

# Rotationsfähigkeit von vorgespannten plastischen Gelenken

Longfei Li und Rolf Eligehausen

## 1. Einleitung

Bei der Ermittlung der Schnittgrößen von statisch unbestimmten Stahl- und Spannbetontragwerken mit nicht-linearen Verfahren ist eine Kontrolle der Rotationsfähigkeit in hoch beanspruchten Bauteilbereichen erforderlich /1/. Die Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken in Spannbetonbauteilen ist jedoch bisher wegen der komplexen Einflußgrößen nicht ausreichend geklärt. Dies gilt insbesondere für Vorspannung mit nachträglichem Verbund bzw. ohne Verbund, da bei solchen Bauteilen Betonstahl- und Spannstahl ein deutlich unterschiedliches Verbundverhalten aufweisen können.

Wesentliche Einflußfaktoren auf die Rotationsfähigkeit von Spannbetonbauteilen sind u.a. die Duktilität des Spannstahls, die Höhe der Vorspannung, der Vorspanngrad und der mechanische Bewehrungsprozentsatz. Um die Rotationsfähigkeit von Spannbetonbauteilen zu klären, wurde ein Rechenmodell aufgestellt, das durch zahlreiche Nachrechnungen von Versuchen verifiziert wurde. Es baut auf dem in /2/ vorgeschlagenen Modell auf. Mit dem Rechenmodell wurde der Einfluß der wichtigsten Parameter auf die Duktilität von Spannbetonbauteilen untersucht /3,4/.

## 2. Rechenmodell

### 2.1 Grundlagen

Dem Rechenmodell wird ein statisch bestimmter Einfeldträger, der einen plastizierten Tragwerksbereich in statisch unbestimmten Spannbetonträgern simulieren soll, mit einer Bewehrung aus Beton- und Spannstahl zugrundegelegt (Bild 1). Dabei wurden folgende Idealisierungen für den Ersatzträger gemacht:

- (1) Der Träger wird durch eine symmetrische Belastung monoton belastet.
- (2) Die statische Nutzhöhe des Spanngliedes bleibt über die Trägerlänge konstant.

- (3) In allen Lastzuständen sind Betonrandstauchung und Betonstahldehnung über die Bernoulli'sche Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte miteinander verknüpft. Demgegenüber kann sich der Spannstahl je nach seinem Verbund der Lastaufnahme teilweise entziehen.

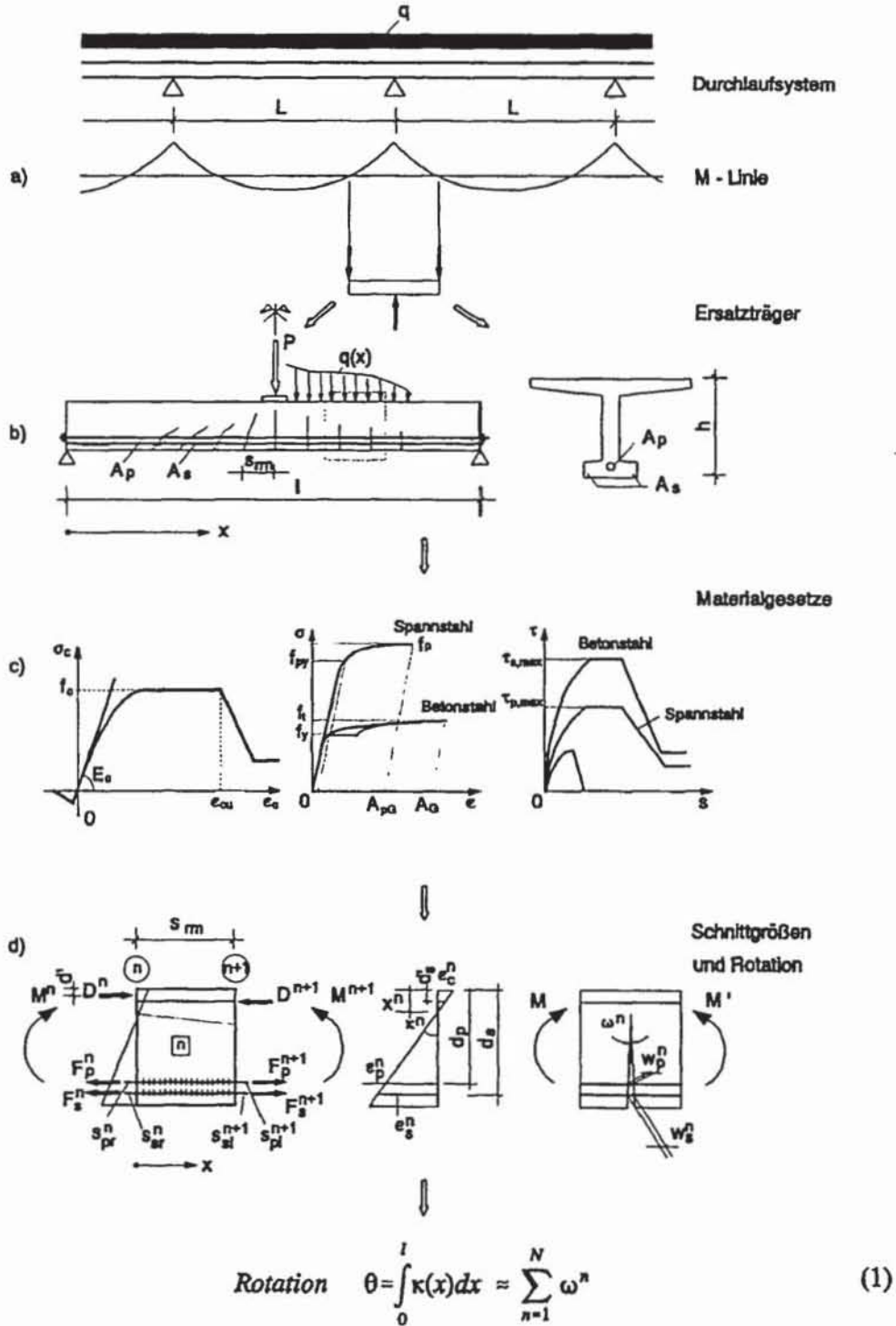


Bild 1: Schematische Darstellung des Rechenmodells

- (4) Der Träger befindet sich im Zustand des abgeschlossenen Ribbildes. Die Risse verteilen sich mit einem mittleren Ribabstand über die Trägerlänge und der erste Rib entsteht in Feldmitte.
- (5) In Ribquerschnitten nehmen die Ribbreiten von der Höhe der Beton- und/oder Spannstahllage bis zum Dehnungsnullpunkt linear ab.
- (6) Die Beton-, Betonstahl- und Spannstahlkennlinie, sowie die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen von Betonstahl und Spannglied sind bekannt.
- (7) Ein vorzeitiger Schubbruch ist durch eine ausreichende Bemessung der Stege ausgeschlossen.
- (8) Die Schubverformung des Ersatzträgers ist vernachlässigbar klein. Tritt Schubribbildung infolge hoher Querkraft auf, wird die Momentenlinie nach der Fachwerkanalogie um ein Versatzmaß verschoben /5/.

Unter den o.g. Voraussetzungen ergeben sich die folgenden theoretischen Grundlagen:

Kompatibilität:

Entlang des Einfeldträgers gilt die Kompatibilitätsbeziehung zwischen den Verlängerungen von Beton- und Spannstahl im Zuggurt (siehe Bild 1b):

$$\int_0^l [e_p(x) - e_{pd}(x)] dx = \alpha \int_0^l e_s(x) dx \quad (2)$$

Dabei entspricht  $e_{pd}(x)$  der Spannstahldehnung im Dekompressionszustand, bei dem die Betondehnung in Höhe des Spanngliedes  $e_c = 0$  beträgt.  $\alpha$  ist ein Faktor zur Berücksichtigung der unterschiedlichen statischen Nutzhöhe von Beton- und Spannstahl im Querschnitt.

Für den verschieblichen Verbund der Bewehrungen in Ribelementen gelten bei Vernachlässigung der Betonzugdehnung folgende Kompatibilitätsbedingungen (siehe Bild 1d):

$$s_s(x) = \int_0^x e_s(x) dx + s_{sr}^n \quad s_p(x) = \int_0^x [e_p(x) - e_{pd}(x)] dx + s_{pr}^n \quad (3)$$

Werden die Beziehungen (3) in Gl. (2) eingesetzt und die Randbedingungen:

$$s_p(0) = s_p(l) = 0, \quad e_s(0) = e_s(l) = 0 \quad (4)$$

berücksichtigt, so läßt sich die Kompatibilitätsgleichung (2) durch eine Verträglichkeitsbedingung

für die Ribbreiten in Höhe von Betonstahl und Spannglied darstellen (siehe Bild 1d):

Für Vorspannung mit Verbund gilt:

$$\sum_{n=1}^N w_p^n = \sum_{n=1}^N \alpha^n w_s^n, \quad \text{bzw.} \quad w_p^n = \alpha^n w_s^n \quad (5)$$

Für Vorspannung ohne Verbund gilt:

$$(e_p - e_{pd})l = \sum_{n=1}^N \alpha^n w_s^n \quad (6)$$

mit

$$w_s^n = s_{sl}^n + s_{sr}^n, \quad w_p^n = s_{pl}^n + s_{pr}^n, \quad \alpha^n = \frac{d_p - x^n}{d_s - x^n} \quad (7)$$

Hierbei bezeichnen  $s_{sl}^n, s_{sr}^n, s_{pl}^n, s_{pr}^n$  den Schlupf von Beton- und Spannstahl am linken bzw. rechten Rißufer des n-ten Risses.

#### Gleichgewicht:

Die Gleichgewichtsbedingung des verschieblichen Verbundes lautet für den Betonstahl und das Spannglied (siehe Bild 1d):

$$\sigma_s(x) = \frac{U_s}{A_s} \int_0^x \tau_s(x) dx + \sigma_{sr}^n; \quad \sigma_p(x) = \frac{U_p}{A_p} \int_0^x \tau_p(x) dx + \sigma_{pr}^n \quad (8)$$

Dabei wurde eine konstante Dekompressionsspannung  $\sigma_{pd}$  über die Trägerlänge angenommen.

In den Rißquerschnitten gelten die Gleichgewichtsbedingungen für Normalkraft und Moment:

$$\sum N=0 : F_p^n + F_s^n - D^n = 0; \quad \sum M=0 : F_p^n d_p + F_s^n d_s - D^n d' + M^n = 0 \quad (9)$$

Mit den Variablen  $x_1^n$  als Betonstahldehnung  $\epsilon_s^n$  im Zuggurt und  $x_2^n$  als Krümmung  $\kappa^n$  des n-ten Querschnitts, wandeln sich die beiden Gleichgewichtsbedingungen (9) in folgende Form um:

$$N(x_1^n, x_2^n) = 0; \quad M(x_1^n, x_2^n) = 0 \quad (10)$$

#### Materialgesetze:

Die Materialkennwerte zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens der Betondruckzone sowie des Beton- und Spannstahls sind in Bild 1c angedeutet. Die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen sind für Betonstahl und Spannglied unterschiedlich definiert. Im rißnahen Bereich

wurden sie nach /6/ modifiziert (siehe Bild 2 und 3).

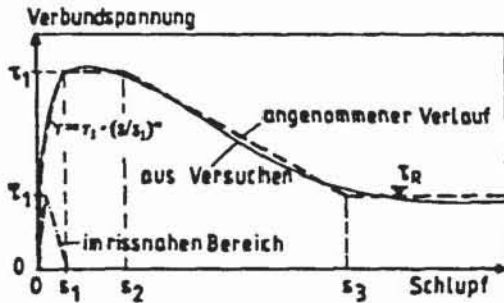


Bild 2: Beschreibung der  $\tau$ - $s$ -Beziehung durch eine mathematische Funktion, nach /6/

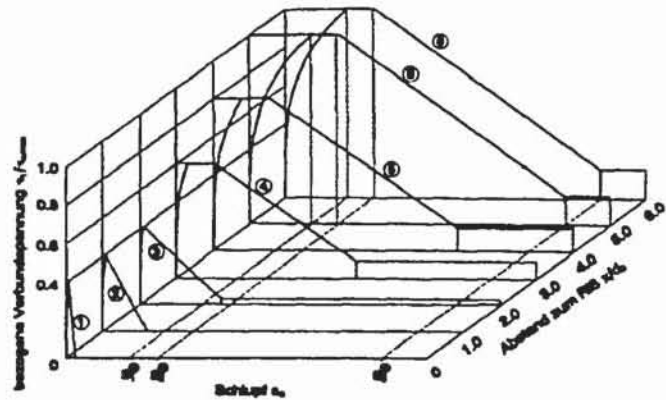


Bild 3: Angenommene lokale Verbundgesetze, nach /6/

## 2.2 Rechenprogramm

Die Kompatibilitäts- und Gleichgewichtsgleichungen wurden mit einem aufgestellten Rechenprogramm /4,7/ mit den in Bild 1c und 3 dargestellten Materialgesetzen iterativ gelöst. Die Rotation läßt sich nach Gl. (1) ermitteln. Das Modell gilt für Spannbetonbauteile mit beliebigem Verbundverhältnis und beliebigem Bewehrungsverhältnis zwischen Betonstahl- und Spannbewehrung. Es schließt als Grenzfälle Spannbeton ohne Verbund und Stahlbeton ein. Die Berechnung erfolgt durch Steuerung der Dehnungen in Feldmitte, so daß die Rotation bzw. die Durchbiegung des Trägers unter max. Last bestimmt werden kann /4/.

## 3. Überprüfung des Rechenmodells

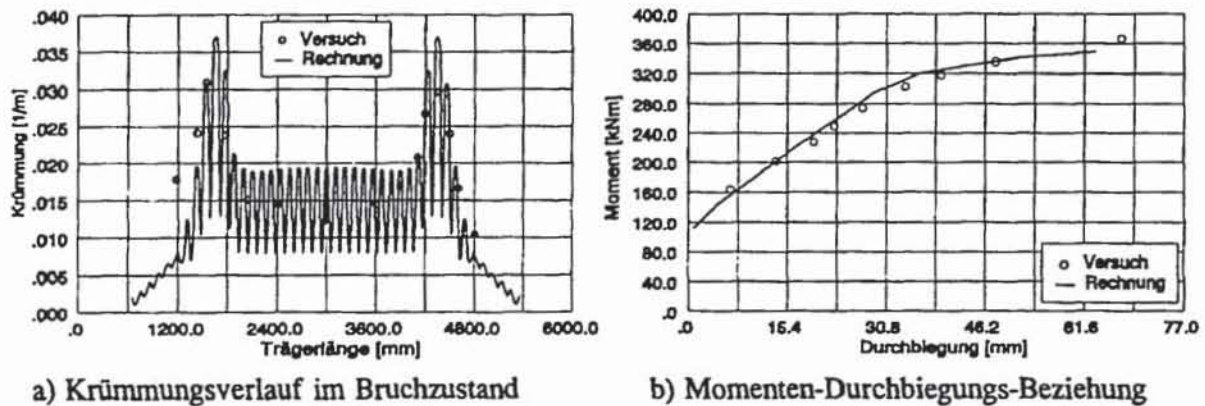
Die Überprüfung des Rechenmodells erfolgte durch Nachrechnungen von Versuchen. Die Versuchsnachrechnungen wurden jeweils für Bauteile mit Vorspannung mit bzw. ohne Verbund sowie ohne Spannbewehrung (Stahlbeton) durchgeführt.

Bild 4 zeigt einen Vergleich des in Versuchen /8/ gemessenen und mit dem Rechenmodell berechneten Krümmungsverlaufs im Bruchzustand, sowie der Momenten-Durchbiegungs-Beziehungen. Der außergewöhnliche Krümmungsverlauf kann durch das Rechenmodell erklärt werden /4/.

In den Bildern 5 und 6 sind die berechneten max. Lasten sowie die Durchbiegungen bzw. Rotatio-



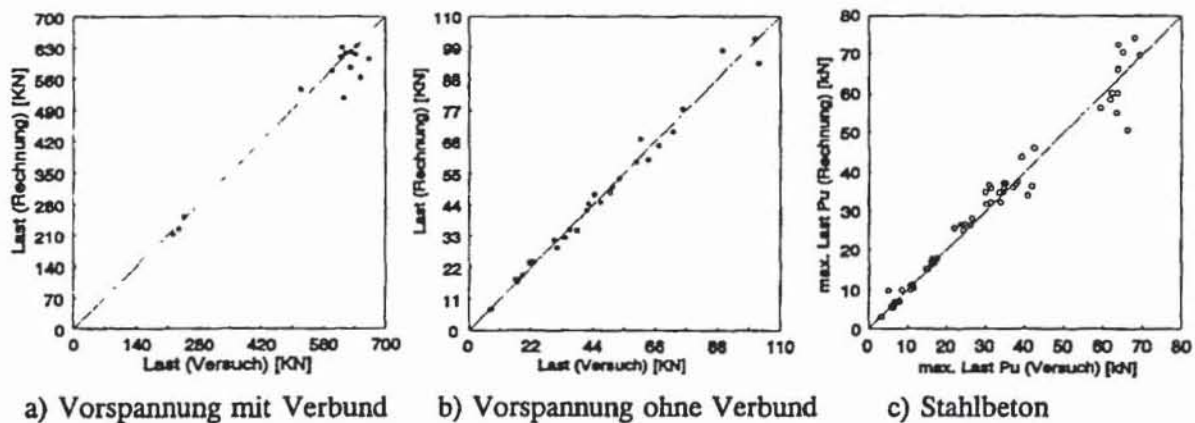
nen unter der max. Last jeweils für Bauteile mit Vorspannung mit bzw. ohne Verbund sowie für Stahlbetonträger den Versuchsergebnissen aus /8-15/ gegenübergestellt. Für die max. Lasten zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch. Die Verformungen unter der max. Last wurden etwas zu klein ermittelt. Für die Rotationsfähigkeit liegt dies jedoch auf der sicheren Seite.



a) Krümmungsverlauf im Bruchzustand

b) Momenten-Durchbiegungs-Beziehung

Bild 4: Vergleich der Rechenergebnisse mit einem Versuch aus /8/ (Vorspannung mit Verbund)

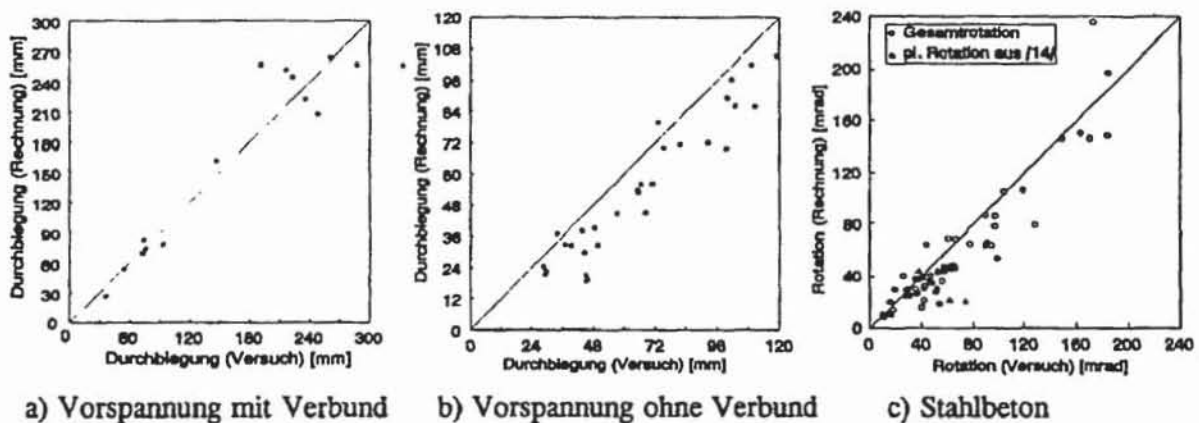


a) Vorspannung mit Verbund

b) Vorspannung ohne Verbund

c) Stahlbeton

Bild 5: Vergleich der berechneten max. Lasten mit Versuchsergebnissen



a) Vorspannung mit Verbund

b) Vorspannung ohne Verbund

c) Stahlbeton

Bild 6: Vergleich der berechneten Verformungen unter max. Last mit Versuchsergebnissen

## 4. Parameterstudien zur Rotationsfähigkeit von Spannbetonbauteilen

### 4.1 Definition der plastischen Rotation

Die Definition der plastischen Rotation  $\Theta_p$  soll einheitlich für Vorspannung mit und ohne Verbund sowie für Stahlbeton gelten. Sie wird hier als die Differenz aus Gesamtrotation und elastischer Rotation definiert. Dabei versteht man unter der elastischen Rotation  $\Theta_e$

die Aufsummierung der Krümmungen bzw. die Summe der Rißwinkel über die gesamte Trägerlänge unter der Streckgrenzlast, bei der entweder der Betonstahl oder der Spannstahl im Zuggurt die Streckgrenze erreicht. Hierbei ist derjenige Stahl maßgebend, welcher zuerst seine Streckgrenze erreicht.

und unter der Gesamtrotation  $\Theta$

die Integration der Krümmungen bzw. die Summe der Rißwinkel über die gesamte Trägerlänge im Bruchzustand. Bruch wird angenommen, wenn entweder der Betonstahl oder der Spannstahl die Zugfestigkeit, oder die Betondruckzone die maximal aufnehmbare Kraft erreicht.

Die plastische Rotation  $\Theta_p$  entspricht also der Aufsummierung der Zusatzkrümmungen über die Trägerlänge, welche nach Erreichen der Streckgrenze bis zum Bruchzustand auftreten.

### 4.2 Ausbildung des untersuchten Trägers und Materialkennwerte

Für die Parameterstudien wurde der Ersatzträger in Bild 7 angesetzt. Falls nichts anderes angegeben ist, wurden die Materialkennwerte nach Tabelle 1 verwendet, wobei ein Vorspannungsverlust von 15% berücksichtigt wurde.

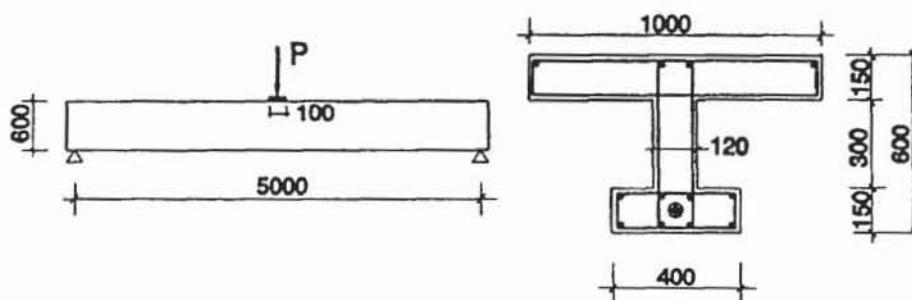


Bild 7: Abmessungen des Ersatzträgers (Vergleichsträger)

Materialkennwerte		Geometrie	
Beton	$f_c=42.5 \text{ N/mm}^2, \epsilon_{cu}=5.0\text{‰}$	Trägerlänge $l$	5.0 m
Betonstahl	$f_y=500, f_t/f_y=1.10, A_G=5.0\%$	Trägerhöhe $h$	0.6 m
Spannstahl	$f_{py}=1080, f_p/f_{py}=1.14, A_{pG}=4.0\%$	Vorspanngrad $\lambda$	0.52
Verbund(Bst)	$\tau_{s,max}=12.0 \text{ N/mm}^2$	Vorspannung $\sigma_p^{(0)}$	$0.55f_p$
Verbund(Spst)	$\tau_{p,max}=6.0 \text{ N/mm}^2$	Durchmesser $\phi_s$ und $\phi_p$	16 mm

Tabelle 1: Konstant gehaltene Materialkennwerte bei den Parameterstudien

### 4.3 Einflüsse auf die Rotationsfähigkeit

Die Rotationsfähigkeit von Spannbetonbauteilen wird wesentlich durch die Parameter mechanischer Bewehrungsgrad  $\omega$ , Vorspanngrad  $\lambda$ , Vorspannung  $\sigma_p^{(0)}$  und Verbundverhältnis  $\xi$  zwischen Betonstahl- und Spannbewehrung im Zuggurt beeinflusst. Diese Parameter sind in den Gleichungen (11) bis (14) definiert. Bild 8 enthält die verwendeten Bezeichnungen.

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_y + A_p \cdot f_{py} - A'_s \cdot f_y}{b \cdot d \cdot f_c} = \omega_s + \omega_p - \omega' \quad \text{mit } d = \frac{A_s \cdot f_y \cdot d_s + A_p \cdot f_{py} \cdot d_p}{A_s \cdot f_y + A_p \cdot f_{py}} \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{A_p \cdot f_{py}}{A_p \cdot f_{py} + A_s \cdot f_y} \quad (12); \quad \sigma_p^{(0)} = \eta \cdot f_p \quad (13); \quad \xi = \frac{\tau_{p,max}}{\tau_{s,max}} \quad (14)$$

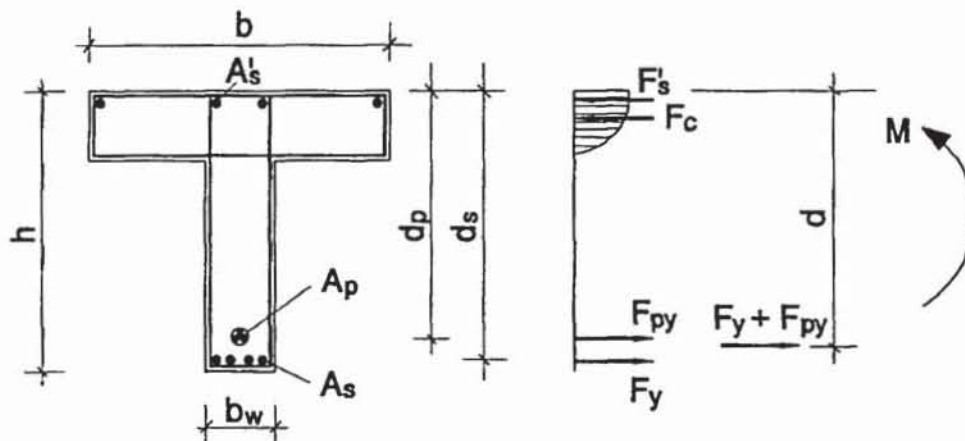


Bild 8: Spannbetonträger mit inneren Kräften



In den Bildern 9 bis 12 sind die errechneten Rotationsfähigkeiten in Abhängigkeit von diesen Parametern dargestellt. Bei Spannbetonbauteilen beeinflusst der mechanische Bewehrungsgrad die Rotationsfähigkeit auf die gleiche Weise wie der geometrische Bewehrungsgrad bei Stahlbetonbauteilen (Bild 9). Voraussetzung dafür ist, daß der Spannstahl genügend duktil ist und nicht vor dem Betonstahl versagt. Das  $\Theta_p$ - $\omega$  Diagramm weist einen dachförmigen Verlauf auf. Bei geringen Werten von  $\omega$  tritt Stahlversagen und bei hohen Werten von  $\omega$  Betondruckbruch auf. Die Abnahme der Rotationsfähigkeit bei kleinen mechanischen Bewehrungsgraden ist auf die Mitwirkung des Betons zwischen Rissen zurückzuführen.

Die plastische Rotationsfähigkeit nimmt mit ansteigendem Vorspanngrad ab (Bild 10). Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit anwachsendem Vorspanngrad der mittlere Rißabstand wegen der gegenüber dem Betonstahl schlechteren Verbundwirkung des Spannstahls ansteigt und damit die mittlere Dehnung zwischen Rissen, die hauptsächlich vom Verbund des Betonstahls abhängt, abnimmt. Allerdings ist der Einfluß für Vorspanngrade  $\lambda < 0.5$  vernachlässigbar klein.

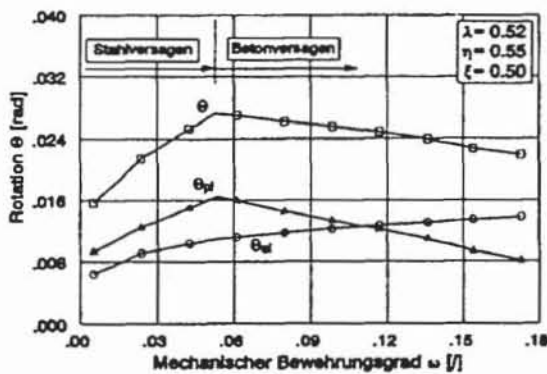


Bild 9: Rotationen in Abhängigkeit vom mechanischen Bewehrungsgrad

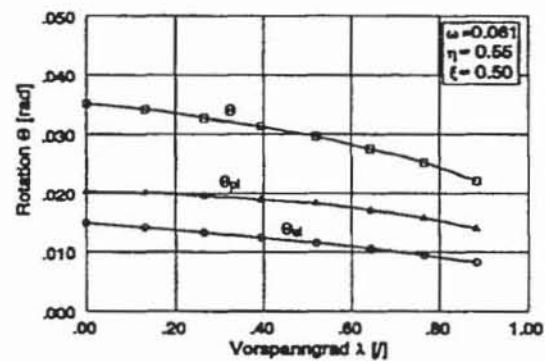


Bild 10: Rotationen in Abhängigkeit vom Vorspanngrad

Nimmt die Verbundfestigkeit der Spannglieder bei großem Schlupf nicht ab, z.B. bei Spannstahlrissen, dann wird die Rotationsfähigkeit im Bereich einer niedrigen Vorspannung mit zunehmender Höhe der Vorspannung geringer (Bild 11), weil mit zunehmender Vorspannung die Länge des plastischen Gelenks abnimmt. Für  $\sigma_p^{(0)} \geq 0.6f_p$  ist die plastische Rotation praktisch konstant. Bei einer Vorspannung  $\sigma_p^{(0)} = 0.85f_p$  erreicht der Spannstahl zuerst die Streckgrenze. Dies führt zu einer Abnahme der elastischen Rotation und zu einer geringen Zunahme der plastischen Rotation. Besitzen die Spannglieder keine ausreichende Verbundfestigkeit, kann die Rotationsfähigkeit bei sehr niedriger Vorspannung deutlich abfallen (siehe gestrichelte Linien in Bild 11), weil sich nach dem Fließen des Betonstahls der noch elastisch bleibende Spannstahl der Lastaufnahme entzieht und dadurch das Bruchmoment und die Länge des plastischen Gelenks abnehmen.

Die Rotationsfähigkeit nimmt mit abnehmender Verbundfestigkeit des Spannstahls ab (Bild 12), weil bei schlechtem Verbund der Spannglieder das Bruchmoment und damit die Länge des plastizierten Bereiches abnehmen und geringere Betonstahldehnungen aktiviert werden. Die geringste Rotationsfähigkeit erhält man bei Vorspannung ohne Verbund. Der Einfluß des Spannstahlverbundes ist für Verhältniswerte  $\tau_{p,max}/\tau_{s,max} \geq 0.5$  vernachlässigbar gering.

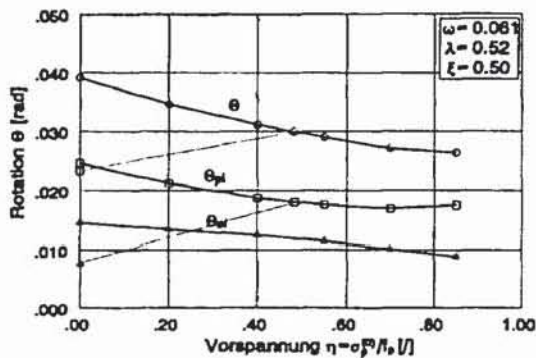


Bild 11: Rotationsfähigkeit in Abhängigkeit von der Spannstahlvorspannung

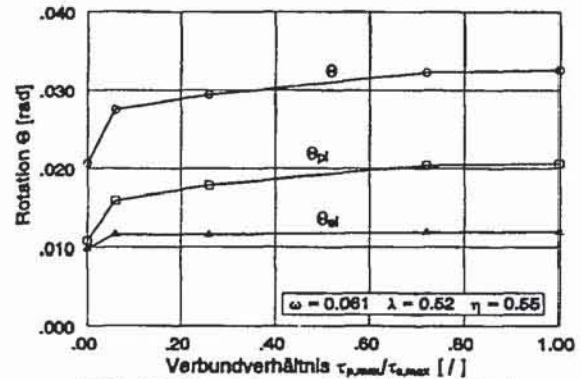


Bild 12: Rotationsfähigkeit in Abhängigkeit von den Verbundeigenschaften der Spannglieder

## 5. Folgerungen

Die Parameterstudien mit dem neu entwickelten diskreten Rißmodell haben gezeigt, daß das Rotationsvermögen von Spannbetonbauteilen durch die gleichen Parameter beeinflusst wird wie bei Stahlbetonbauteilen. Zusätzlich sind der Vorspanngrad, die Höhe der Vorspannung und der Verbund des Spannstahls von Einfluß.

Besitzt der Spannstahl eine ausreichende Duktilität und versagt sein Verbund nicht vor Erreichen der Höchstlast des Tragwerks unterscheidet sich das Rotationsvermögen von Stahl- und Spannbetonbauteilen in praxisrelevanten Anwendungsfällen nicht wesentlich. Wenn der Verbund des Spannstahls jedoch frühzeitig versagt oder die Duktilität des Spannstahls zu gering ist, fällt die plastische Rotationskapazität von vorgespannten Gelenken deutlich ab.

## Literatur:

- /1/ Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau, 1992



- /2/ Langer, P.: Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau. Dissertation der Universität Stuttgart, 1987
- /3/ Eligehausen, R.; Li, L.; Bericht zum Forschungsvorhaben: Verhalten von plastischen Gelenken im Spannbetonbau. Teil I: Theoretische Untersuchungen. Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart, 1993
- /4/ Li, L.: Zum Trag- und Rotationsverhalten der plastischen Gelenke im Spannbetonbau. Eingereichte Dissertation an der Universität Stuttgart, Januar 1994
- /5/ Schlaich, J.; Schäfer, K.; Vorlesungen über Bemessung und konstruktive Durchbildung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen. Institut für Massivbau der Universität Stuttgart, WS 1988/89
- /6/ Ciampi, E.; Eligehausen, R.; Bertero, V. V.; Popov, E.: Analytical Model for Concrete Anchorages of Reinforcing Bars under generalized Excitations. Earthquake Engineering Research Center, Report No. UCB/EERC 82/23, University of California, Berkeley 1982
- /7/ Li, L.: MASB: Programm zur Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahl- und Spannbetonbauteilen. Programmbeschreibung, Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart, 1994
- /8/ Eibl, J.; Mora, J.; Strauß, P.: Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben: 'Momentenrotation und Schubtragfähigkeit im Spannbeton'. Universität Karlsruhe, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, 1983
- /9/ Cafilisch, R.; Thürlimann, B.; Biegeversuche an teilweise vorgespannten Betonbalken. Bericht Nr. 6504-1, Institut für Baustatik, ETH Zürich, 1970
- /10/ Tao, X., Du, G.: Ultimate Stress of Unbonded Tendons in Partially Prestressed Concrete Beams. PCI Journal, Nov.-Dec. 1985
- /11/ Harajli, M. H., Kanj, M. Y.: Experimental and Analytical Study of the Behavior of Concrete Beams Prestressed With Unbonded Tendons. Report No. CE/FSEL 90-02, Department of Civil Engineering and Environmental Science, University of Oklahoma, September 1990
- /12/ Clarke, J. L., Beeby, A. W.: The ductility of reinforcement and its influence on the rotation capacity of concrete sections. British Cement Association, Wexham Springs, Slough SL3 6PL, Nov. 1990
- /13/ Eibl, J.; Bühler, A.: Untersuchung des Einflusses verschiedener Stahlparameter auf die mögliche plastische Rotation bei Stahlbetonplatten; Versuchsbericht, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Abteilung Massivbau, Universität Karlsruhe, 1991
- /14/ Bigaj, A.; Walraven, J. C.: Size effect on the rotation capacity of plastic hinges in reinforced concrete beams; CEB Bulletin d'Information Nr. 218 "Ductility", August 1993
- /15/ Calvi, G. M.; Cantù, E.; Macchi, G.; Magenes, G.: Rotation capacity of r. c. slabs as a function of steel properties; CEB Bulletin d'Information Nr. 218 "Ductility", August 1993