

### Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht enthält eine kritische Sichtung vorliegender Theorien zur Rißbildung im Stahl- und Spannbetonbau.

Zur Berechnung der Abstände und Breiten von Querrissen stehen klassische und neue Theorien zur Verfügung. Klassische Theorien gehen bei Lastbeanspruchung vom abgeschlossenen Rißbild, bei Zwangbeanspruchung von Erstrißbildung aus. Dagegen versuchen neue Betrachtungsweisen den gesamten Rißbildungsprozeß vom Erstriß bis zum stabilisierten Rißbild zu erfassen. Nach wie vor sind in allen Modellen aus Versuchen abgeleitete Anpassungsfaktoren notwendig. Beachtet man die üblicherweise vorhandene Streuung der Rißabstände und -breiten, liefern die vorgeschlagenen Gleichungen ausreichend genaue Ergebnisse.

Analytische Beziehungen zur Bestimmung der Längsrißgefahr liegen vor. Diese beinhalten i. a. sowohl auf der Widerstands- als auch auf der Beanspruchungsseite Größen, die mehr oder weniger willkürlich festgelegt werden. Über die Richtigkeit der Annahmen ist mit dem derzeitigen Kenntnisstand keine Aussage möglich.

## State of the Art Report on Cracking in Reinforced and Prestressed Concrete Structures

P. 3

### Summary

This report presents a critical examination of available theories on cracking in reinforced and prestressed concrete.

Existing equations for the calculation of spacing and width of lateral cracks can be divided into so called classical and new theories. In case of direct actions, classical models adopt the crack pattern being stabilized while in case of imposed deformations the beginning of crack formation is considered. New theories try to cover the whole range of crack formation from the appearance of the first crack onto the stabilized cracking. All equations use variables which are derived by experiments. Taking into account the usual scatter of crackspacing and width, the proposed equations supply satisfying results.

There are analytical models for prediction of longitudinal cracks. However, on the action side as well as on the resistance side these models make use of variables which are chosen more or less arbitrarily. At present there is not sufficient information available to examine the validity of these assumptions.

## Rapport sur l'état de l'art concernant la fissuration des structures en béton armé et précontraint

P. 3

### Resumé

Le traité présente le tamisage critique des théories existantes sur la fissuration du béton armé et précontraint.

Il y a des théories dites classiques et modernes pour le calcul des distances et des ouvertures des fissures latérales. Des théories classiques partent dans le cas de actions directes d'une fissuration stabilisée et dans le cas des déformations imposées du début de la formation des fissures. D'autre part les théories modernes essayent de couvrir tout le processus de la formation des fissures dès le début jusqu'à la fissuration stabilisée. Comme avant pour toutes les calculations on a besoin des facteurs d'adaptation résultants des essais. En vue d'écart usuel des distances et ouvertures des fissures les équations proposées donnent des résultats suffisamment exacts.

Des expressions analytiques pour la détermination du danger d'une fissuration longitudinale consistent des variables choisis plus ou moins arbitrairement aussi bien pour les résistances que pour les sollicitations. Les connaissances actuelles ne permettent pas la validation de ces hypothèses.

## Korrosion von Stahl in Beton

S. 59

### Zusammenfassung

Die Grundlagen der Korrosion von Stahl in Beton, ihre Ursachen und Auswirkungen werden in allgemeinverständlicher Form dargestellt, wobei baupraktische Überlegungen im Vordergrund stehen. Vorbeugende Maßnahmen und Schutzsysteme werden diskutiert.

## Corrosion of Steel in Concrete

P. 59

### Summary

A "state-of-the-art" report on corrosion of steel in concrete is given, including the discussion of theoretical background, causes, prevention and repair measures.

## Corrosion de l'acier en béton

P. 59

### Résumé

Le «state-of-the-art report» présente les bases de la corrosion de l'acier en béton. Les causes et les conséquences pratiques sont discutées ainsi que les préventions possibles et les mesures d'une réparation éventuelle.

# Querschnittsbericht zur Rißbildung in Stahl- und Spannbetonkonstruktionen

von

Prof. Dr.-Ing. Rolf Eligehausen

Dipl.-Ing. Helmut Kreller

Universität Stuttgart

Institut für Werkstoffe im Bauwesen

Leitung: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Gallus Rehm

Gefördert mit Forschungsmitteln des Ministeriums für Stadtentwicklung, Wohnen und Verkehr  
des Landes Nordrhein-Westfalen  
unter dem Kennzeichen VB I-72.02-154/81

### Vorwort

Der vorliegende Querschnittsbericht über die Rißbildung in Stahl- und Spannbetonkonstruktionen wurde am Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart, Direktor Prof.Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Gallus Rehm, erstellt und vom Minister für Stadtentwicklung, Wohnen und Verkehr des Landes Nordrhein-Westfalen finanziert.

Der Betreuergruppe, bestehend aus den Herren Prof.Dr.-Ing. Bonzel, Forschungsinstitut der Zementindustrie, Düsseldorf; Prof.Dr.-Ing. Hilsdorf, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe; Prof.Dr.-Ing. Kupfer, Lehrstuhl für Massivbau, Technische Universität München; Dr.-Ing. Seiler, Deutscher Beton Verein, Wiesbaden; sei an dieser Stelle für Anregungen und Hinweise gedankt.

R. Eligehausen  
H. Kreller

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Einleitung . . . . .	7
2 Ursachen und Erscheinungsbild der Risse . . . . .	7
3 Bedeutung der Rißbildung für die Gewährleistung der Bauwerksnutzung . . . . .	10
4 Mechanismus der Rißbildung . . . . .	11
4.1 Phänomenologische Betrachtung . . . . .	11
4.2 Rechnerische Ermittlung von Rißabständen und Rißweiten . . . . .	12
5 Zulässige Rißbreiten (nach Vorschriften) . . . . .	13
6 Vereinfachter Nachweis der Rißbreitenbeschränkung nach Normen . . . . .	14
7 Klassische Betrachtungsweise der Rißbildung . . . . .	16
7.1 Allgemeines . . . . .	16
7.2 Rißbildung infolge Lastbeanspruchung . . . . .	16
7.3 Rißbildung infolge Zwangsbeanspruchung . . . . .	27
8 Neuere Betrachtungsweisen – kontinuierliche Rißtheorien . . . . .	32
9 Zur Längsrißbildung . . . . .	44
9.1 Allgemeines . . . . .	44
9.2 Beziehungen zur Ermittlung der Längsrißspannung . . . . .	45
10 Schubrisse . . . . .	53
11 Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	53
Literatur . . . . .	55

## 1 Einleitung

In der Stahlbeton- und auch in der Spannbetonbauweise ist das Auftreten von Rissen nicht zu vermeiden. Dieser Tatsache wird in der Theorie und in den Bemessungsansätzen des Stahlbetonbaus Rechnung getragen, indem diese von vornherein von einer "gerissenen Zugzone" ausgehen und Zugkräfte voll dem Bewehrungsstahl zuweisen. Im Spannbetonbau war man anfänglich der Meinung, zumindest im Gebrauchszustand Risse durch genügend hohe Überdrückung der Zugzone verhindern zu können. Die Erfahrung zeigte jedoch, daß auch hier aufgrund nicht oder nur schwer erfassbarer Einflüsse mit Rissen zu rechnen ist.

In letzter Zeit gehäuft aufgetretene Schadensfälle, die unmittelbar oder mittelbar mit vorhandenen Rissen zusammenhängen, führten in der Fachwelt zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit Fragen nach zutreffenden Theorien der Ribentwicklung und Auswirkung von Rissen auf Betonbauwerke.

Als Beitrag hierzu wird im vorliegenden Querschnittsbericht eine Bestandsaufnahme bisher entwickelter Formeln zur Berechnung von Ribabständen und Ribbreiten sowie von Maßnahmen zur Begrenzung der Ribbreiten durchgeführt. Es wird nicht der Anspruch auf vollständige Darstellung aller bisher veröffentlichten Arbeiten erhoben. Für die sogenannte klassische Betrachtungsweise werden nur die wichtigsten Arbeiten, die zum Teil die Grundlage von Vorschriften darstellen, erläutert. Neuere Untersuchungen sind dagegen ausführlicher behandelt. In speziellen Fragen wie z.B. Schrägribbildung oder Ribbildung im frühen Erhärtungsstadium des Betons wird auf die einschlägige Literatur verwiesen. Ebenso wird auf bruchmechanische Aspekte der Ribbildung in Beton nicht eingegangen.

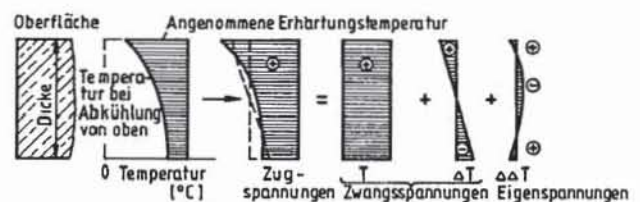
## 2 Ursachen und Erscheinungsbild der Risse

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über Ribursachen und deren Erscheinungsbild an Betonbauwerken.

Risse entstehen, wenn in einem Bauteil auftretende Zugspannungen die Zugfestigkeit des Betons überschreiten. Sieht man von Einflüssen ab, die bereits in sehr jungem Betonalter auftreten und möglicherweise zu Rissen führen (z.B. Setzen des Frischbetons) so können Zugspannungen zwei Beanspruchungsarten zugeordnet werden: Äußeren Lasten und Beanspruchungen aus behinderter Verformung.

Zugspannungen aus äußeren Lasten treten gewöhnlich erst in einem Stadium auf, in dem die Festigkeitsentwicklung des Betons weitgehend abgeschlossen ist. Die Höhe dieser Spannungen läßt sich im allgemeinen verhältnismäßig einfach ermitteln; sie werden der Bemessung zugrunde gelegt und bei Einhaltung entsprechender Konstruktionsregeln ist unter Gebrauchslast nur mit geringen Ribbreiten zu rechnen. Große, durch Lasten verursachte Ribweiten deuten auf Fehler im Entwurf, der Lastermittlung oder der Ausführung hin.

Bei behinderter Verformung ist zwischen Zwang- und Eigenspannungen zu unterscheiden. Zwangsspannungen entstehen nur in statisch unbestimmt gelagerten Systemen aufgrund von Verformungsbehinderungen durch die Lagerungsbedingungen. Die eingepprägten Verformungen können z.B. durch Auflagerverschiebungen oder gleichmäßige Temperaturänderungen hervorgerufen werden. Treten in einem Querschnitt ungleichmäßige Temperaturänderungen oder Schwindvorgänge auf, dieses entspricht dem Normalfall, entstehen zusätzlich Eigenspannungen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich über den Querschnitt zu Null summieren und somit keine Auflagerreaktionen hervorrufen.



**Bild 2.1:** Unterteilung der Spannungen infolge Abkühlung in einer Platte bei vollständiger Verhinderung der Verformung. Vereinfachte Annahme: über den Querschnitt konstante Erhärtungstemperatur (nach Springenschmidt (1984))

Subdivision of stresses due to the cooling of a slab with fully restrained deformations. Assumption: uniform distribution of hydration induced temperatures all over the cross section (after Springenschmidt (1984))

Als Beispiel für eine Zwangbeanspruchung ist in Bild 2.1 der Verlauf der Spannungen infolge Abkühlung an der Oberfläche eines Bauteils dargestellt. Während die Längs- und Wölbspannungen Auflagerreaktionen in Form von Normalkräften und Momenten hervorrufen,

sind die Eigenspannungen nur über den Querschnitt wirksam.

Im Gegensatz zu den äußeren Lasten sind Zwangbeanspruchungen quantitativ nur schwer zu erfassen und bleiben daher in der Bemessung oft unberücksichtigt.

Besondere Beachtung ist dem Zwang im frühen Erhärtungsstadium des Betons zu widmen. Nach Wischers/Manns (1973) besteht bei jungem Beton in den ersten zehn bis vierzig Stunden nach dem Betonieren eine erhöhte Rißgefahr, da der Beton hier eine äußerst niedrige Zugfestigkeit aufweist. Dem stehen durch

starke Kühlung von außen (insbesondere durch zu frühes Ausschalen bei kalten Witterungsverhältnissen) und durch die Hydratationswärme im Inneren des Bauteils hohe Eigenspannungen gegenüber. Dicke Massivbaukonstruktionen (z.B. Schwergewichtsmauern) sind besonders gefährdet. Die infolge Eigenspannungen auftretenden Anrisse erreichen nur eine geringe Tiefe und schließen sich nach dem vollständigen Temperaturengleich nahezu ganz (s. Bruy (1973)). Übrig bleibt eine vorgeschädigte Randzone, die den zur Aufnahme von Zugspannungen vorhandenen Betonquerschnitt verringert. Durch betontechnologische Maßnahmen sowie Nachbehandlung des jungen Betons lassen sich diese Risse weitgehend verhindern.

Zeile	Rißursache	Merkmale der Rißbildung	Zeitpunkt des Entstehens von Rissen	Rißbildung kann beeinflußt werden durch	Bemerkung
1	Setzen des Frischbetons	Längsrisse über der oberen Bewehrung, Rißbreite u. U. über 1 mm, Rißtiefe i. a. gering	Innerhalb der ersten Stunden nach dem Betonieren, solange der Beton noch plastisch verformbar ist.	Wahl der Betonzusammensetzung (Wassergehalt, Sieblinie), Verarbeitung des Betons, Nachverdichtung	Bewehrung wirkt sich ungünstig aus
2	Frühschwinden (Plastisches Schwinden, auch als Schrumpfen bezeichnet)	Oberflächenrisse vor allem bei flächigen Bauteilen; oft ohne ausgeprägte Richtung; Rißbreite u.U. größer als 1 mm; Rißtiefe gering bis groß	Wie Zeile 1	Vermeidung raschen Austrocknens durch Nachbehandlung, sonst durch Maßnahmen wie in Zeile 1	Siehe hierzu Linder 1971, Springenschmid 1984
3	Abfließen der Hydratationswärme	Trennrisse, bei dicken Bauteilen zusätzlich Biegerisse; Rißbreite u. U. über 1 mm; Schalenrisse wenig kritisch	Einige Tage nach dem Betonieren	Betonzusammensetzung, Zementwahl, ggf. Kühlung (bei massigen Bauteilen), Nachbehandlung, Bewehrung (Menge, Anordnung), Wahl der Betonierabschnitte, Gradient!	Häufigste Ursache
4	Schwinden (Trocknungsschwinden)	Wie Zeile 3	Einige Monate nach dem Betonieren	Betonzusammensetzung, Maßnahmen zur Begrenzung der Austrocknung, Bewehrung, relative Luftfeuchte	Einfluß durch Kriechen teilweise abgebaut
5	Äußere Temperatureinwirkungen	Biege- und Trennrisse; Rißbreite u. U. über 1 mm	Während der gesamten Lebensdauer des Bauwerks, wenn Temperaturänderungen auftreten	Bewehrung, Maßnahmen zur Begrenzung der Zugspannung, Betonzusammensetzung, Aufbringen einer Vorspannung	Beispiele: Tag/Nacht-Temperaturwechsel u. ä.
6	Änderung der Auflagerbedingungen (z. B. durch Setzungen, Lagerverformung)	Wie Zeile 5	Bei Änderung der Auflagerbedingungen	Wie Zeile 5	
7	Eigenspannungszustände (z. B. infolge Vorspannung und Spannungsführung, Spannungs- oder Schnittgrößenumlagerungen, Abweichungen von der technischen Biegelehre)	Je nach Ursache unterschiedlich Siehe z.B. Leonhardt 1985, König/Giegold 1984			
8	Äußere (direkte) Lasten	Haar-, Biege- oder Trennrisse, Sammelrisse, Schubrisse	Während der Nutzung	Zweckmäßige Wahl und Anordnung der Bewehrung	
9	Frost	Längsrisse und/oder Absprengungen im Bereich wassergefüllter Hohlräume	Bei Frost	Vermeidung wassergefüllter Hohlräume	
10	Korrosion der Bewehrung	Risse entlang der Bewehrung und an Bauteilflecken, Absprengungen	Nach mehreren Jahren	Vermeidung von Korrosion durch Betondeckung (Dicke und Qualität), Nachbehandlung	
11	Sonstige Ursachen (chemische Vorgänge)	Siehe hierzu Spezialliteratur			

Tabelle 2.1: Übersicht über Rißursachen (nach Jungwirth (1985))  
Review of causes for cracking (after Jungwirth (1985))

Tabelle 2.1 gibt weiteren Aufschluß über mögliche Rißursachen, Merkmale der Rißbildung sowie Zeitpunkt des Entstehens und Beeinflussungsmöglichkeiten.

Zur Kennzeichnung verschiedenartiger Rißbilder wird

in der Literatur eine Reihe von Begriffen verwandt, die zum Teil von der Belastung, zum Teil von der Erscheinungsform der Risse abgeleitet sind. In Tabelle 2.2 sind gebräuchliche Bezeichnungen für an der Oberfläche sichtbare Rißarten zusammengestellt.

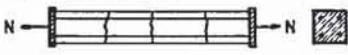
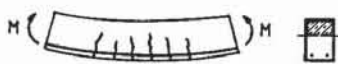
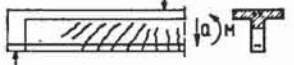
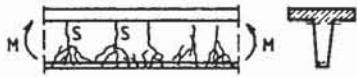
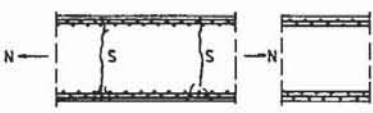
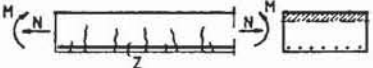


Zeile	Rißart	Erscheinungsform	Merkmal
1	Trennrisse		Gehen durch den gesamten Querschnitt: treten bei zentrischem Zug oder bei Zugbeanspruchung mit kleiner Ausmitte auf
2	Biegerisse		Verlaufen annähernd senkrecht zur Biegezugbewehrung: beginnen am Zugrand und enden im Bereich der Nulllinie
3	Schubrisse		Sind zur Stabachse geneigt. Können sich aus Biegerissen entwickeln
4	Sammelrisse (Abk. S) bei biegebeanspruchten Bauteilen		Treten in Bauteilen mit stark bewehrten Randzonen (Zeile 4) oder bei dicken Bauteilen (Zeile 5) auf: nur wenige Risse dringen bis zur Nulllinie vor. Zwischen den Sammelrissen (S) entstehen oft Zwischenrisse (siehe Zeile 6)
5	Sammelrisse in dicken Bauteilen mittlerer Zugbeanspruchung (z. B. durch Zwang)		
6	Zwischenrisse (Abk. Z)		Feine Risse zwischen Biegerissen oder Sammelrissen: sie sind auf den Bereich der Bewehrungslagen beschränkt
7	Oberflächenrisse		Treten an der Oberfläche von in der Regel flächigen Bauteilen auf (Wände, Platten): Rißtiefe meistens gering. Oberflächenrisse können der Bewehrung folgen oder aber "wild" verlaufen
8	Längsrisse, Verbundrisse		verlaufen parallel zu den Bewehrungsstäben

Tabelle 2.2: Arten, Erscheinungsform und Merkmale verschiedener Risse (nach Jungwirth (1985))  
Characteristics of various forms of cracking (after Jungwirth (1985))

Mikro- und Gefügerisse, die aufgrund des Spannungsflusses im heterogenen Baustoff Beton entstehen, sind hier nicht von Bedeutung und sollen nur vollständigkeithalber genannt werden. Spezielle Probleme

wie z.B. Rißbildung an Arbeits- und Koppelfugen, durch Aneinanderbetonieren stark unterschiedlicher Querschnitte, aus chemischen Prozessen usw. werden ebenfalls nicht behandelt.

### 3 Bedeutung der Ribbildung für die Gewährleistung der Bauwerksnutzung

Die im letzten Abschnitt dargelegten vielfältigen Ursachen und Erscheinungsformen der Ribbildung verdeutlichen, daß ein vollkommen rissefreies Bauen nicht möglich ist. Dies ist allerdings auch nicht notwendig. Aus verschiedenen Gründen ist es jedoch erforderlich, Ribbreiten im Gebrauchszustand in gewissen Grenzen zu halten. Einige dieser Gründe sollen im folgenden exemplarisch genannt werden (siehe auch Jungwirth (1985) und CEB Design Manual on Cracking and Deformations (1985)):

#### - Ästhetischer Eindruck

Risse werden, je nach Abstand und subjektivem Eindruck des Betrachters, ab einer Größe von ca. 0,3 mm als störend empfunden. Für die Festlegung zulässiger Ribbreiten ist zusätzlich zu berücksichtigen, daß sich durch Verschmutzung und langsames Austrocknen nach Befeuchtung auch Risse mit geringeren Breiten auf sichtbaren Flächen unschön abzeichnen.

#### - Gebrauchsfähigkeit

Ribbildung kann die Gebrauchsfähigkeit von Bauwerken beeinträchtigen. Für die Dichtigkeit von Behältern gegenüber Flüssigkeiten und Gasen sind Trennrisse als sehr problematisch zu bezeichnen. Biegerisse sind dagegen, solange eine Restdruckzone > 50 mm vorhanden ist, weniger bedeutend. Bei beschichteten Bauteilen können bereits Risse mit geringer Breite zur Beschädigung der Beschichtung führen. Übermäßig starke Ribbildung verringert die Bauteilsteifigkeit und verursacht daher größere Verformungen.

#### - Schutz der Bewehrung vor Korrosion

Dies ist der häufigst genannte Grund für die Ribbreitenkontrolle. Entsprechend umfangreich sind die hierzu durchgeführten experimentellen Untersuchun-

gen, siehe z.B. Schiebl (1976). Danach korrodiert ein Bewehrungsstahl nur, wenn die durch die hohe Alkalität des Zementsteins erzeugte Passivierung des Stahles infolge Karbonatisierung oder Eindringen von Chloriden aufgehoben wird. Setzt Korrosion ein, hängt die Korrosionsgeschwindigkeit wesentlich von der Dicke und der Permeabilität der Betondeckung ab. Bei Stahlbetonbauteilen mit ausreichender Betondeckung ist der Einfluß der Ribbreite von untergeordneter Bedeutung, solange diese ca. 0,4 mm nicht überschreitet.

Für Spannbetonbauteile muß nach Schiebl (1986) der Bemessungsgrundsatz wegen der höheren Korrosionsempfindlichkeit der Spannbewehrung das Vermeiden einer Depassivierung während der Lebensdauer sein. Dies kann als gesichert angenommen werden, wenn Ribbreiten an der Betonoberfläche (Zugseite) unter 0,25 mm bleiben und die Betondeckung der Hüllrohre mehr als 5 cm beträgt. Unter Chlorideinwirkung sind zusätzliche Maßnahmen erforderlich (z.B. dauerhaft dichte Hüllrohre oder zusätzlicher Korrosionsschutz der Spannstähle)

Die Standsicherheit von Bauwerken ist durch das Auftreten von Rissen i.a. nicht gefährdet. Vielmehr kündigt eine deutliche Ribbildung im Bruchzustand eine Überlastung an und ist daher erwünscht. Darüber hinaus ermöglichen Risse bei statisch unbestimmten Systemen plastische Verformungen in hoch beanspruchten Zonen und damit Lastumlagerungen auf Tragwerksbereiche mit vorhandenen Tragreserven. Bei Anwendung des Traglastverfahrens wird dieses Verhalten planmäßig genutzt. Ein weiterer Vorteil ist der mit der Ribbildung einhergehende Abbau von Zwangsspannungen.

Ziel einer sinnvollen Ribbreitenbeschränkung muß es daher sein, diese in Abhängigkeit des jeweiligen Anwendungsfalles in bestimmten Grenzen zu halten. Der Versuch, Risse weitestgehend zu verhindern, wäre mit unverhältnismäßig hohem Aufwand verbunden und würde die genannten günstigen Auswirkungen verhindern.



## 4 Mechanismus der Rißbildung

### 4.1 Phänomenologische Betrachtung

Anhand von Bild 4.1 soll zunächst das prinzipielle Verhalten eines Stahlbetonstabes unter zentrischer Zugbeanspruchung erläutert werden.

bis der nächste Riß auftritt (gestrichelte Linie in Bild 4.1).

Bei Beanspruchung aus Zwang reagiert das System auf Rißbildung mit einem plötzlichen Kraftabfall, da aufgrund der nun geringeren Steifigkeit eine kleinere Kraft zur Aufrechterhaltung des eingepprägten

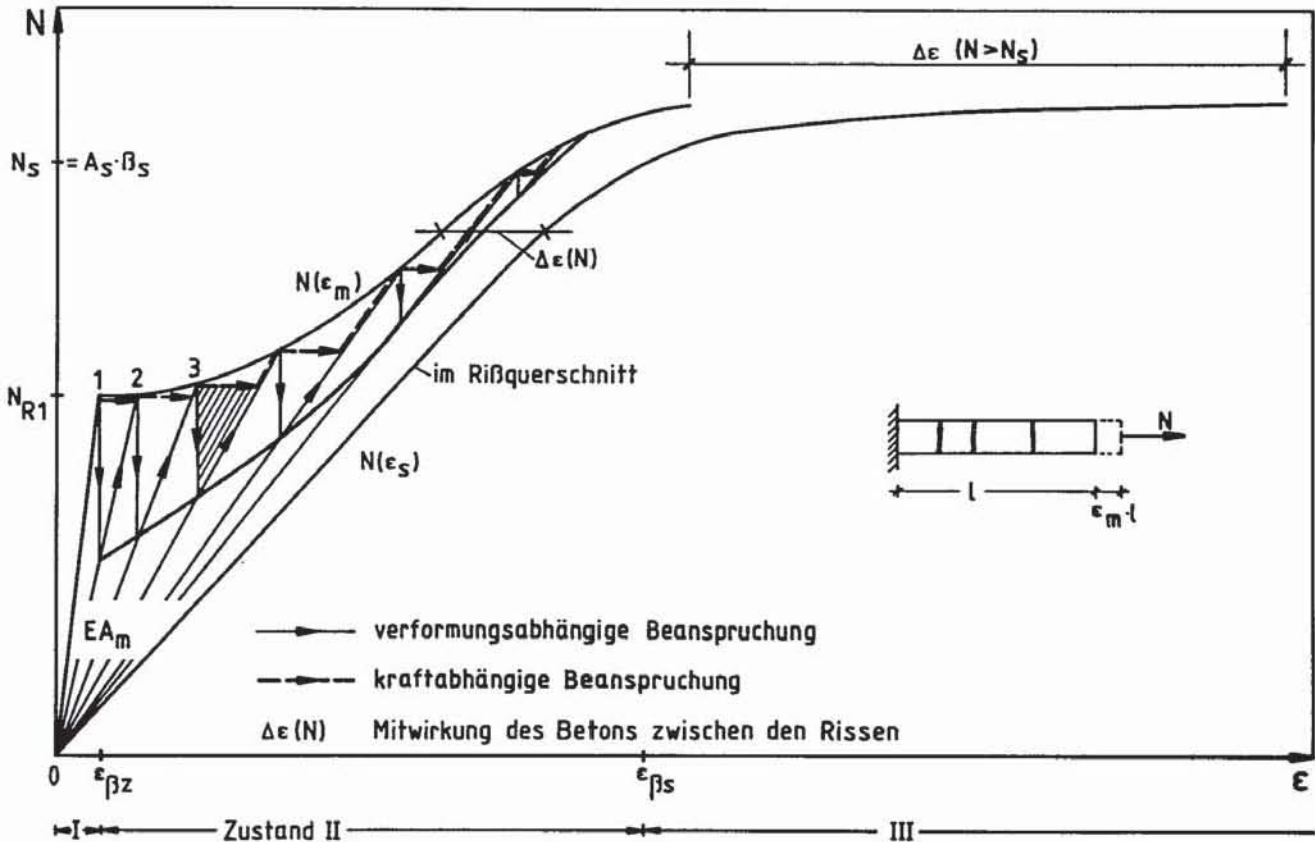


Bild 4.1: Zusammenhang zwischen Normalkraft und mittlerer Dehnung eines Stahlbetonzugstabes  
Relationship between normal force and average strain in a tensioned reinforced member

Bis zum Erreichen der Erstrißlast  $N_{R1}$  besteht zwischen Normalkraft und mittlerer Dehnung ein nahezu linearer Zusammenhang. Nach Überschreiten der Erstrißlast kann im Versuch für Beanspruchungen aus Last und Zwang ein unterschiedliches Verhalten beobachtet werden (siehe z.B. Rostásy/Koch/Leonhardt (1976)).

Bei Beanspruchung durch eine äußere Kraft ist das Auftreten eines Risses mit einem Dehnungssprung verbunden (z.B. von Punkt 1 nach Punkt 2 für den ersten Riß in Bild 4.1). Damit einher geht ein schrittweiser Abfall der mittleren Dehnsteifigkeit  $EA_m$ . Die Zunahme der mittleren Dehnung erfolgt bei weiterem Kraftanstieg entlang der neuen Steifigkeitsgeraden

Verformungszustandes erforderlich ist. Bei Zunahme der Verformungen erfolgt die Kraftsteigerung ebenfalls entlang der neuen Steifigkeitsgeraden bis zum nächsten Riß usw. (durchgezogene Linie in Bild 4.1).

Das Verhalten unter Last oder Zwang ist also für eine bestimmte Rißanzahl nur innerhalb eines, in Bild 4.1 schraffiert dargestellten, Dreiecks unterschiedlich.

Die Höhe des Dehnungssprungs bzw. des Kraftabfalls pro Riß hängt u.a. von der Betonzugfestigkeit, dem Bewehrungsgrad sowie der Stablänge ab. Je länger ein Stab ist, desto geringer werden die pro Riß auftre-

tenden Unstetigkeiten. Im Grenzfall des unendlich langen Stabes folgen beide Beanspruchungsarten der dick ausgezogenen, oberen Hüllkurve  $N(\epsilon_m)$ . Da für beide Lastfälle die Ribkräfte auf dieser Kurve liegen, gehen üblicherweise alle Betrachtungen von dieser Linie als dem maßgebenden Normalkraft-Dehnungszusammenhang aus.

Der Abstand zwischen mittlerer Dehnungslinie  $N(\epsilon_m)$  und Kennlinie des nackten Stahles  $N(\epsilon_s)$  ist auf die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen zurückzuführen (in Bild 4.1 mit  $\Delta\epsilon(N)$  gekennzeichnet). Die Höhe der Mitwirkung wird wesentlich von der Betonzugfestigkeit, dem Bewehrungsgrad sowie den Verbundeigenschaften beeinflusst. Die Mitwirkung nimmt oberhalb der Erstrißlast mit zunehmender Beanspruchung ab. Nach Überschreiten der Stahlstreckgrenze ist, je nach vorliegenden Verbundverhältnissen, mit einem deutlichen Anwachsen von  $\Delta\epsilon$  zu rechnen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit zunehmendem Abflachen der Stahlkennlinie neben den Rissen immer geringere Verbundspannungen ausreichen, um im Stahl große Dehnungsdifferenzen hervorzurufen.

Diese Tatsache wurde bisher wenig beachtet, da man sich bei Untersuchungen i.a. auf den linear-elastischen Stahldehnungsbereich beschränkte. Sie ist jedoch bei Anwendung der Plastizitätstheorie für die Beurteilung der Verformungsfähigkeit von Bauteilbereichen mit sogenannten "plastischen Stahlbetongelenken" von Bedeutung (siehe Langer (1987)).

Die dargelegten Zusammenhänge zwischen Normalkraft und Dehnung lassen sich ohne weiteres auch auf eine Biegebeanspruchung übertragen, wenn die Normalkraft durch das Biegemoment und die mittlere Dehnung durch die mittlere Krümmung ersetzt werden.

#### 4.2 Rechnerische Ermittlung von Ribabständen und Ribweiten

In dem in Bild 4.2a dargestellten Prisma herrscht zunächst im ungerissenen Zustand I, abgesehen von den beiden Einleitungsbereichen am Rande, ein homogener Beanspruchungszustand. Die Spannung in Stablängsrichtung beträgt an jeder Stelle des Querschnitts:

$$\sigma_b = \frac{N}{A_i} \quad [4-1]$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= n \cdot \sigma_b \\ A_i &= A_b + (n-1) \cdot A_s \\ n &= E_s / E_b \end{aligned}$$

$A_b$  = Betonquerschnitt  
 $A_s$  = Stahlquerschnitt  
 $E_{b,s}$  = E-Moduli Beton bzw. Stahl  
 $\sigma_{b,s}$  = Spannungen im Beton bzw. Stahl  
 $N$  = Normalkraft

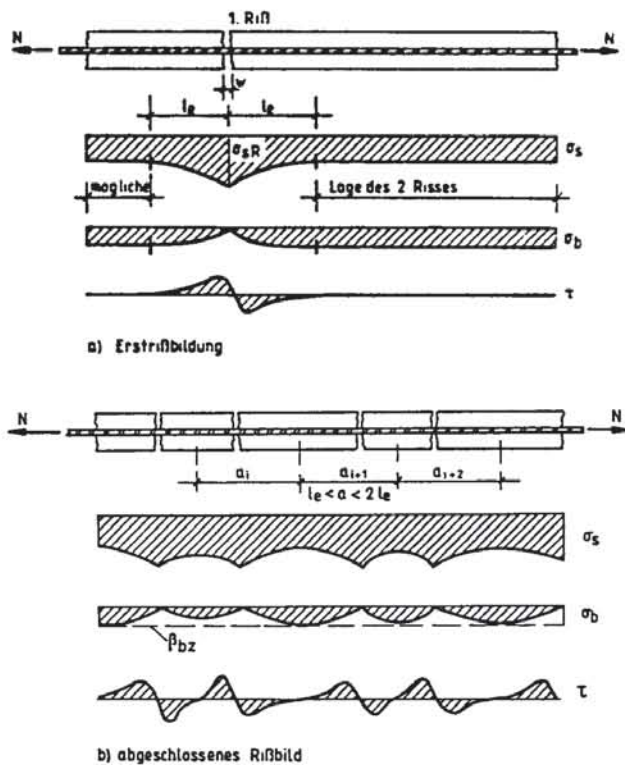


Bild 4.2: Mechanismus der Ribbildung  
 Mechanism of cracking

Ein Rib entsteht, wenn in einem Querschnitt die örtliche Betonzugfestigkeit  $B_{bz}$  überschritten wird. Die Lage des ersten Risses ist aufgrund der stochastisch verteilten Zugfestigkeit zufällig. Im Ribquerschnitt muß die gesamte vorhandene Zugkraft vom Bewehrungsstahl übernommen werden. Die Stahlspannung im Erstrib beträgt:

$$\sigma_{SR} = \frac{N_R}{A_s} = \frac{B_{bz}^1 [A_b + (n-1)A_s]}{A_s} = \frac{B_{bz}^1}{\mu} [1 + (n-1)\mu] \quad [4-2]$$

Vernachlässigt man den zweiten Term in der Klammer und setzt für die Zugfestigkeit des Betons einen mittleren Wert ein, so erhält man die bekannte Beziehung:

$$\sigma_{SR} \approx \frac{B_{bz}}{\mu} \quad [4-3]$$

Man erkennt, daß die Stahlspannung im Rib um so größer ist, je größer die Betonzugfestigkeit und je geringer der Bewehrungsgrad  $\mu$  ist. Aus der Bedingung, daß die Stahlspannung im Rib geringer als die

Stahlstreckgrenze bleiben muß, ergibt sich mit Gl. [4-3] der Mindestbewehrungsgrad zu:

$$\min \mu \approx \frac{\sigma_{bz}}{\sigma_s} \quad [4-4]$$

Die Störstelle RiB führt wegen des unterschiedlichen Dehnungszustandes zu Relativverschiebungen zwischen Stahl und Beton. Hierdurch werden Verbundkräfte aktiviert, die der Verschiebung entgegenwirken. In einer Entfernung  $l_e$  vom RiB – der sogenannten Einleitungslänge – ist der Zustand gleicher Dehnungen wieder hergestellt, die Betonzugspannung hat erneut  $\sigma_{bz}$  erreicht. Ein weiterer RiB kann sich bei Laststeigerung nur außerhalb von  $l_e$  bilden. Die Lage des Risses ist sonst jedoch wieder zufällig. Der Vorgang wiederholt sich so oft, bis die Verbundkräfte nicht mehr in der Lage sind, die Betonzugspannungen zwischen zwei Rissen über die örtliche Betonzugfestigkeit anwachsen zu lassen. Dieser Zustand wird üblicherweise als "abgeschlossenes RiBbild" bezeichnet (siehe Bild 4.2b). Grenzwerte für die RiBabstände erhält man aus folgenden theoretischen Überlegungen: Zwischen zwei Rissen, deren Entfernung der doppelten Einleitungslänge entspricht, wird die Betonzugfestigkeit gerade noch erreicht. Aus der Annahme, daß dann ein weiterer RiB entsteht oder dieser sich noch nicht öffnet, erhält man die Streubreite der RiBabstände zwischen einfacher und doppelter Einleitungslänge und der mittlere RiBabstand berechnet sich für das abgeschlossene RiBbild zu  $1,5 \cdot l_e$ .

Zur rechnerischen Bestimmung der Einleitungslänge  $l_e$  wird allgemein von folgender Beziehung ausgegangen:

$$\int_0^x \sum u \cdot \tau(s) dx = \int_{A_{bz}(x)} \sigma_{bz}(A) dA \quad [4-5]$$

- $\sum u$  = Summe der Stabumfänge die im Verbund liegen
- $x$  = Entfernung zum RiB
- $\tau(s)$  = Verbundspannung, abhängig von Schlupf  $s$
- $A_{bz}$  = mitwirkende Betonzugfläche
- $\sigma_{bz}$  = örtliche Betonzugspannung

Die Einleitungslänge  $l_e$  ergibt sich aus der Bedingung gleicher Dehnungen zwischen Stahl und Beton. Ist der Verlauf der Stahl- und Betondehnungen bekannt, so erhält man für die RiBbreite  $w$ :

$$w = \int_a \left( \epsilon_s(x) - \epsilon_b(x) \right) dx \quad [4-6]$$

Die "RiBeinzuglänge"  $a$  stellt für Erstrißbildung den Bereich mit verschieblichem Verbund ( $a=2 \cdot l_e$ ),

bei abgeschlossener RiBbildung die Länge zwischen zwei RiBabstandsmitten dar (siehe Bild 4.2).

Da eine geschlossene Lösung der beiden Integrale in Gl. [4-5] und [4-6] nur mit erheblichem Aufwand und nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist, werden allen bisher aufgestellten Theorien mehr oder weniger starke Vereinfachungen zugrunde gelegt.

## 5 Zulässige RiBbreiten (nach Vorschriften)

Unter der RiBbreite  $w$  versteht man i.a. die an der Oberfläche des Betons senkrecht zum RiBverlauf gemessene Entfernung der RiBufer. Die RiBweite ist nicht konstant. Sie nimmt von der Betonoberfläche zum Bewehrungsstab hin ab (siehe Bild 5.1). Zwischen weit auseinanderliegenden Stäben nimmt die RiBweite zur Abstandsmitte hin zu.

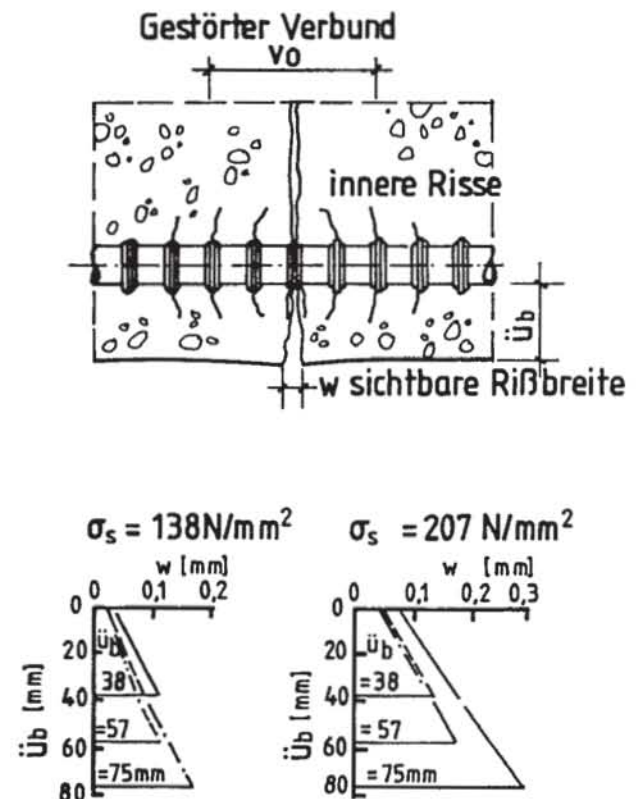


Bild 5.1: Abnahme der RiBbreite von der Betonoberfläche hin zum Bewehrungsstab, je nach Stahlspannung und Betondeckung (nach Leonhardt (1977) und Beeby (1978))  
Decrease of crack width from concrete surface to bar surface depending on steel stress and concrete cover (after Leonhardt (1977) and Beeby (1978))

Neben den Anforderungen aus der Gebrauchsfähigkeit werden in Vorschriften zulässige Rißbreiten vor allem im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit von Bauwerken festgelegt. Das Vorhandensein aggressiver, korrosionsfördernder Umwelteinflüsse bedingt danach geringere zulässige Rißbreiten.

DIN 1045 (1978) enthält keine Absolutwerte für die Rißbreiten. In dem Bewußtsein, daß Rißbreiten stark streuen, wird in Tabelle 14 für die zu erwartenden Rißbreiten zwischen normal, gering und sehr gering unterschieden. Welche der jeweiligen Anforderungen einzuhalten sind, richtet sich nach den vorliegenden Umweltbedingungen (Tabelle 10 in DIN 1045).

Bei der in DIN 1045 (1978) vorgenommenen Klassifizierung ging man, nach Grasser/Thielen (1976), von folgenden, durch Versuchsauswertung gewonnenen Rißbreiten aus:

Rißbreite sehr gering:	$w_{95\%} = 0,20 \text{ mm}$
Rißbreite gering:	$w_{95\%} = 0,25 \text{ mm}$
Rißbreite normal:	$w_{95\%} = 0,30 \text{ mm}$

$w_{95\%}$  bedeutet, daß die Rißbreite nur von 5 % aller im Versuch gemessenen Rißbreiten überschritten werden darf.

In der CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) wird sowohl die Betondeckung wie auch die zulässige Rißbreite in Abhängigkeit von der Umweltbedingung festgelegt. Zusätzlich ist zwischen sehr korrosionsempfindlichen Betonstählen mit Durchmesser  $\leq 4 \text{ mm}$  und Spannstählen sowie wenig korrosionsempfindlicher Bewehrung unter-

schieden. In Tabelle 5.1 sind die Anforderungen an die Rißbreite aus Gründen der Dauerhaftigkeit aufgeführt.

Die zugehörigen, charakteristischen Rißbreiten, die dem 95 %-Fraktilwert der Rißbreiten entsprechen, werden wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,1 \text{ mm} \\ w_2 &= 0,2 \text{ mm} \\ w_3 &= 0,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ist die Betondeckung  $c$  größer als der Mindestwert  $c_{\min}$ , so sind im Verhältnis  $c/c_{\min} \leq 1,5$  vergrößerte Rißbreiten erlaubt. Für sichtbare Flächen muß die zulässige Rißbreite mit dem Bauherrn abgesprochen werden.

Im Entwurf für den EUROCODE Nr. 2 (1984) wurden die Bestimmungen nach CEB/FIP-Mustervorschrift übernommen.

Nach Schießl/Wölfel (1986) haben umfangreiche Versuchsreihen gezeigt, daß die Breite von quer zur Bewehrung verlaufenden Rissen von untergeordneter Bedeutung für den Korrosionsschutz der Bewehrung ist. In der vorgeschlagenen Neufassung zu DIN 1045 (1986) schien daher eine stark abgestufte Regelung für unterschiedliche Umweltbedingungen nicht erforderlich. Vielmehr hielt man einfache Konstruktionsregeln in Form von Stabdurchmesser- und Stababstandstabellen für ausreichend, deren Einhaltung breite Einzelrisse verhindert. Der Ableitung dieser Regeln liegt für Innenbauteile aus ästhetischen Gründen ein Rechenwert der Rißbreite von 0,4 mm, für Außenbauteile (entsprechend Zeile 2-4 in Tabelle 10, DIN 1045 (1978)) ein Wert von 0,25 mm zugrunde.

Anforderungsgruppen	Umweltbedingungen	Einwirkungskombination	Bewehrung			
			sehr korr.empfindl.		wenig korr.empfindl.	
			Grenzzustand	$w_k$	Grenzzustand	$w_k$
a	wenig aggressiv	häufig	Rißbreite	$\leq w_2$	Rißbreite	$\leq w_3$
		quasi-ständig	Dekompression oder Rißbr.	$\leq w_1$		
b	mäßig aggressiv	häufig	Rißbreite	$\leq w_1$	Rißbreite	$\leq w_2$
		quasi-ständig	Dekompression			
c	sehr aggressiv	seltener	Rißbr. oder Entstehen von Rissen	$\leq w_1$	Rißbreite	$\leq w_2$ oder $\leq w_1$
		häufig	Dekompression			

**Tabelle 5.1:** Anforderungen aus Gründen der Dauerhaftigkeit nach CEB-FIP-Mustervorschrift (1978)  
Durability requirements after CEB/FIP-model code (1978)

## 6 Vereinfachter Nachweis der Rißbreitenbeschränkung nach Normen

Verschiedene Vorschriften ermöglichen einen vereinfachten Nachweis der Einhaltung bestimmter Rißbreiten durch die Vorgabe maximaler Stabdurchmesser bzw. maximaler Stababstände.

In Tabelle 6.1 sind Grenzdurchmesser nach DIN 1045 (1978) angegeben. Nach der CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) bzw. Eurocode 2 (1984) entfällt der Nachweis bei Einhaltung der in Tabelle 6.2 aufgeführten Grenzdurchmesser.

	1	2	3	4
1	Bauteile nach Tabelle 10, Zeile	1	2	3 und 4
	zu erwartende Ribbreite	normal a*) b*)	gering a*) b*)	sehr gering a*) b*)
2	glatter Betonstahl BSt 220/340 GU (IG)	28 28	28 25	28 18
3	Betonrippenstahl BSt 220/340 RU (IR)	40 40	40 40	40 32
4	Betonrippenstahl BSt 420/500 RU, RK (III U., III K.)	28 16	20 12	14 8
5	glatter Betonstahl für Betonstahlmatten BSt 500/550 GK (IVG) und profilierter Betonstahl für Betonstahlmatten BSt 500/550 PK (IVP)	12 8.5	10 5	6 4
6	Betonrippenstahl für Betonstahlmatten BSt 500/550 RK (IVR)	12 12	12 7.5	8.5 5
*) Die Werte der Spalten a gelten für $\sigma_{sd} = 0,7 B_s/1,75$ , die der Spalten b für $\sigma_{sd} = B_s/1,75$ , bei Betonstahlmatten aus glatten Stäben BSt 500/550 GK ist jedoch $B_s = 420 \text{ MN/m}^2$ zugrunde gelegt. $\sigma_{sd}$ ist i.a. 70 % der Gebrauchslast (siehe DIN 1045, Abschnitt 17.6)				

**Tabelle 6.1:** Grenzdurchmesser in mm für Ribnachweis (nach DIN 1045 (1978))  
Maximum bar diameter (mm) for crack control (after DIN 1045 (1978))

zulässige Ribbreite			
$w_k = 0,4 \text{ mm}$		$w_k = 0,2 \text{ mm}$	
$\sigma_s \text{ (N/mm}^2\text{)}$	$d_s \text{ (mm)}$	$\sigma_s \text{ (N/mm}^2\text{)}$	$d_s \text{ (mm)}$
200	≤ 50	100	≤ 50
240	≤ 25	120	≤ 25
280	≤ 20	200	≤ 12

**Tabelle 6.2:** Größter zulässiger Stabdurchmesser (ohne weiteren Nachweis nach dem Grenzzustand der zulässigen Ribbreite); Zwischenwerte sind linear einzuschalten (nach CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) bzw. Eurocode 2 (1984))  
Maximum bar diameter for crack control without further check; where necessary, linear interpolation should be used (after CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) and Eurocode 2 (1984))

zul. Ribbreite $w_k$	Beanspruchung auf	$\sigma_s \text{ (N/mm}^2\text{)}$					
		120	160	200	240	280	350
$w_1$ = 0,1 mm	Zug	60	-	-	-	-	-
	Biegung	75	40	-	-	-	-
$w_2$ = 0,2 mm	Zug		100	75	50	-	-
	Biegung		125	100	60	-	-
$w_3$ = 0,4 mm	Zug	keine Begrenzung			175	125	75
	Biegung	keine Begrenzung			200	150	100

**Tabelle 6.3:** Maximale horizontale Bewehrungsabstände bei einlagiger Bewehrung und  $d_s \leq 32 \text{ mm}$  (ohne weiteren Nachweis nach dem Grenzzustand der zulässigen Ribbreite); Zwischenwerte sind linear einzuschalten (nach Eurocode 2 (1984))  
Maximum bar spacing for one layer of reinforcement and  $d_s \leq 32 \text{ mm}$  without further check; where necessary, linear interpolation should be used (after Eurocode 2 (1984))

Nach Eurocode 2 gilt der Nachweis zusätzlich durch die Einhaltung maximaler Stababstände nach Tabelle 6.3 als erbracht.

Die nach den Bestimmungen ebenfalls möglichen "genaueren" Nachweise der Ribbreiten werden unter Punkt 7 anhand der zugrunde liegenden Arbeiten erläutert.

Nach CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) bzw. Eurocode 2 (1984) ist zur Verhinderung großer Einzelrisse in schwach bewehrten Bauteilen eine Mindestbewehrung vorgeschrieben. Diese berechnet sich entsprechend Gleichung (4-4) zu:

$$\min \mu = \frac{\beta_{bz}}{\beta_s} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$$

mit:

- $\beta_{bz}$  = zentrische Betonzugfestigkeit
- $\beta_s$  = Streckgrenze des Stahles
- $A_s$  = Querschnittsfläche des Stahles
- $A_{c,eff}$  = Wirkungszone der Bewehrung (siehe Bild 7.4)

**Anmerkung:** Die Mindestbewehrung soll nach den o.g. Vorschriften so bemessen sein, daß beim Reißen des Betons im Stahl die Streckgrenze nicht überschritten

wird. Um dies zu Erreichen, muß jedoch als Bezugsgröße die gesamte im Zustand I unter Zug stehende Betonfläche (bei Biegung gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Veränderung des inneren Hebelarms beim Übergang zum Zustand II) in Ansatz gebracht werden. Die in obiger Gleichung eingeführte Wirkungszone der Bewehrung  $A_{c,eff}$  führt nicht immer zu einer ausreichenden Bewehrungsmenge,

Im Entwurf zur Neufassung von DIN 1045 (1986) werden ebenfalls Stababstands- bzw. -durchmessertabellen für vereinfachte Nachweise der Ribbreitenbeschränkung angegeben. Da die Tabellenwerte zum Zeitpunkt der Berichtserstellung noch in Diskussion standen, wird hier auf eine Wiedergabe verzichtet.

## 7 Klassische Betrachtungsweise der Ribbildung

### 7.1 Allgemeines

Untersuchungen zur Ribbildung dienen letztendlich dazu, die Ribbreite  $w$  zu bestimmen. Wie unter Punkt 4 gezeigt, ist die Ribbildung ein stetiger Prozeß. Nach Überschreiten der Erstrißlast bilden sich, in Abhängigkeit von der Streuung der Betonzugfestigkeit, zunächst viele, in höheren Beanspruchungsbereichen nur noch wenige Risse.

Alle klassischen Theorien zur Bestimmung der Ribbreite lassen den Ribbildungsprozeß außer acht und betrachten von vornherein einen Zustand mit konstantem Ribbild.

Autoren, die sich mit der Ribbildung infolge Lastbeanspruchung befassen, gehen davon aus, daß sich bereits unter Gebrauchslast ein abgeschlossenes Ribbild einstellt. Diese Annahme stimmt nach neueren Untersuchungen –siehe z.B. Noakowski (1985)– nur im Bereich mittlerer und hoher Bewehrungsgrade mit dem wirklichen Verhalten überein. Bei geringen Bewehrungsgraden ist dagegen nur mit einzelnen, zum Teil weit auseinanderliegenden Rissen zu rechnen. Allerdings ist zu beachten, daß in diesem Falle Dauerlasten oder nicht ruhende Belastung die Anzahl der Risse deutlich steigern können (siehe z.B. Rehm/Eligehausen (1973) bzw. Holmberg (1972)).

Wie aus Versuchen bekannt ist, führen in der Praxis vorkommende Zwangverformungen häufig nicht zu einem abgeschlossenen Ribbild. Arbeiten, welche reine Zwangbeanspruchung behandeln, gehen daher meist von der "Erstrißbildung" aus. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß sich die Einleitungslängen der Risse nicht überschneiden. Ohne nennenswerte Steigerung

der Beanspruchung treten weitere Risse auf. Hier handelt es sich ebenfalls um eine Idealisierung, denn auch bei einer geringen Ribanzahl ist eine Überschneidung der Einleitungslängen möglich. Dies ist immer dann der Fall, wenn die nächste Schwachstelle im Beton, die zum Rib führt, in einem Abstand kleiner der zweifachen Einleitungslänge liegt (siehe Bild 4.2). Außerdem ist die Bildung eines weiteren Risses jeweils mit einer Laststeigerung verbunden (siehe Bild 4.1). Diese ist umso größer, je mehr die Betonzugfestigkeit streut und je geringer der Bewehrungsgrad ist. Die Annahme sich nicht überschneidender Einleitungslängen liefert jedoch i.a. obere Grenzwerte für die Ribbreiten und liegt damit auf der "sicheren Seite".

Durch Definition eines unteren Grenzwertes für die mittlere Stahldehnung ist eine Anwendung von Ribbreitenformeln, welche ein abgeschlossenes Ribbild zugrunde legen, auch im Falle der Einzelribbildung möglich (siehe Rehm/Eligehausen/Mallée (1976)).

Im folgenden werden die Theorien für Last- und Zwangbeanspruchungen entsprechend den unterschiedlichen Betrachtungsweisen getrennt behandelt.

### 7.2 Ribbildung infolge Lastbeanspruchung

Alle hier beschriebenen, theoretisch abgeleiteten, Beziehungen basieren auf den unter Punkt 4.2 angegebenen Grundgleichungen. Zur Vereinfachung der numerischen Lösung werden verschiedene Idealisierungen eingeführt. Wie bereits erwähnt, wird für Lastbeanspruchung vom abgeschlossenen Ribbild ausgegangen d.h., daß an keiner Stelle eines Bauteils starrer Verbund vorliegt und daß die mit zunehmender Lasthöhe im Beton hervorgerufenen Zugspannungen die Betonzugfestigkeit nicht mehr erreichen. Dies bedeutet, daß die Ribabstände zwischen der einfachen und der doppelten Einleitungslänge  $l_e$  (siehe Bild 4.2) liegen müssen.

Ersetzt man in Gleichung (4-5) alle Veränderlichen durch ihre Mittelwerte, so führt dies zu einer einfachen Gleichung für den mittleren Ribabstand, die in allgemeiner Form lautet:

$$a_m = K \frac{d_s}{\mu} \quad [7-1]$$

mit:

- $d_s$  = Durchmesser des Bewehrungsstabes
- $\mu$  = Bewehrungsgrad
- $K$  = Konstante

Da mit dieser Formel berechnete Rißabstände für große Bewehrungsgrade gegen Null gehen würden, was der Versuchserfahrung widerspricht, wird die Formel häufig durch ein Korrekturglied ergänzt:

$$a_m = K' \cdot \ddot{u}_b + K \frac{d_s}{\mu} \quad (7-2)$$

mit:

$\ddot{u}_b$  = Betonüberdeckung  
 $K'$  = Konstante

Bei bekanntem Rißabstand erhält man die mittlere Rißbreite aus folgender Beziehung:

$$w_m = a_m (\epsilon_{sm} - \epsilon_{bm}) \quad (7-3)$$

mit:

$\epsilon_{sm}$  = mittlere Stahldehnung  
 $\epsilon_{bm}$  = mittlere Betondehnung

Die von verschiedenen Autoren angegebenen Beziehungen unterscheiden sich sowohl in der Art der Berücksichtigung der als wesentlich erkannten Einflußparameter als auch in der Größe der Konstanten  $K$ . Diese werden meist durch statistische Auswertung von Versuchen gewonnen und streuen dementsprechend je nach Art und Anzahl der zugrundegelegten Versuchskörper.

In Anlehnung an die von Rehm/Mallée (1981) durchgeführte vergleichende Auswertung sind im weiteren verschiedene Beziehungen dargestellt und erläutert. Einen ähnlichen Vergleich von Rißformeln findet man bei Martin/Schießl/Schwarzkopf (1980). Die zu einzelnen Formeln angegebene Parameter gelten für Normalbeton. Für Leichtbeton wurden von Rostásy/Koch/Leonhardt (1976) entsprechende Faktoren abgeleitet.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden für alle Ansätze, soweit möglich, die gleichen, nachstehenden Bezeichnungen verwendet:

$\ddot{u}_b$  = Betonüberdeckung (mm)  
 $d_s$  = Stabdurchmesser der Längsbewehrung (mm)  
 $s$  = Stababstand der Längsbewehrung (mm)  
 $f_R$  = bezogene Rippenfläche der Längsbewehrung  
 $A_S$  = Fläche der Längsbewehrung (mm<sup>2</sup>)  
 $b$  = Balkenbreite in Höhe der Zugsbewehrung (mm)  
 $b_0$  = Stegdicke (mm)  
 $d$  = Bauteilhöhe (mm)  
 $\dot{h}$  = Nutzhöhe (mm)  
 $x$  = Höhe der Druckzone (mm)  
 $E_S$  = E-Modul des Stahles (N/mm<sup>2</sup>)

- Rehm/Martin unterbreiteten 1968 folgenden Vorschlag zur Bestimmung von mittleren Rißabständen:

$$a_m = K_1 \cdot \ddot{u}_b + K_2 \cdot K_3 \cdot \frac{d_s}{\mu} \quad (\text{mm}) \quad (7-4)$$

mit:

$K_1$  = Korrekturfaktor für Mindestrißabstand  
 = 1,5 für Balken  
 = 4,0 für Platten

$$K_2 = \frac{\beta_{zm}}{\tau_{1m}} = \frac{0,009}{0,2 + \sqrt[3]{f_R^2}}$$

= Verbundfaktor, der wesentlich von der bezogenen Rippenfläche  $f_R$  abhängt

= 0,045 für glatte Stäbe

= 0,025 für gerippte Stäbe ( $f_R \approx 0,065$ )

$K_3$  = berücksichtigt die Lage der Nulllinie

= 1,0 für reine Biegung

= 5,0 für reinen Zug

$\mu$  =  $A_S / (b_0 \cdot h)$  = Bewehrungsgrad

Diese Beziehung liefert für übliche Bauteilabmessungen im Mittel gute Ergebnisse. Bei hohen Balken ( $h \geq 0,8$  m) besitzt der oben definierte Bewehrungsgrad keine Gültigkeit mehr. Aufgrund von FE-Rechnungen geben Rehm/Mallée (1981) folgende Modifizierung an:

$$\mu = A_S / (b_0 \cdot h^*) \quad \text{mit } h^* = h \leq 500 \text{ mm}$$

Zur Ermittlung der Rißbreite berücksichtigen Rehm/Martin die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen durch eine Abminderung der rechnerischen Stahlspannung  $\sigma_{sII}$ :

$$w_m = a_m \cdot \frac{\sigma_{sII} - \Delta\sigma_{sII}}{E_S} \quad (7-5a)$$

Den Abzugswert  $\Delta\sigma_{sII}$  wählen sie in Anlehnung an einen Vorschlag von Rao (1966) zu:

$$\Delta\sigma_s = 0,18 \frac{\beta_z}{\mu} \cdot \frac{\sigma_{sII, RiB}}{\sigma_{sII}}$$

mit:

$\sigma_{sII}$  = aktuelle Stahlspannung im Riß

$\sigma_{sII, RiB} \approx 0,18 \beta_z / \mu$

= Stahlspannung bei Auftreten des Risses

$\beta_z$  = Betonzugfestigkeit

Für die kritische Rißbreite (= 95 %-Fraktile) ergibt sich damit bei reiner Biegung:

$$w_{95\%} = \frac{k_4}{E_s} \cdot \left[ k_1 \cdot \bar{u}_b + \frac{0,9 \cdot 10^{-2}}{0,2 + \sqrt[3]{f_R}} \cdot \frac{d_s}{\mu} \right] \sigma_{sII} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{0,18 \cdot B_z}{\mu \cdot \sigma_{sII}} \right)^2 \right] \quad (7-5)$$

$k_4$  = Verhältnis zwischen  $w_{95\%}$  und  $w_m$   
 = 2,1 (für Aussagewahrscheinlichkeit von 90%)

Diese Beziehung ist wegen des großen Rechenaufwandes als Bemessungsformel wenig geeignet. Die Autoren führen deshalb folgende, empirische Näherungsbeziehungen ein:

$$d_s = r \cdot \frac{\mu}{\sigma_{sII}^2} \quad (7-6)$$

(mit  $\mu$  in ‰,  $d_s$  in mm,  $\sigma_{sII}$  in  $\text{Mp}/\text{cm}^2$ )

Der Faktor  $r$  beschreibt den Einfluß der Verbundeigenschaften und der gewählten Rißbreite. Er kann Tabelle 7.1 entnommen werden.

Stahlart	$w_{95\%} = 0,30 \text{ mm}$	$w_{95\%} = 0,20 \text{ mm}$
Rundstahl ( $f_R=0$ )	100	50
Betonrippenstahl ( $f_R=0,065$ )	220	110

Tabelle 7.1: Beiwerte  $r$  ( $\text{Mp}^2/\text{cm}^3$ ) (nach Rehm/Martin (1968))

Values of  $r$  ( $\text{Mp}^2/\text{cm}^3$ ) (after Rehm/Martin (1968))

Für einen Bewehrungsgehalt  $\mu \leq 0,2 \text{ ‰}$  ist nach Rehm/Martin aufgrund des zu erwartenden Zustandes I kein Rißnachweis erforderlich; eine Begrenzung des Durchmessers ist nicht nötig.

Für  $\mu > 0,2 \text{ ‰}$  ist ebenfalls kein Rißnachweis erforderlich, solange die Durchmesser der verwendeten Stäbe nicht größer sind als in Tabelle 7.2 aufgeführt. Aus dieser Bestimmung resultieren die horizontalen Äste des in Bild 7.1 mit durchgezogener Linie dargestellten vereinfachten Nachweises. Man erkennt, daß damit auch die besonders im Bereich geringer Bewehrungsgrade deutlich spürbare Mitwirkung des Betons erfaßt wird.

Bild 7.1 zeigt einen Vergleich zwischen der genaueren Beziehung [7-5] und der oben beschriebenen Näherungsbeziehung [7-6].

Stahlart	$w_{95\%} = 0,30 \text{ mm}$	$w_{95\%} = 0,20 \text{ mm}$
Rundstahl St I $B_s = 240 \text{ N/mm}^2$	16 mm	10 mm
Rippenstahl St III $B_s = 420 \text{ N/mm}^2$	16 mm	10 mm
geschweißte Matten aus profilierten Drähten St IV $B_s = 500 \text{ N/mm}^2$	8 mm	5 mm

Tabelle 7.2: Grenzdurchmesser für  $\mu \geq 0,2 \text{ ‰}$  ohne Rißnachweis (nach Rehm/Martin (1968))  
 Maximum bar diameter for crack control,  $\mu \geq 0,2 \text{ ‰}$ , without further check (after Rehm/Martin (1968))

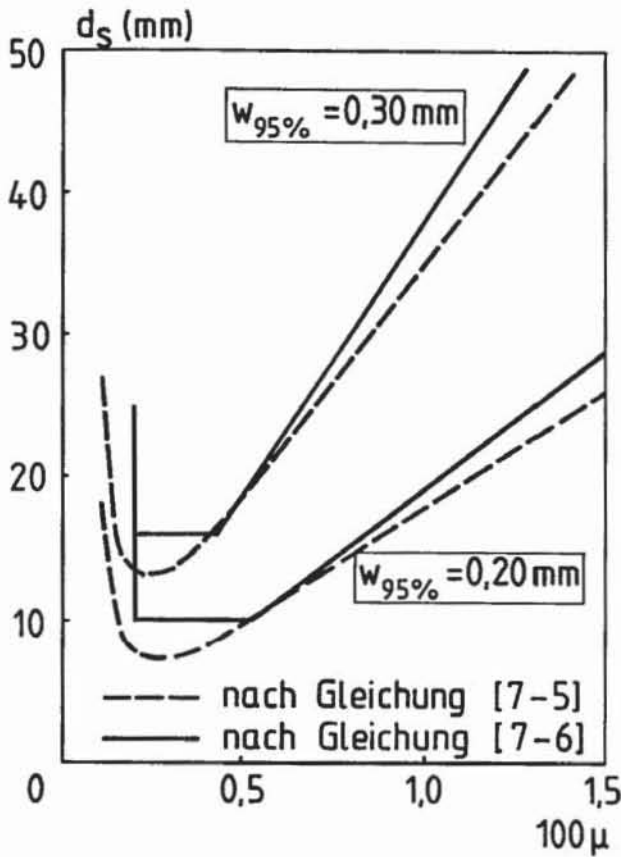
Der vereinfachte Näherungsansatz nach Rehm/Martin diente als Grundlage für DIN 1045 (1978). Allerdings wird dort der Bewehrungsgrad in Abhängigkeit von der im Zustand II vorliegenden Betonzugfläche ( $b_0 \cdot (h-x)$ ) ermittelt. Die angegebenen Verbundbeiwerte  $r$  wurden von Rostásy auf allgemeine Beanspruchungszustände erweitert (Tabelle 7.3). Als Nachweisgrenze ist in DIN 1045 (1978)  $\mu_z \leq 0,3 \text{ ‰}$  vorgesehen und es sind differenziertere Grenzdurchmesser angegeben (siehe Tabelle 6.1).

Die vereinfachten Beziehungen nach Rehm/Martin bzw. DIN 1045 stimmen für übliche Verhältnisse, entsprechend den zur Ableitung verwendeten Versuchen, im Bereich  $\sigma_s \approx 200 \text{ N/mm}^2$  gut mit der Wirklichkeit überein. Für wesentlich andere Stahlspannungen und geringe Bewehrungsgrade ist die Übereinstimmung weniger befriedigend (siehe Noakowski (1978)).

Kritik wurde vor allem an der Festlegung der DIN 1045 geübt, daß für  $\mu_z \leq 0,3 \text{ ‰}$  kein Nachweis zu führen ist (siehe z.B. Noakowski (1985), Jungwirth (1985), Leonhardt (1985)). Um klaffende Risse zu vermeiden, die aufgrund unberücksichtigter Beanspruchungen (Zwang, Lastumlagerung) entstehen können, sollte auch für geringere Bewehrungsgrade ein Rißnachweis erbracht werden.

– Leonhardt (1978) führt in seinem Ansatz zur Rißabstandsrechnung ein weiteres Korrekturglied  $v_0$  ein. Mit diesem Term wird berücksichtigt, daß beiderseits eines Risses –je nach Höhe der Beanspruchung der Verbund auf einer Länge von ca.  $2-3 d_s$  größtenteils zerstört ist. Ein wesentlicher Unterschied zu der von Rehm/Martin angegebenen Formel liegt in der





**Bild 7.1:** Abhängigkeit zwischen Stabdurchmesser  $d_s$ , Bewehrungsgehalt  $\mu$  und der für Rippenstahl kritischen Rißbreite  $w_{95\%}$  für  $\sigma_{sII} = 240 \text{ N/mm}^2$  (nach Rehm/Martin (1968))  
 Relationship between bar diameter  $d_s$ , reinforcement ratio  $\mu$  and critical crack width  $w_{95\%}$  for high bond bars with  $\sigma_{sII} = 240 \text{ N/mm}^2$  (after Rehm/Martin (1968))

	1	2	3	4
1	Bauteile nach Tabelle 10, Zeile	1	2	3 und 4
	zu erwartende Rißbreite	normal	gering	sehr gering
2	glatter Betonstahl als Einzelstab und für Betonstahlmatten	60	40	25
3	profilierter Betonstahl für Betonstahlmatten	80	60	35
4	Betonrippenstahl als Einzelstab und für Betonstahlmatten	120	80	50

**Tabelle 7.3:** Beiwerte  $r$  zur Berücksichtigung der Verbundeigenschaften (nach DIN 1045 (1978))  
 Values of  $r$  for taking into account bond characteristics (after DIN 1045 (1978))

Definition des Bewehrungsgrades. Leonhardt bezieht die Stahlfläche auf die "Wirkungszone" der Bewehrung entsprechend Bild 7.4. Damit erhält er für den mittleren Rißabstand:

$$a_m = \frac{1}{2} \cdot v_0 + k_1 \cdot (\bar{u}_b, s) + k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{d_s}{\mu_{zw}} \quad (\text{mm}) \quad (7-7)$$

mit:

- $v_0$  = Bereich gestörten Verbundes am RiB (mm)
- $(\bar{u}_b, s) = \bar{u}_b$  (mm) für  $s \leq 2 \cdot \bar{u}_b$
- $= \bar{u}_b + (s - 2 \cdot \bar{u}_b) / 40$  (mm) für  $s > 2 \cdot \bar{u}_b$
- $s$  = Abstand der Bewehrung
- $\mu_{zw} = A_s / A_{c, \text{eff}}$  (siehe folgenden Ansatz CEB)
- $k_1 = 1,5$
- $k_2 = 0,40$  gerippter Stahl
- $= 0,80$  glatter Stahl
- $k_3 = 0,125$  bei reiner Biegung
- $= 0,25$  bei reinem Zug
- $= 0,25 \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2) / 2 \cdot \epsilon_1$  für ausmittigen Zug
- $\epsilon_1$  = Dehnung am Unterrand der Wirkungszone
- $\epsilon_2$  = Dehnung am Oberrand der Wirkungszone

Für die mittlere Rißbreite gibt Leonhardt folgende Beziehung an:

$$w_m = v_0 \cdot \epsilon_{sII} + (a_m - v_0) \cdot \epsilon_{sm} \quad (7-8)$$

mit:

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{sII} - \epsilon_s = \epsilon_{sII} \cdot \left[ 1 - k_5 \left( \frac{\sigma_{sR}}{\sigma_{sII}} \right)^2 \right]$$

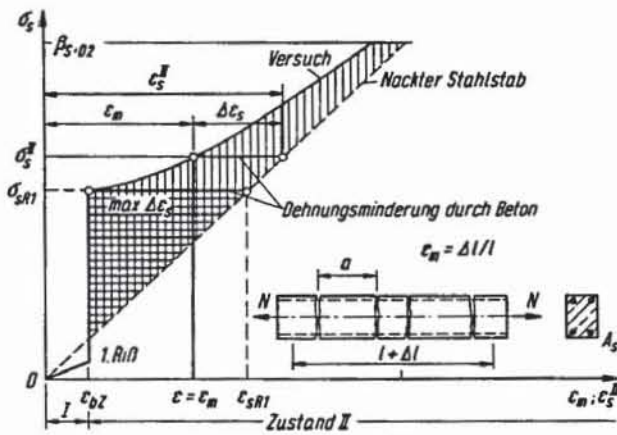
- $\sigma_{sR}$  = Stahlspannung unter Rißlast ( $\text{N/mm}^2$ )
- $\sigma_{sII}$  = aktuelle Stahlspannung im RiB ( $\text{N/mm}^2$ )
- $k_5$  = Faktor zur Berücksichtigung von Dauerlasten und Lastwechseln
- $= 0,8 + 0,4$

Die Bedeutung weiterer Größen ist für einen zentrisch gezogenen Stab Bild 7.2 zu entnehmen.

Nach Leonhardt ist es ausreichend, als kritische Rißbreite die 90 %-Fraktile zu wählen. Mit dem zugehörigen Streufaktor  $k_4 = 1,5$  erhält er für  $w_k$ :

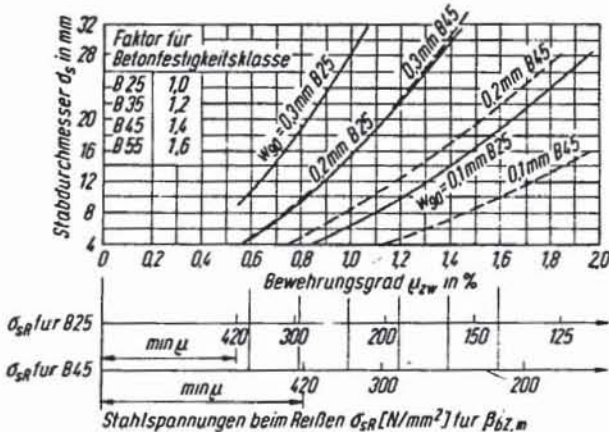
$$w_k = k_4 \cdot w_m = 1,5 \cdot w_m \quad (7-9)$$

Um die aufwendige Auswertung der angegebenen Gleichungen zu verhindern, schlägt Leonhardt die Aufstellung von Diagrammen vor. Ein solches, von Falkner (1969) für zentrischen Zwang ermitteltes Diagramm ist in Bild 7.3 dargestellt. In Abhängigkeit vom wirksamen Bewehrungsgrad und der kritischen Rißbreite sind daraus maximale Stabdurchmesser abzule-



**Bild 7.2:** Spannungs-Dehnungs-Linie eines Stahlbetonstabs bei mittigem Zug. Definition der Werte für die Ribbreitenermittlung (nach Leonhardt (1985))

Stress-strain-relationship of reinforced concrete members under axial tension. Notation used in the analytical model for prediction of crack width (after Leonhardt (1985))



**Bild 7.3:** Diagramm von Falkner zur Bemessung der Bewehrung für die Beschränkung der Ribbreite auf  $w_{90}$  gültig für mittigen Zug, Beton B 25, günstige Verbundlage, Betondeckung bis 3 cm, gerippten Betonstahl BST 420/500 oder 500/550.  $\sigma_{sR}$  ist die beim Auftreten des 1. Risses entstehende Stahlspannung (nach Leonhardt (1985))  
Diagram suggested by Falkner for design of reinforcement to control crack width  $w_{90}$ , valid for concrete B 25, axial tension, ribbed bars BST 420/500 and 500/550, cover less than 3 cm,  $\sigma_{sR}$  = steel stress after first cracking (after Leonhardt (1985))

sen. Für einen Beton B 25 kann außerdem der Mindestbewehrungsgrad ermittelt werden. Bei höheren Betonqualitäten ist dieser mit den angegebenen Faktoren zu multiplizieren. Nach Leonhardt ist eine Anwendung des Diagramms auch bei Lastbeanspruchung möglich, wenn als Bezugsfläche für den Bewehrungsgrad die gesamte gezogene Betonfläche gewählt wird.

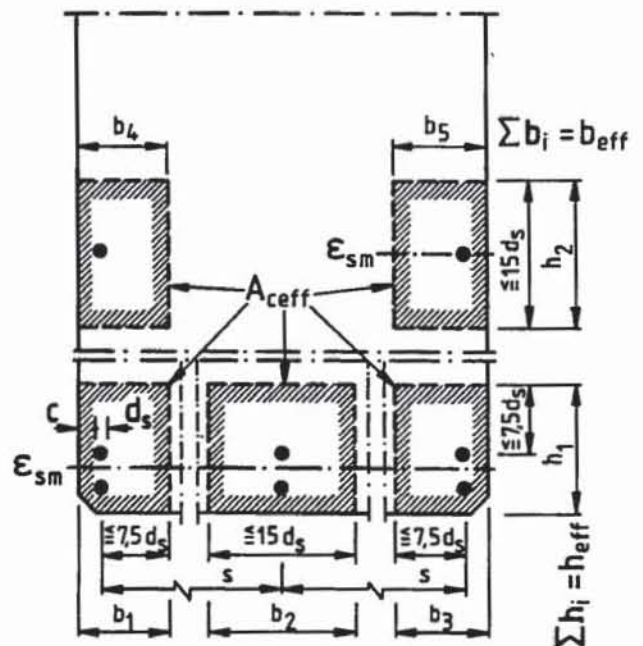
- Der nach der CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) (siehe auch Abschnitte 5 und 6) zu führende genauere Ribnachweis baut weitgehend auf die von Leonhardt (1978) vorgeschlagenen Formeln sowie auf die Arbeiten von Rehm/Martin (1968) und Rehm/Eligehausen (1973) auf:

$$a_m = 2 \cdot \left( \frac{s}{10} + \frac{d_s}{\mu_{zw}} \right) + k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{d_s}{\mu_{zw}} \quad (7-10)$$

mit:

- $k_2 = 0,4$  für profilierten und gerippten Stahl  
 $= 0,8$  für glatten Stahl
- $k_3 =$  Beiwert zur Erfassung der Spannungsverteilung (siehe Leonhardt)
- $\mu_{zw} = A_s/A_{C,eff} =$  Längsbewehrungsgrad
- $A_{C,eff} = b_{eff} \cdot d_{eff}$

Die mitwirkende Betonzugfläche  $A_{C,eff}$  ist entsprechend Bild 7.4 zu berechnen.



**Bild 7.4:** Definition der mitwirkenden Betonfläche nach der CEB/FIP-Mustervorschrift (1978)  
Definition of effective area of concrete after CEB/FIP-model code (1978)

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sR}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (7-11)$$

mit:

$\sigma_s$  = Stahlspannung im gerissenen Querschnitt unter der betrachteten Einwirkungskombination

$\sigma_{sR}$  = Stahlspannung im gerissenen Querschnitt unter der Annahme, daß die größte Betonzugspannung bei ungerissem Querschnitt der mittleren Betonzugfestigkeit entspricht

$\beta_1$  = Verbundbeiwert:  $\beta_1 = 1/(2,5 \cdot k_2)$

$\beta_2$  = Beiwert zur Erfassung des Einflusses von Lastdauer oder wiederholter Belastung:

= 1,0 für die Erstbelastung

= 0,5 für die Langzeitlasten und nicht vorwiegend ruhende Belastung

Die Begrenzung der mittleren Stahldehnung in Gleichung (7-11) auf mindestens 40 % der nackten Dehnung stellt hinreichend genaue Ergebnisse auch für die Fälle sicher, in denen das abgeschlossene Ribbild nicht erreicht wird.

Die charakteristische Ribbreite errechnet sich aus der mittleren Ribbreite zu:

$$w_K = 1,7 \cdot w_m = 1,7 \cdot a_m \cdot \epsilon_{sm} \quad (7-12)$$

Diese darf den unter Punkt 5, Tabelle 5.1 festgelegten Wert nicht überschreiten.

- Ein, der CEB/FIP-Mustervorschrift entsprechender Nachweis ist auch im Entwurf für den EUROCODE 2 (1984) vorgesehen.

- Der Vorschlag von Gergely/Lutz (1968) bildet die Grundlage des ACI 318 (1983) und lautet in SI-Einheiten:

$$w = 7,61 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt[3]{\left( \bar{u}_b + \frac{d_s}{2} \right) \cdot A_{c,eff} \cdot \frac{d-x}{h-x} \cdot E_s \cdot (\sigma_s - 34,5)} \quad (mm) \quad (7-13)$$

mit:

$A_{c,eff}$  = mitwirkende Betonfläche (siehe Bild 7.5)  
=  $2 \cdot b \cdot (d-h)/m$  (mm<sup>2</sup>)

$m$  = Anzahl der Stäbe (-)

Die Autoren berücksichtigen als Wirkungszone also nur eine kleine Teilfläche des Betonquerschnitts.

- Nach Beeby (1973) kann der 95 %-Fraktilwert der Ribbreite aus folgender Gleichung bestimmt werden:

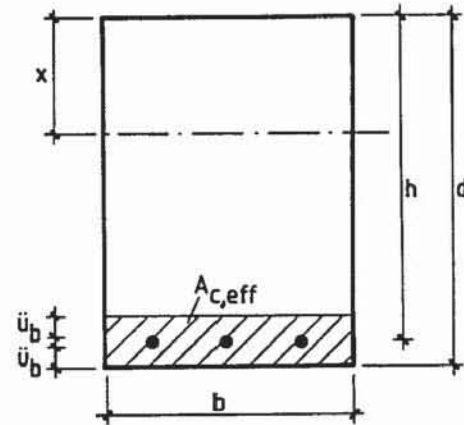


Bild 7.5: Definition der mitwirkenden Betonfläche nach Gergely/Lutz (1968)  
Definition of effective area of concrete after Gergely/Lutz (1968)

$$w = (2 \cdot \bar{u}_b + k_2 \cdot \frac{d_s}{\mu_F}) \cdot \left( \frac{\sigma_{sII}}{E_s} - \frac{k_3 \cdot A_{bz}}{A_s} \right) \quad (mm) \quad (7-14)$$

mit:

$\mu_F$  =  $A_s/A_{c,eff}$  (%)

$A_{c,eff}$  =  $2 \cdot b \cdot (d-h)$  (mm<sup>2</sup>)

$A_{bz}$  = gezogene Betonfläche

=  $b \cdot (d-x)$  (mm<sup>2</sup>)

$k_3$  =  $4,5 \cdot 10^{-6}$  für gerippte Stähle

=  $2,5 \cdot 10^{-6}$  für glatte Stähle

Der Faktor  $k_2$  ist in Abhängigkeit vom Verhältnis Betonüberdeckung zur Zugzonenhöhe Tabelle 7.4 zu entnehmen. Als Wirkungszone wird wie bei Gergely/Lutz (1968) die Betonfläche angenommen, die den Stahl direkt umgibt.

$\bar{u}_b/(d-x)$	$k_2$
0,00	30,0
0,05	14,3
0,10	8,7
0,15	6,0
0,20	4,5
0,25	3,5
0,30	2,5
0,40	1,4

Tabelle 7.4: Faktor  $k_2$  nach Beeby (1973) für reinen Zug  
Values of  $k_2$  for pure tension (after Beeby (1973))

- Martin/Schießl/Schwarzkopf (1980) kommen aufgrund theoretischer Überlegungen und statistischer Auswertungen von über 900 Versuchen zu folgendem Zusammenhang für die Berechnung des mittleren Ribabstandes:

$$a_m = 50 + \frac{1}{4} \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{d_s}{\mu_{eff}} \quad (\text{mm}) \quad [7-15]$$

mit:

$$\begin{aligned} \mu_{eff} &= A_s / (b_{eff} \cdot d_{eff}) && (-) \\ b_{eff} &= 15 \cdot n_1 \cdot d_s && (\text{mm}) \\ n_1 &= \text{Stabanzahl in der äußersten Lage} && (-) \\ d_{eff} &= \bar{u}_b + (n_L - 1) \cdot s_L + 8 \cdot d_s \leq (d-x)/2 && (\text{mm}) \\ n_L &= \text{Zahl der Lagen} && (-) \\ s_L &= \text{Lagenabstand} && (\text{mm}) \\ k_2 &= 0,5 \text{ gerippter Stahl} \\ &= 0,8 \text{ profilierter Stahl} \\ &= 1,0 \text{ glatter Stahl} \\ &\quad (\text{bei Spannstählen im Hüllrohr 1,5fache Werte}) \\ k_3 &= 0,5 \text{ reine Biegung} \\ &= 1,0 \text{ zentrischer Zug} \end{aligned}$$

Die Begrenzung von  $d_{eff}$  auf  $(d-x)/2$  berücksichtigt den Einfluß der Betondeckzone auf die Ribbildung bei geringen Bauteildicken.

Die Verfasser zeigten, daß für übliche Verhältnisse der Einfluß der Betondeckung über das Korrekturglied 50 mm hinreichend genau erfaßt wird. Die Ermittlung der Wirkungszone erfolgt ähnlich wie bei den Beziehungen nach CEB, jedoch sind die Gleichungen einfacher zu handhaben.

Für die charakteristische Ribbreite wird die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen in Anlehnung an Rao (1966) über einen Abzugswert bei der Stahlspannung berücksichtigt:

$$w_k = k_4 \cdot a_m \cdot \epsilon_{sm} \quad [7-15]$$

mit:

$$\begin{aligned} \epsilon_{sm} &= \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_5 \cdot k_6 \cdot \left( \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_s} \right)^2 \right] \\ \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_s} &= \left( \frac{\sigma_{sR}}{\sigma_s} \right)^2 \leq 0,5 \\ \sigma_{sR} &= \text{Anrißspannung} \\ &= 0,4 + 0,5 \frac{B_{bz}}{\mu_I} \quad \text{für Biegung} \\ &= \frac{B_{bz}}{\mu_I} \quad \text{für Zug} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_I &= \text{Bewehrungsgrad (auf die im Stadium I vorhandene Zugfläche bezogen)} \\ \sigma_s &= \text{betrachtete Stahlspannung im Rib} \\ k_4 &= 1,7 \text{ Streubeiwert (mit 50 \% Überschreitungswahrscheinlichkeit bei reiner Biegung)} \\ k_5 &= \text{Belastungsbeiwert} \\ &= 1,0 \text{ für Erst- und Einzelbelastung} \\ &= 0,5 \text{ für Dauerlast und häufige Lastwiederholung} \\ k_6 &= 1/2 \cdot k_2 \text{ Verbundbeiwert} \end{aligned}$$

Die Autoren konnten durch umfangreiche Vergleiche mit Versuchen und anderen Ribformeln zeigen, daß die aufgestellten Beziehungen im Mittel gute Ergebnisse liefern.

Unter Berücksichtigung der in DIN 1045, Abschn. 20.1.6.2 festgelegten maximalen Stababstände wird der in Tabelle 7.5 enthaltene Bemessungsvorschlag für Stababstände in Abhängigkeit von der Stahlspannung und der Korrosionsklasse (DIN 1045, Tabelle 10) unterbreitet.

Korrosionsklasse	Empfohlene Stababstände in cm für Stahlspannungen $\sigma_s$ ( $N/mm^2$ )			
	160	200	240	280
1 + 2	30	30	20	15
3	20	15	12	10

Tabelle 7.5: Vorschlag für maximale Stababstände in Abhängigkeit von den Korrosionsklassen nach DIN 1045 (nach Martin / Schießl / Schwarzkopf (1980))

Proposed maximum bar diameters due to condition of exposure as given by DIN 1045 (after Martin/Schießl/Schwarzkopf (1980))

Die oben beschriebenen Formeln zur Berechnung von Ribbreiten gelten prinzipiell auch für Spannbetonbauteile, wenn Belastungszustände oberhalb des Dekompressionszustandes betrachtet werden. Der Dekompressionszustand ist erreicht, wenn die am Biegezugrand durch Vorspannung aufgebrauchten Druckspannungen infolge äußerer Last zu Null werden.

Besondere Beachtung ist bei Spannbetonbauteilen dem Verbundverhalten zu schenken, da sowohl Stähle mit stark unterschiedlichen Durchmessern und bezogenen

Rippenflächen (Spannstahl-Betonstahl) als auch verschiedene Steifigkeiten zwischen Beton und Einpreßmörtel vorliegen können.

- **Trost/Cordes/Thormählen/Hagen (1980)** befassen sich speziell mit der Ribbreitenbeschränkung an teilweise vorgespannten Bauteilen. Die Autoren führen zunächst einen Abminderungsbeiwert

$$\xi = \frac{\tau_{0,1mm,v}}{\tau_{0,1mm,s}} \approx 0,2 + 6,7 \cdot f_{R,v} \leq 0,64 \quad [7-16]$$

ein, der das Verbundspannungsverhältnis zwischen der Spannbewehrung v und den Zulagen s berücksichtigt. Dieser beträgt z.B. für eine Festigkeit des Einpreßmörtels entsprechend einem B 35, einer Betonfestigkeit B 45, einem Zulagendurchmesser von 8 + 16 mm und einem Spannstahldurchmesser > 26 mm für:

$$\begin{aligned} \text{Spannglieder } \varnothing 26 \text{ glatt:} & \quad \xi = 0,20 \\ & \varnothing 26^5 \text{ gerippt:} \quad \xi = 0,64 \end{aligned}$$

Für die Ermittlung der Ribabstände und Ribweiten gehen die Autoren von den Zusammenhängen nach Rehm/Martin (1968) aus:

$$a_m = k_1 \cdot \ddot{u}_b + k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{A_{bz}}{\Sigma u_s + \xi \Sigma u_v} \quad [7-17]$$

Die kritische Ribbreite ergibt sich analog zu:

$$w_{95\%} = k_4 \cdot a_m \cdot \frac{1}{E_s} \cdot (\Delta \sigma_{sII} - \frac{k_5 \cdot B_{bz}}{\mu_z}) \quad [7-18]$$

mit:

- $\ddot{u}_b$  = Betonüberdeckung des Bewehrungsstahles
- $u_s$  = Umfang der Schlauffstähe
- $u_v$  = Umfang der Spannstähle
- $\mu_z$  = Gesamtbewehrungsgrad
- $E_s$  = Elastizitätsmodul Gesamtstahl
- $\Delta \sigma_{sII}$  = Spannungszuwachs des Gesamtstahles im Zustand II oberhalb der Dekompressionslast
- $A_{bz}$  = unter Zugspannung stehende Betonfläche
- $k_3$  = 1,0 für reine Biegung
- = 2,0 für reinen Zug (Zwischenwerte interpolieren)
- $k_2 = \frac{0,054}{0,2 + \sqrt[3]{f_{R,s}^2}}$
- $k_1$  = 2,0 für Stababstände kleiner als Wert in Tabelle 7.6
- $k_1 \cdot \ddot{u}_b$  = 2,0 · ( $\ddot{u}_b + e/10$ ) für Stababstände größer als Wert in Tabelle 7.6
- $k_5$  = 0,5 Betonmitwirkungsfaktor
- $k_4$  = 1,8 Streufaktor der Ribbreiten

Da die Gleichungen [7-17] und [7-18] für eine allgemeine Anwendung in der Praxis zu umfangreich sind, schlagen die Autoren in Anlehnung an Rehm/Martin (1968) bzw. DIN 1045 (1978) eine vereinfachende Beziehung vor, die den tatsächlichen Verlauf genähert wiedergibt.

In Analogie zur Beziehung in Abschnitt 17.6.2 der DIN 1045 (1978):

$$d_s \leq r' \cdot \frac{\mu_z}{\sigma_{sd}^2} \cdot 10^4 \quad (\text{mm})$$

geben sie folgende, nicht dimensionsreine Formel an:

$$\frac{40 A_a \text{ (cm}^2\text{)}}{\Sigma u_s + \xi \cdot \Sigma u_v \text{ (cm)}} \leq r' \cdot \frac{A_a/A_{bz}}{(\Delta \sigma_{sII})^2 \text{ (MN/m}^2\text{)}} \quad [7-19]$$

mit:

- $A_a$  = Gesamtstahlquerschnittsfläche
- $\mu_{za}$  = Gesamtbewehrungsgrad
- (für zentrischen Zug gilt  $\mu_{za} = 0,5 A_a/A_{bz}$ )

zul. Ribbreite $w_{95\%}$	0,1	0,2	0,3 mm
bei Zug	10	15	20 cm
bei Biegung mit $\Delta \sigma_{sII} = 240 \text{ N/mm}^2$	10	15	20 cm
bei Biegung mit $\Delta \sigma_{sII} = 120 \text{ N/mm}^2$	15	20	30 cm

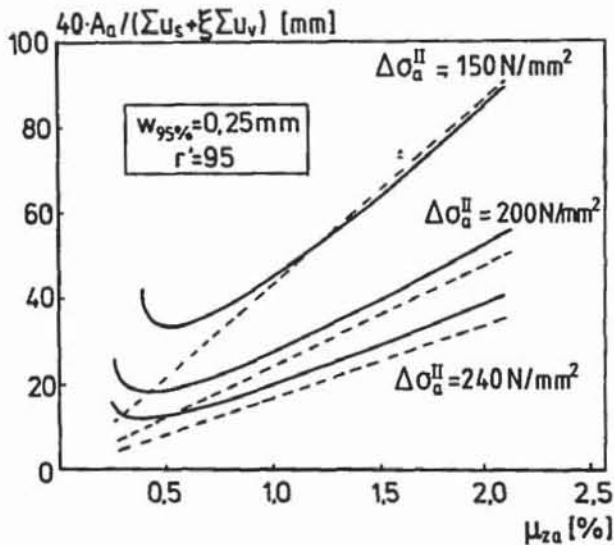
**Tabelle 7.6:** Empfohlene obere Grenze der Stababstände in cm (nach Leonhardt (1976))  
Proposed upper limit for bar spacing (cm) (after Leonhardt (1976))

Umweltbedingungen nach Din 1045, Tab. 10 Zu erwartende Ribbreite	1 normal	2 gering	3 sehr gering
Betonrippenstahl (als Einzelstab und für Betonstahlmatten)	140	95	60

**Tabelle 7.7:** Beiwerte  $r'$  zur Berücksichtigung der Verbundeigenschaften des Betonstahles bei teilweise vorgespannten Bauteilen (nach Trost et.al. (1980))  
Values of  $r'$  for taking into account the bond behaviour of reinforcing steel in partial prestressed concrete (after Trost et.al. (1980))

Die Beiwerte  $r'$  können für Betonrippenstäbe aus Tabelle 7.7 entnommen werden.

Bild 7.6 zeigt einen Vergleich zwischen dem genaueren Nachweis nach [7-17], [7-18] und der Näherungsbeziehung [7-19].



**Bild 7.6:** Theoretische ——— und angenäherte - - - - Beziehung zwischen Bewehrungsgrad und wirksamer Verbundfläche bei der Ribbreitenbeschränkung (nach Trost et.al. (1980))  
Theoretical ——— and approximately - - - - relationship between bar diameter and effective bonded area for crack control (after Trost et.al. (1980))

Die oben dargestellten Beziehungen sind Grundlage des Nachweises der Ribbreite nach DIN 4227 (1979) Teil 1 Abs.10.2:

$$d_s \leq 4 \cdot r \cdot \frac{\mu_z}{(\sigma_{zII})^2} \cdot 10^4 \quad [7-20]$$

Diese Bestimmung setzt eine profilierte oder gerippte Zulagebewehrung mit einem Höchstabstand der Betonstahlbewehrung von  $e = 20$  cm voraus.

Der Verbundbeiwert wird wie folgt angegeben:

- $r = 65$  gerippte Beton- und Spannstähle (sofortiger Verbund)
- $r = 50$  profilierte Beton- und Spannstähle, Litzen (sofortiger Verbund)
- $r = 35$  glatter Spannstahl mit sofortigem Verbund

$\mu_z$  beinhaltet den Beton- und den Spannstahl mit sofortigem Verbund. Die  $r$ -Werte entsprechen denen nach DIN 1045. Der Faktor 4 berücksichtigt die Tatsache, daß bei DIN 4227 der Spannungssprung  $\Delta\sigma$  aus den 1,35fachen äußeren Lasten berechnet wird, wogegen die  $r$ -Werte in DIN 1045 für Dauerlast  $\approx 0,7 \sigma_Q$  gelten.

Die Richtlinie zur Änderung von DIN 4227 Teil 1 (1985) beinhaltet modifizierte  $r$ -Werte in Abhängigkeit von den Umweltbedingungen nach DIN 1045 (1978). In den in Tabelle 7.8 angegebenen Beiwerten ist der Faktor 4 nach Gleichung [7-20] bereits berücksichtigt. Außerdem sind nach der Richtlinie im Nachweis zur Beschränkung der Ribbreite die Schnittgrößen bei überwiegend auf Biegung beanspruchten stabförmigen Bauteilen und Platten durch Zusatzmomente ( $\Delta M$ -Anteile) zu vergrößern. Damit sollen vorhandene Schwachstellen (z.B. Momentennullpunkte) sowie Ungenauigkeiten erfaßt werden.

Bauteile mit Umweltbedingungen nach DIN 1045 Ausgabe 12.78, Tabelle 10, Zeile(n)	1	2	3 und 4 *)
zu erwartende Ribbreite	normal	gering	sehr gering
gerippter Betonstahl und gerippte Spannstähle in sofortigem Verbund	200	150	100
profilierter Spannstahl und Litzen in sofortigem Verbund	150	110	75

\*) auch bei Bauteilen im Einflußbereich bis zu 10 m von  
- Straßen, die mit Tausalzen behandelt werden oder  
- Eisenbahnstrecken, die vorwiegend mit Dieselantrieb befahren werden.

**Tabelle 7.8:** Beiwerte  $r$  nach DIN 4227 Teil 1-Änd. Richtl. (1985)  
Values of  $r$  after DIN 4227 Teil 1-Änd. Richtl. (1985)

#### Bewertung und Kritik

Alle bisher beschriebenen Beziehungen zur Bestimmung des mittleren Ribabstandes gehen vom sogenannten "abgeschlossenen Ribbild" aus. Eine erste Voraussetzung für die Güte der Ansätze ist es, daß diese Annahme für den zu betrachtenden Fall der häufig wirkenden Lasten zutrifft. Dies ist jedoch, besonders bei geringeren Bewehrungsgraden oder bei reiner Zwangbeanspruchung, nicht immer der Fall. Allerdings ist infolge Dauerlasten oder nicht ruhender Bela-

stungen für Bauteile, die sich im Stadium der Erst-rißbildung befinden, mit einer deutlichen Zunahme der Rißanzahl zu rechnen. Zusätzliche Maßnahmen, wie die Begrenzung der mittleren Dehnungen, erlauben eine Anwendung der Gleichungen auch dann, wenn das abgeschlossene Rißbild nicht erreicht wird.

Die Anwendung statistischer Verfahren zur Ableitung von Bemessungsregeln hat den Nachteil, daß systembedingte Abweichungen nicht erkannt werden. So wird z.B. in keiner Beziehung der bekannte Einfluß einer vorhandenen Querbewehrung auf den Rißabstand berücksichtigt. Den Auswertungen liegen im allgemeinen sowohl Biege- als auch Zugversuche zugrunde. Einflüsse wie z.B. die am Biegezugrand zusätzlich vorhandene Beanspruchung aus der Biegedruckkraft aufgrund von Scheibenwirkungen werden nicht gesondert betrachtet.

Praktisch alle Formeln werden durch Vorfaktoren an bestimmte Versuche angeglichen. Sie müssen daher, unabhängig davon, ob alle Einflußgrößen richtig erfaßt sind, für ähnliche Verhältnisse gute Ergebnisse liefern. Bei anderen Parameterkonstellationen ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch meist schlechter. Allerdings ist aufgrund der für den praktischen Gebrauch notwendigen stark idealisierten Annahmen eine zu große Genauigkeit ohnehin nicht zu erwarten.

Ein von Rehm/Mallée (1981) durchgeführter Vergleich machte deutlich, daß die nach verschiedenen Autoren bestimmten Rechenergebnisse u.a. aufgrund der sehr unterschiedlichen Auffassung über die mitwirkende Betonzugfläche stark streuen. Eine Annahme über die gezogene Betonfläche kann aus folgendem Grund nur eine grobe Näherung der wirklichen Verhältnisse darstellen:

Die mitwirkende Zugfläche ist außer von der Geometrie auch von der Beanspruchungshöhe abhängig und wird vom Rißabstand selbst beeinflusst. Dies bestätigen z.B. Dehnversuche an zentrisch, mit einem Stab bewehrten Betonprismen, wie sie Rehm/Eligehausen/Mallée (1976) durchführten. Zwischen anfänglichen Trennrissen bilden sich mit zunehmender Belastung weitere Risse, die nicht über den gesamten Querschnitt verlaufen. Daraus kann gefolgert werden, daß mit kleiner werdendem Rißabstand die mitwirkende Zugfläche, entsprechend dem de Saint-Venantschen Prinzip einer Kräfteinleitung unter ca. 45°, geringer wird.

In den Bildern 7.7 und 7.8 ist der von Rehm/Mallée (1981) durchgeführte Vergleich von verschiedenen vorab beschriebenen Formeln zur Berechnung mittlerer Rißabstände dargestellt. Man erkennt, daß sowohl bei Dehnkörpern wie auch bei Biegekörpern die Beziehun-

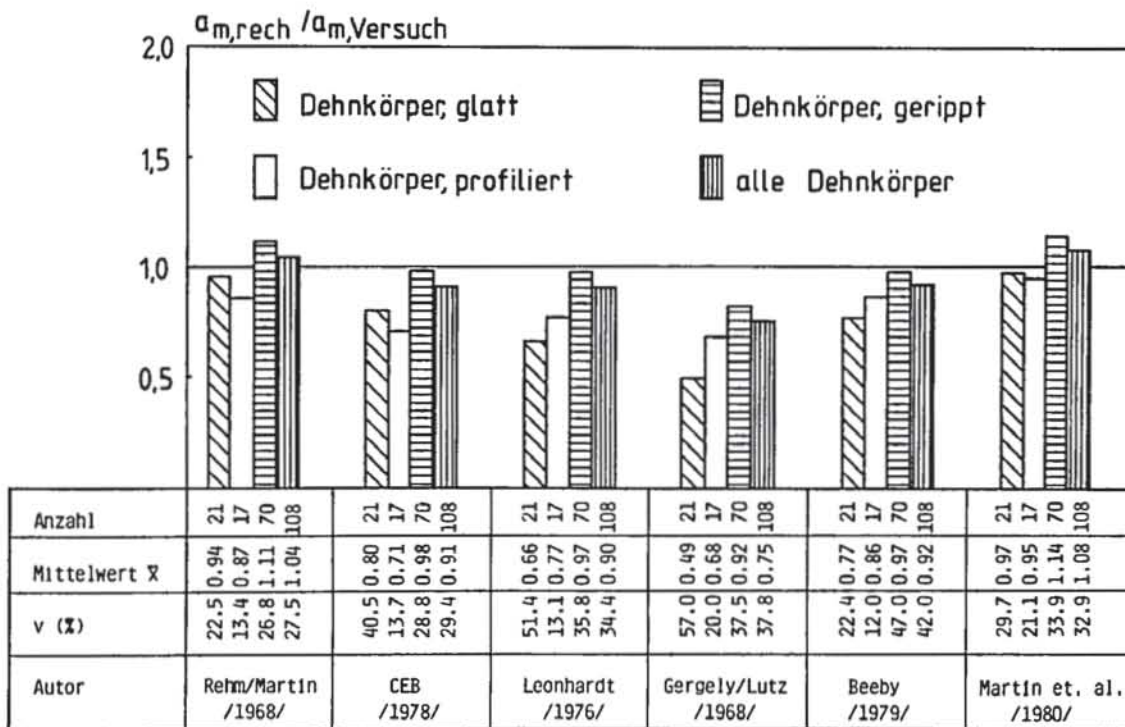
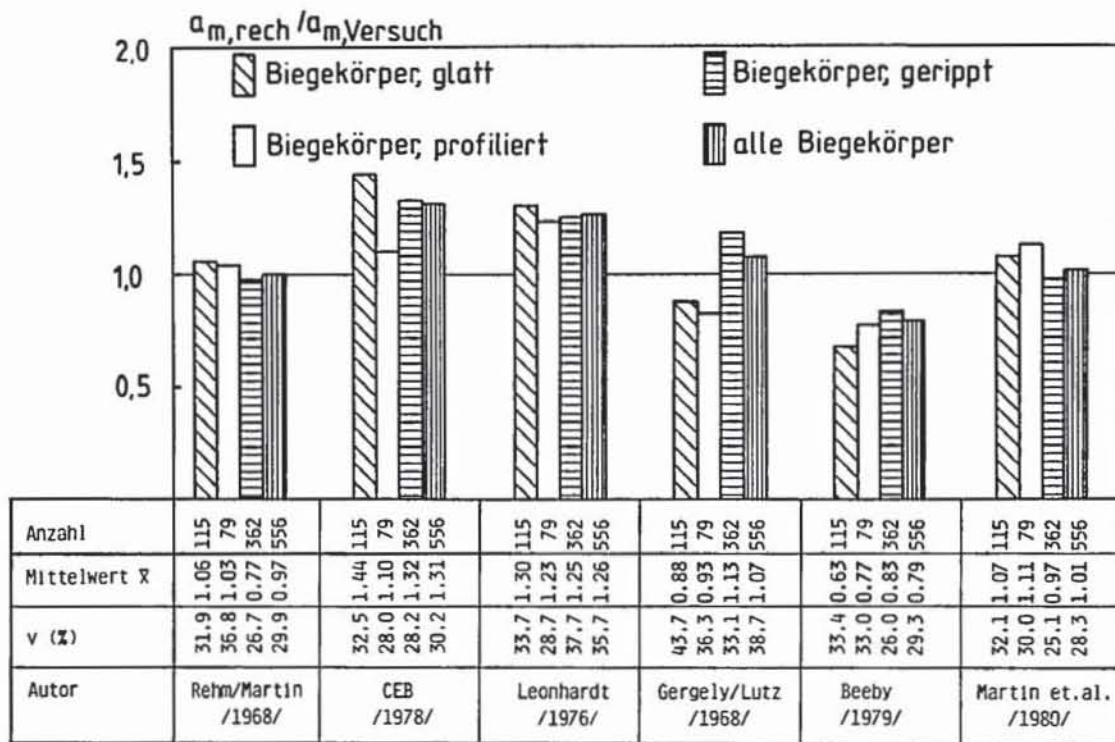
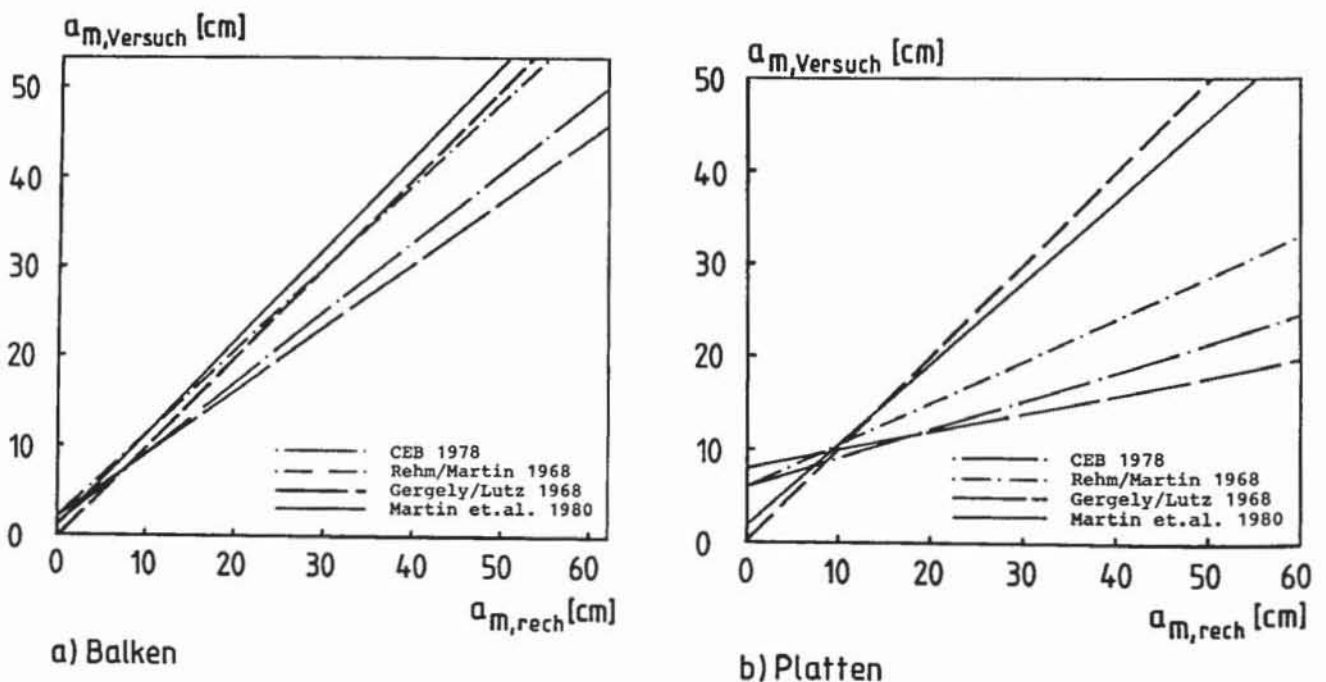


Bild 7.7: Vergleich der rechnerischen und gemessenen Rißabstände für Dehnkörper (nach Rehm/Mallée (1981))  
Comparison between calculated and experimental crack spacing for tension members (after Rehm/Mallée (1981))



**Bild 7.8:** Vergleich der rechnerischen und gemessenen Rißabstände für Biegeklrper (nach Rehm/Mallée (1981))  
Comparison between calculated and experimental crack spacing for flexural members (after Rehm/Mallée (1981))



**Bild 7.9:** Treffsicherheit von Formeln verschiedener Autoren; Vergleich der Ergebnisse einer linearen Regressionsrechnung (nach Martin et.al. (1980))  
Accuracy of formulae proposed by various investigators; Comparison of the results obtained by a linear regression analysis (after Martin et.al. (1980))



gen nach Rehm/Martin (1968) und nach Martin/Schießl/Schwarzkopf (1980) im Mittel die besten Ergebnisse liefern. Dagegen ergeben sich z.B. aus den Gleichungen nach CEB (1978) bzw. Leonhardt (1978) für Dehnkörper im Durchschnitt zu geringe und für Biegekörper zu große Rißabstände.

Martin/Schießl/Schwarzkopf (1980) überprüften die Treffsicherheit verschiedener Formeln mittels Regressionsrechnungen anhand einer großen Anzahl von Versuchen. Aus der Beziehung

$$a_{m, \text{Test}} = b_0 + b_1 \cdot a_{m, \text{cal}}$$

dem Korrelationskoeffizienten  $r$  und der Streuung  $s$  läßt sich der Grad der Übereinstimmung mit Versuchen ersehen. Im Idealfall müßte  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$  und  $r \approx 1$  sein. In den Bildern 7.9 a und 7.9 b sind die Ergebnisse der Regressionsrechnung getrennt nach Balken- und Plattenversuchen graphisch aufgetragen. Die Aussagen stimmen mit den vorab dargelegten größtenteils überein. Eine Rißformel stimmt um so besser mit der Wirklichkeit überein, je näher sie der gestrichelt unter  $45^\circ$  eingetragenen Geraden liegt. Für eine Beurteilung der dargestellten Beziehungen ist allerdings zu beachten, daß diese im Bereich  $a_m \approx 5\text{--}20$  cm mit den weitaus häufigsten Versuchsergebnissen sehr eng beieinander liegen.

### Gesamturteil

Theoretisch begründete und auf statistischer Auswertung von vielen Versuchen basierende Beziehungen zur Berechnung von Rißabständen und -breiten liefern für die meisten der in der Praxis üblichen Verhältnisse (abgeschlossenes Rißbild) ausreichend genaue Ergebnisse. Durch Zusatzbedingungen, wie z.B. die Beschränkung der Betonmitwirkung bei der Rißbreitenberechnung, ist eine Anwendung auch bei nicht abgeschlossenem Rißbild möglich.

### 7.3 Rißbildung infolge Zwangbeanspruchung

Bei Beanspruchungen aus behinderter Verformung ist, wie unter Punkt 2 erläutert, zwischen Eigen- und Zwangspannungen zu unterscheiden. Die im folgenden dargestellten Beziehungen behandeln ausschließlich Rißbildung infolge Zwangspannungen, da im allgemeinen angenommen wird, daß Eigenspannungen nur den Zeitpunkt, nicht aber den Mechanismus der Rißbildung beeinflussen. Mit dem Einfluß der Eigenspannungen befassen sich nur sehr wenige Autoren. Auf verschiedene Arbeiten sei hier kurz hingewiesen:

- Bruy (1973) ermittelte mit Hilfe der Elastizitätstheorie die maximale Rißtiefe aus Eigenspannungen zu ca.  $1/4$  der Bauteildicke. Durch Anordnung einer Bewehrung wird die Rißtiefe verringert. Nach vollständigem Temperatúrausgleich schließen sich diese Risse fast vollständig.

- Nach Rostásy/Henning (1985) setzt eine Einrißbildung erst ein, wenn die über eine repräsentative Volumeneinheit RVE gemittelte Spannung die Betonzugfestigkeit erreicht. In Abhängigkeit von der ermittelten Anrißtiefe wählen die Autoren zur Bestimmung einer Mindestbewehrung einen verringerten Betonquerschnitt ( $1,0 A_b$  bei Wanddicken  $\leq 50$  cm bis  $0,85 A_b$  bei Wanddicken  $\geq 100$  cm).

- Jungwirth (1985) schlägt vor, im Falle von Anrissen die Zwangskraft auf die gesamte Betonzugfläche zu beziehen und fallweise angepaßte Betonzugfestigkeiten zu wählen.

Durch Anrißbildung verringert sich der für den Zwang maßgebende Betonquerschnitt. Auf der sicheren Seite liegend können Eigenspannungen daher für die Ermittlung einer Zwangbewehrung vernachlässigt werden.

Die im folgenden angegebenen Gleichungen besitzen nur für Bauteile Gültigkeit, die durch Stabwerke mit punktförmiger Verformungsbehinderung abgebildet werden können. Fälle mit linien- bzw. flächenförmiger Verformungsbehinderung wie z.B. der Anschluß von Wänden an Fundamente oder Platten auf steifem Untergrund werden damit nicht erfaßt.

- In einer grundlegenden Arbeit befaßt sich Falkner (1969) sowohl theoretisch als auch experimentell mit der Rißbildung in Stahlbetonbauteilen infolge Eigen- und Zwängungsspannungen aus Temperaturbeanspruchung.

Anhand von 7 Dehnkörperversuchen, in denen 6 m lange Stahlbetonprismen ( $b/d = 35/17$  cm) von  $80^\circ$  auf  $20^\circ$  abkühlt werden, kann Falkner zeigen, daß die bei natürlichen wie auch bei künstlichen Temperaturwechseln eingepprägten Verformungen zu gering sind, um das abgeschlossene Rißbild zu erzeugen. Darauf aufbauend leitet er empirische Formeln für den Nachweis der Beschränkung der Rißbreite bei zentrischem Zwang infolge Temperaturbeanspruchung ab. Diese unterscheiden sich nur in der Größe der konstanten Faktoren von den Beziehungen nach Rehm/Martin (1968). Als Bezugsgröße wird der mittlere rechnerische Rißabstand zu

$$a_m = 4 + 0,125 \cdot \frac{d_s}{\mu} \quad (\text{cm}) \quad (7-21)$$

angesetzt und für die Berechnung der mittleren Rißbreite die Formel nach CEB gewählt:

$$w_m = \frac{\sigma_{sII} \cdot k_4}{E_s} \cdot \left(1 - \frac{k_4}{\beta_Z}\right) \quad (\text{cm}) \quad (7-22)$$

mit:

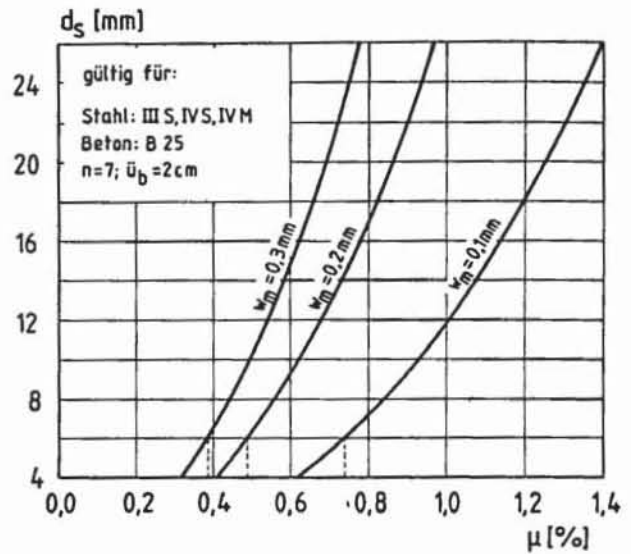
- $k_4 = 1,0 \text{ N/mm}^2$
- $\sigma_{sII} = \text{Stahlspannung im Ri\ss}$
- $\beta_Z = \text{mittlere Betonzugfestigkeit}$

Eine Schwächung des Querschnitts infolge Eigenspannungen konnte nicht festgestellt werden. Diese lösten jedoch die Rißbildung früher aus und führten zu einer zeitlichen Verschiebung des Auftretens der maximalen Zwängungskräfte.

Die Streuung der Rißbreiten eines Versuchskörpers war mit max.  $\pm 20\%$  erstaunlich gering, sie ist jedoch, zumindest teilweise, mit der großen Sorgfalt bei Herstellung und Nachbehandlung von Versuchskörpern zu erklären.

Aufgrund der Versuchsergebnisse arbeitete Falkner den in Bild 7.10 dargestellten Bemessungsvorschlag aus.

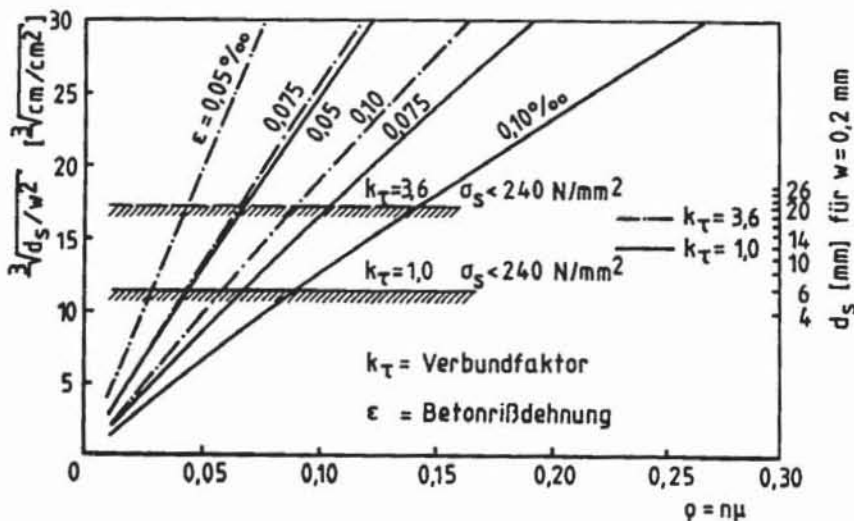
Eine Anwendung dieses empirisch abgeleiteten Bemessungsdiagramms für andere Parameterkonstellationen, z.B. Biegebeanspruchung oder andere Betonfestigkeit, ist nicht möglich.



**Bild 7.10:** Rißbreite in Abhängigkeit von Bewehrungsgehalt und Stabdurchmesser bei zentrischem Zwang (nach Falkner (1969))  
Crack width dependent on percentage of reinforcement and bar diameter due to axial restraint (after Falkner (1969))

- Eibl (1969) geht bei seinen theoretischen Ableitungen zur Zwängung und Rißbildung von Stahlbetonstäben davon aus, daß die Verbundspannung allein abhängig von der Lage zum Riß sei:

$$\tau = k_\tau \cdot \xi \quad (7-23)$$



**Bild 7.11:** Maximale Stabdurchmesser für Rißbreiten  $w = 0,2 \text{ mm}$  in Abhängigkeit vom mechanischen Bewehrungsgrad (nach Eibl (1969))  
Maximum bar diameters for crack control  $w = 0,2 \text{ mm}$  dependent on mechanical reinforcement ratio (after Eibl (1969))

mit:

- $k$  = konstanter Faktor (aus Versuchen ermittelt)
- $\xi$  = Entfernungskordinate zum RiB
- = 0 am Ende der Eintragungslänge

Mit den unter Punkt 4.2 angegebenen allgemeinen Gleichungen formuliert er für reinen Zug und mittlere Betonzugfestigkeit eine Beziehung zur Bestimmung des maximalen Stabdurchmessers bei gegebener RiBweite. Dabei wird der Zustand der Erstrißbildung angenommen, d.h. RiB einflußbereiche überschneiden sich nicht. In Bild 7.11 sind Grenztabdurchmesser für eine maximale RiBbreite von  $w = 0,2$  mm in Abhängigkeit vom mechanischen Bewehrungsgrad dargestellt.

Daraus erhält man z.B. für Stahl III, Beton B 30, einem Bewehrungsgrad  $\rho = 1,0\%$  sowie dem nach Versuchen von Rehm zu  $k_t = 1,0$  gesetztem Verbundbeiwert einen maximal zulässigen Stabdurchmesser von 6 mm.

Dagegen erlauben die Ergebnisse nach Falkner, nach denen der Verbundbeiwert  $k_t$  zu 3,6 gesetzt werden muß, einen Durchmesser von 26 mm! Eibl konnte im Rahmen seiner Untersuchung nicht klären, welcher der

beiden empirisch ermittelten  $k$ -Werte der "richtige" ist.

Aus heutiger Sicht ist festzustellen, daß der Verbundbeiwert  $k$  keine Konstante ist, sondern eine von einer Reihe von Parametern beeinflusste Funktion. Daher liefert das Diagramm für Fälle mit von den Eichversuchen abweichenden Einflußgrößen keine hinreichend genauen Ergebnisse.

- Rostásy/Koch/Leonhardt (1975) führen an Leichtbetonbalken ähnliche Untersuchungen wie Falkner durch. Sie berücksichtigen auch den Fall der einseitigen Abkühlung. Für die Verwendung eines Leichtbetons LB 10 bis LB 15 ermitteln sie den stabilisierten RiBabstand für Biegung und Normalkraft zu:

$$a_m = 4,5 + 0,0215 \cdot \frac{d_s}{\mu} \quad (\text{cm}) \quad [7-24]$$

Für die mittlere RiBweite wird folgende Gleichung angegeben:

$$w_m = a_m \cdot \frac{1}{E_s} \cdot (\sigma_{sII} - \frac{k_4}{\mu}) \quad (\text{cm}) \quad [7-25]$$

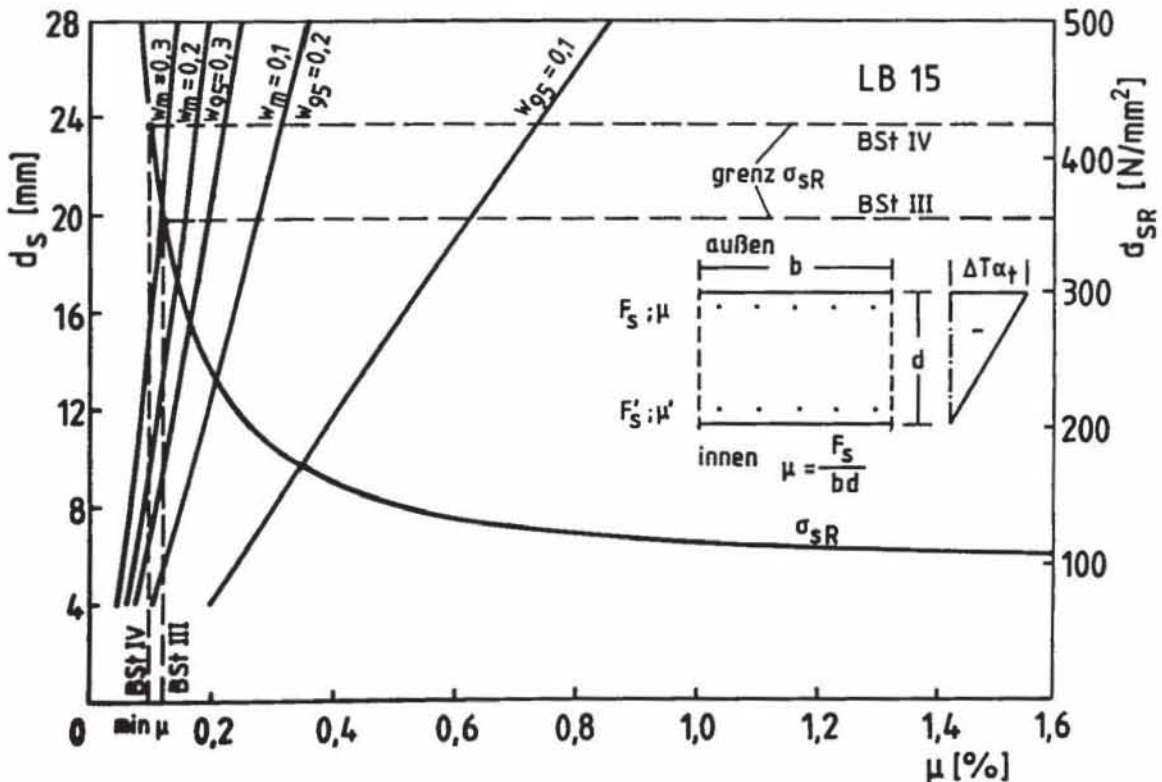


Bild 7.12: RiBbreiten  $w_m$  und  $w_{95\%}$  in Abhängigkeit von  $d_s$  und  $\mu$  bei Temperaturzwang infolge einseitiger Abkühlung bei LB 15 (nach Rostásy/Koch/Leonhardt (1975))

Crack width  $w_m$  and  $w_{95\%}$  dependent on bar diameter  $d_s$  and percentage of reinforcement  $\mu$  for restraint due to linear temperature distribution for lightweight concrete LB 15 (after Rostásy/Koch/Leonhardt (1975))

mit:

- $\sigma_{sII}$  = Stahlspannung im RiB
- $k_4$  = 0,20 N/mm<sup>2</sup> für LB 10
- = 0,25 N/mm<sup>2</sup> für LB 15
- $\mu$  = Bewehrungsgrad eines Bewehrungsstranges

Die im Vergleich zu Normalbeton geringeren mittleren RiBabstände werden mit der kleineren Zugfestigkeit des LB begründet. Daher ist zur Einhaltung einer Grenzißweite auch weniger Bewehrung nötig als bei Normalbeton. Bild 7.12 zeigt ein Bemessungsdiagramm für LB 15. Bei vorgegebener Rißweite  $w_m$  (oder  $w_{95\%}$ ) kann für einen ausgewählten Stabdurchmesser der zugehörige Bewehrungsgrad und die Stahlspannung im RiB abgelesen werden. Auch hier ist eine allgemeine Anwendbarkeit aufgrund der empirischen Ableitung nicht möglich.

- Schießl (1976) befaßt sich mit der Beschränkung der Rißbreiten bei reiner Zwangbeanspruchung. Für diesen Fall leitet er auf der Grundlage der Gesetze des verschieblichen Verbundes Beziehungen für die Rißbreitenberechnung ab. Schießl zeigt, daß die in Versuchen feststellbare Streuung der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung auf die Länge des gestörten Bereiches größeren Einfluß hat (bis zu 25 % Unterschied) als auf die Rißbreite selbst, bei der nur Unterschiede bis ca. 10 % auftreten. Die mittlere Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung bestimmt er zu:

$$\tau/B_w = 0,055 + 1,1 \cdot s^{0,45} \quad (7-26)$$

Der Unterschied zwischen zentrischem und Biegezwang besteht nach Schießl in der Ermittlung der Stahlspannung im RiB  $\sigma_{sII}$  und in der Höhe der anzusetzenden Betonzugfestigkeit. Unterschiedliche Werte der Zugfestigkeit für zentrischen Zug und Biegezug werden nach Heilmann (1969) gewählt. Die Umwandlung der unter Punkt 4 beschriebenen Gleichungen in Differenzenbeziehungen ermöglicht, unter Vernachlässigung der Betondehnungen, eine iterative Berechnung von Rißbreiten. Da die Auswertung der Beziehungen den Einsatz eines Computers erfordert, arbeitet Schießl für reine Zwangbeanspruchung infolge Temperatur und Schwinden einen Vorschlag für Bemessungsdiagramme aus. Die Betondruckfestigkeit wird aufgrund des geringen Einflusses nicht berücksichtigt und den Überlegungen daher ein B 35 zugrunde gelegt.

Die in Bild 7.13 dargestellten Kurven für reinen Biegezwang gelten für Bauteildicken  $\geq 25$  cm mit symmetrischer Bewehrung. Für Bauteile mit geringerer Dicke müssen aufgrund der mit der Dicke veränderlichen Betonbiegezugfestigkeit die Bewehrungsgrade er-

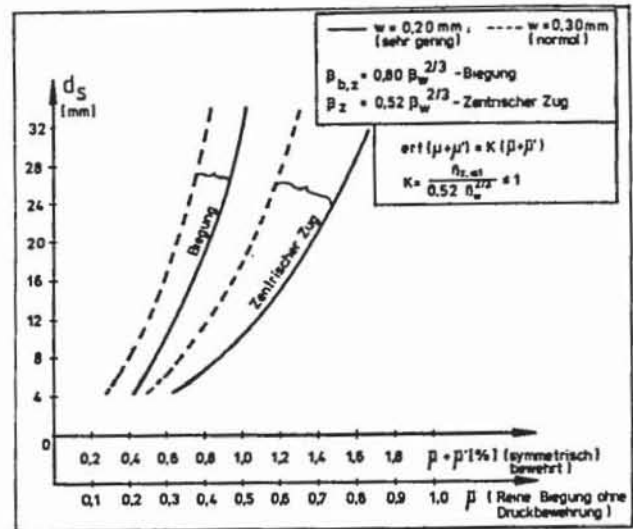


Bild 7.13: Vorschlag für Bemessungsdiagramme für reine Zwangbeanspruchung aus Temperatur und Schwinden (Rippenstahl) (nach Schießl (1976))

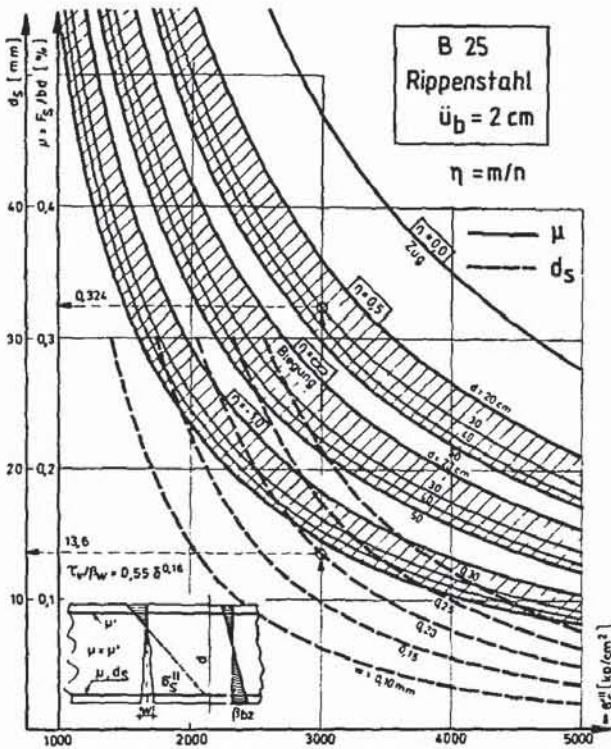
Proposed design graph for restraint due to temperature and shrinkage (deformed bars) (after Schießl (1976))

höht werden (bis 15 % für 10 cm dicke Bauteile). Diese von Schießl abgeleiteten Beziehungen enthalten, wenn zum Teil auch in vereinfachter Form, alle wesentlichen Einflußparameter für die Erstrißbildung.

- Noakowski (1978) untersucht ebenfalls das Verhalten von Stahlbetonbauteilen bei Zwangbeanspruchung infolge Temperatur. Dabei wird sowohl zentrischer wie auch Biegezwang erfaßt. Im Ansatz der Betonzugfestigkeit werden Einflußgrößen wie Bauteildicke und exzentrische Belastung berücksichtigt. Die Streuung der Zugfestigkeit entlang der Bauteilachse wird allerdings nicht beachtet. Das Verbundgesetz baut auf den Ansatz von Martin (1975) auf und enthält den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Schlupf und Verbundspannung. Die Formeln werden für den Fall der Erstrißbildung abgeleitet.

Bild 7.14 zeigt ein von Noakowski aufgestelltes Bemessungsdiagramm. Als Beanspruchung ist eine beliebige Kombination aus zentrischem und Biegezwang möglich. Daraus kann für bestimmte Stahlspannungen im RiB und zulässige Rißbreiten zwischen 0,1 und 0,3 mm der Bewehrungsgrad und der maximale Stabdurchmesser abgelesen werden.

In späteren Arbeiten erweitert Noakowski die Beziehungen auf eine "kontinuierliche Rißtheorie". Diese



**Bild 7.14:** Bemessungsdiagramm für B 25 zur Bestimmung des erforderlichen Bewehrungsgrades  $\mu$  bzw. Stabdurchmessers  $d_s$  für Zwangbeanspruchung (nach Noakowski (1978))  
 Design graph for B 25 for the determination of the required degree of reinforcement and required bar diameter  $d_s$  due to imposed deformation (after Noakowski (1987))

Betrachtungsweise behandelt Punkt 8. An dieser Stelle wird deshalb auf eine Darstellung verzichtet.

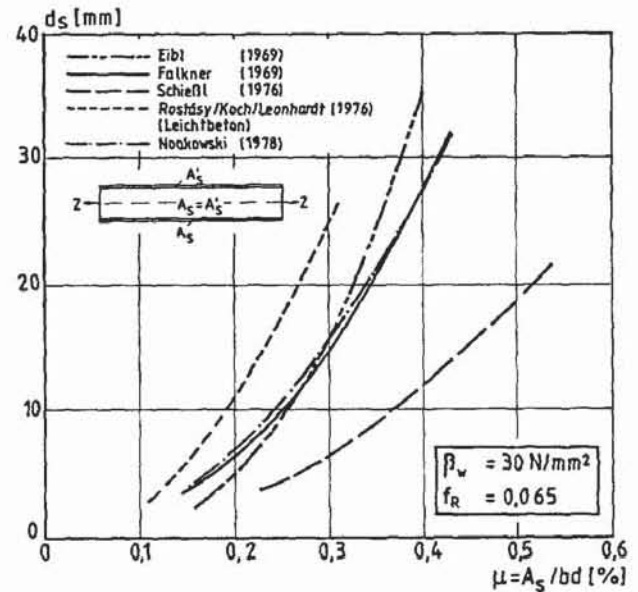
**Zusammenfassung und Bewertung**

Die bisher vorliegenden sehr wenigen experimentellen Arbeiten zur Ribbildung infolge reiner Zwangbeanspruchung zeigten, daß hier üblicherweise das Stadium der Erstrißbildung mit i.a. weit auseinanderliegenden Einzelrissen vorliegt. Ribtheorien, die ein abgeschlossenes Ribbild zugrunde legen, ermitteln deshalb für Zwangbelastung zu kleine Ribabständen und unterschätzen damit möglicherweise die auftretenden Ribbreiten (sofern nicht zusätzliche Bedingungen eingehalten werden, s. Abschnitt 7.2).

Empirisch aufgestellte Bemessungsdiagramme besitzen den Nachteil, daß sie nur für ähnliche Randbedingungen, wie sie in den zugrundeliegenden Versuchen vorhanden waren, zutreffende Ergebnisse liefern. Die

von Schiebl bzw. Noakowski auf theoretischem Wege abgeleiteten Beziehungen beinhalten alle wesentlichen Parameter für die Erstrißbildung. Allerdings wird auch hier von mehr oder weniger idealisierten Annahmen ausgegangen.

In Bild 7.15 ist exemplarisch der Zusammenhang zwischen Stabdurchmesser und Bewehrungsgrad (nur ein Bewehrungsstrang!) bei zentrischem Zwang, Betonfestigkeit  $\beta_w = 30 \text{ N/mm}^2$  und einer Ribbreite von 0,3 mm für verschiedene Beziehungen ausgewertet. Der Verlauf der Linien wurde von Noakowski (1978) übernommen.



**Bild 7.15:** Beziehung zwischen Stabdurchmesser und Bewehrungsgrad für zentrischen Zwang nach verschiedenen Autoren,  $\beta_w = 30 \text{ N/mm}^2$  und  $w = 0,3 \text{ mm}$   
 Relations between bar diameter and percentage of reinforcement for axial restraint after various investigators,  $\beta_w = 30 \text{ N/mm}^2$  and  $w = 0,3 \text{ mm}$

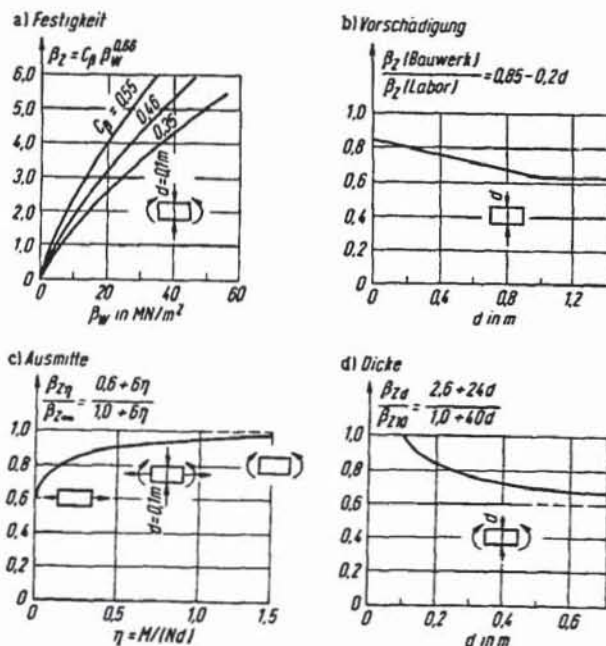
Man erkennt, daß die von Noakowski aufgestellte Gleichung, allerdings unter Zugrundelegung des von Falkner angegebenen Verbundgesetzes, die empirisch abgeleitete Beziehung von Falkner sehr gut annähert. Die Linie nach Eibl weicht in allen Bereichen mehr oder weniger stark von diesen Beziehungen ab. Nach Rostásy/Koch/Leonhardt sind, möglicherweise wegen der höheren Verbundsteifigkeit des verwendeten Leichtbetons, größere Stabdurchmesser zulässig. Die Formel von Schiebl liefert, aufgrund der dort angenommenen wesentlich geringeren Verbundsteifigkeit,

deutlich niedrigere Durchmesser. Ein notwendiger Vergleich zu jeweils fremden Versuchen ist wegen der bisher vorhandenen geringen Anzahl von experimentellen Ergebnissen nicht möglich.

Die Zuordnung Zwangbeanspruchung - Erstrißbildung, Lastbeanspruchung - abgeschlossenes Ribbild ist zwar in vielen Fällen zutreffend, erfaßt jedoch nur die beiden Grenzzustände. In neueren Arbeiten wird daher versucht, eine Verknüpfung dieser beiden Ribentwicklungsstadien herzustellen.

## 8 Neuere Betrachtungsweisen - kontinuierliche Ribtheorien

Wie unter Punkt 7.2 bzw. 7.3 dargelegt, gingen bisherige Ribtheorien je nach Art der Beanspruchung von einem bestimmten Ribbild aus. Naturgemäß können diese Theorien nur hinreichend genaue Ergebnisse liefern, wenn sich unter einer gegebenen Last, bzw. bei bekannten sonstigen Einflußgrößen ein entsprechendes Ribbild einstellt. Dies ist nicht immer der Fall, wie z.B. Untersuchungen mit geringen Bewehrungsgraden erkennen lassen.



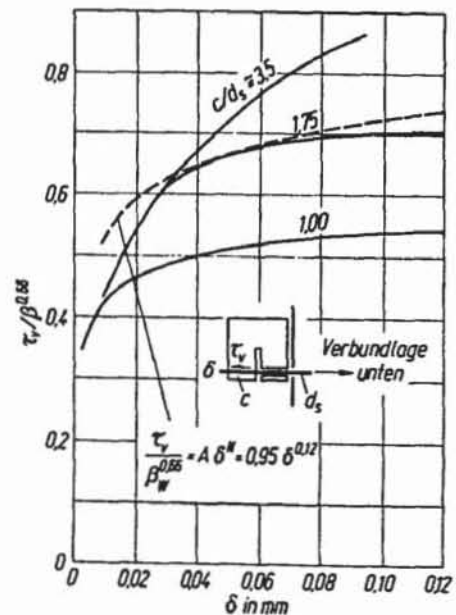
**Bild 8.1:** Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons (aus verschiedenen Veröffentlichungen zusammengestellt von Noakowski (1985))  
Influence of various parameters on tensile strength of concrete (chosen from different publications by Noakowski (1985))

In neueren Arbeiten zur Ribbildung wird daher versucht, den gesamten Ribbildungsprozeß vom Erstriß bis zum abgeschlossenen Ribbild zu erfassen. Eine Trennung der Betrachtungen für Last und Zwang ist dann nicht mehr notwendig.

- Während sich Noakowski (1970) zunächst nur mit der Bewehrung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangbeanspruchung infolge Temperatur und dementsprechend mit der Einzelribbildung beschäftigt, erweitert er seine Ansätze (1982) und (1985) auf eine kontinuierliche Theorie zur Erfassung der Ribbildung.

Auf der Grundlage von wirklichkeitsnahen Materialgesetzen für Betonzugfestigkeit und Verbund wird für das Stadium der Erstrißbildung die Ribbezugslänge (siehe Abschnitt 4.2) bestimmt. Die Verknüpfung mit dem abgeschlossenen Ribbild erfolgt über einen sog. Ribentwicklungsfaktor.

Von wesentlicher Bedeutung für die Höhe der Riblast ist die Kenntnis der vorhandenen Betonzugfestigkeit. Noakowski faßt die Ergebnisse verschiedener Veröffentlichungen zusammen und stellt eine Beziehung zur Bestimmung des Mittelwerts der Betonzugfestig-



**Bild 8.2:** Verbundgesetze für Rippenstäbe für verschiedene bezogene Betondeckungen nach Janovic (1979) (entnommen aus Noakowski (1985))  
Local bond stress-slip relationship for deformed bars and different related covers after Janovic (1979) (taken from Noakowski (1985))

keit auf, die neben der Abhängigkeit von der Würfel-druckfestigkeit auch Einflüsse wie Bauteildicke, Vorschädigung sowie Spannungsgradienten enthält (siehe Bild 8.1).

Der Ansatz für den Verlauf der Verbundspannungs-Schlupfbeziehung wird in Anlehnung an Auszieh-Versuche mit exzentrisch liegenden Stäben von Janovic (1979) zu

$$\tau_v = B_w^{0,66} A \delta^N \quad [8-1]$$

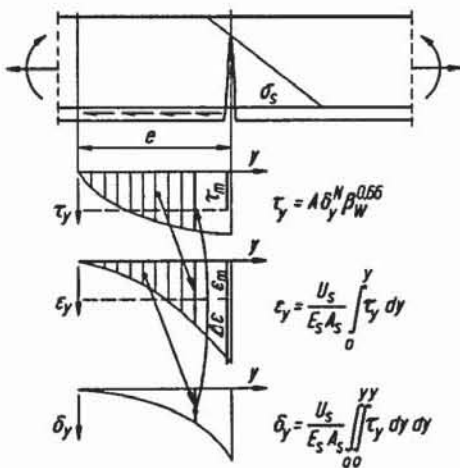
mit:

- $\delta$  = Schlupf
- A, N = Werkstoffkennwerte
- A = 0,95 für Rippenstähle und
- N = 0,12 "mittlere Verhältnisse"

gewählt (siehe Bild 8.2).

Die Zusammenhänge bei der Erstrißbildung sind in Bild 8.3 für ein Grundlelement mit der Länge  $e$  ( $=l_e$ ) entsprechend dem Bereich mit Verschiebungen zwischen Beton und Stahl verdeutlicht.

Ist das Beanspruchungs- und Verformungsverhalten des Grundlementes in Bild 8.3 bekannt, kann daraus auf das Verhalten des Gesamtstabes geschlossen werden. Zur Vereinfachung vernachlässigen die in Bild 8.3 angegebenen Beziehungen die Betondehnungen und die



**Bild 8.3:** Rechnerische Erfassung des Verbundes unter Vernachlässigung der geringen Reststahlspannungen am Ende der Riß-Einzugslänge (nach Noakowski (1985))

Analytical model for consideration of bond behavior, neglecting low steel stresses acting at the distance  $e$  from the crack (after Noakowski (1985))

Reststahlspannung am Ende der Eintragungslänge. Unter Verwendung des in Bild 8.2 angegebenen mittleren Verbundgesetzes berechnet Noakowski die mittlere Verbundspannungen  $\tau_m$  zu:

$$\tau_m = 0,164 \cdot (B_w^{0,66} \cdot d_s^{0,12} \cdot \sigma_s^{0,24})^{0,89} \quad [8-2]$$

Für die mittlere Stahldehnung erhält er die einfache

Beziehung:

$$\epsilon_m = \epsilon_s - \Delta\epsilon = 0,44 \cdot \epsilon_s \quad [8-3]$$

mit:

$$\Delta\epsilon = \frac{1+N}{2} \epsilon_s = 0,56 \cdot \epsilon_s$$

Die einzige, die Völligkeit des Stahldehnungsverlaufs beeinflussende Größe ist der Exponent N des zugrunde liegenden Verbundgesetzes. Dieser wurde hier entsprechend Bild 8.2 zu 0,12 gesetzt.

Für den Erstrißzustand, der sich infolge Zwangbeanspruchung einstellt, ergibt sich die Rißeinzugslänge  $a_1 = 2 \cdot l_e$  (siehe Bild 8.4) mit Hilfe der Beziehung für die mittlere Verbundspannung anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung:

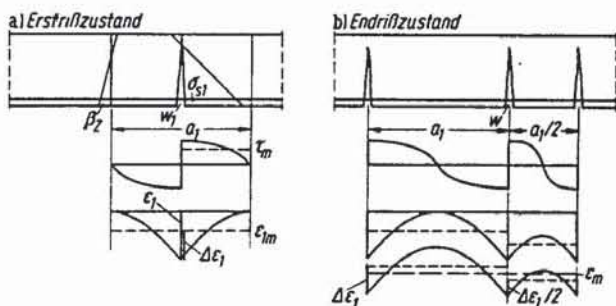
$$\sigma_{s1} \cdot A_s = \tau_m \cdot U_s \cdot a_1 / 2 \quad [8-4]$$

Für die Stahlspannung im Riß werden vereinfacht folgende Werte angenommen:

reine Biegung  $\sigma_{s1} = 0,22 \frac{B_z}{\mu}$

reiner Zug  $\sigma_{s1} = 0,50 \frac{B_z}{\mu}$

( $\mu$  bezogen auf  $d/2$ )



**Bild 8.4:** Grundlagen der Erstriß- und der Endrißtheorie (nach Noakowski (1985))

Principles for the theories of first cracking and stabilised stage of cracking respectively (after Noakowski (1985))

wobei für  $B_Z$  die Betonzugfestigkeit nach Bild 8.1 einzusetzen ist und der Bewehrungsgrad  $\mu$  für nur einen Bewehrungsstrang gilt (für reinen Zug wird eine symmetrische Bewehrung mit zwei Strängen vorausgesetzt). Mit der oben angegebenen Beziehung für  $\tau_m$  und  $\epsilon_m$  bestimmt sich die Ribbeinzugslänge zu:

$$a_1 = 3,1 \cdot \left( \frac{\sigma_{s1}}{\beta_w} \cdot d_s \right)^{0,88} \quad (8-5)$$

und die Erstrißbreite zu:

$$w_1 = a_1 \cdot \epsilon_{1m} = 3,1 \cdot \left( \frac{\sigma_{s1}}{\beta_w} \cdot d_s \right)^{0,88} \cdot \frac{0,44 \cdot \sigma_{s1}}{E_s} \quad (8-6)$$

Der stabile Endrißabstand, der infolge ausgeprägter Lastbeanspruchung zustande kommt, entwickelt sich aus dem Erstrißzustand (Bild 8.4b). Nach Noakowski ist der kleinstmögliche Ribabstand gleich der halben Einzugslänge im Erstrißzustand und der maßgebende mittlere Endrißabstand beträgt:

$$a = C_E \cdot a_1 = 0,75 \cdot a_1 \quad (8-7)$$

$C_E = 0,75$  = Ribentwicklungsfaktor

In gleichem Maße entwickelt sich die mittlere Dehnung und die Ribbreite berechnet sich zu:

$$w = a \cdot \epsilon_m = 0,75 \cdot 3,1 \cdot \left( \frac{\sigma_{s1}}{\beta_w} \cdot d_s \right)^{0,88} \cdot \frac{\sigma_s - 0,75 \cdot 0,56 \cdot \sigma_{s1}}{E_s} \quad (8-8)$$

Den Streubeiwert zwischen mittlerer und charakteristischer Ribbreite (95 % - Fraktile) gibt Noakowski mit  $\tau_w = 1,5$  an. Der Ribentwicklungsfaktor  $C_E$  stellt den Zusammenhang zwischen den beiden vorgenannten Ribstadien her:

$$w_k = \tau_w \cdot a \cdot \epsilon_m = \tau_w \cdot C_E \cdot 3,1 \cdot \left( \frac{\sigma_{s1}}{\beta_w} \cdot d_s \right)^{0,88} \cdot \frac{\sigma_s - C_E \cdot 0,56 \cdot \sigma_{s1}}{E_s} \quad (8-9)$$

mit:

$\tau_w = 1,5$  Streubeiwert

$C_E = 1,0$  Rib-Entwicklungsfaktor im Erstrißzustand bei Zwang  $\sigma_s = \sigma_{s1}$

$C_E = 0,75$  Rib-Entwicklungsfaktor im Endrißzustand bei Last  $\sigma_s > \sigma_{s1}$

$\sigma_{s1} = 0,22 \cdot B_Z / \mu$  Ribspannung bei reiner Biegung in (MN/m<sup>2</sup>)

$\sigma_{s1} = 0,50 \cdot B_Z / \mu$  Ribspannung bei reinem Zug in (MN/m<sup>2</sup>)

$\sigma_s$  = Stahlspannung im Gebrauchszustand in (MN/m<sup>2</sup>)

$B_W = B_{WN} + 5$  mittlere Würfeldruckfestigkeit in (MN/m<sup>2</sup>)

$B_Z$  = Betonzugfestigkeit gemäß Bild 8.1 in (MN/m<sup>2</sup>)

$\mu = A_s / A_b$  Bewehrungsgrad eines Bewehrungsstranges

$d_s$  = Stabdurchmesser in (mm)

$E_s = 210\,000$  (MN/m<sup>2</sup>)

Es ist anzumerken, daß diese von Noakowski (1985) als kontinuierliche Theorie bezeichnete Beziehung eigentlich nur zwei Grenzfälle der Ribbildung beinhaltet. Kurz nach Überschreiten der Erstrißlast stellt sich sofort das abgeschlossene Ribbild ein. Die Streuung der Betonzugfestigkeit entlang der Bauteilachse wird nicht berücksichtigt. In der Ableitung von (1982) gibt Noakowski den Übergang vom Erstriß zum Endrißabstand mit

$$a = \left[ 0,75 + 0,25 \cdot \left( \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_s} \right)^3 \right] \cdot a_1 \quad (8-10)$$

an und begründet die Wahl einer Parabel 3. Grades mit der besten Anpassung an Versuchsergebnisse. Die vorliegende Arbeit muß daher als teilweise empirische Beziehung betrachtet werden. Es müßte weiterhin kontrolliert werden, inwieweit obige Beziehungen, die bei Lastbeanspruchung vom abgeschlossenen Ribbild ausgehen, auch für niedrige Bewehrungsgrade hinreichend genaue Ergebnisse liefern.

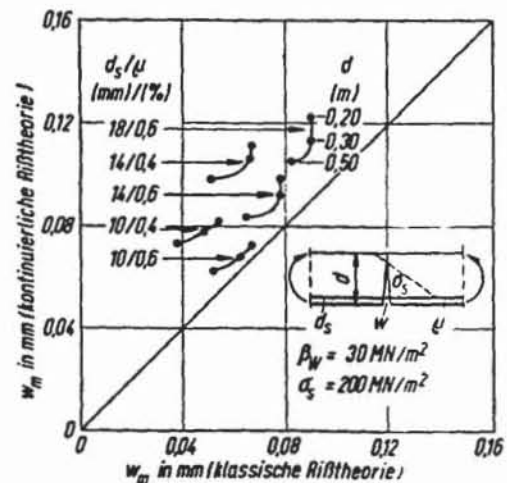
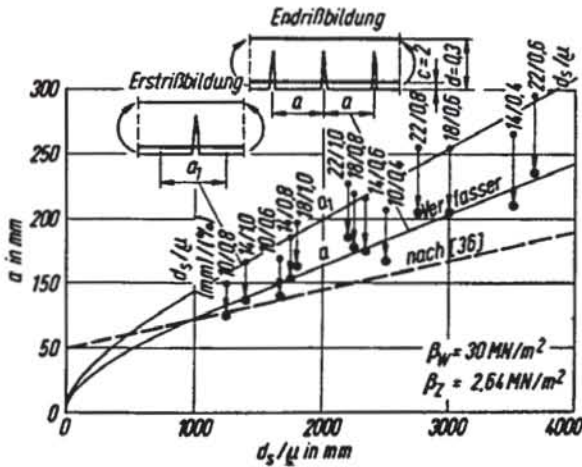


Bild 8.5: Vergleich der kontinuierlichen Ribtheorie mit der klassischen Ribtheorie (Martin/Schiebl/Schwarzkopf (1980)) bezüglich der Ribbreite (nach Noakowski (1985))

Comparison of the results for crack width calculated by the continuous theory and the classical theory proposed by Martin/Schiebl/Schwarzkopf (1980) (after Noakowski (1985))



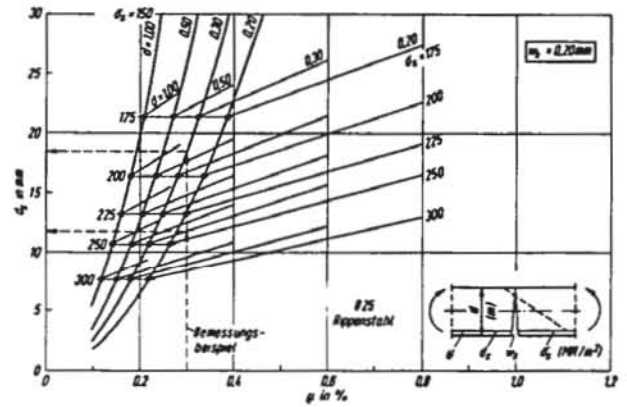
Die Bilder 8.5 und 8.6 zeigen einen Vergleich zwischen den von Noakowski ermittelten Ribabständen und -breiten und den Ergebnissen nach Martin/Schiebl/Schwarzkopf. Zwei durch einen Pfeil verbundene Punkte stellen den Übergang von der Erst- zur Endribbildung dar. Während für übliche Kombinationen von Stabdurchmesser und Bewehrungsgrad gute Übereinstimmung vorliegt, ergeben sich nach Noakowski für geringe Bewehrungsgrade größere Ribbreiten und -abstände. Aufgrund der Erfassung des Erstrißzustandes wäre für die "kontinuierliche Ribtheorie" eine gute Annäherung an das tatsächlichen Bauteilverhalten zu erwarten. Neuere, von Schiebl/Wölfel (1986) angestellte Vergleichsrechnungen zwischen Gleichung [8-9] und einer modifizierten Ribformel nach der CEB/FIP-Mustervorschrift (1978) zeigten jedoch eine deutlich schlechtere Übereinstimmung der von Noakowski vorgeschlagenen Beziehung mit Versuchsergebnissen.



**Bild 8.6:** Vergleich der kontinuierlichen Ribtheorie mit der klassischen Ribtheorie (Martin/Schiebl/Schwarzkopf (1980)) bezüglich der Abhängigkeit des Ribabstands von  $d_s/\mu$  (nach Noakowski (1985))  
Comparison of the results of continuous theory and classical theory (Martin/Schiebl/Schwarzkopf (1980)) - with respect to the relation between crack spacing and ratio  $d_s/\mu$  (after Noakowski(1985))

Durch Umformen der Formel für die Ribbreite  $w_k$  gewinnt Noakowski eine Beziehung zur Ermittlung des Stabdurchmessers  $d_s$  in Abhängigkeit von der charakteristischen Ribbreite  $w_k$ :

$$d_s = \frac{\beta_w^{0,66} \cdot E_s^{1,12}}{\sigma_{s1}^{0,88} \left[ \tau_w - C_E \cdot 3,1 \cdot (\sigma_s - C_E \cdot 0,56 \cdot \sigma_{s1}) \right]^{1,12}} \cdot w_k^{1,12} \quad [8-11]$$



**Bild 8.7:** Bemessungsdiagramm zur Beschränkung der Ribbreite nach der kontinuierlichen Ribtheorie für die Ribbreite  $w_k = 0,2 \text{ mm}$  (nach Noakowski 1985)  
Design graph for the control of crack width ( $w_k = 0,2 \text{ mm}$ ) based on continuous theory (after Noakowski (1985))

Die Bedeutung der Parameter entspricht Formel [8-9]. Damit lassen sich Bemessungsdiagramme aufstellen. Bild 8.7 zeigt ein solches für eine charakteristische Ribbreite von 0,20 mm. Die steilen, leicht gekrümmt verlaufenden Kurven erlauben den Nachweis für Zwangsbeanspruchung bzw. den Erstrißzustand. Mit Hilfe des Bewehrungsgrades (Beispiel:  $\mu = 0,3 \%$ ), der Bauteildicke ( $d = 0,3 \text{ m}$ ) kann der zur Einhaltung der Ribbreite größtmögliche Stabdurchmesser ( $d_s = 18 \text{ mm}$ ) abgelesen werden. Für Lastbeanspruchungen bzw. den Endrißzustand gelten die strahlenförmig verlaufenden Geraden.

- Schober (1984) untersucht die Zusammenhänge bei der Ribbildung eines Zugstabes mit Hilfe eines analytischen Verbundmodells. Danach wird die Kraft eines im Verbund liegenden Stahlstabes hauptsächlich von den Stahlrippen über eine Druckkegelschale auf einen dickwandigen Betonzugring übertragen (siehe Bild 8.8).

Das Verbundgesetz ergibt sich näherungsweise aus der Beziehung zwischen Last und plastischer Verformung der hoch beanspruchten Kegelspitze. Die Annahme eines starrplastischen Stoffgesetzes mit Nachverfestigung für Beton führt zu dem in Bild 8.9 dargestellten Verbundgesetz.

Für die Bestimmung von Ribabständen geht Schober, ähnlich wie Noakowski, von den Grenzbetrachtungen Erstrißbildung - stabilisiertes Ribbild aus. Während Noakowski die beiden Zustände empirisch verknüpft,

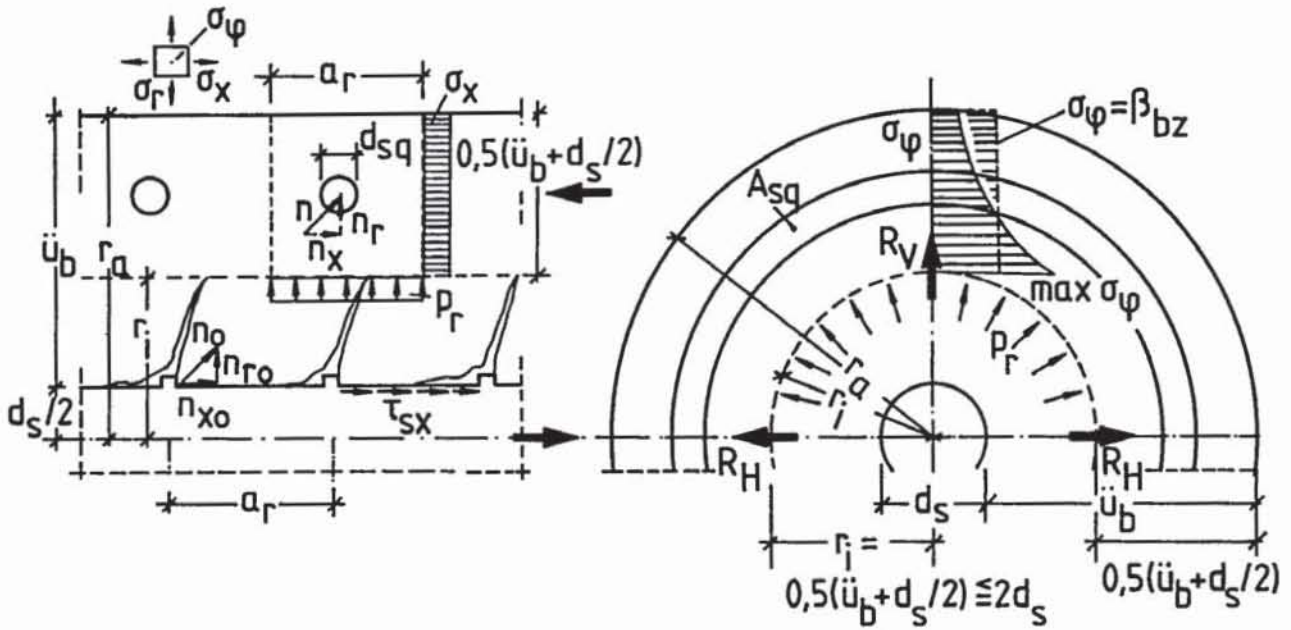


Bild 8.8: Analytisches Verbundmodell (nach Schober (1984))  
Analytical bond model (after Schober (1984))

stellt Schober den Zusammenhang über die Streuung der Betonzugfestigkeit her. Die in Wirklichkeit etwa normal verteilte Betonzugfestigkeit nähert er durch eine rechteckförmige Verteilungsdichte (Bild 8.10) an. Erstrißbildung wird angenommen, wenn in einem Querschnitt die 10 %-Fraktile der Betonzugfestigkeit überschritten wird. Beim Erreichen des 90 %-Fraktilwertes stellt sich nach dem Modell ein abgeschlossenes Rißbildes ein.

Durch diese Zuordnung erhält Schober bei bekanntem stabilisiertem Rißabstand  $s_{rm}$  für den beanspruchungsabhängigen mittleren Rißabstand  $s_r$ :

$$\frac{s_r}{s_{rm}} = \frac{\beta_{bz,n} - \beta_{bz,1}}{\beta_{bz,i} - \beta_{bz,1}} \quad [8-12]$$

$\beta_{bz, \dots}$  siehe Bild 8.10

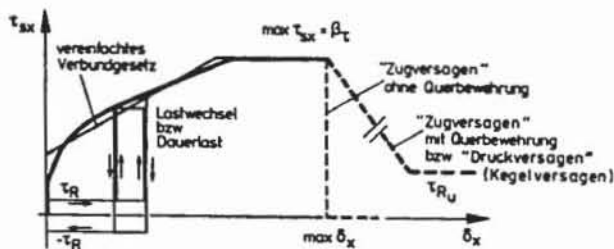


Bild 8.9: Verbundgesetz (nach Schober (1984))  
Bond stress-slip relationship (after Schober (1984))

Der mittlere stabilisierte Rißabstand entspricht nach Schober etwa der Einleitungslänge. Diese berechnet er für den allgemeinen Fall einer Bewehrung mit unterschiedlichen Stabdurchmessern bzw. Verbundeigenschaften zu:

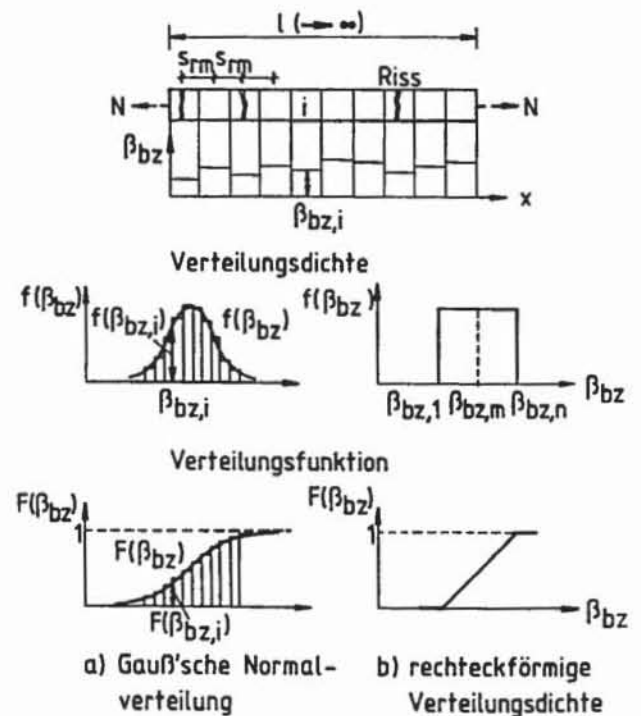
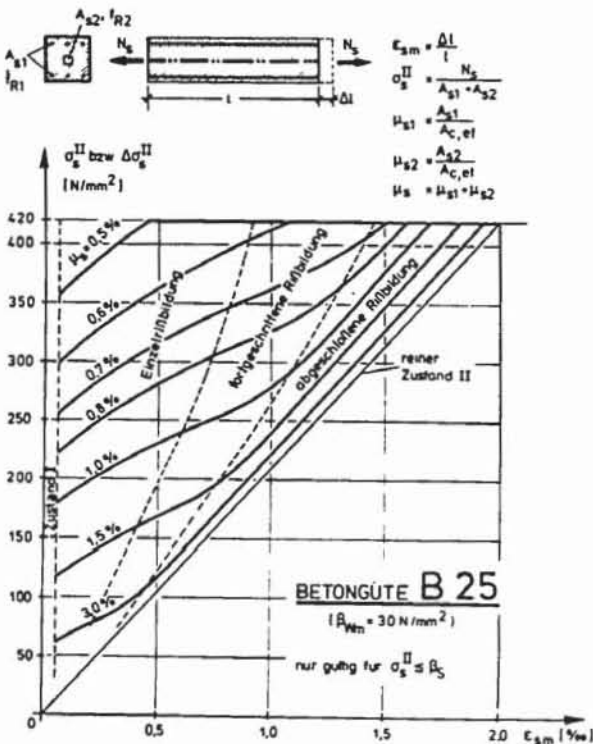


Bild 8.10: Statistische Verteilung der Betonzugfestigkeit im Stab (nach Schober (1984))  
Statistical distribution of tensile strength of concrete along the tensioned member (after Schober (1984))



Stabprofilierung	Betonstähle oder Spannstähle mit sofortigem Verbund		Spannstähle mit nachträglichen Verbund
	guter Verbundbereich	schlechter Verbundbereich	
	$\beta_{bz,m}/\tau_{sm}$		
gerippt $f_R = 0.065$	0,5	0,8	0,9
stark profiliert $f_R = 0.04$	0,7	1,1	1,25
schwach profiliert $f_R = 0.02$	1,1	1,55	1,8
glatt	1,3	2,2	2,5

**Tabelle 8.1:** Verhältnis der mittleren Betonzugfestigkeit zur mittleren Verbundspannung bei der Ribbildung (nach Schober (1984)) ( $\beta_{bz,m} = 0,24 \cdot \beta_{Wm}^{0,66}$ )  
Ratio average tensile strength of concrete to average bond stresses at crack formation ( $\beta_{bz,m} = 0,24 \cdot \beta_{Wm}^{0,66}$ ) (after Schober (1984))



**Bild 8.12:** Mittlere Dehnung von Zugstäben mit beliebig profilierter und teilweise vorgespannter Bewehrung bei Erst- und Kurzzeitbelastung (nach Schober (1984))  
Average strains in tension members reinforced by deformed bars or partially prestressed reinforcement during initial and short time loading (after Schober (1984))

wirkenden Betonzugfläche (vgl. z.B. CEB, Leonhardt) sowie der mittleren Verbundspannungen festzustellen. Allerdings wird hier nach Verbundbereichen unterschieden. Da jedoch in Bereichen mit schlechtem Verbund i.a. auch mit einer geringeren Betonzugfestigkeit zu rechnen ist, wäre zu klären, ob sich diese beiden Einflüsse hinsichtlich Ribabständen und -breiten nicht gegenseitig nahezu aufheben.

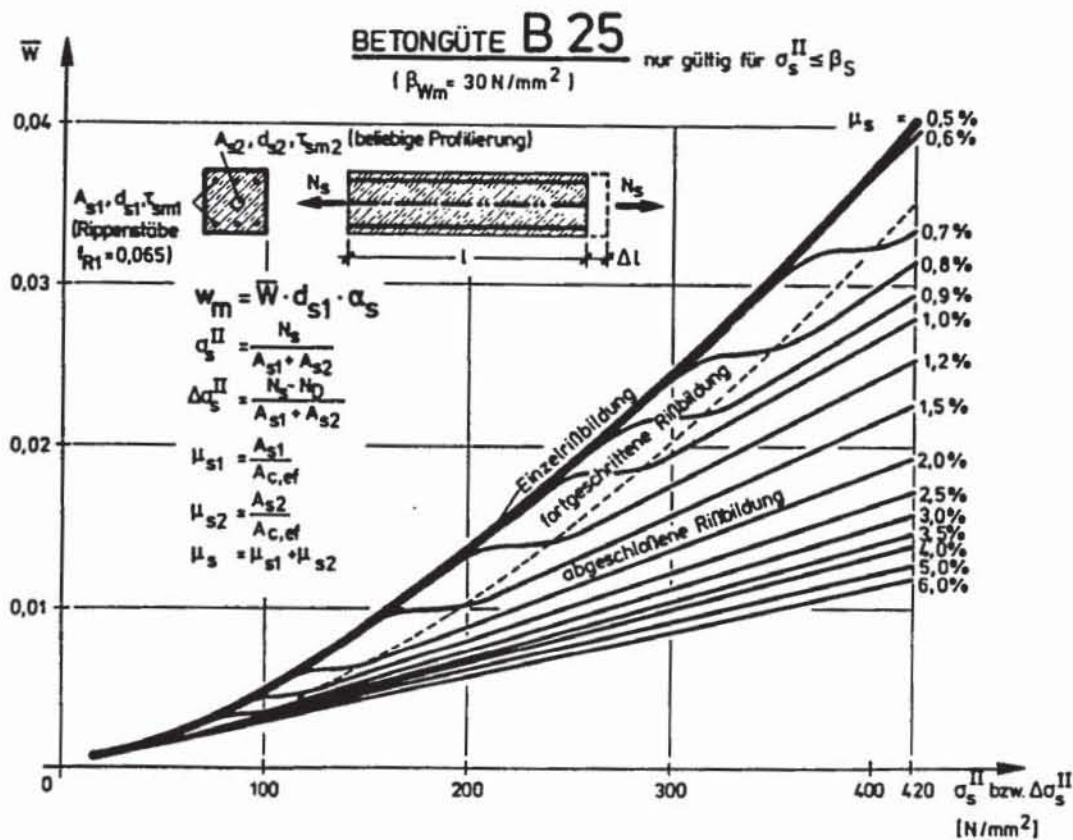
Bei bekanntem Ribabstand kann das mittlere Verformungsverhalten eines Zugstabes berechnet werden. Dabei wird im Ribbildungsbereich weiter zwischen Einzelrißbildung mit Ribabständen größer als die doppelte Einleitungslänge und fortgeschrittener Ribbildung mit verschieblichem Verbund über die gesamte Stablänge unterschieden. In Bild 8.12 sind für eine Betongüte B 25 mittlere Dehnungen in Abhängigkeit von der Stahlspannung im Rib aufgetragen. Der Bewehrungsgrad stellt hier den Scharparameter dar. Man erkennt, daß die Mitwirkung des Betons mit abnehmendem Bewehrungsgrad steigt und daß für Bewehrungsgrade  $\mu < 0,7 \%$  das abgeschlossene Ribbild bis zur Stahlstreckgrenze nicht erreicht wird. Die angegebenen Beziehungen gelten auch für Vorspannung, wenn man als Ausgangszustand den, als spannungslos gedachten, Dekompressionszustand wählt.

Mit der üblichen Beziehung  $w_m = s_{rm} \cdot \epsilon_{sm}$  sind zutreffende Ergebnisse für die Ribbreiten nur bei stabilisiertem Ribabstand zu erwarten. Im Ribbildungsbereich werden diese unterschätzt, da die maßgebende mittlere Dehnung im Einleitungsbereich  $l_e$  größer ist als  $\epsilon_{sm}$  ( $\epsilon_{sm}$  enthält Anteile aus Bereichen mit Zustand I) und da nur über  $s_{rm}$  statt über  $2 \cdot l_e$  summiert wird. Schober ermittelt die Ribbreiten daher durch Integration der Dehnungsdifferenzen zwischen Stahl und Beton über die Einleitungslänge  $l_e$ :

$$w_m = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=l_e} (\epsilon_{sx} - \epsilon_{cx}) dx \quad \text{für Einzelrißbildung} \quad (8-14)$$

$$w_m = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=s_{rm}/2} (\epsilon_{sx} - \epsilon_{cx}) dx \quad \text{für fortgeschrittene Ribbildung}$$

Bild 8.13 zeigt die Entwicklung der mittleren Ribbreiten in Abhängigkeit von der Stahlspannung im Rib für einheitliche Bewehrung aus Rippenstählen ( $f_R = 0,065$ ) im guten Verbundbereich. Andere Profilierungen sowie gemischte Bewehrungen werden über den Faktor  $\alpha_s$  (= Verhältnis der Ribabstände nach den Gleichungen (8-13a) und (8-13b)) berücksichtigt. Für



**Bild 8.13:** Mittlere Rißbreiten von Zugstäben mit beliebig profilierter bzw. teilweise vorgespannter Bewehrung bei Erst- und Kurzzeitbelastung; für gleichmäßig durchsetzte Zugzonen (nach Schober (1984))  
Average crack widths in tension members reinforced by deformed bars or partially prestressed during initial and short time loading; assuming homogeneous distribution of reinforcing bars over the cross section (after Schober (1984))

schlechten Verbundbereich sind die Rißbreiten um 30–40 % zu erhöhen.

Durch Umformung der Beziehungen lassen sich auch Diagramme zur Rißbreitenermittlung bei Zwangbeanspruchung aufstellen. Bild 8.14 zeigt ein solches Diagramm für eine Betongüte B 25. Als Scharparameter ist hier die Zwangdehnung  $\epsilon_{zw}$  aufgetragen. Bei vorgegebener Zwangdehnung kann für bestimmte Bewehrungsgrade  $\mu_s$  sowie Stabdurchmesser  $d_s$  die Rißbreite  $w_m$  abgelesen werden.

Bild 8.15 zeigt einen Vergleich von Bemessungsdiagrammen verschiedener Autoren mit Versuchsergebnissen nach Falkner (1969). Aufgrund der aus Temperaturzwang resultierenden Eigenspannungen, welche die Betonzugfestigkeit scheinbar reduzieren, liegen die Versuchswerte etwas unterhalb der Erstrißkurve nach Schober. Wird dies im Diagramm berücksichtigt, so liegen die Versuchswerte im Bereich der Kurven für  $\epsilon_{zw} \approx 0,2\text{--}0,4 \%$ . Während die Diagramme nach Schober

und Noakowski in diesem Bereich gut mit den Versuchswerten übereinstimmen, liefern die Beziehungen nach Falkner etwas zu geringe, die Formeln von Schießl etwas zu große Rißbreiten.

– Krips (1984) leitet ausgehend von dem von Noakowski (1978) aufgestellten, nichtlinearen Verbundgesetz :

$$\tau(v) = B_w \cdot A \cdot v^N \quad (8-14)$$

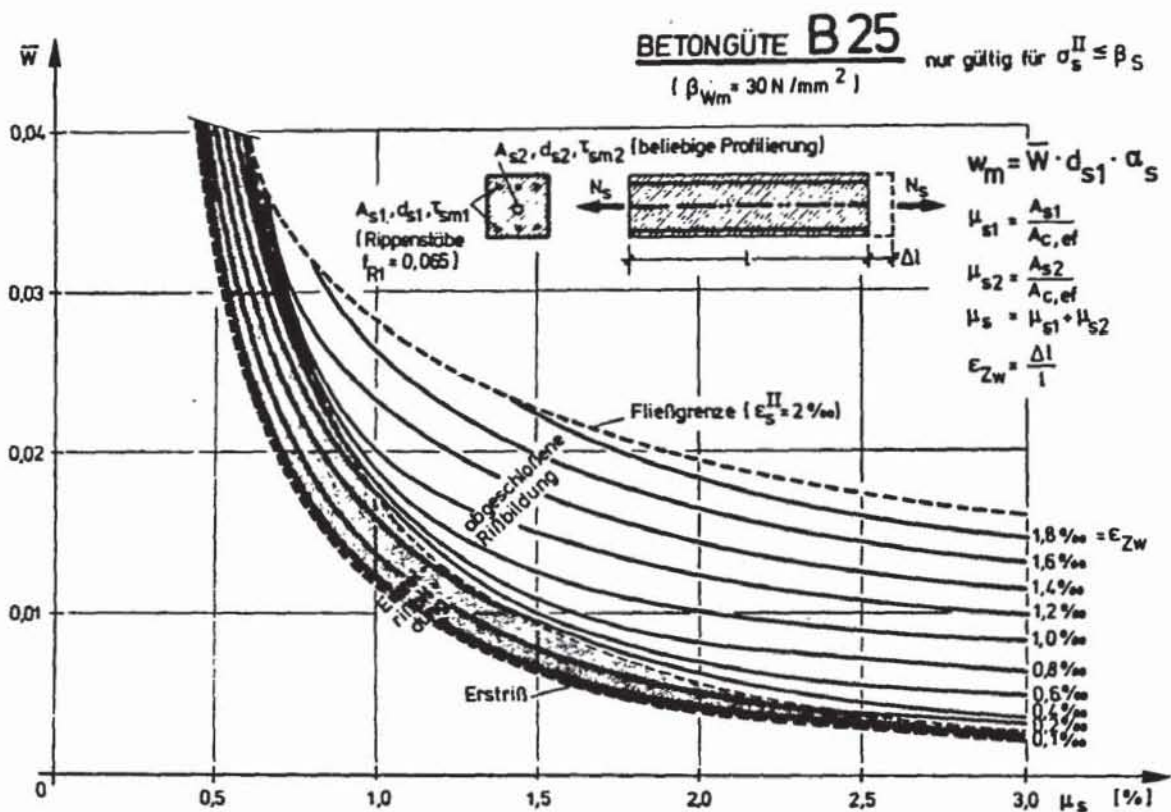
mit:

$v$  = Schlupf

$N = 0,30$ ;  $A = 0,58$  1/cm schlechter Verbundbereich

$N = 0,22$ ;  $A = 0,60$  1/cm guter Verbundbereich

eine analytische Beziehung zur Ermittlung von Rißabständen und -breiten in Abhängigkeit der Beanspruchungshöhe ab. Er unterscheidet dabei zwischen Erstrißbildung, Zweitrißbildung, abgeschlossenem Erstrißbild und sukzessiver Rißteilung.



**Bild 8.14:** Mittlere Rißbreiten aus kurzzeitiger, zentrischer Zwangsbeanspruchung für beliebig bewehrte Zugstäbe mit gleichmäßig durchsetzter Zugzone (nach Schober (1984))  
Average crack widths in tension members with arbitrary and homogeneously distributed reinforcement subjected to short time axial restraint (after Schober (1984))

**Erstribbildung:**

Über Kräftegleichgewicht, Verträglichkeitsbedingung und unter Ansatz des oben genannten Verbundgesetzes wird die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes aufgestellt:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{4}{d_s} \cdot \frac{\sigma_{SR}}{E_s \cdot \Delta \sigma_{SR}} \cdot B_w \cdot A \cdot v^N \quad [8-15]$$

In Gleichung [8-15] erfolgte eine Substitution der Betonspannungen durch die Stahlspannungen entsprechend Bild 8.16. Der üblicherweise in dieser Beziehung auftretende Ausdruck  $(1 + \mu n)$  lies sich dadurch vermeiden. Die "Gefahr von Fehlinterpretationen" des Bewehrungsprozentsatzes  $\mu$  bzw. die Frage nach der mitwirkenden Betonzugfläche besteht somit nach Krips nicht mehr.

Die analytische Lösung der Gleichung [8-15] führt mit den beiden Bedingungen: Betonspannung am Riß

gleich Null und max. Betonspannung gleich der Betonzugfestigkeit, zur Einleitungslänge  $l_e$ :

$$l_e = \frac{2}{1-N} \cdot \left[ \frac{\Delta \sigma_{SR}}{\epsilon_{SR}^N} \cdot \frac{ds}{8} \cdot \frac{1+N}{B_w \cdot A} \right]^{\frac{1}{1+N}} \quad [8-16]$$

und zur Erstribbreite  $w_1$  als doppelten Verschiebungswert am Ende der Einleitungslänge:

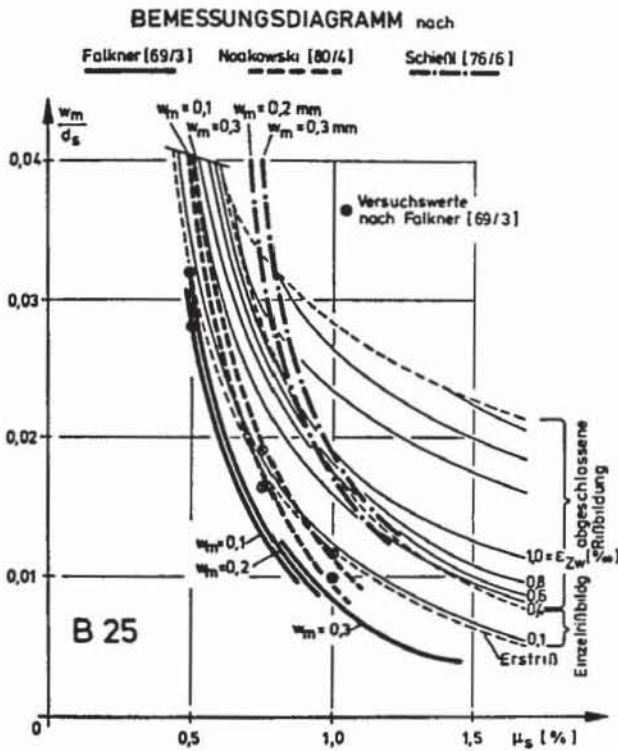
$$w_1 = 2 \cdot \left[ \Delta \sigma_{SR} \cdot \epsilon_{SR} \cdot \frac{ds}{8} \cdot \frac{1+N}{B_w \cdot A} \right]^{\frac{1}{1+N}} \quad [8-17]$$

Die Beziehung [8-17] unterscheidet sich nur geringfügig von der von Noakowski (1978) mitgeteilten Formel für die Erstribbreite.

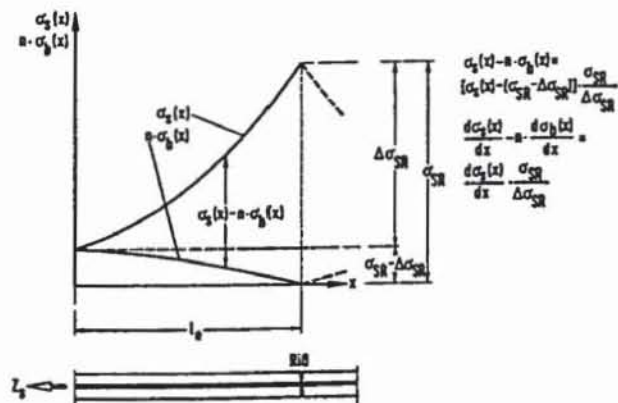
**Zweitribbildung:**

Für die analytische Behandlung des Kräfteverlaufs beim Entstehen des zweiten Risses werden zwei Fälle unterschieden (Bild 8.17):

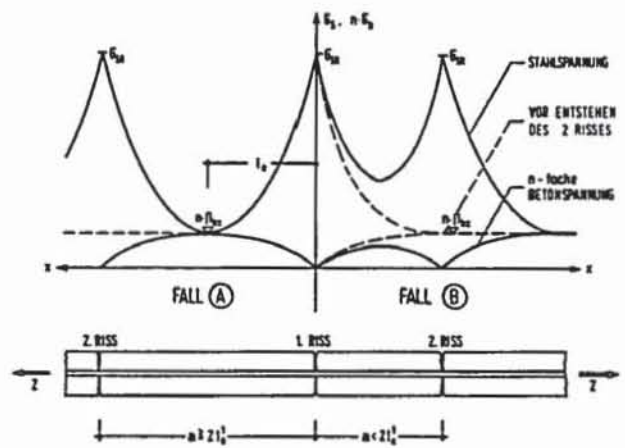
a) Der zweite RiB entsteht in einer Entfernung, die gleich oder größer der doppelten Einleitungs-länge ist, so daß sich die RiBeinflußbereiche nicht überschneiden.



**Bild 8.15:** Vergleich des RiBbreitendiagrammes (Bild 8.14) mit verschiedenen anderen Bemessungsdiagrammen für zentrischen Zwang (nach Schober 1984)  
Comparison of crack widths graph (Figure 8.14) with different other design graphs for axial restraint (after Schober (1984))



**Bild 8.16:** Substitution der Betonspannung durch die Stahlspannung (nach Krips (1984))  
Substitution of concrete stresses by steel stresses (after Krips (1984))

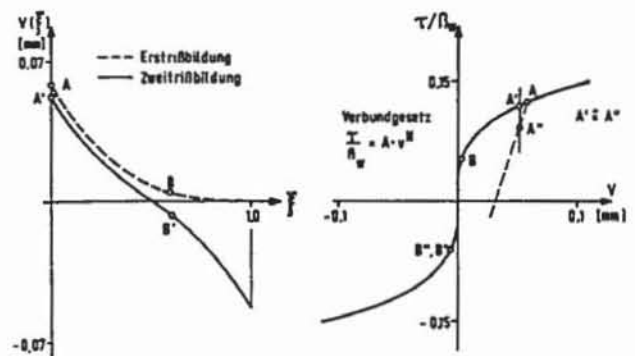


**Bild 8.17:** Zweitribbildung (nach Krips (1984))  
Formation of secondary cracks (after Krips (1984))

b) Der zweite RiB entsteht in der Zone, die zwischen einfacher und doppelter Einleitungs-länge vom ersten RiB entfernt ist, so daß sich die RiBeinflußbereiche zumindest teilweise überlappen.

Der Fall a) entspricht der Gesetzmäßigkeit der Erstribbildung und wird entsprechend behandelt.

Der Fall b) erfordert zusätzliche Überlegungen. Wegen der Überschneidung der RiBeinflußbereiche kommt es zwischen Erst- und Zweitrib in Teilbereichen zur Umkehr der anfänglichen Relativverschiebungen (siehe Bild 8.18). Damit verbunden ist ein sog. Verbundhysterese-Effekt: Die Verbundspannungen fallen bei Umkehr der Verschiebungsrichtung steil ab und folgen nicht mehr der angenommenen monotonen  $\tau$ - $v$ -Beziehung. Dieser Effekt wird jedoch nicht weiter berücksichtigt, da er "im Gebrauchszustand wenig stark ausgeprägt ist und da sich Verschiebungsänderungen



**Bild 8.18:** Einfluß der Verbund-Hysterese auf die Zweitribbildung (nach Krips (1984))  
Influence of bond hysteresis on formation of secondary cracks (after Krips (1984))

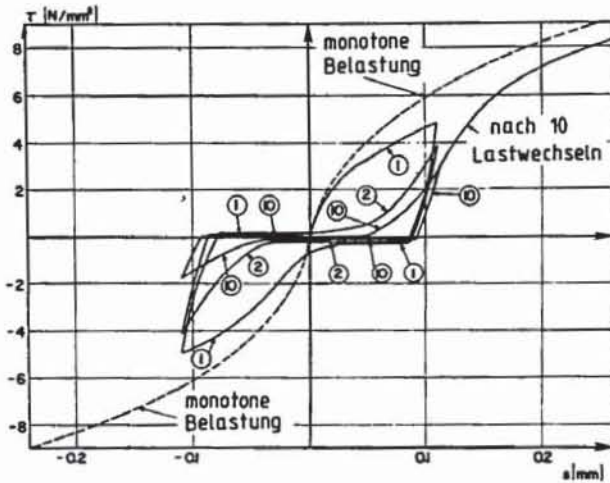


Bild 8.19: Verbundverhalten bei zyklischer Belastung (nach Elgehausen et.al. (1983))  
Cyclic bond-slip relationship (after Elgehausen et.al. (1983))

rungen in Zonen mit geringem anfänglichem Schlupf abspielen". Es wird daher angenommen, daß auch bei Umkehr des Schlupfes das ursprüngliche Verbundgesetz Gültigkeit besitzt.

Durch diese Annahmen, wird das wirkliche Verhalten nur näherungsweise erfaßt. Sie ist jedoch notwendig, um eine analytische Lösung zu ermöglichen. Inwieweit sich das Verbundhystereseverhalten auf Rißabstände und -breiten auswirkt wäre noch zu überprüfen. Versuche zeigten (z.B. Elgehausen et.al. (1983), Bild 8.19), daß bei Vorzeichenumkehr des Schlupfes sehr steile Entlastungscharakteristiken vorliegen. Bereits bei geringen entgegengesetzten Verschiebungen fallen die Verbundspannungen auf Null ab.

Mit Hilfe der getroffenen Rechenannahmen stellt Krips die Gesamtverschiebung im Fall b) als Teil der Verschiebung aus der Erstrißbildung dar:

$$v_{ges}(x) = v_1(x) \cdot \left(1 - \frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2}\right) \quad [8-18]$$

Die beiden Konstanten werden aus den Randbedingungen: die Stahlspannung im Zweitriß beträgt  $\sigma_{SR}$  (die Streuung der Betonzugfestigkeit wird nicht berücksichtigt) und die Verschiebung in Rißabstandsmitte ist Null, bestimmt.

Für den Grenzfall, daß der Rißabstand gleich der Einleitungslänge ist, beträgt die Rißweite:

$$w_2 = 2 \cdot v_2 = w_1 \cdot \frac{3+H}{4} \quad [8-19]$$

Krips führt an, daß der Anteil der Rißweite aus gegenseitiger Beeinflussung der Risse maximal ca. 18 % beträgt und dieser sich mit Zunahme des Rißabstandes  $a \rightarrow 2 \cdot l_e$  schnell verringert. Zur Ableitung von Näherungsbeziehungen wird daher von der Lösung für die Erstrißbildung ausgegangen.

Alle oben angegebenen Beziehungen basieren auf der Annahme einer konstanten, mittleren Betonzugfestigkeit, so daß sich ohne Laststeigerung ein "abgeschlossenes Erstrißbild" einstellt. Dieses ist laut Definition erreicht, wenn an keiner Stelle des betrachteten Bauteils mehr starrer Verbund vorliegt. Wächst die äußere Last über das Erstrißniveau, kommt es zu weiteren Relativverschiebungen, verbunden mit einem Anstieg der Verbundspannungen, und damit zu neuen Rissen (Bild 8.20).

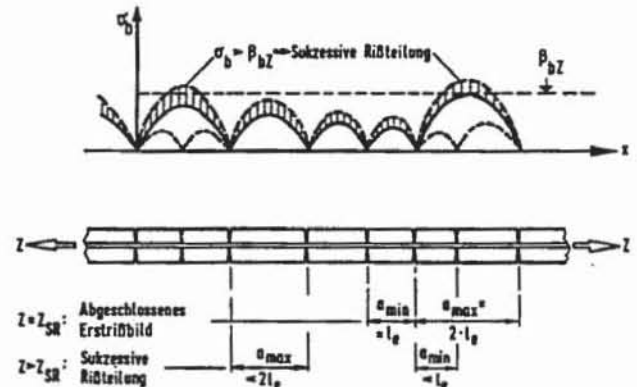


Bild 8.20: Erläuterung der Begriffe "Abgeschlossenes Erstrißbild" und "Sukzessive Rißteilung" (nach Krips (1984))

Explanation of the terms "Abgeschlossenes Erstrißbild" and "Sukzessive Rißteilung" (after Krips (1984))

Sukzessive Rißteilung:

Eine derartige Rißentstehung bezeichnet Krips mit "sukzessiver Rißteilung". Die Theorie der Erstrißbildung kann problemlos auf die sukzessive Rißteilung erweitert werden. Als Randbedingung ist nun die aktuelle Spannung im Riß  $\sigma_{sII}$  zu berücksichtigen. Erreicht die Betonzugfestigkeit in Rißabstandsmitte die Betonzugfestigkeit, kommt es zur Bildung des neuen Risses. Für jeden Rißabstand gibt es genau eine Laststufe für die diese Bedingung erfüllt ist. Hieraus abgeleitete Beziehungen für maximale und minimale Rißabstände sind nur noch über Näherungslösungen explizit darstellbar:



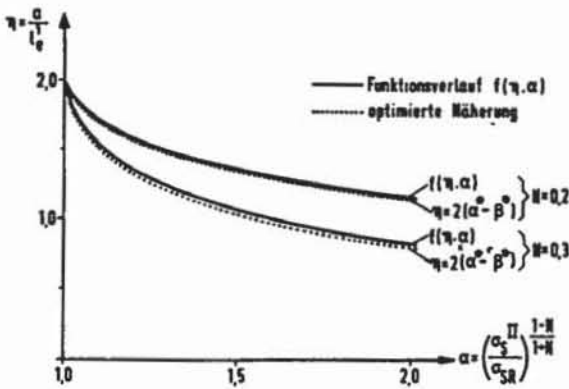
$$(\alpha^* - \beta^*) < \eta = \frac{a}{l_e} < 2 \cdot (\alpha^* - \beta^*) \quad (8-20)$$

mit:

$$\alpha^* = \left[ \frac{\sigma_s}{\sigma_{sR}} \right]^{\frac{II}{1+N}} \cdot \frac{1-N}{2} + \frac{2+N}{2}$$

$$\beta^* = \left[ \frac{\sigma_s}{\sigma_{sR}} - 1 \right]^{\frac{II}{1+N}} \cdot \frac{1-N}{2} + \frac{2+N}{2}$$

Bild 8.21 zeigt die Abhängigkeit des theoretisch maximal möglichen Rißabstandes von der aktuellen Stahlspannung im Riß. Die Funktion weist keine horizontale Asymptote auf. Ein "abgeschlossenes Rißbild" im klassischen Sinne wird also nicht erreicht.



**Bild 8.21:** Maximaler Rißabstand bei sukzessiver Rißteilung (nach Krips (1984))  
Maximum crack spacing at successive crack formation (after Krips (1984))

Der Übergang zur Festlegung von mittleren Größen erfordert eine Angabe über die Häufigkeit der in den Grenzen nach Gl. [8-20] auftretenden Rißabstände. Aufgrund von Überlegungen, nach denen der kleinste Rißabstand bei einer bestimmten Bauteillänge doppelt so oft auftreten kann wie der größte, gibt Krips die Verteilungsdichtefunktion an zu:

$$f(a) = \frac{1}{a \cdot \ln 2} \quad (8-21)$$

Diese Aussage ist allerdings nach wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten nicht ohne weiteres einzusehen.

Für die abgeschlossene Erstrißbildung resultiert aus dieser Beziehung ein mittlerer Rißabstand von

$$a_m = 1,443 \cdot l_e \quad (8-22)$$

Für die mittlere Stahlspannung erhält man folgende Gleichung (siehe auch Bild 8.22):

$$\sigma_{sm} = \sigma_s^{II} \cdot \left[ 1 - \frac{\Delta \sigma_{sR}}{\sigma_{sR}} \cdot \frac{1+N}{1-N} \cdot \frac{1}{4 \ln 2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \left( 1 - \frac{N}{2(1-N)} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \right) \right] \quad (8-23)$$

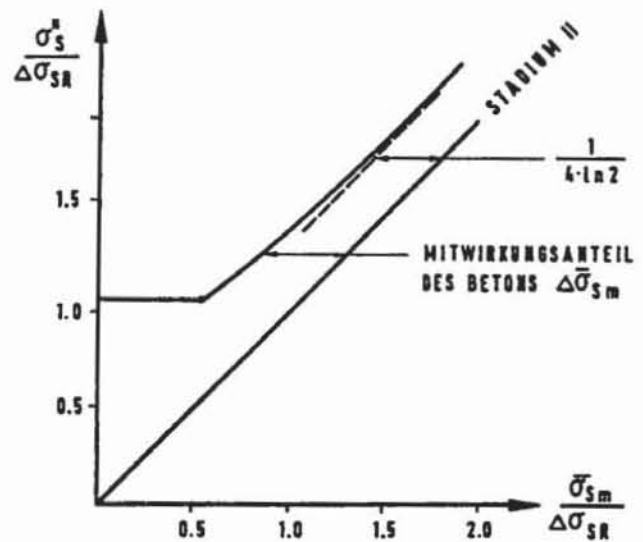
mit:

$$\alpha = \left[ \frac{\sigma_s}{\sigma_{sR}} \right]^{\frac{II}{1+N}}$$

$$\beta = \left[ \frac{\sigma_s}{\sigma_{sR}} - 1 \right]^{\frac{II}{1+N}}$$

Und für die mittlere Rißbreite gilt:

$$w_m = 2 \cdot \left[ \sigma_{sR} \cdot \Delta \sigma_{sR} \cdot \frac{d_s \cdot (1+N)}{8 \cdot E_s \cdot B_w \cdot A} \right]^{\frac{1}{1+N}} \cdot \left[ 1,6 \cdot \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_{sR}} \right)^{\frac{II}{1+N}} - 0,7 \right] \quad (8-24)$$



**Bild 8.22:** Mittlere Stahlspannung in Abhängigkeit der Stahlspannung am Riß (nach Krips (1984))

Average steel stress as a function of the steel stress at the crack (after Krips (1984))

Nach Krips ist eine Übertragung der Beziehungen ohne Einschränkung auch auf Biegebauteile möglich. Die Frage, auf welche Betonfläche der Bewehrungsprozentsatz  $\mu$  zu beziehen ist, stellt sich hier nicht, da  $\mu$  mit Hilfe einer Gleichgewichtsbeziehung durch den Stahlspannungssprung im Riß ersetzt wurde.

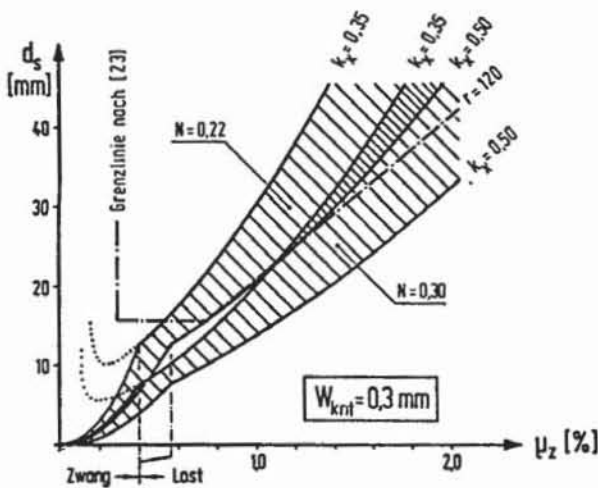
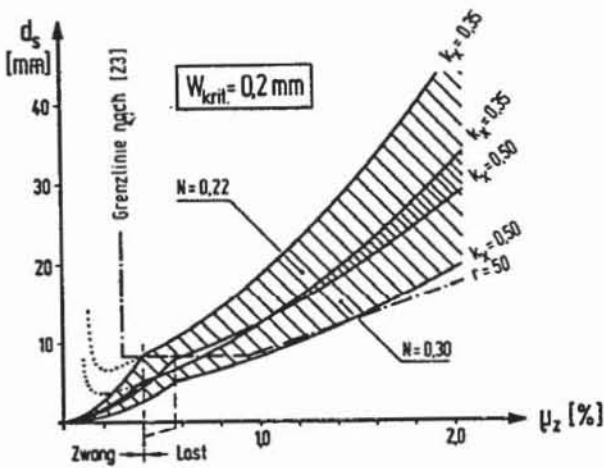


Bild 8.23: Vergleich der Ergebnisse nach Krips (1984) mit DIN 1045  
Comparison of the results after Krips (1984) with DIN 1045

In den Bildern 8.23a und 8.23b sind für gebräuchliche Verhältnisse (Balkenhöhe 40 cm,  $h/d = 0,93$ ,  $k_x = 0,35-0,5$ ) die Zusammenhänge zwischen Stabdurchmesser und Bewehrungsgrad  $\mu$  mit dem Ribbreitennachweis nach DIN 1045 verglichen. Eine befriedigende Übereinstimmung ergibt sich nur für  $\mu > 0,8\%$ . Die für kleine Bewehrungsgrade der DIN 1045 zugrundeliegende Annahme, daß hier nicht mehr mit Rissen aus Lastbeanspruchung zu rechnen und eine Ribbreitenbeschränkung daher nicht erforderlich ist, sollte laut Krips überdacht werden, da zusätzlich mögliche Zwangbeanspruchungen eine wesentlich restriktivere Haltung bezüglich des zu verwendenden Stabdurchmessers erfordern.

## Zusammenfassung und Bewertung

Während die klassischen Ribtheorien von bestimmten, konstanten Ribbildern ausgehen, die eine Differenzierung in Last- und Zwangbeanspruchung erforderten, wird in neueren Arbeiten kontinuierliche Ribbildung zugrunde gelegt und damit der gesamte Beanspruchungsbereich abgedeckt. Nach wie vor werden zur analytischen Behandlung des Problems jedoch eine Reihe von Vereinfachungen eingeführt.

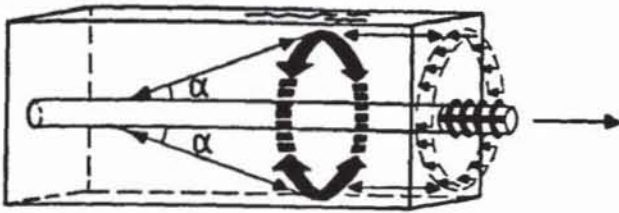
So wird z.B. die Streuung der Betonzugfestigkeit entweder nicht berücksichtigt oder willkürlich bestimmten Ribbildungsstadien zugeordnet. Verbundgesetze werden, insbesondere bei gemischter Bewehrung, mehr oder weniger stark vereinfacht, unterschiedliches Verbundverhalten je nach Lage des betrachteten Punktes zum Rib sowie Verbundhystereseeffekte bleiben außer acht. Für zentrischen Zug abgeleitete Beziehungen werden auch auf den Fall der reinen Biegung übertragen, der Einfluß zusätzlicher Scheibenspannungen wird dabei vernachlässigt. Die möglicherweise ribauslösende Wirkung einer vorhandenen Querbewehrung ist bisher in keiner Theorie enthalten. Eine Einbeziehung dieser Parameter bei der analytischen Behandlung der Ribbildung würde die festgestellten erheblichen Streuungen zwischen Rechen- und Versuchsergebnissen sicherlich deutlich verringern.

Neben oben genannten Größen liegt eine Reihe zusätzlicher Streuparameter vor (wie z.B. Überfestigkeiten, Schwinden usw.), welche die Ribbildung beeinflussen und deren Größe bei der Planung im allgemeinen nicht exakt bestimmbar ist. Es scheint daher gerechtfertigt, weiterhin stark vereinfachte Nachweisverfahren für die Ribbreitenkontrolle zu benutzen. Neuere Erkenntnisse wie das Verhalten bei Zwangbeanspruchungen oder bei geringen Bewehrungsgraden sowie die Erfordernis einer Mindestbewehrung sollten jedoch beachtet werden und möglichst schnell ihren Niederschlag in den entsprechenden Normen finden.

## 9 Zur Längsribbildung

### 9.1 Allgemeines

Bei Bewehrungsanordnungen mit sehr geringer Betondeckung oder geringen Abständen zwischen den einzelnen Stäben besteht die Gefahr der Längsribbildung parallel zum Stab bzw. der Abplatzung der gesamten Betondeckung. Die daraus resultierende weitgehende Aufhebung des Verbundes kann z.B. bei Stabverankerungen oder Übergreifungsstößen zum Versagen führen.



**Bild 9.1:** Schematische Darstellung des Tragmodells: Abstützung von Druckstreben auf einem Zugring (nach Teffers (1973))  
Schematic modelling of the bearing behavior: compression stresses are ballanced against tensile stress rings in the concrete (after Teffers (1973))

Längsrisse entstehen, wenn die durch Verbundkräfte hervorgerufenen Ringzugspannungen die Betonzugfestigkeit überschreiten. Analytische Verfahren, die das Problem der Längsrißbildung behandeln, gehen meist von folgendem, idealisiertem Modell aus (siehe Bild 9.1):

Die vorwiegend an den Stahlrippen übertragenen Verbundkräfte werden als über die gesamte Staboberfläche verteilte Spannung angenommen, deren radial gerichtete Komponente sich zu

$$p = \tau \cdot \tan \alpha$$

berechnet. Diese Radialpressung wird als konstanter Innendruck auf ein dickwandiges Ersatzrohr mit einer Wanddicke kleiner oder gleich der geringsten Betondeckung angesetzt. Die Arbeiten verschiedener Autoren unterscheiden sich in der Größe des Winkels  $\alpha$ , in der Annahme für die Wanddicke sowie in der Definition des Versagenszustandes (Höhe der Betonzugfestigkeit, elastisches oder plastisches Verhalten).

Als Ergebnis der Untersuchungen wird häufig die zum Längsriß führende Verbundspannung  $\tau_u$  angegeben. Für eine Abschätzung der Längsrißgefahr ist deshalb eine zusätzliche Annahme bezüglich des Verlaufs der Verbundspannungen entlang der Stabachse erforderlich. Im einfachsten Fall wird von einer über die Stabachse gleichmäßigen Verteilung ausgegangen. Genauere Untersuchungen berücksichtigen die im Bereich von Querrissen auftretenden Verbundspannungsspitzen.

## 9.2 Beziehungen zur Ermittlung der Längsrißspannungen

- Teffers (1973) untersucht drei verschiedene Versagenszustände:

### a) elastisches Verhalten:

Spannungen werden nach der Elastizitätstheorie berechnet. Der Bruch tritt ein, wenn die maximale Tangentialspannung die Betonzugfestigkeit erreicht (siehe Bild 9.2a):

$$\tau_u = \frac{B_{bZ}}{\tan \alpha} \cdot \frac{(\bar{u}_b + d_s/2)^2 - (d_s/2)^2}{(\bar{u}_b + d_s/2)^2 + (d_s/2)^2} \quad (9-1)$$

### b) plastisches Verhalten:

Hier wird Versagen definiert, wenn die Tangentialspannung an jeder Stelle der Betondeckung die Betonzugfestigkeit erreicht (siehe Bild 9.2b):

$$\tau_u = \frac{B_{bZ}}{\tan \alpha} \cdot \frac{2 \cdot \bar{u}_b}{d_s} \quad (9-2)$$

### c) teilweise gerissener Zustand:

Teffers konnte zeigen, daß sich nach Überschreiten der Betonzugfestigkeit durch die nach a) berechneten Tangentialspannungen am Innenrand des Zugringes ein stabiler Zustand einstellen kann. Durch den teilweisen Ausfall der Betondeckung vergrößert sich der Innenradius, auf den nun ein entsprechend geringerer Innendruck wirkt (siehe Bild 9.2c):

$$p^* = \frac{d}{2e} \cdot \tau \cdot \tan \alpha \quad (9-3)$$

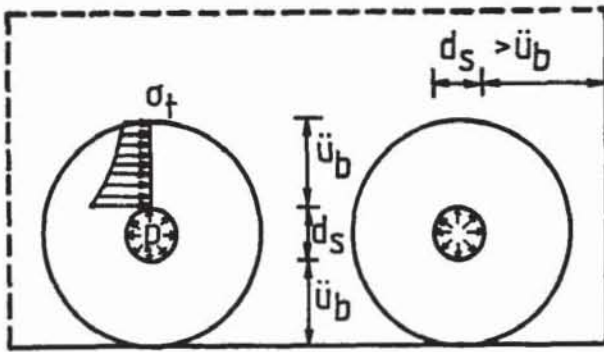
die maximale Tragfähigkeit ist erreicht, wenn die gerissene Zone einen Radius von

$$e = 0,486 \cdot (\bar{u}_b + d_s/2) \quad (9-4)$$

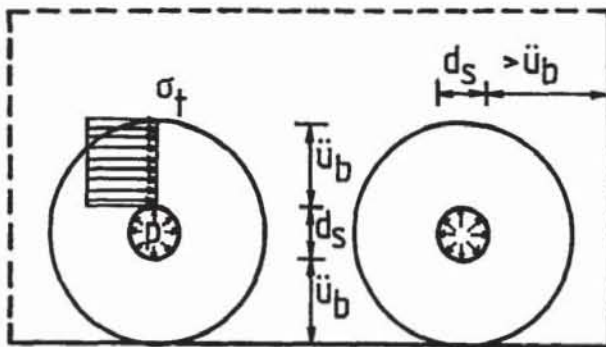
überschreitet. Die Verbundspannung beträgt dann

$$\tau_u = \frac{B_{bZ}}{\tan \alpha} \cdot \frac{\bar{u}_b + d_s/2}{1,664 \cdot d_s} \quad (9-5)$$

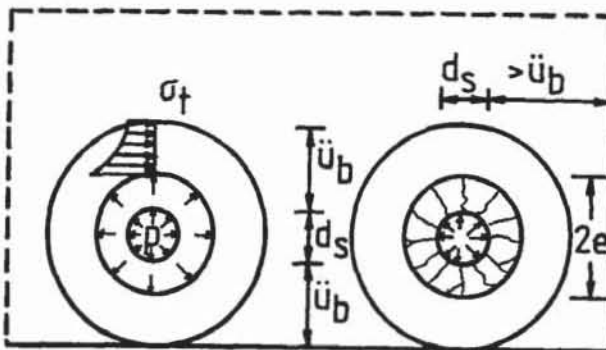
Den Winkel  $\alpha$  ermittelt Teffers an einem ebenen, zweidimensionalen Modell mit der Methode der Finiten Elemente. Unabhängig von der Verbundart (vollständiger Verbund an der Staboberfläche bzw. Verbund nur an den Stirnflächen der Rippen) und von der Rippenneigung (zwischen 45° und 90°) berechnet er einen Winkel  $\alpha$  zu ca. 45°. Diesen Winkel legt er seinen weiteren Betrachtungen zugrunde, merkt allerdings an, daß der Winkel wegen der elastischen Berechnung nur vor Auftreten der inneren Rißbildung Gültigkeit besitzt.



a) elastisch



b) plastisch



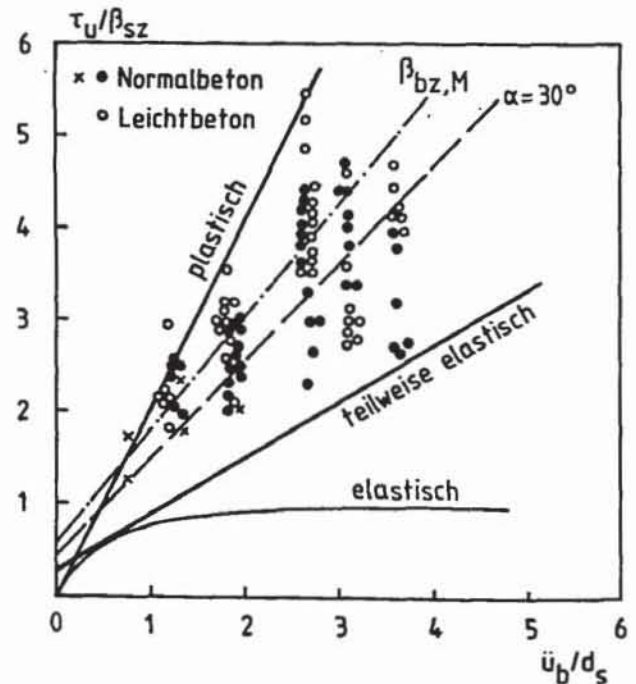
c) teilweise gerissen

**Bild 9.2:** Verteilung der Tangentialspannungen nach Teffers (1973)  
Distribution of tangential ring stresses after Teffers (1973)

Als aktivierbare Betonzugfestigkeit wählt Teffers die Spaltzugfestigkeit. Dies begründet er damit, daß sowohl bei Spaltzugversuchen als auch bei der Ribbildung im Zugring die Lage des Risses durch die Versuchskörpergeometrie vorgegeben ist. Eine Auswahl der schwächsten Stelle, wie sie nach statistischen Überlegungen beim zentrischen Zugversuch auftritt, ist hier nur sehr beschränkt möglich.

Allerdings besteht zwischen Spaltzugversuch und Ribbildung im Zugring auch ein gravierender Unterschied: Während beim Spaltzugversuch die Zugspannungen nahezu gleichmäßig über die Höhe verteilt sind, liegt beim Zugring ein steiler Spannungsgradient vor.

In Bild 9.3 sind die von Teffers angegebenen Beziehungen Versuchsergebnissen an Ausziehkörpern geringerer Dicke und Verbundlänge (nach Teffers (1973) bzw. Tilantera/Reichardt (1977)) gegenübergestellt. Man erkennt, daß die Versuchsergebnisse stark streuen und nahezu alle zwischen den beiden Geraden für den plastischen und den teilweise gerissenen Zustand liegen. Eine elastische Rechnung unterschätzt die tatsächliche Tragfähigkeit deutlich.



**Bild 9.3:** Zusammenhang zwischen Verbundspannung und Betondeckung bei Auftreten des Längsrißes (nach Teffers (1973) und (1979))  
Relationship between bond stress and concrete cover at formation of longitudinal cracks (after Teffers (1973) and (1979))

Es sei darauf hingewiesen, daß die rechnerischen Ergebnisse nach Teffers erheblich vom gewählten Winkel  $\alpha$  und der angenommenen Betonzugfestigkeit beeinflusst werden. Wird für den teilweise gerissenen Zustand der Winkel  $\alpha$  zu  $30^\circ$  gesetzt, wie von anderen Autoren vorgeschlagen, oder zur Berücksichtigung des Dehnungsgradienten als Bezugsgröße die Biegezugfestigkeit gewählt, so ist eine deutlich bessere Übereinstimmung zwischen der Rechnung für den teilweise gerissenen Zustand und Versuchsergebnissen festzustellen (siehe Bild 9.3).

- Martin (1973) untersucht die Sprengwirkung von Rippenstählen mit Hilfe der FEM. Im Gegensatz zu Teffers verwendet er räumliche, rotationssymmetrische Elemente und berücksichtigt die innere Ribbildung durch Vorgabe von 6 mm langen Rissen (senkrecht zu jeder Querrippe des Bewehrungsstahles). Die teilweise Plastifizierung des Betons unter den Rippen wird durch Verwendung unterschiedlicher E-Moduli und Querdehnzahlen simuliert (siehe Bild 9.4). Seine Rechnungen zeigten u.a., daß eine übliche bezogene Rippenfläche ( $f_R = 0,05$  bis  $0,10$ ) einen sehr geringen, die Größe der Betondeckung einen erheblichen Einfluß auf die mittleren Ringzugspannungen besitzt.

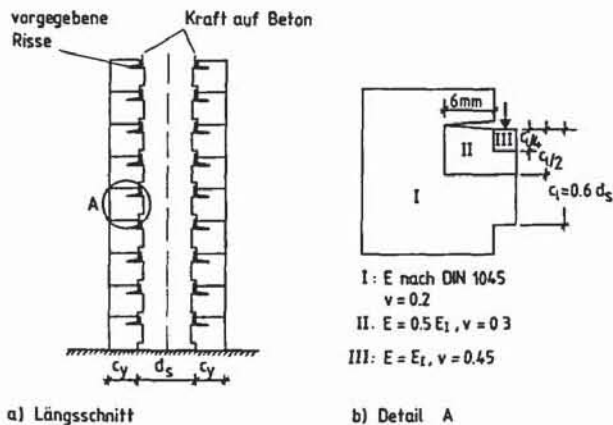


Bild 9.4: Rechenmodell zur Ermittlung der Ringzugspannungen (nach Martin (1973))  
 Analytical model for prediction of ring stresses (after Martin (1973))

Anhand von eigenen Versuchen an Betonzylindern unter Innendruck definiert Martin als Bruchkriterium den Zustand, bei dem die über die Betondeckung gemittelten rechnerischen Ringzugspannungen die Betonspaltzugfestigkeit erreichen.

Aufgrund der Rechenergebnisse gibt Martin Kriterien für die ausnutzbare Stahlspannung in Abhängigkeit

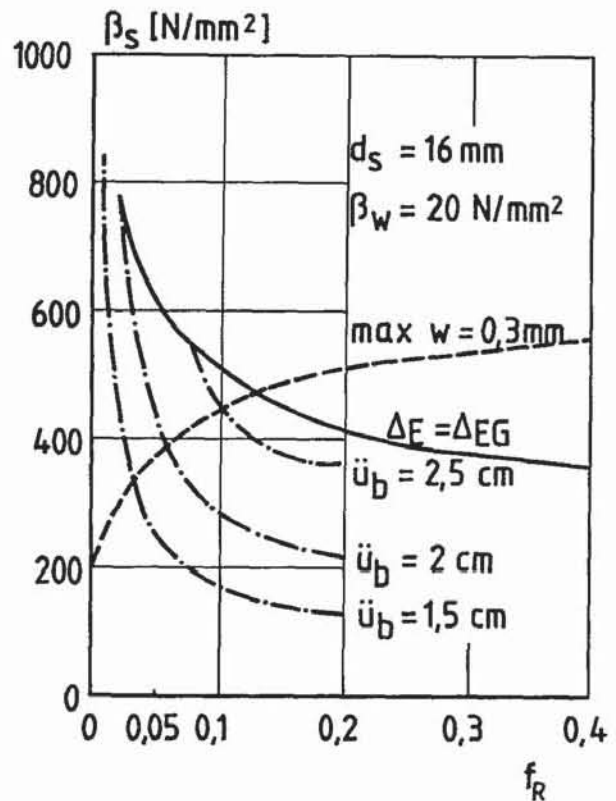


Bild 9.5: Ausnutzbare Stahlspannung in Abhängigkeit von der bez. Rippenfläche (nach Martin (1973))

Relationship between available steel stresses and relative rib area (after Martin (1973))

von der bezogenen Rippenfläche bzw. der Betonüberdeckung an. Als Beispiel ist in Bild 9.5 die ausnutzbare Stahlspannung in Abhängigkeit von der bezogenen Rippenfläche für einen Stabdurchmesser  $d_s = 16$  mm und eine Betonfestigkeit  $\beta_w = 20$  N/mm<sup>2</sup> dargestellt. Daraus geht hervor, daß für kleine bezogene Rippenflächen die Höhe der möglichen Stahlspannungen durch die zulässige Ribbreite (hier 0,3 mm) begrenzt wird. Bei höheren bezogenen Rippenflächen wird dagegen der Einfluß der Sprengwirkung maßgebend. Für große Betondeckungen beschränkt das Abscheren der Betonkonsolen (Ausziehen der Stäbe) die ausnutzbaren Stahlspannungen.

- Ellegehausen (1979) berechnete aus den von Martin angegebenen Rippenkräften und Ringzugspannungen die dazugehörigen Winkel  $\alpha$  (siehe Tabelle 9.1). Danach ist  $\alpha$  nahezu unabhängig von der bezogenen Rippenfläche üblicher Rippenstäbe und der Betongüte, nimmt jedoch mit zunehmendem Stabdurchmesser deutlich und mit ansteigender Betondeckung geringfügig ab. Ellegehausen führt die nach Martin zu erwartende deutliche Verringerung der Sprengwirkung mit zunehmendem Stab-

Stabdurchmesser $d_s$ mm	Betondeckung $\bar{u}_b/d_s$		
	1	2	3
10	44,3	40,9	34,2
16	34,5	33,8	31,5
26	26,5	29,5	-

**Tabelle 9.1:** Winkel  $\alpha$  in Grad, von Eligehausen (1979) aus den Ergebnissen von Martin (1973) berechnet

Angle  $\alpha$  in degrees as calculated by Eligehausen (1979) from analytical results given by Martin (1973)

durchmesser, welche der Versuchserfahrung widerspricht, hauptsächlich auf die für alle Modelle gewählte konstante innere Riblänge (6 mm) zurück. (Nach Goto ist eine mit dem Stabdurchmesser zunehmende Riblänge zu erwarten). Dem entgegen stehen Vorberechnungen von Martin an Ein-Rippen-Modellen, wonach eine Verdreifachung der Riblänge die mittleren Ringzugspannungen nur um etwa 20 % anwachsen läßt.

Eligehausen führt außerdem eigene FE-Rechnungen zur Ermittlung der Spannungsverteilung im Bereich von Übergreifungsstößen durch. Er geht weitgehend von den gleichen Rechenannahmen wie Martin aus. Aus Vergleichsrechnungen zwischen ebenen und räumlichen Modellen ermittelt er den Winkel  $\alpha$  zu 23°.

Als Bruchzustand definiert Eligehausen in Anlehnung an die RVE-Methode den Zustand, wenn die über die Länge eines halben Stabdurchmessers gemittelten Tangentialspannungen die zentrische Betonzugfestigkeit erreichen. Bei der Größe der RVE berücksichtigt er die Tatsache, daß sich im Bereich der Spannungsspitzen um den Bewehrungsstab vor allem Feinanteile des Betons ansammeln.

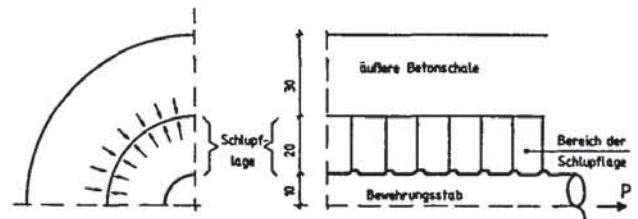
Unter Zugrundelegung dieser Kriterien führt er Rechnungen mit verschiedenen Verhältniswerten zwischen Betondeckung und Stabdurchmesser durch und erhält daraus folgende Beziehung für die längsribauslösenden Verbundspannungen:

$$\frac{\tau_{RiB}}{B_Z} = 1,54 \cdot \sqrt{\frac{\bar{u}_b}{d_s}} \quad (9-6)$$

$\bar{u}_b$  = Betondeckung  
 $d_s$  = Stabdurchmesser  
 $B_Z$  = zentrische Betonzugfestigkeit

Bei der Ableitung dieser Beziehung wurde, entsprechend dem Beanspruchungszustand bei Übergreifungsstößen, von einem ungleichförmig verteilten Innendruck ausgegangen. Eine Übertragung auf den Fall der Längsribbildung bei Einzelstäben scheint daher nicht ohne weiteres möglich.

- Vos (1983) führt FE-Rechnungen zum Einfluß von Belastungsgeschwindigkeit und Querpressung auf das Verbundverhalten von Rippenstäben durch. Zur Verringerung des numerischen Aufwandes wählt er zwei, den Bewehrungsstab rotationssymmetrisch umschliessende Schichten (siehe Bild 9.6):



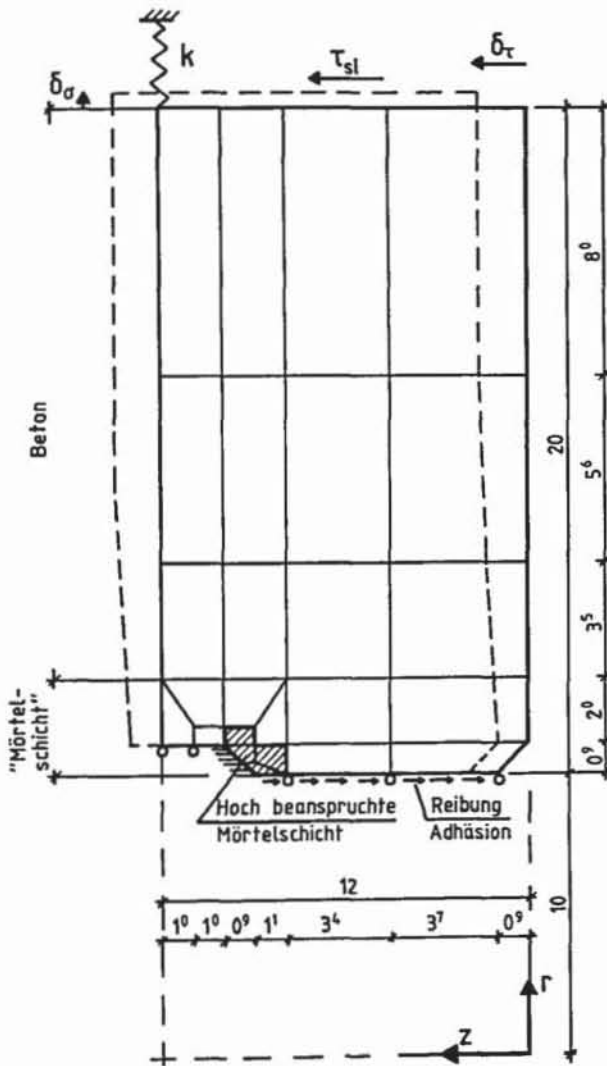
**Bild 9.6:** Modell nach Vos (1983): Zugstab mit umgebender Verbundschicht und außen liegendem dickwandigem Zylinder

Model after Vos (1983): tensioned reinforcing bar with surrounding axisymmetric slip layer and outer concrete cylinder

- Eine Verbundschicht mit einer Dicke entsprechend dem Stabdurchmesser, die den Bereich im Anschluß an die Staboberfläche darstellt. Durch die Annahme eines nichtlinearen Materialgesetzes für den Beton kann hier sowohl die innere Ribbildung als auch der hohe Spannungszustand des Betons vor den Rippen simuliert werden. Die Einleitung der Kräfte erfolgt sowohl über die Rippen als auch durch Haftung und Reibung an der Staboberfläche.

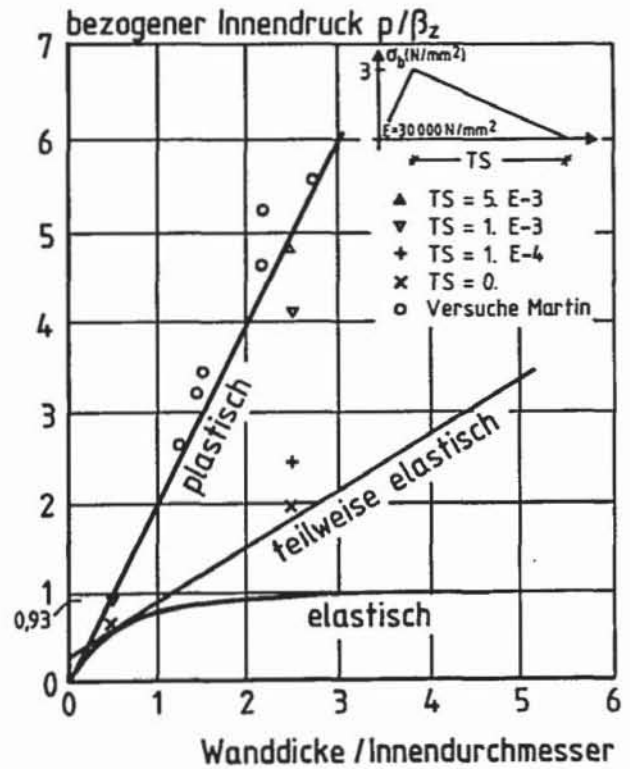
- Eine äußere Betonschicht, in der nur geringe Verformungen zu erwarten sind. Hier kann deshalb linearelastisches Verhalten angenommen und dieser äußere Betonzylinder durch eine Feder mit gleicher Dehnsteifigkeit ersetzt werden (siehe Bild 9.7).

In Anlehnung an die statistischen Überlegungen von Tefers wählt Vos als maximale Betonzugfestigkeit den 95 %-Fraktilewert der zentrischen Zugfestigkeit. Die Länge eines angenommenen tensionstiffening-Astes im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm des Betons wird aus Vergleichsrechnungen mit Zylinderversuchen nach Martin zu 1 % bestimmt (siehe Bild 9.8).

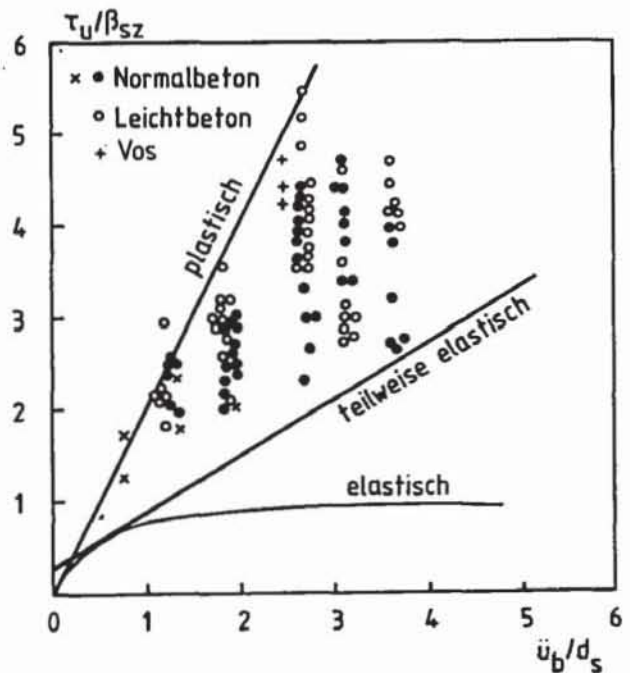


**Bild 9.7:** Elementnetz in der Verbundschicht mit Ersatzfeder K für äußeren Betonzyylinder (nach Vos (1983))  
 Finite element mesh in the slip layer and modelling of the surrounding concrete by a linear elastic spring (after Vos (1983))

Mit Hilfe dieser Annahmen rechnete Vos eigene Ausziehversuche mit guter Genauigkeit nach. Während die rechnerisch ermittelten Verbundspannungen zwischen Verbundschicht und äußerem Beton direkt mit den Versuchsergebnissen verglichen werden konnten, war eine Kontrolle der Radialspannungen nur indirekt möglich. Hierzu wurde aus Bild 9.8 für das vorliegende Verhältnis von Wanddicke zu Innendurchmesser des Zugsrings ( $= 0,5$ ) das Aufsprengen bei einem Innendruck  $p$  von  $0,93 \cdot B_z$  abgelesen. Ein Vergleich der daraus zurückgerechneten Verbundspannungen mit den von Tefers experimentell ermittelten Werten (Bild 9.9) zeigte, daß die Rechenwerte innerhalb des Streubereiches liegen. Für den Zustand der Sprengrißbildung



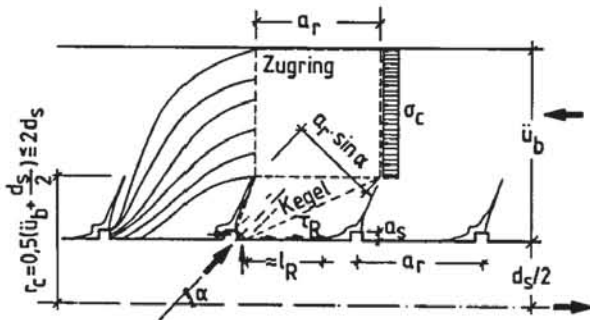
**Bild 9.8:** Anpassung des Materialgesetzes an die Versuche von Martin (nach Vos (1983))  
 Variation of tension stiffening values to fit Martin's tests (after Vos (1983))



**Bild 9.9:** Vergleich zwischen Rechenwerten nach Vos (1983) und Versuchen von Tefers (1973)  
 Comparison of results calculated by Vos (1983) and experimental values as given by Tefers (1979)

läßt sich der Winkel  $\alpha$  aus den angegebenen Verbund- und Radialspannungen bestimmen. Er bleibt für Rechnungen mit Betonfestigkeiten von  $B_{sz} = 25-50 \text{ N/mm}^2$  mit ca.  $30^\circ-33^\circ$  nahezu konstant.

- Das bereits unter Punkt 8 beschriebene analytische Modell nach Schober (1984) beinhaltet als Verbundbruchursache auch das Versagen des Zugrings. Für die Berechnung der im Zugring vorhandenen Beanspruchung nimmt Schober die Neigung der Druckkegelachse zu  $\alpha = 45^\circ$  an (siehe Bild 9.10).



**Bild 9.10:** Verbundmodell, bestehend aus einer dicken Kegelschale und einem dicken Zugring (nach Schober (1984))  
Bond model consisting of a thick conical shell and a thick tensional ring (after Schober (1984))

Versagen des Zugrings tritt nach dem Modell bei voller Plastifizierung des Ringes ein, wobei die maximal aufnehmbare Spannung im Beton der zentrischen Zugfestigkeit entspricht (siehe Bild 9.11).

Damit ergibt sich für die Tragfähigkeit eines Ringes ohne Querbewehrung:

$$\frac{\tau_{RiB}}{B_z} = \psi \cdot \left(0,5 + \frac{\ddot{u}_b}{d_s}\right) \quad [9-7]$$

für:

$$0,5 \leq \frac{\ddot{u}_b}{d_s} \leq 3,5$$

mit:

$\psi = 0,6$  für schlechten Verbundbereich

$\psi = 1,0$  für guten Verbundbereich

$B_z =$  zentrische Zugfestigkeit

und für den Ring mit Querbewehrung:

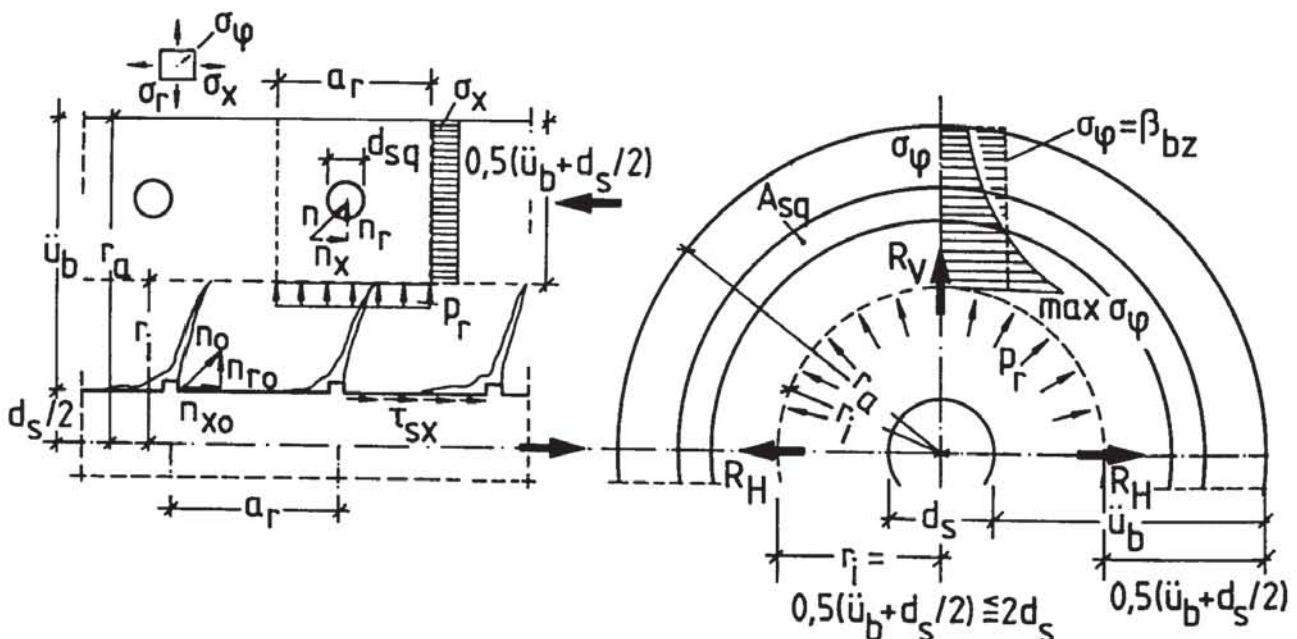
$$\frac{\tau_{RiB}}{B_z} = \psi \cdot \left[ \left(0,5 + \frac{\ddot{u}_b}{d_s}\right) + \frac{2 \cdot a_{sq} \cdot n}{d_s} \right] \quad [9-8]$$

mit:

$a_{sq} =$  Bügelquerschnitt durch Bügelabstand

$n =$  Verhältnis der E-Moduli

- Losberg/Olsson (1978) geben eine halbempirische Beziehung für die Verbundspannung bei Auftreten eines Sprengnisses an. In Anlehnung an Tefers nehmen sie an, daß bei geringer Betondeckung die maxi-



**Bild 9.11:** Beanspruchung des gedachten Zugrings ( $\ddot{u}_b \leq 3,5 \cdot d_s$ ) (nach Schober (1984))  
Loading conditions of the assumed tensional ring ( $\ddot{u}_b \leq 3,5 \cdot d_s$ ) (after Schober (1984))





**Bild 9.12:** Versagensarten für verschiedene Bewehrungsanordnungen (nach Losberg/Olsson (1978))  
 Splitting line patterns for some cases of reinforcement arrangements (after Losberg/Olsson (1978))

Die Verbundspannung hauptsächlich von der möglichen Rißausbreitung im Querschnitt sowie der Spaltzugfestigkeit des Betons abhängt (siehe Bild 9.12).

Unter Annahme einer Proportionalität zwischen Spaltzugfestigkeit und Quadratwurzel aus der Würfeldruckfestigkeit geben sie folgenden Zusammenhang an:

$$T_{RiB} = k_b \frac{u}{m} \sqrt{\beta_w} \quad (N/mm) \quad (9-9)$$

$T$  = Verbundkraft pro Längeneinheit des Stabes  
 $u, m$  siehe Bild 9.12, Einheiten in N und mm

Durch statistische Auswertung von Balkenendversuchen erhalten sie für den Faktor  $k_b$  den Wert 0,53. Es zeigte sich, daß dieser Faktor auch für Versuche an Übergreifungsstößen zutrifft (siehe Bild 9.13).

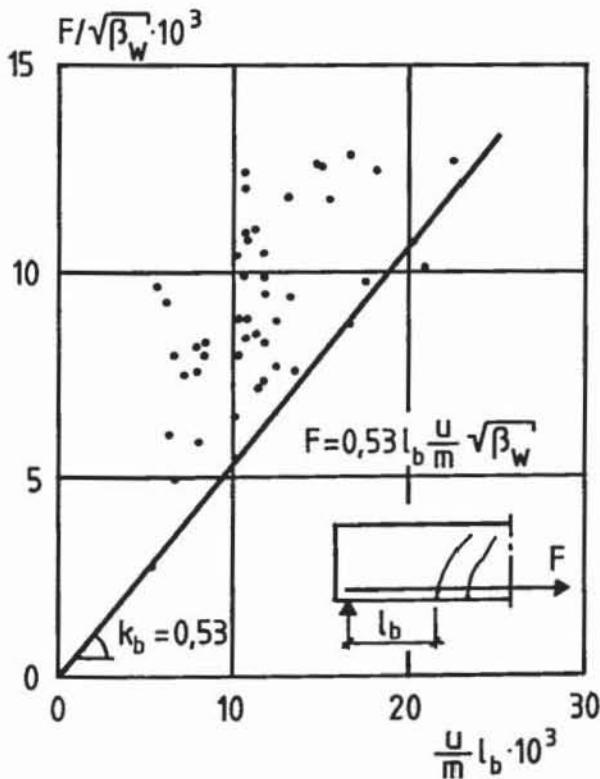
Eine eventuell vorhandene Querbewehrung erhöht die bezogene Verbundkraft um:

$$\Delta T = Q \cdot \frac{A_{sq}}{s_q} \quad (N/mm) \quad (9-10)$$

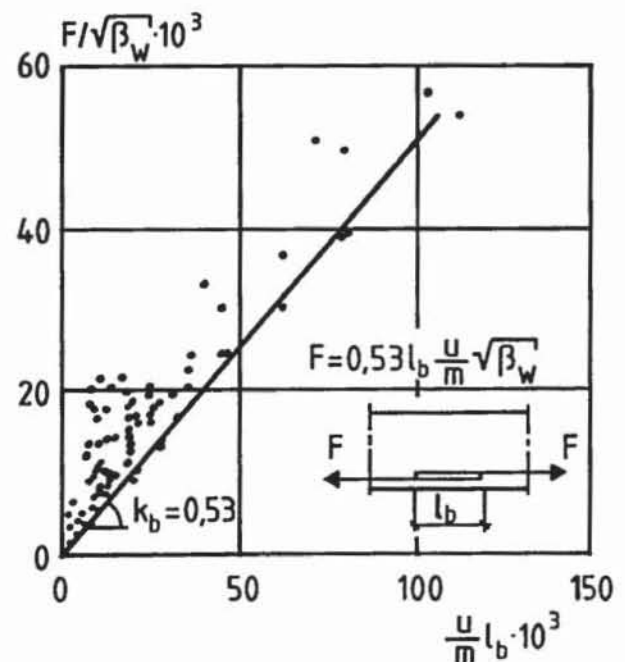
mit:

$A_{sq}$  = Fläche der Querbewehrung  
 $s_q$  = Abstand der Querbewehrung

Der Faktor  $Q$  wird durch Vergleich von Versuchen mit und ohne Querbewehrung vorsichtig zu 120 N/mm<sup>2</sup> abgeschätzt.



a) Balkenendtest



Einheiten: N, mm, N/mm<sup>2</sup>

b) Versuche an Übergreifungsstößen

**Bild 9.13:** Versuchsauswertung zur Bestimmung von  $k_b$  (nach Losberg/Olsson (1978))  
 Derivation of factor  $k_b$  from test results (after Losberg/Olsson (1978))

- Eine ähnliche Vorgehensweise findet man bei Kemp/Wilhelm (1979). Sie ermittelten an Balkenendkörpern für unterschiedliche Stababstände, Betondeckungen und Bügelbewehrungen die Lasten, die zum Auftreten von Längsrissen führen. Durch Auswertung der Ergebnisse mit Hilfe von Regressionsrechnungen fanden sie folgende Beziehung für die über die Einbettungslänge gemittelte Verbundspannung  $\tau_{sm}$  bei Auftreten von Längsrissen:

$$\tau_{R1B} = \sqrt{B_W} \cdot (0,22 + 0,20 \frac{u_b}{d_s}) \quad (N/mm^2) \quad (9-11)$$

$B_W$  = Druckfestigkeit ( $N/mm^2$ )

Es ist hier zu berücksichtigen, daß die Beziehung an Körpern mit Verbundlängen von  $10 \cdot d_s$  abgeleitet wurde. Der Spitzenwert der Verbundspannung liegt daher sicher deutlich über dem berechneten mittleren  $\tau_{R1B}$ .

#### Zusammenfassung und Bewertung

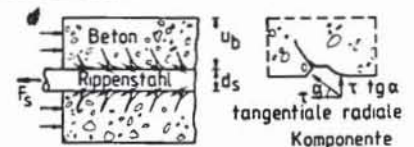
In den vorliegenden Veröffentlichungen wird das Problem der Längsrißbildung empirisch, analytisch oder

mit Hilfe der FEM untersucht. Den meisten Arbeiten liegt folgende Modellvorstellung zugrunde:

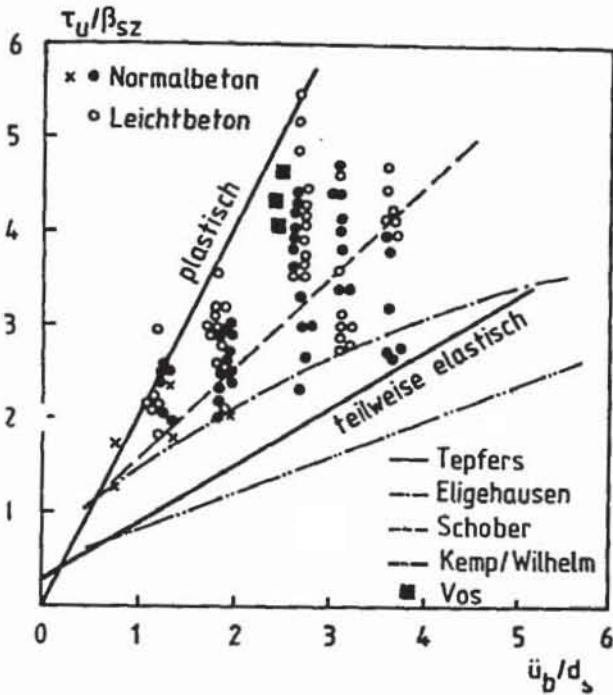
Die sich unter einem Winkel  $\alpha$  von den Stahlrippen in den Beton ausbreitende Verbundkraft wird ersetzt durch eine parallel zum Stab wirkende Verbundspannung  $\tau$  und eine radial gerichtete Pressung  $p$ . Diese wirkt als konstanter Innendruck auf ein dickwandiges Ersatzrohr mit einer Wanddicke, die kleiner oder gleich der geringsten Betondeckung ist. Einzelne Arbeiten unterscheiden sich sowohl hinsichtlich der Annahme für die Größe des Winkels  $\alpha$ , des Ansatzes der wirksamen Betondeckung als auch der Wahl der Bruchbedingung (aktuelle Zugfestigkeit des Betons). Die von verschiedenen Autoren getroffenen Rechenannahmen sind in Tabelle 9.2 gegenübergestellt. Bild 9.14 zeigt einen Vergleich verschiedener Beziehungen mit Versuchsergebnissen nach Teffers (1973) und Tilantera/Rechardt (1977).

Während die von Teffers durchgeführte elastische Rechnung die Tragfähigkeit weit unterschätzt, liegen fast alle Versuchsergebnisse zwischen den Geraden für plastischen und teilweise gerissenen Zustand. Die von Elgehausen für Übergreifungsstöße abgelei-

Autor	Theorie zur Ermittlung des Winkels $\alpha$	Winkel $\alpha$ (°)	Innenradius des "Ersatzrohres"	Bruchkriterium	aktuelle Betonzugfestigkeit	Bemerkung
Tepfers (1973)	FEM eben, elastisch	45	$d_s/2$ $d_s/2$ $0,486(u+d_s/2)$	elastisch plastisch teilweise gerissen, elastisch	$\beta_{sz}$ $\beta_{sz}$ $\beta_{sz}$	Die Annahme der Spaltzugfestigkeit wird statistisch begründet. Beim Spaltzugkörper und bei Spaltrissen ist die Lage des Risses durch die Geometrie vorgegeben.
Martin (1970)	FEM, räumlich, elastisch mit unterschiedlichen Steifigkeiten	30 - 44	$d_s/2$	plastisch	$\beta_{sz}$	Die Spaltzugfestigkeit wird gewählt, da Versuche an Betonzylindern unter Innendruck versagten, wenn die mittlere Ringzugspannung die Spaltzugsteifigkeit erreichte.
Elgehausen (1979)	Vergleich zwischen FEM, räumlich, mit unterschiedlichen Steifigkeiten und FEM, eben, elastisch	23	$d_s/2$	RVE = $0,5 d_s$	$\beta_z$	Beziehungen wurden für Übergreifungsstöße abgeleitet.
Vos (1983)	FEM, tensionstiffening	30 - 33	$2 d_s$	elastisch	95% $\beta_z$	Begründung der 95% -Fraktile der zentrischen Zugfestigkeit entsprechend Tepfers.
Schober (1984)	Annahme	45	$0,5(u+d_s/2)$ $\leq 2 d_s$	RVE = Betondeckung $\leq 2 d_s$	$\beta_z$	Bezeichnungen:
Losberg/Olsson (1978)	empirisch abgeleitete Beziehungen					
Kemp/Wilhelm (1979)						



**Tabelle 9.2:** Vergleich der von verschiedenen Autoren getroffenen Rechenannahmen  
Comparison of assumptions made by various investigators



**Bild 9.14:** Vergleich der Beziehungen zur Bestimmung der Längsrißverbundspannung nach verschiedenen Autoren mit experimentellen Ergebnissen

Comparison of experimental values with analytical models given by various investigators for the prediction of bond stresses at the formation of longitudinal cracks

tete Beziehung grenzt den Streubereich nach unten hin ab und liegt damit auf der sicheren Seite. Die empirisch an Balkenendkörpern ermittelte Gleichung nach Kemp/Wilhelm liegt deutlich unterhalb des Streubereichs. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, daß bei großer Einbettungslänge die Verbund- und Spaltspannungen sehr ungleich über die Verankerungslänge verteilt sind und die Spitzenwerte der Verbundspannung ein Vielfaches des Mittelwertes betragen. Es scheint daher notwendig, bei einer Beurteilung der Längsrißgefahr die Verteilung der Verbundspannungen entlang der Stabachse zu berücksichtigen. Die Rechenergebnisse von Vos liegen im oberen Streubereich der Versuchsergebnisse. Möglicherweise wird bei ihm durch den verhältnismäßig flach abfallenden Ast im Betongesetz die Tragfähigkeit des Betons etwas überschätzt. Durch die Formel von Schober wird der Mittelwert der Versuchsergebnisse gut beschrieben.

Sieht man von den empirisch hergeleiteten Formeln ab, die durch Regressionsrechnungen an bestimmte

Versuchsergebnissen angeglichen werden, so beinhalten alle oben beschriebenen Beziehungen sowohl auf der Widerstandsseite als auch auf der Beanspruchungsseite Größen, die mehr oder weniger willkürlich gewählt werden. Eine Übereinstimmung von Rechen- mit Versuchsergebnissen bestätigt dann nicht unbedingt die Richtigkeit aller getroffenen Festlegungen. So heben sich z.B. Einflüsse aus einer zu hoch angesetzten Betonzugfestigkeit und eines zu groß angenommenen Winkels  $\alpha$  gegenseitig auf. Über die Richtigkeit der in den beschriebenen Modellen getroffenen Annahmen kann mit dem derzeitigen Kenntnisstand keine Aussage getroffen werden.

## 10 Schubrisse

Im Gegensatz zu den in der Literatur zahlreich vorliegenden Vorschlägen zur Ermittlung der Breite und des Abstandes von Rissen aus Biege- und Zugbeanspruchung sind zur Berechnung von Schubrisse nur wenige Ansätze bekannt.

Häufig wird dabei entsprechend der Fachwerkanalogie den Betrachtungen eine Zugstrebe zugrundegelegt, die näherungsweise als Dehnkörper behandelt wird. Der Mechanismus der Rißbildung entspricht dann den unter Punkt 4 dargelegten Zusammenhängen. Als wesentliche Einflußfaktoren auf die Schubrißbreite werden in der Regel Durchmesser, Abstand, Neigung und Profilierung der Schubbewehrung, Schubbewehrungsgrad sowie Betondruckfestigkeit angesehen. In Einzelfällen werden auch die Höhe der Druckzone, der Längsbewehrungsgrad sowie eine Kornverzahnung zwischen den Rißbufern berücksichtigt.

Eine ausführliche Auswertung in der Literatur beschriebener Beziehungen zur Berechnung von Schubrißbreiten wurden von Rehm/Elgehausen/Mallée (1978) bzw. (1983) durchgeführt. Auf eine Darstellung dieser Ansätze wird daher im Rahmen der vorliegenden Arbeit verzichtet.

## 11 Zusammenfassung und Ausblick

In letzter Zeit gehäuft aufgetretene Schadensfälle, die unmittelbar oder mittelbar mit vorhandenen Rissen zusammenhängen, führten in der Fachwelt zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit Fragen nach zutreffenden Theorien der Rißentwicklung und Auswirkung von Rissen auf Betonbauwerke. Als Beitrag hierzu wird im vorliegenden Querschnittsbericht eine Bestandsaufnahme bisher entwickelter Formeln zur

Rißabstands- und Rißbreitenberechnung sowie von Maßnahmen zur Rißbreitenbegrenzung durchgeführt.

In der Literatur vorliegende Arbeiten zur Problematik der Rißbildung an Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen lassen sich in "klassische Betrachtungsweisen" und in "neuere Betrachtungsweisen" bzw. "kontinuierliche Rißtheorien" gliedern.

Alle klassischen Theorien zur Bestimmung der Rißbreite lassen den Rißbildungsprozeß außer acht und betrachten von vornherein einen Zustand mit konstantem Rißbild. Autoren, die sich mit der Rißbildung infolge Lastbeanspruchung befassen, gehen davon aus, daß sich bereits unter Gebrauchslast ein abgeschlossenes Rißbild einstellt. In Arbeiten, welche reine Zwangbeanspruchung behandeln, wird dagegen meist der Zustand der Erstrißbildung zugrunde gelegt.

Eine erste Voraussetzung für hinreichend genaue Ergebnisse eines Ansatzes sind zutreffende Annahmen bezüglich des im betrachteten Lastfall erreichten Rißbildes. Aus Versuchen ist bekannt, daß bei reiner Zwangbeanspruchung und bei niedrigen Bewehrungsgraden das abgeschlossene Rißbild nicht erreicht wird. Allerdings können im zweitgenannten Fall Dauerlasten oder nicht ruhende Belastung zu einer deutlichen Zunahme der Rißbildung führen.

Praktisch alle ausgewerteten "klassischen" Formeln werden durch Vorfaktoren an bestimmte Versuche angeglichen. Sie müssen daher, unabhängig davon, ob alle Einflußgrößen richtig erfaßt sind, für ähnliche Verhältnisse gute Ergebnisse liefern. Bei anderen Parameterkonstellationen ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch meist schlechter. Allerdings ist aufgrund der für den praktischen Gebrauch notwendigen stark idealisierten Annahmen eine zu große Genauigkeit ohnehin nicht zu erwarten.

Ein Vergleich zeigte, daß theoretisch begründete und auf statistischer Auswertung von vielen Versuchen basierende Beziehungen für die meisten der in der Praxis üblichen Verhältnisse (abgeschlossenes Rißbild) ausreichend genaue Ergebnisse liefern. Durch Zusatzbedingungen, wie z. B. die Beschränkung der Betonmitwirkung bei der Rißbreitenberechnung, ist eine Anwendung von Formeln, die ein abgeschlossenes Rißbild zugrunde legen, auch bei Erstrißbildung möglich. In Normenwerken aufgenommene Nachweisverfahren für Rißbreiten basieren auf diesen Beziehungen.

Eine ähnliche Auswertung für Theorien, die Zwangbeanspruchung behandeln, war wegen der bisher vorhandenen geringen Anzahl von experimentellen Ergebnissen nicht möglich.

Kontinuierliche Rißtheorien erfassen den gesamten Rißbildungsprozeß vom Erstriß bis zum abgeschlossenen Rißbild. Eine Trennung der Betrachtungen für Last und Zwang ist dann nicht mehr notwendig. Nach wie vor sind zur analytischen Behandlung des Problems jedoch eine Reihe von Vereinfachungen erforderlich.

Bei Bewehrungsanordnungen mit sehr geringer Betondeckung oder geringen Abständen zwischen den einzelnen Stäben besteht die Gefahr der Längsrißbildung parallel zum Stab bzw. der Abplatzung der gesamten Betondeckung. Analytische Verfahren zur Ermittlung der Längsrißlast beinhalten i.a. sowohl auf der Widerstands- als auch auf der Beanspruchungsseite Größen, die mehr oder weniger willkürlich festgelegt werden. Über die Richtigkeit der in den Modellen getroffenen Annahmen ist mit dem derzeitigen Wissensstand keine Aussage möglich.

In neueren Arbeiten gewonnene Erkenntnisse über den Mechanismus der Rißbildung tragen dazu bei, das Verhalten von Stahlbetonbauteilen unter Last- und Zwangbeanspruchung besser zu verstehen. Ergebnisse, wie die Erfordernis einer Mindestbewehrung sollten beachtet werden und möglichst schnell ihren Niederschlag in den entsprechenden Normen finden.

Weitere Untersuchungen sind unseres Erachtens zum Rißverhalten von dicken Bauteilen unter Zwangbeanspruchung erforderlich. Hier ist insbesondere der Einfluß von Eigenspannungen zu untersuchen.

In bisherigen Rißtheorien sind verschiedene, wesentliche Einflußgrößen nicht, oder nur stark vereinfacht berücksichtigt. Zunächst stellt die häufige Annahme einer konstanten, mittleren Verbundspannung eine sehr starke Vereinfachung der in Wirklichkeit nichtlinearen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung dar, die zudem noch mit der Entfernung zum Riß variiert. Als weitere Parameter sind zu nennen die Streuung der Betonzugfestigkeit, die häufig rißauslösende Wirkung von Querbewehrungen, das Verbundverhalten bei Verwendung von Bewehrungsstäben mit unterschiedlichen Durchmessern oder bei Anordnung einer gemischten Bewehrung (Beton- und Spannstahl) in einem Querschnitt. Fragen nach der Größe der auf Zug mitwirkenden Betonfläche (die letztendlich vom Rißabstand selbst abhängt) oder der Auswirkung von Scheibenspannungen aus Biegewirkung sind nicht hinreichend geklärt. Eine Einbeziehung dieser Parameter bei der analytischen Behandlung der Rißbildung würde die bisher festgestellte erhebliche Streuung zwischen Rechen- und Versuchsergebnissen sicherlich deutlich verringern.

## Literaturverzeichnis

### **ACI 318-83**

Building Code Requirements for Reinforced Concrete. American Concrete Institute, Detroit, Michigan 1983

### **Beeby, A. W.:**

Suggested Modifications to the Crack Prediction Formula in the 1970 CEB-Recommendation. CEB, Bulletin d'Information, Nr. 89, Paris 1973

### **Beeby, A. W.:**

Cracking: what are crack width limits for? Concrete, Volume 12, pp. 31-33, July 1978

### **Beeby, A. W.:**

The prediction of crack widths in hardened concrete. The Structural Engineer, Volume 57 A, pp. 9-30, January 1979

### **Bruy, E.:**

Über den Abbau instationärer Temperaturspannungen in Betonkörpern durch Ribbildung. Schriftenreihe des Otto-Graf-Instituts, Heft 56, Stuttgart 1973

### **CEB:**

Cracking and Deformations. CEB Design Manual, 1985

### **CEB/FIP**

Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton. Band II, 1978

### **DIN 1045**

Beton und Stahlbeton - Bemessung und Ausführung. Ausgabe Dezember 1978

### **DIN 1045, Entwurf**

Beton und Stahlbeton - Bemessung und Ausführung. Entwurf Juni 1986

### **DIN 4227 Teil 1**

Spannbeton - Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung. Ausgabe Dezember 1979

### **DIN 4227 Teil 1 - Änd.Richtl.**

Spannbeton - Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung. Ausgabe Juli 1985

### **Eibl, J.:**

Zwängung und Ribbildung von Stahlbetonstäben bei Behinderung der Längsverformung. Die Bautechnik, Heft 11, S. 373-379, 1969

### **Eligehausen, R.:**

Übergreifungsstöße zugbeanspruchter Rippenstähle mit geraden Stabenden. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 301, 1979

### **Eligehausen, R.; Popov, E. P.; Bertero, V. U.:**

Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars under Generalized Excitations. Report No. UCB/EERC-83/23; University of California, Berkeley, 1983

### **EUROCODE Nr.2**

Gemeinsame einheitliche Regeln für Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbauten. Entwurf 1984

### **Falkner, H.:**

Zur Frage der Ribbildung durch Eigen- und Zwängspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 208, 1969

### **Gergely, P.; Lutz, L. A.:**

Maximum Crack Width in Reinforced Concrete Flexural Members. ACI, SP-20, pp. 87-117, 1968

### **Goto, Y.:**

Cracks formed in concrete around tension bars. ACI-Journal, Proceedings, Vol. 68, No. 4, pp. 244-251, April 1971

### **Grasser, E.; Thielen, G.:**

Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 240, 1976

### **Heilmann, H. G.:**

Beziehungen zwischen Zug- und Druckfestigkeit des Betons. beton, Heft 2, S. 68-702, 1969

### **Holmberg, A.:**

Cracks under longtime loading. CEB, Zeitschrift für Com. IVa, 1972

### **Janovic, K.:**

Bericht über den neuen konsolförmigen Ausziehkörper als Vorschlag für ein allgemeingültiges Verbundprüfverfahren. Institut Massivbau, TU München, 1979

### **Jungwirth, D.:**

Begrenzung der Ribbreite im Stahlbeton- und Spannbetonbau aus der Sicht der Praxis. Beton und Stahlbetonbau, Heft 7, S. 173-178 und Heft 8, S. 204-208, 1985

### **Kemp, E. L.; Wilhelm, W. I.:**

Investigation of the Parameters Influencing Bond Cracking. ACI Journal, Vol. 1, pp. 47-71, Jan. 1979

**König, G.:**

Berechnen und gezieltes Begrenzen von Rißbreiten im Stahlbeton und Spannbeton. Vortrag Deutscher Betontag, 1985

**König, G.; Giegold, I.:**

Zur Bemessung von Koppelfugen bei Massivbrücken. Beton und Stahlbetonbau, Heft 6, S. 141-147 und Heft 7, S. 191-197, 1984

**König, G.; Krips, M.:**

Zur Rißbreitenbeschränkung im Massivbau. "Fort-schritte im konstruktiven Ingenieurbau" (Gallus Rehm zum 60. Geburtstag gewidmet), Berlin, 1984

**Krips, M.:**

Rißbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton. Dissertation TH Darmstadt, 1984

**Langer, P.:**

Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau. Dissertation Universität Stuttgart, 1987

**Leonhardt, F.:**

Vorlesungen über Massivbau. Vierter Teil: Nachweis der Gebrauchsfähigkeit, Rissebeschränkung, Formänderungen, Momentenumlagerung und Bruchlinientheorie im Stahlbetonbau. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976 + 1978

**Leonhardt, F.:**

Zur Behandlung von Rissen im Beton in den deutschen Vorschriften. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 7, S. 179-184 und Heft 8, S. 209-215, 1985

**Linder, R.:**

Risse im Beton. Betonsteinzeitung 37, Heft 4, S. 222-227, Heft 5, S. 282-289, Heft 6, S. 337-343, 1971

**Losberg, A.; Olsson, P.-A.:**

Bond Failure of Deformed Reinforcing Bars Based on the Longitudinal Splitting Effect of the Bars. ACI-Journal, pp. 5-8, January 1978

**Martin, H.:**

Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit, Verbund und Sprengwirkung von Bewehrungsstäben unter Kurzzeitbelastung. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 228, 1973

**Martin, H.; Schießl, P.; Schwarzkopf, M.:**

Ableitung eines allgemeingültigen Berechnungsverfahrens für Rißbreiten aus Lastbeanspruchung auf der Grundlage von theoretischen Erkenntnissen und Versuchsergebnissen. Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 309, 1980

**Noakowski, P.:**

Die Bewehrung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangbeanspruchung infolge Temperatur. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 296, 1978

**Noakowski, P.:**

Praxisgerechtes Verfahren für die Bemessung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangbeanspruchung. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 4 S.77-82 und Heft 5, S.120-125, 1980

**Noakowski, P.:**

Kontinuierliche Theorie der Rißbildung. Vorläufiger Abschlußbericht Nr. 1270, TU München, November 1982

**Noakowski, P.:**

Verbundorientierte, kontinuierliche Theorie zur Ermittlung der Rißbreite. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 7, S. 185-190 und Heft 8, S. 215-221, 1985

**Rao, P. S.:**

Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 177, 1966

**Rehm, G.:**

Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 138, 1961

**Rehm, G.; Eligehausen, R.:**

Einfluß von Dauerlasten und Ermüdungsbeanspruchung auf das Rißverhalten von Stahlbetonbauteilen unter überwiegender Biegebeanspruchung. CEB, Bulletin d'Information No. 89, 1973

**Rehm, G.; Eligehausen, R.; Mallée, R.:**

Rißverhalten von Stahlbetonkörpern bei Zugbeanspruchung. Untersuchungsbericht Nr. 76/4, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1976

**Rehm, G.; Eligehausen, R.; Mallée, R.:**

Untersuchungen zur Frage der Schrägrißbreiten in Stahlbetonbauteilen. Untersuchungsbericht Nr. 16/78, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1978

**Rehm, G.; Elgehausen, R.; Mallée, R.:**

Zur Frage der Beschränkung der Schrägrißbreiten in Stahlbetonbauteilen. Betonwerk + Fertigteiltechnik, Heft 6, S. 369-379, 1983

**Rehm, G.; Mallée, R.:**

Untersuchungen zur Frage der Größe der bei der Ribbildung mitwirkenden Betonzugfläche. Bericht des Instituts für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1981

**Rehm, G.; Martin, H.:**

Zur Frage der Ribbegrenzung im Stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 8, S. 175-182, 1968

**Rostásy, F. S.; Henning, W.:**

Zwang und Oberflächenbewehrung dicker Wände. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 4, S. 108-113 und Heft 5, S. 134-136, 1985

**Rostásy, F. S.; Koch, R.; Leonhardt, F.:**

Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus Stahlleichtbeton. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 267, 1976

**Schießl, P.:**

Zur Frage der zulässigen Ribbreiten und der erforderlichen Betondeckung im Stahlbeton unter besonderer Berücksichtigung der Karbonatisierungstiefe des Betons. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 255, 1976

**Schießl, P.:**

Beschränkung der Ribbreiten bei Zwangbeanspruchung. Betonwerk + Fertigteil-Technik, Heft 6, 2/1976

**Schießl, P.:**

Einfluß von Rissen auf die Dauerhaftigkeit von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen. Institut für Betonstahl und Stahlbetonbau e.V., 1985

**Schießl, P.; Wölfe!, E.:**

Konstruktionsregeln zur Beschränkung der Ribbreite - Grundlagen zur Neufassung DIN 1045, Abschnitt 17.6 (Entwurf 1985). Beton- und Stahlbetonbau, Heft 1, S. 269-274, 1986

**Schober, H.:**

Ein Modell zur Berechnung des Verbundes und der Risse im Stahl- und Spannbeton. Dissertation Universität Stuttgart, 1984

**Springenschmid, R.:**

Die Ermittlung der Spannungen infolge von Schwinden und Hydratationswärme im Beton. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10, S. 263-269, 1984

**Tepfers, R.:**

A Theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices for Deformed Bars. Chalmers University of Technology, Division of Concrete Structures, Publication 73:2, Göteborg 1973

**Tepfers, R.:**

Cracking of concrete cover along anchored deformed reinforcing bars. Magazine of Concrete Research, Vol. 31, No. 106, pp. 3-12, March 1979

**Tilanterä, T.; Rechartt, T.:**

Bond of Reinforcement in Lightweight Aggregate Concrete. Otaniemi, Helsinki University of Technology, Division of Structural Engineering, Publication 17, 1977

**Trost, H.; Cordes, H.; Thormählen, U.; Hagen, H.:**

Teilweise Vorspannung - Verbundfestigkeit von Spanngliedern und ihre Bedeutung für Ribbildung und Ribbreiten. Schriftenreihe des DAFStb, Heft 310, 1980

**Vos, F.:**

Influence of Loading Rate and Radial Pressure on Bond in Reinforced Concrete. Delft University Press, 1983

**Wischers, G.; Manns, W.:**

Ursachen für das Entstehen von Rissen in jungem Beton. beton, Heft 4, S. 167-171 und Heft 5, S. 222-228, 1973