

## Verhalten von Beton auf Zug, Teil 2

### Behaviour of Concrete in Tension, part 2

Prof. Dr.-Ing. R. Eligehausen und Dipl.-Phys. G. Sawade, Stuttgart

#### 3. Theoretische Überlegungen

Zur Beschreibung des in den Versuchen beobachteten nicht-linearen Verhaltens von zugbeanspruchtem Beton ist von bruchmechanischen Überlegungen auszugehen. Dabei wird unter Beachtung thermodynamischer Gesichtspunkte (siehe [18]) von folgenden Annahmen ausgegangen. Sie gelten für monoton ansteigende Verformungen.

- Zur Erzeugung eines (Mikro-)Risses mit der Breite  $w_R$  ist eine Rißöffnungsenergie  $G(w_R)$  erforderlich.
- Die gesamte freie Energie eines Körpers entspricht der Summe aus der elastischen Verformungsenergie und der Rißbildungsenergie.
- Bei vorgegebenen Randbedingungen ergeben sich die Spannungen im Körper und die Rißbreite aus dem Le Chatelier'schen Prinzip, wonach die freie Energie einem Minimum zustrebt.
- Die nichtlinearen Verformungen sind im Riß konzentriert, während der restliche Bereich ein elastisches Verhalten aufweist.

Diese Annahmen werden im folgenden auf den einfachsten Fall, einen Zugstab der Länge  $l$  mit konstantem Querschnitt  $A=1$ , angewandt. Der Zugstab ist an einem Ende festgehalten ( $u=0$ ), und am anderen Ende wird ihm eine monoton ansteigende Verformung  $u_1$  so aufgezwungen, daß sich ein homogener Spannungs- und Verzerrungszustand über den Querschnitt ergibt.

Die erforderliche Energie zur Erzeugung eines Risses der Breite  $w_R$  im ursprünglich ungerissenen Beton beträgt:

$$G(w_R) = \int_0^{w_R} g(w) \cdot dw \quad (2)$$

mit

$g(w)$  [N/mm<sup>2</sup>] = spezifische Rißöffnungsenergie. Sie hängt nur von der Betonzusammensetzung ab.

Die elastisch gespeicherte Energie ergibt sich zu

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \sigma^2 \cdot dx \quad (3)$$

mit

$E$  = Elastizitätsmodul des zugbeanspruchten Betons

$\sigma$  = Spannung im Querschnitt

$$\sigma = \frac{E}{l} (u_1 - w_R), w_R < u_1 \quad (4)$$

Setzt man Gleichung (4) in Gleichung (3) ein, ergibt sich die Gesamtenergie  $\Psi$  zu

$$\Psi = U + G(w_R)$$

$$\Psi(u_1) = \frac{E}{2l} (u_1 - w_R)^2 + \int_0^{w_R} g(w) dw \quad (5)$$

Die Gesamtenergie hängt nach Gleichung (5) bei vorgegebener Verformung  $u_1$  nur von der Rißbreite  $w_R$  ab. Die Minimalbedingung lautet daher:

$$\frac{d\Psi}{dw_R} = -\frac{E}{l} (u_1 - w_R) + g(w_R) = 0 \quad (6)$$

Die Rißbreite beträgt bei ungerissenen Beton  $w_R = 0$  und kann nur Werte  $w_R > 0$  annehmen. Daher ist Gleichung (6) bis zum Erreichen der kritischen Verformung  $u_0$

#### 3. Theoretical considerations

For describing the experimentally observed non-linear behaviour of concrete loaded in tension it is necessary to base oneself on considerations of fracture mechanics. Taking account of thermodynamic aspects (see [18]), the following assumptions are adopted; these are applicable to monotonically increasing deformations:

- For producing a (micro-)crack of width  $w_R$  the required crack opening energy is  $G(w_R)$ .
- The total free energy of a body corresponds to the sum of the elastic strain energy and the cracking energy.
- For given boundary conditions the stresses in the body and the crack width are obtained from Le Chatelier's principle which states that the free energy strives to attain a minimum.
- The linear deformations are concentrated in the crack, while there occurs elastic behaviour in the rest of the body.

These assumptions will now be applied to the simplest case, namely, a tensile bar of length  $l$  and constant cross-sectional area  $A = 1$ . The bar is fixed at one end ( $u = 0$ ); at its other end a monotonically increasing deformation  $u_1$  is so applied that a homogeneous state of stress and strain is obtained over the cross-section.

For a given deformation  $u_1$  the requisite energy for producing a crack of width  $w_R$  in the originally uncracked concrete is:

where:  $g(w)$  [N/mm<sup>2</sup>] = specific crack opening energy, which depends only on the composition of the concrete.

The elastically stored energy is:

where:  $E$  = modulus of elasticity of the concrete in tension

$\sigma$  = stress in cross-section

On substitution of equation (4) into equation (3) we obtain the total energy  $\psi$  as expressed by:

According to equation (5) the total energy will, for a given deformation  $u_1$ , depend only on the crack width  $w_R$ . The minimum condition is therefore:

In uncracked concrete the crack width  $w_R = 0$  and can only

acquire values  $w_R > 0$ . Therefore equation (6) is not soluble up to the attainment of the critical deformation  $u_0$  (i.e., the concrete remains uncracked):

At a deformation  $u = u_0$  cracking begins. The associated stresses are determined with the aid of equation (4), giving:

The maximum value of the stress - i.e., the tensile strength of the concrete - is obtained for  $w_R = 0$ , provided that  $(w_R) < 0$ , as follows:

Equation (8) states that the tensile stress transferable across a crack with a given width corresponds to the specific crack opening energy. It can be determined by means of a centric tensile test. The empirically obtained equation (1) is therefore to be regarded as a characteristic "material law" for the concrete investigated in this research.

According to equation (9) the tensile strength of concrete can be determined only from the specific crack opening energy  $g(w)$ . It is theoretically independent of the length of the specimen. In reality, however, it is affected by the length of the specimen, because the composition of the concrete in the specimen varies within certain limits, so that the specific crack opening energy is non-uniformly distributed through the specimen (statistical effect).

The foregoing theoretical considerations show that the non-linear behaviour of concrete in tension must be regarded as due to micro-cracking. The decrease in the stress transferable across the



$$u_0 = \frac{1}{E} \cdot g(w_R = 0) \quad (7)$$

nicht lösbar; d. h. der Beton bleibt ungerissen. Bei einer Verformung  $u = u_0$  beginnt die Ribbildung. Die zugehörigen Spannungen ergeben sich aus Gleichung (6) mit Gleichung (4) zu:

$$\sigma(w_R) = g(w_R) \quad (8)$$

Den Höchstwert der Spannung – die Betonzugfestigkeit – erhält man für  $w_R = 0$ , sofern  $\frac{dg(w_R)}{dw_R} < 0$  gilt, zu:

$$\sigma(w_R = 0) = \beta_z = g(w_R = 0) \quad (9)$$

Gleichung (8) besagt, daß die über einen RiB mit vorgegebener Breite übertragbare Zugspannung der spezifischen Riböffnungsenergie entspricht. Sie kann im zentrischen Zugversuch bestimmt werden. Die empirisch gefundene Gleichung (1) ist daher als ein charakteristisches Materialgesetz für den hier geprüften Beton anzusehen.

Nach Gleichung (9) läßt sich die Betonzugfestigkeit nur mit Hilfe der spezifischen Riböffnungsenergie  $g(w)$  erklären. Die Betonzugfestigkeit ist theoretisch unabhängig von der Körperlänge. In Wirklichkeit hängt sie jedoch von den Körperabmessungen ab, da die Betonzusammensetzung im Körper in gewissen Grenzen schwankt und damit die spezifische Riböffnungsenergie ungleichmäßig über den Körper verteilt ist (statistischer Effekt).

Die vorstehenden theoretischen Überlegungen zeigen, daß das nicht-lineare Verhalten von zugbeanspruchtem Beton als Folge der Mikroribbildung anzusehen ist. Die Abnahme der über den RiB übertragbaren Spannung mit zunehmender Ribbreite folgt aus Gründen der Energieminimierung. Bei vollständiger Trennung der Ribufer ( $\sigma(w) = 0$ ) entspricht die pro Rib-Fläche verbrauchte Arbeit dem Wert  $G_F$ , der für einen Beton bestimmter Zusammensetzung konstant ist.

Diese energetischen Betrachtungen können auch auf Beanspruchungszustände mit Dehnungsgradienten übertragen werden. Sie liefern dann das in [5] vorgeschlagene und in [19] verbesserte Ribmodell (Bild 17).

#### 4. Schlußfolgerungen

Die durchgeführten experimentellen und theoretischen Untersuchungen lassen folgende Schlußfolgerungen zu:

1. Beton versagt bei zentrischer Zugbelastung nicht spröde, sondern nach Erreichen der Höchstspannung fällt die übertragbare Zugspannung bei zunehmenden Verformungen im Ribbereich stetig ab. Bei Erreichen der Höchstspannung bildet sich ein Mikrorib, der bei dem hier verwendeten Beton i. a. um die Zuschläge herumliert. Der Beton direkt neben diesem Rib verhält sich praktisch linear-elastisch. Die nicht-linearen Betonverformungen sind also in einem diskreten Rib konzentriert. Die Lastübertragung nach Bildung eines Mikroribes ist hauptsächlich auf die ribüberbrückende Wirkung der groben Zuschläge (Kornverklammerung) zurückzuführen.
2. Das Verhalten des Betons bei Zugbeanspruchung mit Dehnungsgradienten kann durch das in [5] vorgeschlagene und in [19] modifizierte Modell beschrieben werden (Bild 17). Dieses Modell folgt auch aus energetischen Betrachtungen. Bis zu einer kritischen Riböffnung sind die Ribufer spannungsfrei, d. h. es liegt ein echter Rib vor. An diesen echten Rib schließt sich die sog. Ribprozeßzone mit einem nicht-linearen Materialverhalten an. Außerhalb der Ribprozeßzone verhält sich der Beton linear-elastisch, wobei die Zugspannung maximal die zentrische Zugfestigkeit erreichen kann. Die Länge des sichtbaren Risses hängt von der Beobachtungsmethode ab. Bei sehr starker Vergrößerung fällt der Beginn des sichtbaren Risses mit dem Beginn der Ribprozeßzone zusammen. Bei Beobachtung mit dem bloßen Auge wird der sichtbare Rib innerhalb der Ribprozeßzone enden.
3. Die Verteilung der Spannungen in der Ribprozeßzone hängt von dem Zusammenhang zwischen übertragbarer Zugspannung und Ribbreite sowie dem Verlauf der Ribbreite über die Länge der Ribprozeßzone ab. Der Zusammenhang zwischen der über den RiB übertragbaren Zugspannung und der Ribbreite (Bild 9) ist für einen bestimmten Beton ein Materialgesetz. Demgegenüber wird der Verlauf der Ribbreite durch

crack with increasing crack width occurs in consequence of energy minimization. When complete separation of the crack faces has been achieved ( $\sigma(w) = 0$ ), the energy consumed per unit area is equal to the value  $G_F$ , which is constant for concrete of a particular composition.

The energy considerations can also be applied to states of stress with strain gradients. They then lead to the cracking model proposed in [5] and [19] (Fig. 17).

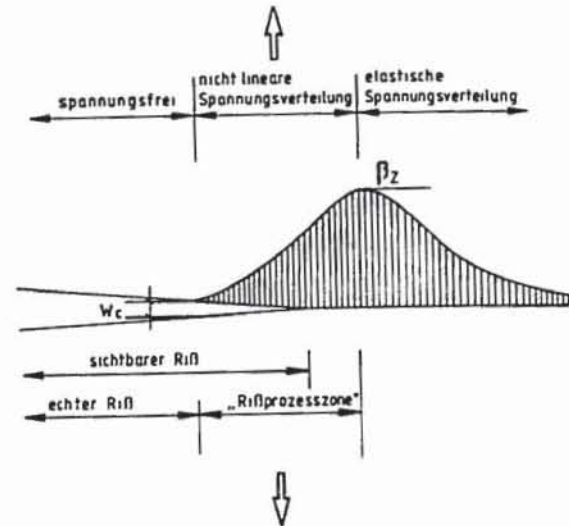


Bild 17. Spannungsverteilung im Bereich der Spitze eines Betonrisses (nach [19])

Fig. 17. Stress distribution at the tip of a crack in concrete (according to [19])

Fig. 17. Répartition de la contrainte aux environs de la pointe d'une fissure de béton (selon [19])

#### 4. Conclusions

The experimental and theoretical investigations that have been carried allow the following conclusions:

1. Concrete under centric tensile load does not undergo brittle failure: instead, after the maximum stress has been attained, the transferable tensile stress decreases continuously with increasing deformations. When the maximum stress is attained, a micro-crack develops which, in the concrete under investigation, generally passed round the aggregate particles and became wider with increasing imposed deformation. On the other hand, the concrete directly beside this crack behaves in a practically linear-elastic manner. Load transfer after micro-cracking is mainly due to the crack-bridging effect of the coarse aggregate (so-called aggregate interlock).
2. The behaviour of concrete under tensile loading in conjunction with strain gradients can be described by means of the model proposed by Hillerborg [5] and modified by Ingraffea [19] (Fig. 17). This model is also arrived at on the basis of energy considerations. Up to a critical crack opening displacement the crack faces are stress-free, i.e., there exists a real crack. This real crack joins up with a so-called cracking process zone with non-linear material behaviour. Outside this zone the concrete exhibits linear-elastic behaviour, while the tensile stress can at most attain the centric (direct) tensile strength. The length of the visible crack depends on the method of observation employed. With very powerful magnification the start of the visible crack coincides with the start of cracking process zone. Viewed with the naked eye, the visible crack will end within the cracking process zone.
3. The distribution of the stresses in the cracking process zone depends on the relation between transferable tensile stress and crack width and also on the behaviour of the crack width over the length of the cracking process zone. The relation between the tensile stress transferable across the crack and the crack width (Fig. 9) is a "material law" for a particular concrete. On the other hand, the crack width behaviour is determined by geometric quantities. This means that the length of the cracking process zone cannot be a value specific to the material.



geometrische Größen bestimmt. Dies bedeutet, daß die Länge der Rißprozeßzone kein materialspezifischer Wert sein kann [19].

4. Bedingt durch die beträchtliche Länge der Rißprozeßzone, ist die nach der linearen Bruchmechanik bestimmte kritische Rißfortschrittsenergie  $G_c$  bei üblichen Abmessungen der Betonbalken ( $\geq 50$  cm) keine Materialkonstante, sondern von den Körperabmessungen abhängig. Demgegenüber handelt es sich bei der insgesamt zur Rißausbreitung verbrauchten Energie  $G_f$  um einen materialspezifischen Kennwert. Er beträgt für den verwendeten Beton  $G_f \sim 0,10$  N/mm.
5. Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen stimmen ausreichend genau mit denjenigen früherer Arbeiten [12, 13, 15, 16] überein.
6. Bei Verankerungen mit Kopfbolzen bilden sich Mikrorisse deutlich vor Erreichen der Höchstlast und verlängern sich stabil mit zunehmender Last. Die Stelle der höchsten Zugspannung an der Rißspitze wandert somit vom Ort der Lasteinleitung entlang des Mantels des späteren Bruchkegels nach außen. Bei Höchstlast hat sich der Riß an der höchstbeanspruchten Stelle so weit geöffnet, daß er vermutlich keine Zugspannungen mehr übertragen kann. Mit zunehmenden aufgezwungenen Verformungen verlängert sich dieser Makroriß und schiebt die Rißprozeßzone vor sich her. Dieses Verhalten dürfte auch für Verankerungen mit anderen Befestigungsmitteln (z. B. Dübel) gelten.
7. Das nicht-lineare Verhalten des Betons im Riß ermöglicht bei Zugbeanspruchungen mit Dehnungsgradienten, wie sie z. B. im Bereich von Kopfbolzenverankerungen oder im Bereich von Übergreifungsstößen auftreten, eine Spannungsumlagerung von hochbeanspruchten auf weniger ausgenutzte Zonen. Dies wirkt sich günstig auf das Tragverhalten aus und macht den Beton weniger anfällig gegenüber örtlich auftretenden Zugbeanspruchungen. Es ist jedoch zu beachten, daß die Betonzugfestigkeiten im Bauwerk stark streuen und durch Eigen- und Schwankspannung ganz oder teilweise aufgezehrt werden können. Daher sind die im Querschnitt auftretenden Kräfte wie bisher im allgemeinen durch Bewehrung aufzunehmen.

## 5. Zusammenfassung

In Beton- und Stahlbetontragwerken wird die Zugfestigkeit des Betons an vielen Stellen in Anspruch genommen. Die beschriebenen experimentellen Untersuchungen an unbewehrten Zugkörpern, Biegebalken und Kopfbolzenverankerungen und theoretische Überlegungen zeigen, daß zugbeanspruchter Beton nicht spröde versagt, sondern nach Überschreiten der Höchstlast infolge von Bildung diskreter Mikrorisse ein nicht-lineares Last-Verformungsverhalten aufweist. Dieses Ergebnis stimmt mit Untersuchungen anderer Autoren überein.

### Schrifttumnachweis

- [1] Evans, R., Marathe, M.: Microcracking and Stress-Strain Curves for Concrete in Tension. *Matériaux et Construction* No. 1 (1968)
- [2] Smart: Grenzlastverhalten Benutzerhandbuch. Institut für Statik und Dynamik, Universität Stuttgart, Bericht 191, 1976
- [3] Elgehausen, R.; Clausnitzer, W.: Analytisches Modell zur Beschreibung des Tragverhaltens von Befestigungselementen, Bericht 4/1 - 83/3, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart (1983)
- [4] Hilsdorf, M.: Sinn und Grenzen der Anwendbarkeit der Bruchmechanik in der Betontechnologie; *Festschrift Kordina* (1979)
- [5] Hillerborg, A.: Analysis of One Single Crack Developments; *Fracture Mechanics of Concrete*, Elsevier (1983)
- [6] Bazant, Z.; Oh, B.: Crackband Theory of Concrete; *Matériaux et Construction*, Vol. 16, No. 93 (1983)
- [7] Elgehausen, R.; Sawade, G.: Tragverhalten von Beton bei Zugbeanspruchung mit hohen Dehnungsgradienten; Bericht Nr. 3/3-84/10, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart (1984)
- [8] Jiang, D.; Andronian; Shah, S.: A New Type of Bond Test Specimen; *Bond in Concrete*, Appl. Science Publishers, London (1982)
- [9] DIN 1045, Ausgabe 1978
- [10] Feinels, N.; Weigler, M.: Anwendung der Schallemissionsanalyse bei Beton; *Materialprüfung* 25, Nr. 3 (1983)
- [11] Notter: Schallemissionsanalyse für Beton in dehnungsgesteuerten Zugversuchen; Dissertation, Zürich (1982)
- [12] Reinhardt, H.-W.: Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material Like Concrete; *HERON* Vol. 29, No. 2 (1984)
- [13] Jeng, Y.; Shah, S.: Nonlinear Fracture Parameters for Cement Based Composites: Theory and Experiments; Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, Research Workshop, Northwestern University, Evanston (1984)

4. Because of the considerable length of the cracking process zone, the critical strain energy release rate (crack extension force)  $G_c$  for normal beam dimensions (below about 50 cm) is not a material constant, but depends on the dimensions of the specimen. On the other hand, the total energy input  $G_f$  for crack extension is a characteristic value which is specific to the material. For the concrete investigated in these tests it was approximately 0.10 N/mm.
5. The results of the experimental investigations are in sufficiently good agreement with those of earlier research [12], [13], [15], [16].
6. At headed stud anchorages, micro-cracks are formed well before the attainment of the maximum load and undergo extension in a stable manner with increasing load. The location of maximum tensile stress at the crack tip therefore advances from the point of load introduction outwards along the lateral surface of the subsequent fracture cone. At maximum load the crack will, at the most severely stressed point, have opened so wide that it can probably no longer transmit any tensile stresses. With increasing imposed deformations this micro-crack undergoes extension and pushes the cracking process zone along ahead of it. This behaviour is presumably also encountered in anchorages formed with other types of fixings (e.g., anchors in drilled holes).
7. The non-linear behaviour of the concrete in the crack enables a stress redistribution from highly stressed to less fully utilized zones to take place in the case of tensile loading associated with strain gradients, e.g., in the vicinity of headed stud anchorages or of lap joints. This redistribution has a very favourable effect on loadbearing behaviour and makes the concrete less susceptible to local tensile load effects.

### Summary:

In plain and reinforced concrete structures the tensile strength of the concrete is utilized at many points. The experimental investigations on unreinforced tensile test specimens, flexural beams and headed stud anchorages reported here, together with the theoretical considerations presented, show that concrete loaded in tension does not fail in a brittle manner, but shows distinct non-linear load-deformation behaviour due to the formation of discrete micro-cracks after the maximum load has been attained. This result is in agreement with previous research.

### Comportement du béton à la traction

#### Résumé:

La résistance à la traction du béton est mise à l'épreuve à plusieurs endroits des constructions porteuses en béton ou en béton armé. Les analyses expérimentales décrites, faites sur des corps de traction non armés, sur des éprouvettes prismatiques et sur des ancrages de boulons à tête ainsi que des réflexions théoriques montrent qu'un béton mis à l'épreuve de la traction ne cède pas en rupture fragile mais se déforme sous l'action de la charge d'une façon non-linéaire évidente, à la suite de microfissures discrètes qui se forment après dépassement de la charge maximum. Ce résultat correspond au résultat d'autres expériences antérieures.

- [14] Hahn: *Bruchmechanik*, Teubner-Verlag, Stuttgart (1976)
- [15] Peterson: *Fracture Energy of Concrete: Method of Determination*; *Cement and Concrete Research*, Vol. 10 (1980)
- [16] Hilsdorf, M.; Brameshuber, W.: Size Effects in the Experimental Determination of Fracture Mechanics Parameter; Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, Research Workshop; Northwestern University, Evanston (1984)
- [17] Elgehausen, R.; Mayer, B.: Befestigungen in der Zugzone, Bericht Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart (in Vorbereitung)
- [18] Blum, R.: Bruch- und Schädigungsmechanik bei zugbeanspruchtem Beton, Bericht Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart (in Vorbereitung)
- [19] Ingraffea, A. R.; Gerstle, W. H.: Nonlinear Fracture Model for Discrete Crack-Propagation. Research Workshop; Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, Northwestern University, Evanston (1984)