

Institut für Konstruktionstechnik  
und Technisches Design  
Universität Stuttgart  
Prof. Dr.-Ing. H. Binz

Matthias Beck, Hansgeorg Binz

**Untersuchung von konischen  
Stirnrädern mit dem Scheibenmodell**

Bericht Nr. 600





Institut für Konstruktionstechnik  
und Technisches Design  
Universität Stuttgart  
Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz  
Institutsleiter

# Untersuchung von konischen Stirnrädern mit dem Scheibenmodell

Dieser Bericht umfasst 28 Seiten.

Stuttgart, den 28.03.2012

Dipl.-Ing. M. Beck

Prof. Dr.-Ing. H. Binz

Dipl.-Ing. M. Bachmann

Bericht des  
Instituts für Konstruktionstechnik und Technisches Design  
Universität Stuttgart

Bericht Nr. 600

**IKTD Bericht Nr. 600**

**ISBN-13: 978-3-922823-80-3**

**Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design**

Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 9

D-70569 Stuttgart

Telefon +49 (0)711 685-66055

Telefax: +49 (0)711 685-66219

E-Mail: [mail@iktd.uni-stuttgart.de](mailto:mail@iktd.uni-stuttgart.de)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Vorauslegung von Beveloidrädern</b> .....	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Scheibenmodell für Beveloidverzahnungen</b> .....	<b>9</b>
3.1	Herleitung ausgehend von Stirnrädern .....	9
3.2	Anwendung auf Zylinderräder .....	13
<b>4</b>	<b>Anwendung auf Beveloidverzahnungen</b> .....	<b>15</b>
4.1	Gegenüberstellung mit FE-Analysen .....	16
4.2	Lastfreie Klaffung von Beveloidverzahnungen.....	17
4.3	Ergebnisse der tragenden Breite und des Tragbilds.....	17
4.4	Klaffung unter Last.....	20
4.5	Lastverteilung über der Breite.....	20
4.6	Berechnung der Fuß-Nennspannung .....	21
4.7	Scheibenmodell zur Bewertung von Flankenmodifikationen.....	23
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b> .....	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Ausblick</b> .....	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Literatur</b> .....	<b>25</b>

## Zeichen für Oberbegriffe

Zeichen	Einheit	Benennung
b	mm	Zahnbreite
C	---	Faktoren der Zahnfedersteifigkeit nach DIN 3990-1
c'	N / (mm $\mu$ m)	Einzelfedersteifigkeit nach DIN 3990-1
F	N	Kraft
f	$\mu$ m	Abweichung
i	---	Zählvariable
j	---	Anzahl der tragenden Scheiben
K	mm	lastfreie Klaffung
m	mm	Modul
M	Nm	Moment
n	---	Anzahl der Scheiben
Y	---	Faktor für die Fußbeanspruchung
w	N / mm	Linienlast
$\alpha$	Grad	Eingriffswinkel
$\beta$	Grad	Schrägungswinkel
$\zeta$	---	Zählkoordinate in Zahnbreitenrichtung
$\theta$	Grad	Profilverschiebungswinkel
$\Sigma$	Grad	Achswinkel

## Indices

Index	Benennung
0	Nenn
b	Grundkreis
erf	erforderlich
F	Fuß
H	Hertzsche Pressung
m	mittlere
max	maximal
n	Normalschnitt

Index	Benennung
t	Umfangsrichtung, tangential, Stirnschnitt
th	theoretisch
vorh	vorhanden

## Kombinierte Zeichen

Kurzzeichen	Einheit	Benennung
$C'_{th}$	N / (mm $\mu$ m)	theoretische Einzelfedersteifigkeit
$C_B$	---	Bezugsprofilfaktor
$C_M$	---	Korrekturfaktor
$C_R$	---	Radkörperfaktor
$f_{H\beta}$	$\mu$ m	Flankenlinienwinkelabweichung nach DIN 3962-2
$K_{F\beta}$	---	Breitenfaktor (Fuß), nach DIN 3990-1
$K_{H\beta}$	---	Breitenfaktor (Flanke), nach DIN 3990-1
$N_F$	---	Exponent, Breitenfaktor
$Y_F$	---	Formfaktor
$Y_S$	---	Spannungskorrekturfaktor
$Y_\beta$	---	Schrägenfaktor (Zahnfuß)
$\sigma_{F0}$	N / mm <sup>2</sup>	Zahnfuß-Nennspannung

## 1 Einleitung

Beveloidräder gehören zur Gruppe der evolventischen Stirnräder. Aufgrund einer linear veränderlichen Profilverschiebung längs der Zahnbreite besitzen diese eine kegelige Außenform. Durch die Paarung zweier Beveloidräder ist die Realisierung eines Achswinkels von bis zu  $20^\circ$  möglich. Sie finden in paralleler Achslage Einsatz in spielarmen Roboterantrieben sowie in kreuzender Lage in Schiffs- und vermehrt in Fahrzeuggetrieben. Sie werden aufgrund der Verwandtschaft zu zylindrischen Stirnrädern auch als konische Stirnräder bezeichnet. Zur deutlicheren Unterscheidung der beiden Zahnradarten werden die bekannten Stirnräder nachfolgend als Zylinderräder bezeichnet.

## 2 Vorauslegung von Beveloidrädern

Beveloidräder weisen im Stirnschnitt Evolventen auf. In kreuzender Achslage ergibt sich eine Klaffung zwischen den Flanken von Rad und Gegenrad und somit eine punktförmige Berührung. Für einen Praxiseinsatz muss das Tragbild verbreitert und die Tragbildlage eingestellt werden, um eine Überbeanspruchung der Verzahnung zu vermeiden. Auslegungswerkzeuge von Zylinderrädern sind allerdings nicht ohne weiteres auf Beveloidverzahnungen anwendbar. Die von Zylinderrädern abweichende Zahnform und der Achswinkel von Beveloidverzahnungen können in Auslegungsprogrammen wie beispielsweise „RIKOR“ oder „STIRAK“ der Forschungsvereinigung Antriebstechnik nicht berücksichtigt werden [Beck11].

Der Auslegungsprozess von Beveloidrädern verläuft iterativ. Im Zuge der Vorauslegung werden geeignete Hauptverzahnungsdaten festgelegt. Eine unkorrigierte Verzahnung besitzt in der Regel Punktberührung zwischen den Flanken und würde im Einsatz aufgrund der Beanspruchungskonzentration früher ausfallen. Sie bedarf deshalb einer gezielten Flankenmodifikation zur Erreichung eines befriedigenden Tragbilds. Durch die Wahl ungeeigneter Modifikationen besteht dabei die Gefahr beispielsweise des Kantentrags und somit verminderter Lebensdauer oder erhöhter Geräuschentwicklung im Betrieb.



Für einen rechnerischen Tragfähigkeitsnachweis von Beveloidverzahnungen sind die Kenntnisse der tragenden Breite, der Lastverteilung entlang der Berührlinie und der auftretenden Beanspruchungen notwendig. Deren Ermittlung kann derzeit nur mit numerischen Simulationen erfolgen, beispielsweise mit Finite-Elemente-Analysen, die aber zeit- und rechenintensiv sind. Es besteht daher der Bedarf, schon im Vorfeld solcher Rechnungen ungünstige Kombinationen von Verzahnungsparametern und Flankenmodifikationen erkennen zu können, um die Variantenvielfalt zu reduzieren und den simulativen Aufwand zu verringern. Dazu müssen der Ort und die Größe der Belastung entlang der Zahnbreitenrichtung mit analytischen Verfahren bestimmbar sein, um die Beanspruchung abschätzen zu können. Ein Ansatz dazu wird nachfolgend vorgestellt.

### **3 Scheibenmodell für Beveloidverzahnungen**

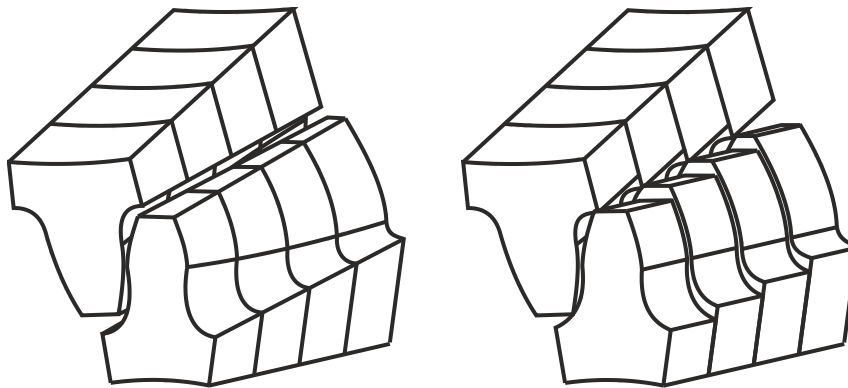
Um das lastbehaftete Tragen von Beveloidverzahnungen analytisch anzunähern, wird nachfolgend ein Scheibenmodell angewandt, bei dem die Zahnräder gedanklich in Scheiben konstanter Breite unterteilt werden. Jede Scheibe entspricht einem Zylinderrad. Da Beveloidräder eine über der Breite veränderliche Profilverschiebung aufweisen, besitzt jede Scheibe eine unterschiedliche Geometrie.

#### **3.1 Herleitung ausgehend von Stirnrädern**

Das Vorgehen ist angelehnt an die Bestimmung der Breitenfaktoren nach DIN 3990-1 [DIN3990] oder die Ermittlung der Steifigkeitswerte von schrägverzahnten Zylinderrädern [Linke10], wobei die einzelnen Scheiben dort eine einheitliche Form aufweisen.

Die Stirnschnitte von Beveloidrädern stehen um den Achswinkel  $\Sigma$  verkippt zueinander. Durch das gedankliche Zurückschwenken der Scheiben in eine gemeinsame, plane Fläche wird die räumliche Verzahnung auf ein ebenes Problem reduziert und der Achswinkel gedanklich aufgelöst. Nun kann eine Beveloidverzahnung abschnittsweise mit den von Zylinderrädern bekannten Gleichungen untersucht werden. Jedes Scheibenpaar aus Rad und Gegenrad erhält dabei unterschiedliche, lokale

Eigenschaften. Ein ähnliches Vorgehen wurde von Traut zur Definition von Profilverschiebungskorrekturen angewandt [Traut11].

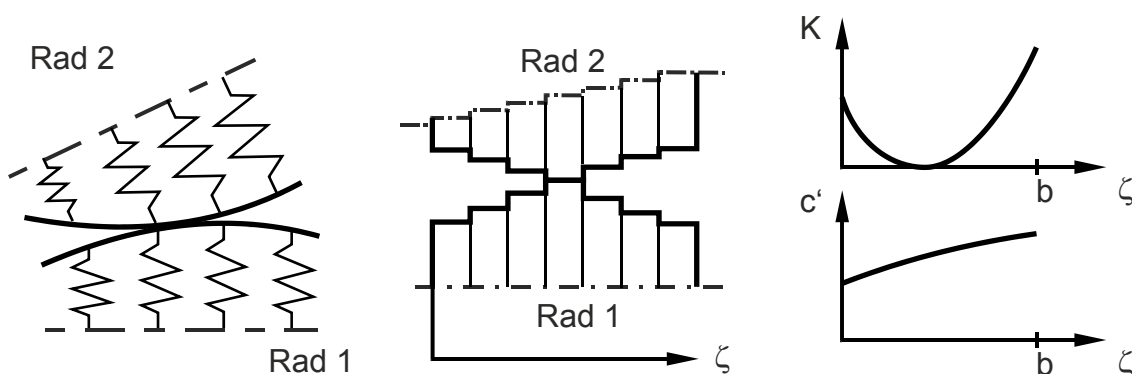


**Bild 3.1:** Beveloidverzahnung (links), Ersatz durch Scheiben (rechts)

Aus dem bekannten Verlauf der lastfreien Klaffung entlang der Durchstoßlinie des Ersatzwälzkegels mit der Zahnflanke ergibt sich für jedes Scheibenpaar ein Klaffungswert. Mithilfe der von zylindrischen Stirnrädern bekannten Gleichungen wird jedem Scheibenpaar eine lokale Einzelfedersteifigkeit  $c'$  nach DIN 3990-1, Methode B [DIN3990] zugeordnet, die sich aus der Zahnform ergibt.

$$c' = c'_{th} \cdot C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos\beta \quad (3.1)$$

Die Einzelfedersteifigkeit  $c'$  beschreibt die Nachgiebigkeit eines Zahnpaars unter Last [Niemann03]. Dadurch wird die Steifigkeit der Beveloidradstirnschnitte durch die von Zylinderradstirnschnitten angenähert. Da jede Scheibe eine unterschiedliche Profilverschiebung besitzt, ergibt sich ein veränderlicher Steifigkeitsverlauf über der Breite.



**Bild 3.2:** Bestimmung der lokalen Klaffungs- und Steifigkeitswerte der Scheiben.

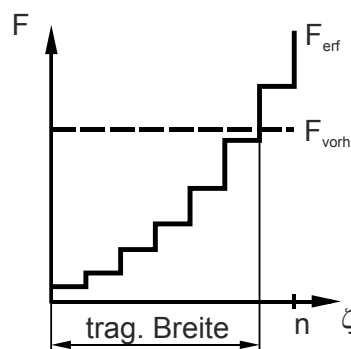
Mit der Kenntnis der lastfreien Klaffung  $K$  und der Steifigkeit  $c'$  kann für jedes anliegende Scheibenpaar  $i$  die erforderliche Kraft in Umfangsrichtung bestimmt werden, um das Paar soweit zu verformen, bis auch das nachfolgend klaffende Scheibenpaar  $i+1$  anliegt und dessen Klaffung geschlossen wird.

$$F_{bt,i,erf} = c'_i \cdot K_{i+1} \quad (3.2)$$

Das anliegende Scheibenpaar  $i$  wurde dabei um den Betrag der Klaffung  $K_{i+1}$  verformt und die Klaffung der restlichen Scheibenpaare entsprechend reduziert. Der Zahnkörper wird dadurch gedanklich mitverdrillt, wobei das Moment vereinfacht gleichmäßig auf alle Scheiben wirkt. Dieses Vorgehen geschieht so oft, bis die Summe der erforderlichen Umfangskräfte aller Scheibenpaare der aus dem Belastungsmoment resultierenden vorhandenen Umfangskraft am Grundkreis  $F_{bt,vorh}$  entspricht.

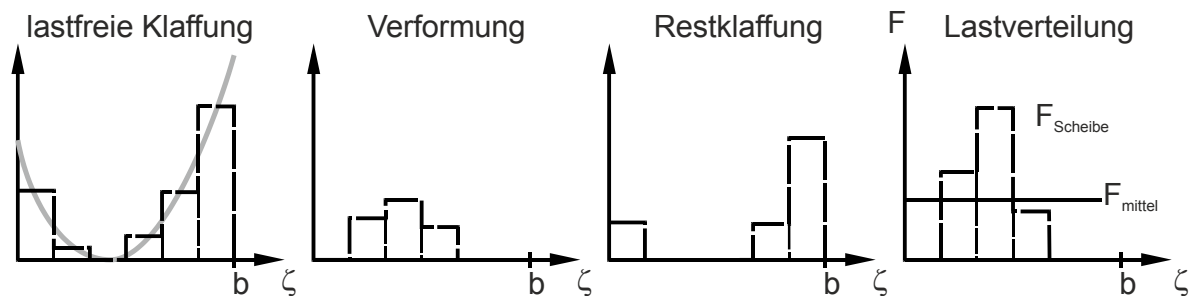
$$\sum_{i=1}^j F_{bt,i,erf} = F_{bt,vorh} = \frac{2 \cdot M_t}{d_b} \quad \text{mit } 1 < j \leq n \quad (3.3)$$

Aus der Anzahl  $j$  der so festgestellten tragenden Scheiben, multipliziert mit der Scheibendicke, ergeben sich die tragende Zahnbreite und der Ort des Tragbildschwerpunkts. Verformungen des Radkörpers oder der Wellen und die Richtung der Momenteneinleitung in die Verzahnung, also die Unterscheidung, ob von Zahnzehe oder Ferse einwirkend, sind in dieser Studie nicht berücksichtigt. Erreicht die Anzahl tragender Scheiben  $j$  die Gesamtmenge  $n$  an Scheiben, sind sämtliche klaffende Scheibenpaare bis zur Berührung verformt und die Verzahnung trägt über der gesamten Breite.



**Bild 3.3:** Bestimmung der tragenden Breite

Die Verformungswege aller Scheibenpaare sind aufgrund der veränderlichen Klaffung entlang der Breitenkoordinate  $\zeta$  unterschiedlich. Wird von der lastfreien Klaffung die Verformung unter Last abgezogen, entsteht ein Tragbild unter Last mit Restklaffung.



**Bild 3.4:** Bestimmung des Klaffungsverlaufs unter Last und der Lastverteilung

Das vorgestellte Scheibenmodell bestimmt die örtliche Belastung entsprechend der Klaffung und Steifigkeit entlang der Berührlinie. Deshalb ist der Mittelwert der Scheibenkräfte gleich der vorhandenen Umfangskraft  $F_{bt,vorh}$  aus dem Belastungsmoment am Grundkreis und entspricht, bezogen auf die Zahnbreite, der mittleren Linienlast  $w_{bm}$ .

$$\frac{\sum_{i=1}^n F_{bt,i,erf}}{b_{Scheibe} \cdot n} = \frac{F_{bt,vorh}}{b} = w_{bm} \quad (3.4)$$

Der Höchstwert der Scheibenkräfte wird auf die Scheibenbreite bezogen und mit der mittleren Linienlast ins Verhältnis gesetzt, wodurch ein Lastverteilungsfaktor bestimmt werden kann. Der Wert ist vergleichbar mit dem Breitenfaktor der Flanken  $K_{H\beta}$  von Zylinderrädern nach DIN 3990-1. Er berücksichtigt darin bei der analytischen Auslegung die Lastüberhöhung auf der Flanke aufgrund von Verlagerungen unter Last. Im Scheibenmodell wird für jedes Scheibenpaar ein örtlicher Breitenfaktor bestimmt.

$$K_{H\beta,\zeta} = \frac{(F_{i,erf}/b_{Scheibe})_{max}}{(F_{m,Scheibe}/b)} \quad (3.5)$$

Für Beveloidräder muss sich eine Belastungskonzentration in Flankenbereichen mit im lastfreien Zustand geringer Klaffung zeigen. Ist das Moment nicht hoch genug, um

sämtliche klaffenden Scheibenpaare zu schließen, ergibt sich somit auch keine Belastung der restlich klaffenden Scheiben und die Lastverteilung ist an diesen Stellen null.

Mit dem örtlichen Lastverteilungsfaktor kann die Fuß-Nennspannung näherungsweise ermittelt werden. Dazu wird der Fuß-Breitenfaktor  $K_{F\beta}$  mit dem nach DIN 3990-1 bekannten Rechenverfahren mithilfe des Zahnformexponenten  $N_F$  und den Flanken-Breitenfaktor  $K_{H\beta}$  bestimmt. Er berücksichtigt den Einfluss der Kraftverteilung über der Zahnbreite auf die Spannung am Zahnfuß.

$$K_{F\beta,\zeta} = K_{H\beta,\zeta}^{N_F} \quad (3.6)$$

Durch die derart bestimmten Breitenfaktoren wird die von Zylinderrädern abweichende Zahnform der Beveloidräder und die daraus resultierende Lastüberhöhung berücksichtigt. Mit der Grundgleichung zur Ermittlung der Fuß-Nennspannung nach DIN 3990-3 unter Anwendung der Faktoren ergibt sich die Nennspannung für Beveloidräder.

$$\sigma_{F0,Bev,\zeta} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{F,\zeta} \cdot Y_{S,\zeta} \cdot Y_{\beta,\zeta} \cdot K_{F\beta,\zeta} \quad (3.7)$$

### 3.2 Anwendung auf Zylinderräder

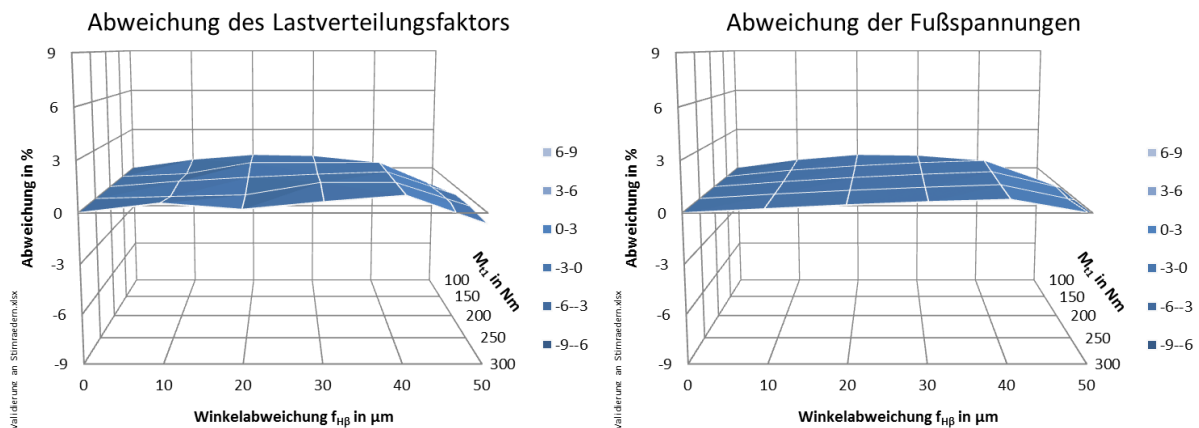
Das vorgestellte Scheibenmodell ist von Zylinderrädern abgeleitet, die Beveloidradscheiben werden durch Zylinderradabschnitte angenähert. Daher ist mit dem Modell grundsätzlich auch die Analyse von Zylinderrädern möglich, was beispielhaft an einer Verzahnung dargestellt wird. Die Verzahnungsdaten sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

		Rad 1	Paarung	Rad 2
Normalmodul $m_n$	mm		2,5	
Zahnbreite $b$	mm	20		20
Eingriffswinkel $\alpha_n$	Grad	20		20
Schrägungswinkel $\beta$	Grad	0		0
Profilverschiebung	---	0		0
Scheibenmodell: Scheibenzahl	---	20		20

**Tabelle 3.1:** Untersuchtes Zylinderrad

Im Scheibenmodell des Zylinderrads erhalten alle Scheiben die gleiche Zahnform, Steifigkeit und somit identische Eigenschaften, da sich die Profilverschiebung über der Zahnbreite nicht ändert. Entsprechend ergibt sich für ideale Zahnflanken eine Berührung über der gesamten Breite. Zur Überprüfung des Scheibenmodells wird auf die Zylinderradflanke ein linearer Winkelfehler aufgebracht, wie er beispielsweise durch Fertigungsabweichungen oder Wellendurchbiegung entstehen kann. Im Praxiseinsatz kann ein solcher Fehler einseitiges Tragen an den Kanten und somit Lastüberhöhungen verursachen.

Im Bild 3.5 sind die Abweichungen der Ergebnisse für die Lastfaktoren und Fußspannungen zwischen dem Scheibenmodell und der DIN 3990 für verschiedene Winkelabweichungen und Lastmomente dargestellt. Die Abweichungen liegen unter einem Prozent und bei Winkelfehlern von 50  $\mu\text{m}$  nur leicht ungünstiger. Dieser Winkelfehler entspricht bei der Verzahnung einer sehr schlechten Qualität von 11. Daher kann die geringe Abweichung zwischen beiden Berechnungsmethoden vernachlässigt werden. Die Ergebnisse des vorgestellten Scheibenmodells sind deshalb in den Norm-Rechengang überführbar und somit überprüfbar.



**Bild 3.5:** Abweichungen zwischen den nach DIN 3990 und mit dem Scheibenmodell ermittelten Lastverteilungsfaktoren und Fußspannungen eines Zylinderrads

Die Diskretisierung und abschnittsweise Berechnung der Verzahnung durch das Scheibenmodell liefert gute Ergebnisse. Im nächsten Schritt soll es auf Beveloidver-

zahnungen angewandt werden, um die Effekte aufgrund der veränderlichen Geometrie über der Breite aufzuzeigen.

## 4 Anwendung auf Beveloidverzahnungen

Das Scheibenmodell wurde exemplarisch auf geradverzahnte Beveloidradpaare angewandt. Bei Geradverzahnungen ist während des Abwälzprozesses ein eindeutiges Einzeleingriffsgebiet vorhanden. Die Last konzentriert sich vollständig auf einen Zahn, dies stellt somit den beanspruchungskritischsten Fall dar. Außerdem weisen geradverzahnte Beveloidräder eine symmetrische Stirnschnittgeometrie auf, weshalb geometrische Größen und Faktoren mit den Gleichungen für Zylinderräder bestimmt werden können. Bei den gewählten Beveloidrädern liegt in der Zahnmitte beider Räder eine Profilverschiebung von null vor, sodass hier die Berührzone liegen muss [Roth98] und die Ergebnisse direkt auf Plausibilität überprüfbar sind. Die untersuchten Verzahnungsvarianten sind in Tabelle 4.1 aufgelistet und sind ähnlich zur untersuchten Zylinderradpaarung in Kapitel 3.2.

	Rad 1	Paarung	Rad 2	Bemerkung
Normalmodul $m_n$	mm	2,5		
Zahnbreite $b$	mm	20	20	
Eingriffswinkel $\alpha_n$	Grad	20	20	
Schrägungswinkel $\beta$	Grad	0	0	
Profilversch. $x(b/2)$	---	0	0	
Scheibenmodell: Scheibenanzahl	---	20	20	
Variante I	$z_1 = 19$ $\theta_1 = 8^\circ$	$\Sigma = 16^\circ$	$z_2 = 38$ $\theta_2 = 8^\circ$	extreme Beveloidpaarung
Variante V	$z_1 = 19$ $\theta_1 = 4^\circ$	$\Sigma = 8^\circ$	$z_2 = 38$ $\theta_2 = 4^\circ$	Beveloidpaarung
Variante IX	$z_1 = 19$ $\theta_1 = 2^\circ$	$\Sigma = 4^\circ$	$z_2 = 38$ $\theta_2 = 2^\circ$	Beveloidpaarung

**Tabelle 4.1:** Untersuchte Verzahnungsvarianten

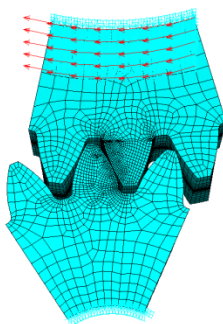
Variante I stellt eine Beveloidpaarung mit sehr großem Profilverschiebungswinkel von  $8^\circ$  dar. Variante V weist den halben Winkel von  $4^\circ$  und Variante IX von  $2^\circ$  auf. Alle Verzahnungen sind ideal ausgerichtet und abweichungsfrei um die grundlegenden Effekte durch die Zahnform deutlich aufzuzeigen. Aufgrund der

gewählten Zähnezahlen und Konuswinkel ergeben sich für die beiden ersten Varianten sehr deutliche lastfreie Klaffungen. Für praktische Einsätze müssen der an den Zahnzehen auftretende Unterschnitt und die Klaffung vermieden werden, um eine Überbeanspruchung zu reduzieren. Die Verzahnungen werden mindestens mit einer mittleren Linienlast von 100 N/mm belastet, um dem Anwendungsbereich der verwendeten Steifigkeitswerte nach DIN 3990-1 zu entsprechen.

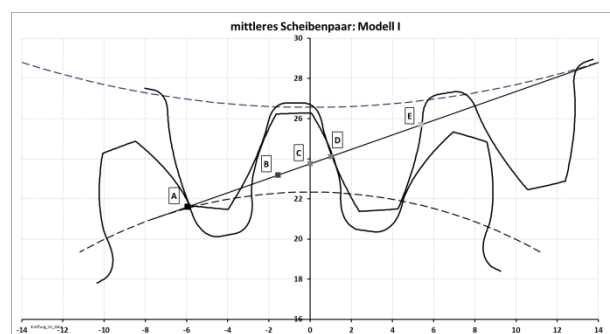
#### 4.1 Gegenüberstellung mit FE-Analysen

Um die mit dem Scheibenmodell analytisch bestimmten Ergebnisse verifizieren zu können, wurden die Verzahnungen ebenfalls mithilfe der FEM untersucht. Dabei werden vereinfacht drei Zähne pro Rad modelliert, um die Modellgröße und damit Rechenzeit zu reduzieren.

Die Lastübertragung erfolgt am mittleren Zahnpaar in der Wälzstellung C des mittleren Stirnschnitts im Einzeleingriffsgebiet zur Ermittlung der tragenden Breite und in Wälzstellung D für die Bestimmung der Zahnfuß-Nennspannung. Ein Einfluss aus vorzeitigem Eingriff aufgrund der Zahnverformung wird nicht berücksichtigt, wie es dem Vorgehen des analytischen Tragfähigkeitsnachweises nach DIN 3990 entspricht. In den nachfolgenden Bildern ist beispielhaft Verzahnungsvariante I dargestellt.



**Bild 4.1:** Verwendetes FE-Modell



**Bild 4.2:** Eingriffsstellung des mittleren Scheibenpaares

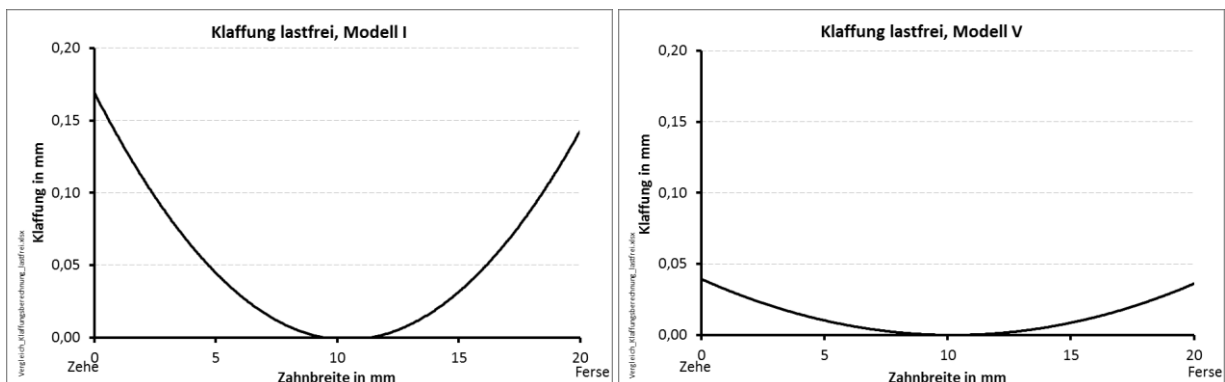
Aus den FE-Ergebnissen werden die Tragbilder unter Last ausgewertet. Relevant ist der Bereich, in dem die Klaffung im verformten Zustand weniger als 6 µm beträgt. Der Wert entspricht der Dicke einer üblichen Tuschiepaste, mit der experimentell Tragbilder aufgenommen werden. Die Länge in Zahnbreitenrichtung wird als tragende Breite definiert und ist in der graphischen FE-Darstellung rot markiert.



## 4.2 Lastfreie Klaffung von Beveloidverzahnungen

Eine wesentliche Eingangsgröße bei der Anwendung des Scheibenmodells ist die Kenntnis der lastfreien Klaffung der Verzahnung. Sie ist der kürzeste Abstand zwischen einem beliebigen Punkt auf der Flanke des Rades zum Gegenrad in anliegender und unverformter Wälzstellung. Sie beträgt am Ort einer Berührung null und nimmt bei Beveloidrädern in der Regel zu den Stirnseiten hin zu. Zur Bestimmung der lastfreien Klaffung von Beveloidverzahnungen sind am Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design der Universität Stuttgart (IKTD) verschiedene Verfahren entwickelt worden.

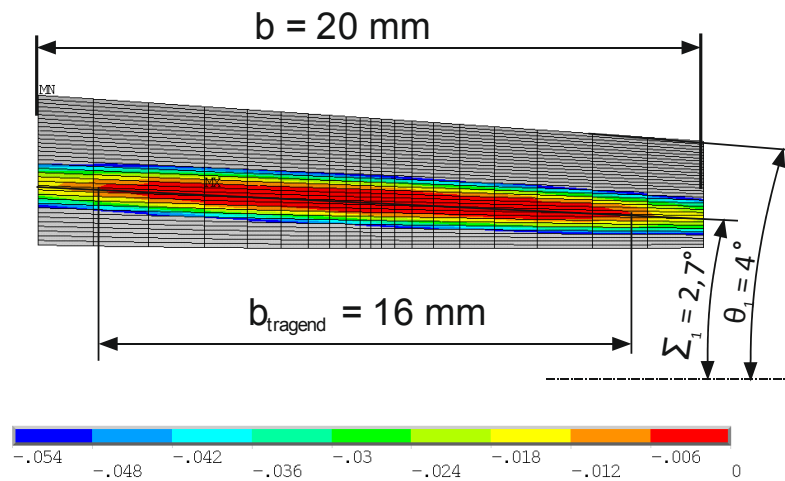
Wagner bestimmt numerisch zu einem gegebenen Beveloidrad ein ideales Gegenrad und nähert dieses durch ein zweites Beveloidrad an [Wagner93]. Alxneit und Traut erstellten eine numerische, lastfreie Abwälzsimulation für gegebene Beveloidverzahnungen [Alxneit09], [Traut10]. Damit kann punktweise eine Klaffungsberechnung zwischen den Zahnflanken in diskreten Wälzstellungen durchgeführt werden. Das lastfreie Tragbild entsteht aus den minimalen Klaffungswerten aus allen Wälzstellungen. Für das weitere Vorgehen wird mit dieser Abwälzsimulation die lastfreie Klaffung entlang der Ersatzwälzkegel ermittelt, siehe Bild 4.3.



**Bild 4.3:** Lastfreie Klaffung der Verzahnungen I und V

## 4.3 Ergebnisse der tragenden Breite und des Tragbilds

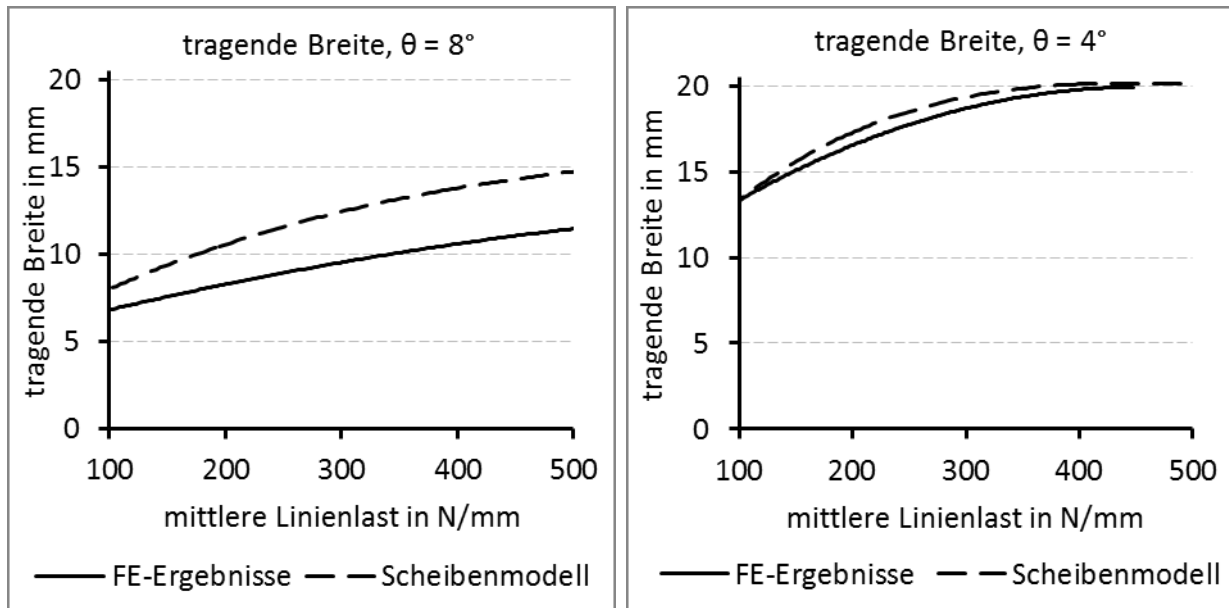
In Bild 4.4 ist das FE-Tragbildergebnis der treibenden Flanke der Variante V bei einem Belastungsmoment von  $M_{12} = 150$  Nm dargestellt, was einer mittleren Linienlast über der gesamten Zahnbreite von ca. 170 N/mm entspricht. Die tragende Breite ist mit ca. 16 mm Länge rot markiert.



**Bild 4.4:** FE Tragbild der Verzahnungsvariante V, Flankenabstand in mm

Zur Kontrolle der Modellierung kann am Verlauf der Kopfkante der Profilverschiebungswinkel  $\theta_1 = 4^\circ$  gemessen werden. Die lange Halbachse der Ellipse entspricht der Berührlinie, sie ist um den Teilwinkel  $\Sigma_1$  zur Rotationsachse von Rad 1 geneigt. Der gemessene Wert stimmt mit dem nach Traut [Traut11] analytisch bestimmten Wert überein.

Das Scheibenmodell ermittelt für diese Verzahnung eine tragende Breite von 16 mm, der Wert entspricht ungefähr dem FE-Ergebnis. Die Tragbildbreite ist lastabhängig, unter größerer Last verformt sich der Zahn stärker, sodass auch andere Stirnschnitte zum Tragen kommen. Daher werden im nachfolgenden Bild 4.5 die Ergebnisse einer Variation des Moments für die Verzahnungsvarianten I und V gegenübergestellt.



**Bild 4.5:** Tragende Breiten bei unterschiedlichen Belastungen

Im linken Teilbild sind die Werte der Verzahnungsvariante I mit einem großen Profilverschiebungswinkel von  $8^\circ$  dargestellt. Es ergeben sich Abweichungen zwischen den FE-Ergebnissen und dem Scheibenmodell. Das Modell ergibt stets größere Werte für die tragende Breite. Dies liegt an den Unterschieden der Zahnform der Beveloidräder zu den Zylinderrädern. Beide Berechnungsmethoden zeigen, auch bei größeren Lasten, kein volles Tragen über der gesamten Breite.

Die Ergebnisse für einen Profilverschiebungswinkel von  $4^\circ$  sind im rechten Teilbild ersichtlich. Die Unterschiede der Ergebnisse beider Berechnungsverfahren sind geringer. Die Zahnform der Beveloidräder ist hier dem Zylinderrad ähnlicher. Auch hier ergibt das Scheibenmodell stets etwas größere Werte. Beide Methoden ergeben ein volles Tragen über der gesamten Breite ab einer Last von ca. 400 N/mm.

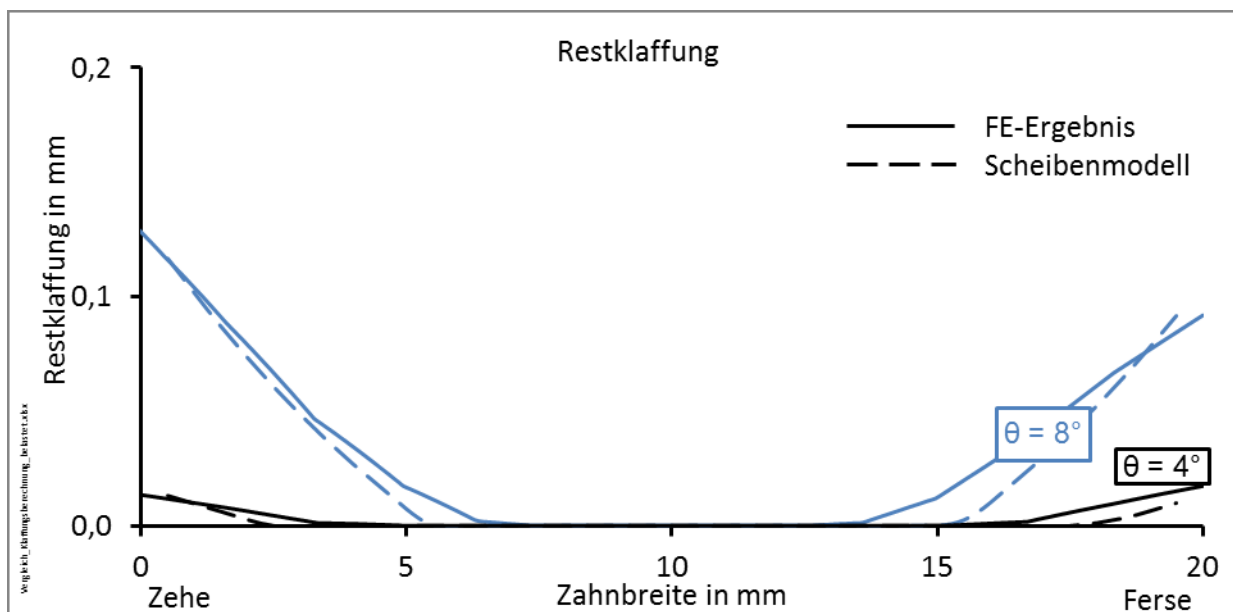
Variante IX weist einen Profilverschiebungswinkel von  $2^\circ$  auf und ist damit dem Zylinderrad am ähnlichsten. Die lastfreie Klaffung ist deshalb sehr gering. Unter Last kommt es zu einem vollen Tragen, die Werte sind daher nicht dargestellt.

Die Ergebnisse der tragenden Breite sind für alle Verzahnungsvarianten durch einen stetigen Kurvenzug annäherbar. Die Anzahl und Breite der Scheiben wurden daher nicht zu grob gewählt.

#### 4.4 Klaffung unter Last

Wie im Kapitel 3 bereits beschrieben wurde, ergibt sich im Scheibenmodell die Tragbildbreite unter Last aus der lastfreien Klaffung abzüglich der Scheibenverformungen. Die Ergebnisse sind denen der FE-Analyse im Bild 4.6 gegenübergestellt. Ausgewertet wurde in den FE-Analysen der kürzeste Abstand zwischen den Flanken entlang der Berührlinie. Im Bild 4.4 ist sie als die lange Halbachse der Berührellipse beispielhaft für Variante V deutlich zu erkennen.

Aus dem Diagramm der Restklaffung im Bild 4.6 kann aus dem klaffungsfreien Bereich die Größe der tragenden Breite bestimmt werden. Beide Verfahren ergeben eine mittige Tragbildlage, wie es die lastfreie Klaffung erwarten lässt. Die Kurvenverläufe für die Restklaffung aus dem Scheibenmodell und der FE-Analyse zeigen eine hohe Übereinstimmung im qualitativen Kurvenverlauf. Auch die Größtwerte stimmen gut überein.



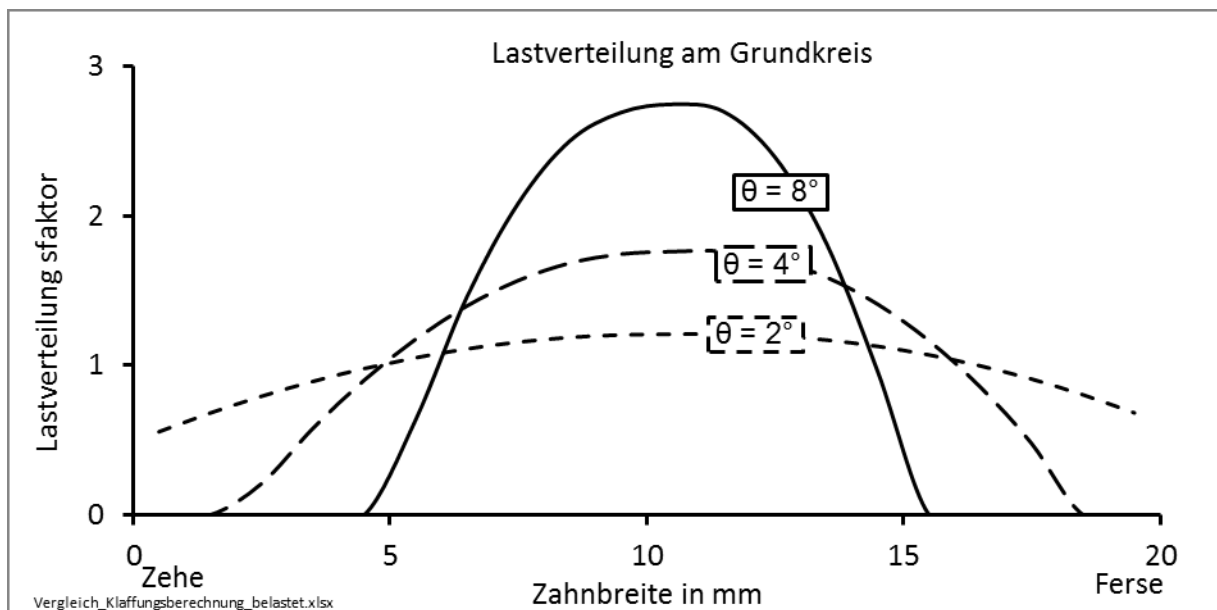
**Bild 4.6:** Gegenüberstellung der Klaffungsergebnisse unter Last für  $M_{t2} = 150 \text{ Nm}$ .

#### 4.5 Lastverteilung über der Breite

Aus dem Scheibenmodell ist die Last für jede Scheibe bekannt. Durch die Division der Scheibenkraft mit der Scheibenbreite und der mittleren Umfangskraft kann eine

Linienlastverteilung entlang der Berührlinie ermittelt werden, wie es im Kapitel 3 beschrieben wurde.

Die Ergebnisse sind im Bild 4.7 dargestellt. Für einen kleinen Profilverschiebungswinkel von  $2^\circ$  zeigt sich ein flacher Verlauf der Lastverteilung mit nur schwach ausgeprägtem Hochpunkt. Alle Scheiben werden belastet und das Tragbild erstreckt sich über die gesamte Breite. Bei größeren Winkeln ergibt sich eine deutliche Lastkonzentration in der Verzahnungsmitte. Nach Roth [Roth98] berühren sich dort die unverformten Flanken, weshalb hier der Größtwert zu erwarten ist. Zu den Rändern nimmt die Lastverteilung parabelförmig ab, sodass einzelne Scheiben an den Rändern unbelastet bleiben. Damit sind die Flankenbereiche eindeutig identifizierbar, die erst unter größerer Last zum Tragen kommen würden. Die Höhe der Lastkonzentration nimmt also mit zunehmendem Profilverschiebungswinkel zu, da sich das Tragbild auf einen kleinen Flankenbereich beschränkt.



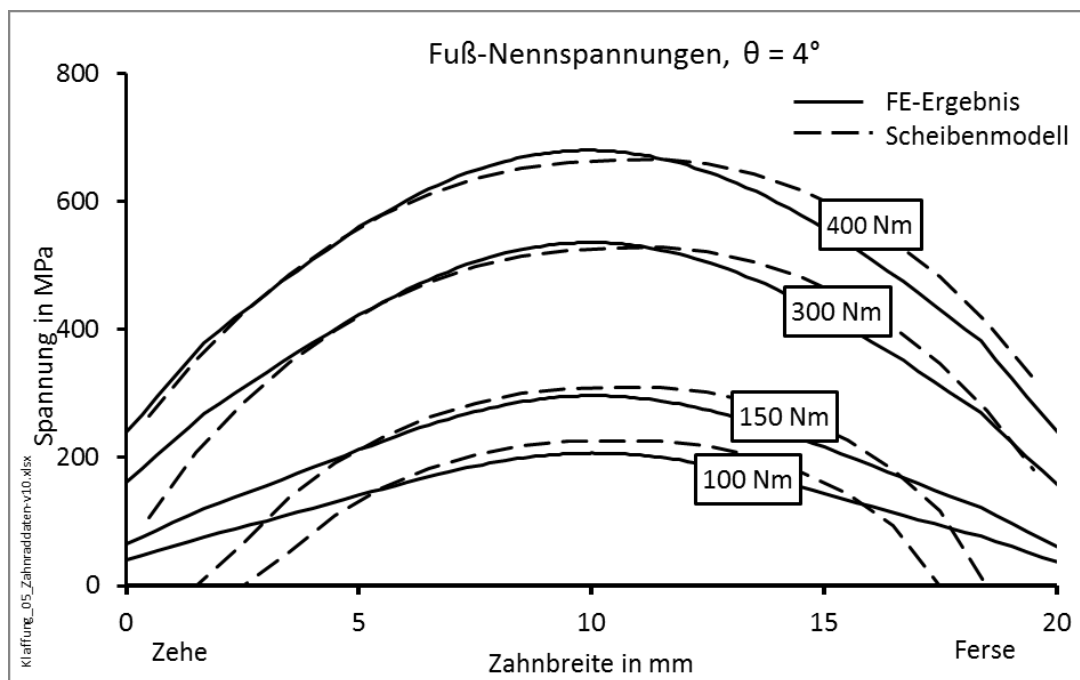
**Bild 4.7:** Lastverteilung entlang der Zahnbreite

#### 4.6 Berechnung der Fuß-Nennspannung

Mit der Lastverteilung über der Breite kann mit dem in Kapitel 3.1 beschriebenen Verfahren der Fuß-Nennspannungsverlauf von Beveloidrädern näherungsweise bestimmt werden. Die Ergebnisse des Scheibenmodells für die Verzahnung mit  $\theta = 4^\circ$  sind in Bild 4.8 mit denen von FE-Analysen gegenübergestellt. In der FE-Simulation

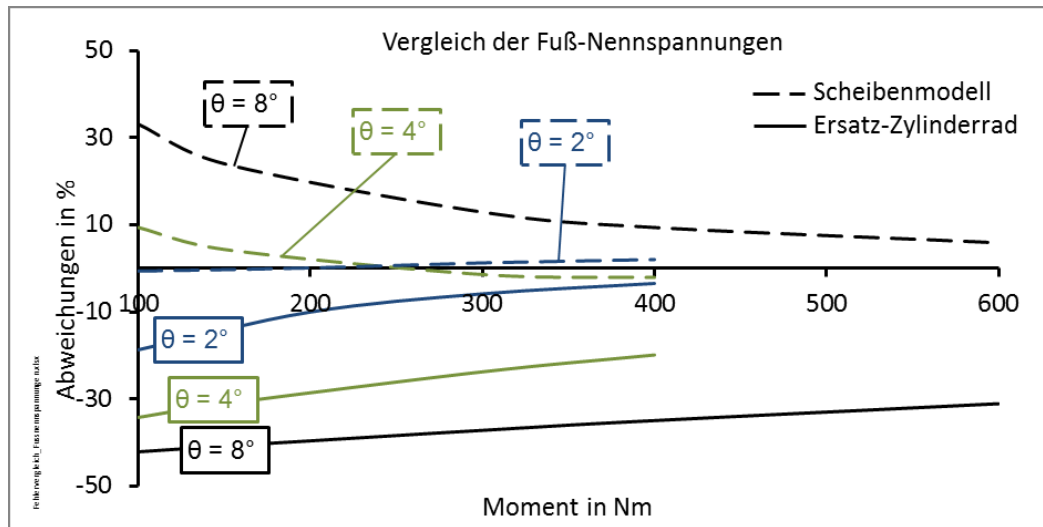
wurde die Wälzstellung  $D$  berechnet und die größte Zugspannung am Schnittpunkt einer  $30^\circ$ -Tangente an die Fußkurve ausgewertet.

Es ergibt sich mit dem Scheibenmodell ein parabelförmiger Verlauf der Spannungsverteilung. Der Verlauf stimmt qualitativ mit den FE-Ergebnissen überein, die Höchstwerte zeigen nur geringe Unterschiede im Betrag und der Lage in Zahnbreitenrichtung. Bei nicht über der vollen Zahnbreite tragenden Verzahnungen treten an den Rändern größere Abweichungen auf, da das Scheibenmodell die stützende Wirkung nicht-tragender Scheiben bislang nicht berücksichtigt.



**Bild 4.8:** Fuß-Nennspannung über der Breite

Eine andere Methode für die angenäherte Bestimmung der Beanspruchung von Beveloidverzahnungen ist die Bildung einer Ersatz-Zylinderradverzahnung. Für sie werden die Hauptdaten in Zahnmitte der Beveloidverzahnung herangezogen und die Beanspruchungen mit konstanter Lastverteilung ( $K_{H\beta} = 1$ ) nach DIN 3990 berechnet. Im nachfolgenden Bild 4.9 sind die Abweichungen der Höchstwerte des Scheibenmodells sowie einer Ersatz-Zylinderradverzahnung jeweils zu den FE-Simulationen für verschiedene Momente aufgetragen.



**Bild 4.9:** Abweichungen zwischen den Maximalwerten der Rechenmodelle

Das Scheibenmodell ergibt in den meisten Fällen größere Fußspannungen als die FE-Simulation und ist daher konservativ. Bei kleineren Profilverschiebungswinkeln und höheren Lasten kommt es zu großflächigerem Tragen und die Zahnform der Beveloidräder nähert sich Zylinderrädern an. Daher sind dann die Abweichungen geringer. Die Ergebnisse der Ersatz-Zylinderräder sind stets kleiner als die Werte der FE-Rechnungen, sie liegen damit auf der unsicheren Seite. Zudem sind ihre Abweichungen höher als die des Scheibenmodells. Das liegt daran, dass die erhöhte Lastkonzentration der Beveloidräder unberücksichtigt bleibt. Nach derzeitigem Stand können Beveloidräder bis etwa  $4^\circ$  mit dem Scheibenmodell ausreichend genau bestimmt werden, da hierfür die Spannungsergebnisse um maximal 5% abweichen.

#### 4.7 Scheibenmodell zur Bewertung von Flankenmodifikationen

Flankenmodifikationen werden angewandt, um ein gleichmäßiges Übertragungsverhalten zu ermöglichen, ein optimales Tragbild zu erreichen und Beanspruchungsüberhöhungen zu vermeiden. Das vorgestellte Scheibenmodell liefert mit den Werten für die tragende Breite und der Lastverteilung Indikatoren zur Bewertung der letztgenannten Punkte. Aufgrund der analytischen Vorgehensweise des Scheibenmodells steht damit eine Methode zur Verfügung, um Verzahnungs- und Korrekturvarianten im Auslegungsprozess gezielt hinsichtlich Eignung zu überprüfen. Bislang waren hierzu aufwändige, numerische Simulationen notwendig.

## 5 Zusammenfassung

In diesem Bericht wird eine Methode vorgestellt, mit der es möglich ist, die tragende Breite unter Last, die Restklaffung und das Tragbild sowie die Lastverteilungs- und Fuß-Nennspannungsverläufe einer Beveloidradstufe in kreuzender Achslage analytisch zu bestimmen.

Unkorrigierte Beveloidräder weisen aufgrund ihrer geometrischen Form in kreuzender Achslage eine punktförmige Berührung auf. Es entsteht örtliches Tragen mit ungleicher Lastverteilung über der Zahnbreite, was zum teilweisen Klaffen unter Last führen kann. Zur gezielten Optimierung der Verzahnung unter Berücksichtigung der Last ist derzeit der Einsatz von FE-Methoden notwendig. Sie bedingen lange Rechenzeiten.

Das vorgestellte Verfahren bestimmt, ausgehend von den Verzahnungshauptdaten, analytisch die Lastverteilung und die tragenden Bereiche der Verzahnung. Dazu wird ein Scheibenmodell angewandt, mit dem die Verzahnung über der Breite mit Zylinderradscheiben diskretisiert und jeder Scheibe individuelle Geometrien und Eigenschaften zugewiesen werden.

Die Methode wurde auf Zylinderräder angewandt und die Ergebnisse der Lastverteilung und Fuß-Nennspannung den Berechnungsansätzen aus DIN 3990 gegenübergestellt. Dabei ergaben sich nur geringe Abweichungen. Bei der Anwendung auf Beveloidräder wurden die Ergebnisse mit strukturmechanischen FE-Analysen der Verzahnungen verglichen. Es zeigten sich für kleine Profilverschiebungswinkel bis etwa  $4^\circ$  und hohe Lasten sehr gute Übereinstimmungen.

Mit dem vorgestellten Scheibenmodell können bei der Verzahnungsauslegung von Beveloidrädern nun wesentliche Kennwerte analytisch ermittelt werden, um eine gezielte Optimierung der Auslegungen zu erleichtern und zeitaufwändige numerische Simulationen in Parameterstudien zu verkürzen.



## 6 Ausblick

Das vorgestellte Verfahren bedarf der weiteren Verbesserung, um eine noch höhere Genauigkeit zu erreichen und auch praxisnähere Verzahnungen berücksichtigen zu können. So sind Empfehlungen zur anzuwendenden Scheibenanzahl und Scheibendicke auszuarbeiten. Die im Modell verwendeten Steifigkeitswerte der Scheiben wurden ursprünglich für Stirnräder definiert. Zu untersuchen ist, inwiefern die Angaben für schrägverzahnte Beveloidräder angepasst werden müssen. Zum Abschluss ist die Methode in Parameterstudien systematisch auf Schwachstellen zu untersuchen und ein experimenteller Abgleich zu führen.

## 7 Literatur

- [Alxneit09] Alxneit, H.: Optimierung des Übertragungsverhaltens konischer Außenstirnräder mit kreuzenden Achsen. Stuttgart, Universität, IKTD, Dissertation, 2009
- [Beck11] Beck, M., Binz, H., Bachmann, M.: FEM-Untersuchung der Zahnfuß-Spannung an Beveloidzahnradern. 9. Gemeinsames Kolloquium Konstruktionstechnik 2011, Rostock, 06./07.10.2011, S. 221 - 229
- [DIN3990] Norm DIN 3990 12.1987. Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Beuth Verlag Berlin 1990
- [Linke10] Linke, H.: Stirnradverzahnungen – Berechnung, Werkstoffe, Fertigung, 2. Auflage, Hanser Verlag München, 2010
- [Niemann03] Niemann, G.; Winter, H.; Höhn, B.-R.: Maschinenelemente Band 2: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe – Grundlagen, Stirnradgetriebe. 2. Auflage Springer-Verlag Berlin, 2003
- [Roth98] Roth, K.: Zahnradtechnik - Evolventen-Sonderverzahnungen zur Getriebeverbesserung. Springer Verlag Berlin, 1998

- [Traut10] Traut, C., Binz, H., Bachmann, M.: The influence of manufacturing deviations on the transmission behavior of conical involute gears. International Conference on Gears, VDI-Berichte 2108, Garching bei München, 2010, S. 647-658
- [Traut11] Traut, C., Binz, H., Bachmann, M.: Analytische Auslegung hohlballiger Flankenkorrekturen für konische Stirnräder zur Realisierung von Linienkontakt. DMK 2011 – Dresdner Maschinenelemente Kolloquium, Dresden 29./30.11.2011, S. 215 - 226
- [Wagner93] Wagner, M.: Beitrag zur geometrischen Auslegung von Stirnradpaaren mit kleinen Achsenkreuzungswinkeln. Stuttgart, Universität, IMK, Dissertation, 1993



ISBN-13: 978-3-922823-80-3