ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 74 (1994) 4, T 60–T 62 Akademie Verlag

SCHIEHLEN, W.; HU, BIN

Ein Stabilitätsmaß für nichtlineare Systeme

MSC (1991): 34C35, 34D20, 70K15, 34A35, 58F10

Zu jeder Anfangsbedingung eines dynamischen Systems gehört eine Lösungstrajektorie. Variiert man nun die Anfangsbedingungen in einem Hyperwürfel des Zustandsraums, so erhält man eine Schar von Trajektorien, die sich ebenfalls durch einen Hyperwürfel einhüllen läßt. Mit der Kantenlänge beider Würfel kann ein Stabilitätsmaß definiert werden, das sich

durch einfache Betragsbildung ermitteln läßt. Für lineare Systeme gelingt es, ein solches Stabilitätsmaß auch analytisch zu bestimmen. Bei nichtlinearen Systemen ist in der Regel nur eine numerische Berechnung möglich. Für das Einfachpendel und das Doppelpendel werden mit einem Simulationsalgorithmus die Stabilitätsmaße bestimmt. Damit erhält man Aussagen über das globale Verhalten bezüglich einer Gleichgewichtslage unabhängig vom Zeitverlauf der Lösung, die periodisch, quasiperiodisch oder chaotisch sein kann.

Gegeben sei ein autonomes System mit den Zustandsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

mit dem $n \times 1$-Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$, der $n \times 1$-Vektorfunktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ und dem Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0$ zur Zeit t_0. Die Gleichgewichtslage sei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Mit der Betragsnorm $\|\boldsymbol{x}\|$ im Zeitintervall T,

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|_T := \max_{t \in [t_0, T]} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)|, \tag{2}$$

läßt sich ein *lokales*, auf den Anfangszustand bezogenes *Stabilitätsmaß* $\mathrm{S1}_T$ bzw. das *inverse*, die Beschränktheit beschreibende *Stabilitätsmaß* $\mathrm{IS1}_T$ wie folgt definieren:

$$\mathrm{S1}_T(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \frac{1}{\mathrm{IS1}_T(\boldsymbol{x}_0, t_0)} = \begin{cases} \|\boldsymbol{x}_0\| / \|\boldsymbol{x}(t)\|_T & \text{für} \quad \boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}, \\ 1 & \text{für} \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{3}$$

Das lokale Stabilitätsmaß steht in einem gewissen Zusammenhang mit dem Ljapunovschen Stabilitätsbegriff. Die Stabilität im Sinne von LJAPUNOV ist ebenfalls über Vektornormen definiert, siehe z. B. MÜLLER [1].

Für die Praxis ist das lokale Stabilitätsmaß wenig aussagekräftig. Deshalb soll der Anfangszustand variiert werden, um den ungünstigsten Fall, d. h. die größtmögliche Auslenkung bzw. den minimalen Stabilitätsgrad zu finden. Technische Systeme müssen unter Sicherheitsgesichtspunkten gerade für den ungünstigsten Fall ausgelegt werden. Ein *globales Stabilitätsmaß* $\mathrm{S2}_T$ bzw. das *inverse Maß* $\mathrm{IS2}_T$ erhält man mit der folgenden Definition:

$$\mathrm{S2}_T(r, t_0) = \frac{1}{\mathrm{IS2}_T(r, t_0)} = \min_{\boldsymbol{x}_0 \in \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\| = r\}} \mathrm{S1}_T(\boldsymbol{x}_0, t_0). \tag{4}$$

Das globale Stabilitätsmaß bezieht sich definitionsgemäß auf die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$; es wird global genannt, weil es alle Anfangsbedingungen in einem Hyperwürfel mit der Kantenlänge r erfaßt. Das globale Stabilitätsmaß führt auf ein Optimierungsproblem mit dem lokalen Stabilitätsmaß als Zielfunktion.

Der Simulationsalgorithmus zur Berechnung der Stabilitätsmaße ist in der Arbeit von HU [2] ausführlich beschrieben. Für das nichtlineare Einfachpendel und ein unendliches Zeitintervall $[t_0 = 0, T \to \infty)$ lassen sich auch analytische Ergebnisse gewinnen. Aus der normierten Bewegungsgleichung des Einfachpendels, $\varphi'' + \sin\varphi = 0$, folgt für das globale

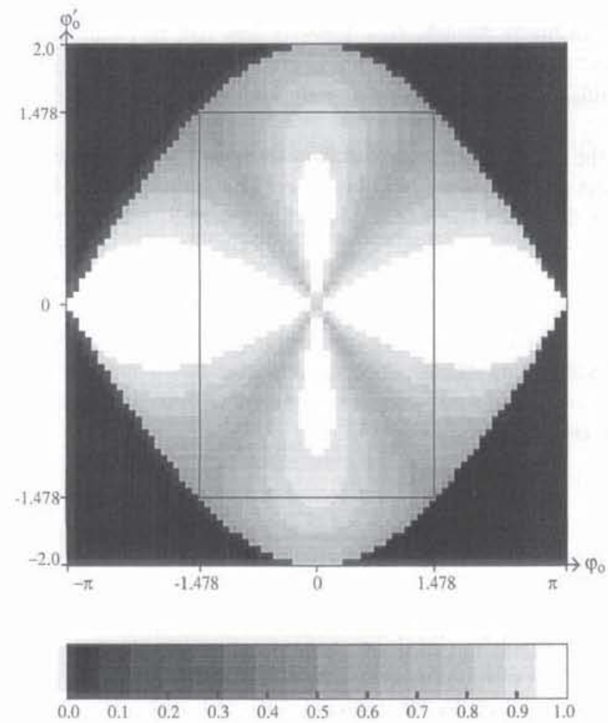

Bild 1. Stabilitätsmaß $\mathrm{S1}_T$ des Einfachpendels für $T = 100$

inverse Stabilitätsmaß

$$\mathrm{IS2}(r) = \begin{cases} \arccos\,(\cos r - r^2/2)/r & \text{für} \quad 0 < r \leqq 1{,}478 \\ \infty & \text{für} \quad r > 1{,}478 \end{cases}. \tag{5}$$

Man erkennt, daß für große Anfangsgeschwindigkeiten das Pendel instabil ist, $S2(r) = 0$ bzw. $IS2(r) = \infty$. Für Systeme zweiter Ordnung, $n = 2$, lassen sich die Ergebnisse auch grafisch mit dem lokalen Stabilitätsmaß $S1(\varphi_0, \varphi_0')$ darstellen, siehe Bild 1.

Literatur

1 MÜLLER, P. C.: Stabilität und Matrizen. Springer-Verlag, Berlin 1977.
2 HU, BIN: Stabilitätsmaß nichtlinearer Systeme. Studienarbeit STUD-93. Institut B für Mechanik, Stuttgart 1992.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. WERNER SCHIEHLEN, BIN HU, M. Sc., Universität Stuttgart, Institut B für Mechanik, Pfaffenwaldring 9, D-70550 Stuttgart, Deutschland