

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 105 – T 107

Akademie Verlag

SCHIRM, W.; BLAJER, W.; SCHIEHLEN, W.

Zur Behandlung von Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen in Minimalform

MSC (1980): 70B10, 70F10, 53A17

Bei der Simulation von Mehrkörpersystemen hat sich die Formulierung der Bewegungsgleichungen in Minimalform seit langem bewährt. Mit dieser Formulierung können bei Systemen mit kinematischen Schleifen allerdings Probleme auftreten, da eine direkte Beschreibung der Kinematik durch einen minimalen Satz von Koordinaten nicht so einfach möglich ist. Ein Ausgangspunkt für die Beschreibung ist daher der Schnitt der Schleifen, so daß ein Mehrkörpersystem mit Baumstruktur entsteht, welches mit minimalen Koordinaten $y \in \mathbb{R}^n$ beschrieben werden kann. Das Schließen der Schleifen erfolgt dann über algebraische Bindungsgleichungen und verallgemeinerte Reaktionskräfte, so daß die Bewegungsgleichungen wie folgt lauten:

$$M(y, t) \ddot{y} + k(y, \dot{y}, t) = q(y, \dot{y}, t) + Q_c g_c, \quad \Phi(y, t) = 0. \quad (1), (2)$$

Vorteilhaft für die Simulation erweisen sich die Schließbedingungen in expliziter Form, d. h. aufgelöst in Abhängigkeit von einem minimalen Satz von unabhängigen Koordinaten $y_i \in \mathbb{R}^f$, deren Anzahl den Freiheitsgraden des Systems entspricht. Für die effiziente Aufstellung der expliziten Schließbedingungen kann ein Verfahren zur Rückwärtstransformation herangezogen werden, WOERNLE [1]. Die Automatisierung dieses Verfahrens läßt sich mit dem Programmpaket NEWEUL

[2] und dem Symbolmanipulator MAPLE realisieren. Das Ergebnis sind symbolische Beziehungen zwischen abhängigen Koordinaten y_D und unabhängigen minimalen Koordinaten y_1 in der Form

$$y_D = y_D(y_1); \quad \dot{y}_D = I_c \dot{y}_1 + \eta; \quad \ddot{y}_D = I_c \ddot{y}_1 + \xi, \quad (3)$$

mit $I_c = \frac{\partial y_D(y_1)}{\partial y_1}$, $\eta = \frac{\partial y_D(y_1)}{\partial t}$ und $\xi = \dot{I}_c \dot{y}_1 + \dot{\eta}$.

Die Beschleunigungen \ddot{y} des Mehrkörpersystems mit Baumstruktur lassen sich durch die Beschleunigungen \ddot{y}_1 des Systems mit Schleifen ausdrücken entsprechend $\ddot{y} = J_c \ddot{y}_1 + [0^T \xi^T]^T$ mit $J_c = [E \ I_c^T]^T$. Die Matrix J_c kann als Jacobi-Matrix der Schließbindungen interpretiert werden und erfüllt die Orthogonalitätsbeziehung $J_c^T Q_c = 0$.

Mit diesen Beziehungen lassen sich die Bewegungsgleichungen in Minimalform direkt anschreiben als

$$M_1(y, t) \ddot{y}_1 + k_1(y, \dot{y}_1, t) = q_1(y, \dot{y}_1, t), \quad (4)$$

mit $M_1 = J_c^T M J_c$, $k_1 = J_c^T (k + M[0^T \xi^T]^T)$ und $q_1 = J_c^T q$. Bewegungsgleichungen in Minimalform können im Verlauf der Simulation auf Singularitäten führen. Um dies zu vermeiden bzw. um rechtzeitig auf komplementäre Koordinaten überzugehen, benötigt man ein Kriterium, das die Singularitäten anzeigt. Hierfür kann die Projektion eines Einheitsvektors k_1, k_2 in Koordinatenrichtung auf die Tangentialrichtung e_d herangezogen werden (Bild 1). Je größer diese Projektion ist, desto besser eignet sich diese Koordinate als Minimal Koordinate. Dieses im kartesischen Raum einfach zu interpretierende Kriterium läßt sich auf den n -dimensionalen Riemannschen Raum mit der Metrik M erweitern. Mit Hilfe der Transformationsbeziehung des n -dimensionalen Raumes in den Tangentialraum [3] läßt sich das Kriterium angeben:

$$\cos^2 \alpha_i = \frac{|k_i^{(d)}|^2}{|k_i|^2} = \frac{(k_i^{(d)})^T M^{-1} k_i^{(d)}}{M^{-1}(i, i)}, \quad i = 1(1)n, \quad (5)$$

wobei $k_i^{(d)}$ die i -te Spalte von $J_c^T M$ und $M^{-1}(i, i)$ das i -te Diagonalelement von M darstellt. Für die Behandlung von Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen empfiehlt sich die Formulierung des Kriteriums im Tangentialraum, da die Ausdrücke hierfür aus der Dynamik-Simulation zur Verfügung stehen. Allerdings ist eine ähnliche Formulierung im Bindungsraum gleichwertig und günstiger, wenn zur Simulation des Mehrkörpersystems ein rekursives Verfahren [4] verwendet wird.

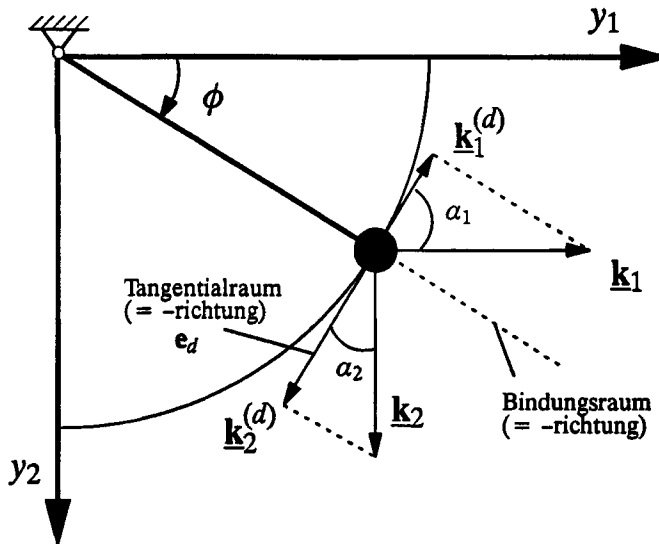


Bild 1. Ebenes mathematisches Pendel-Projektionskriterium

Die Simulation der Bewegung in Minimalkoordinaten läßt sich unter Verwendung komplementärer Bewegungsgleichungen in der Art durchführen, daß immer die günstigsten Minimalkoordinaten gewählt werden und bei Bedarf umgeschaltet wird. Dieses Umschalten führt bei Verwendung eines Integrationsverfahrens mit variabler Ordnung und Schrittweite (z. B. Adams-Bashforth-Verfahren) zu höheren Rechenzeiten, was sich durch Umrechnen der Koeffizienten des Interpolationspolynoms auf die komplementären Gleichungen vermeiden läßt. Hierzu müssen die zurückliegenden Stützstellen der Integration aus den intern im Integrator gehaltenen modifizierten dividierten Differenzen und Schrittweitemsummen rekursiv ermittelt und mit Hilfe der Beziehungen (3) in die komplementären Koordinaten umgerechnet werden. Hieraus können die Koeffizienten des Interpolationspolynoms für die komplementären Gleichungen ermittelt und der Integrationsprozeß ohne Verlust von Ordnung und Schrittweite fortgesetzt werden. Der Erfolg dieses Vorgehens liegt in einer deutlichen Reduzierung der Zahl der Funktionsaufrufe und somit der Rechenzeit.

Neben dem Bewegungsverhalten sind auch die in den Lagern wirkenden Reaktionen von Interesse, bei kinematischen Schleifen vor allem die Reaktionen in den Schnittgelenken. Die Summe dieser Gelenkreaktionen $Q_c g_c$ läßt sich aus den nichtminimalen Bewegungsgleichungen (1) gewinnen. Für eine einfache Interpretation wird aber eine spezielle Ver-

teilungsmatrix B^T benötigt, die sich aus den lagerbeschreibenden Daten, der Geometrie des Mehrkörpersystems und unter Einbeziehung der kinematischen Beziehungen gewinnen läßt [5]. Im Vektor f der Reaktionen sind dann nur Kräfte und Momente in den gesperrten Lagerrichtungen enthalten. Beide Formulierungen der Reaktionen sind gleichwertig, $B^T f = Q_c g_c$. Dieses überbestimmte Gleichungssystem in f läßt sich effizient lösen, indem die Verteilungsmatrix B^T formal auf eine Matrix mit vollem Rang erweitert wird [6]:

$$\begin{bmatrix} B \\ J_c^T M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = Q_c g_c. \quad (6)$$

Eine explizite Auflösung nach den Reaktionen f ergibt

$$f = (BM^{-1}B^T)^{-1} B[[0^T \xi^T]^T + M^{-1}(k - q)], \quad (7)$$

was bedeutet, daß f eine Funktion in den Lage- und Geschwindigkeitsgrößen und der Zeit ist. Der Vorteil dieser Formulierung für die Schließkräfte liegt in der Möglichkeit, diese parallel zur oder nach der Dynamik-Simulation auszuwerten. Die explizite Auflösung entsprechend (7) ist dann am günstigsten, wenn die inverse Massenmatrix M^{-1} aufgrund der Verwendung rekursiver Verfahren bei jedem Zeitschritt aus der Dynamik-Simulation zur Verfügung steht.

Zusammengefaßt kann gesagt werden, daß das hier beschriebene Verfahren zur Simulation von Mehrkörpersystemen mit geschlossenen kinematischen Schleifen auf der Kenntnis der expliziten Schließbedingungen aufbaut. Es wurde gezeigt, daß diese unter Verwendung existierender Verfahren rechnergestützt bestimmt werden können. Die zur Simulation günstigsten Bewegungsgleichungen in Minimalform können mit Hilfe eines Auswahlkriteriums einfach formuliert werden, wobei ein Wechsel der Koordinaten im Verlauf der Simulation ohne Verlust der Integrationschrittweite und -ordnung möglich ist. Darüber hinaus lassen sich unabhängig von der Dynamik-Simulation die Schleifenschließkräfte bestimmen.

Das hier beschriebene Verfahren beruht auf einer nichtrekursiven Berechnung der Bewegungsgleichungen. Vorteile können durch die Verwendung rekursiver Verfahren entstehen. Die Untersuchungen hierzu sind noch nicht abgeschlossen.

Literatur

- 1 WOERNLE, C.: Ein systematisches Verfahren zur Aufstellung der geometrischen Schließbedingungen in kinematischen Schleifen mit Anwendung bei der Rückwärtstransformation für Industrieroboter. VDI-Verlag, Düsseldorf 1988.
- 2 KREUZER, E.; LEISTER, G.: Programmsystem NEWEUL '90, Anleitung AN-23. Universität, Institut B für Mechanik, Stuttgart 1991.
- 3 BLAJER, W.: Contribution to the projection method of obtaining equations of motion. *Mechanics Res. Commun.* **18** (1991), 293–301.
- 4 SCHIEHLEN, W.: Multibody systems and robot dynamics. DLR No. DL/90/WOS/1. Dept. Mech. Eng. Queen's University Kingston 1990.
- 5 SCHRAMM, D.: Ein Beitrag zur Dynamik reibungsbehafteter Mehrkörpersysteme. Fortschritt-Bericht der VDI-Zeitschriften. Reihe 18, Nr. 32, VDI-Verlag, Düsseldorf 1986.
- 6 SCHIRM, W.: Reaktionskräfte in Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen. Zwischenbericht ZB-67, Universität, Institut B für Mechanik, Stuttgart 1992.

Anschrift: Dipl.-Ing. WALTER SCHIRM, Dr.-Ing. W. BLAJER, Prof. Dr.-Ing. W. SCHIEHLEN, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 9, D-W-7000 Stuttgart-80, Deutschland