ij})} = \frac{1}{(kr_0)^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (2n+1) P_n(\cos(\theta_{ij})) \sigma_{(kr_0)}^{(n)} \quad (4.9)$$

und den auftretenden Größen

- ρ - mittlere Dichte des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
- c - Schallgeschwindigkeit des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
- k - Wellenzahl
- r_0 - Kugelradius

- \hat{q}_i - Schallflussamplitude des i-ten Monopols (analytisch oder messtechnisch bestimmt aus der flächennormalen Schwingschnelleamplitude $\hat{v}_{n,i}$ und dem Teilflächeninhalt ΔS_i mit $\hat{q}_i = \hat{v}_{n,i} \Delta S_i$)
- θ_{ij} - Winkeldifferenz zwischen den Ortsvektoren \vec{r}_i und \vec{r}_j der Monopole i und j. Es gilt $\cos(\theta_{ij}) = \frac{|\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j|}{|\vec{r}_i| |\vec{r}_j|}$.
- φ_{ij} - Phasendifferenz des Schallflusses zwischen Monopol i und j, d.h. $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$
- P_n - Legendre-Polynom n-ten Grades (s. Anhang A.2)
- $\sigma^{(n)}$ - Schallabstrahlgrad des Kugelstrahlers n-ter Ordnung (s. Anhang A.2)
- n_{\max} - Maximale Anzahl der Summenterme. Als Richtwert sollte für eine hohe Genauigkeit mindestens $n_{\max} \geq 2k r_0$ gewählt werden.

4.2.2.2 Validierung der Kugel-DFEM am Beispiel des Kugelstrahlers 0-ter und 1-ter Ordnung

Zur Überprüfung der Kugel-DFEM wird die DFEM-Schalleistung nach Gleichung (4.7) mit exakten Lösungen verglichen. Bild 4.3 zeigt die Abweichung der DFEM-Schalleistung bei einem Kugelstrahler 0. Ordnung, Bild 4.4 die Abweichung bei einem Kugelstrahler 1. Ordnung (exakte Lösungen nach Anhang A.2, Gleichung A.5). Zusätzlich sind die Ergebnisse von Gerlach mit der Standard-3D-DFEM bei einer Verwendung des kürzesten oberflächengeführten Abstands angegeben [13]. Im Gegensatz zu den Gerlach-Ergebnissen erhält man mit der Kugel-DFEM eine Konvergenz in der Lösung, d.h. bei einer Verfeinerung der Diskretisierung erhält man immer genauere Werte. Damit ist gleichzeitig der Nachweis erbracht, dass die DFEM prinzipiell auch für 3D-Körper „exakte“ Werte liefert, wenn man die Modifikationsterme (und insbesondere die darin enthaltenen Wechselwirkungsabstände) richtig erfasst.

Neben der Genauigkeit konnte auch die erforderliche Diskretisierungsdichte deutlich verringert werden. Während die Gerlach-Ergebnisse mit 4584 Monopolen gerechnet wurden, kommt die Kugel-DFEM im betrachteten Frequenzbereich mit deutlich weniger Monopolen aus. Die Genauigkeit ist von derselben Ordnung wie bei einer ebenen Platte unter äquivalenten Diskretisierungsbedingungen.

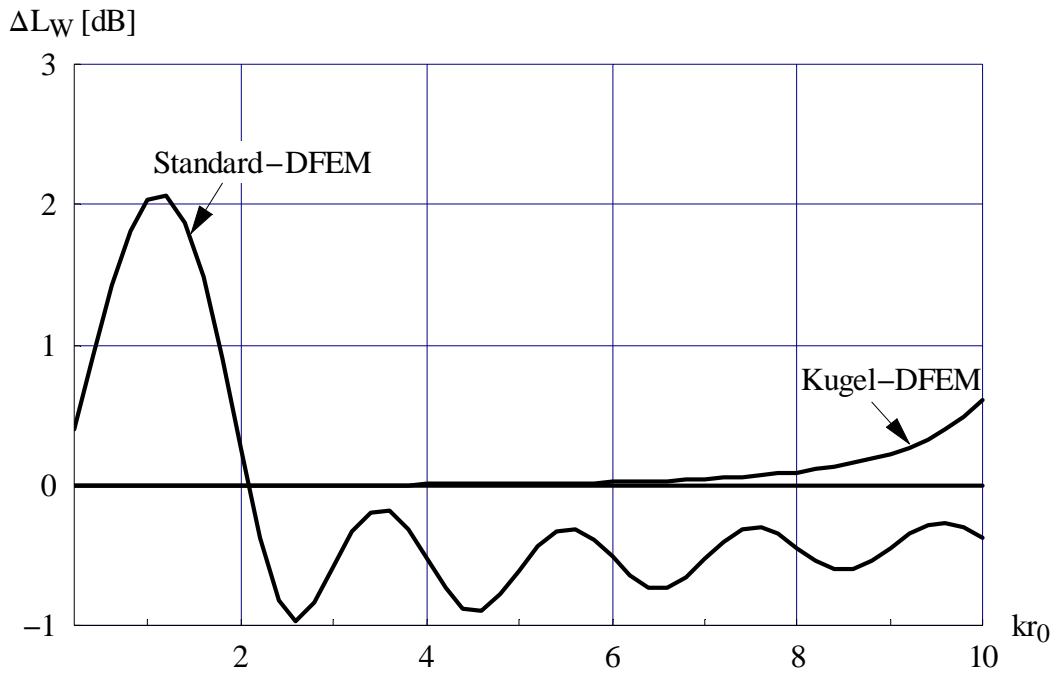


Bild 4.3: Abweichung der DFEM-Schalleistungen beim Kugelstrahler 0. Ordnung (Kugel-DFEM: 64 Monopole, Standard-DFEM: 4584 Monopole).

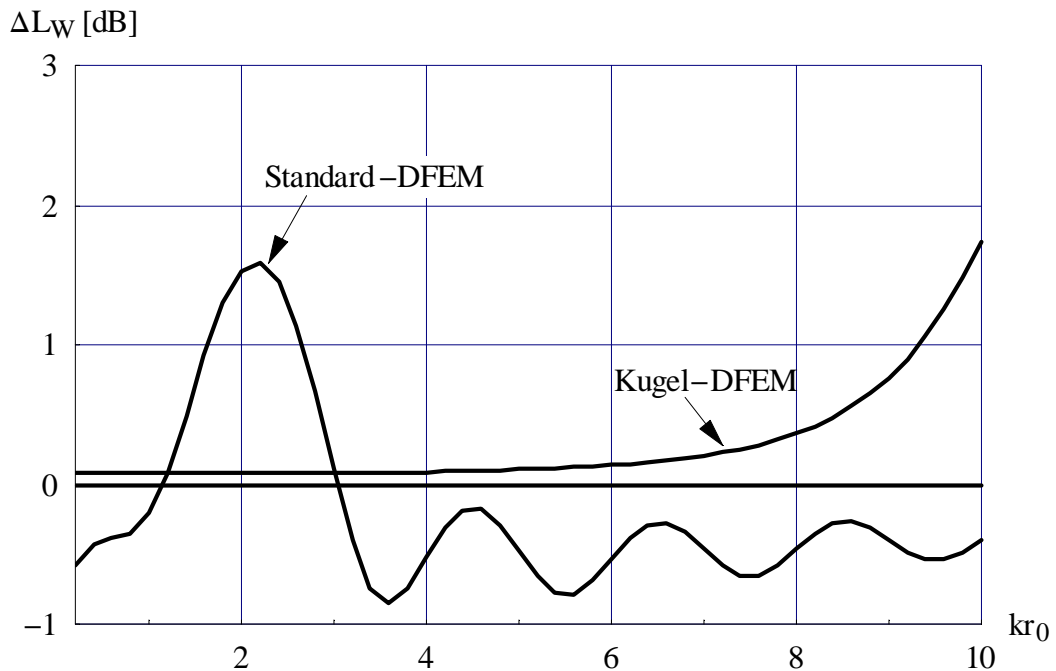


Bild 4.4: Abweichung der DFEM-Schalleistungen beim Kugelstrahler 1. Ordnung (Kugel-DFEM: 64 Monopole, Standard-DFEM: 4584 Monopole).

4.3 Bestimmung von Modifikationsfaktoren für den Wechselwirkungsterm der Standard-3D-DFEM

Die exakten Schalleistungsterme des Doppelmonopols auf einer starren Kugel können nun herangezogen werden, um einen Vergleich mit der Standard-3D-DFEM durchzuführen. Insbesondere soll festgestellt werden, wie die bisher in der DFEM verwendeten direkten bzw. kürzesten oberflächengeführten Wechselwirkungsabstände d_{ij} zu modifizieren sind, um die exakte Lösung zu erhalten.

Die exakte Lösung für die abgestrahlte Schalleistung eines Doppelmonopols auf einer starren Kugel ergibt sich nach Gleichung (4.7) zu

$$P_{\text{DoM,ex}} = \frac{\rho c}{4\pi} \frac{k^2}{2} g_{1(kr_0)} \left(\left(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 \right) + 2\hat{q}_1 \hat{q}_2 \left[\frac{g_{2(kr_0, \theta_{12})}}{g_{1(kr_0)}} \right] \cos(\varphi_{12}) \right). \quad (4.10)$$

Die Standard-3D-DFEM berechnet die abgestrahlte Schalleistung des Doppelmonopols entsprechend Gleichung (2.23) mit

$$P_{\text{DoM,dfem}} = \frac{\rho c}{4\pi} \frac{k^2}{2} g_{1(kr_0)} \left(\left(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 \right) + 2\hat{q}_1 \hat{q}_2 \left[\frac{\sin(k d_{12})}{(k d_{12})} \right] \cos(\varphi_{12}) \right), \quad (4.11)$$

wobei hier die Schalleistungsmodifikationen M_1 und M_2 durch die exakte Schalleistungsmodifikation g_1 ersetzt wurden, um den Teilfehler zu eliminieren, der durch die Näherungsberechnung nach Gleichung (2.21) entsteht. Der Wechselwirkungsabstand d_{12} ergibt sich je nach Definition (oberflächengeführt oder direkt) aus

$$\begin{aligned} d_{12,ob} &= r_0 \theta_{12} \\ d_{12,di} &= r_0 2 \sin(\theta_{12}/2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Gleichungen (4.10) und (4.11) unterscheiden sich nur durch die Terme in den eckigen Klammern, die in Bild 4.5 für das Beispiel $\theta_{12} = 90^\circ$ (Monopol 2 am Äquator) dargestellt sind.

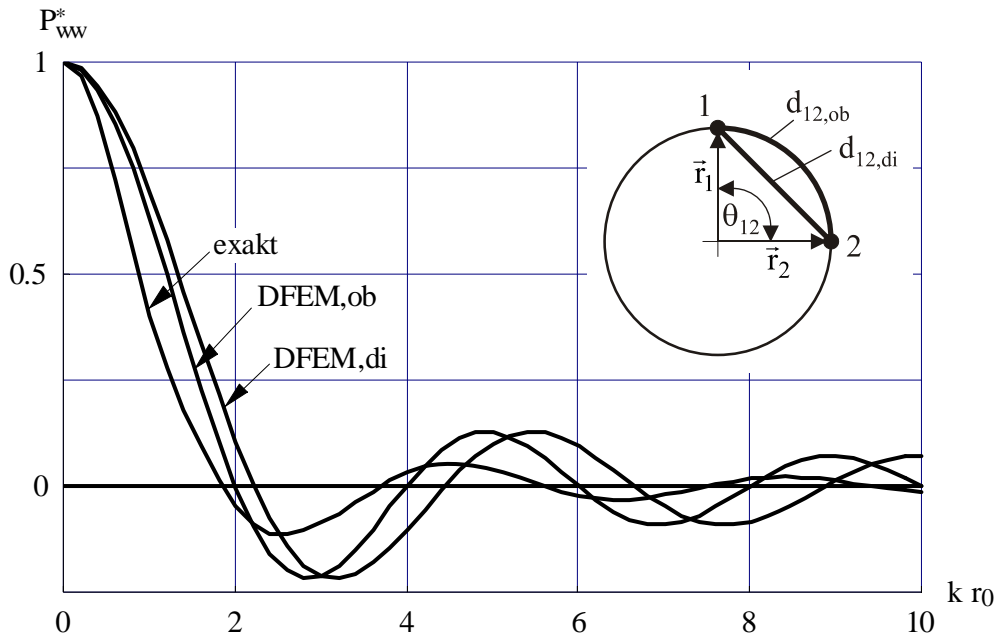


Bild 4.5: Vergleich der DFEM-Wechselwirkungsterme mit dem exakten Term nach Gleichung (4.10) und (4.11) für $\theta_{12} = 90^\circ$. DFEM mit oberflächengeführtem Abstand (ob) und mit direktem Abstand (di).

Es ist gut zu erkennen, dass die DFEM-Kurven nach rechts verschoben sind und größere Amplituden aufweisen als die Kurve der exakten Lösung. Zur Überführung der DFEM-Terme in den exakten Term wird es folglich nicht ausreichen, nur den Wechselwirkungsabstand d_{12} zu verändern, vielmehr ist auch eine Modifikation der Amplitude durchzuführen. Als Modifikationsansatz für den Wechselwirkungsterm der DFEM bietet sich daher die Darstellung

$$\alpha_{12} \frac{\sin(\beta_{12} k d_{12})}{(\beta_{12} k d_{12})} \quad (4.13)$$

an, wobei der Faktor α_{12} die Amplitude modifiziert und β_{12} den Abstand. Die Abkürzung

$$\beta_{12}^* = \beta_{12} d_{12} / r_0 \quad (4.14)$$

führt dann auf die nur noch von den Größen $k r_0$ und θ_{12} abhängige Bedingung

$$\alpha_{12(k r_0, \theta_{12})} \frac{\sin(\beta_{12(k r_0, \theta_{12})}^* k r_0)}{(\beta_{12(k r_0, \theta_{12})}^* k r_0)} = \frac{\mathfrak{g}_2(k r_0, \theta_{12})}{\mathfrak{g}_1(k r_0)}. \quad (4.15)$$

Diese eine Gleichung enthält die zwei unbekanntenen Größen α_{12} und β_{12}^* , die aber für besondere Stellen determiniert werden können, und zwar dort, wo die Funktionswerte

und die ersten Ableitungen verschwinden. Die Koeffizienten α_{12} und β_{12}^* können folglich für jeweils konstante θ_{12} entsprechend Bild 4.6 bestimmt werden. Danach ergeben sich die Koeffizienten α_{12} aus einem Vergleich der Funktionswerte der Hoch- und Tiefpunkte, die Koeffizienten β_{12}^* aus einem Vergleich der Position der Nullstellen. Durch Umformung von Gleichung (4.14) erhält man dann die β_{12} .

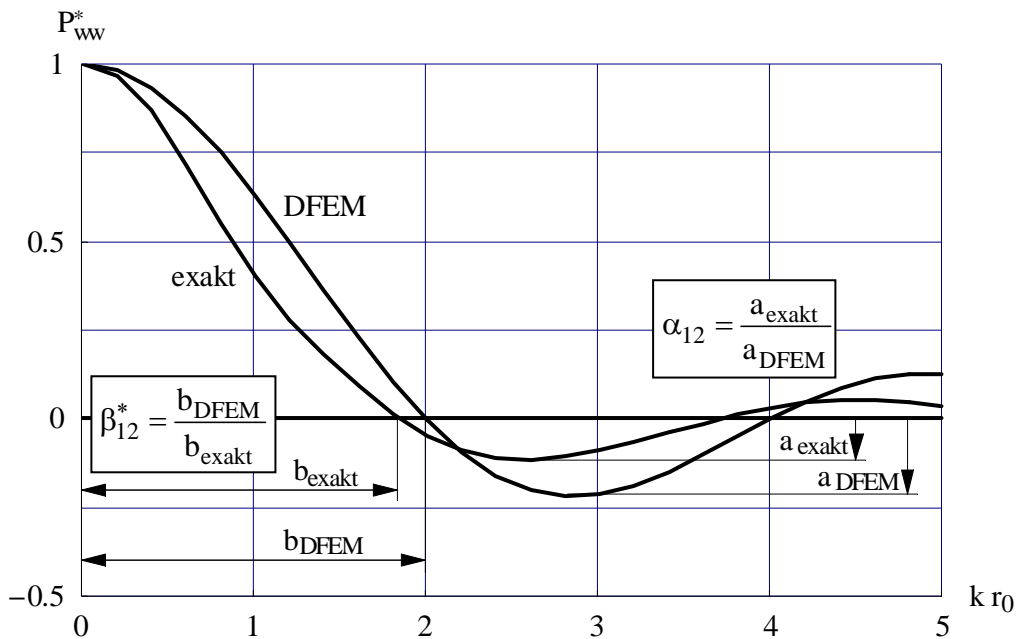


Bild 4.6: Vorgehensweise zur Bestimmung der Koeffizienten α_{12} und β_{12}^* aus den Kurvenverläufen von Bild 4.5.

Der Amplitudenmodifikationsfaktor α_{12} ist unabhängig von der Verwendung des direkten oder oberflächengeführten Abstands. Bild 4.7 zeigt α_{12} für Winkel θ_{12} in 30°-Schritten. Für alle ermittelten Werte gilt $\alpha_{12} \leq 1$. Die Amplitude des Standard-DFEM-Terms muss mit zunehmender Frequenz immer mehr gemindert werden. Für $k r_0 > 2.5$ steigt der Korrekturbedarf bis etwa $\theta_{12} = 150^\circ$ an und nimmt dann bis zum Südpol ($\theta_{12} = 180^\circ$) wieder ab. Verglichen mit der Standard-3D-DFEM ($\alpha_{12} = 1$ für alle θ_{12}) sind zu höheren Frequenzen hin sehr große Korrekturen vorzunehmen. Beispielsweise dürfte bei einem Winkel von $\theta_{12} = 150^\circ$ für eine Frequenz von $k r_0 = 10$ nur etwa 1/10 der DFEM-Amplitude verwendet werden. Bei der Berechnung der Gesamtschalleistung wirkt sich eine Korrektur allerdings nur wenig aus, da der Wechselwirkungsterm bei sehr hohen Frequenzen deutlich kleiner ist als die Summe

der Einzelleistungsterme. Bei Frequenzen $kr_0 < 5$, wo auch schon starke Amplitudenmodifikationen nötig sind und wo auch bei Gerlach [13] die größten Abweichungen auftreten, sollten die α_{12} dagegen nicht vernachlässigt werden.

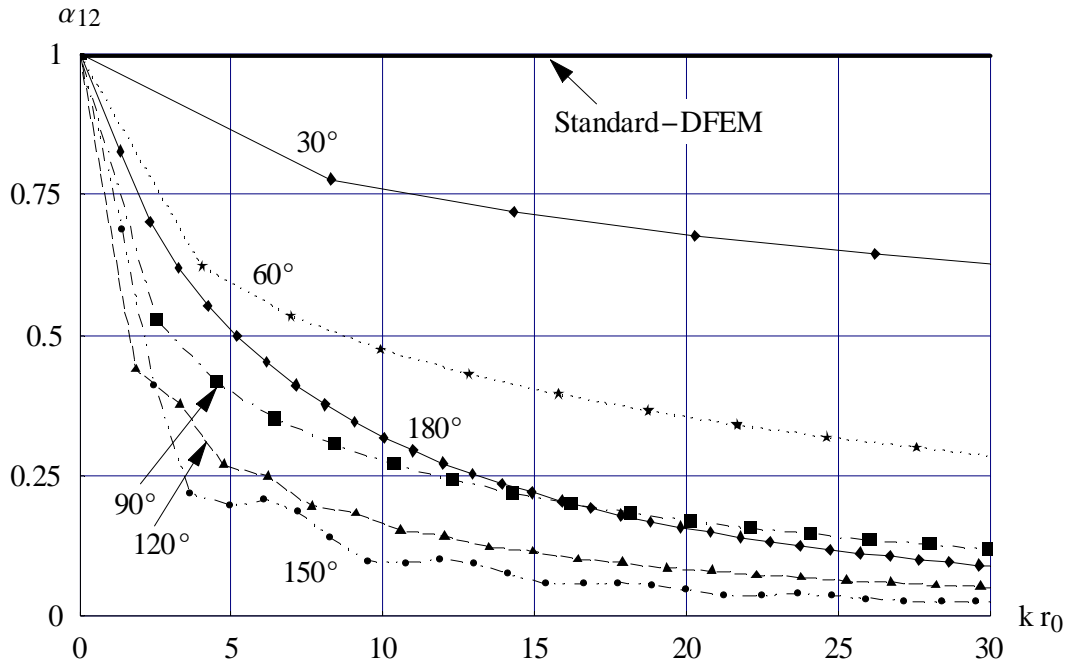


Bild 4.7: Amplitudenmodifikationsfaktor α_{12} für Winkel $\theta_{12} = 30^\circ$ bis 180° .
(Standard-3D-DFEM: $\alpha_{12} = 1$ für alle θ_{12})

In Bild 4.8 ist der Abstandskorrekturfaktor $\beta_{12,ob}$ für die oberflächengeführten Abstände $d_{12,ob}$ dargestellt. Der Funktionswert für $kr_0 = 0$ wurde auf $\beta_{12,ob} = 1$ gesetzt, da dies physikalisch einem Nicht-Korrekturbedarf entspricht. Aufgrund der Mehrdeutigkeit bei der Auswertung des Terms vom Typ $\sin(bx)/(bx)$ für $x \rightarrow 0$ wären mathematisch aber auch andere Werte für einen Koeffizienten b denkbar. Analog zum Amplitudenmodifikationsfaktor α_{12} steigt der Korrekturbedarf bis zu einem Winkel von $\theta_{12} = 150^\circ$ an und nimmt dann bis 180° wieder ab. Für alle θ_{12} ist $\beta_{12,ob} \geq 1$, d.h. die Wechselwirkungsabstände der Standard-DFEM müssen um den Faktor $\beta_{12,ob}$ größer gewählt werden als die oberflächengeführten Abstände. Verglichen mit der Standard-3D-DFEM ($\beta_{12,ob} = 1$ für alle θ_{12}) ist der Korrekturbedarf für $kr_0 > 5$ nur gering. Für $kr_0 < 5$ sollten die Korrekturen speziell für einen Monopol 2 auf der Südhalbkugel $\theta_{12} = 90^\circ \dots 180^\circ$ nicht vernachlässigt werden. Insbesondere für

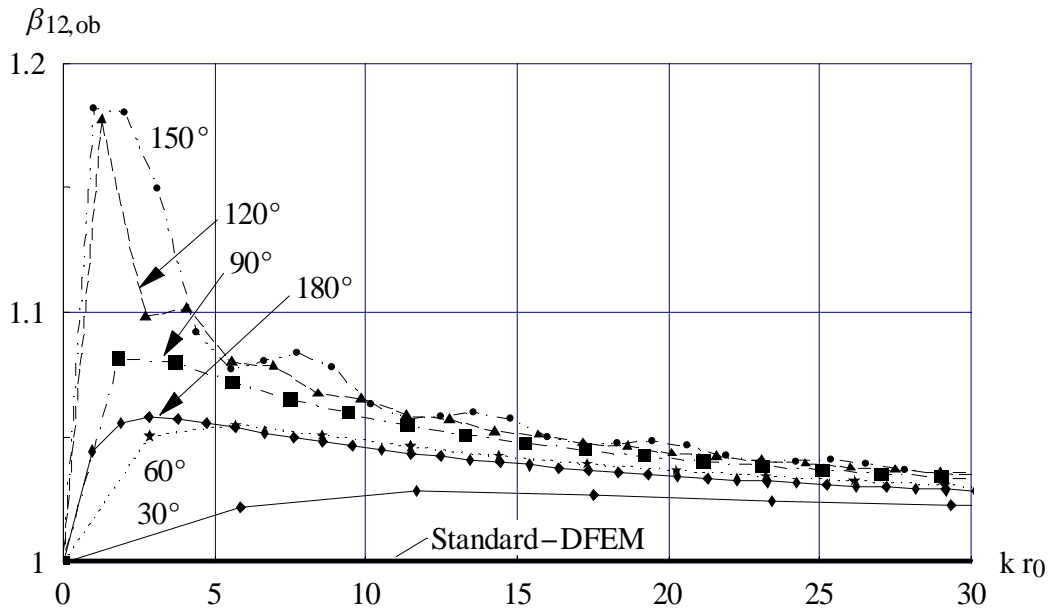


Bild 4.8: Abstandsmodifikationsfaktor $\beta_{12,ob}$ der oberflächengeführten Abstände für Winkel $\theta_{12} = 30^\circ \dots 180^\circ$. (Standard-3D-DFEM: $\beta_{12,ob} = 1$ für alle θ_{12})

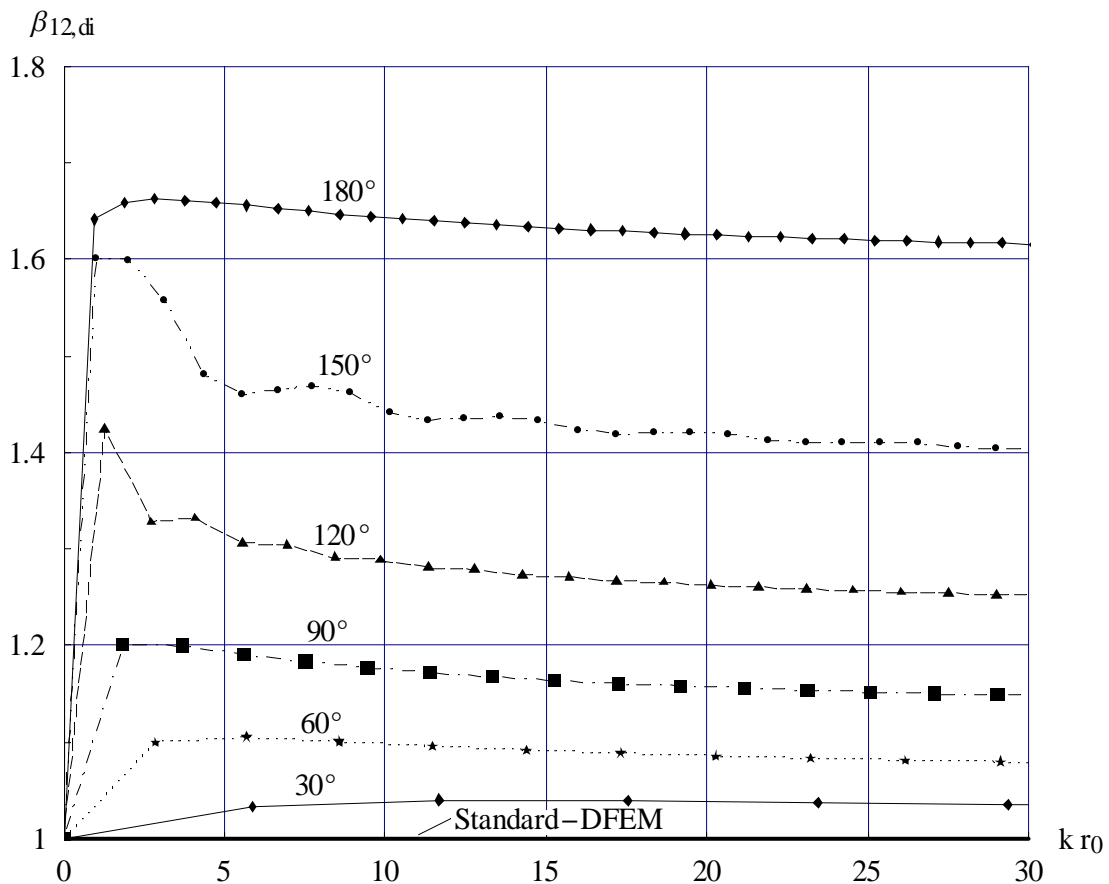


Bild 4.9: Abstandsmodifikationsfaktor $\beta_{12,di}$ der direkten Abstände für Winkel $\theta_{12} = 30^\circ \dots 180^\circ$. (Standard-3D-DFEM: $\beta_{12,di} = 1$ für alle θ_{12})

Zahlenwerte $kd_{12} \approx \pi$, wo der Term $\sin(kd_{12})/(kd_{12})$ eine Nullstelle besitzt, kann sich durch die Nichtberücksichtigung der Korrektur ein Vorzeichenwechsel des Wechselwirkungsterms ergeben, wodurch sich bei der Schalleistungsberechnung einer Monopolbelegung Abweichungen aufaddieren könnten.

Der Abstandsmodifikationsfaktor $\beta_{12,di}$ für die direkten Abstände ergibt sich an der Kugel auch aus der einfachen geometrischen Beziehung

$$\beta_{12,di} = \frac{1}{\frac{\sin(\theta_{12}/2)}{\theta_{12}/2}} \beta_{12,ob} \quad (4.16)$$

Auch hier wird der Funktionswert für $kr_0 = 0$ auf $\beta_{12,di} = 1$ gesetzt.

Bild 4.9 zeigt, dass der Korrekturbedarf der direkten Abstände deutlich größer ist als bei den oberflächengeführten Abständen. Dies bestätigt auch die Untersuchungsergebnisse von Gerlach. Im Gegensatz zu den Modifikationsfaktoren für die oberflächengeführten Abstände steigt aber der Korrekturbedarf mit dem Winkel θ_{12} kontinuierlich an. Dies könnte sich bei dem Versuch einer analytischen Erfassung der Kurvenverläufe als nützlich erweisen. Die Benutzung der direkten Abstände ist insbesondere aufgrund der einfachen und schnellen Berechnung interessant.

4.4 Überprüfung der Modifikationsfaktoren anhand des Schalldruckfeldes

Die Bestimmung der Modifikationsfaktoren α_{12} und β_{12} erfolgte mit Monopolen, die unmittelbar auf der Oberfläche angeordnet waren. Zur Überprüfung der Modifikationsfaktoren mit dem Schallfeld kann zwar das Schalldruckfeld eines Monopols auf einer starren Kugel bereitgestellt werden, die Auswertung ist allerdings in Oberflächennähe schlecht durchführbar. Eine Auswertung ist aber näherungsweise möglich mit dem Schallfeld eines (kleinen) Kappenstrahlers, wenn sie in geringer Entfernung über der Oberfläche und nicht zu nah an der Kappe (aufgrund deren Ausdehnung) durchgeführt wird.

Das Schalldruckfeld des Nordpolkappenstrahlers ist in Anhang B angegeben. Damit die Kappe näherungsweise wie ein Monopol wirkt, ist die kleinste betrachtete Luftschallwellenlänge $\lambda_{L,\min}$ deutlich größer zu wählen als der Kappendurchmesser d_K . Geht man davon aus, dass die Kappe sich noch wie ein Monopol verhält, wenn für das Verhältnis $\lambda_{L,\min}/d_K \geq 5$ gilt, so ist für eine maximal zu betrachtende Frequenz von $kr_0 = 10$ ein Kappenöffnungswinkel von $\vartheta_K = 3.6^\circ$ zu wählen. Die Auswertung des Schalldruckfeldes erfolgt dicht an der Oberfläche bei einem Aufpunktradius von $r_A = 1.01 \cdot r_0$. Aufgrund der eingeführten Näherungen sind insbesondere im Schalldruckbetrag Abweichungen von einigen Zehntel dB zu erwarten. Die Auswertung ist daher dort sinnvoll, wo die Modifikationsfaktoren am größten sind. Dies ist bei höheren Frequenzen der Fall und wenn der zweite Monopol auf der Südhalbkugel liegt ($\theta_{12} = 90^\circ \dots 180^\circ$).

Bild 4.10 zeigt den Betrag des Schalldrucks vom Nordpol zum Südpol ($\vartheta = 0 \dots \pi$) für verschiedene Frequenzen. Die Schalldruckkurven wurden mit dem jeweiligen Schalldruck im Nordpol normiert, so dass alle Kurven für $\vartheta = 0$ den Wert $p_{ob}^* = 1$ besitzen. Während bei der ungestörten Schallausbreitung von einem (Vollraum-) Monopol aus die Kurven für alle Frequenzen durch die Normierung übereinander liegen, weichen die Kurven der Kappe zu höheren Frequenzen hin immer mehr voneinander ab. Zusätzlich bilden sich Einschnürungen im Südpolbereich. Die Anwesenheit der Kugel bewirkt offensichtlich zu höheren Frequenzen hin eine deutliche Amplitudenabnahme.

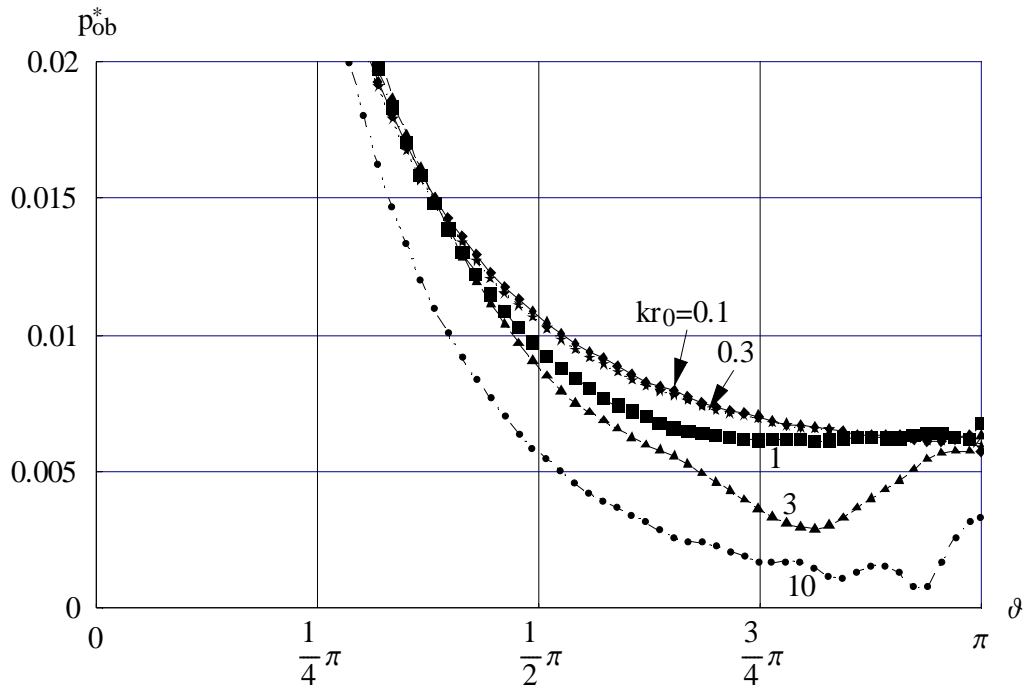


Bild 4.10: Normierte Schalldruckverläufe für einen Nordpolkappenstrahler entlang der Oberfläche (Aufpunktradius $r_A = 1.01 \cdot r_0$) nach Anhang B bei einer Verwendung von $n_{\max} = 101$ Summentermen. Normierung mit dem jeweiligen Schalldruck im Nordpol.

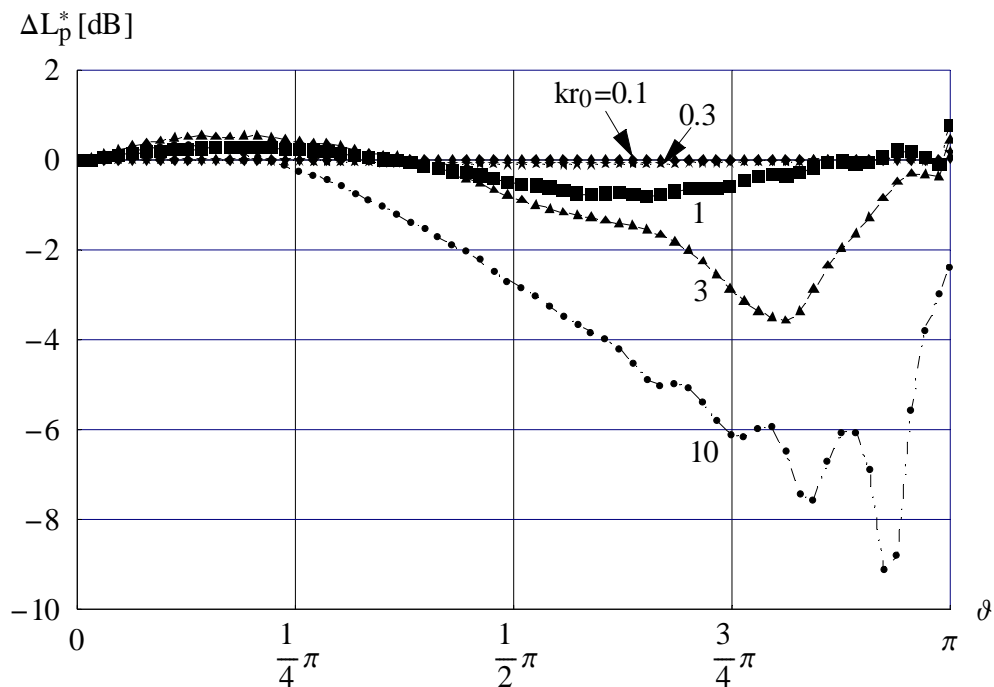


Bild 4.11: Abweichung der Schalldruckkurven aus Bild 4.10 von der Kurve der (fast) ungestörten Ausbreitung mit $kr_0 = 0.0001$.

Dies ist noch deutlicher zu erkennen, wenn in Bild 4.11 die Abweichung der Schalldruckkurven aus Bild 4.10 zur Kurve der (fast) ungestörten Ausbreitung von $kr_0 = 0.0001$ betrachtet wird. Mit zunehmender Frequenz nimmt die Amplitude im Bereich der Südhalbkugel ab und zum Südpol hin wieder zu. Dies bestätigt die Verläufe des Amplitudenmodifikationsfaktors α_{12} nach Bild 4.7.

Bild 4.12 zeigt das Schallfeld in der Umgebung der Kugel mit Radius $r_0 = 1$. Auf der linken Seite sind die Schalldruckbeträge dargestellt. Man erkennt für tiefe Frequenzen ($kr_0 = 0.1$) eine fast ungestörte Schallausbreitung. Für $kr_0 = 1$, wo die Luftschallwellenlänge in der Größenordnung der Körperabmessungen liegt, treten im Südpolbereich erste Beugungserscheinungen auf. Für hohe Frequenzen ($kr_0 = 10$) erscheint die typische Keulenausbildung im Südpolbereich (analog zu den Einschnürungen in Bild 4.10 bzw. 4.11). Zur Überprüfung des Abstandsmodifikationsfaktors β_{12} kann die Phase des Schalldruckfeldes herangezogen werden. Eine besonders anschauliche Darstellung bietet die Frequenz $kr_0 = 1$ (Bild 4.12, Mitte, rechts), da die Luftschallwellenlänge hier dem Kugelumfang entspricht. Die dick gezogene Konturlinie ist die Phase $\varphi = \pi$. Bei einer ungestörten Ausbreitung, wie es bei der Standard-DFEM angenommen wird, müsste diese Konturlinie im vorliegenden Fall einen Abstand $d = \pi$ vom Entstehungsort des Schalls haben, d.h. sie müsste genau in den Südpol münden. Tatsächlich läuft sie aber bei einem Winkel von $\vartheta_{\text{ex}} = 2.69$ an die Kugeloberfläche. Während also eine ungestörte Schallwelle den Weg $d_{\text{DFEM}} = \pi$ zurücklegt, hat die Schallwelle entlang der Kugeloberfläche erst den Weg $d_{\text{ex}} = 2.69$ zurückgelegt. Das Verhältnis $d_{\text{DFEM}}/d_{\text{ex}}$ liefert unmittelbar den über das Schalldruckfeld bestimmten Abstandsmodifikationsfaktor $\beta_{12,\text{ob}}^{(p)} = 1.168$ für den oberflächengeführten Abstand. Der über die Schalleistung bestimmte exakte Modifikationsfaktor beträgt im vorliegenden Fall $\beta_{12,\text{ob}} = 1.167$. Wenn das Schallfeld in Oberflächennähe genau genug gegeben ist, kann die Bestimmung des Abstandsmodifikationsfaktors β_{12} bei Monopolen auf einer starren Kugel auch über die Phase des Schalldruckfeldes erfolgen.

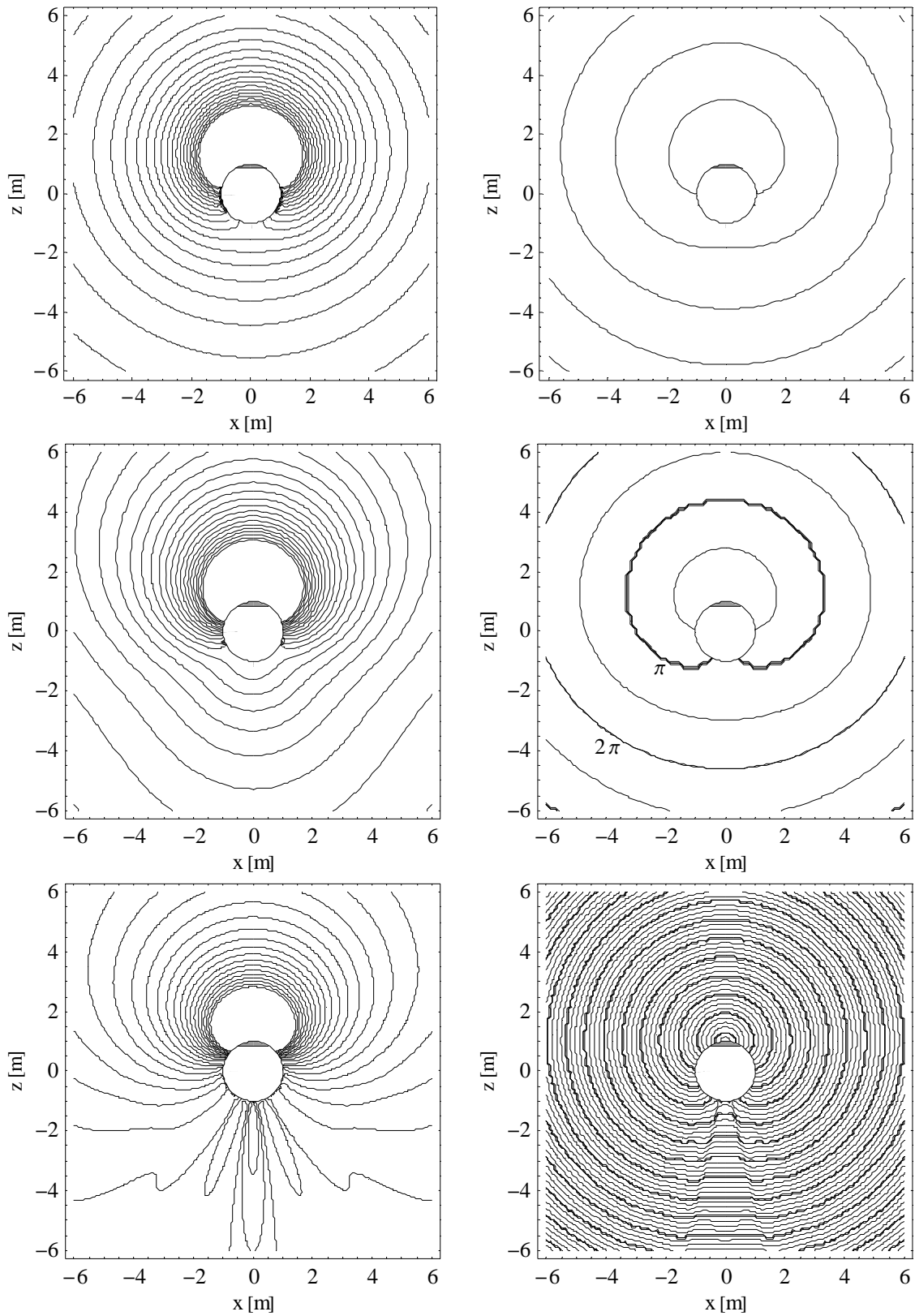


Bild 4.12: Schalldruckfeld eines Nordpolkappenstrahlers (oben: $kr_0 = 0.1$, Mitte: $kr_0 = 1$, unten: $kr_0 = 10$; links: Betrag, rechts: Phase). Kugel mit Radius $r_0 = 1$, Kappe mit Öffnungswinkel $\vartheta_K = 3.6^\circ$ (nicht maßstabsgetreu dargestellt).

4.5 Anwendung der Modifikationsfaktoren am Beispiel des Doppelmonopols auf einer starren Kugel

Die in Kapitel 4.3 ermittelten Modifikationsfaktoren für den DFEM-Wechselwirkungsterm sollen nun am Grundbaustein der DFEM – dem Doppelmonopol – angewendet werden, um die verbleibenden Abweichungen der modifizierten DFEM zu ermitteln. Als Beispiel wird der gleichphasig schwingende Doppelmonopol auf einer starren Kugel gewählt, dessen exakte Schalleistung nach Kapitel 4.2.2.1 mit

$$P_{\text{DoMon,ex}} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}^2}{2} g_{1(kr_0)} \left(2 + 2 \frac{g_{2(kr_0, \theta_{12})}}{g_{1(kr_0)}} \right) \quad (4.17)$$

gegeben ist (Schallflussamplituden $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$). Die modifizierte DFEM bestimmt die Schalleistung mittels

$$P_{\text{DoMon,mod}} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}^2}{2} M_{(kr_0)} \left(2 + 2 \alpha_{12(kr_0, \theta_{12})} \frac{\sin(\beta_{12(kr_0, \theta_{12})} k d_{12})}{(\beta_{12(kr_0, \theta_{12})} k d_{12})} \right). \quad (4.18)$$

Dabei wird die Schalleistungsmodifikation M DFEM-gemäß nach Kapitel 2.3.3 berechnet. Die Amplitudenmodifikationsfaktoren α_{12} werden nach Bild 4.7 und die Abstandsmodifikationsfaktoren β_{12} nach Bild 4.8 bzw. 4.9 mittels linearer Interpolation bestimmt. Die Schalleistung der Standard-DFEM ergibt sich durch $\alpha_{12} = \beta_{12} = 1$. Wie in den vorangegangenen Abschnitten wird auch hier der Monopol 1 in den Nordpol gesetzt, Monopol 2 wird vom Nordpol aus in 30° -Schritten auf der Kugel positioniert.

In den Bildern 4.13 und 4.14 werden die Abweichungen der Standard-DFEM von der exakten Schalleistung bei einer Verwendung des kürzesten oberflächengeführten Abstands d_{OB} und des direkten Abstands d_{DI} zwischen den Monopolen dargestellt. Die Auftragung erfolgt über dem Verhältnis von Kugeldurchmesser $2r_0$ zu Luftschallwellenlänge λ_L und macht den Einfluss der Kugel auf die Wechselwirkung der Monopole sichtbar. Die größten Abweichungen treten auf, wenn der Kugeldurchmesser kleiner ist als die Luftschallwellenlänge. Die Abweichungen liegen bei einer Verwendung der oberflächengeführten Abstände zwischen -0.8 dB und $+1.4$ dB, bei einer Verwendung der direkten Abstände zwischen -1.4 dB und $+2.3$ dB.

Lw,dfem–Lw,ex [dB]

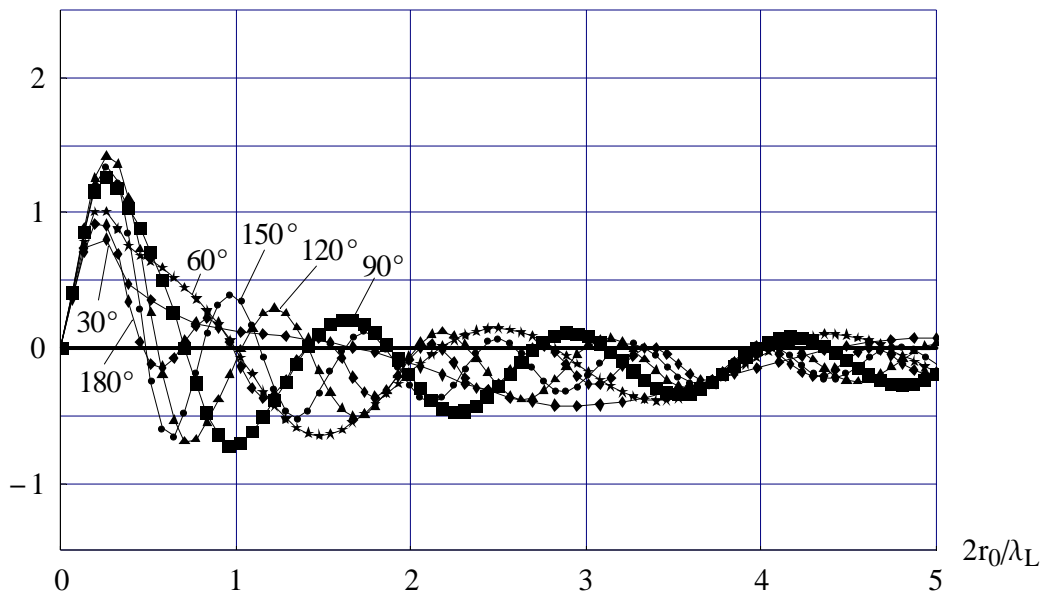


Bild 4.13: Abweichung der DFEM-Gesamtschalleistung eines gleichphasig schwingenden Doppelmonopols auf einer starren Kugel ($\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$, $\varphi_{12} = 0$). Berechnung mit der Standard-DFEM unter Verwendung des kürzesten oberflächengeführten Abstands.

Lw,dfem–Lw,ex [dB]

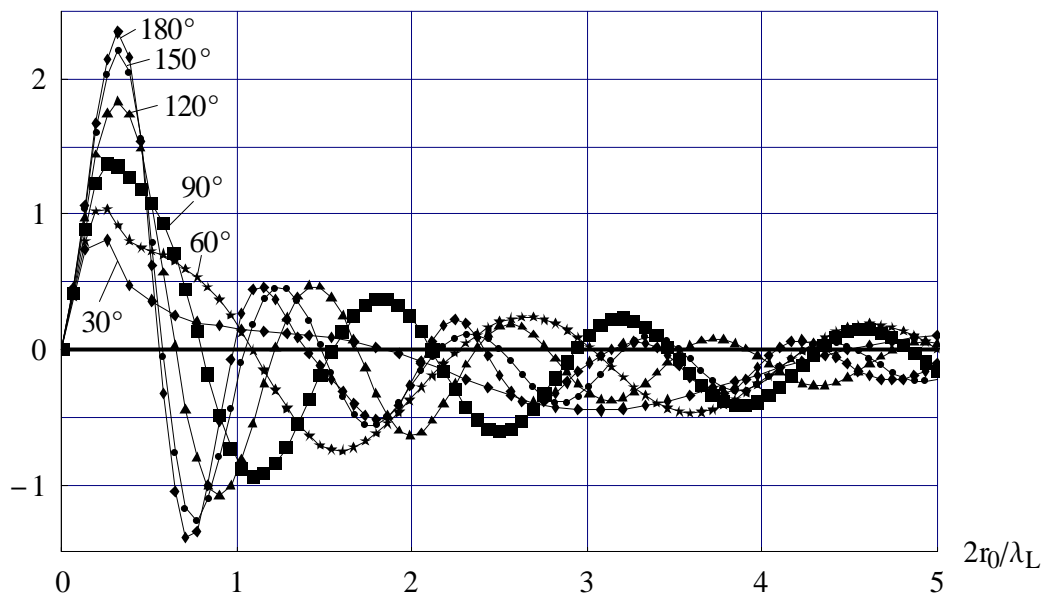


Bild 4.14: Abweichung der DFEM-Gesamtschalleistung eines gleichphasig schwingenden Doppelmonopols auf einer starren Kugel ($\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$, $\varphi_{12} = 0$). Berechnung mit der Standard-DFEM unter Verwendung des direkten Abstands.

Wählt man für die Auftragung der Kurven als Abszisse das Verhältnis des Monopolabstands d_{12} zur Luftschallwellenlänge λ_L (Bild 4.15 und 4.16), so schieben sich die Kurven der Standard-DFEM übereinander. Sowohl beim oberflächengeführten als auch beim direkten Abstand wird eine Periodizität der Abweichungen erkennbar mit der Periode d_{12}/λ_L . Die größten Abweichungen treten auf, wenn der Abstand zwischen den Monopolen kleiner ist als die Luftschallwellenlänge. Für $d_{12} > \lambda_L$ sind die Abweichungen stets kleiner als etwa ± 0.5 dB.

Die Bilder 4.17 und 4.18 zeigen die Abweichungen der modifizierten DFEM. Die Abweichungen sind fast nur noch abhängig von der Berechnung der Schalleistungsmodifikation (vgl. S. 39, Bild 2.9) und liegen für $d_{12} < \lambda_L$ zwischen -0.2 dB und $+1.0$ dB, für $d_{12} > \lambda_L$ zwischen ± 0.2 dB. Der Beitrag des Wechselwirkungsterms zu dieser Gesamtabweichung liegt für $d_{12} < \lambda_L$ nur noch bei etwa 0.2 dB und für $d_{12} > \lambda_L$ unter 0.1 dB. Dies wird durch die Einfachheit der linearen Interpolation bewirkt und kann verglichen mit den praxisüblichen Anforderungen in der Technischen Akustik bereits als sehr gutes Ergebnis betrachtet werden.

$L_{w,dfem} - L_{w,ex}$ [dB]

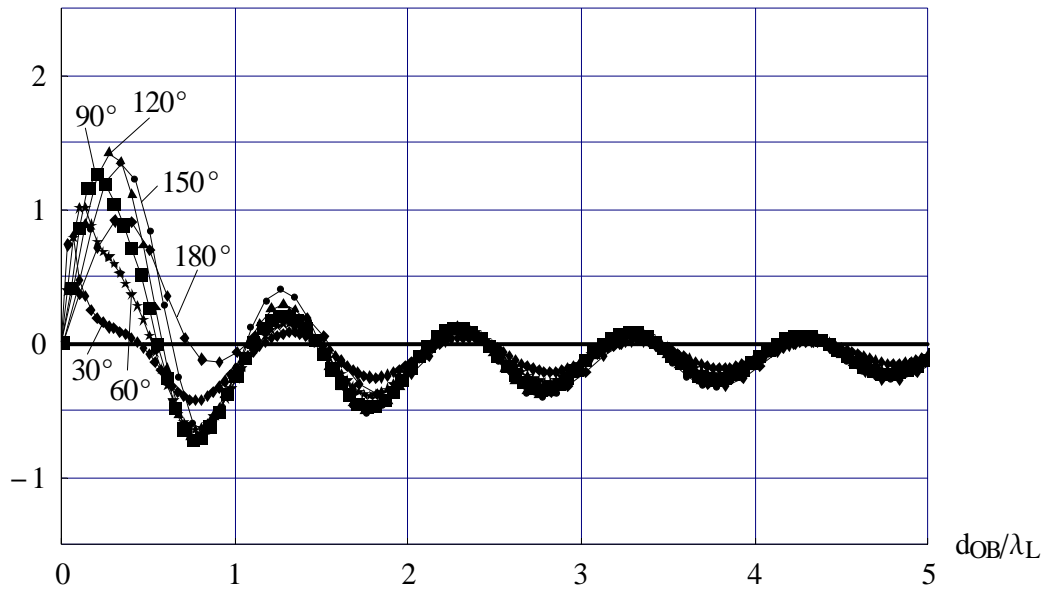


Bild 4.15: wie Bild 4.13, aber Auftragung über dem Verhältnis von oberflächengeführtem Abstand d_{OB} zu Luftschallwellenlänge λ_L durch Achsentransformation mittels Gleichung (4.12).

$L_{w,dfem} - L_{w,ex}$ [dB]

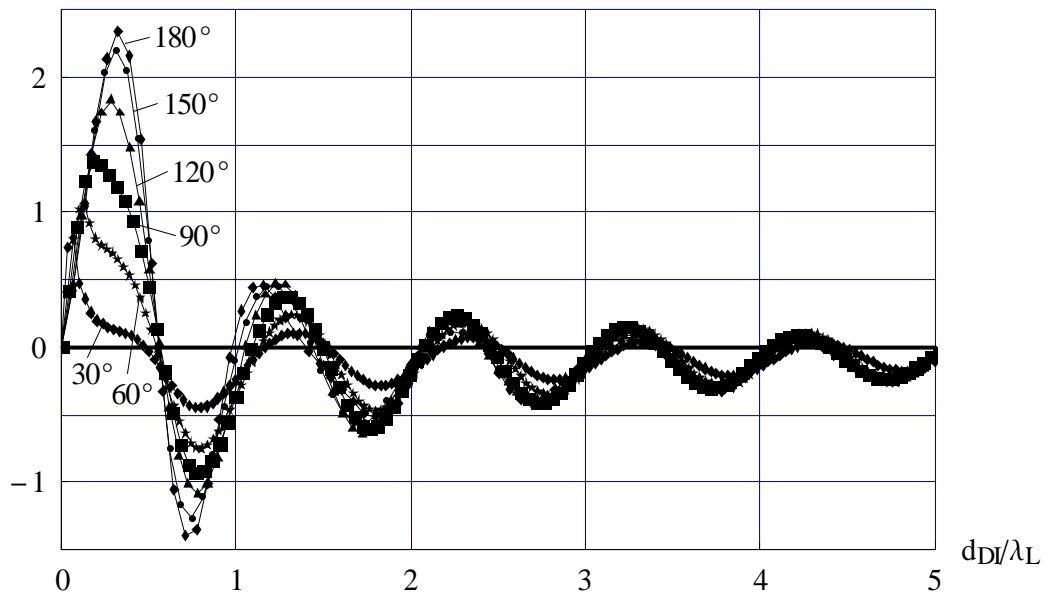


Bild 4.16: wie Bild 4.14, aber Auftragung über dem Verhältnis von direktem Abstand d_{DI} zu Luftschallwellenlänge λ_L durch Achsentransformation mittels Gleichung (4.12).

$L_{w,dfem} - L_{w,ex}$ [dB]

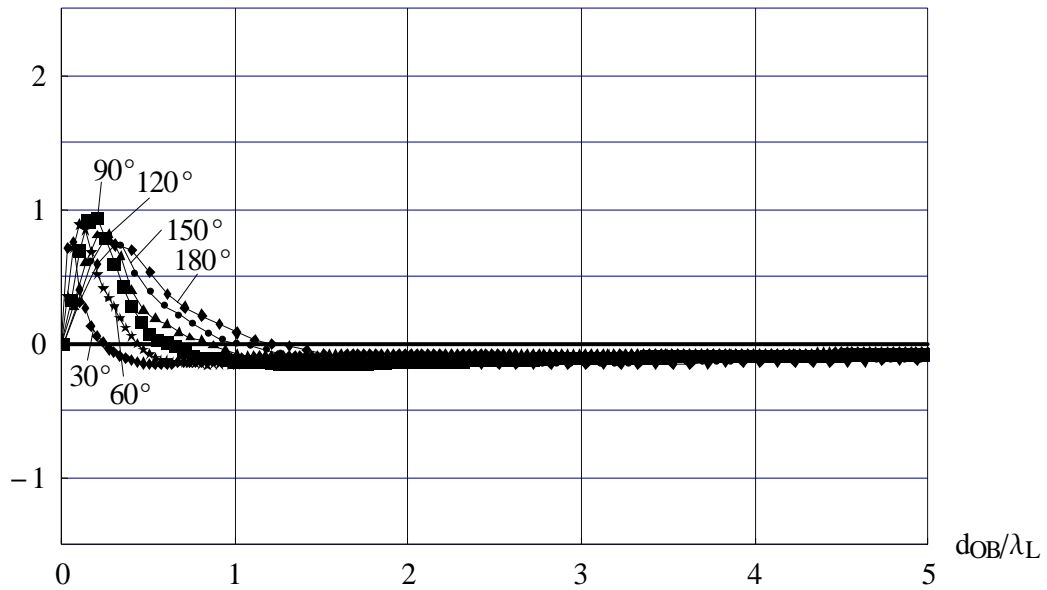


Bild 4.17: Abweichung der DFEM-Gesamtschalleistung eines gleichphasig schwingenden Doppelmonopols auf einer starren Kugel ($\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$, $\varphi_{12} = 0$). Berechnung mit der modifizierten DFEM unter Verwendung des kürzesten oberflächengeführten Abstands.

$L_{w,dfem} - L_{w,ex}$ [dB]

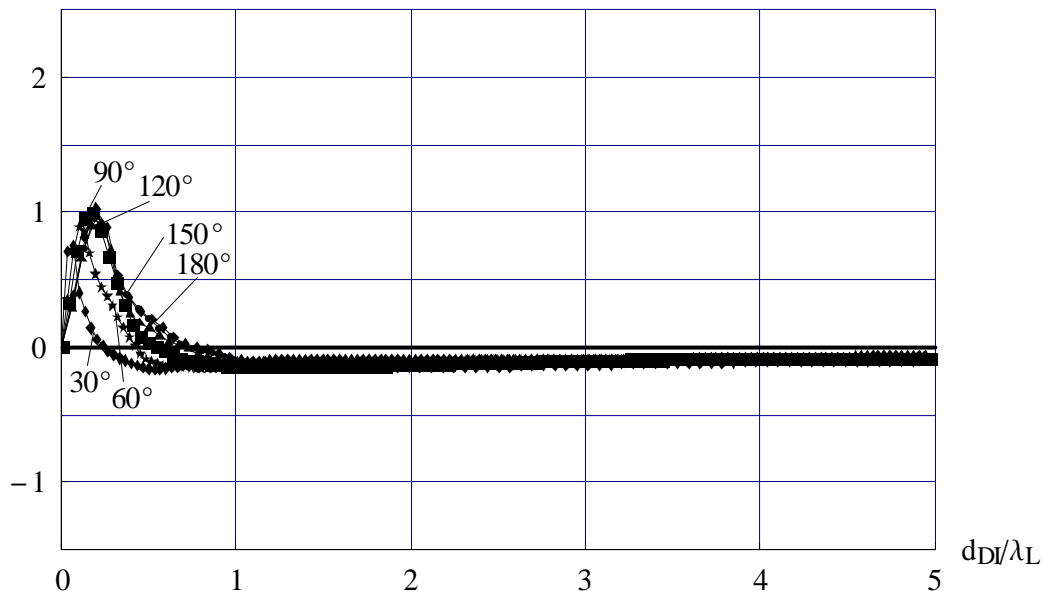


Bild 4.18: Abweichung der DFEM-Gesamtschalleistung eines gleichphasig schwingenden Doppelmonopols auf einer starren Kugel ($\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$, $\varphi_{12} = 0$). Berechnung mit der modifizierten DFEM unter Verwendung des direkten Abstands.

4.6 Zusammenfassung zu Kapitel 4

In diesem Kapitel wurden die Wechselwirkungsabstände von zwei Monopolen auf einer starren Kugel untersucht. Die Betrachtung erfolgte mit Hilfe von Modifikationsfaktoren für die bisher in der DFEM verwendeten direkten bzw. kürzesten oberflächengeführten Abstände. Ein Vergleich des hergeleiteten exakten Wechselwirkungsterms mit denen der Standard-DFEM zeigte, dass es nicht ausreicht, nur den Abstand zu modifizieren, um den DFEM-Term in den exakten Term zu überführen, sondern dass auch die Amplitude zu modifizieren ist.

Der Amplitudenmodifikationsfaktor α_{12} ist unabhängig von der Wahl des direkten oder oberflächengeführten Abstands. Die Wechselwirkungsterme der Standard-DFEM sind zu höheren Frequenzen hin immer stärker zu mindern, insbesondere dann, wenn zwei Monopole sich auf der Kugel fast gegenüberliegen. Eine Korrektur ist allerdings nur notwendig für den Frequenzbereich von etwa $kr_0 < 5$, da die Wechselwirkungsterme im Vergleich zu den Einzelleistungstermen für hohe Frequenzen nur noch geringen Einfluss auf die Gesamtschalleistung haben.

Die Untersuchung des Abstandsmodifikationsfaktors β_{12} zeigte, dass der Wechselwirkungsabstand bis zu 20% größer zu wählen ist als der kürzeste oberflächengeführte Abstand. Bei einer Modifikation der oberflächengeführten Abstände tritt der größte Korrekturbedarf für $kr_0 \leq 5$ auf, wenn zwei Monopole sich auf der Kugel fast gegenüberliegen. Für $kr_0 > 5$ kann eine Modifikation weitgehend vernachlässigt werden. Bei einer Modifikation der direkten Abstände sind die Modifikationsfaktoren deutlich größer, dafür ist der Kurvenverlauf wesentlich einfacher, da ein kontinuierlicher Anstieg mit dem Winkel θ_{12} erfolgt.

Die Überprüfung der Modifikationsfaktoren an Hand des Schalldruckfeldes eines Nordpolkappenstrahlers ergab entsprechend der eingeführten Näherungen eine Bestätigung der Kurvenverläufe.

Die Anwendung der Modifikationsfaktoren am Beispiel des Doppelmonopols auf einer starren Kugel zeigte, dass die Abweichungen der modifizierten DFEM fast nur noch von der Berechnung der Schalleistungsmodifikation abhängen. Für die starre Kugel liegen diese Abweichungen für Monopolabstände, die kleiner sind als die Luftschallwellenlänge, zwischen -0.2 dB und $+1.0$ dB, für Monopolabstände, die

größer sind als die Luftschallwellenlänge, zwischen ± 0.2 dB. Der Beitrag des Wechselwirkungsterms zur Gesamtabweichung beträgt bei der Verwendung einer linearen Interpolation nur noch weniger als 0.2 dB.

Erste Untersuchungen an quaderförmigen Geometrien zeigten qualitativ sehr ähnliche Kurvenverläufe für die Modifikationsfaktoren α_{12} und β_{12} , so dass es möglich sein könnte, auch für maschinenbautypische Geometrien einfache Korrekturfaktoren für den DFEM-Wechselwirkungsterm bereitzustellen, um die Rechengenauigkeit zu erhöhen.

5 Ausblick

In Kapitel 3 konnte die Rechenzeit der 3D-DFEM deutlich reduziert werden. Eine weitere Verkürzung der Rechenzeit könnte insbesondere bei großen Elementanzahlen erreicht werden, indem man mit einem Multigrid-Verfahren den quadratischen Rechenaufwand des zweiten DFEM-Berechnungsschrittes reduziert.

Die in Kapitel 4 durchgeführten Untersuchungen des DFEM-Wechselwirkungsterms sollten auch bei anderen Geometrien erfolgen. Hier könnte ein weiteres der 11 Koordinatensysteme herangezogen werden, in denen mit dem Separationsverfahren exakte Lösungen der Wellengleichung angegeben werden können. Beispielsweise könnte eine 3D-DFEM entwickelt werden, die alle Beugungseffekte an einem Ellipsoid oder an einem Sphäroid erfasst. Für die Anwendung in der Praxis wäre auch die Wechselwirkung eines beliebig auf einem Quader angeordneten Doppelmonopols interessant. Durch Spiegelung kann eine quaderförmige Maschinenkapsel auf einer starren Ebene simuliert werden. Eine solche Untersuchung könnte mit der Randelementmethode durchgeführt werden.

Das Fernziel sind Modellierungsregeln für allgemein gestaltete Körper (eventuell eingeteilt in bestimmte Maschinentypen), die bei einer bestimmten Frequenz und einer bestimmten Diskretisierungsdichte eine für die Praxisanforderungen ausreichende Genauigkeit garantieren. Denkbar sind auch statistische Grenzen, wie sie bei der internationalen Standardisierung von Messverfahren üblich sind, wo z.B. mit 95% Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Genauigkeit garantiert wird.

A Exakte Schalleistungen für ausgewählte Strahleranordnungen

A.1 Kreisförmige Kolbenmembran 0-ter Ordnung

Die von einer in einer unendlich ausgedehnten starren Ebene eingebetteten Kolbenmembran abgestrahlte Schallleistung kann über die Rayleighsche Darstellung der Schallabstrahlung bestimmt werden [16]. In der Literatur [19] ist für die gleichphasig schwingende kreisförmige Kolbenmembran die exakte Lösung mit

$$P^{(0)} = \rho c \left(\pi r_0^2 \right) \frac{\hat{v}^2}{2} \left(1 - \frac{J_1(2kr_0)}{kr_0} \right) \quad (\text{A.1})$$

angegeben. Hier ist ρc die Schallkennimpedanz, r_0 der Membranradius, \hat{v} die Schwingschnelleamplitude der Membran, k die Wellenzahl, und J ist die Besselfunktion 1. Gattung, die sich nach [17] bei n -ter Ordnung aus der Reihenentwicklung

$$J_{n(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(n+i+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2i} \quad (\text{A.2})$$

ergibt. Da sich die Gammafunktion Γ für natürliche Zahlen zu $\Gamma(n+i+1) = (n+i)!$ vereinfacht, erhält man die in Gleichung (A.1) zu verwendende Besselfunktion 1. Gattung 1. Ordnung durch

$$\begin{aligned} J_{1(x)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(i+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2i} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{2} \right)^5 - \frac{1}{144} \left(\frac{x}{2} \right)^7 + \frac{1}{2880} \left(\frac{x}{2} \right)^9 - \frac{1}{86400} \left(\frac{x}{2} \right)^{11} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Die in Gleichung (A.3) explizit aufgeführten Reihenterme bis zur 11. Ordnung ermöglichen bereits die Berechnung der Funktion bis zu $x \leq 5$ auf 5% genau.

A.2 Kugelstrahler (n, m)-ter Ordnung

Die Herleitung erfolgt mit dem Separationsverfahren [19], das die Wellengleichung in 11 Koordinatensystemen durch einen Produktansatz der Koordinaten löst [20] [21]. Im vorliegenden Fall wird das Kugel-Koordinatensystem mit den Koordinaten (r, ϑ, φ) benutzt, wobei die flächennormale Schwingschnelle auf der Kugeloberfläche für die Koordinate $r = r_0$ vorgegeben wird. Die Formel für die Schallleistung hängt von der Wahl der Schwingungsverteilung ab. Mit den nicht normierten Legendre-Funktionen P_n^m erhält man für die Schwingungsverteilung

$$v_{(\vartheta, \varphi)}^{(n, m)} = \hat{v}_0 P_{n(\cos(\vartheta))}^m \cos(m\varphi) \quad (\text{A.4})$$

die Schallleistung des Kugelstrahlers (n, m)-ter Ordnung zu

$$P^{(n, m)} = \rho c 4\pi r_0^2 \frac{1 + \delta_{0m}}{2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{\hat{v}_0^2}{2} \sigma_{(kr_0)}^{(n)}. \quad (\text{A.5})$$

Wählt man die Schwingungsverteilung mit den normierten Legendre-Funktionen

$$\tilde{P}_{n(\cos(\vartheta))}^m = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n(\cos(\vartheta))}^m, \quad (\text{A.6})$$

so vereinfacht sich die Schallleistungsformel und man erhält mit

$$v_{(\vartheta, \varphi)}^{(n, m)} = \hat{v}_0 \tilde{P}_{n(\cos(\vartheta))}^m \cos(m\varphi) \quad (\text{A.7})$$

die Schallleistung des Kugelstrahlers (n, m)-ter Ordnung zu

$$P^{(n, m)} = \frac{\rho c}{4} 4\pi r_0^2 (1 + \delta_{0m}) \frac{\hat{v}_0^2}{2} \sigma_{(kr_0)}^{(n)}. \quad (\text{A.8})$$

Die auftretenden Größen sind

- ρ - mittlere Dichte des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
- c - Schallgeschwindigkeit des umgebenden gasförmigen Schallträgermediums
- k - Wellenzahl
- r_0 - Kugelradius
- δ_{0m} - Kroneckerdelta ($\delta_{0m} = 1$ für $m = 0$; $\delta_{0m} = 0$ für $m \neq 0$)
- \hat{v}_0 - Amplitude der Schwingungsverteilung
- P_n^m - dem Legendre-Polynom P_n zugeordnete Legendre-Funktion
- $\sigma^{(n)}$ - Schallabstrahlgrad des Kugelstrahlers n-ter Ordnung

Der Schallabstrahlgrad des Kugelstrahlers ist unabhängig von der Ordnung m und berechnet sich in komplexer Schreibweise mit

$$\sigma^{(n)} = \frac{2kr_0}{\pi \left| nH_{n+0.5}^{(2)}(kr_0) - kr_0 H_{n+1.5}^{(2)}(kr_0) \right|^2}. \quad (\text{A.9})$$

Hier stellen $H_{n+0.5}^{(2)}$ und $H_{n+1.5}^{(2)}$ die Hankelfunktionen 2. Art mit halbzahligen Index dar, die sich wiederum mit

$$H_{n+0.5}^{(2)}(kr_0) = J_{n+0.5}(kr_0) - j \cdot N_{n+0.5}(kr_0) \quad (\text{A.10})$$

aus den Besselfunktionen $J_{n+0.5}$ (Zylinderfunktionen 1. Art) und den Neumannfunktionen $N_{n+0.5}$ (Zylinderfunktionen 2. Art) zusammensetzen. In reeller Schreibweise erhält man den Schallabstrahlgrad bis zur dritten Ordnung mit

$$\begin{aligned} \sigma_{(x)}^{(0)} &= \frac{x^2}{1+x^2} \\ \sigma_{(x)}^{(1)} &= \frac{x^4}{4+x^4} \\ \sigma_{(x)}^{(2)} &= \frac{x^6}{81+9x^2-2x^4+x^6} \\ \sigma_{(x)}^{(3)} &= \frac{x^8}{3600+360x^2+9x^4-5x^6+x^8} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Die für $-1 \leq x \leq 1$ definierten Legendre-Funktionen $P_{n(x)}^m$ werden z.B. in [17] angegeben. Bis zum dritten Grad sind die Terme in Tabelle A.1 aufgeführt.

$P_{n(x)}^m$		m			
		0	1	2	3
n	0	1	0	0	0
	1	x	$\sqrt{1-x^2}$	0	0
	2	$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	$3x\sqrt{1-x^2}$	$-3x^2 + 3$	0
	3	$\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$	$\left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-x^2}$	$-15x^3 + 15x$	$-15(x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$

Tabelle A.1: Legendre-Funktionen $P_{n(x)}^m$ bis zum dritten Grad.

A.3 Monopol im Nordpol einer starren Kugel

Die Schalleleistungsformel eines Monopols im Nordpol wird ausführlich im Anhang von [13] hergeleitet und lässt sich darstellen durch

$$P_{\text{Mon, NP}} = \underbrace{\frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}^2}{2}}_{\text{Vollraum-}} \left(\frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma^{(n)} \right). \quad (\text{A.12})$$

monopol

Zusätzlich zu den in Anhang A.2 beschriebenen Größen tritt hier der Schallfluss \hat{q} des Monopols auf. Die Schalleleistungsmodifikation des (Vollraum-)Monopols ist daher mit

$$M_{\text{Mon, NP}} = \frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma^{(n)} \quad (\text{A.13})$$

gegeben.

A.4 Doppelmonopol auf einer starren Kugel

A.4.1 Vorgehensweise und Grundformeln

Auf einer Kugeloberfläche können beliebige Schwingungsverteilungen $v_{(\vartheta, \varphi)}$ durch die Überlagerung der Schwingungsverteilungen von Kugelstrahlern (n, m) -ter Ordnung $v_{(\vartheta, \varphi)}^{(n, m)}$ erzeugt werden [19]. Da wegen der auftretenden orthogonalen Funktionen (Sinus, Kosinus und Legendre) nur zwischen Schwingungsverteilungen gleicher Ordnung eine Schalleleistungswechselwirkung erfolgt, kann die von einer beliebigen Schwingungsverteilung abgestrahlte Schalleistung durch die Summe der Schalleistungen der Kugelstrahler (n, m) -ter Ordnung nach Anhang A.2 mit

$$P = \frac{\rho c}{4} 4\pi r_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{0m}) \frac{|\gamma_{nm}|^2}{2} \sigma^{(n, m)} \quad (\text{A.14})$$

berechnet werden. Die Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} müssen so bestimmt werden, dass die Summe der $v_{(\vartheta, \varphi)}^{(n, m)}$ (nach Gleichung A.7) gerade die vorgegebene Schwingungsverteilung

$$v_{(\vartheta, \varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{nm} \tilde{P}_n^m(\cos(\vartheta)) \cos(m\varphi). \quad (\text{A.15})$$

ergibt. Die Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} sind dimensionsbehaftet definiert. Ihre Berechnung erfolgt nach der Vorschrift

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{\pi(1+\delta_{0m})} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} v_{(\vartheta, \varphi)} \tilde{P}_n^m(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) \cos(m\varphi) d\varphi d\vartheta. \quad (\text{A.16})$$

Die Identität von Gleichung (A.15) und (A.16) ergibt sich durch Einsetzen unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(\bar{m}\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq \bar{m} \\ 2\pi & \text{für } m = \bar{m} = 0 \\ \pi & \text{für } m = \bar{m} \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \tilde{P}_n^m(\cos(\vartheta)) \tilde{P}_{\bar{n}}^{\bar{m}}(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq \bar{n} \\ 1 & \text{für } n = \bar{n} \end{cases}. \quad (\text{A.18})$$

Die Schallleistung, die von einem beliebig auf einer starren Kugel angeordneten und beliebig harmonisch schwingenden Doppelmonopol abgestrahlt wird, kann analog zur Vorgehensweise für den Sonderfall des Monopols im Nordpol und Südpol bestimmt werden [13]. Nachfolgend wird daher zunächst die Schallleistung eines exzentrisch angeordneten Kappenstrahlers bestimmt, so dass man durch den Grenzübergang des Kappenradius $r_K \rightarrow 0$ die Schallleistung eines exzentrisch angeordneten Monopols erhält. Die Kombination von zwei exzentrischen Monopolen ergibt dann die gesuchte Formel für den beliebig auf der Kugel angeordneten Doppelmonopol.

A.4.2 Mathematische Beschreibung einer exzentrischen Kugelkappe

Die Beschreibung der Kappenoberfläche erfolgt bereits im Kugelkoordinatensystem

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) . \\ z &= r \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Während ϑ nach Bild A.1 (rechts) zwischen $\theta_1 - \theta_0$ und $\theta_1 + \theta_0$ variiert, überstreicht der Winkel φ den Bereich von $-\phi_{(\vartheta)}$ bis $\phi_{(\vartheta)}$, wobei die Funktion $\phi_{(\vartheta)}$ aus einer einfachen Geometriebetrachtung gewonnen werden kann. Aus der x-Richtung betrachtet (Bild A.1, links) stellt die Kappenbegrenzung die Ellipse

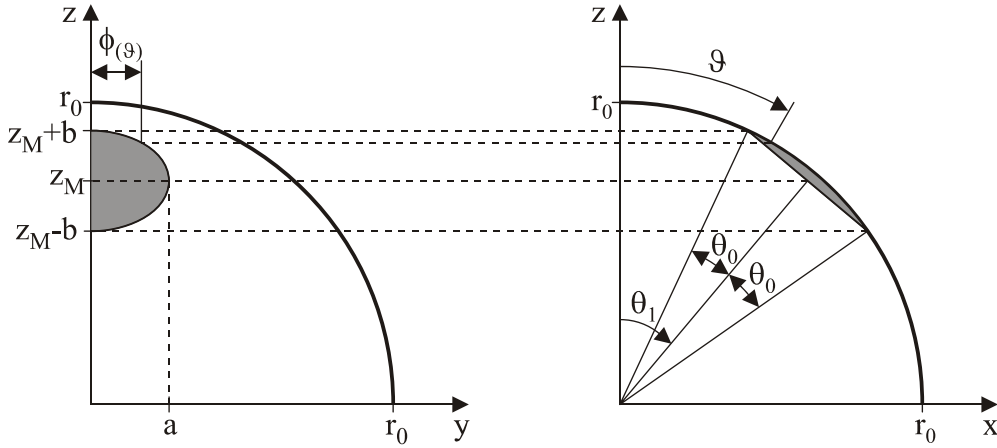


Bild A.1: Abmessungen einer exzentrisch angeordneten Kugelkappe mit Öffnungswinkel θ_0 .

$$y(z) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (z - z_M)^2} \quad (\text{A.20})$$

dar mit

$$\begin{aligned} b &= \frac{r_0}{2} (\cos(\theta_1 - \theta_0) - \cos(\theta_1 + \theta_0)) = r_0 \sin(\theta_0) \sin(\theta_1) \\ a &= r_0 \sin(\theta_0) \\ z_M &= \frac{r_0}{2} (\cos(\theta_1 - \theta_0) + \cos(\theta_1 + \theta_0)) = r_0 \cos(\theta_0) \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Durch Umformung erhält man aus Gleichung (A.19)

$$\varphi(\vartheta) = \arcsin \left(\frac{y(z)}{r_0 \sin(\vartheta)} \right) \quad (\text{A.22})$$

und nach Einsetzen von Gleichung (A.20) und (A.21) den Winkel

$$\phi(\vartheta) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{\sin^2(\theta_0) \sin^2(\theta_1) - (\cos(\vartheta) - \cos(\theta_0) \cos(\theta_1))^2}}{\sin(\theta_1) \sin(\vartheta)} \right), \quad (\text{A.23})$$

der den Rand der Kappe in φ -Richtung beschreibt. Hier ist zu beachten, dass $\theta_1 \geq \theta_0$ gelten muss, damit die Kugelkappe sich nicht über den Nordpol erstreckt.

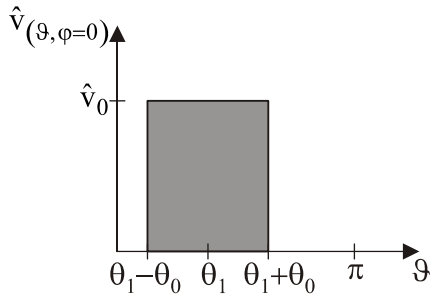
Der Flächeninhalt der Kugelkappe lässt sich dann auf folgende Arten darstellen:

$$\text{Kappe im Nordpol: } S_{K, NP} = \int_{\vartheta=0}^{\theta_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r_0^2 \sin(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta = 2\pi r_0^2 (1 - \cos(\theta_0)) \quad (\text{A.24})$$

Kappe exzentrisch:

$$S_{K, exz} = \int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} \int_{\varphi=-\phi(\vartheta)}^{\phi(\vartheta)} r_0^2 \sin(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta = 2r_0^2 \int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} \phi(\vartheta) \sin(\vartheta) \, d\vartheta \quad (\text{A.25})$$

A.4.3 Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} einer exzentrischen Kugelkappe



Die Schwingungsverteilung eines exzentrischen Kugelkappenstrahlers lässt sich darstellen mit

$v_{(\vartheta, \varphi)} = \hat{v}_{(\vartheta, \varphi)} e^{j\omega t}$, wobei für die Amplitude

$$\hat{v}_{(\vartheta, \varphi)} = \begin{cases} \hat{v}_0 & \text{für } \begin{cases} \theta_1 - \theta_0 \leq \vartheta \leq \theta_1 + \theta_0 \\ -\phi(\vartheta) \leq \varphi \leq \phi(\vartheta) \end{cases} \\ 0 & \text{außerhalb der Kappe} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

gilt. Setzt man Gleichung (A.26) in (A.16) ein, so erhält man die Entwicklungskoeffizienten

$$\gamma_{00} = \frac{\hat{v}_0}{\sqrt{2}} (1 - \cos(\theta_0)) \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma_{n0} = \frac{\hat{v}_0}{\pi} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} P_n(\cos(\vartheta)) \phi(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \quad (\text{A.28})$$

$$\gamma_{nm} = \frac{2\hat{v}_0}{\pi m} \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} P_n^m(\cos(\vartheta)) \sin(m\phi(\vartheta)) \sin(\vartheta) d\vartheta. \quad (\text{A.29})$$

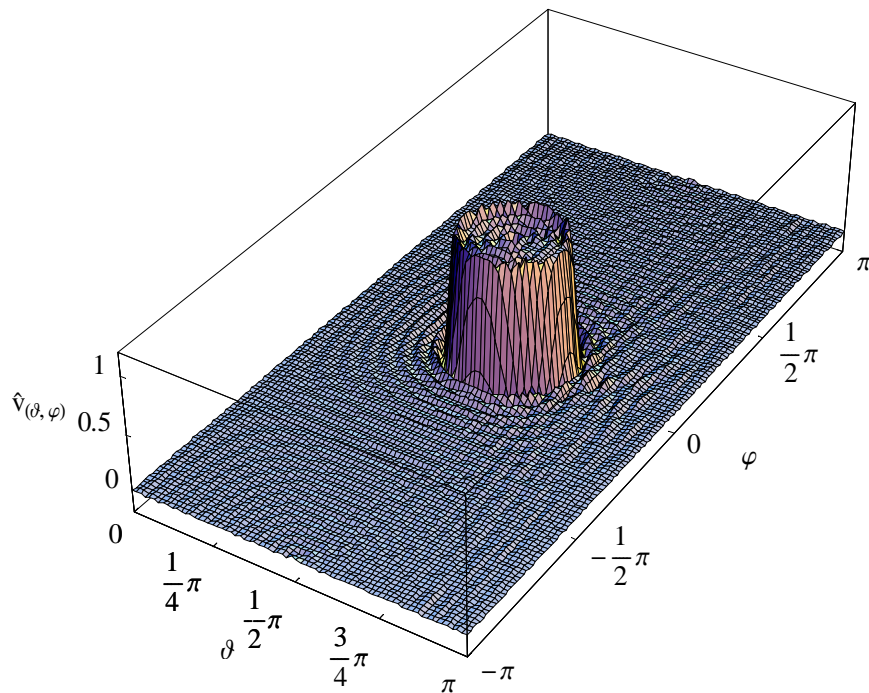


Bild A.2: Schnelleverteilung auf einer Kugeloberfläche bei einer exzentrisch angeordneten Kugelkappe am Äquator (Zentrum bei $\vartheta = \theta_1 = \pi/2$, Öffnungswinkel $\theta_0 = \pi/6$, $\hat{v}_0 = 1$) nach Gleichung (A.15) bei Verwendung von 50 Summentermen.

Die Integrale in den Gleichungen (A.28) und (A.29) können mit einem Mathematikprogramm numerisch ausgewertet werden. Zur Überprüfung können die berechneten γ_{nm} in Gleichung (A.15) eingesetzt werden. Bild A.2 zeigt die Schwingungsverteilung auf der Kugeloberfläche für eine Kappe am Äquator (Zentrum bei $\theta_1 = \pi/2$, Öffnungswinkel $\theta_0 = \pi/6$) bei einer Verwendung von 50 Summentermen.

A.4.4 Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} eines exzentrischen Monopols

Durch den Grenzübergang des Kappenöffnungswinkels $\theta_0 \rightarrow 0$ können aus den Gleichungen (A.27) bis (A.29) die Entwicklungskoeffizienten für den exzentrisch auf einer Kugel angeordneten Monopol bestimmt werden. Dazu wird zunächst die Schwingungsamplitude \hat{v}_0 der Kappe durch den Schallfluss \hat{q}_0 ausgedrückt:

$$\hat{v}_0 = \frac{\hat{q}_0}{S_{\text{Kappe}}} = \begin{cases} \frac{\hat{q}_0}{2\pi r_0^2 (1 - \cos(\theta_0))} & \text{(Kappe im Nordpol)} & \text{(A.30)} \\ \frac{\hat{q}_0}{2r_0^2 \int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} \phi_{(\vartheta)} \sin(\vartheta) d\vartheta} & \text{(Kappe exzentrisch)} & \text{(A.31)} \end{cases}$$

Setzt man Gleichung (A.30) in (A.27) ein, erhält man sofort

$$\gamma_{00} = \frac{\hat{q}_0}{\sqrt{2} 2\pi r_0^2} \quad \text{(A.32)}$$

Durch einen eleganten mathematischen Trick können die Entwicklungskoeffizienten für $n > 0$ berechnet werden, ohne die Integration durchführen zu müssen. Ersetzt man \hat{v}_0 durch Gleichung (A.31), so ergibt sich

$$\gamma_{n0} = \frac{\hat{q}_0}{2\pi r_0^2} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} P_{n(\cos(\vartheta))} \phi_{(\vartheta)} \sin(\vartheta) d\vartheta}{\int_{\vartheta=\theta_1-\theta_0}^{\theta_1+\theta_0} \phi_{(\vartheta)} \sin(\vartheta) d\vartheta} \quad \text{(A.33)}$$

Da $\phi_{(\vartheta)} \rightarrow 0$ gilt für $\theta_0 \rightarrow 0$ und $\vartheta \rightarrow \theta_1$, steht unter dem Limes ein unbestimmter Ausdruck vom Typ $\left[\frac{0}{0}\right]$, so dass die Regel von de l'Hospital angewendet werden kann, indem man statt der Bildung der Ableitungen die Integrale weglässt. Damit ergibt sich

$$\gamma_{n0} = \frac{\hat{q}_0}{2\pi r_0^2} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow \theta_1} \frac{P_n(\cos(\vartheta)) \phi(\vartheta) \sin(\vartheta)}{\phi(\vartheta) \sin(\vartheta)} = \frac{\hat{q}_0}{2\pi r_0^2} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos(\theta_1)) \quad (\text{A.34})$$

Analog dazu liefert Gleichung (A.29) die γ_{nm} . Die Entwicklungskoeffizienten für den exzentrischen Monopol können dann kompakt geschrieben werden als

$$(\gamma_{nm})_{\text{Mon,exz}} = (2 - \delta_{0m}) \frac{\hat{q}_0}{2\pi r_0^2} \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_1)) \quad (\text{A.35})$$

A.4.5 Schalleistung eines exzentrischen Monopols

Die Schalleistung des exzentrisch angeordneten Monopols erhält man durch Einsetzen von Gleichung (A.35) in (A.14):

$$P_{\text{Mon,exz}} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_0^2}{2} \left(\frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{0m}) \gamma_{nm}^{*2} \sigma^{(n,m)} \right) \quad (\text{A.36})$$

mit den dimensionslosen Entwicklungskoeffizienten

$$\gamma_{nm}^* = \frac{\gamma_{nm}}{\left(\frac{\hat{q}_0}{2\pi r_0^2} \right)} = (2 - \delta_{0m}) \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_1)). \quad (\text{A.37})$$

Da der exzentrisch angeordnete Monopol dieselbe Schalleistung abstrahlt wie ein Monopol im Nordpol, ist Gleichung (A.36) identisch mit Gleichung (A.12). Die Doppelsumme lässt sich daher durch eine einfache Summe ersetzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{0m}) \gamma_{nm}^{*2} \sigma^{(n,m)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma^{(n)} \quad (\text{A.38})$$

A.4.6 Schalleistung eines exzentrischen Doppelmonopols

Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten γ_{nm} erfolgt analog zum exzentrischen Monopol, wobei nun zunächst zwei Kappen mit Öffnungswinkel θ_0 unter einem Winkel θ_1 und θ_2 auf der Kugel angeordnet werden. Die Schwingungsverteilung lautet

$v_{(\vartheta,\varphi)} = \hat{v}_{(\vartheta,\varphi)} e^{j(\omega t + \psi_{(\vartheta,\varphi)})}$ mit

$$\hat{v}_{(\vartheta,\varphi)} = \begin{cases} \hat{v}_1 & \text{für } \theta_1 - \theta_0 \leq \vartheta \leq \theta_1 + \theta_0 \text{ und } -\phi(\vartheta) \leq \varphi \leq \phi(\vartheta) \\ \hat{v}_2 & \text{für } \theta_2 - \theta_0 \leq \vartheta \leq \theta_2 + \theta_0 \text{ und } -\phi(\vartheta) \leq \varphi \leq \phi(\vartheta) \\ 0 & \text{außerhalb der Kappen} \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

und dem Phasenwinkel

$$\Psi_{(\vartheta, \varphi)} = \begin{cases} \Psi_1 & \text{für } \theta_1 - \theta_0 \leq \vartheta \leq \theta_1 + \theta_0 \text{ und } -\phi_{(\vartheta)} \leq \varphi \leq \phi_{(\vartheta)} \\ \Psi_2 & \text{für } \theta_2 - \theta_0 \leq \vartheta \leq \theta_2 + \theta_0 \text{ und } -\phi_{(\vartheta)} \leq \varphi \leq \phi_{(\vartheta)} \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Nach dem Einsetzen von (A.39) in (A.16) und dem Grenzübergang des Kappenöffnungswinkels $\theta_0 \rightarrow 0$ können die Entwicklungskoeffizienten des exzentrischen Doppelmonopols berechnet werden zu

$$\gamma_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi r_0^2} \left(\hat{q}_1 \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_1)) e^{j\Psi_1} + \hat{q}_2 \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_2)) e^{j\Psi_2} \right). \quad (\text{A.41})$$

Damit lässt sich die Schallleistung eines Doppelmonopols auf einer Kugel schreiben als

$$P_{\text{DoM}} = \left(\frac{\rho c k^2}{4\pi} \frac{1}{2} \right) \frac{1}{(k r_0)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{(1 + \delta_{0m})(2 - \delta_{0m})^2}{\left[\hat{q}_1^2 \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_1))^2 + 2\hat{q}_1 \hat{q}_2 \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_1)) \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_2)) \cos(\Psi_{12}) + \hat{q}_2^2 \tilde{P}_n^m(\cos(\theta_2))^2 \right] \sigma^{(n,m)}} \right) \quad (\text{A.42})$$

mit der Phasendifferenz $\Psi_{12} = \Psi_2 - \Psi_1$. Die Terme in der eckigen Klammer lassen sich als Einzel- und Wechselwirkungsterme identifizieren und können insbesondere mit Gleichung (A.38) vereinfacht werden, so dass die Doppelsumme durch eine einfache Summe ersetzt wird und nur noch die Legendre-Polynome auftreten ($m=0$). Die Einzelleistungsterme lauten dann

$$P_i = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_i^2}{2} \left(\frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma^{(n)} \right) \quad (\text{A.43})$$

mit $i=1, 2$ und die Wechselwirkungsterme

$$P_{12} = P_{21} = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \frac{\hat{q}_1 \hat{q}_2}{2} \cos(\Psi_{12}) \left(\frac{1}{(k r_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_{n(\cos(\theta_{12}))} \sigma^{(n)} \right). \quad (\text{A.44})$$

Die Abkürzung $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$ stellt die Winkeldifferenz zwischen den Ortsvektoren der Monopole 1 und 2 dar, wobei hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\theta_1 = 0$ gesetzt werden kann (Monopol 1 im Nordpol).

Auch beim Doppelmonopol auf einer starren Kugel ergibt sich somit die DFEM-übliche Darstellungsform der Gesamtschallleistung mit

$$P_{\text{DoM, Ku}} = P_{e,1} + P_{e,2} + 2P_{\text{ww},12} \quad (\text{4.45})$$

B Schalldruckfeld des Nordpolkappenstrahlers

Das Schalldruckfeld des Nordpolkappenstrahlers kann analog zur Vorgehensweise in Anhang A.4 durch Überlagerung der Schallfelder von Kugelstrahlern n-ter Ordnung erzeugt werden [18]. Mit den geschwindigkeitsnormierten Schalldrücken des Kugelstrahlers n-ter Ordnung

$$p_{Ku}^{*(n)} = \rho c \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \left(\sqrt{\frac{k r_0}{k r}} \frac{-j k r_0 H_{n+0.5}^{(2)}(k r)}{n H_{n+0.5}^{(2)}(k r_0) - k r_0 H_{n+1.5}^{(2)}(k r_0)} \right) P_n(\cos(\vartheta)) \quad (\text{B.1})$$

und den Entwicklungskoeffizienten

$$\gamma_{n,K} = \frac{\hat{v}_0}{\sqrt{2} \sqrt{2n+1}} \left(P_{n-1}(\cos(\vartheta_K)) - P_{n+1}(\cos(\vartheta_K)) \right) \quad (\text{B.2})$$

[13] erhält man das Schallfeld des Nordpolkappenstrahlers durch die Summe

$$p_K = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n,K} p_{Ku}^{*(n)}. \quad (\text{B.3})$$

Neben den in Anhang A.2 beschriebenen Größen tritt zusätzlich der Kappenöffnungswinkel ϑ_K auf, der den Kappenradius $r_K = \vartheta_K r_0$ festlegt.

Literatur

- [1] Hübner, Gerhard: *Zur Schalleistung von Schallquellensystemen - Abstrahlung, Messung: Impedanz- und Winkelfehler*. DAGA '75, Braunschweig, Kongreßbericht VDE-Verlag, Berlin 1975, S. 215 – 218.
- [2] Hübner, Gerhard: *Zur Schalleistung von schwingenden ebenen Flächen - Eine Methode der finiten Elemente zur Direktbestimmung der Schalleistung alternativ zur Rayleigh / Fraunhoferschen Beschreibung*. FASE/DAGA '82, Göttingen 1982, Fortschritte der Akustik, S. 423 – 426.
- [3] Hübner, G; Messner, J. und Meynerts, E.: *Schallabstrahlungsberechnung mit der Direkten Finiten Elemente Methode*. Bremerhaven: Wirtschaftsverlag NW, 1986 (Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz - Forschung 479). - ISBN 3-88314-545-9.
- [4] Hübner, Gerhard: *Further Developments of the „Direct Finite Element Method“ (DFEM) determining the Sound Radiation of Structure Borne Noise*. Proceedings of the 12th International Congress on Acoustics, Vol. II, D 2-7, Toronto 1986, Canada.
- [5] Hübner, Gerhard: *Eine Betrachtung zur Physik der Schallabstrahlung*. Acustica, Vol. 75, 1991, S. 130 – 144.
- [6] Hübner, Gerhard; Rieger, Wolfgang: *Application of DFEM for Calculation and Measurement of Sound Power Radiated by vibrating Surfaces*. Proceedings of the Congress: Prediction of the noise emitted by vibrating structures. März 1991, Revue Française le Mécanique, Numéro spécial 1991, S. 487 – 499.
- [7] Hübner, Gerhard: *Erweiterung der DFEM auf allgemein gestaltete Strahler - Die Beugung in ihrer Rückwirkung auf die abgestrahlte Schalleistung*. Fortschritte der Akustik, DAGA '91, Bochum, 1991, S. 237 – 240.
- [8] Hübner, G; Messner, J. und Rieger, W.: *Schalleistungsbestimmung mit der Direkten Finiten Elemente Methode*. Bremerhaven: Wirtschaftsverlag NW, 1992 (Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz - Forschung 660). - ISBN 3-89429-213-X.
- [9] Rieger, Wolfgang: *Entwicklung eines Meßverfahrens zur Bestimmung der abgestrahlten Luftschalleistung ebener Strahler auf der Grundlage der DFEM*. Dissertation an der Universität Stuttgart, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium, 1997.
- [10] Hübner, Gerhard; Gerlach, André: *Zusammenhang der DFEM-Schalleistungsbeschreibung mit der Rayleighschen Schallfelddarstellung ebener Strahler*. 24. Deutsche Jahrestagung für Akustik DAGA '98 Zürich, Fortschritte der Akustik (DAGA '98), 1998, S. 682 – 683.
- [11] Hübner, Gerhard; Gerlach, André: *Erste Untersuchungen zur Erweiterung und Anwendung der Direkten Finiten Elemente Methode (DFEM) zur Schalleistungsbestimmung von Maschinen in der Praxis*. Bremerhaven: Wirtschaftsverlag NW, 1999 (Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz und Arbeitsmedizin - Forschung 1367).
- [12] Hübner, Gerhard: *Skript zur Vorlesung „Maschinenakustik A“*, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium, Universität Stuttgart, 2006.

- [13] Gerlach, André: *Ein Beitrag zur Erweiterung und Anwendung der Direkten Finiten Elemente Methode zur Bestimmung der abgestrahlten Luftschalleistung dreidimensional ausgedehnter Körperschallquellen*. Dissertation an der Universität Stuttgart, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium, 2000.
- [14] Hübner, G.; Rieger, W.: *Schallintensitätsmeßverfahren zur Schalleleistungsbestimmung in der Praxis*. Bremerhaven: Wirtschaftsverlag NW, 1988 (Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz - Forschung 550).
- [15] Hübner, G.: *The one-sided driving interaction between two monopoles – effective as the core of the 3-dimensional DFEM sound power and scattering description*. Proc. of EuroNoise, CDROM, Sevilla, 2002.
- [16] Strutt, J. W. (Baron Rayleigh): *The Theory of Sound*. Vol. I and II, Second edition revised and enlarged (1896), Dover Publications, New York, 1945.
- [17] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun 1987. – ISBN 3-87144-492-8.
- [18] Stenzel, H.; Brosze, O.: *Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen*. 2. Auflage, Berlin: Springer, 1958.
- [19] Morse, P. M.; Ingard, K. U.: *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968, Princeton, New Jersey. - ISBN 0-691-02401-4.
- [20] Miller, W.: *Symmetry and Separation of Variables*. Addison-Wesley, 1977. – ISBN 0-201-13503-5.
- [21] Morse, P. M.; Feshbach, H.: *Methods of Theoretical Physics*. Part II. New York: McGraw-Hill, 1953 (International series in pure and applied physics).
- [22] Schenck, H. A.: *Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems*. Journal of the Acoustical Society of America (JASA), Vol. 44 (1967), No. 1, S. 41 – 58.
- [23] Burton, A. J.; Miller, G. F.: *The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems*. Conference: Discussion on numerical analysis of partial differential equations. London, UK, 4-5 June 1970, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 323 (1971), S. 201 – 210.
- [24] Fischer, Matthias: *The Fast Multipole Boundary Element Method and its Application to Structure-Acoustic Field Interaction*. Dissertation, Institut A für Mechanik, Universität Stuttgart, 2004.
- [25] Fischer, M.; Gaul, L.: *Fast BEM-FEM mortar coupling for acoustic-structure interaction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering (John Wiley & Sons, Ltd.), Vol. 62, Issue 12, 2005, pp. 1677-1690.
- [26] Gaul, L.; Fischer, M.: *Advanced boundary element formulations for multifield problems*. Keynote lecture. Forum Prediction of Noise Design, NOVEM 2005 (Noise and Vibration Emerging Methods), St. Raphaël.
- [27] Gaul, L.; Kögl, M.; Wagner, M.: *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003. ISBN 3-540-00463-7.
- [28] Nolte, B.; Gaul, L.: *Sound energy flow in the acoustic nearfield of a vibrating plate*. Int. J. Mechanical Systems and Signal Processing (1996) **10**(3), pp. 351-364.

- [29] Nolte, B.: *Randelementberechnungen und Nahfeldmessungen zur akustischen Fluid-Struktur-Interaktion*. Dissertation, Institut A für Mechanik, Universität Stuttgart, 1998. ISSN 0946-7157.
- [30] ISO/TR 7849: 1987 Acoustics - Estimation of airborne noise emitted by machinery using vibration measurement.
- [31] ISO 9614-1: 1993 Acoustics - Determination of sound power levels of noise sources using sound intensity - Part 1: Measurement at discrete points.
- [32] ISO 9614-2: 1996 Acoustics - Determination of sound power levels of noise sources using sound intensity - Part 2: Measurement by scanning.
- [33] ISO 3745: 1977 Acoustics - Determination of sound power levels of noise sources - Precision methods for anechoic and semi-anechoic rooms.
- [34] ISO 3744: 1994 Acoustics - Determination of sound power levels of noise sources using sound pressure - Engineering method in an essentially free field over a reflecting plane.
- [35] ISO 3746: 1995 Acoustics - Determination of sound power levels of noise sources using sound pressure - Survey method using an enveloping measurement surface over a reflecting plane.