Asymptotische Entwicklungen des Robbins-Monro-Prozesses

Von der Fakultät Mathematik der Universität Stuttgart
als Habilitationsschrift genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Jürgen Dippon

aus Beutelsbach

Hauptberichter:	Prof. Dr. H. Walk
Mitberichter:	Prof. Dr. V. Fabian
	Prof. Dr. U. Herkenrath

Eingereicht am 9. Dezember 1997
Habilitationsvortrag am 27. Mai 1998

Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart

1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Nichtrekursive Darstellungen des Robbins-Monro-Prozesses **5**

1.1 Nichtlineare Robbins-Monro-Prozesse 5

1.2 Quasilineare Regressionsfunktionen 8

1.3 Sublineare Regressionsfunktionen 28

2 Asymptotische Entwicklung von Momenten und Kumulanten **43**

2.1 Momente des Robbins-Monro-Prozesses 43

2.2 Momente der Darstellungen 51

2.3 Kumulanten der Darstellungen 55

3 Edgeworth-Entwicklungen für Summen von Multilinearformen **57**

3.1 Formale Edgeworth-Entwicklungen 57

3.2 Entwicklungen mit Resttermen $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ und $o\left(\frac{1}{n}\right)$ 59

4 Asymptotische Entwicklungen des Robbins-Monro-Prozesses **78**

4.1 Edgeworth-Entwicklungen 78

4.2 Cornish-Fisher-Entwicklungen 81

4.3 Stochastische Entwicklungen 84

Bezeichnungen **87**

Literaturverzeichnis **88**

Lebenslauf **90**

Einleitung

Zur Schätzung der Nullstelle ϑ einer unbekannten Regressionsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Funktionswert $f(X_n)$ an der Stelle X_n nur mit einem zufälligen Fehler V_n mittels $Y_n = f(X_n) - V_n$ beobachtet werden kann, schlugen Robbins und Monro (1951) die Rekursion

$$X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n} Y_n$$

mit einer Schrittweite $a > 0$ vor [24]. Dieses Verfahren wurde seitdem in die verschiedensten Richtungen verallgemeinert, und die dabei entstehenden stochastischen Prozesse zahlreichen Fragestellungen unterworfen. Viele Referenzen dazu findet man in den Übersichtsartikeln [25], [29] und den Monographien [11], [16].

Ein zentraler Grenzwertsatz für (X_n) gibt Auskunft über die Konvergenzgeschwindigkeit des stochastichen Prozesses, nicht jedoch über die Konvergenzgeschwindigkeit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße. Renz zeigte, daß für den Robbins-Monro-Prozeß ein Grenzwertsatz vom Berry-Esseen-Typ gilt [22]. Hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit der Überdeckungswahrscheinlichkeiten von Konfidenzintervallen für den unbekannten Parameter ϑ liefern diese Resultate jedoch nicht die theoretisch erreichbaren Raten.

In der vorliegenden Arbeit werden Edgeworth-Entwicklungen des Robbins-Monro-Prozesses vorgestellt, welche eine Approximation der Verteilungsfunktion mit Resttermen der Ordnung $o(1/\sqrt{n})$ und $o(1/n)$ ermöglichen.

Ausgehend von einer Idee von Walk [28] zur linearen Approximation des Robbins-Monro-Prozesses wird die Rekursion in eine Summe von Multilinearformen in den Beobachtungsfehlern V_n aufgelöst. Die Gültigkeit dieser Darstellungen wird in Kapitel 1 für quasi- und sublineare Regressionsfunktionen nachgewiesen.

In Kapitel 2 werden die Entwicklungen der ersten vier Kumulanten der Darstellungsformen ermittelt. Dadurch ist die Form der Edgeworth-Entwicklung bereits festgelegt. Die dort gefundene asymptotische Entwicklung der Verzerrung könnte auch für weitere stochastische Approximationsverfahren von Interesse sein, da sie eine Korrektur des rekursiven Schätzers erlaubt.

Zum Nachweis der Gültigkeit der Edgeworth-Entwicklungen der Darstellungsformen mit Resttermen der Ordnung $o(1/\sqrt{n})$ und $o(1/n)$ werden in Kapitel 3 die Methode der charakteristischen Funktionen und das Smoothing Lemma von Esseen verwendet. Der Beweis baut auf Ideen von Helmers [15], Callaert, Janssen und Veraver-

beke [7] und Bickel, Götze und van Zwet [6] auf, die Edgeworth-Entwicklungen für L- und U-Statistiken untersucht haben.

In Kapitel 4 werden diese Ergebnisse auf den Robbins-Monro-Prozeß angewendet. Damit kann die Überdeckungswahrscheinlichkeit von Konfidenzintervallen für ϑ mit einem Restterm der Ordnung $O(1/n)$ angegeben werden. Weitere Folgerungen betreffen Cornish-Fisher-Entwicklungen der Quantilfunktion und eine Edgeworth-Korrektur der Verteilungsfunktion. Schließlich wird beschrieben, wie der Prozeß (X_n) durch einen in Potenzen von $1/\sqrt{n}$ und einer normalverteilten Zufallsvariablen definierten Prozeß stochastisch entwickelt werden kann.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei Herrn Professor Dr. H. Walk für seine großzügige Förderung, für Korrekturhinweise zur Schlußfassung dieser Arbeit und für die Erstellung des Hauptberichtes. Prof. Dr. V. Bentkus, Bielefeld, und Prof. Dr. V.V. Ulyanov, Moskau, danke ich für ihre Diskussionsbereitschaft. Bei Prof. Dr. V. Fabian, East Lansing, und Prof. Dr. U. Herkenrath, Duisburg, bedanke ich mich für ihre Arbeit als Mitberichter. Frau R. Teichmann danke ich für den sorgfältigen LaTeX-Schriftsatz.

Kapitel 1

Nichtrekursive Darstellungen des Robbins-Monro-Prozesses

1.1 Nichtlineare Robbins-Monro-Prozesse

Nach Robbins und Monro (1951) kann die Nullstelle ϑ einer unbekannten Regressionsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Funktionswert $f(X_n)$ an der Stelle X_n nur mit einem zufälligen Fehler V_n durch $Y_n = f(X_n) - V_n$ beobachtbar ist, rekursiv mittels $X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n} Y_n$ geschätzt werden [24]. Hierbei ist $a > 0$ eine geeignet zu wählende Schrittweite. Im folgenden soll der durch diese Rekursion definierte stochastische Prozeß (X_n) unter den folgenden Annahmen untersucht werden.

Voraussetzung 1.1 (Robbins-Monro-Prozeß). *Die Regressionsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei meßbar; $V, V_1, V_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger identisch verteilter reeller Zufallsvariablen mit $EV = 0$, $EV^2 = \sigma^2$ und, für ein gewisses $m \geq 2$, $E|V|^m < \infty$; X_1 sei eine reelle Zufallsvariable mit $E|X_1|^m < \infty$. Für ein festes $a > 0$ definiere die Rekursion*

$$X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n}(f(X_n) - V_n), \;\; n \in \mathbb{N},$$

den stochastischen Prozeß (X_n).

Um geeignete nichtrekursiven Darstellungen zu erhalten, müssen an die Regressionsfunktion f noch Regularitätsbedingungen gestellt werden. Diese betreffen sowohl das lokale Verhalten von f in einer Umgebung der Nullstelle ϑ als auch das globale Verhalten von f.

Voraussetzung 1.2 (lokale Glattheit). *Für die meßbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei mindestens eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt: es gibt ein $\delta_i \in (0, 1]$, $i \in$*

$\{1,2,3\}$, *und reelle Zahlen* A, B, C *und* ϑ *mit*

$$(R_{1+\delta_1}) \qquad f(x) = A(x-\vartheta) + O(|x-\vartheta|^{1+\delta_1}),$$

$$(R_{2+\delta_2}) \qquad f(x) = A(x-\vartheta) + \frac{B}{2}(x-\vartheta)^2 + O(|x-\vartheta|^{2+\delta_2}),$$

$$(R_{3+\delta_3}) \qquad f(x) = A(x-\vartheta) + \frac{B}{2}(x-\vartheta)^2 + \frac{C}{6}(x-\vartheta)^3 + O(|x-\vartheta|^{3+\delta_3}).$$

Voraussetzung 1.3 (Quasilinearität). *Für die meßbare Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gelte*

$$\underset{\vartheta\in\mathbb{R}}{\exists} \quad \underset{0<K_1<K_2<\infty}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \qquad K_1|x-\vartheta| \le \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x) \le K_2|x-\vartheta|.$$

Voraussetzung 1.4 (Sublinearität). *Für die meßbare Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gelte*

$$\underset{\vartheta\in\mathbb{R}}{\exists} \quad \underset{K>0}{\exists} \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\alpha>0}{\exists} \quad \underset{|x-\vartheta|\ge\varepsilon}{\forall} \qquad \alpha \le \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x) \le K|x-\vartheta|.$$

Der Graph einer quasilinearen Funktion verläuft also zwischen zwei sich in $(x,y) = (\vartheta,0)$ schneidenden Geraden mit positiver Steigung. Der Graph einer sublinearen Funktion verläuft zwischen der x-Achse und einer diese in $(\vartheta,0)$ schneidenden Geraden mit positiver Steigung. Darüberhinaus muß der Graph außerhalb eines noch so kleinen Intervalls um $x=\vartheta$ von der x-Achse einen positiven Abstand haben. Offensichtlich ist jede quasilineare Funktion auch sublinear. Sublineare Funktionen können beschränkt sein; quasilineare Funktionen sind jedoch immer unbeschänkt.

Zur Herleitung von zentralen Grenzwertsätzen für stochastische Approximationsverfahren schlug Walk vor, die Rekursion in eine nichtrekursive Darstellung aufzulösen und diese dann durch ein gewichtetes Mittel L_n° der Beobachtungsfehler $V_1,\dots,V_n$ zu approximieren [28]. Um darüber hinausgehende Entwicklungen der Verteilungsfunktion zu erhalten, muß der Prozeß mit einer höheren Güte approximiert werden. Dazu werden zur Linearform L_n noch Bilinearformen Q_n oder auch Trilinearformen K_n in den Beobachtungsfehlern $V_1,\dots,V_n$ hinzugenommen, welche den nichtlinearen Charakter der Regressionsfunktion widerspiegeln. Hierzu definieren wir

$$L_n^\circ := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_n^\circ(i)V_i\,,$$

$$L_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_n(i)V_i\,,$$

$$Q_n := \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n v_n(j,k)V_jV_k\,,$$

$$K_n := \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n w_n(j,k,l)V_jV_kV_l$$

mit den in Voraussetzung 1.1 genannten unabhängigen wie V verteilten Zufallsvariablen $V_1, V_2, \ldots$ und mit Koeffizienten $u_n^\circ(i)$, $u_n(i)$, $v_n(j,k)$ und $w_n(j,k,l)$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
u_n^\circ(i) &= a\left(\frac{i}{n}\right)^{aA-1}, \\
u_n(i) &= a\left(\frac{i}{n}\right)^{aA-1}\left(1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{i}\right)\frac{aA(aA-1)}{2}\right), \\
v_n(j,k) &= a^2\frac{B}{2A}\left(\frac{jk}{n^2}\right)^{aA-1}\left(1-\left(\frac{j\vee k}{n}\right)^{-aA}\right), \\
w_n(j,k,l) &= a^3\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{aA-1}\left\{\frac{B^2}{2A^2}\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-aA}\left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-aA}-1\right)\right. \\
&\qquad\left.-\left(\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{12A}\right)\left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-2aA}-1\right)\right\},
\end{aligned}$$

wobei $i,j,k,l \in \{1,\ldots,n\}$. Diese Gewichte hängen durch $A = f'(\vartheta)$, $B = f''(\vartheta)$ und $C = f'''(\vartheta)$ von den Ableitungen der Regressionsfunktion f an der Stelle ϑ ab. Das Gewicht $w_n(j,k,l)$ ist nicht symmetrisch in den Argumenten j,k,l; es kann aber durch das in (3.11) definierte symmetrische Gewicht $w_n^s(j,k,l)$ ersetzt werden.

In den Abschnitten 1.2 und 1.3 wird der Robbins-Monro-Prozeß $(X_{n+1}-\vartheta)$ durch Summen von linearen, quadratischen oder auch kubischen Termen

$$\begin{aligned}
S_n &:= L_n^\circ + Q_n\,, \\
T_n &:= L_n + Q_n + K_n
\end{aligned}$$

approximiert.

1.2 Darstellungen bei quasilinearen Regressionsfunktionen

Der erste Satz gibt eine Entwicklung des Robbins-Monro-Prozesses in eine Summe der in Abschnitt 1.1 definierten Linear- und Bilinearformen an. Die Abschätzung (1.1) wird in Abschnitt 4.1 von besonderem Interesse sein.

Satz 1.1. *Seien* $\delta_2 \in (0,1]$ *und* $p \geq 1$. *Unter Voraussetzung* 1.1 *für* $m = 2p(1+\delta_2)$, $(R_{2+\delta_2})$ *in Voraussetzung* 1.2, *Voraussetzung* 1.3, $aK_1 > \frac{1}{2}$ *und* $aA > 1$ *gilt*

$$X_{n+1} - \vartheta = L_n^\circ + Q_n + \Delta_n$$

mit $E|\Delta_n|^p = O\Big(n^{-p(aA \wedge \frac{2+\delta_2}{2})}(\log n)^{p\,1\left(aA = \frac{2+\delta_2}{2}\right)}\Big)$. *Falls* $p > \frac{1}{2(aA-1)} \vee \frac{1}{\delta_2}$, *gilt*

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \quad \underset{\varepsilon'>0}{\forall} \qquad P\left(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq \varepsilon' n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{1.1}$$

Wird die Diagonale aus der symmetrischen Matrix $(v_n(j,k))_{1\leq j,k\leq n}$ entfernt, läßt sich folgende Variante von Satz 1.1 formulieren:

Korollar 1.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1.1 *gilt*

$$X_{n+1} - \vartheta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a\left(\frac{i}{n}\right)^{aA-1} V_i + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{a^2B}{A}\left(\frac{jk}{n^2}\right)^{aA-1}\left(1-\left(\frac{j}{n}\right)^{-aA}\right)V_jV_k$$
$$- \frac{1}{n}\frac{a^3B\sigma^2}{2(aA-1)(2aA-1)} + \Delta_n$$

mit $E|\Delta_n|^p = O\Big(n^{-p(aA \wedge \frac{2+\delta_2}{2})}(\log n)^{p\,1\left(aA = \frac{2+\delta_2}{2}\right)}\Big)$.

Bemerkung 1.1. Offensichtlich sind die Erwartungswerte der Linearform als auch der Bilinearform in der obigen Darstellung gleich Null. Die Existenz des asymptotisch verschwindenden Bias-Terms $-\frac{1}{n}\frac{a^3B\sigma^2}{2(aA-1)(2aA-1)}$ läßt sich anschaulich begründen. Ist z.B. $B = f''(\vartheta) > 0$ und n hinreichend groß, so werden die Pfade von $(X_n, X_{n+1}, \dots)$ um die Nullstelle ϑ fluktuieren. Für ein kleines $\varepsilon > 0$ wird dann $E(X_{n+1} - X_n \mid X_n = \vartheta + \varepsilon)$ (< 0) betragsmäßig größer sein als $E(X_{n+1} - X_n \mid X_n = \vartheta - \varepsilon)$ (> 0). Dies würde zu einem negativen Bias führen.

Der folgende Satz gibt eine Entwicklung des Robbins-Monro Prozesses bei zugrundeliegender quasilinearer Regressionsfunktion in Terme bis zu 3. Ordnung (in $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bezüglich O_P) an. Wir verwenden wieder die in Abschnitt 1.1 definierten Multilinearformen L_n, Q_n und K_n. Die Abschätzung (1.2) wird in Abschnitt 4.1 zur Herleitung von Edgeworth-Entwicklungen des Robbins-Monro-Prozesses benötigt.

Satz 1.2. *Seien* $\delta_3 \in (0,1]$ *und* $p \geq 1$. *Unter Voraussetzung* 1.1 *für* $m = 2p(2+\delta_3)$, $(R_{3+\delta_3})$ *in Voraussetzung* 1.2, *Voraussetzung* 1.3, $aK_1 > \frac{1}{2}$ *und* $aA > \frac{3}{2}$ *gilt*

$$X_{n+1} - \vartheta = L_n + Q_n + K_n + \Delta_n$$

mit $E|\Delta_n|^p = O\Big(n^{-p(aA \wedge \frac{3+\delta_3}{2})} (\log n)^{p1(aA = \frac{3+\delta_3}{2})}\Big)$. *Falls* $p > \frac{1}{aA-3/2} \vee \frac{2}{\delta_3}$, *gilt*

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \quad \underset{\varepsilon'>0}{\forall} \qquad P\left(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq \varepsilon' n^{-1-\varepsilon}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.2}$$

Bemerkung 1.2. Die vier Terme der Entwicklung in Satz 1.2 verhalten sich wie $O_P\big(n^{-1/2}\big)$, $O_P(n^{-1})$, $O_P\big(n^{-3/2}\big)$ bzw. $o_P\big(n^{-3/2}\big)$.

Lemma 1.1. *Sei* $A > 0$. *Dann gilt gleichmäßig für alle* $i, n \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq i \leq n$

$$\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 - \frac{A}{j}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^A \left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{i}\right) \frac{A(A-1)}{2} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right).$$

Beweis. Unter Verwendung der Gammafunktion erhält man für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $A - 1 < i \leq n$

$$\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 - \frac{A}{j}\right) = \frac{\prod_{j=i+1}^{n} (j-A)}{\prod_{j=i+1}^{n} j} = \frac{\Gamma(n+1-A)/\Gamma(i+1-A)}{\Gamma(n+1)/\Gamma(i+1)}. \tag{1.3}$$

Nach [2], Seite 304 ff, gilt für $z > 0$

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \gamma + \int_0^\infty \frac{\Omega_1(t)}{z+t}\, dt\,,$$

wobei γ die Euler-Konstante ist. Dabei kann für das Integral die folgende Abschätzung gezeigt werden:

$$\underset{k>0}{\exists} \quad \underset{z>0}{\forall} \qquad \left| \int_0^\infty \frac{\Omega_1(t)}{z+t}\, dt - \frac{1}{12}\frac{1}{z} \right| \leq \frac{K}{z^3}.$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
&\log\left(\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n+1-A)}{\Gamma(n+1)\Gamma(i+1-A)}\right)\\
&\quad=\left(i+\frac{1}{2}\right)\log(i+1)-(i+1)+\gamma+\int_0^\infty\frac{\Omega_1(t)}{i+1+t}\,dt\\
&\qquad-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1)+(n+1)-\gamma-\int_0^\infty\frac{\Omega_1(t)}{n+1+t}\,dt\\
&\qquad-\left\{\left(i+\frac{1}{2}-A\right)\log(i+1-A)-(i+1-A)+\gamma+\int_0^\infty\frac{\Omega_1(t)}{i+1-A+t}\,dt\right.\\
&\qquad\quad\left.-\left(n+\frac{1}{2}-A\right)\log(n+1-A)+(n+1-A)-\gamma-\int_0^\infty\frac{\Omega_1(t)}{n+1-A+t}\,dt\right\}\\
&\quad=A\left(\log(i+1)-\log(n+1)\right)+\left(i+\frac{1}{2}-A\right)\left(\log(i+1)-\log(i+1-A)\right)\\
&\qquad-\left(n+\frac{1}{2}-A\right)\left(\log(n+1)-\log(n+1-A)\right)\\
&\qquad+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{i+1-A}+\frac{1}{n+1-A}\right)+R\\
&\quad=A\log\left(\frac{i+1}{n+1}\right)-\left(i+\frac{1}{2}-A\right)\log\left(1-\frac{A}{i+1}\right)\\
&\qquad+\left(n+\frac{1}{2}-A\right)\log\left(1-\frac{A}{n+1}\right)\\
&\qquad+\frac{A}{12}\left(\frac{1}{(n+1)(n+1-A)}-\frac{1}{(i+1)(i+1-A)}\right)+R,
\end{aligned}
$$

wobei $R=O\Big(\frac{1}{i^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(i+1-A)^3}+\frac{1}{(n+1-A)^3}\Big)=O\big(\frac{1}{i^3}\big)$. Mehrfache Anwendung des Satzes von Taylor liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n+1-A)}{\Gamma(n+1)\Gamma(i+1-A)}\\
&\quad=\left(\frac{i+1}{n+1}\right)^A\left(1-\frac{A}{i+1}\right)^{-\left(i+\frac{1}{2}-A\right)}\left(1-\frac{A}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}-A}\\
&\qquad\cdot\exp\left(\frac{A}{12}\frac{1}{(n+1)(n+1-A)}\right)\exp\left(-\frac{A}{12}\frac{1}{(i+1)(i+1-A)}\right)\exp\left(O\left(\frac{1}{i^3}\right)\right)\\
&\quad=i^A\left(1+\frac{A}{i}+O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)\cdot n^{-A}\left(1-\frac{A}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\qquad\cdot e^A\left(1-\frac{1}{i}\frac{A(A+1)}{2}+O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)\cdot e^{-A}\left(1+\frac{1}{n}\frac{A(A+1)}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\qquad\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\frac{A}{12}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{i^2}\frac{A}{12}+O\left(\frac{1}{i^3}\right)\right)\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{i^3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{i}{n}\right)^A \left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{i}\right) \frac{A(A-1)}{2} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right).$$

Mit (1.3) erhalten wir im Fall $A - 1 < i \leq n$

$$\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 - \frac{A}{j}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^A \left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{i}\right) \frac{A(A-1)}{2} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right).$$

Falls $1 \leq i \leq A - 1 < n$ vorliegt, gilt für $i_0 = \lfloor A - 1 \rfloor$

$$\begin{aligned}\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 - \frac{A}{j}\right) &= \prod_{j=i+1}^{i_0} \left(1 - \frac{A}{j}\right) \cdot \prod_{j=i_0+1}^{n} \left(1 - \frac{A}{j}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{i^2}\right) \cdot O\left(\left(\frac{i_0}{n}\right)^A\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^A O\left(\frac{1}{i^2}\right).\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung des Lemmas gezeigt. □

Lemma 1.2. *Es sei $p \geq 2$. Für unabhängige identisch verteilte reelle Zufallsvariablen $V, V_1, V_2, \ldots$ mit $EV = 0$ und $E|V|^p < \infty$ gilt*

$$E\left|\sum_{i=m}^{n} i^b V_i\right|^p = \begin{cases} O\left(n^{p(b+\frac{1}{2})}\right), & \textit{falls} \quad b > -\frac{1}{2} \\ O\left((\log n)^{p/2}\right), & \textit{falls} \quad b = -\frac{1}{2} \\ O\left(m^{p(b+\frac{1}{2})}\right), & \textit{falls} \quad b < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Beweis. Mit Rosenthals Ungleichung [19] folgt

$$\begin{aligned} E\left|\sum_{i=m}^{n} i^b V_i\right|^p &\leq c(p) \left(\sum_{j=m}^{n} i^{bp} + \left(\sum_{i=m}^{n} i^{2b}\right)^{\frac{p}{2}}\right) \\ &= O(1) \left\{ \begin{array}{lll} n^{bp+1}, & \text{falls} & bp > -1 \\ \log n, & \text{falls} & bp = -1 \\ m^{bp+1}, & \text{falls} & bp < -1 \end{array} \right\} + O(1) \left\{ \begin{array}{lll} n^{(2b+1)p/2}, & \text{falls} & b > -\frac{1}{2} \\ (\log n)^{p/2}, & \text{falls} & b = -\frac{1}{2} \\ m^{(2b+1)p}, & \text{falls} & b < -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ &= O(1) \left\{ \begin{array}{lll} n^{p(b+1/2)}, & \text{falls} & b > -\frac{1}{2} \\ \log n, & \text{falls} & b = -\frac{1}{2} \\ m^{p(b+1/2)}, & \text{falls} & b < -\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

und damit die Behauptung des Lemmas. □

Bemerkung 1.3. Für $bp > -1$ (d.h. $b > -1/p > -1/2$) liefert die Momentenungleichung für Martingale in [10] dieselbe Rate.

Lemma 1.3. *Seien $p \geq 1$, $a > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung mit*

$$\underset{0<K_1<K_2<\infty}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \qquad K_1|x-\vartheta| \leq \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x) \leq K_2|x-\vartheta|\,.$$

Für die Zufallsvariablen $X_1, V_1, V_2, \ldots$ gelte $E|X_1|^p < \infty$ und $E|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n V_i|^p = O(1)$. Ist $K_1 > \frac{1}{2a}$, so erfüllt der durch

$$X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n}\left(f(X_n) - V_n\right)$$

definierte stochastische Prozeß

$$E|\sqrt{n}(X_n - \vartheta)|^p = O(1).$$

Beweis. O.B.d.A. seien $a = 1$ und $\vartheta = 0$. Durch

$$A_n := \begin{cases} \frac{f(X_n)}{X_n}, & \text{falls } X_n \neq 0 \\ \frac{K_1+K_2}{2}, & \text{falls } X_n = 0 \end{cases}$$

wird eine meßbare Abbildung definiert, für die $K_1 \leq A_n \leq K_2$ auf Ω gilt. Vollständige Induktion und partielle Summation liefern

$$\begin{aligned} X_{n+1} = &\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{A_k}{k}\right) X_1 + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n V_i \\ &- \sum_{i=1}^n \prod_{k=i+2}^n \left(1 - \frac{A_k}{k}\right)\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} + \frac{1(i<n)}{i(i+1)}A_{i+1}\right)\sum_{j=1}^i V_j\,. \end{aligned}$$

Für die Produkte gilt

$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=j}^n \left(1 - \frac{A_k}{k}\right)\right| &= \left|\prod_{k=j}^{\lceil K_2\rceil} \left(1 - \frac{A_k}{k}\right)\right| \cdot \prod_{k=\lceil K_2\rceil+1}^n \left(1 - \frac{A_k}{k}\right) \\ &\leq c \prod_{k=\lceil K_2\rceil+1}^n \left(1 - \frac{K_1}{k}\right) \leq c\prod_{k=j}^n \left(1 - \frac{K_1}{k}\right) \leq c\left(\frac{j}{n}\right)^{K_1} \end{aligned}$$

mit einer von j und n unabhängigen Konstanten c. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(E\left|\sqrt{n}X_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{n}\, O\left(\frac{1}{n}\right)^{K_1} \left(E\left|X_1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &+ \left(E\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n V_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \sqrt{n}\sum_{i=1}^n O\left(\frac{i}{n}\right)^{K_1} \sqrt{i}\left(E\left|\sum_{j=1}^i V_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ = O(1) + O\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{K_1-\frac{3}{2}} \left(E\left|\frac{1}{\sqrt{i}}\sum_{j=1}^i V_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) &= O(1), \end{aligned}$$

da $K_1 > \frac{1}{2}$. $\square$

Lemma 1.4. *Seien $p \geq 2$, $A > 1$ und $V, V_1, V_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable mit $EV = 0$ und $E|V|^p < \infty$. Dann gilt*

$$E\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}(kl)^{A-1}(k\vee l)^{-A}V_kV_l\right|^p = O\Big(i^{p\left((A-1)\vee\frac{1}{2}\right)}\Big).$$

Beweis. Wir definieren die Zufallsvariablen R_i und S_i durch

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}(kl)^{A-1}(k\vee l)^{-A}V_kV_l\\
&\quad=\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}(kl)^{A-1}\left(\sqrt{kl}\right)^{-A}V_kV_l+\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}(kl)^{A-1}\left((k\vee l)^{-A}-\left(\sqrt{kl}\right)^{-A}\right)V_kV_l\\
&\quad=\left(\sum_{k=1}^{i}k^{\frac{A}{2}-1}V_k\right)^2+2\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{k-1}(kl)^{A-1}\left(k^{-A}-(kl)^{-\frac{A}{2}}\right)V_kV_l\\
&\quad=:R_i+2S_i\,.
\end{aligned}$$

Wegen $E(S_i \mid V_1,\ldots,V_{i-1}) = S_{i-1}$ f.s. ist (S_i) eine Martingaldifferenzenfolge bezüglich $(\mathcal{F}(V_1,\ldots,V_{i-1}))$. Für das durch $\xi_i := S_i - S_{i-1} = i^{\frac{A}{2}-1}\sum_{l=1}^{i-1}l^{A-1}\left(i^{-\frac{A}{2}}-l^{-\frac{A}{2}}\right)V_lV_i$ definierte Martingal (ξ_i) gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_i := E\,|\xi_i|^p &\leq E\,|V|^p\cdot i^{p(\frac{A}{2}-1)}E\left|\sum_{l=1}^{i}l^{\frac{A}{2}-1}V_l\right|^p\\
&=O\Big(i^{p(\frac{A}{2}-1)}\Big)\cdot O\Big(i^{p(\frac{A}{2}-\frac{1}{2})}\Big)=O\Big(i^{p(A-\frac{3}{2})}\Big)
\end{aligned}$$

nach Lemma 1.2. Wegen $\Gamma_i := \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\gamma_j = O\Big(i^{p\left((A-\frac{3}{2})\vee 0\right)}\Big)$ sichert die Momentenungleichung für Martingale in [10]

$$E\,|S_i|^p = O\Big(i^{\frac{p}{2}}\Big)\,\Gamma_i = O\Big(i^{p\left((A-1)\vee\frac{1}{2}\right)}\Big).$$

Eine weitere Anwendung von Lemma 1.2 liefert mit

$$E\,|R_i|^p = E\left|\sum_{k=1}^{i}k^{\frac{A}{2}-1}V_k\right|^{2p} = O\big(i^{p(A-1)}\big)$$

die Behauptung des Lemmas. □

Beweis von Satz 1.2. O.B.d.A. können wir $\vartheta = 0$ und $a = 1$ (also $A > \frac{3}{2}$) annehmen. Durch

$$A_n := \begin{cases}\frac{f(X_n)}{X_n}, & \text{falls} \quad X_n \neq 0\\ A, & \text{falls} \quad X_n = 0\end{cases}$$

wird eine Zufallsvariable A_n definiert, für die wegen $(R_{3+\delta_3})$

$$A_n - A = \frac{B}{2}X_n + \frac{C}{6}X_n^2 + O\Big(|X_n|^{2+\delta_3}\Big)$$

gilt.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n - \frac{1}{n}f(X_n) + \frac{1}{n}V_n = X_n - \frac{1}{n}A_nX_n + \frac{1}{n}V_n \\
&= \left(1 - \frac{A}{n}\right)X_n + \frac{1}{n}V_n - \frac{1}{n}\left(A_n - A\right)X_n \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}V_i \\
&\qquad - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}(A_i - A)X_i \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}V_i \\
&\qquad - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}\frac{B}{2}X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}\frac{C}{6}X_i^3 \\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}O\Big(|X_i|^{3+\delta_3}\Big) \\
&=: \sum_{j=0}^{4}T_{j,n}\,.
\end{aligned}$$

Abschätzung von $T_{0,n}$. Mit Lemma 1.1 ergibt sich

$$E\,|T_{0,n}|^p \le \left(\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{A}{k}\right|\right)^p E\,|X_1|^p = O\big(n^{-pA}\big)\,.$$

Entwicklung des linearen Terms $T_{1,n}$. Unter Beachtung von Lemma 1.1 erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}V_i \\
&\quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A}\left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{i}\right)\frac{A(A-1)}{2} + O\big(i^{-2}\big)\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}V_i \\
&\quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_n(i)V_i + \Delta_n\,,
\end{aligned}$$

wobei für $\Delta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O(i^{-2})\, V_i$ nach Lemma 1.2 gilt

$$E\,|\Delta_n|^p = O\big(n^{-pA}\big)\, E\left|\sum_{i=1}^{n} i^{A-3} V_i\right|^p = O\Big(n^{-p(A\wedge\frac{5}{2})}(\log n)^{p1(A=\frac{5}{2})}\Big)\,.$$

Entwicklung des quadratischen Terms $T_{2,n}$. Mit Lemmata 1.1 und 1.3 gilt

$$\begin{aligned}
&E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{A}{k}\right)-\left(\frac{i}{n}\right)^{A}\right|\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}\frac{B}{2}X_i^2\right|^p\\
&\quad= E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\Big(\frac{1}{i}\Big)\, X_i^2\right|^p = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\big(i^{-2}\big)\left(E\left|\sqrt{i}X_i\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\\
&\quad= O\big(n^{-pA}\big)\left|\sum_{i=1}^{n} i^{A-3}\right|^p = O\Big(n^{-p(A\wedge 2)}\,(\log n)^{p1(A=2)}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Es genügt deshalb, statt $T_{2,n}$ den Term $-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}X_i^2$ zu entwickeln.

Im nächsten Schritt zeigen wir, daß in dem letztgenannten Term die Zufallsvariable

$$\begin{aligned}
X_i = &\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1 + \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j - \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\frac{B}{2}X_j^2\\
&+\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_3}\Big)
\end{aligned}$$

durch

$$\widetilde{X}_i := \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j - \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\frac{B}{2}X_j^2$$

ersetzt werden kann. Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt nämlich

$$E\left|X_i^2-\widetilde{X}_i^2\right|^p \le \left(E\left|X_i-\widetilde{X}_i\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\left|X_i+\widetilde{X}_i\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} =: a_i b_i = O\Big(i^{-p\frac{3+\delta_3}{2}}\Big)\,,$$

da mit Lemma 1.3

$$\begin{aligned}
a_i &\le O\left(E\left|\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_3}\Big)\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= O\big(i^{-pA}\big) + \left(\sum_{j=1}^{i} O\Big(\frac{j}{i}\Big)^{A} j^{-1-\frac{2+\delta_3}{2}}\left(E\left|\sqrt{j}X_j\right|^{(2+\delta_3)2p}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^p
\end{aligned}$$

$$= O\big(i^{-pA}\big) + O\left(i^{-A}\sum_{j=1}^{i} j^{A-2-\frac{\delta_3}{2}}\right)^p$$
$$= O\big(i^{-pA}\big) + O\Big(i^{-p\frac{2+\delta_3}{2}}\Big) = O\Big(i^{-p\frac{2+\delta_3}{2}}\Big)$$

wegen $A > 1 + \frac{\delta_3}{2}$, und

$$b_i \le O\left(\left(E\left|2X_i\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(E\left|X_i - \widetilde{X}_i\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = O\Big(i^{-\frac{p}{2}}\Big) + O\Big(i^{-p\frac{2+\delta_3}{2}}\Big) = O\Big(i^{-\frac{p}{2}}\Big).$$

Also ergibt sich

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left(X_i^2 - \widetilde{X}_i^2\right)\right|^p = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\Big(i^{-\frac{3+\delta_3}{2}}\Big)\right|^p$$
$$= O\Big(n^{-p(A\wedge\frac{3+\delta_3}{2})}\left(\log n\right)^{p1(A=\frac{3+\delta_3}{2})}\Big).$$

Daß in der Definition von $\widetilde{X}_i$ die Zufallsvariable X_j durch

$$\overline{X}_j := \sum_{l=1}^{i-1}\prod_{k=l+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{l}V_l$$

ersetzt werden kann, läßt sich mit der Hölderschen Ungleichung aus

$$E\left|\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\left(V_j - \frac{B}{2}X_j^2\right)\right]^2 - \left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\left(V_j - \frac{B}{2}\overline{X}_j^2\right)\right]^2\right|^p$$
$$\le \left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\frac{B}{2}\left|X_j^2 - \overline{X}_j^2\right|\right|^{pq}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot O\left(\left(E\left|[1.\text{ Term}]\right|^{pq'}\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(E\left|[2.\text{ Term}]\right|^{pq'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right)$$
$$= O\Big(i^{-p\frac{2+\delta_3}{2}}\Big)\,O\Big(i^{-\frac{p}{2}}\Big) = O\Big(i^{-p\frac{3+\delta_3}{2}}\Big)$$

schließen, da

$$E\left|X_j^2 - \overline{X}_j^2\right|^{pq} \le \left(E\left|X_j - \overline{X}_j\right|^{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot O(1)\left(\left(E\left|2X_j\right|^{2pq}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(E\left|X_j - \overline{X}_j\right|^{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=: c_j d_j = O\Big(j^{-pq\frac{2+\delta_3}{3}}\Big)$$

wegen

$$c_j \le O\left(E\left|\prod_{k=1}^{j-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1\right|^{2pq}\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(E\left|\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=l+1}^{j-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{l}O\Big(\left|X_l\right|^{1+\delta_3}\Big)\right|^{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= O\big(j^{-pqA}\big) + O\left(j^{-A}\sum_{l=1}^{j} l^{A-1-\frac{1+\delta_3}{2}}\right)^{pq}$$
$$= O\Big(j^{-pqA} + j^{-pq\frac{1+\delta_3}{2}}\Big) = O\Big(j^{-pq\frac{1+\delta_3}{2}}\Big)$$

und

$$d_j \le O(1)\left\{\left(E\,|X_j|^{2pq}\right)^{\frac{1}{2}} + O(c_j)\right\} = O(1)\left\{j^{-\frac{pq}{2}} + j^{-\frac{pq}{2}(1+\delta_3)}\right\} = O\Big(j^{-\frac{pq}{2}}\Big),$$

und da

$$\Big(E\,|[\text{ 1. Term}]|^{pq'}\Big)^{\frac{1}{q'}}$$
$$= O(1)\left\{\left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}V_j\right|^{pq'}\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}X_j^2\right|^{pq'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right\} = O\Big(i^{-\frac{p}{2}}\Big)$$

und $\Big(E\,|[\text{2. Term}]|^{pq'}\Big)^{\frac{1}{q'}} = O\big(i^{-\frac{p}{2}}\big)$. Für q wählen wir $\frac{2+\delta_3}{1+\delta_3}$ und damit $q' = \frac{q}{q-1} = 2+\delta_3$. Man beachte, daß unter den Voraussetzungen des Satzes das Lemma 1.3 die mehrmals verwendete Momentenbedingung $E|\sqrt{j}X_j|^{2p(2+\delta_3)} = O(1)$ sichert. Daraus folgt schließlich

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left(\widetilde{X}_i^2 - \left(\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\left(V_j - \frac{B}{2}\overline{X}_j^2\right)\right)^2\right|^p$$
$$\le O\left(n^{-A}\sum_{i=1}^{n} i^{A-1-\frac{3+\delta_3}{2}}\right)^p = O\Big(n^{-p(A\wedge\frac{3+\delta_3}{2})}\,(\log n)^{p1(A=\frac{3+\delta_3}{2})}\Big).$$

Hinsichtlich $T_{2,n}$ genügt es also, den Ausdruck

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\left(V_j - \frac{B}{2}\left(\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=l+1}^{j-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{l}V_l\right)^2\right)\right]^2$$
$$= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j\right]^2$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}B\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j\right]$$
$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j\frac{B}{2}\left(\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=l+1}^{j-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{l}V_l\right)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\frac{B}{2}\left(\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=l+1}^{j-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{l}V_l\right)^2\right]^2\\
&=: S_{n,1}+S_{n,2}+S_{n,3}
\end{aligned}
$$

zu entwickeln.

Zur Entwicklung von $S_{n,1}$. Weil

$$
\begin{aligned}
&E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j\right]^2-\left[\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1}V_j\right]^2\right|^p\\
&\le\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left(E\left|[1.\text{ Term}]-[2.\text{ Term}]\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}\cdot\left(E\left|[1.\text{ T.}]+[2.\text{ T.}]\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^p\\
&=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left(E\left|\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1}O\left(\frac{1}{j}\right)V_j\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}\cdot O\left(i^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^p\\
&=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}O\left(i^{-\frac{3}{2}}\right)O\left(i^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^p=O\left(n^{-p(A\wedge 2)}\left(\log n\right)^{p1(A=2)}\right)
\end{aligned}
$$

mit Lemmata 1.1 und 1.2, betrachten wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left[\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1}V_j\right]^2\\
&\qquad=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}i^{-2A}\frac{B}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1}(jk)^{A-1}V_jV_k\\
&\qquad=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(jk)^{A-1}\frac{B}{2}\left(\sum_{i=j\vee k}^{n-1}(i+1)^{-A-1}\right)V_jV_k\\
&\qquad=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{jk}{n^2}\right)^{A-1}\frac{B}{2A}\left(\left(\frac{j\vee k}{n}\right)^{-A}-1\right)V_jV_k\\
&\qquad\quad+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{jk}{n^2}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\Delta_{j,k,n}V_jV_k\,,
\end{aligned}
$$

wobei $\Delta_{j,k,n}:=\frac{1}{n}\sum_{i=j\vee k}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^{-A-1}-\frac{1}{A}\left(\left(\frac{j\vee k}{n}\right)^{-A}-1\right)$. Unter Verwendung des Taylorschen Satzes gilt für $m=j\vee k$

$$
\Delta_{m,m,n}=\frac{1}{n}\sum_{i=m}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^{-A-1}-\frac{1}{A}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{-A}-1\right) \tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&= n^A \left(\sum_{i=m+1}^{n} i^{-A-1} - \frac{1}{A}\left(m^{-A} - n^{-A}\right) \right) \\
&= n^A \left(\sum_{i=m+1}^{n} i^{-A-1} - \sum_{i=m+1}^{n} \int_{i-1}^{i} t^{-A-1} dt \right) \\
&= n^A \sum_{i=m+1}^{n} O\big(i^{-A-2}\big) .
\end{aligned}
$$

Also ist das p-te absolute Moment des letzten Summanden in der vorletzten Gleichungskette gleich

$$
\begin{aligned}
E &\left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{jk}{n^2}\right)^{A-1} n^A \sum_{i=j\vee k}^{n} O\big(i^{-A-2}\big)\, V_j V_k \right|^p \\
&= E \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O(i^{-1}) \left[\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} V_j \right]^2 \right|^p \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\big(i^{-1-2A}\big) \left(E \left| \sum_{j=1}^{i} j^{A-1} V_j \right|^{2p} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\big(i^{-1-2A}\big) \cdot O\big(i^{2A-1}\big) \right)^p \\
&= O\Big(n^{-p(A\wedge 2)} (\log n)^{p1(A=2)} \Big) .
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
S_{n,1} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{B}{2A} \left(\frac{jk}{n^2}\right)^{A-1} \left(1 - \left(\frac{j \vee k}{n}\right)^{-A} \right) V_j V_k + O_{L^p}\Big(n^{-(A\wedge 2)} (\log n)^{1(A=2)} \Big) .
$$

Zur Entwicklung von $S_{n,2}$. Für

$$
\begin{aligned}
f_i &:= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \left(\frac{j}{i}\right)^{-1} V_j \\
g_i &:= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \left(\frac{j}{i}\right)^{-1} \frac{B}{2} \left(\frac{1}{j} \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=l+1}^{j-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \left(\frac{l}{j}\right)^{-1} V_l \right)^2
\end{aligned}
$$

folgt unter Verwendung von Argumenten zur Entwicklung von $T_{n,1}$ und $S_{n,1}$

$$
\begin{aligned}
f_i \cdot g_i &= \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right)\right) V_j \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{B}{2A} \left(\frac{jk}{i^2}\right)^{A-1} \left(\left(\frac{j \vee k}{i}\right)^{-A} - 1 \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O\left(\frac{1}{j}\right) \left(\frac{1}{j} \sum_{l=1}^{j} \left(\frac{l}{j}\right)^{A-1} V_l \right)^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} V_j \right) \left(\frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{B}{2A} \left(\frac{jk}{i^2}\right)^{A-1} \left(\left(\frac{j \vee k}{i}\right)^{-A} - 1 \right) \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O(1) V_j \right) \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O\left(\frac{1}{j}\right) \left(\frac{1}{j} \sum_{l=1}^{j} \left(\frac{l}{j}\right)^{A-1} V_l \right)^2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O\left(\frac{1}{j}\right) V_j \right) \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O(1) \left(\frac{1}{j} \sum_{l=1}^{j} \left(\frac{l}{j}\right)^{A-1} V_l \right)^2 \right) \\
&=: \varphi_i \gamma_i + \Delta_{i,1} + \Delta_{i,2} \,.
\end{aligned}
$$

Mit der Hölderschen Ungleichung ergibt sich für $q = 3$ und $q' = \frac{3}{2}$

$$
\begin{aligned}
E\left|\Delta_{i,1}\right|^p &\leq \left(E \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O\left(j^0\right) V_j \right|^{3p} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad \cdot \left(\left(E \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O\left(j^{-1}\right) \left(\frac{1}{j} \sum_{l=1}^{j} \left(\frac{l}{j}\right)^{A-1} V_l \right)^2 \right|^{\frac{3p}{2}} \right)^{\frac{2}{3p}} \right)^p \\
&= \left(i^{-3pA} E \left| \sum_{j=1}^{i-1} O(j^{A-1}) V_j \right|^{3p} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad \cdot \left(i^{-A} \sum_{j=1}^{i-1} O\left(j^{-A-2}\right) \left(E \left| \sum_{l=1}^{j} l^{A-1} V_l \right|^{3p} \right)^{\frac{2}{3p}} \right)^p \\
&= O\left(i^{-3pA+3p(A-\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot O\left(i^{-A} \sum_{j=1}^{i-1} j^{-A-2+2(A-\frac{1}{2})} \right)^p \\
&= O\left(i^{-\frac{p}{2}} \right) \cdot O\left(i^{-A} \sum_{j=1}^{i-1} j^{A-3} \right)^p
\end{aligned}
$$

$$= O\Big(i^{-p(A\wedge 2+\frac{1}{2})}\,(\log i)^{p1(A=2)}\Big)\,.$$

Ähnlich wie eben zeigen wir

$$\begin{aligned}
E\,|\Delta_{i,2}|^p &\le \left(E\left|\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O\left(\frac{1}{j}\right)V_j\right|^{3p}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad\cdot\left(\left(E\left|\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} O(1)\left(\frac{1}{j}\sum_{l=1}^{j}\left(\frac{l}{j}\right)^{A-1}V_l\right)^2\right|^{\frac{3p}{2}}\right)^{\frac{2}{3p}}\right)^p \\
&= \left(i^{-3pA}E\left|\sum_{j=1}^{i-1}O\big(j^{A-2}\big)\,V_j\right|^{3p}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad\cdot\left(i^{-A}\sum_{j=1}^{i-1}O\big(j^{-A-1}\big)\left(E\left|\sum_{l=1}^{j}l^{A-1}V_l\right|^{3p}\right)^{\frac{2}{3p}}\right)^p \\
&= O\Big(i^{-\frac{3p}{2}}\Big)\cdot O\left(i^{-A}\sum_{j=1}^{i-1}j^{A-2}\right)^p = O\Big(i^{-p(A\wedge 1+\frac{3}{2})}\,(\log i)^{p1(A=1)}\Big) \\
&= O\Big(i^{-\frac{5}{2}p}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
S_{n,2} &= B\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} f_i\cdot g_i \\
&= B\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\varphi_i\gamma_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O_{L^p}\Big(i^{-(A\wedge 2+\frac{1}{2})}\,(\log i)^{1(A=2)}\Big) \\
&= B\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1}V_j\right) \\
&\qquad\cdot\left(\frac{1}{i^2}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{B}{2A}\left(\frac{jk}{i^2}\right)^{A-1}\left(\left(\frac{j\vee k}{i}\right)^{-A}-1\right)\right) \\
&\qquad + O_{L^p}\Big(n^{-(A\wedge\frac{5}{2})}\,(\log n)^{1(A=\frac{5}{2})}\Big) \\
&= \frac{B^2}{2A}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{1}{i^3}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{jkl}{i^3}\right)^{A-1}\left(\left(\frac{k\vee l}{i}\right)^{-A}-1\right)V_jV_kV_l \\
&\qquad + O_{L^p}\big(n^{-(A\wedge 2)}\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{B^2}{2A}\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}(jkl)^{A-1}\,n^{1-A}\sum_{i=j\vee k\vee l}^{n-1}(i+1)^{-2A-1}\left(\left(\frac{k\vee l}{i+1}\right)^{-A}-1\right)V_jV_kV_l \\
&\qquad + O_{L^p}\left(n^{-(A\wedge 2)}\right) \\
&= \frac{B^2}{2A}\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\frac{1}{n}\sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-2A-1}\left(\left(\frac{k\vee l}{i}\right)^{-A}-1\right)V_jV_kV_l \\
&\qquad + O_{L^p}\left(n^{-(A\wedge 2)}\right).
\end{aligned}
$$

Wie in (1.4) zeigt man

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-2A-1}\left(\left(\frac{k\vee l}{i}\right)^{-A}-1\right) \\
&\qquad = \left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-A-1}-\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-2A-1} \\
&\qquad = \left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}n^{A}\left\{\frac{1}{A}\left(m^{-A}-n^{-A}\right)+\sum_{i=m+1}^{n}O\left(i^{-A-2}\right)\right\} \\
&\qquad\qquad -n^{2A}\left\{\frac{1}{2A}\left(m^{-2A}-n^{-2A}\right)+\sum_{i=m+1}^{n}O\left(i^{-2A-2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

und erhält damit

$$
\begin{aligned}
S_{n,2} = &\frac{B^2}{2A}\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\left\{\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}\frac{1}{A}\left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-A}-1\right)\right. \\
&\qquad\left.-\frac{1}{2A}\left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-2A}-1\right)\right\}V_jV_kV_l \\
&+\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\left\{\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}\frac{1}{n^2}\sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n}O\left(\frac{i}{n}\right)^{-A-2}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{1}{n^2}\sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n}O\left(\frac{i}{n}\right)^{-2A-2}\right\}V_jV_kV_l+O_{L^p}\left(n^{-(A\wedge 2)}\right).
\end{aligned}
$$

Wir zeigen, daß die zum ersten O-Term gehörende Vierfachsumme von der Ordnung $O_{L^p}\left(n^{-(A\wedge 2)}\right)$ ist:

$$
\begin{aligned}
&E\left|\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}\frac{1}{n^2}\sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n}O\left(\frac{i}{n}\right)^{-A-2}V_jV_kV_l\right|^p \\
&= E\left|n^{-A-3}\sum_{i=1}^{n}O\left(i^{-A-2}\right)\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{n}\right)^{A-1}V_j\right)\left(\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{kl}{n^2}\right)^{A-1}\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}V_kV_l\right)\right|^p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left| n^{-A} \sum_{i=1}^{n} O\big(i^{-A-2}\big) \left(\sum_{j=1}^{i-1} j^{A-1} V_j \right) \left(\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} (kl)^{A-1} (k \vee l)^{-A} V_k V_l \right) \right|^p \\
&\leq n^{-pA} \left(\sum_{i=1}^{n} O\big(i^{-A-2}\big) \left(E \left| \sum_{j=1}^{i} j^{A-1} V_j \right|^{3p} \right)^{\frac{1}{3p}} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(E \left| \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} (kl)^{A-1} (k \vee l)^{-A} V_k V_l \right|^{\frac{3}{2}p} \right)^{\frac{2}{3p}} \right)^p ,
\end{aligned}
$$

und weiter mit Lemmata 1.2 und 1.4

$$
\begin{aligned}
&\leq n^{-pA} \left(\sum_{i=1}^{n} O\Big(i^{-A-2} i^{A-\frac{1}{2}} i^{A-1}\Big) \right)^p \\
&= n^{-pA} O\Big(n^{p((A-\frac{5}{2})\vee 0)} (\log n)^{p1(A=\frac{5}{2})}\Big) \\
&= O\Big(n^{-p(A\wedge\frac{5}{2})} (\log n)^{p1(A=\frac{5}{2})}\Big) .
\end{aligned}
$$

Ähnlich ergibt sich für die zum zweiten O-Term gehörende Summe in $S_{n,2}$:

$$
\begin{aligned}
&E\left| \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{jkl}{n^3} \right)^{A-1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n} O\left(\frac{i}{n} \right)^{-2A-2} V_j V_k V_l \right|^p \\
&\quad = E\left| n^{-A} \sum_{i=1}^{n} O\big(i^{-2A-2}\big) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} (jkl)^{A-1} V_j V_k V_l \right|^p \\
&\quad = \left(n^{-A} \sum_{i=1}^{n} O\big(i^{-2A-2}\big) \left(E \left| \sum_{j=1}^{i-1} j^{A-1} V_j \right|^{3p} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\
&\quad = \left(n^{-A} \sum_{i=1}^{n} O\Big(i^{-2A-2} i^{3(A-\frac{1}{2})}\Big) \right)^p = n^{-pA} \left(O\left(\sum_{i=1}^{n} i^{A-\frac{7}{2}} \right) \right)^p \\
&\quad = O\Big(n^{-p(A\wedge\frac{5}{2})} (\log n)^{p1(A=\frac{5}{2})}\Big) .
\end{aligned}
$$

Also gilt die Darstellung

$$
\begin{aligned}
S_{n,2} = \frac{B^2}{2A} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{jkl}{n^3} \right)^{A-1} \Bigg\{ &\left(\frac{k \vee l}{n} \right)^{-A} \frac{1}{A} \left(\left(\frac{j \vee k \vee l}{n} \right)^{-A} - 1 \right) \\
&- \frac{1}{2A} \left(\left(\frac{j \vee k \vee l}{n} \right)^{-2A} - 1 \right) \Bigg\} V_j V_k V_l + O_{L^p}\big(n^{-(A\wedge 2)}\big) .
\end{aligned}
$$

Zu $S_{n,3}$. Für

$$\Delta_i := \left[\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\left(\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=l+1}^{j-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{l}V_l\right)^2\right]^2$$

folgt mit den Lemmata 1.1 und 1.2

$$\begin{aligned}
E\left|\Delta_i\right|^p &\le \left(\sum_{j=1}^{i-1}O\left(\frac{j}{i}\right)^A\frac{1}{j}\left(E\left|\sum_{l=1}^{j-1}O\left(\frac{l}{j}\right)^A\frac{1}{l}V_l\right|^{4p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^{2p}\\
&= \left(i^{-A}\sum_{j=1}^{i-1}O\big(j^{A-1}\big)\left(j^{-4pA}O\left(j^{4p(A-\frac{1}{2})}\right)\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^{2p}\\
&= O\left(i^{-A}\sum_{j=1}^{i}j^{A-2}\right)^{2p} = O\big(i^{-2p}\big)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
E\left|S_{n,3}\right|^p &= E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\Delta_i\right|^p = \left(n^{-A}\sum_{i=1}^{n}O\big(i^{A-3}\big)\right)^p\\
&= O\left(n^{-p(A\wedge 2)}\left(\log n\right)^{p1(A=2)}\right),
\end{aligned}$$

also $S_{n,3} = O_{L^p}\left(n^{-(A\wedge 2)}\left(\log n\right)^{1(A=2)}\right)$.

Entwicklung des kubischen Terms $T_{3,n}$. Mit Lemma 1.3 folgt

$$\begin{aligned}
&E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{A}{k}\right)-\left(\frac{i}{n}\right)^A\right]\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}\frac{C}{6}X_i^3\right|^p\\
&\quad= E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}O\left(\frac{1}{i}\right)X_i^3\right|^p = \left(n^{-A}\sum_{i=1}^{n}i^{A-\frac{7}{2}}O(1)\left(E\left|\sqrt{i}X_i\right|^{3p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\\
&\quad= O\left(n^{-p(A\wedge\frac{5}{2})}\left(\log n\right)^{p1(A=\frac{5}{2})}\right).
\end{aligned}$$

Also genügt es, statt $T_{3,n}$ die Summe $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^{A-1}\frac{C}{6}X_i^3$ zu entwickeln. Im nächsten Schritt zeigen wir, daß in diesem Ausdruck

$$X_i = \prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1 + \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j + \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}O\big(\left|X_j\right|^2\big)$$

durch $\widetilde{X}_i := \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \frac{1}{j} V_j$ ersetzt werden kann. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$E\left|X_i^3 - \widetilde{X}_i^3\right|^p \leq \left(E\left|X_i - \widetilde{X}_i\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} O\left(\left(E\left|X_i\right|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(E|\widetilde{X}_i|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\right) =: a_i b_i = O(i^{-2p}),$$

da mit der Minkowskischen Ungleichung und Lemma 1.3

$$\begin{aligned} a_i &\leq \left(E\left|\prod_{k=1}^{i-1}\left(1 - \frac{A}{k}\right) X_1\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1 - \frac{A}{k}\right)\frac{1}{j} O\left(|X_j|^2\right)\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left(i^{-pA}\right)\left(E\left|X_1\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(i^{-A}\sum_{j=1}^{i-1} j^{A-2} O\left(E\left|\sqrt{j}X_j\right|^{4p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^p \\ &= O\left(i^{-pA}\right) + O\left(i^{-p}\right) = O\left(i^{-p}\right) \end{aligned}$$

und $b_i = O(i^{-p})$ gezeigt werden kann. Also gilt

$$\begin{aligned} E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(X_i^3 - \widetilde{X}_i^3\right)\right|^p &\leq \left(n^{-A}\sum_{i=1}^{n} i^{A-1} O\left(i^{-2}\right)\right)^p \\ &= O\left(n^{-p(A\wedge 2)}\left(\log n\right)^{p1(A=2)}\right). \end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich, daß $\widetilde{X}_i$ noch durch $\overline{X}_i := \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^A \frac{1}{j} V_j$ ersetzt werden kann, da aus

$$\begin{aligned} E|\widetilde{X}_i^3 - \overline{X}_i^3|^p &\leq \left(E|\widetilde{X}_i - \overline{X}_i|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} O\left(\left(E|\widetilde{X}_i|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(E|\overline{X}_i|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\leq \left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^A O\left(\frac{1}{j^2}\right) V_j\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left|\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^A O\left(\frac{1}{j}\right) V_j\right|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left(i^{-\frac{3}{2}pA}\right) O\left(i^{-\frac{1}{2}pA}\right) = O\left(i^{-2pA}\right) \end{aligned}$$

die Beziehung

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(\widetilde{X}_i^3 - \overline{X}_i^3\right)\right|^p = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\left(i^{-2A}\right)\right|^p = O\left(n^{-pA}\right)$$

folgt. Es genügt damit, den folgenden Ausdruck zu entwickeln:

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A-1} V_j\right)^3$$

$$
\begin{aligned}
&= -n^{-A}\frac{C}{6}\sum_{i=1}^{n} i^{-2A-1}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{i-1}(jkl)^{A-1}\,V_jV_kV_l \\
&= -n^{-A}\frac{C}{6}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}(jkl)^{A-1}\left(\sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n} i^{-2A-1}\right)V_jV_kV_l \\
&= -\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\frac{C}{12A}\left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-2A}-1\right)V_jV_kV_l \\
&\quad -\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\frac{C}{6} \\
&\qquad\qquad \cdot\left[\frac{1}{n}\sum_{i=j\vee k\vee l+1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-2A-1}-\frac{1}{2A}\left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-2A}-1\right)\right]V_jV_kV_l\,.
\end{aligned}
$$

Wie in der Diskussion des Termes $S_{n,2}$ zeigt man, daß die zweite Dreifachsumme hinter dem letzten Gleichheitszeichen von der Ordnung $O_{L^p}\left(n^{-(A\wedge 2)}\right)$ ist, also vernachlässigt werden kann.

Abschätzung des Restterms $T_{4,n}$. Mit Lemma 1.3 folgt

$$
\begin{aligned}
E\left|T_{4,n}\right|^p &= E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} i^{-\frac{3+\delta_3}{2}}O\left(\left|\sqrt{i}X_i\right|^{3+\delta_3}\right)\right|^p \\
&= O\left(n^{-A}\sum_{i=1}^{n} i^{A-\frac{5+\delta_3}{2}}\right)^p = O\left(n^{-p(A\wedge\frac{3+\delta_3}{2})}\,(\log n)^{p1(A=\frac{3+\delta_3}{2})}\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist der erste Teil des Beweises von Satz 1.2 abgeschlossen. Die Behauptung (1.2) ergibt sich daraus mittels der Markovschen Ungleichung. □

Beweis von Satz 1.1. Dieser Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 1.2. Die Zerlegung von X_{n+1} in umfaßt jetzt aber nur drei Terme $T_{0,n}$, $T_{1,n}$, $T_{2,n}$ und einen Restterm $T_{3,n}$ mit

$$
T_{3,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}O\left(|X_i|^{2+\delta_2}\right).
$$

Bei der Entwicklung des Produktes im linearen Term $T_{1,n}$ muß der erste führende Term verwendet werden, d.h.

$$
T_{1,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{A}{k}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}V_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}V_i+\Delta_n\,.
$$

□

Beweis von Korollar 1.1. Die Behauptung folgt aus Satz 1.1, falls

$$D_n := \sum_{j=1}^{n} v_n(j,j)V_j^2 = -\frac{1}{n}\frac{B\sigma^2}{2(A-1)(2A-1)} + \Delta_n$$

mit $\Delta_n = O_{L^p}\Big(n^{-\left(A\wedge\frac{2+\delta_2}{2}\right)}(\log n)^{1\left(A=\frac{2+\delta_2}{2}\right)}\Big)$ gezeigt werden kann. Unter Verwendung von Lemma 1.2 folgt für $A > 1$

$$\begin{aligned}
&E|D_n - ED_n|^p \\
&\quad = O(n^{-2p})\left(E\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{A-2}(V_j-\sigma^2)\right|^p + E\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{2A-2}(V_j-\sigma^2)\right|^p\right) \\
&\quad = O\Big(n^{-p\left(A\wedge\frac{3}{2}\right)}(\log n)^{\frac{p}{2}1\left(A=\frac{3}{2}\right)}\Big).
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
ED_n &= -\frac{1}{n}\frac{B\sigma^2}{2A}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{A-2} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{2A-2}\right) \\
&= -\frac{1}{n}\frac{B\sigma^2}{2A}\left(\frac{1}{A-1} + O\big(n^{-((A-1)\wedge 1)}\big) - \frac{1}{2A-1} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{n}\frac{B\sigma^2}{2(A-1)(2A-1)} + O\big(n^{-(A\wedge 2)}\big).
\end{aligned}$$

□

1.3 Darstellungen bei sublinearen Regressionsfunktionen

Ist die zugrundeliegende Regressionsfunktion schwächer als linear wachsend oder sogar beschränkt, so ist für den damit zusammenhängenden Robbins-Monro-Prozeß (X_n) die Folge $(\sqrt{n}(X_n - \vartheta))$ i.a. nicht L_1-beschränkt. Unter schwachen Bedingungen kann leicht gezeigt werden, daß die Folge (X_n) selber L_1-beschränkt ist (Lemma 1.5). Wird der Prozeß $\sqrt{n}(X_n - \vartheta)$ jedoch nur auf Mengen $M_n \in \mathcal{A}$ betrachtet, auf denen $|X_i - \vartheta| < \rho$ für alle i ab einem von n abhängigen Index gilt, so kann die L_1-Beschränktheit der Folge $(\sqrt{n}(X_n - \vartheta)1(M_n))$ erzwungen werden (Lemma 1.6). Unter gewissen weiteren Voraussetzungen konvergiert das P-Maß dieser Mengen M_n schnell gegen 1 (Lemma 1.7). Für die in den Darstellungssätzen 1.3 und 1.4 auftretenden Restterme Δ_n können damit Konvergenzraten bezüglich der stochastischen Konvergenz gezeigt werden.

Satz 1.3. *Seien $\delta_2 \in (0,1]$, $aA > 1$, $\gamma > a^2A^2/(2(aA - 1/2)(aA - 1))$ und*

$$p > \frac{1}{2(aA-1) - \frac{a^2A^2}{(aA-\frac{1}{2})\gamma}} \vee \frac{1}{\delta_2} \,. \tag{1.5}$$

Unter Voraussetzung 1.1 *für $m = 2p(1+\delta_2)$, $(R_{2+\delta_2})$ in Voraussetzung* 1.2*, Voraussetzung* 1.4 *und*

$$\underset{\rho>0}{\forall} \qquad P\left(\sup_{i\geq n} |X_i - \vartheta| \geq \rho\right) = O(n^{-\gamma}) \tag{1.6}$$

gilt

$$X_{n+1} - \vartheta = L_n^\circ + Q_n + \Delta_n$$

mit

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \quad \underset{\varepsilon'>0}{\forall} \qquad P(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq \varepsilon' n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

und Multilinearformen L_n° und Q_n wie in Abschnitt 1.1 *definiert.*

Bemerkung 1.4. Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.7, welches insbesondere beschränkte Zufallsvariablen V_n fordert, ist die Annahme (1.6) für alle $\gamma > 0$ erfüllt. Die Bedingung (1.5) reduziert sich dann zu $p > \frac{1}{2(aA-1)} \vee \frac{1}{\delta_2}$ wie in Satz 1.1.

Korollar 1.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1.3 *gilt dieselbe Darstellung wie in Korollar* 1.1*, wobei aber die Folge (Δ_n) der Restterme hier nur $P(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq \varepsilon' n^{-1/2-\varepsilon}) = o(n^{-1/2})$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ erfüllt ($\varepsilon' > 0$ beliebig).*

Satz 1.4. *Seien* $\delta_3 \in (0,1]$, $aA > 3/2$, $\gamma > 2a^2A^2/((aA-1/2)(aA-3/2))$ *und*

$$p > \frac{1}{\left(aA - \frac{3}{2}\right) - \frac{2a^2A^2}{\left(aA-\frac{1}{2}\right)\gamma}} \vee \frac{2}{\delta_3}. \tag{1.7}$$

Unter Voraussetzung 1.1 *für* $m = 2p(2+\delta_3)$, $(R_{3+\delta_3})$ *in Voraussetzung* 1.2, *Voraussetzung* 1.4 *und*

$$\underset{\rho>0}{\forall} \qquad P\left(\sup_{i\geq n} |X_i - \vartheta| \geq \rho\right) = O(n^{-\gamma}) \tag{1.8}$$

gilt

$$X_{n+1} - \vartheta = L_n + Q_n + K_n + \Delta_n$$

mit

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \quad \underset{\varepsilon'>0}{\forall} \qquad P(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq \varepsilon' n^{-1-\varepsilon}) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

und Multilinearformen L_n, Q_n *und* K_n *wie in Abschnitt* 1.1 *definiert.*

Bemerkung 1.5. Ist die Zufallsvariable V beschränkt, so kann nach Lemma 1.7 für die in (1.8) genannte Wahrscheinlichkeit ein schnelles Abklingen gezeigt werden. In diesem Fall reduziert sich die Bedingung (1.7) zu $p > \frac{1}{aA-\frac{3}{2}} \vee \frac{2}{\delta_3}$ wie in Satz 1.2.

Lemma 1.5. *Seien* $p \geq 1$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $V_n \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, $X_1 \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R})$, $E|X_1|^p < \infty$,

$$\underset{K_2<\infty}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \qquad 0 \leq \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x) \leq K_2|x-\vartheta|\,,$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \qquad E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i\right|^p = O(n^{-\varepsilon}). \tag{1.9}$$

Dann gilt für die durch $X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n}(f(X_n) - V_n)$ *erzeugte Folge* (X_n)

$$E|X_n - \vartheta|^p = O(1)\,.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $a = 1$ und $\vartheta = 0$. Für die durch

$$A_n := \begin{cases} f(X_n)/X_n\,, & \text{falls } X_n \neq 0 \\ 0\,, & \text{falls } X_n = 0 \end{cases}$$

definierten Zufallsvariablen gilt $0 \le A_n \le K_2$ auf ganz Ω. Mittels vollständiger Induktion und partieller Summation erhalten wir

$$X_{n+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{A_k}{k}\right)X_1 + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} V_i$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+2}^{n}\left(1-\frac{A_k}{k}\right)\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}+\frac{1(i<n)}{i(i+1)}A_{i+1}\right)\sum_{j=1}^{i} V_j\ .$$

Wegen $\left|\prod_{k=i}^{n}\left(1-\frac{A_k}{k}\right)\right| = \left|\prod_{k=i}^{\lfloor K_2\rfloor}\left(1-\frac{A_k}{k}\right)\right| \cdot \prod_{k=\lfloor K_2\rfloor+1}^{n}\left(1-\frac{A_k}{k}\right) \le c < \infty$ auf ganz Ω und für alle i und n mit $1 \le i \le n$, folgt

$$\begin{aligned}(E\,|X_{n+1}|^p)^{\frac{1}{p}} &\le c\,(E\,|X_1|^p)^{\frac{1}{p}} + \left(E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{n} O\big(i^{-1}\big)\left(E\left|\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} V_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= O(1)\end{aligned}$$

wegen (1.9). □

Lemma 1.6. *Seien $p \ge 1$, $\rho > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $V_n \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, $X_1 \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R})$,*

$$\underset{\frac{1}{2a}<K_1<K_2<\infty}{\exists}\ \underset{|x-\vartheta|\le\rho}{\forall}\quad K_1|x-\vartheta| \le \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x) \le K_2|x-\vartheta|\,, \tag{1.10}$$
$$E\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} V_i\right|^p = O(1)$$

und $X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n}\left(f\left(X_n\right) - V_n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt. Für $l(n) := \lfloor n^\lambda\rfloor$ mit $\lambda := 1-\frac{1}{2aK_1} \in (0,1)$ seien die meßbaren Mengen $M_n := \left\{\omega \in \Omega : \sup_{i\ge l(n)}|X_i(\omega)-\vartheta| \le \rho\right\}$ definiert. Dann gilt

$$E_n := \sup_{m\ge n} E\left|\sqrt{m}(X_m-\vartheta)\,1_{M_n}\right|^p = O(1).$$

Bemerkung 1.6. Unter der Bedingung $(R_{1+\delta_1})$ in Voraussetzung 1.2 und, falls $aA > 1$, findet man immer ein $K_1 (> \frac{1}{2a})$ und ein K_2 mit $1 < aK_1 < aA < aK_2$ und ein $\rho > 0$ so, daß Bedingung (1.10) erfüllt ist. In diesem Fall gilt $\lambda \in (1/2, (aA-1/2)/(aA))$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a = 1$, $\vartheta = 0$ und $\rho = 1$ annehmen. Die Zufallsvariablen A_n seien definiert durch

$$A_n := \begin{cases} f(X_n)/X_n, & \text{falls } X_n \ne 0\\ (K_1+K_2)/2, & \text{falls } X_n = 0.\end{cases}$$

Damit kann gezeigt werden, daß

$$\begin{aligned}
X_{m+1} &= X_m - \frac{1}{m} f(X_m) + \frac{1}{m} V_m = \left(1 - \frac{1}{m} A_m\right) X_m + \frac{1}{m} V_m \\
&= \prod_{i=l(n)}^{m} \left(1 - \frac{A_i}{i}\right) X_{l(n)} + \frac{1}{m+1} \sum_{i=l(n)}^{m} V_i \\
&\quad - \sum_{i=l(n)}^{m} \prod_{k=i+2}^{m} \left(1 - \frac{A_k}{k}\right) \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} + \frac{1(i<m)}{i(i+1)} A_{i+1}\right) \sum_{j=l(n)}^{i} V_j
\end{aligned}$$

für alle $m \geq l(n)$. Da auf $M_n \in \mathcal{A}$ die Relationen $K_1 \leq A_i \leq K_2$ und $|X_i| \leq 1$ für alle $i \geq l(n)$ gelten, folgt für $m \geq n$ $(\geq l(n))$

$$\begin{aligned}
&(E\,|X_m\, 1_{M_n}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq O\left(\frac{l(n)}{m}\right)^{K_1} \left(E\left|X_{l(n)}\, 1_{M_n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(E\left|\frac{1}{m+1} \sum_{i=l(n)}^{m} V_i\, 1_{M_n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \sum_{i=l(n)}^{m} O\left(\frac{i}{m}\right)^{K_1} i^{-2} \left(E\left|\sum_{j=l(n)}^{i} V_j\, 1_{M_n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq O\left(\frac{n^\lambda}{m}\right)^{K_1} + \left(E\left|\frac{1}{m+1} \sum_{i=l(n)}^{m} V_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \sum_{i=l(n)}^{m} O\left(\frac{i}{m}\right)^{K_1} i^{-2} \left(E\left|\sum_{j=l(n)}^{i} V_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad = O\left(\frac{n^{K_1 - \frac{1}{2}}}{m^{K_1}}\right) + O\left(m^{-\frac{1}{2}}\right) + O\left(m^{-K_1} \sum_{i=l(n)}^{m} i^{K_1 - \frac{3}{2}}\right) \\
&\quad = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{n}{m}\right)^{K_1 - \frac{1}{2}}\right) + O\left(m^{-\frac{1}{2}}\right) = O\left(m^{-\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung des Lemmas. □

Falls die Folge (V_n) der Beobachtungsfehler stochastisch beschränkt ist, lassen sich für den mit einer sub- oder quasilinearen Regressionsfunktion entstandenen Robbins-Monro-Prozeß Konvergenzraten erzielen, die besser sind als jede Potenz von $\frac{1}{n}$. Das folgende Lemma ist eine Folgerung aus einem von Révész [23] stammenden Resultat.

Lemma 1.7. *Es seien $a > 0$, $\varepsilon > 0$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$. Für die Zufallsvariablen $V_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ gelte $EV_1 = 0$ und $E(V_n \mid V_1, \ldots, V_{n-1}) = 0$ f.s. $(n \geq 2)$; ferner gebe es ein*

$K > 0$ so, daß $P(|V_n| \le K) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Regressionsfunktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erfülle

$$\begin{aligned} &\underset{K_1,K_2>0}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \qquad |f(x)| \le K_1|x-\vartheta| + K_2\,, \\ &\underset{\alpha>0}{\exists} \quad \underset{|x-\vartheta|\ge\frac{\varepsilon}{2}}{\forall} \qquad \alpha \le \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x)\,. \end{aligned}$$

Dann gibt es für den durch ein $X_1 \in \mathbb{R}$ und $X_{n+1} = X_n - \frac{a}{n}(f(X_n) - V_n)$, $n \in \mathbb{N}$, definierten stochastischen Prozeß (X_n) zwei Konstanten C_1, $C_2 > 0$ mit

$$P\left(\sup_{i\ge n+1} |X_i - \vartheta| \ge \varepsilon\right) \le C_1 \exp\left(-C_2 n^{\alpha/K}\right).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\vartheta = 0$. Ferner seien $K \ge \alpha$ und $m := \lceil K/\alpha \rceil - 1$. Nach [23] gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $P(|X_i| \ge \varepsilon) \le \exp(-Ci^{(a\alpha)/(aK)})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Man wähle ein n_0 mit $Cn_0^{\alpha/K} \ge 1$. Dann gilt für alle $n \ge n_0$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{i\ge n+1} |X_i| \ge \varepsilon\right) &\le \sum_{i=n+1}^{\infty} P(|X_i| \ge \varepsilon) \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \exp(-Cn^{\alpha/K}) \le \int_n^{\infty} \exp(-Ct^{\alpha/K})\,dt \\ &\le \frac{K}{\alpha C} \int_{Cn^{\alpha/K}}^{\infty} e^{-y} y^m\,dy = O(n)\exp\left(-Cn^{\alpha/K}\right). \end{aligned}$$

Hieraus kann man auf die Behauptung des Lemmas schließen. Ist $K < \alpha$, so ist $P(|X_i| > \varepsilon) = 0$ für i hinreichend groß [23]. □

Lemma 1.8. *Es seien $\gamma, \mu, \rho > 0$, $p \ge 1$, $\lambda \in (0,1)$, $l(n) := \lfloor n^\lambda \rfloor$ und $X_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$. Falls $\tau \in [0, \frac{p+1}{p}\gamma\lambda)$, $A > \tau$ und*

$$E\,|X_n|^{\mu p} = O(1)\,, \tag{1.11}$$

$$E\left|\sqrt{n}X_n\,1\left(\sup_{i\ge l(n)} |X_i| \le \rho\right)\right|^{\mu p} = O(1)\,, \tag{1.12}$$

$$P\left(\sup_{i\ge n} |X_i| \ge \rho\right) = O\left(n^{-\gamma}\right), \tag{1.13}$$

dann gilt

$$\underset{\alpha<\alpha_1}{\forall} \qquad P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} i^{-\tau}\,|X_i|^{\mu} \ge n^{-\alpha}\right) = o\left(n^{-\alpha}\right),$$

wobei $\alpha_1 = \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-\tau)+\gamma\lambda} \wedge \left(\tau + \frac{\mu-1}{2}\right)\right)$.

Bemerkung 1.7. Hinreichende Bedingungen für (1.11), (1.12), (1.13) findet man in den Lemmata 1.5, 1.6 bzw. 1.7. Konvergiert $P\left(\sup_{i\geq l(n)}|X_i|\geq\rho\right)$ schneller gegen Null als jede Potenz von $\frac{1}{n}$, wie z.B. in der Behauptung von Lemma 1.7, so ist

$$\alpha_1=\frac{p}{p+1}\left(\left(A-\frac{1}{2}\right)\wedge\left(\tau+\frac{\mu-1}{2}\right)\right).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\rho=1$. Unter den Voraussetzungen (1.11) - (1.13) gilt mit $k(n):=\lfloor n^\kappa\rfloor$ und einem noch zu bestimmenden $\kappa\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
&P\left(n^{-A}\sum_{i=1}^{n}i^{A-1-\tau}\,|X_i|^\mu\geq n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\leq P\left(n^{-A}\sum_{i=1}^{k(n)}i^{A-1-\tau}\,|X_i|^\mu\geq n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right)\\
&\qquad+P\left(n^{-A}\sum_{i=k(n)}^{n}i^{A-1-\tau-\frac{\mu}{2}}|\sqrt{i}X_i|^\mu\geq n^{-\alpha-\frac{1}{2}},\ \sup_{i\geq l(k(n))}|X_i|\leq 1\right)\\
&\qquad+P\left(\sup_{i\geq l(k(n))}|X_i|\geq 1\right)\\
&\quad=O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\,E\left|\sum_{i=1}^{k(n)}i^{A-1-\tau}\,|X_i|^\mu\right|^p\\
&\qquad+O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\,E\left|\sum_{i=k(n)}^{n}i^{A-1-\tau-\frac{\mu}{2}}|\sqrt{i}X_i|^\mu\,1\left(\sup_{i\geq l(k(n))}|X_i|\leq 1\right)\right|^p\\
&\qquad+O\big(l(k(n))^{-\gamma}\big)\\
&\quad=O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left\{\left(\sum_{i=1}^{k(n)}i^{A-1-\tau}\right)^p+\left(\sum_{i=k(n)}^{n}i^{A-1-\tau-\frac{\mu}{2}}\right)^p\right\}+O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\\
&\quad=O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left\{n^{\kappa p(A-\tau)}+n^{p(A-\tau-\frac{\mu}{2})}\,(\log n)^{p1(A=\tau+\frac{\mu}{2})}\,1\Big(A\geq\tau+\frac{\mu}{2}\Big)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+n^{\kappa p(A-\tau-\frac{\mu}{2})}\,1\Big(\tau<A<\tau+\frac{\mu}{2}\Big)\right\}+O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\\
&\quad=:\varepsilon_n\,.
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $A\in(\tau,\tau+\frac{\mu}{2})$. Damit $\varepsilon_n=o(n^{-\alpha})$, muß $p(\alpha+\frac{1}{2}-A+\kappa(A-\tau))<-\alpha$, d.h. $\alpha<\frac{p}{p+1}(A-\kappa(A-\tau)-\frac{1}{2})$, und $\alpha<\gamma\kappa\lambda$ gelten. Das optimale κ ist dann

$$\kappa_1=\frac{p}{p+1}\,\frac{A-\frac{1}{2}}{\frac{p}{p+1}(A-\tau)+\gamma\lambda}\,.$$

Wegen $A > \tau$ und $\tau - \frac{1}{2} < \frac{p+1}{p}\gamma\lambda$ ist $\kappa_1 \in (0,1)$. Es gilt also $\varepsilon_n = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$\alpha < \frac{p}{p+1}\,\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-\tau)+\gamma\lambda}\,. \tag{1.14}$$

Um $\varepsilon = o(n^{-\alpha})$ im Fall $A \geq \tau + \frac{\mu}{2}$ zu erreichen, muß $p(\alpha + \frac{1}{2} - A + \kappa(A-\tau)) < -\alpha$ und $p(\alpha + \frac{1}{2} - A + (A - \tau - \frac{\mu}{2})) < -\alpha$ und $\alpha < \gamma\kappa\lambda$ gelten. Das optimale κ ist wieder κ_1. Es gilt also $\varepsilon_n = o(n^{-\alpha})$ für alle

$$\alpha < \alpha_1 = \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-\tau)+\gamma\lambda} \wedge \left(\tau + \frac{\mu-1}{2}\right)\right). \tag{1.15}$$

Offensichtlich impliziert (1.15) die Relation (1.14). □

Beweis von Satz 1.4. Wir führen nur diejenigen Schritte aus, die sich vom Beweis zu Satz 1.2 unterscheiden.

Entwicklung des quadratischen Terms $T_{2,n}$. Eine Anwendung von Lemma 1.8 mit $\tau = 1$ und $\mu = 2$ zeigt, daß $T_{2,n}$ durch den Term $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}X_i^2$ ersetzt werden darf. Jetzt zeigen wir, daß in diesem Term anstelle von X_i der Ausdruck

$$\widetilde{X}_i := \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}V_j - \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}\frac{B}{2}X_j^2$$

verwendet werden kann. Mit

$$\begin{aligned}
\left|X_i^2 - \widetilde{X}_i^2\right| &= \left|X_i - \widetilde{X}_i\right| \cdot \left|X_i + \widetilde{X}_i\right| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1 + \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right) \\
&\qquad \cdot \left(2\,|X_i| + \left|\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1 + \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right|\right) \\
&\leq O(1)\left\{i^{-A}\,|X_1|\,|X_i| + i^{-2A}\,|X_1|^2 + \left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^A\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)^2\right. \\
&\qquad \left. + |X_i| \cdot \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^A\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right\}
\end{aligned}$$

erhält man

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{B}{2}\left|X_i^2 - \widetilde{X}_i^2\right|\right| \geq n^{-\alpha}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\le P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\big(i^{-A}\big)\,|X_1|\,|X_i|\right| \ge \frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&\quad + P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} O\big(i^{-2A}\big)\,|X_1|^2\right| \ge \frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&\quad + P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)^2\right| \ge \frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&\quad + P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}|X_i|\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)\right| \ge \frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&=: \sum_{i=1}^{4} p_{i,n}\,.
\end{aligned}
$$

Wegen $A > 1$ kann $O(i^{-A})$ in $p_{1,n}$ durch $O(i^{-1})$ ersetzt werden. Eine Anwendung von Lemma 1.8 mit $\tau = 1$ und $\mu = 2$ zeigt, daß $p_{1,n} = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-1)+\gamma\lambda} \wedge \frac{3}{2}\right). \tag{1.16}
$$

Der Nachweis der Gültigkeit der Voraussetzung (1.11) und (1.12) mit X_1X_n anstelle von X_n kann mit der Schwarzschen Ungleichung durchgeführt werden.

Desweiteren gilt

$$
p_{2,n} = O\left(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-1-2A}\left(E\,|X_1|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = o\big(n^{-\alpha}\big)
$$

für alle α mit

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(A-\frac{1}{2}\right). \tag{1.17}
$$

Wir verwenden wieder $M_n = \big[\sup_{i\ge l(n)}|X_i| \le 1\big]$. Mit den Lemmata 1.5 und 1.6 (für ein $\lambda \in (0, 1-\frac{1}{2A})$) erhält man

$$
\begin{aligned}
p_{3,n} &\le P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\left(\sum_{j=1}^{k(n)}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)^2\right| \ge \frac{n^{-\alpha}}{8}\right)\\
&\quad + P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=k(n)}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\left(\sum_{j=k(n)}^{i}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)^2\right| \ge \frac{n^{-\alpha}}{8}\,,\ M_{k(n)}\right)\\
&\quad + P\left(\sup_{i\ge l(k(n))}|X_i| \ge 1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1}\left(E\left|X_j\right|^{(2+\delta_2)2p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^2\right)^p\right.\\
&\quad\left.+\left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=k(n)}^{i} j^{A-1}\left(E\left|X_j\right|^{(2+\delta_2)2p}\,1_{M_{k(n)}}\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^2\right)^p\right\}\\
&\quad+O(n^{-\gamma\kappa\lambda})\\
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1}\right)^2\right)^p\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=k(n)}^{i} j^{A-2-\frac{\delta_2}{2}}\right)^2\right)^p\right\}+O(n^{-\gamma\kappa\lambda})\\
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left\{n^{2p\kappa A}+n^{p(A-2-\delta_2)}\right\}+O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Wählen wir $\kappa=\frac{p}{p+1}\,\frac{A-\frac{1}{2}}{\frac{p}{p+1}2A+\gamma\lambda}$ $(\in(0,1))$, so erhalten wir $p_{3,n}=o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$
\alpha<\frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}2A+\gamma\lambda}\wedge\left(\frac{3}{2}+\delta_2\right)\right). \tag{1.18}
$$

Ganz ähnlich diskutieren wir das asymptotische Verhalten von $p_{4,n}$:

$$
\begin{aligned}
&p_{4,n}\\
&\le P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k(n)}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}|X_i|\left(\sum_{j=1}^{k(n)}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)\right|\ge\frac{n^{-\alpha}}{12}\right)\\
&\quad+P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=k(n)}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}|X_i|\left(\sum_{j=1}^{k(n)}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)\right|\ge\frac{n^{-\alpha}}{12}\,,\ M_{k(n)}\right)\\
&\quad+P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=k(n)}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}|X_i|\left(\sum_{j=k(n)}^{i}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{2+\delta_2}\Big)\right)\right|\ge\frac{n^{-\alpha}}{12}\,,\ M_{k(n)}\right)\\
&\quad+2P\left(\sup_{i\ge l(k(n))}|X_i|\ge 1\right),
\end{aligned}
$$

und unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung mit $q=3+\delta_2$ und $q'=\frac{3+\delta_2}{2+\delta_2}$

$$
= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \Bigg\{ \left(\sum_{i=1}^{k(n)} i^{-1} \left(E\left|X_i\right|^{p(3+\delta_2)} \right)^{\frac{1}{p(3+\delta_2)}} \left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1} \left(E\left|X_j\right|^{p(3+\delta_2)} \right)^{\frac{2+\delta_2}{p(3+\delta_2)}} \right) \right)^p \\
&\quad + \left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-1} \left(E\left| X_i\, 1_{M_{k(n)}} \right|^{p(3+\delta_2)} \right)^{\frac{1}{p(3+\delta_2)}} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1} \left(E\left|X_j\right|^{p(3+\delta_2)} \right)^{\frac{2+\delta_2}{p(3+\delta_2)}} \right) \right)^p \\
&\quad + \left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-1} \left(E\left| X_i\, 1_{M_{k(n)}} \right|^{p(3+\delta_2)} \right)^{\frac{1}{p(3+\delta_2)}} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{j=k(n)}^{i} j^{A-1} \left(E\left| X_j\, 1_{M_{k(n)}} \right|^{p(3+\delta_2)} \right)^{\frac{2+\delta_2}{p(3+\delta_2)}} \right) \right)^p \Bigg\} + O(n^{-\gamma\kappa\lambda}) \\
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big) \Bigg\{ \left(\sum_{i=1}^{k(n)} i^{-1} \right)^p \left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1} \right)^p + \left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-\frac{3}{2}} \right)^p \left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1} \right)^p \\
&\qquad + \left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=k(n)}^{i} j^{A-2-\frac{\delta_2}{2}} \right)^p \Bigg\} + O(n^{-\gamma\kappa\lambda}) \\
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big) \Bigg\{ (\log(n^\kappa))^p\, n^{p\kappa A} + n^{-p\frac{\kappa}{2}} n^{p\kappa A} + \left(\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-\frac{3}{2}+A-1-\frac{\delta_2}{2}} \right)^p \Bigg\} \\
&\quad + O(n^{-\gamma\kappa\lambda}) \\
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big) \Bigg\{ (\log n)^p\, n^{p\kappa A} + n^{p(A-\frac{3+\delta_2}{2})}\, 1\Big(A > \frac{3+\delta_2}{2}\Big) \Bigg\} + O(n^{-\gamma\kappa\lambda})\,.
\end{aligned}
$$

Mit $\kappa = \frac{p}{p+1} \frac{(A-\frac{1}{2})}{\frac{p}{p+1}A+\gamma\lambda}$ folgt dann $p_{4,n} = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$
\alpha < \frac{p}{p+1} \left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}A+\gamma\lambda} \wedge \left(1+\frac{\delta_2}{2}\right) \right). \tag{1.19}
$$

Die Relation

$$
\alpha < \frac{p}{p+1} \left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}2A+\gamma\lambda} \wedge \left(1+\frac{\delta_2}{2}\right) \right) \tag{1.20}
$$

impliziert (1.16) – (1.19). Also gilt $\sum_{i=1}^4 p_{i,n} = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit (1.20).

Jetzt zeigen wir, daß in der Definition von $\widetilde{X}_i$ der Term X_j durch

$$\overline{X}_j := \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=l+1}^{j-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \frac{1}{l} V_l$$

ersetzt werden darf. Dazu schätzen wir folgende Differenz ab:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} \frac{B}{2} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \frac{1}{j} \left(V_j - \frac{B}{2} X_j^2\right) \right]^2 \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \left[\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i-1} \left(1 - \frac{A}{k}\right) \frac{1}{j} \left(V_j - \frac{B}{2} \overline{X}_j^2\right) \right]^2 \right\} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} \frac{B}{2} \left| \sum_{j=1}^{i-1} O\left(\frac{j}{i}\right)^A \frac{1}{j} \left| X_j^2 - \overline{X}_j^2 \right| \right| \\
&\qquad\qquad \cdot \left| \sum_{j=1}^{i-1} O\left(\frac{j}{i}\right)^A \frac{1}{j} \left(V_j + X_j^2 + \overline{X}_j^2\right) \right| ,
\end{aligned}$$

und wegen $\left| X_j^2 - \overline{X}_j^2 \right| = \left(O\left(j^{-A}\right) |X_1| + \sum_{l=1}^{j-1} O\left(\frac{l}{j}\right)^A \frac{1}{l} |X_l|^{1+\delta_1} \right) \left(|X_j| + \left|\overline{X}_j\right| \right)$ weiter mit

$$\begin{aligned}
&= O\left(n^{\frac{1}{2}-A}\right) \sum_{i=1}^{n} i^{-A-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} j^{-1} \left[|X_1| + \sum_{l=1}^{j-1} l^{A-1} |X_l|^{1+\delta_1} \right] \cdot \left[|X_j| + \left|\overline{X}_j\right| \right] \right\} \\
&\qquad\qquad \cdot \left| \sum_{j=1}^{i-1} j^{A-1} \left(V_j + X_j^2 + \overline{X}_j^2\right) \right| .
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck diskutieren wir nur die beiden entscheidenden Terme:

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &:= O\left(n^{\frac{1}{2}-A}\right) \sum_{i=1}^{n} i^{-A-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} j^{-1} \sum_{l=1}^{j-1} l^{A-1} |X_l|^{1+\delta_1} |X_j| \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} j^{A-1} X_j^2 \right\} , \\
R_{2,n} &:= O\left(n^{\frac{1}{2}-A}\right) \sum_{i=1}^{n} i^{-A-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} j^{-1} \sum_{l=1}^{j-1} l^{A-1} |X_l|^{1+\delta_1} |X_j| \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} j^{A-1} V_j \right\} .
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
P\left(|R_{1,n}| \geq n^{-\alpha}\right) &\leq P\left(\left| R_{1,n} 1_{M_{k(n)}} \right| \geq n^{-\alpha}\right) + P\left(\sup_{i \geq l(k(n))} |X_i| \geq 1\right) \\
&\leq n^{\alpha p} E \left| R_{1,n} 1_{M_{k(n)}} \right|^p + O\left(n^{-\gamma\kappa\lambda}\right)
\end{aligned}$$

$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\sum_{j=1}^{i-1} j^{-1}\sum_{l=1}^{j-1} l^{A-1}\sum_{k=1}^{i-1} k^{A-1}\right.$$
$$\left.\cdot\left(E\left(|X_l|^{1+\delta_1}\,|X_j|\,|X_k|^2\,1_{M_{k(n)}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\,.$$

Für $q = \frac{4+\delta_1}{1+\delta_1}$, $q' = 4+\delta_1$ und $q'' = 2+\frac{\delta_1}{2}$ gilt $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{q''} = 1$. Setzen wir $x_{\nu,n} := \left(E\left|X_\nu\,1_{M_{k(n)}}\right|^{p(4+\delta_1)}\right)^{\frac{1}{p(4+\delta_1)}}$, so können wir aufgrund der Hölderschen Ungleichung fortfahren mit

$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\sum_{j=1}^{i} j^{-1}\sum_{l=1}^{j} l^{A-1}\sum_{k=1}^{i} k^{A-1}x_{l,n}^{1+\delta_1}x_{j,n}x_{k,n}^2\right)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\,.$$

Nach Lemma 1.5 gilt $\sup\{x_{\nu,n} : \nu, n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Lemma 1.6 sichert die Existenz einer Konstanten C mit $x_{\nu,n} \le C\nu^{-1/2}$ für alle $\nu, n \in \mathbb{N}$ mit $\nu > k(n)$. Damit setzen wir obige Abschätzung fort mit

$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=1}^{i} j^{-1}x_{j,n}\left(\sum_{l=1}^{k(n)} l^{A-1} + \sum_{l=k(n)+1}^{j} l^{A-\frac{3+\delta_1}{2}}\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(\sum_{k=1}^{k(n)} k^{A-1} + \sum_{k=k(n)+1}^{i} k^{A-2}\right)\right)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)$$
$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=1}^{i} j^{-1}x_{j,n}\left(n^{\kappa A} + j^{A-\frac{1+\delta_1}{2}}\right)\right)\left(n^{\kappa A} + i^{A-1}\right)\right)^p$$
$$+ O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)$$
$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\left(\sum_{j=1}^{k(n)}\left(j^{-1}n^{\kappa A} + j^{A-\frac{3+\delta_1}{2}}\right) + \sum_{j=k(n)}^{i}\left(j^{-\frac{3}{2}}n^{\kappa A} + j^{A-\frac{4+\delta_1}{2}}\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(n^{\kappa A} + i^{A-1}\right)\right)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)$$
$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\left(n^{\kappa A}\log n + i^{A-\frac{2+\delta_1}{2}}\right)\left(n^{\kappa A} + i^{A-1}\right)\right)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)$$
$$= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(n^{2\kappa A}\log n + n^{A-\frac{4+\delta_1}{2}}1\left(A > \frac{4+\delta_1}{2}\right)\right) + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\,.$$

Also ist $P(|R_{1,n}| \ge n^{-\alpha}) = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit $\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\left((1-2\kappa)\,A - \frac{1}{2}\right) \wedge \frac{3+\delta_1}{2}\right) \wedge \gamma\kappa\lambda$, d.h. für alle α mit

$$\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}2A+\gamma\lambda} \wedge \frac{3+\delta_1}{2}\right). \tag{1.21}$$

Jetzt betrachten wir

$$
\begin{aligned}
&P\left(|R_{2,n}| \geq n^{-\alpha}\right) \\
&\quad = O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-A-1}\sum_{j=1}^{i-1} j^{-1}\sum_{l=1}^{j-1} l^{A-1}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\cdot\left(E\left(|X_l|^{1+\delta_1}\,|X_j|\left|\sum_{k=1}^{i-1} k^{A-1}V_k\right| 1_{M_{k(n)}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p + O(n^{-\gamma\kappa\lambda})\,.
\end{aligned}
$$

Für $q = \frac{3+\delta_1}{1+\delta_1}$ und $q' = q'' = 3+\delta_1$ gilt $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{q''} = 1$. Mit der Hölderschen Ungleichung, $x_{\nu,n} := (E|X_\nu\, 1_{M_{k(n)}}|^{p(3+\delta_1)})^{\frac{1}{p(3+\delta_1)}}$ und $(E|\sum_{k=1}^{i} k^{A-1}V_k|^{p(3+\delta_1)})^{\frac{1}{p(3+\delta_1)}} = O(i^{A-\frac{1}{2}})$ ergibt sich für die rechte Seite der obigen Gleichung

$$
O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{i-1} j^{-1}\sum_{l=1}^{j-1} l^{A-1}x_{l,n}^{1+\delta_1}x_{j,n}\right)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\,.
$$

Fahren wir fort wie in der Abschätzung von $R_{1,n}$, so erhalten wir $P(|R_{2,n}| \geq n^{-\alpha}) = o(n^{-\alpha})$ für alle α, die (1.21) erfüllen.

Entwicklung des kubischen Terms $T_{3,n}$. Unter Beachtung von Lemma 1.1 zeigt eine Anwendung von Lemma 1.8 mit $\tau = 1$ und $\mu = 3$ zeigt, daß

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{A}{k}\right)-\left(\frac{i}{n}\right)^A\right|\left(\frac{i}{n}\right)^{-1}\frac{C}{6}X_i^3\right| \geq n^{-\alpha}\right) \\
&\qquad = P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} O\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} i^{-1}X_i^3\right| \geq n^{-\alpha}\right) = o\big(n^{-\alpha}\big)
\end{aligned}
$$

für alle α mit

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-1)+\gamma\lambda} \wedge 2\right).
$$

Deshalb genügt es, statt $T_{3,n}$ den Ausdruck $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}X_i^3$ zu entwickeln. In diesem Ausdruck darf X_i wieder durch $\widetilde{X}_i := \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i-1}(1-\frac{A}{k})\left(\frac{j}{i}\right)^{-1}V_j$ ersetzt werden:

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left|X_i^3-\widetilde{X}_i^3\right|\right| \geq n^{-\alpha}\right) \\
&\quad \leq P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left|X_i-\widetilde{X}_i\right|\left|X_i^2+\widetilde{X}_i^2\right|\right| \geq n^{-\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1\right)X_i^2\right|\geq\frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&\quad+P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{A}{k}\right)X_1\right)\widetilde{X}_i^2\right|\geq\frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&\quad+P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{1+\delta_1}\Big)X_i^2\right)\right|\geq\frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&\quad+P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{A-1}\frac{C}{6}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{i}\right)^{A}\frac{1}{j}O\Big(|X_j|^{1+\delta_1}\Big)\widetilde{X}_i^2\right)\right|\geq\frac{n^{-\alpha}}{4}\right)\\
&=:\sum_{i=1}^{4}p_{i,n}\,.
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 1.8 ($\tau=1,\ \mu=2$) kann gezeigt werden, daß $p_{1,n}=o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$\alpha<\frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-1)+\gamma\lambda}\wedge\frac{3}{2}\right).$$

Dazu verwenden wir u.a.

$$E\left|X_1X_n^2\,1\Big(\sup_{i\geq l(k(n))}|X_i|\leq\rho\Big)\right|^p\leq\left(E\,|X_1|^{3p}\right)^{\frac{1}{3p}}\left(E\left|X_n\,1\Big(\sup_{i\geq l(k(n))}|X_i|\leq\rho\Big)\right|^{3p}\right)^{\frac{2}{3p}}.$$

Mittels der Markov-Ungleichung folgt $p_{2,n}=o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$\alpha<\frac{p}{p+1}\left(\left(A-\frac{1}{2}\right)\wedge\frac{3}{2}\right).$$

Den Term $p_{3,n}$ behandeln wir ähnlich wie oben:

$$p_{3,n}=O(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)})\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}j^{A-1}\left(E\left(|X_j|^{1+\delta_1}X_i^2\,1_{M_{k(n)}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p+O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)$$

und mit $x_{\nu,n}:=\left(E\left|X_\nu\,1_{M_{k(n)}}\right|^{p(3+\delta_1)}\right)^{\frac{1}{p(3+\delta_1)}}$

$$
\begin{aligned}
&=O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{n}i^{-1}\left(\sum_{j=1}^{i}j^{A-1}x_{j,n}^{1+\delta_1}\right)x_{i,n}^2\right)^p+O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big)\\
&=O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big)\left(\sum_{i=1}^{k(n)}i^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k(n)}j^{A-1}+\sum_{j=k(n)}^{i}j^{A-\frac{3+\delta_1}{2}}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{i=k(n)}^{n} i^{-2} \left(\sum_{j=1}^{k(n)} j^{A-1} + \sum_{j=k(n)}^{i} j^{A-\frac{3+\delta_1}{2}} \right) \Bigg)^p + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big) \\
&= O\Big(n^{p(\alpha+\frac{1}{2}-A)}\Big) \left(n^{p\kappa A} \log n + n^{p(A-\frac{3+\delta_1}{2})} 1\Big(A > \frac{3+\delta_1}{2}\Big) \right) + O\big(n^{-\gamma\kappa\lambda}\big) \\
&= o\big(n^{-\alpha}\big)
\end{aligned}
$$

für alle α mit $\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}A+\gamma\lambda} \wedge \frac{2+\delta_1}{2}\right)$. Für den Term $p_{4,n}$ gilt dasselbe Resultat. Damit erhalten wir $P\left(|T_{3,n}| \geq n^{-\alpha}\right) = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}(A-1)+\gamma\lambda} \wedge \frac{2+\delta_1}{2}\right). \tag{1.22}
$$

Abschätzung des Restterms $T_{4,n}$. Mit $\tau = 0$ und $\mu = 3+\delta_3$ zeigt Lemma 1.8, daß $P(|T_{4,n}| \geq n^{-\alpha}) = o(n^{-\alpha})$ für alle α mit

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{(A-\frac{1}{2})\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}A+\gamma\lambda} \wedge \frac{2+\delta_3}{2}\right). \tag{1.23}
$$

Zusammenfassung. Für $\delta_1 := \delta_2 := \delta_3$ impliziert

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{\left(A-\frac{1}{2}\right)\gamma\lambda}{\frac{p}{p+1}2A+\gamma\lambda} \wedge \left(1+\frac{\delta_3}{2}\right)\right) \tag{1.24}
$$

die Relationen (1.20), (1.21), (1.22) und (1.23) mit einem beliebigen $\lambda \in \big(0,\ 1-\frac{1}{2A}\big)$. Bildet man das Supremum der rechten Seite in (1.24) bezüglich der Variablen λ, wird man schließlich auf $P(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq n^{-\alpha}) = o(n^{-\alpha})$ für alle

$$
\alpha < \frac{p}{p+1}\left(\frac{\left(A-\frac{1}{2}\right)^2\gamma}{\frac{2p}{p+1}A^2+(A-\frac{1}{2})\gamma} \wedge \left(1+\frac{\delta_3}{2}\right)\right) \tag{1.25}
$$

geführt. Um zu zeigen, daß es ein $\varepsilon > 0$ mit $P\left(|\sqrt{n}\Delta_n| \geq n^{-1-\varepsilon}\right) = o\big(\frac{1}{n}\big)$ gibt, genügt es, daß (1.25) für $\alpha = 1$ erfüllt ist. Wegen $\gamma > 2A^2/(A-1/2)(A-3/2))$ ist dies der Fall, falls (1.7) erfüllt ist. Damit ist Satz 1.4 bewiesen. □

Ein **Beweis von Satz 1.3** kann ähnlich wie der letzte Beweis geführt werden. □

Kapitel 2

Asymptotische Entwicklung von Momenten und Kumulanten

2.1 Momente des Robbins-Monro-Prozesses

Zur Formulierung von Edgeworth-Entwicklungen des Robbins-Monro-Prozesses werden asymptotische Entwicklungen der Momente und Kumulanten der in Kapitel 1 hergeleiteten Darstellungen von $(\sqrt{n}(X_{n+1} - \vartheta))$ benötigt.

Ist die zugrundeliegende Regressionsfunktion f quasilinear, so stimmen die asymptotischen Entwicklungen der Momente von $(\sqrt{n}(X_{n+1} - \vartheta))$ und der Momente der zu $(\sqrt{n}(X_{n+1} - \vartheta))$ gehörigen nichtrekursiven Darstellung aus Abschnitt 1.2 bis auf Restterme überein. Bei sublinearen Regressionsfunktionen brauchen die Momente des dazugehörigen Robbins-Monro-Prozesses $(\sqrt{n}(X_{n+1} - \vartheta))$ nicht zu existieren. Im Hinblick auf asymptotische Entwicklungen der Verteilungsfunktion wird dies aber ohne Bedeutung sein. Eine Erklärung hierfür liefert die in Abschnitt 4.1 verwendete Delta-Methode.

Voraussetzung 2.1. *Es gelten Voraussetzung* 1.1 *für ein* $m \geq 2$*, Voraussetzung* 1.2*, und, falls* $m \geq 3$ *oder* $m \geq 4$*,* $\rho^3 := EV^3$ *bzw.* $\mu^4 := EV^4$*. Ferner seien*

$$(R_0) \qquad \underset{K>0}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \qquad 0 \leq \operatorname{sign}(x-\vartheta)\cdot f(x) \leq K|x-\vartheta|\,,$$

$$(M_m) \qquad E|\sqrt{n}(X_n - \vartheta)|^m = O(1)$$

erfüllt.

Bemerkung 2.1. Bedingung (M_m) ist nach Lemma 1.3 erfüllt, falls anstelle von (R_0) die schärfere Eigenschaft der Quasilinearität von f (Voraussetzung 1.3) und $K_1 > 1/(2a)$ vorausgesetzt werden.

Die Behauptungen (2.2), (2.4) und (2.6) im folgenden Satz wurden schon von Schmetterer [26], S. 597, angegeben.

Satz 2.1. *Es sei $\lambda > 0$. Unter Voraussetzung 2.1 gelten die folgenden Implikationen:*

$$(2.1)\qquad (aA > 1),\ (M_{2+\lambda}),\ (R_{2+\delta_2}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta) = \frac{1}{n} M_1 + O(n^{-1-\varepsilon}),$$

$$(2.2)\qquad (aA > \tfrac{1}{2}),\ (M_{2+\lambda}),\ (R_{1+\delta_1}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^2 = \frac{1}{n} M_2 + O(n^{-1-\varepsilon}),$$

$$(2.3)\qquad (aA > 1),\ (M_{4+\lambda}),\ (R_{2+\delta_2}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^3 = \frac{1}{n^2} M_3 + O(n^{-2-\varepsilon}),$$

$$(2.4)\qquad (aA > \tfrac{1}{2}),\ (M_{4+\lambda}),\ (R_{1+\delta_1}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^4 = \frac{1}{n^2} M_4 + O(n^{-2-\varepsilon}),$$

$$(2.5)\qquad (aA > 1),\ (M_{6+\lambda}),\ (R_{2+\delta_2}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^5 = \frac{1}{n^3} M_5 + O(n^{-3-\varepsilon}),$$

$$(2.6)\qquad (aA > \tfrac{1}{2}),\ (M_{6+\lambda}),\ (R_{1+\delta_1}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^6 = \frac{1}{n^3} M_6 + O(n^{-3-\varepsilon}),$$

$$(2.7)\qquad (aA > \tfrac{3+\delta_3}{2}),\ (M_{3+\lambda}),\ (R_{3+\delta_3}) \Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta) = \frac{1}{n} M_1 + O(n^{-\frac{3+\delta_3}{2}}),$$

$$(2.8)\qquad (aA > 1),\ (M_{4+\lambda}),\ (R_{3+\delta_3}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^2 = \frac{1}{n} M_{2,1} + \frac{1}{n^2} M_{2,2} + O(n^{-2-\varepsilon}),$$

$$(2.9)\qquad (aA > \tfrac{3+\delta_3}{2}),\ (M_{5+\lambda}),\ (R_{3+\delta_3}) \Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^3 = \frac{1}{n^2} M_3 + O(n^{-\frac{5+\delta_3}{2}}),$$

$$(2.10)\qquad (aA > 1),\ (M_{6+\lambda}),\ (R_{3+\delta_3}) \quad\Longrightarrow\quad E(X_{n+1} - \vartheta)^4 = \frac{1}{n^2} M_{4,1} + \frac{1}{n^3} M_{4,2} + O(n^{-3-\varepsilon}),$$

wobei jeweils $\varepsilon > 0$. Für $a = 1$ ergibt sich hierbei

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\frac{B\sigma^2}{2(A-1)(2A-1)}, \\
M_{2,1} &= M_2 = \frac{\sigma^2}{2A-1}, \\
M_{2,2} &= \frac{\sigma^2(A-1)}{2(2A-1)} + \frac{3\sigma^4(5A-4)B^2}{4(A-1)^2(2A-1)^2(3A-2)} - \frac{\rho^3 B}{2(A-1)(3A-2)} \\
&\qquad - \frac{\sigma^4 C}{2(A-1)(2A-1)^2}, \\
M_3 &= \frac{\rho^3}{3A-2} - \frac{3\sigma^4(5A-4)B}{2(A-1)(2A-1)^2(3A-2)}, \\
M_{4,1} &= M_4 = \frac{3\sigma^4}{(2A-1)^2}, \\
M_{4,2} &= \frac{3\sigma^6(100A^2-169A+72)B^2}{2(A-1)^2(2A-1)^3(3A-2)(4A-3)} - \frac{\sigma^2\rho^3(32A-27)B}{(A-1)(2A-1)(3A-2)(4A-3)} \\
&\qquad - \frac{3\sigma^4(7A-4)}{(2A-1)^2(4A-3)} - \frac{\sigma^6(16A-13)C}{(A-1)(2A-1)^3(4A-3)} + \frac{\mu^4}{4A-3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_5 &= -\frac{15\sigma^6(7A-6)B}{2(A-1)(2A-1)^3(3A-2)} + \frac{10\sigma^2\rho^3}{(2A-1)(3A-2)}\,, \\ M_6 &= 15\frac{\sigma^6}{(2A-1)^3}\,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung einer asymptotischen Entwicklung der Momente von (X_{n+1}) wird die Rekursion für die Zufallsvariablen (X_n) in eine Rekursion für die Momente übergeführt. Der erste Teil des folgenden Lemmas ist eine Verschärfung des Lemmas von Chung [8] (mit einer Korrektur durch Fabian in [12]).

Lemma 2.1. **(a)** *Seien $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0,1]$, $\nu \in (0, a+1-\delta)$ und $\delta_n = O(n^{-\delta})$. Dann gilt für die durch $r_1 \in \mathbb{R}$ und*

$$r_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right) r_n + n^{-\nu}(b + \delta_n), \;\; n \in \mathbb{N},$$

definierte Rekursion

$$r_{n+1} = n^{-(\nu-1)} \frac{b}{a-\nu+1} + O\big(n^{-(\nu-1)-\delta}\big)\,.$$

(b) *Seien $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\nu \in (0,a)$ und $\delta_n = O\big(n^{-\delta-1}\big)$. Dann gibt es für die durch $r_1 \in \mathbb{R}$ und*

$$r_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right) r_n + n^{-\nu}\left(b + \frac{c}{n} + \delta_n\right), \;\; n \in \mathbb{N}\,,$$

definierte Rekursion ein $\varepsilon > 0$ mit

$$r_{n+1} = n^{-(\nu-1)} \frac{b}{a-\nu+1} + n^{-\nu} \frac{1}{a-\nu}\left(b\,\frac{\nu^2 - \nu(2a+1) + 2a}{2(a-\nu+1)} + c\right) + O\big(n^{-\nu-\varepsilon}\big)\,.$$

Beweis. (a) Mit vollständiger Induktion und Lemma 1.1 zeigt man

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{a}{i}\right) r_1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=i+1}^{n}\left(1 - \frac{a}{k}\right) i^{-\nu}(b + \delta_i) \\ &= O\big(n^{-a}\big) + n^{-(\nu-1)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{a} \big(1 + O\big(i^{-1}\big)\big) \left(\frac{i}{n}\right)^{-\nu} b\,\big(1 + O\big(i^{-\delta}\big)\big) \\ &= O\big(n^{-a}\big) + n^{-(\nu-1)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{a-\nu} b + n^{-a} \sum_{i=1}^{n} O\big(i^{a-\nu-\delta}\big) \\ &= O\big(n^{-a}\big) + n^{-(\nu-1)} \left(\frac{b}{a-\nu+1} + O\big(n^{-1}\big) + O\big(n^{-1-a+\nu}\big)\right) + O\big(n^{-(\nu-1)-\delta}\big) \\ &= n^{-(\nu-1)} \frac{b}{a-\nu+1} + O\big(n^{-(\nu-1)-\delta}\big)\,, \end{aligned}$$

da $a > \nu - 1 + \delta$ und $\delta \in (0,1]$.

(b) Ähnlich wie in (a) gilt für ein hinreichend kleines $\varepsilon \in (0,\delta]$, daß

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{a}{i}\right) r_1 + \sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{a}{k}\right) i^{-\nu}\left(b+\frac{c}{i}+O\big(i^{-1-\delta}\big)\right) \\
&= O(n^{-a}) + n^{-(\nu-1)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{a}\left(1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{i}\right)\frac{a(a-1)}{2}+O\big(i^{-1-\varepsilon}\big)\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{-\nu} b \\
&\qquad + n^{-\nu}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{a}\big(1+O(i^{-\varepsilon})\big)\left(\frac{i}{n}\right)^{-\nu-1} c\,\big(1+O(i^{-\delta})\big) \\
&= O(n^{-a}) + \left(1+\frac{1}{n}\frac{a(a-1)}{2}\right) bn^{-(\nu-1)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{a-\nu} \\
&\qquad + \left(c-\frac{a(a-1)}{2}b\right) n^{-\nu}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{a-\nu-1}\big(1+O(i^{-\varepsilon})\big)\,,
\end{aligned}$$

und da $a > \nu$, können wir fortfahren mit

$$\begin{aligned}
&= O(n^{-\nu-\varepsilon}) + n^{-(\nu-1)}\left(1+\frac{1}{n}\frac{a(a-1)}{2}\right) b\left(\frac{1}{a-\nu+1}+\frac{1}{n}\frac{1}{2}+O(n^{-1-\varepsilon})\right) \\
&\qquad + n^{-\nu}\left(c-\frac{a(a-1)}{2}b\right)\left(\frac{1}{a-\nu}+O(n^{-\varepsilon})\right) + O(n^{-\nu-\varepsilon}) \\
&= n^{-(\nu-1)}\frac{b}{a-\nu+1} + n^{-\nu}\left(\frac{b}{2}-\frac{a(a-1)b}{2(a-\nu)(a-\nu+1)}+\frac{c}{a-\nu}\right) + O(n^{-\nu-\varepsilon})\,.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 2.1. O.B.d.A. seien $a = 1$ und $\vartheta = 0$. In den folgenden Betrachtungen erlauben wir, daß $\varepsilon > 0$ von Gleichung zu Gleichung seine Größe ändern darf. Die Einzelbehauptungen werden nicht in Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $X_{n+1} - \vartheta$ bewiesen, da eine ökonomische Berechnung von z.B. $E(X_{n+1} - \vartheta)$ die Kenntnis von $E(X_{n+1} - \vartheta)^2$ voraussetzt.

Nachweis von (2.2). Wegen $(R_{1+\delta_1})$ können wir schreiben

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^2 &= EX_n^2 - \frac{2}{n}E\left(X_n f(X_n)\right) + \frac{1}{n^2}Ef\left(X_n\right)^2 + \frac{\sigma^2}{n^2} \\
&= EX_n^2 - \frac{2}{n}E\left(AX_n^2 + O\Big(|X_n|^{2+\delta_1}\Big)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{n^2}E\left(A^2X_n^2 + O\Big(|X_n|^{2+\delta_1} + |X_n|^{2+2\delta_1}\Big)\right) + \frac{\sigma^2}{n^2}
\end{aligned}$$

und wegen $(M_{2+\lambda})$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{2A}{n}\right) EX_n^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + O\Big(n^{-2-\frac{\delta_1}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{n}\frac{\sigma^2}{2A-1} + O\big(n^{-1-\varepsilon}\big)\,,
\end{aligned}$$

wobei nach Lemma 2.1 ein solches $\varepsilon > 0$ existiert.

Nachweis von (2.1). Wegen $(R_{2+\delta_2})$ gilt

$$\begin{aligned}
EX_{n+1} &= EX_n - \frac{1}{n}Ef(X_n) \\
&= EX_n - \frac{1}{n}E\left(AX_n + \frac{B}{2}X_n^2 + O\Big(|X_n|^{2+\delta_2}\Big)\right)
\end{aligned}$$

und wegen $(M_{2+\lambda})$ und der bereits bewiesenen Gültigkeit von (2.2)

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{A}{n}\right) EX_n - \frac{1}{n^2}\frac{B}{2}\left(M_2 + O\big(n^{-\varepsilon}\big)\right) + O\Big(n^{-2-\frac{\delta_2}{2}}\Big) \\
&= -\frac{1}{n}\frac{B}{2(A-1)}M_2 + O\big(n^{-1-\varepsilon}\big)\,,
\end{aligned}$$

da wieder Lemma 2.1 mit $\nu = 2$ und $a = A > 1$ angewendet werden kann.

Nachweis von (2.4). Unter $(R_{1+\delta_2})$ gilt

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^4 = EX_n^4 &- \frac{4}{n}E\left(X_n^3 f(X_n)\right) + \frac{6}{n^2}\left(E\left(X_n^2 f\left(X_n\right)^2\right) + \sigma^2 EX_n^2\right) \\
&- \frac{4}{n^3}\left(E\left(X_n f\left(X_n\right)^3\right) + 3\sigma^2 E\left(X_n f\left(X_n\right)\right) - \rho^3 EX_n\right) \\
&+ \frac{1}{n^2}O\big(Ef\left(X_n\right)^4 + \mu^4\big) \\
= EX_n^4 &- \frac{4}{n}\left(E\left(AX_n^4\right) + E\left(O\big(|X_n|^{4+\varepsilon}\big)\right)\right) \\
&+ \frac{6}{n^2}\left(E\left(AX_n^4\right) + E\left(O\big(|X_n|^{4+\varepsilon}\big)\right) + \sigma^2 EX_n^2\right) \\
&- \frac{4}{n^3}\left(E\left(O\big(X_n^4\big)\right) + 3\sigma^2 E\left(O\big(X_n^2\big)\right) - \rho^3 EX_n\right) \\
&+ \frac{1}{n^4}E\left(O\big(X_n^4\big) + O(1)\right),
\end{aligned}$$

und weiter mit $(M_{4+\lambda})$ und (2.2)

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{4A}{n}\right) EX_n^4 + \frac{6}{n^2}\sigma^2 EX_n^2 + O\big(n^{-3-\varepsilon}\big) \\
&= \left(1 - \frac{4A}{n}\right) EX_n^4 + \frac{6}{n^3}\sigma^2 M_2 + O\big(n^{-3-\varepsilon}\big) \\
&= \frac{1}{n^2}3M_2^2 + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)\,,
\end{aligned}$$

wobei für den letzten Schritt Lemma 2.1 mit $a = 4A$, $b = 6\sigma^2 M_2$ und $\nu = 3 \in (0, 4A+1)$ angewendet wurde.

Nachweis von (2.3). Mit $(R_{2+\delta_2})$, $(M_{4+\lambda})$, (2.1) und (2.4) folgt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^3 &= EX_n^3 - \frac{3}{n}\left(AEX_n^3 + \frac{B}{2}EX_n^4 + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)\right) \\
&\qquad + \frac{3}{n^2}\left(A^2EX_n^3 + O\big(n^{-2}\big)\right) - \frac{1}{n^3}\left(A^3EX_n^3 + O\big(n^{-2}\big)\right) \\
&\qquad + \frac{3}{n^2}\sigma^2 EX_n + \frac{\rho^3}{n^3} + \frac{3}{n^3}\sigma^2 O\Big(n^{-\frac{1}{2}}\Big) \\
&= \left(1 - \frac{3A}{n}\right)EX_n^3 + \frac{1}{n^3}\left(\rho^3 + 3\sigma^2 M_1 - \frac{3B}{2}M_4 + O\big(n^{-\varepsilon}\big)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{\rho^3 + 3\sigma^2 M_1 - \frac{3B}{2}M_4}{3A-2} + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)\,,
\end{aligned}$$

da Lemma 2.1 wieder angewendet werden kann.

Nachweis von (2.6). Eine geeignete Entwicklung von X_{n+1}^6 führt mit (2.4) und Lemma 2.1 auf

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^6 &= \left(1 - \frac{6A}{n}\right)EX_n^6 + \frac{1}{n^2}\left(15\sigma^2 EX_n^4 + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)\right) \\
&= \left(1 - \frac{6A}{n}\right)EX_n^6 + \frac{1}{n^4}15\sigma^2 M_4 + O\big(n^{-4-\varepsilon}\big) \\
&= \frac{1}{n^3}15M_2^3 + O\big(n^{-4-\varepsilon}\big)\,.
\end{aligned}$$

Nachweis von (2.5). Unter $(M_{6+\lambda})$ und $(R_{2+\delta_2})$ kann die folgende Entwicklung gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^5 &= EX_n^5 - \frac{5}{n}E\left(X_n^4\left(f\left(X_n\right) - V_n\right)\right) + \frac{10}{n^2}E\left(X_n^3\left(f\left(X_n\right) - V_n\right)^2\right) \\
&\qquad - \frac{10}{n^3}E\left(X_n^2\left(f\left(X_n\right) - V_n\right)^3\right) + \frac{5}{n^4}E\left(X_n\left(f\left(X_n\right) - V_n\right)^4\right) \\
&\qquad - \frac{1}{n^5}E\left(\left(f\left(X_n\right) - V_n\right)^5\right) \\
&= \left(1 - \frac{5A}{n}\right)EX_n^5 - \frac{1}{n}\frac{5B}{2}EX_n^6 + \frac{1}{n^2}10\sigma^2 EX_n^3 \\
&\qquad + \frac{1}{n^3}10\rho^3 EX_n^2 + O\big(n^{-4-\varepsilon}\big)
\end{aligned}$$

und unter Beachtung der bereits bewiesenen Behauptungen (2.2), (2.3) und (2.6) kann fortgefahren werden mit

$$= \left(1 - \frac{5A}{n}\right)EX_n^5 + \frac{1}{n^4}\left(-\frac{5B}{2}M_6 + 10\sigma^2 M_3 + 10\rho^3 M_2\right) + O\big(n^{-4-\varepsilon}\big)$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{-\frac{5B}{2} M_6 + 10\sigma^2 M_3 + 10\rho^3 M_2}{5A-3} + O\big(n^{-3-\varepsilon}\big)\,,$$

Nachweis von (2.8). Wegen $(M_{4+\lambda})$ und $(R_{3+\delta_3})$ gilt

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^2 &= EX_n^2 - \frac{2}{n} E\left(X_n f\left(X_n\right)\right) + \frac{1}{n^2} Ef\left(X_n\right)^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 \\
&= EX_n^2 - \frac{2}{n}\left(AEX_n^2 + \frac{B}{2}EX_n^3 + \frac{C}{6}EX_n^4 + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{n^2}\left(A^2EX_n^2 + ABEX_n^3 + \frac{B^2}{4}EX_n^4 + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)\right) + \frac{\sigma^2}{n^2} \\
&= \left(1 - \frac{2A}{n}\right) EX_n^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 - \frac{1}{n}BEX_n^3 - \frac{1}{n}\frac{C}{3}EX_n^4 + \frac{1}{n^2}A^2EX_n^2 + O\big(n^{-3-\varepsilon}\big)
\end{aligned}$$

und unter Beachtung von (2.2), (2.3) und (2.4)

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{2A}{n}\right) EX_n^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^3}\left(-BM_3 - \frac{C}{3}M_4 + A^2M_2\right) + O\big(n^{-3-\varepsilon}\big) \\
&= \frac{1}{n}\frac{\sigma^2}{2A-1} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{2(A-1)}\left(-\sigma^2 + A^2M_2 - BM_3 - CM_2^2\right) + O\big(n^{-2-\varepsilon}\big)
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Identität mit Lemma 2.1(b) für $a = 2A$ und $\nu = 2$ folgt.

Nachweis von (2.7). Wegen $(R_{3+\delta_3})$ gilt

$$\begin{aligned}
EX_{n+1} &= EX_n - \frac{1}{n}Ef(X_n) \\
&= EX_n - \frac{1}{n}E\left(AX_n + \frac{B}{2}X_n^2 + \frac{C}{6}X_n^3 + O\Big(|X_n|^{3+\delta_3}\Big)\right)
\end{aligned}$$

und wegen $(M_{3+\lambda})$ und der bereits bewiesenen Gültigkeit von (2.3) und (2.8)

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{A}{n}\right) EX_n - \frac{1}{n^2}\frac{B}{2}\left(M_2 + O\big(n^{-1}\big)\right) + O\Big(n^{-\frac{5+\delta_3}{2}}\Big) \\
&= -\frac{1}{n}\frac{B}{2(A-1)}M_2 + O\Big(n^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}\Big)\,,
\end{aligned}$$

da Lemma 2.1(a) mit $a = A > \frac{3+\delta_3}{2}$, $\nu = 2$ und $\delta = \frac{1+\delta_3}{2}$ angewendet werden kann.

Nachweis von (2.10). Beachten wir $(M_{6+\lambda})$ und $(R_{3+\delta_3})$, so läßt sich folgende Entwicklung angeben:

$$\begin{aligned}
EX_{n+1}^4 = &\left(1 - \frac{4A}{n}\right) EX_n^4 - \frac{1}{n}2BEX_n^5 - \frac{1}{n}\frac{2C}{3}EX_n^6 + \frac{1}{n^2}6A^2EX_n^4 \\
&+ \frac{1}{n^2}6\sigma^2EX_n^2 - \frac{1}{n^3}12A\sigma^2EX_n^2 + \frac{1}{n^3}4\rho^3EX_n + \frac{1}{n^4}\mu^4 + O\big(n^{-4-\varepsilon}\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{4A}{n}\right) EX_n^4 + \frac{1}{n^3} 6\sigma^2 M_{2,1} \\
&\quad + \frac{1}{n^4}\left(6\sigma^2 M_{2,2} - 2BM_5 - \frac{2C}{3} M_6 + 6A^2 M_4 - 12A\sigma^2 M_{2,1} + 4\rho^3 M_1 + \mu^4\right) \\
&\qquad + O\big(n^{-4-\varepsilon}\big) \\
&= \frac{1}{n^2} 3M_2^2 + \frac{1}{n^3}\frac{1}{4A-3}\Bigg(- 6\sigma^2 M_{2,1}\frac{8A-3}{4A-2} + 6\sigma^2 M_{2,2} - 2BM_5 \\
&\qquad\qquad - 10CM_{2,1}^3 + 6A^2 M_4 - 12A\sigma^2 M_{2,1} + 4\rho^3 M_1 + \mu^4\Bigg) \\
&\qquad + O\big(n^{-3-\varepsilon}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Die letzte Identität ergibt sich aus einer Anwendung von Lemma 2.1(b) mit $a = 4A$ und $\nu = 3$.

Nachweis von (2.9). Mit $(R_{3+\delta_3})$ und $(M_{5+\lambda})$ folgt

$$
\begin{aligned}
EX_{n+1}^3 = EX_n^3 &- \frac{3}{n}\left(AEX_n^3 + \frac{B}{2}EX_n^4 + \frac{C}{6}EX_n^5 + O\Big(n^{-\frac{5+\delta_3}{2}}\Big)\right) \\
&+ \frac{3}{n^2}\left(A^2 EX_n^3 + O\big(n^{-2}\big)\right) - \frac{1}{n^3}\left(A^3 EX_n^3 + O\big(n^{-2}\big)\right) \\
&+ \frac{3}{n^2}\sigma^2 EX_n + \frac{\rho^3}{n^3} + \frac{3}{n^3}\sigma^2\, O\big(n^{-1}\big)
\end{aligned}
$$

und weiter, da (2.7) und (2.10) bereits bewiesen,

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{3A}{n}\right) EX_n^3 + \frac{1}{n^3}\left(\rho^3 + 3\sigma^2 M_1 - \frac{3B}{2} M_4 + O\Big(n^{-\frac{1+\delta_3}{2}}\Big)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{\rho^3 + 3\sigma^2 M_1 - \frac{3B}{2} M_4}{3A-2} + O\Big(n^{-\frac{5+\delta_3}{2}}\Big)\,,
\end{aligned}
$$

weil Lemma 2.1(b) mit $a = 3A > \frac{5+\delta_3}{2}$, $\nu = 3$ und $\delta = \frac{1+\delta_3}{2}$ angewendet werden kann. $\square$

2.2 Momente der Darstellungen

In Kapitel 1 wurde der Robbins-Monro-Prozeß $(X_{n+1}-\vartheta)$ approximiert durch Summen von linearen, quadratischen und auch kubischen Termen, nämlich durch $S_n = L_n^\circ + Q_n$ bzw. $T_n = L_n + Q_n + K_n$. Zur Berechnung der ersten drei oder vier Kumulanten von S_n bzw. von T_n ist die Kenntnis der ersten drei bzw. vier Momente von S_n bzw. T_n erforderlich. Eine direkte Berechnung der Momente ist aber sehr aufwendig. Die Beweise der beiden folgenden Sätze verwenden die Sätze 2.1 und 1.1 bzw. 1.2 zur Identifizierung dieser Momente.

Satz 2.2. *Es seien $aA > 1$ und $E|V|^6 < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$\begin{aligned} E(L_n^\circ + Q_n) &= \frac{1}{n} M_1 + O(n^{-1-\varepsilon}) \,, \\ E(L_n^\circ + Q_n)^2 &= \frac{1}{n} M_2 + O(n^{-1-\varepsilon}) \,, \\ E(L_n^\circ + Q_n)^3 &= \frac{1}{n^2} M_3 + O(n^{-2-\varepsilon}) \,, \end{aligned}$$

wobei die Zahlen M_1, M_2 und M_3 wie in Satz 2.1 zu wählen sind.

Satz 2.3. *Es seien $aA > \frac{3}{2}$ und $E|V|^{12} < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$E(L_n + Q_n + K_n) = \frac{1}{n} M_1 + O(n^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}) \,, \tag{2.11}$$

$$E(L_n + Q_n + K_n)^2 = \frac{1}{n} M_{2,1} + \frac{1}{n^2} M_{2,2} + O(n^{-2-\varepsilon}) \,, \tag{2.12}$$

$$E(L_n + Q_n + K_n)^3 = \frac{1}{n^2} M_3 + O(n^{-\frac{5}{2}-\varepsilon}) \,, \tag{2.13}$$

$$E(L_n + Q_n + K_n)^4 = \frac{1}{n^2} M_{4,1} + \frac{1}{n^3} M_{4,2} + O(n^{-3-\varepsilon}) \,, \tag{2.14}$$

wobei die Zahlen M_1, $M_{2,1}$, $M_{2,2}$, M_3, $M_{4,1}$ und $M_{4,2}$ wie in Satz 2.1 zu wählen sind.

In Kapitel 3 wird noch folgendes Korollar benötigt.

Korollar 2.1. **(a)** *Es seien $aA > 1$ und $E|V|^3 < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$EL_n^\circ = 0 \,, \quad E(L_n^\circ)^2 = \frac{1}{n} \overline{M}_2 + O(n^{-1-\varepsilon}) \,, \quad E(L_n^\circ)^3 = \frac{1}{n^2} \overline{M}_3 + O(n^{-2-\varepsilon}) \,.$$

(b) *Es seien $aA > \frac{3}{2}$ und $E|V|^4 < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$\begin{aligned} EL_n &= 0 \,, \\ EL_n^2 &= \frac{1}{n} \overline{M}_{2,1} + \frac{1}{n^2} \overline{M}_{2,2} + O(n^{-2-\varepsilon}) \,, \\ EL_n^3 &= \frac{1}{n^2} \overline{M}_3 + O(n^{-\frac{5}{2}-\varepsilon}) \,, \\ EL_n^4 &= \frac{1}{n^2} \overline{M}_{4,1} + \frac{1}{n^3} \overline{M}_{4,2} + O(n^{-3-\varepsilon}) \,. \end{aligned}$$

Für $a = 1$ haben die Koeffizienten die Form $\overline{M}_2 = \overline{M}_{2,1} = \frac{\sigma^2}{2A-1}$, $\overline{M}_{2,2} = \frac{(A-1)\sigma^2}{2(2A-1)}$, $\overline{M}_3 = \frac{\rho^3}{3A-2}$, $\overline{M}_4 = \overline{M}_{4,1} = \frac{3\sigma^4}{(2A-1)^2}$ und $\overline{M}_{4,2} = \frac{\mu}{4A-3} - \frac{3(7A-4)\sigma^4}{(2A-1)^2(4A-3)}$.

Lemma 2.2. *Seien $a = 1$, $m \geq 2$ und $E|V|^m < \infty$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\underset{p\in[1,m]}{\forall} \quad \underset{A>\frac{1}{2}}{\forall} && E|L_n^{(\circ)}|^p = O\Big(n^{-\frac{p}{2}}\Big)\,,\\
&\underset{p\in[1,\frac{m}{2}]}{\forall} \quad \underset{A>1}{\forall} && E|Q_n|^p = O\big(n^{-p}\big)\,,\\
&\underset{p\in[1,\frac{m}{3}]}{\forall} \quad \underset{A>\frac{3}{2}}{\forall} && E|K_n|^p = O\Big(n^{-\frac{3p}{2}}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Mit $b = A - 1 > -\frac{1}{2}$ liefert Lemma 1.2 $E|L_n^{(\circ)}|^p = O\big(n^{-\frac{p}{2}}\big)$. Wegen $j \vee k \geq \sqrt{jk}$ gilt

$$|v_n(j,k)| = O(1)\left(\frac{jk}{n^2}\right)^{A-1}\left(\frac{j\vee k}{n}\right)^{-A} = O(1)\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{A}{2}-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{A}{2}-1}$$

und deshalb

$$E|Q_n|^p = O(1)E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{A}{2}-1}V_j\right|^{2p} = O(n^{-p})$$

nach Lemma 1.2 mit $b = \frac{A}{2} - 1 > -\frac{1}{2}$, da $A > 1$. Wegen $j \vee k \vee l \geq j^{\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{6}}l^{\frac{1}{6}}$ folgt

$$|w_n(j,k,l)| \leq O(1)\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A}\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-A} = O\Big(\frac{jkl}{n^3}\Big)^{\frac{A}{3}-1}$$

und damit

$$E|K_n|^p = O(1)E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{A}{3}-1}V_j\right|^{3p} = O\Big(n^{-\frac{3}{2}p}\Big)\,,$$

da wegen $A > \frac{3}{2}$ Lemma 1.2 mit $b = \frac{A}{3} - 1 > -\frac{1}{2}$ angewendet werden kann. □

Lemma 2.3. *Seien $p \in \mathbb{N}$ und X und Y zwei Zufallsvariablen mit $E|X|^p < \infty$ und $E|Y|^p < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(p)$ mit*

$$|EX^p - EY^p| \leq c\,(E\,|X-Y|^p)^{\frac{1}{p}}\left((E\,|X|^p)^{\frac{p-1}{p}} + (E\,|Y|^p)^{\frac{p-1}{p}}\right).$$

Beweis. Sei $p \in \{2, 3, \dots\}$. Mit

$$|X^p - Y^p| \le |X - Y| \sum_{i=1}^{p} |X|^{p-i}|Y|^{i-1} \le |X - Y| \left(|X| + |Y|\right)^{p-1}$$

liefert eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung für $q = \frac{p}{p-1}$ und $q' = p$

$$\begin{aligned} |E(X^p - Y^p)| &\le (E|X - Y|^p)^{\frac{1}{p}} \left(E\left(|X| + |Y|\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\le c\,(E|X - Y|^p)^{\frac{1}{p}} \left((E|X|^p)^{\frac{p-1}{p}} + (E|Y|^p)^{\frac{p-1}{p}}\right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile eine Konsequenz der c_p-Ungleichung ist [17]. □

Beweis von Satz 2.3. Seien wieder O.B.d.A. $a = 1$ und $\vartheta = 0$. Die durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= \left(Ax + \frac{B}{2}x^2 + \frac{C}{6}x^3\right) 1(x \in [-1, 1]), \\ f_{-1}(x) &:= (x + 1 + f_0(-1))1(x \in (-\infty, 1)), \\ f_1(x) &:= (x - 1 + f_0(1))1(x \in (1, \infty)) \end{aligned}$$

definierte Funktion $f(x) := f_{-1}(x) + f_0(x) + f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$, erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.2. Der mittels f und $X_1 \equiv 0$ definierte Robbins-Monro-Prozeß (X_n) besitzt dann nach Satz 1.2 die Darstellung $X_{n+1} = L_n + Q_n + K_n + \Delta_n$ mit $E|\Delta_n|^p = O\left(n^{-p(\frac{3}{2}+\varepsilon)}\right)$, $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

Andererseits sind die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Dabei kann die Bedingung $(M_{6+\lambda})$ in Voraussetzung 2.1 durch Lemma 1.3 gesichert werden. Also gilt

$$EX_{n+1} = \frac{1}{n}M_1 + O(n^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}), \tag{2.15}$$

$$EX_{n+1}^2 = \frac{1}{n}M_{2,1} + \frac{1}{n^2}M_{2,2} + O(n^{-2-\varepsilon}), \tag{2.16}$$

$$EX_{n+1}^3 = \frac{1}{n^2}M_3 + O(n^{-\frac{5}{2}-\varepsilon}), \tag{2.17}$$

$$EX_{n+1}^4 = \frac{1}{n^2}M_{4,1} + \frac{1}{n^3}M_{4,2} + O(n^{-3-\varepsilon}). \tag{2.18}$$

Eine Anwendung von Lemma 2.3 für $p = 1$ zeigt, daß

$$|EX_{n+1} - E(L_n + Q_n + K_n)| \le O(1)E|\Delta_n| = O\left(n^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}\right).$$

Mit (2.15) folgt daraus $E(L_n + Q_n + K_n) = \frac{1}{n}M_1 + O(n^{-\frac{3}{2}-\varepsilon})$, d.h. (2.11).

Eine weitere Anwendung von Lemma 2.3 für $p = 2$ zeigt, daß

$$\begin{aligned} |EX_{n+1}^2 - E(L_n + Q_n + K_n)^2| &\le O(1)E|\Delta_n| \left((E|X_{n+1}|^2)^{\frac{1}{2}} + (E|L_n + Q_n + K_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\le O(n^{-3-2\varepsilon}) \cdot O(n^{-\frac{1}{2}}) = O(n^{-\frac{7}{2}}), \end{aligned}$$

da $E|X_{n+1}|^2 = O\big(\frac{1}{n}\big)$ nach Lemma 1.3 und da $E|L_n + Q_n + K_n|^2 = O\big(\frac{1}{n}\big)$ nach Lemma 2.2. Mit (2.16) erhalten wir (2.12). Ganz ähnlich beweist man mit (2.17) und (2.18) die Beziehungen (2.13) und (2.14). □

Der **Beweis von Satz 2.2** verläuft analog zum Beweis von Satz 2.3. □

Beweis von Korollar 2.1. Wir rechtfertigen nur Teil (b) für $a = 1$. Ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.1 zeigt man für die Rekursion $X_{n+1} = X_n - \frac{A}{n}X_n + \frac{1}{n}V_n$ mit $X_1 \equiv 0$ unter Verwendung von Lemma 2.1 nacheinander

$$\begin{aligned}
EX_{n+1} &= 0\,,\\
EX_{n+1}^2 &= \frac{1}{n}\overline{M}_{2,1} + \frac{1}{n^2}\overline{M}_{2,2} + O(n^{-2-\varepsilon})\,,\\
EX_{n+1}^3 &= \frac{1}{n^2}\overline{M}_3 + O(n^{-\frac{5}{2}-\varepsilon})\,,\\
EX_{n+1}^4 &= \frac{1}{n^2}\overline{M}_{4,1} + \frac{1}{n^3}\overline{M}_{4,2} + O(n^{-3-\varepsilon})\,.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt mit Lemma 1.1

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}\left(1-\frac{A}{k}\right)\frac{1}{i}V_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^A\left(1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{i}\right)\frac{A(A-1)}{2}+O(i^{-2})\right)\frac{1}{i}V_i$$

Da es ein $\varepsilon > 0$ mit $A > 3/2+\varepsilon$ gibt, sichert Lemma 1.2 für $p = 4$ und $b = A-2-\varepsilon > -1/2$ die Abschätzung

$$E\left|X_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_n(i)V_i\right|^4 = n^{-4A}E\left|\sum_{i=1}^{n}O(i^b)V_i\right|^4 = O\big(n^{-4(3/2+\varepsilon)}\big)\,.$$

Mit den Lemmata 2.2 und 2.3 folgt daraus Korollar 2.1(b). □

2.3 Kumulanten der Darstellungen

Zur Herleitung einer *formalen* Edgeworth-Entwicklung einer geeigneten Folge von Zufallsvariablen Z_n genügt es, eine asymptotische Entwicklung der benötigten Kumulanten von Z_n zu kennen. Sei

$$\Psi_n(t) = \log E(itZ_n), \;\; t \in \mathbb{R}\,,$$

die *kumulantenerzeugende Funktion* von Z_n. Die *ν-te Kumulante* von Z_n ist dann definiert durch die formale Gleichung

$$\mathrm{cum}_\nu(\mathrm{Z_n}) := \kappa_{\nu,\mathrm{n}} := \frac{1}{\mathrm{i}^\nu}\Psi_\mathrm{n}^{(\nu)}(0), \quad \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Die ν-te Ableitung der charakteristischen Funktion von Z an der Stelle $t = 0$ existiert, falls das ν-te Moment von Z existiert. Also existieren die Kumulanten bis zur Ordnung ν, falls $E|Z|^\nu < \infty$. Mittels einer Reihenentwicklung von $\Psi_n^{(\nu)}$ und anschließendem Koeffizientenvergleich kann man zeigen, daß für die ersten vier Kumulanten

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,n} &= EZ_n\,,\\
\kappa_{2,n} &= EZ_n^2 - (EZ_n)^2 = \mathrm{var}(\mathrm{Z_n})\,,\\
\kappa_{3,n} &= E(Z_n - EZ_n)^3 = EZ_n^3 - 3EZ_n^2EZ_n + 2(EZ_n)^3\,,\\
\kappa_{4,n} &= E(Z_n - EZ_n)^4 - 3(\mathrm{var}(\mathrm{Z_n}))^2\\
&= EZ_n^4 - 4EZ_n^3EZ_n - 3(EZ_n^2)^2 + 12(EZ_n^2)(EZ_n)^2 - 6(EZ_n)^4
\end{aligned}$$

gilt [14].

In Verbindung mit den Sätzen 2.2 und 2.3 und Korollar 2.1 zur Entwicklung der Momente von S_n, T_n und $L_n^{(\circ)}$ erhalten wir die beiden folgenden Korollare zur Entwicklung der Kumulanten von $S_n/\sigma(S_n)$, $T_n/\sigma(T_n)$ und $L_n^{(\circ)}/\sigma(L_n^{(\circ)})$. Dazu verwenden wir, daß $\mathrm{cum}_\nu(\mathrm{rZ}) = \mathrm{r}^\nu\mathrm{cum}_\nu(\mathrm{Z})$ für eine beliebige reelle Zahl r gilt.

Korollar 2.2. (a) *Unter den Voraussetzungen von Satz* 2.2 *gelten für die ersten drei Kumulanten von $S_n/\sigma(S_n)$ die folgenden Entwicklungen*

$$\kappa_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{n}}k_{1,2} + O(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad \kappa_{2,n} = 1, \quad \kappa_{3,n} = \frac{1}{\sqrt{n}}k_{3,1} + O(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}).$$

(b) *Unter den Voraussetzungen von Satz* 2.3 *gelten für die ersten vier Kumulanten von $T_n/\sigma(T_n)$ die folgenden Entwicklungen*

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,n} &= \frac{1}{\sqrt{n}}k_{1,2} + O(n^{-1-\varepsilon}),\\
\kappa_{2,n} &= 1,\\
\kappa_{3,n} &= \frac{1}{\sqrt{n}}k_{3,1} + O(n^{-1-\varepsilon}),\\
\kappa_{4,n} &= \frac{1}{n}k_{4,1} + O(n^{-1-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Hierbei sind $\varepsilon > 0$ eine hinreichend kleine Zahl und

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= -\frac{B\sigma}{(A-1)\sqrt{2A-1}}\,, \\
k_{3,1} &= \frac{(2A-1)^{3/2}}{3A-2}\,\frac{\rho^3}{\sigma^3} - \frac{B\sigma}{\sqrt{2A-1}(3A-2)}\,, \\
k_{4,1} &= \frac{(2A-1)^2}{4A-3}\,\frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3\,\frac{4A^2-1}{4A-3} + \frac{36B^2\sigma^2}{(2A-1)(3A-2)(4A-3)} \\
&\quad - \frac{12(2A-1)B}{(3A-2)(4A-3)}\,\frac{\rho^3}{\sigma^2} - \frac{4C\sigma^2}{(2A-1)(4A-3)}\,.
\end{aligned}$$

Korollar 2.3. (a) *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 2.1(a) *gelten für die ersten drei Kumulanten von $L_n^\circ/\sigma(L_n^\circ)$ die folgenden Entwicklungen*

$$\overline{\kappa}_{1,n} = 0, \quad \overline{\kappa}_{2,n} = 1, \quad \overline{\kappa}_{3,n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{k}_{3,1} + O(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}).$$

(b) *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 2.1(b) *gelten für die ersten vier Kumulanten von $L_n/\sigma(L_n)$ die folgenden Entwicklungen*

$$\overline{\kappa}_{1,n} = 0, \quad \overline{\kappa}_{2,n} = 1, \quad \overline{\kappa}_{3,n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{k}_{3,1} + O(n^{-1-\varepsilon}), \quad \overline{\kappa}_{4,n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{k}_{4,1} + O(n^{-1-\varepsilon}).$$

Hierbei sind $\varepsilon > 0$ eine hinreichend kleine Zahl und

$$\overline{k}_{3,1} = \frac{(2A-1)^{3/2}}{3A-2}\,\frac{\rho^3}{\sigma^3} \quad \textit{und} \quad \overline{k}_{4,1} = \frac{(2A-1)^2}{4A-3}\,\frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3\,\frac{4A^2-1}{4A-3}\,.$$

Kapitel 3

Edgeworth-Entwicklungen für Summen von Multilinearformen

Formale Entwicklungen von Verteilungsfunktionen wurden um 1900 von Tschebyschev und Edgeworth eingeführt. Mit Cramér begannen die Untersuchungen nach den Voraussetzungen, unter denen eine formale Edgeworth-Entwicklung gilt. Ausgehend von Summen unabhängiger identisch verteilter reeller Zufallsvariablen wurden seitdem Verallgemeinerung in den verschiedensten Richtungen durchgeführt (siehe z.B. [1], [3], [5] oder [14]).

Die in Abschnitt 1.1 definierte Statistik $S_n = L_n^\circ + Q_n$ hat eine gewisse Ähnlichkeit mit Darstellungen, die im Zusammenhang mit L- und U-Statistiken auftreten. Edgeworth-Entwicklungen hierfür wurden u.a. von Helmers [15] bzw. Callaert, Janssen und Veraverbeke [7] und Bickel, Götze und van Zwet [6] untersucht. Einige Ideen dieser Arbeiten haben Eingang in die Beweise dieses Kapitels gefunden.

Wie z.B. in [14], [15] oder [19] beschrieben, suchen wir in Abschnitt 3.1 zunächst mit formalen Argumenten nach einer Entwicklung der Verteilungsfunktionen von $S_n/\sigma(S_n)$ und $T_n/\sigma(T_n)$.

Die Sätze 3.1 und 3.2 in Abschnitt 3.2 formulieren dann hinreichende Bedingungen, unter denen diese Entwicklungen gelten.

3.1 Formale Edgeworth-Entwicklungen

Seien (Z_n) eine Folge von Zufallsvariablen und (σ_n) eine Folge positiver reller Zahlen mit der Eigenschaft, daß $\mathrm{var}(\mathrm{Z_n}/\sigma_\mathrm{n}) \to 1$ für $n \to \infty$. Eine formale Entwicklung der logarithmierten charakteristischen Funktion von Z_n/σ_n führt auf

$$E \exp\left(it\frac{Z_n}{\sigma_n}\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{j,n} \frac{1}{j!}(it)^j\right), \tag{3.1}$$

wobei $\kappa_{j,n}$ die j-te Kumulante von Z_n/σ_n bezeichne (siehe Abschnitt 2.3). Können die ersten vier auftretenden Kumulanten in der Form

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,n} &= \frac{1}{\sqrt{n}} k_{1,2} + O\big(n^{-1-\varepsilon}\big)\,, \\
\kappa_{2,n} &= 1 + \frac{1}{n} k_{2,2} + O\big(n^{-1-\varepsilon}\big)\,, \\
\kappa_{3,n} &= \frac{1}{\sqrt{n}} k_{3,1} + O\big(n^{-1-\varepsilon}\big)\,, \\
\kappa_{4,n} &= \frac{1}{n} k_{4,1} O\big(n^{-1-\varepsilon}\big)
\end{aligned}$$

dargestellt werden, führt eine Umordnung und eine weitere formale Entwicklung von (3.1) auf

$$\begin{aligned}
&E \exp\left(it \frac{Z_n}{\sigma_n}\right) \\
&\quad = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2} it + \frac{1}{3!} k_{3,1} (it)^3\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} k_{2,2} (it)^2 + \frac{1}{4!} k_{4,1} (it)^4\right) + \dots\right) \\
&\quad = e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2} it + \frac{1}{6} k_{3,1} (it)^3\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} k_{2,2} (it)^2 + \frac{1}{24} k_{4,1} (it)^4 + \frac{1}{2}\left(k_{1,2} it + \frac{1}{6} k_{3,1} (it)^3\right)^2\right) + \dots \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Eine formale Fourier-Inversion dieser Reihe ergibt

$$P\left(\frac{Z_n}{\sigma_n} \le x\right) = \Phi(x) + \phi(x)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} p_1(x) + \frac{1}{n} p_2(x) + \dots\right),$$

wobei

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= -\left(k_{1,2} + \frac{1}{6} k_{3,1}(x^2 - 1)\right), \\
p_2(x) &= -x\left(\frac{1}{2}(k_{2,2} + k_{1,2}^2) + \frac{1}{24}(k_{4,1} + 4k_{1,2}k_{3,1})(x^2 - 3) + \frac{1}{72} k_{3,1}^2 (x^4 - 10x^2 + 15)\right),
\end{aligned}$$

und Φ und ϕ die Verteilungsfunktion bzw. Dichte einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen bezeichnen. Weitere Details hierzu findet man z.B. in [14].

3.2 Entwicklungen mit Resttermen $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ und $o\left(\frac{1}{n}\right)$

Die beiden folgenden Sätze sichern eine Edgeworth-Entwicklung der den Robbins-Monro-Prozeß approximierenden Darstellungen $S_n = L_n^\circ + Q_n$ und $T_n = L_n + Q_n + K_n$ aus Kapitel 1.

Satz 3.1. *Seien $aA > 1$ und $E|V|^{2p} < \infty$ für ein $p > \left(2 \vee \frac{2aA-1}{aA-1}\right)$. Dann gilt für die in Abschnitt 1.1 definierten Zufallsvariablen L_n° und Q_n*

$$P\left(\frac{1}{\sigma_n}(L_n^\circ + Q_n) \leq x\right) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(x)\phi(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$. Hierbei sind $\sigma_n = \sigma(L_n^\circ + Q_n)$ und das Polynom p_1 definiert wie in Abschnitt 3.1 mit den in Korollar 2.2 gefundenen Koeffizienten $k_{1,2}$ und $k_{3,1}$.

Satz 3.2. *Seien $aA > \frac{3}{2}$ und $E|V|^{3p} < \infty$ für ein $p > \left(2 \vee \frac{2aA-1}{aA-3/2}\right)$. Dann gilt für die in Abschnitt 1.1 definierten Zufallsvariablen L_n, Q_n und T_n*

$$P\left(\frac{1}{\sigma_n}(L_n + Q_n + K_n) \leq x\right) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(x)\phi(x) + \frac{1}{n} p_2(x)\phi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$. Hierbei sind $\sigma_n = \sigma(L_n + Q_n + K_n)$ und die Polynome p_1 und p_2 definiert wie in Abschnitt 3.1 mit den in Korollar 2.2 gefundenen Koeffizienten $k_{1,2}$, $k_{3,1}$, $k_{4,1}$, und $k_{2,2} = 0$.

Bemerkung 3.1. Ist Z_n das arithmetische Mittel unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen $V_1, \ldots, V_n$, wird zum Nachweis der Gültigkeit einer Edgeworth-Entwicklung für Z_n der Ordnung 1 oder höher neben einer Voraussetzung an die Momente noch eine weitere Bedingung, z.B. die Cramér-Bedingung

$$\text{(C)} \qquad \overline{\lim_{|t|\to\infty}} \; |E\exp(itV)| < 1,$$

benötigt [5], [19]. Bedingung (C) ist nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue erfüllt, falls die Verteilung von V eine nichtverschwindende absolut stetige Komponente besitzt. (C) gilt nicht, falls V eine gitterförmige Verteilung hat.

Zum Beweis der Sätze 3.1 und 3.2 wird die Cramér-Bedingung nicht benötigt. Die Voraussetzung $aA > 1$ schließt z.B. die zum arithmetischen Mittel $X_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_i$ führende Rekursion mit $a = 1$ und

$$X_{n+1} = X_n - \frac{1}{n}(X_n - V_n), \;\; n \in \mathbb{N}, \quad X_1 := 0,$$

aus, da hier die Regressionsfunktion $f(x) = x$ mit $A = 1$ (und $B = C = 0$) zugrunde liegt.

Ist $B = C = 0$, dann läßt sich auch im Fall $aA \in (\frac{1}{2}, 1]$ eine Edgeworth-Entwicklung für $T_n = L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_n(i)V_i$ angeben, falls die Cramér-Bedingung vorausgesetzt wird. Denn dann gibt es ein $\delta_1 \in (0,1)$ und $\delta_2 > 0$ so, daß $|E\exp(itV)| < 1 - \delta_1$ für alle t mit $|t| > \delta_2$ erfüllt ist. Damit läßt sich ein $\varepsilon > 0$ finden, für das

$$\left|E\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma(L_n)}\right)\right| \leq \prod_{i=\lfloor n/2\rfloor}^{n}\left|E\exp\left(it\frac{u_n(i)}{n\sigma(L_n)}V_i\right)\right| \leq (1-\delta_1)^{\lfloor n/2\rfloor}$$

für alle $|t| \geq \varepsilon\sqrt{n}$ gilt. Diese Relation kann zum Nachweis von (3.3) verwendet werden.

Eine Edgeworth-Entwicklung für L_n läßt sich natürlich auch aus Sätzen für Summen von unabhängigen, aber nicht identisch verteilten Zufallsvariablen ableiten (z.B. aus Theorem 20.6 in [5], Theorem VI. 4.7 in [18] oder Theorem 3 in [30]).

Im Hinblick auf eine Anwendung bei Robbins-Monro-Prozessen ist eine Edgeworth-Entwicklung von L_n für $aA \in (\frac{1}{2}, 1]$ nicht von Interesse, da die Startzufallsvariable X_1 eine Störung von X_n mit der Größenordnung $O(n^{-aA})$ verursacht (siehe Beweis von Satz 1.2).

Satz 3.2 behauptet, daß die durch $F_n(x) := P\left((L_n + Q_n + K_n)/\sigma_n \leq x\right)$ und $\widehat{F}_n := \Phi(x) + p_1(x)\phi(x)/\sqrt{n} + p_2(x)\phi(x)/n$ definierten Funktionen F_n und $\widehat{F}_n$ in einem gleichmäßigen Sinne nahe beieinanderliegen. Um dies zu beweisen, zeigen wir, daß ihre Fourier-Stieltjes-Transformierten in einem gewichteten L^1- Sinne nahe beieinanderliegen. Diese Vorstellung kann z.B. durch das berühmte *smoothing lemma* von Esseen (1945) präzisiert werden (Satz 5.2 in [19]).

Lemma 3.1. *Seien $M \in (0,\infty)$, F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ und $\widehat{F}$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ mit beschränkter Variation, $\widehat{F}(-\infty) = 0$, $\widehat{F}(\infty) = 1$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\frac{d}{dx}\widehat{F}(x)| \leq M$. Die dazugehörigen Fourier-Stieltjes-Transformierten seien gegeben durch $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)F(dx)$ und $\widehat{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)\widehat{F}(dx)$. Dann gibt es eine Konstante $c \in (0,\infty)$ so, daß*

$$\underset{T>0}{\forall} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}}\ |F(x) - \widehat{F}(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi(t)-\widehat{\varphi}(t)}{t}\right|dt + \frac{cM}{T}\,.$$

Beweis von Satz 3.2. Die Fourier-Stieltjes-Transformierte von

$$\widehat{F}_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}p_1(x)\phi(x) + \frac{1}{n}p_2(x)\phi(x)$$

ist gegeben durch

$$\widehat{\varphi}_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2}it + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{24}k_{4,1}(it)^4 + \frac{1}{2}\left(k_{1,2}it + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3\right)^2\right)\right\}.$$

Ferner sei $\varphi_n(t) := E\exp(itT_n/\sigma(T_n))$.

Nach Lemma 3.1 gibt es ein $c \in (0,\infty)$ so, daß

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \widehat{F}_n(x)| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{-n\log n}^{n\log n} \left|\frac{\varphi_n(t) - \widehat{\varphi}_n(t)}{t}\right| dt + \frac{cM}{n\log n}$$

mit $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{d}{dx}\widehat{F}_n(x)\right| < \infty$.

Um die Behauptung des Satzes zu beweisen, genügt es, zwei Zahlen β, $\varepsilon > 0$ zu finden, für die die Beziehungen

$$\int\limits_{|t|\le\varepsilon n^\beta} \left|\frac{\varphi_n(t) - \widehat{\varphi}_n(t)}{t}\right| dt = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{\varepsilon n^\beta\le|t|\le n\log n} \left|\frac{\varphi_n(t)}{t}\right| dt = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\varepsilon n^\beta\le|t|\le n\log n} \left|\frac{\widehat{\varphi}_n(t)}{t}\right| dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.4}$$

gelten. Relation (3.4) gilt offensichtlich für alle β, $\varepsilon > 0$. □

Nachweis von (3.2). Unter Verwendung der Entwicklung

$$\forall_{\delta\in[0,1]} \quad \left|e^{ix} - \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(ix)^\nu}{\nu!}\right| \le \frac{2}{m!}\,|x|^{m+\delta} \tag{3.5}$$

aus [6] zeigt man für ein beliebiges $\delta \in (0,1]$

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left(it\frac{T_n}{\sigma_n}\right)\right)\\
&\quad= E\left\{\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\left(1 + it\frac{Q_n+K_n}{\sigma_n} + \frac{(it)^2}{2}\frac{(Q_n+K_n)^2}{\sigma_n^2}\right)\right\}\\
&\qquad+ O\big(|t/\sigma_n|^{2+\delta}\big)\,E|Q_n+K_n|^{2+\delta}\\
&\quad= E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) + \frac{it}{\sigma_n}\left\{E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)Q_n\right) + E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)K_n\right)\right\}\\
&\qquad+ \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sigma_n}\right)^2 E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)Q_n^2\right) + O\Big(n^{-1-\frac{\delta}{2}}|t|P(t)\Big),
\end{aligned}$$

wobei $P(t)$ ein Polynom in t ist. Im folgenden darf P von Geichung zu Gleichung variieren. Zur Begründung des letzten Gleichungszeichen wurden die Abschätzungen $E|Q_n|^{2+\delta} = O(n^{-(2+\delta)})$ und $E|K_n|^{2+\delta} = O(n^{-\frac{3}{2}(2+\delta)})$ aus Lemma 2.2 verwendet.

Entwicklung der charakteristischen Funktion $E\exp(itL_n/\sigma_n)$. Wir entwickeln zunächst $E\exp(itL_n/\sigma(L_n))$. Eine Anwendung von Theorem 9.9 in [5] (dort mit $\alpha = 0$, $k = 1$, $s = 5$) zeigt, daß

$$\begin{aligned} &E\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma(L_n)}\right) \\ &\quad = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \frac{1}{3!}\overline{\kappa}_{3,n}(it)^3 + \frac{1}{4!}\overline{\kappa}_{4,n}(it)^4\right) + c_1\,\eta_5(n)\,n^{-\frac{3}{2}}(|t|^5 + |t|^9)e^{-\frac{t^2}{4}} \end{aligned}$$

für alle t mit $|t| \le d_n \wedge c_2\sqrt{n}\,\eta_5(n)^{-\frac{1}{3}}$. Hierbei sind $\overline{\kappa}_{3,n}$ und $\overline{\kappa}_{4,n}$ die dritte bzw. vierte Kumulante von $L_n/\sigma(L_n)$; ferner sind c_1 und c_2 Konstanten,

$$\begin{aligned} \eta_5(n) &:= \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E|u_n(i)V_i|^5}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_n^2(i)\sigma^2\right)^{5/2}} \le \frac{\left(\max\limits_{1\le i\le n} u_n^3(i)\right)\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_n^2(i)E|V|^5}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_n^2(i)\right)^{5/2}\sigma^5} \\ &= \frac{\max\limits_{n\le i\le n} u_n^3(i)}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_n^2(i)\right)^{3/2}}\,\frac{E|V|^5}{\sigma^2} = O(1) \end{aligned}$$

und

$$d_n := \sup\left\{a > 0 \mid t^2 \le a^2 \Longrightarrow \underset{i\in\{1,\dots,n\}}{\forall} \left|E\exp\left(it\frac{1}{n\sigma(L_n)}u_n(i)V_i\right) - 1\right| \le \frac{1}{2}\right\}.$$

Wir zeigen, daß $d_n = O(\sqrt{n})$. Sei $t^2 \le a^2$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left|E\exp\left(it\frac{1}{n\sigma(L_n)}u_n(i)V_i\right) - 1\right| \\ &\quad = \left|E\exp\left(it\frac{1}{n\sigma(L_n)}u_n(i)V_i\right) - 1 - E\left(it\frac{1}{n\sigma(L_n)}u_n(i)V_i\right)\right| \\ &\quad \le E\left|\exp\left(it\frac{1}{n\sigma(L_n)}u_n(i)V_i\right) - 1 - it\frac{1}{n\sigma(L_n)}u_n(i)V_i\right| \end{aligned}$$

und mit Abschätzung (3.5)

$$\le E\left|t^2\frac{u_n^2(i)}{n^2\sigma^2(L_n)}V_i^2\right| \le a^2\,(2A-1)\,A^4\frac{1}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Offensichtlich gibt es ein $\varepsilon' > 0$ so, daß für alle n und alle $a \le \varepsilon'\sqrt{n}$ die rechte Seite der Ungleichungskette kleiner als $\frac{1}{2}$ bleibt. Damit ist $d_n = O(\sqrt{n})$. Unter Beachtung von Korolllar 2.3(b) gilt für alle t mit $|t| \le \varepsilon'\sqrt{n}$

$$E\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma(L_n)}\right)$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{n}} \frac{\overline{k}_{3,1}}{6} t^3 + \frac{1}{n} \left(\frac{\overline{k}_{4,1}}{24} t^4 - \frac{\overline{k}_{3,1}^2}{72} t^6 \right) \right) + O\Big(n^{-1-\varepsilon} \left|tP(t)\right| e^{-\frac{t^2}{4}}\Big).$$

Man setze $t_n := t_n(t) := \frac{\sigma(L_n)}{\sigma_n} t = \left(1 + \frac{1}{n}\frac{q}{2} + O(n^{-1-\varepsilon})\right) t$. Hierbei ist $q := \frac{\overline{M}_{2,2} - M_{2,2} + M_1^2}{M_{2,1}}$ mit M_1, $M_{2,1}$ und $M_{2,2}$ aus Satz 2.1 und $\overline{M}_{2,2}$ aus Korollar 2.1. Dann gibt es ein $\varepsilon'' > 0$ so, daß für alle $|t| \leq \varepsilon'' \sqrt{n}$

(3.6)

$$\begin{aligned}
&E \exp\left(it \frac{L_n}{\sigma_n}\right) = E \exp\left(it_n \frac{L_n}{\sigma(L_n)}\right) \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ 1 - \frac{i}{\sqrt{n}} \frac{\overline{k}_{3,1}}{6} t^3 + \frac{1}{n} \left(-\frac{q}{2} t^2 + \frac{\overline{k}_{4,1}}{24} t^4 - \frac{\overline{k}_{3,1}^2}{72} t^6 \right) \right\} + O\Big(n^{-1-\varepsilon} \left|tP(t)\right| e^{-\frac{t^2}{4}}\Big) \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg\{ 1 - \frac{i}{\sqrt{n}} t^3 \frac{\rho^3 (2A-1)^{3/2}}{\sigma^3 6 (3A-2)} \\
&\qquad + \frac{1}{n} t^2 \frac{1}{4(A-1)} \left(\frac{\sigma^2 (6A-5) B^2}{(A-1)(2A-1)(3A-2)} - \frac{\rho^3 (2A-1) B}{\sigma^2 (3A-2)} - \frac{\sigma^2 C}{(2A-1)} \right) \\
&\qquad + \frac{1}{n} t^4 \left(\frac{\mu^4 (2A-1)^2}{24 \sigma^4 (4A-3)} - \frac{3(4A^2-1)}{24(4A-3)} \right) - \frac{1}{n} t^6 \frac{\rho^6 (2A-1)^3}{72 \sigma^6 (3A-2)^2} \Bigg\} \\
&\quad + O\Big(n^{-1-\varepsilon} \left|tP(t)\right| e^{-\frac{t^2}{4}}\Big)
\end{aligned}$$

mit $\overline{k}_{3,1}$ und $\overline{k}_{4,1}$ aus Korollar 2.3.

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Werden aus der Summe L_n die Summanden mit den Indizes $j_1, \ldots, j_k$ herausgenommen, gilt die später noch benötigte Relation

$$\begin{aligned}
(3.7) \qquad & E\left(\exp\left(it \frac{1}{n\sigma_n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}}}^{n} u_n(j) V_j \right) \right) \\
&= E\left(\exp\left(it \frac{L_n}{\sigma_n} \right) \right) \left(\prod_{l=1}^{k} E\left(\exp\left(it \frac{1}{n\sigma_n} u_n(j_l) V_{j_l} \right) \right) \right)^{-1} \\
&= E\left(\exp\left(it \frac{L_n}{\sigma_n} \right) \right) \left(1 + O\left(\frac{t^2}{n} \right) \right).
\end{aligned}$$

Entwicklung von $E(\exp(itL_n/\sigma_n) itQ_n/\sigma_n)$. Da $v_n(j,k)$ symmetrisch ist, können wir Q_n auch in der Form

$$(3.8) \qquad Q_n = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} v_n(j,k) V_j V_k + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} v_n(j,j) V_j^2$$

darstellen. Da die Zufallsvariablen (V_n) unabhängig sind, gilt

$$
\begin{aligned}
&E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)Q_n\right)\\
&\quad= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} v_n(j,k)E\left\{V_jV_k\exp\left(\frac{it}{\sigma_n}\left(u_n(j)V_j+u_n(k)V_k\right)\right)\right\}\\
&\qquad\qquad\cdot E\exp\left(\frac{it}{\sigma_n}\sum_{\substack{l=1\\ l\notin\{j,k\}}}^{n} u_n(l)V_l\right)\\
&\qquad+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} v_n(j,j)E\left\{V_j^2\exp\left(\frac{it}{\sigma_n}u_n(j)V_j\right)\right\}E\left\{\exp\left(\frac{it}{\sigma_n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} u_n(l)V_l\right)\right\}\\
&\quad=: t_{1,n}+t_{2,n}\,.
\end{aligned}
$$

Mit Ungleichung (3.5) erhalten wir für $\delta\in(0,1]$

(3.9)

$$
\begin{aligned}
&E\left\{V_jV_k\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}\left(u_n(j)V_j+u_n(k)V_k\right)\right)\right\}\\
&= E\left\{V_jV_k\left[\left(\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right)-1-\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right)\right.\right.\\
&\qquad\cdot\left(\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right)-1-\frac{it}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right)\\
&\qquad+\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\left(\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right)-1-\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j+\frac{1}{2}t^2\frac{1}{n^2\sigma_n^2}u_n(j)V_j\right)\\
&\qquad+\frac{it}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\left(\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right)-1-\frac{it}{n\sigma_n}u_n(k)V_k+\frac{1}{2}t^2\frac{1}{n^2\sigma_n^2}u_n(k)V_k\right)\\
&\qquad-1+\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right)+\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right)\\
&\qquad-\frac{1}{2}it^3\frac{1}{n^3\sigma_n^3}u_n(j)u_n^2(k)V_jV_k^2-\frac{1}{2}it^3\frac{1}{n^3\sigma_n^3}u_n^2(j)u_n(k)V_j^2V_k\\
&\qquad\left.\left.-\frac{t^2}{n^2\sigma_n^2}u_n(j)u_n(k)V_jV_k\right]\right\}\\
&= E\left[-\frac{1}{2}i\frac{t^3}{n^3\sigma_n^3}u_n(j)u_n^2(k)V_j^2V_k^3-\frac{1}{2}i\frac{t^3}{n^3\sigma_n^3}u_n^2(j)u_n(k)V_j^3V_k^2-\frac{t^2}{n^2\sigma_n^2}u_n(j)u_n(k)V_j^2V_k^2\right]\\
&\qquad+E\left[|V_jV_k|\,O\left(\frac{t}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right)^2O\left(\frac{t}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ E\left[|V_jV_k|\, O\left(\left|\frac{t}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right|\right) O\left(\left|\frac{t}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right|^{2+\delta}\right)\right] \\
&+ E\left[|V_jV_k|\, O\left(\left|\frac{t}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right|\right) O\left(\left|\frac{t}{n\sigma_n}u_n(k)V_k\right|^{2+\delta}\right)\right] \\
= &-i\frac{t^3}{n^3\sigma_n^3}\frac{1}{2}\left(u_n(j)u_n^2(k)+u_n^2(j)u_n(k)\right)\rho^3\sigma^2 - \frac{t^2}{n^2\sigma_n^2}u_n(j)u_n(k)\sigma^4 \\
&+ O\left(\left|\frac{t}{n\sigma_n}\right|\right)^4 + O\left(\left|\frac{t}{n\sigma_n}\right|\right)^{3(2+\delta)}.
\end{aligned}
$$

Mit (3.7) und (3.9) folgt dann

$$
\begin{aligned}
t_{1,n} = &\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} v_n(j,k)E\left\{V_jV_k\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}\left(u_n(j)+u_n(k)\right)\right)\right\} \\
&\cdot E\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}\sum_{\substack{l=1\\ l\notin\{j,k\}}}^{n} u_n(l)V_l\right) \\
= &\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} v_n(j,k)\left\{-\frac{i}{2}\left(\frac{t}{n\sigma_n}\right)^3\left(u_n(j)u_n^2(k)+u_n^2(j)u_n(k)\right)\rho^3\sigma\right. \\
&\left.-\left(\frac{t}{n\sigma_n}\right)^2 u_n(j)u_n(k)\sigma^4 + O\left(\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^4 + \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{3(2+\delta)}\right)\right\} \\
&\cdot\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1-\frac{i}{\sqrt{n}}\frac{\overline{k}_{3,1}}{6}t^3\right) + O\left(\frac{1}{n}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Da für $A > \frac{3}{2}$

$$
\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} v_n(j,k)\left(u_n(j)u_n^2(k)+u_n^2(j)u_n(k)\right) = \frac{-B}{(2A-1)(3A-2)(4A-3)} + O\left(\tfrac{1}{n}\right)
$$

$$
\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} v_n(j,k)u_n(j)u_n(k) = \frac{-B}{2(2A-1)^2(3A-2)} + O\left(\tfrac{1}{n}\right)
$$

gilt, erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
t_{1,n} = &\frac{1}{n}e^{-\frac{t^2}{2}}t^2\frac{1}{n\sigma_n^2}\frac{\sigma^4 B}{2(2A-1)^2(3A-2)} + \frac{i}{n^{3/2}}e^{-\frac{t^2}{2}} \\
&\cdot\left\{-t^5\frac{1}{n\sigma_n^2}\frac{\sigma^4 B}{(2A-1)^2(3A-2)}\frac{\overline{k}_{3,1}}{12} + t^3\frac{1}{(\sqrt{n}\sigma_n)^3}\frac{\sigma^2\rho^3 B}{2(2A-1)(3A-2)(4A-3)}\right\} \\
&+ O\left(\frac{1}{n^2}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right).
\end{aligned}
$$

Beachten wir nochmals (3.7) und (3.9), so können wir zeigen, daß

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_j^2\right)\\
&\quad= E\left\{V_j^2\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)V_j\right)\right\}E\exp\left(\frac{it}{n\sigma_n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}u_n(l)V_l\right)\\
&\quad= \left\{\sigma^2+\frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)\rho^3+O\left(\frac{t^2}{n}\right)\right\}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1-\frac{i}{\sqrt{n}}\frac{\overline{k}_{3,1}}{6}t^3\right)+O\left(\frac{1}{n}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right)\right\}\\
&\quad= e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\sigma^2+\frac{i}{\sqrt{n}}\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{n}\sigma_n}u_n(j)t-\frac{\overline{k}_{3,1}}{6}\sigma^2t^3\right)\right)+O\left(\frac{1}{n}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right)
\end{aligned}$$

für $|t|\leq\varepsilon''\sqrt{n}$. Ferner gilt für $A>\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v_n(j,j)&=-\frac{B}{2(A-1)(2A-1)}+O\left(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),\\
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v_n(j,j)u_n(j)&=-\frac{B}{4(A-1)(3A-2)}+O(n^{-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
t_{2,n}&=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}v_n(j,j)e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\sigma^2+\frac{i}{\sqrt{n}}\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{n}\sigma_n}u_n(j)t-\frac{\overline{k}_{3,1}}{6}\sigma^2t^3\right)\right)\\
&\quad+O\left(\frac{1}{n^2}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right)\\
&=\frac{1}{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{\frac{-B\sigma^2}{2(A-1)(2A-1)}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{i}{\sqrt{n}}\left(-\frac{\rho^3}{\sqrt{n}\sigma_n}\frac{B}{4(A-1)(3A-2)}t+\frac{\overline{k}_{3,1}}{6}\frac{B\sigma^2}{2(A-1)(2A-1)}t^3\right)\right\}\\
&\quad+O\left(n^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{it}{\sigma_n}E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)Q_n\right)\\
&\quad=\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{-it\frac{\sigma B}{2(A-1)\sqrt{2A-1}}+it^3\frac{\sigma B}{2\sqrt{2A-1}(3A-2)}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{t^2\frac{\rho^3(2A-1)B}{4\sigma^2(A-1)(3A-2)}-t^4\frac{\rho^3(2A-1)(10A-9)B}{12\sigma^2(A-1)(3A-2)(4A-3)}\right.\\
&\qquad\left.+t^6\frac{\rho^3(2A-1)B}{12\sigma^2(3A-2)^2}\right\}+O\left(n^{-1-\varepsilon}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right)
\end{aligned}\tag{3.10}$$

für alle t mit $|t| \leq \varepsilon''\sqrt{n}$.

Entwicklung von $E(\exp(itL_n/\sigma_n)itK_n/\sigma_n)$. Sei $\pi(j,k,l)$ die Menge aller 3! Permutationen von (j,k,l). Durch

$$
\begin{aligned}
(3.11)\quad & w_n^s(j,k,l) \\
&:= \frac{1}{3!} \sum_{(j',k',l')\in\pi(j,k,l)} w_n(j',k',l') \\
&= \left(\frac{jkl}{n}\right)^{A-1} \left\{ \frac{B^2}{2A^2}\frac{1}{3}\left[\left(\frac{k\vee l}{n}\right)^{-A} + \left(\frac{j\vee k}{n}\right)^{-A} + \left(\frac{j\vee l}{n}\right)^{-A}\right] \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-A} - 1\right) + \left(\frac{C}{12A} + \frac{B^2}{4A^2}\right)\left(1 - \left(\frac{j\vee k\vee l}{n}\right)^{-2A}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

kann der Kern der Trilinearform K_n symmetrisiert werden:

$$K_n = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_n^s(j,k,l)V_jV_kV_l\,.$$

Damit definieren wir für $1 \leq l \leq k \leq j \leq n$

(3.12)

$$
\begin{aligned}
\widehat{w}_n(j,k,l) &:= \begin{cases} 6w_n^s(j,k,l), & \text{falls } j>k>l \\ 3w_n^s(j,j,l), & \text{falls } j=k>l \\ 3w_n^s(j,k,k), & \text{falls } j>k=l \\ w_n^s(j,j,j), & \text{falls } j=k=l \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{A-1}\left\{\frac{B^2}{A^2}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{-A} + 2\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}\right]\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}-1\right) + \left(\frac{C}{2A}+\frac{3B^2}{2A^2}\right)\left(1-\left(\frac{j}{n}\right)^{-2A}\right)\right\} \\ \left(\frac{j}{n}\right)^{2A-2}\left(\frac{l}{n}\right)^{A-1}\left\{\frac{B^2}{2A^2}3\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}-1\right) + \left(\frac{C}{4A}+\frac{3B^2}{4A^2}\right)\left(1-\left(\frac{j}{n}\right)^{-2A}\right)\right\} \\ \left(\frac{j}{n}\right)^{A-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{2A-2}\left\{\frac{B^2}{2A^2}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{-A} + 2\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}\right]\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}-1\right) + \left(\frac{C}{4A}+\frac{3B^2}{4A^2}\right)\left(1-\left(\frac{j}{n}\right)^{-2A}\right)\right\} \\ \left(\frac{j}{n}\right)^{3A-3}\left\{\frac{B^2}{2A^2}\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{-A}-1\right) + \left(\frac{C}{12A}+\frac{B^2}{4A^2}\right)\left(1-\left(\frac{j}{n}\right)^{-2A}\right)\right\}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

wobei für die zweite Gruppe von Fallunterscheidungen dieselben Bedingungen wie für die erste Gruppe verwendet werden. Wegen $K_n = \frac{1}{n^3}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}\sum_{j=k}^{n}\widehat{w}_n(j,k,l)V_jV_kV_l$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)K_n\right) = \frac{1}{n^3}\Bigg\{ & \sum_{l=1}^{n-2}\sum_{k=l+1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\widehat{w}_n(j,k,l)E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_jV_kV_l\right) \\
& + \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=l+1}^{n}\widehat{w}_n(j,j,l)E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_j^2V_l\right)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\widehat{w}_n(j,k,k)E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_jV_k^2\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\widehat{w}_n(j,j,j)E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_j^3\right)\Bigg\}.$$

Ähnlich wie oben kann man zeigen, daß

$$\begin{aligned}
E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_jV_kV_l\right) &= \left(\frac{it}{n\sigma_n}\right)^3 u_n(j)u_n(k)u_n(l)\sigma^6 e^{-\frac{t^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right),\\
E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_j^2V_l\right) &= \frac{it}{n\sigma_n}u_n(l)\sigma^4 e^{-\frac{t^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right),\\
E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_jV_k^2\right) &= \frac{it}{n\sigma_n}u_n(j)\sigma^4 e^{-\frac{t^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right),\\
E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)V_j^3\right) &= O\left(e^{-\frac{t^2}{4}}\right),
\end{aligned}$$

wobei j,k und l paarweise verschieden sind.

Eine längere Rechnung führt schließlich zu

$$\begin{aligned}
(3.13)\quad & E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\frac{it}{\sigma_n}K_n\right)\\
&= \frac{1}{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{t^2\left(\frac{\sigma^2C}{4(A-1)(2A-1)} - \frac{\sigma^2B^2(5A-4)}{4(A-1)^2(2A-1)(3A-2)}\right)\right.\\
&\qquad\left. +t^4\left(\frac{\sigma^2B^2}{2(2A-1)(3A-2)(4A-3)} - \frac{\sigma^2C}{6(2A-1)(4A-3)}\right)\right\}\\
&\quad + O\left(n^{-1-\varepsilon}\left|tP(t)\right|e^{-\frac{t^2}{4}}\right)
\end{aligned}$$

für $|t|\le\varepsilon''\sqrt{n}$.

Entwicklung von $(1/2)E\left(\exp\left(itL_n/\sigma_n\right)\left(itQ_n/\sigma_n\right)^2\right)$. Unter Verwendung von (3.8) betrachten wir die folgende Zerlegung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\left(\frac{it}{\sigma_n}Q_n\right)^2\right)\\
&\quad= -\frac{t^2}{2\sigma_n^2}\left\{E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\left(\frac{2}{n^2}\sum_{1\le j<k\le n}v_n(j,k)V_jV_k\right)^2\right)\right.\\
&\qquad\left. + E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)2\left(\frac{2}{n^2}\sum_{1\le j<k\le n}v_n(j,k)V_jV_k\right)\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}v_n(j,j)V_j^2\right)\right)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} v_n(j,j)V_j^2\right)^2\right)\Bigg\} \\
= &-\frac{t^2}{2n\sigma_n^2}\Bigg\{\frac{4}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} v_n^2(j,k)E\left(V_j^2V_k^2\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,k)v_n(j,l)E\left(V_j^2V_kV_l\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,k)v_n(k,l)E\left(V_jV_k^2V_l\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{l=j+1}^{n-1}\sum_{k=l+1}^{n} v_n(j,k)v_n(l,k)E\left(V_jV_k^2V_l\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{k=j+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\sum_{m=l+1}^{n} v_n(j,k)v_n(l,m)E\left(V_jV_kV_lV_m\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{l=j+1}^{n-2}\sum_{k=l+1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n} v_n(j,k)v_n(l,m)E\left(V_jV_kV_lV_m\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{l=j+1}^{n-2}\sum_{m=l+1}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{n} v_n(j,k)v_n(l,m)E\left(V_jV_kV_lV_m\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{4}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} v_n(j,k)v_n(j,j)E\left(V_j^3V_k\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{4}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} v_n(j,k)v_n(k,k)E\left(V_jV_k^3\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{4}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,j)v_n(k,l)E\left(V_j^2V_kV_l\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{4}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,l)v_n(k,k)E\left(V_jV_k^2V_l\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{4}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,k)v_n(l,l)E\left(V_jV_kV_l^2\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right) \\
&+\frac{2}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} v_n(j,j)v_n(k,k)E\left(V_j^2V_k^2\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} v_n^2(j,j)E\left(V_j^4\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)\Bigg\}.$$

Sind die Zahlen $j,k,l,m\in\{1,\dots,n\}$ paarweise verschieden, so kann man zeigen, daß

$$\begin{aligned}
&E\left(V_jV_kV_lV_m\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)\\
&\qquad=\frac{1}{n^2}t^4e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\sigma^8}{\sigma_0^4}u_n(j)u_n(k)u_n(l)u_n(m)+O\Big(n^{-\frac{5}{2}}|tP(t)|e^{-\frac{t^2}{4}}\Big),\\
&E\left(V_j^2V_kV_l\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)=-\frac{1}{n}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\sigma^6}{\sigma_0^2}u_n(k)u_n(l)+O\Big(n^{-\frac{3}{2}}|tP(t)|e^{-\frac{t^2}{4}}\Big),\\
&E\left(V_j^3V_k\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)=\frac{i}{\sqrt{n}}te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\sigma^2\rho^3}{\sigma_0}u_n(k)+O\left(\frac{1}{n}|tP(t)|e^{-\frac{t^2}{4}}\right),\\
&E\left(V_j^2V_k^2\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)=\sigma^4e^{-\frac{t^2}{2}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|tP(t)|e^{-\frac{t^2}{4}}\right),\\
&E\left(V_j^4\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\right)=O\Big(e^{-\frac{t^2}{4}}\Big).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\left(\frac{it}{\sigma_n}Q_n\right)^2\right)\\
&=\frac{1}{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg\{-t^2\frac{2\sigma^4}{\sigma_0^2}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}v_n^2(j,k)\\
&\qquad+t^4\frac{4\sigma^6}{\sigma_0^4}\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}v_n(j,k)v_n(j,l)u_n(k)u_n(l)\\
&\qquad+t^4\frac{4\sigma^6}{\sigma_0^2}\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}v_n(j,k)v_n(k,l)u_n(j)u_n(l)\\
&\qquad+t^4\frac{4\sigma^6}{\sigma_0^2}\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{l=j+1}^{n-1}\sum_{k=l+1}^{n}v_n(j,k)v_n(l,k)u_n(j)u_n(l)\\
&\qquad-t^6\frac{4\sigma^8}{\sigma_0^6}\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{k=j+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\sum_{m=l+1}^{n}v_n(j,k)v_n(l,m)u_n(j)u_n(k)u_n(l)u_n(m)\\
&\qquad-t^6\frac{4\sigma^8}{\sigma_0^6}\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{l=j+1}^{n-2}\sum_{k=l+1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}v_n(j,k)v_n(l,m)u_n(j)u_n(k)u_n(l)u_n(m)\\
&\qquad-t^6\frac{4\sigma^8}{\sigma_0^6}\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{l=j+1}^{n-2}\sum_{m=l+1}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{n}v_n(j,k)v_n(l,m)u_n(j)u_n(k)u_n(l)u_n(m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- it^3 \frac{2\sigma^2\rho^3}{\sigma_0^3} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} v_n(j,k) v_n(j,j) u_n(k) \\
&- it^3 \frac{2\sigma^2\rho^3}{\sigma_0^3} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} v_n(j,k) v_n(k,k) u_n(j) \\
&+ t^4 \frac{2\sigma^6}{\sigma_0^4} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,j) v_n(k,l) u_n(k) u_n(l) \\
&+ t^4 \frac{2\sigma^6}{\sigma_0^4} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,l) v_n(k,k) u_n(j) u_n(l) \\
&+ t^4 \frac{2\sigma^6}{\sigma_0^4} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} v_n(j,k) v_n(l,l) u_n(j) u_n(k) \\
&\left. - t^2 \frac{\sigma^4}{\sigma_0^2} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} v_n(j,j) v_n(k,k) \right\} \\
&+ O\left(n^{-2} t^2 e^{-\frac{t^2}{4}}\right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_n^2(j,j) + O\left(n^{-\frac{3}{2}} |tP(t)| e^{-\frac{t^2}{4}}\right).
\end{aligned}
$$

Wertet man diese Riemannsummen aus, werden wir auf die Darstellung

(3.14)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} E\left(\exp\left(it\frac{L_n}{\sigma_n}\right)\left(\frac{it}{\sigma_n} Q_n\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n} e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ -t^2 \frac{\sigma^2(5A-4)B}{8(A-1)^2(2A-1)(3A-2)} + t^4 \frac{\sigma^2(8A-7)B^2}{4(A-1)(2A-1)(3A-2)(4A-3)} \right. \\
&\qquad \left. - t^6 \frac{\sigma^2 B^2}{8(2A-1)(3A-2)^2} \right\} + O\left(n^{-1-\varepsilon} |tP(t)| e^{-\frac{t^2}{4}}\right)
\end{aligned}
$$

für alle t mit $|t| \leq \varepsilon'' \sqrt{n}$ geführt.

Die Entwicklungen (3.6), (3.10), (3.13), und (3.14) und die Wahl $\beta \in \left(0, \frac{\delta}{2(2+\delta)}\right)$ ergeben schließlich

$$
\begin{aligned}
\int_{-\varepsilon n^\beta}^{\varepsilon n^\beta} \left| \frac{\varphi_n(t) - \widehat{\varphi}_n(t)}{t} \right| dt &= \int_{-\varepsilon n^\beta}^{\varepsilon n^\beta} O\left(n^{-1-\frac{\delta}{2}} |t|^{1+\delta}\right) + O\left(n^{-1-\varepsilon} |P(t)| e^{-\frac{t^2}{4}}\right) dt \\
&= O\left(n^{-1-\frac{\delta}{2}+\beta(2+\delta)}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

und damit Beziehung (3.2). □

Lemma 3.2. *Es seien $V, V_1, V_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $EV = 0$ und $E|V|^3 < \infty$, (σ_n) eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sigma_n > 0$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $A > \frac{1}{2}$*

$$\underset{m_0>\nu}{\exists} \quad \underset{\varepsilon,\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m_0\le m\le n}}{\forall} \quad \underset{\substack{t\in\mathbb{R}\\ |t|\le\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{1-A}}}{\forall}$$

$$\max_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,m\}\\ |I|=n-\nu}} \left| E\exp\left(it\frac{1}{n\sigma_n}\sum_{i\in I} u_n^{(\circ)}(i)V_i\right)\right| \le \exp\left(-\frac{t^2}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^{2A-1}\delta\right),$$

wobei $u_n^{(\circ)}(i)$ wie in Abschnitt 1.1 gewählt wird.

Beweis. Nach Theorem 8.9 in [5] gilt

$$\underset{|t|\le\frac{(EV^2)^{3/2}}{2E|V|^3}}{\forall} \quad \left|E\exp\left(it\frac{V}{\sqrt{EV^2}}\right)\right| \le \exp\left(-\frac{t^2}{3}\right)$$

und damit für $q = \frac{EV^2}{2E|V|^3}$, $\sigma^2 = EV^2$ und beliebigem $x \neq 0$

$$\underset{|t|\le\frac{q}{|x|}}{\forall} \quad |E\exp(itxV)| \le \exp\left(-\frac{t^2}{3}x^2\sigma^2\right)$$

oder auch für $x = \dfrac{u_n(i)}{n\sigma_n}$

$$\underset{|t|\le\frac{n\sigma_n}{u_n(i)}q}{\forall} \quad \left|E\exp\left(it\frac{u_n(i)}{n\sigma_n}V_i\right)\right| \le \exp\left(-\frac{t^2}{3}\frac{u_n^2(i)}{n^2\sigma_n^2}\sigma^2\right).$$

Man wähle jetzt $m_1 > \nu$ und ε, $\widetilde{\delta} > 0$ so, daß

$$\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{1-A} \le \frac{n\sigma_n}{u_n(i)}q \quad \text{und} \quad \widetilde{\delta} \le \frac{\sigma^2}{n\sigma_n^2} \quad \text{für alle } m, i, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m_1 \le m \le i \le n.$$

Dann gilt für für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m_1 \le m \le n$

$$\underset{|t|\le\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{1-A}}{\forall} \quad \left|E\exp\left(it\frac{1}{n\sigma_n}\sum_{i\in I} u_n(i)V_i\right)\right| \le \exp\left(-\frac{t^2}{3}\frac{\sigma^2}{n^2\sigma_n^2}\sum_{i\in I} u_n^2(i)\right)$$

$$\le \exp\left(-\frac{t^2}{3}\widetilde{\delta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m-\nu}\left(\frac{i}{n}\right)^{2A-2}\left(1+O\left(\frac{1}{i}\right)\right)\right).$$

Es ist leicht zu sehen, daß es eine natürliche Zahl $m_0 \ge m_1$ und ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\underset{m_0\le m\le n}{\forall} \quad \delta\left(\frac{m}{n}\right)^{2A-1} \le \widetilde{\delta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m-\nu}\left(\frac{i}{n}\right)^{2A-2}\left(1+O\left(\frac{1}{i}\right)\right).$$

Zusammen mit der vorletzten Ungleichung beweist dies das Lemma. □

Nachweis von (3.3). Zu den Multilinearformen L_n, Q_n und K_n definieren wir *verkürzte* Varianten durch

$$L_n(m) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_n(i)V_i\,,$$
$$Q_n(m) := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=k}^{n} \widehat{v}_n(j,k)V_jV_k\,,$$
$$K_n(m) := \frac{1}{n^3}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=l}^{m}\sum_{j=k}^{n} \widehat{w}_n(j,k,l)V_jV_kV_l$$

für $m \in \{1,\dots,n\}$. Hierbei seien

$$\widehat{v}(j,k) := \begin{cases} 2v_n(j,k), & \text{falls } 1 \le k < j \le n \\ v_n(j,j), & \text{falls } j = k \end{cases}$$

für $1 \le k \le j \le n$, und $\widehat{w}_n(j,k,l)$ definiert wie in (3.12).

Für $p \ge 2$ zeigen wir

$$E\,|Q_n(m)|^p = n^{-pA}O\Big(m^{p((A-1)\vee\frac{1}{2})}\Big)\,. \tag{3.15}$$

Unter Verwendung der c_p-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} E\,|Q_n(m)|^p &\le c_pE\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\widehat{v}_n(j,k)V_jV_k\right|^p + c_pE\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=k+1}^{m}\widehat{v}_n(j,k)V_jV_k\right|^p \\ &\quad + c_pE\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\widehat{v}_n(k,k)\left(V_k^2-\sigma^2\right)\right|^p + c_p\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\widehat{v}_n(k,k)\sigma^2\right|^p \\ &=: c_p\sum_{i=1}^{4}E\,|Q_{n,i}(m)|^p\ ,\ \ m \in \{1,\dots,n\}\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der V_i kann man mit Lemma 1.2 schließen, daß

$$\begin{aligned} E\,|Q_{n,1}(m)|^p &\le \frac{B}{A}E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{n}\right)^{A-1}V_k\right|^p \cdot E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{-1}V_j\right|^p \\ &= n^{-pA}O\Big(m^{p(A-\frac{1}{2})}\Big)\,O\Big(m^{-\frac{p}{2}}\Big) = n^{-pA}O\big(m^{p(A-1)}\big)\,. \end{aligned}$$

Mit Lemma 1.4 wird $E\,|Q_{n,2}(m)|^p = n^{-pA}O\Big(m^{p((A-1)\vee\frac{1}{2})}\Big)$ gezeigt.

Da $E\,|V|^{2p} < \infty$, kann zur Begründung von

$$E\,|Q_{n,3}(m)|^p = n^{-pA}O\Big(m^{p((A-\frac{3}{2})\vee 0)}\,(\log m)^{\frac{p}{2}1(A=\frac{3}{2})}\Big)$$

wieder Lemma 1.2 verwendet werden.

Mit

$$E\,|Q_{n,4}(m)|^p \le \left(\frac{B}{2A}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{n}\right)^{A-2}\sigma^2\right)^p = n^{-pA}O\big(m^{p(A-1)}\big)$$

ist der Nachweis von (3.15) abgeschlossen.

Wie in Lemma 2.2 kann gezeigt werden, daß es eine Konstante const > 0 mit $|\widehat{w}_n(j,k,l)| \le \text{const}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{\frac{A}{3}-1}$ für $1 \le l \le k \le j \le n$ gibt. Damit kann $E|K_n(m)|^p$ leicht nach oben abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} E|K_n(m)|^p &\le c_p E\left|\frac{1}{n^3}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=l}^{m}\sum_{j=k}^{m}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{\frac{A}{3}-1}V_jV_kV_l\right|^p \\ &\quad + c_p E\left|\frac{1}{n^3}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=l}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{jkl}{n^3}\right)^{\frac{A}{3}-1}V_jV_kV_l\right|^p \\ &=: c_pE|K_{n,1}(m)|^p + c_pE|K_{n,2}(m)|^p = n^{-\frac{3}{2}p}O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}p(A-\frac{3}{2})}\right), \end{aligned} \tag{3.16}$$

da Lemma 1.2 für $A > \frac{3}{2}$ und $E|V|^{3p} < \infty$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} E|K_{n,1}(m)|^p &\le E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{A}{3}-1}V_j\right|^{3p} = n^{-\frac{3}{2}p}O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{3p(\frac{A}{3}-\frac{1}{2})}\right) \\ E|K_{n,2}(m)|^p &\le E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{A}{3}-1}V_j\right|^p \cdot E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{A}{3}-1}V_k\right|^{2p} \\ &= O\left(n^{-\frac{p}{2}}\right)O\left(n^{-p}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}p(A-\frac{3}{2})}\right) = n^{-\frac{3}{2}p}O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}p(A-\frac{3}{2})}\right) \end{aligned}$$

sichert.

Sei $T_n(m) := L_n(m) + Q_n(m) + K_n(m)$ für $m \in \{1,\dots,n\}$. Verwenden wir eine Taylor-Entwicklung für $\exp(it(Q_n(m)+K_n(m))/\sigma_n)$, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} &\left|E\exp\left(it\frac{T_n}{\sigma_n}\right)\right| \\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{\lfloor r\rfloor}\frac{1}{\nu!}|t|^\nu\sigma_n^{-\nu}\left|E\left(\exp\left(it\frac{L_n(m)}{\sigma_n}\right)\exp\left(it\frac{T_n-T_n(m)}{\sigma_n}\right)\right)(Q_n(m)+K_n(m))^\nu\right| \\ &\qquad + O\left(E\left|t\frac{Q_n(m)+K_n(m)}{\sigma_n}\right|^r\right) \end{aligned}$$

für ein noch zu spezifizierendes $r > 0$.

Aufgrund der Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen $L_n(m)$ und $T_n - T_n(m)$ kann für den Erwartungswert des zu $\nu = 0$ gehörenden Summanden mit Lemma 3.2 gezeigt werden, daß

$$\underset{|t|\le\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{1-A}}{\forall} \quad \left|E\left(\exp\left(it\frac{L_n(m)}{\sigma_n}\right)\exp\left(it\frac{T_n - T_n(m)}{\sigma_n}\right)\right)\right| \le \left|E\exp\left(it\frac{L_n(m)}{\sigma_n}\right)\right| \le \exp\left(-\frac{t^2}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^{2A-1}\delta\right),$$

wobei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$.

Jetzt diskutieren wir die Erwartungswerte der zu $\nu \in \{1, \dots, \lfloor r \rfloor\}$ gehörenden Summanden:

$$\begin{aligned}&\left|E\exp\left(it\frac{L_n(m)}{\sigma_n}\right)\exp\left(it\frac{T_n - T_n(m)}{\sigma_n}\right)(Q_n(m) + K_n(m))^\nu\right| \\ &\quad = \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_\lambda)}\left|E\left(\exp\left(it\frac{L_n(m)}{\sigma_n}\right)\exp\left(it\frac{T_n - T_n(m)}{\sigma_n}\right)\right)T_{\mu_1,\dots,\mu_\lambda}\right|,\end{aligned}$$

wobei die Summation über alle Multiindizes $(\mu_1, \dots, \mu_\lambda)$ zu erfolgen hat, die in der Summendarstellung des Produktes $(Q_n(m) + K_n(m))^\nu$ auftauchen. $T_{\mu_1,\dots,\mu_\lambda}$ bezeichne denjenigen Summanden, der das Produkt $V_{\mu_1} \cdot \ldots \cdot V_{\mu_\lambda}$ beinhaltet. Offensichtlich gilt $\lambda \in \{2\nu, \dots, 3\nu\}$. Nun greifen wir einen Multiindex $(\mu_1, \dots, \mu_\lambda)$ heraus und halten ihn für einen Augenblick fest. Sei $\Delta := \Delta(\mu_1, \dots, \mu_\lambda)$ die Menge aller *verschiedenen* Indizes unter $\mu_1, \dots, \mu_\lambda$. Ferner sei $\Delta_1 := \{1, \dots, m\} \cap \Delta$ und $\Delta_2 := \{1, \dots, m\} \backslash \Delta$. Für $j \in \Delta_2$ taucht also die Zufallsvariable V_j in der Summe $L_n(m)$ auf, nicht jedoch in dem Produktterm $T_{\mu_1,\dots,\mu_\lambda}$. Es gilt $1 \le |\Delta_1| \le 3\nu$ und $m - 3\nu \le |\Delta_2| \le m - 1$.

Beachten wir die stochastische Unabhängigkeit von gewissen Ausdrücken, so kann in der letzten Gleichung fortgefahren werden mit

$$\begin{aligned}&\le \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_\lambda)}\left|E\exp\left(it\frac{1}{\sigma_n}\frac{1}{n}\sum_{i\in\Delta_2}u_n(i)V_i\right)\right| \cdot E\left|T_{\mu_1,\dots,\mu_\lambda}\right| \\ &\le \max_{\Delta_2}\left|\prod_{i\in\Delta_2}E\exp\left(it\frac{1}{n\sigma_n}u_n(i)V_i\right)\right| \max_{\kappa\in\{1,\dots,3\nu\}} E|V|^\kappa \\ &\qquad \cdot\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=k}^{n}|\widehat{v}_n(j,k)| + \frac{1}{n^3}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=l}^{m}\sum_{j=k}^{n}|\widehat{w}_n(j,k,l)|\right)^\nu \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^{2A-1}\delta\right)O\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}A}\end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \le \varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{1-A}$ und n hinreichend groß. Die Existenz positiver Zahlen ε und δ ist wegen Lemma 3.2 gewährleistet. Die angegebene Ordnung der

letztgenannten Doppel- und Dreifachsummen folgt elementar unter Verwendung der bereits mehrfach gebrauchten oberen Schranken für $|\widehat{v}_n(j,k)|$ und $|\widehat{w}_n(j,k,l)|$.

Mit einem noch zu bestimmenden $M > 0$ wählen wir

$$m = m_n(t) = \left\lfloor n \left(M \frac{\log n}{t^2} \right)^{\frac{1}{2A-1}} \right\rfloor + 1$$

für $|t| \geq n^\beta$ $(\beta > 0)$. Dann gilt offensichtlich

$$1 \leq m \leq n \left(\left(M \frac{\log n}{n^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{2A-1}} + \frac{1}{n} \right) \leq n$$

für hinreichend große n. Da die Ungleichung

$$|t| \leq \varepsilon^{2A-1} (M \log n)^{1-A} n^{A-\frac{1}{2}}$$

die Relation $|t| \leq \varepsilon\sqrt{n} \left(\frac{m_n(t)}{n} \right)^{1-A}$ impliziert, sind mit (3.15), (3.16) und $A > \frac{3}{2}$ folgende Abschätzungen für hinreichend große n möglich:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|t|=n^\beta}^{n\log n} \frac{1}{|t|} \left| E \exp\left(it \frac{T_n}{\sigma_n} \right) \right| dt \\
&\quad \leq \sum_{\nu=0}^{\lfloor r \rfloor} \int\limits_{|t|=n^\beta}^{n\log n} |t|^{\nu-1} \exp\left(-\frac{t^2}{3} \left(\frac{m}{n} \right)^{2A-1} \delta \right) O\left(n^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{\nu}{2}A} \right) dt \\
&\qquad + \int\limits_{|t|=n^\beta}^{n\log n} |t|^{r-1} n^{\frac{r}{2}} O\left(n^{-r} \left(\frac{m}{n} \right)^{r(A-1)} + n^{-\frac{3}{2}r} \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{2}{3}r(A-\frac{3}{2})} \right) dt \\
&\quad \leq \sum_{\nu=0}^{\lfloor r \rfloor} \int\limits_{|t|=n^\beta}^{n\log n} |t|^{\nu-1} n^{-\frac{M}{3}\delta} O\left(n^{\frac{\nu}{2}} \left(M \frac{\log n}{t^2} \right)^{\frac{\nu A}{2(2A-1)}} \right) dt \\
&\qquad + \int\limits_{|t|=n^\beta}^{n\log n} |t|^{r-1} n^{\frac{r}{2}} O\left(n^{-r} \left(M \frac{\log n}{t^2} \right)^{r\frac{A-1}{2A-1}} \right) dt \\
&\qquad + \int\limits_{|t|=n^\beta}^{n\log n} |t|^{r-1} n^{\frac{r}{2}} O\left(n^{-\frac{3}{2}r} \left(M \frac{\log n}{t^2} \right)^{r\frac{2A-3}{3(2A-1)}} \right) dt\,.
\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $M > 0$ so groß, daß das erste Integral der rechten Seite in der obigen Ungleichungskette für alle $\nu \in \{0, \ldots, \lfloor r \rfloor\}$ von der Ordnung $o(\frac{1}{n})$ ist. Die beiden

nächsten Integrale sind von der Ordnung

$$O\left(n^{-r\frac{2A-3}{2(2A-1)}}(\log n)^{2r}\right) \text{ bzw. } O\left(n^{-r\frac{2(2A-3)}{3(2A-1)}}(\log n)^{2r}\right).$$

Wählen wir die Zahl r mit $r > \frac{2(2A-1)}{2A-3}$, so sind diese beiden O-Terme auch von der Ordnung $o(\frac{1}{n})$. Damit ist (3.3) bewiesen. □

Beweis von Satz 3.1. Sei F_n die Verteilungsfunktion von $S_n/\sigma(S_n)$ und φ_n die zugehörige charakteristische Funktion. Die Fourier-Stieltjes-Transformierte von

$$\widehat{F}_n = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(x)\phi(x)$$

ist

$$\widehat{\varphi}_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2}it + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3\right)\right\}.$$

Ähnlich wie im letzten Beweis verwendet man Lemma 3.1 und geeignete Abschätzungen, um zu zeigen, daß die Beziehung

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \widehat{F}_n(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{n}\log n}^{\sqrt{n}\log n}\left|\frac{\varphi_n(t) - \widehat{\varphi}_n(t)}{t}\right| dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\log n}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gilt. □

Kapitel 4

Asymptotische Entwicklungen des Robbins-Monro-Prozesses

Robbins-Monro-Prozesse $(X_{n+1} - \vartheta)$, die von quasi- oder sublinearen Regressionsfunktionen generiert werden, lassen sich nach Kapitel 1 als Summen $S_n = L_n^\circ + Q_n$ bzw. $T_n = L_n + Q_n + K_n$ von Multilinearformen $L_n^{(\circ)}$, Q_n, K_n und gewissen Resttermen darstellen (mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.1). Für die Statistiken S_n und T_n wurden in Kapitel 3 Edgeworth-Entwicklungen mit Fehlertermen $o(1/\sqrt{n})$ und $o(1/n)$ hergeleitet. Unter Verwendung der Delta-Methode [1], [14] lassen sich jetzt leicht entsprechende Resultate für den Robbins-Monro-Prozeß erzielen (Abschnitt 4.1). Diese können dann als Ausgangspunkt für eine Reihe weiterer interessanter Entwicklungen dienen, wie z.B. der Cornish-Fisher-Entwicklung der Quantilfunktion oder der Edgeworth-Korrektur der Verteilungsfunktion (Abschnitt 4.2). Aber nicht nur die Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}(X_{n+1} - \vartheta)$ läßt sich entwickeln, sondern auch der stochastische Prozeß $(X_{n+1} - \vartheta)$ selber — nämlich in eine Summe von Termen, bestehend aus Potenzen von $1/\sqrt{n}$ und einer normalverteilten Zufallsvariablen (Abschnitt 4.3).

4.1 Edgeworth-Entwicklungen

Grenzwertsätze vom Berry-Esseen-Typ wurden für den Robbins-Monro-Prozeß von Renz [22] beschrieben. Unter der Voraussetzung $aA > 1$ (und weiteren relativ schwachen Voraussetzungen an die Beobachtungsfehler) wird dort für den zentralen Grenzwertsatz die Darstellung

$$P\left(\frac{X_{n+1} - \vartheta}{\sigma_n} \leq x\right) = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

erzielt. Durch Hinzunahme von Entwicklungstermen $p_1(x)\phi(x)/\sqrt{n}$ oder zusätzlich noch $p_2(x)\phi(x)/n$ kann die Approximationsgüte nach Satz 4.1 bzw. 4.2 unter der Voraussetzung $aA > 1$ oder $aA > 3/2$ auf $o(1/\sqrt{n})$ bzw. $o(1/n)$ verbessert werden.

Satz 4.1. *Es seien neben $aA > 1$ alle Voraussetzungen von Satz 1.1 oder Satz 1.3 erfüllt. Darüberhinaus gelte $E|V|^m < \infty$ für ein $m \geq 6$ mit $m > 2(2aA-1)/(aA-1)$. Dann gilt für den dadurch gegebenen Robbins-Monro-Prozeß*

$$P\left(\frac{X_{n+1}-\vartheta}{\sigma_n} \leq x\right) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2} + \frac{1}{6}k_{3,1}(x^2-1)\right)\phi(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$, wobei $\sigma_n^2 = M_2/n$ und die Konstanten M_2, $k_{1,2}$ und $k_{3,1}$ wie in Satz 2.1 bzw. Korollar 2.2 definiert sind.

Satz 4.2. *Es seien neben $aA > 3/2$ alle Voraussetzungen von Satz 1.2 oder Satz 1.4 erfüllt. Darüberhinaus gelte $E|V|^m < \infty$ für ein $m \geq 12$ mit $m > 3(2aA-1)/(aA-3/2)$. Dann gilt für den dadurch gegebenen Robbins-Monro-Prozeß*

$$P\left(\frac{X_{n+1}-\vartheta}{\sigma_n} \leq x\right) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}p_1(x)\phi(x) + \frac{1}{n}p_2(x)\phi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$, wobei

$$p_1(x) = -\left(k_{1,2} + \frac{1}{6}k_{3,1}(x^2-1)\right),$$
$$p_2(x) = -x\left(\frac{1}{2}k_{1,2}^2 + \frac{1}{24}(k_{4,1}+4k_{1,2}k_{3,1})(x^2-3) + \frac{1}{72}k_{3,1}^2(x^4-10x^2+15)\right),$$

$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}M_{2,1} + \frac{1}{n^2}M_{2,2}$ und die Konstanten $M_{2,1}$, $M_{2,2}$, $k_{1,2}$, $k_{3,1}$ und $k_{4,1}$ wie in Satz 2.1 bzw. Korollar 2.2 definiert sind.

Bemerkung 4.1. (a) *Zur Regularitätsvoraussetzung.* Bei Schrittweiten $a_n = a/n$ ist die Folge $(\sqrt{n}(X_{n+1}-\vartheta))$ nur unter der Regularitätsvoraussetzung $aA > 1/2$ asymptotisch $N(0, a^2\sigma^2/(2aA-1))$-verteilt. Nur im Fall $aA = 1$ nimmt die Varianz der asymptotischen Verteilung ihr Minimum an. Da in der Anwendung $A = f'(\vartheta)$ meist nicht bekannt ist, wurden adaptive Verfahren vorgeschlagen, die A im Laufe der Iteration schätzen [27]. Eine andere Methode, diese Schwierigkeiten zu umgehen, wurde von Polyak und Ruppert vorgeschlagen [20], [25]. Anstelle von Schrittweiten $a_n = a/n$ werden langsamer abklingende Schrittweiten, z.B. $a_n = a/n^\alpha$, $\alpha \in (1/2, 1)$, gewählt. Man betrachtet jedoch nicht den daraus resultierenden Prozeß (X_n^α), für den $n^{\alpha/2}(X_{n+1}^\alpha - \vartheta)$ asymptotisch $N(0, \sigma^2/A)$-verteilt ist, sondern den gemittelten Prozeß $\overline{X}_n^\alpha := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^\alpha$. Nach Polyak und Juditsky [21] ist $\sqrt{n}(\overline{X}_{n+1}^\alpha - \vartheta)$ für beliebige $a > 0$ und $A > 0$ asymptotisch $N(0, \sigma^2/A)$-verteilt. Es ist zu erwarten, daß eine Edgeworth-Entwicklung dieses komplizierteren Prozesses $\sqrt{n}(\overline{X}_{n+1}^\alpha - \vartheta)$ auch unter der schwachen Voraussetzung $a > 0$ und $A > 0$ gültig sein wird.

(b) *Zur Momentenvoraussetzung.* Die in den Sätzen 4.1 und 4.2 geforderte Ordnung existierender Momente scheint im Hinblick auf die in [4] und [22] erzielten Resultate abschwächbar zu sein.

Die Zufallsvariable N sei $N(0,1)$-verteilt. Die zu den Verteilungsfunktionen von N und $|N|$ gehörigen α-Quantile z_α und x_α ($\alpha \in (0,1)$) sind definiert durch $P(N \leq z_\alpha) = \alpha$ und $P(|N| \leq x_\alpha) = \alpha$. Aus den Sätzen 4.1 und 4.2 können jetzt leicht Entwicklungen für die Überdeckungswahrscheinlichkeiten der durch

$$\begin{aligned} I_{1,n}(\alpha) &:= (X_{n+1} - \sigma_n z_\alpha,\ \infty)\,, \\ I_{2,n}(\alpha) &:= (X_{n+1} - \sigma_n x_\alpha,\ X_{n+1} + \sigma_n x_\alpha) \end{aligned}$$

definierten ein- und zweiseitigen Konfidenzintervalle für ϑ abgeleitet werden. Da $p_1(x)$ und $\phi(x)$ *gerade* Funktionen sind, verschwindet der zu $1/\sqrt{n}$ gehörige Term aus der das symmetrische Intervall $I_{2,n}(\alpha)$ betreffenden Entwicklung.

Korollar 4.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.1 *gilt gleichmäßig in* $\alpha \in (0,1)$*:*

$$\begin{aligned} P(\vartheta \in I_{1,n}(\alpha)) &= \alpha - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2} + \frac{1}{6}k_{3,1}(z_\alpha^2 - 1)\right)\phi(z_\alpha) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \\ P(\vartheta \in I_{2,n}(\alpha)) &= \alpha + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Korollar 4.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.2 *gilt gleichmäßig in* $\alpha \in (0,1)$*:*

$$\begin{aligned} P(\vartheta \in I_{1,n}(\alpha)) &= \alpha - \frac{1}{\sqrt{n}}p_1(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + \frac{1}{n}p_2(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ P(\vartheta \in I_{2,n}(\alpha)) &= \alpha + \frac{2}{n}p_2(x_\alpha)\phi(x_\alpha) + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Beweis von Satz 4.2. O.B.d.A. sei $a = 1$. Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2 oder Satz 1.4 gilt für die dort auftretenden Restterme Δ_n

$$P\left(\left|\frac{\Delta_n}{\sigma_n}\right| \geq n^{-1-\varepsilon}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4.1}$$

falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird.

Jetzt wenden wir die Delta-Methode [14] an und schließen unter Beachtung von Relation (4.1) auf

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_{n+1} - \vartheta}{\sigma_n} \leq x\right) &= P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} + \frac{\Delta_n}{\sigma_n} \leq x\right) \\ &\leq P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} \leq x + n^{-1-\varepsilon}\right) + P\left(\left|\frac{\Delta_n}{\sigma_n}\right| > n^{-1-\varepsilon}\right) \\ &= P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} \leq x\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

und wegen

$$P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} \le x - n^{-1-\varepsilon}\right) \le P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} \le x - \frac{\Delta_n}{\sigma_n},\ \left|\frac{\Delta_n}{\sigma_n}\right| \le n^{-1-\varepsilon}\right) + P\left(\left|\frac{\Delta_n}{\sigma_n}\right| > n^{-1-\varepsilon}\right)$$
$$\le P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} + \frac{\Delta_n}{\sigma_n} \le x\right) + P\left(\left|\frac{\Delta_n}{\sigma_n}\right| > n^{-1-\varepsilon}\right)$$

auch auf

$$P\left(\frac{X_{n+1} - \vartheta}{\sigma_n} \le x\right) \ge P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} \le x - n^{-1-\varepsilon}\right) - P\left(\left|\frac{\Delta_n}{\sigma_n}\right| > n^{-1-\varepsilon}\right)$$
$$= P\left(\frac{T_n}{\sigma_n} \le x\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zum Nachweis der Relation $P(T_n/\sigma_n \le x \pm n^{-1-\varepsilon}) = P(T_n/\sigma_n \le x) + o(1/n)$ kann eine Taylor-Entwicklung der Edgeworth-Terme in Satz 3.2 verwendet werden. Eine Anwendung von Satz 3.2 liefert schließlich die Behauptung. □

Der **Beweis von Satz 4.1** stützt sich auf die Sätze 1.1, 1.3 und 3.1. □

4.2 Cornish-Fisher-Entwicklungen

Ist $(X_n - \vartheta)/\sigma_n$ eine beliebige asymptotisch standardnormalverteilte Statistik, so wird die durch

$$Q_n(\alpha) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} :\ P\left(\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \le x\right) \ge \alpha\right\}$$

definierte Quantilfunktion $Q_n : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ nach Cornish und Fisher formal durch

$$Q_n(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, q_1(\Phi^{-1}(\alpha)) + \frac{1}{n}\, q_2(\Phi^{-1}(\alpha)) + \dots$$

nach Potenzen von $1/\sqrt{n}$ entwickelt. Unter Verwendung einer Edgeworth-Entwicklung für $(X_n - \vartheta)/\sigma_n$ läßt sich formal zeigen, daß

$$q_1(x) = -p_1(x) = k_{1,2} + \frac{1}{6} k_{3,1}\left(x^2 - 1\right)$$

gelten muß [14]. Das Polynom p_1 und die Konstanten $k_{1,2}$, $k_{3,1}$ wurden in Abschnitt 3.1 eingeführt.

Satz 4.3. *Existiert für den (beliebigen) Prozess (X_n) die Edgeworth-Entwicklung*

$$P\left(\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \le x\right) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, p_1(x)\phi(x) + \delta_n \tag{4.2}$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ *mit* $\delta_n = o(1/\sqrt{n})$*, so gilt für alle* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$Q_n(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{n}}\, p_1(\Phi^{-1}(\alpha)) + O\left(|\delta_n| + \frac{1}{n}\right) \tag{4.3}$$

gleichmäßig in $\alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$.

Bemerkung 4.2. **(a)** Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 oder 4.2 ist der Restterm in (4.3) von der Ordnung $o(1/\sqrt{n})$ bzw. $O(1/n)$.

(b) Die Entwicklung (4.3) kann nicht gleichmäßig auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ gelten. Falls z.B. $p_1(\Phi^{-1}(\alpha)) \to \infty$ für $\alpha \to \infty$, würde die linke Seite von (4.3) gegen ∞ konvergieren, die rechte Seite aber gegen $-\infty$.

In Ermangelung einer geeigneten Referenz für einen strengen Beweis des letzten Satzes, führen wir diesen der Vollständigkeit wegen hier aus.

Beweis. Sei $z_\alpha := \Phi^{-1}(\alpha)$ das α-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung und

$$q_{\alpha,n} = z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) + r_n(z_\alpha)$$

das α-Quantil der Verteilung von $(X_n - \vartheta)/\sigma_n$. Also genügt es zu zeigen, daß $r_n(z_\alpha) = O\big(|\delta_n| + \frac{1}{n}\big)$. Dazu setzen wir $q_{\alpha,n}$ in (4.2) ein und entwickeln nach Taylor

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Phi\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) + r_n(z_\alpha)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) + r_n(z_\alpha)\right) \phi\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) + r_n(z_\alpha)\right) + \delta_n \\
&= \Phi\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha)\right) + r_n(z_\alpha)\phi\left(\xi(n, z_\alpha)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ p_1\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha)\right) + r_n(z_\alpha) p_1'(\zeta(n, z_\alpha)) \right\} \phi\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) + r_n(z_\alpha)\right) \\
&\quad + \delta_n\,.
\end{aligned}$$

Für $l_n(z_\alpha) := \phi(\xi(n, z_\alpha))$ gilt

$$\inf\left\{ l_n(z_\alpha) : \ \alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon), \ n \in \mathbb{N} \right\} =: l > 0\,. \tag{4.4}$$

Ferner ist $\sup\left\{ |p_1'(\zeta(n, z_\alpha))| : \ \alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon), \ n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$. Mit einer weiteren Taylor-Entwicklung kann in der Gleichungskette fortgefahren werden mit

$$\begin{aligned}
&= \Phi(z_\alpha) - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + \frac{1}{n} p_1^2(z_\alpha)\phi'(\eta(n, z_\alpha)) + r_n(z_\alpha) l_n(z_\alpha) \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ p_1(z_\alpha) + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) p_1'(\rho(n, z_\alpha)) + r_n(z_\alpha) O(1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\cdot\, \phi\left(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha) + r_n(z_\alpha)\right) + \delta_n\,,$$

und, da $\sup\{|p_1^2(z_\alpha)\phi'(\eta(n,z_\alpha))| : \alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon),\, n \in \mathbb{N}\} < \infty$ und $\sup\{|p_1(z_\alpha)\, p_1'(\rho(n,z_\alpha))| : \alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon),\, n \in \mathbb{N}\} < \infty$,

$$\begin{aligned}
&= \Phi(z_\alpha) - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + O\left(\frac{1}{n}\right) + r_n(z_\alpha) l_n(z_\alpha) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ p_1(z_\alpha) \left(\phi(z_\alpha - \tfrac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha)) + r_n(z_\alpha)\phi'(\tau(n,z_\alpha)) \right) + O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + r_n(z_\alpha) O(1) \right\} \\
&\quad + \delta_n\,,
\end{aligned}$$

und, da $\sup\{|\phi'(\tau(n,z_\alpha))| : \alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon),\, n \in \mathbb{N}\} < \infty$ und $\phi(z_\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z_\alpha)) = \phi(z_\alpha) + O(1/\sqrt{n})$, gelangen wir schließlich zu

$$= \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right) + r_n(z_\alpha)\left(l_n(z_\alpha) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \delta_n$$

oder

$$r_n(z_\alpha) = -\frac{O(\frac{1}{n}) + \delta_n}{l_n(z_\alpha) + O(\frac{1}{\sqrt{n}})} = O\left(|\delta_n| + \frac{1}{n}\right),$$

wegen (4.4). □

Eine Edgeworth-Entwicklung kann auch zur Korrektur der Verteilungsfunktion einer asymptotisch normalverteilten Statistik $(X_n - \vartheta)/\sigma_n$ verwendet werden, um damit höhere Konvergenzraten im zentralen Grenzwertsatz zu erreichen. Der folgende Satz kann ähnlich wie der letzte mittels Taylor-Entwicklung der Edgeworth-Entwicklung bewiesen werden.

Satz 4.4. *Liegt für den (beliebigen) Prozeß (X_n) die Edgeworth-Entwicklung*

$$P\left(\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \le x\right) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(x)\phi(x) + \delta_n \tag{4.5}$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ vor, so gilt für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \le x - \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(x)\right) = \Phi(x) + O\left(|\delta_n| + \frac{1}{n}\right) \tag{4.6}$$

gleichmäßig in $x \in I$.

Bemerkung 4.3. **(a)** Die Bemerkung 4.2(a) trifft hier auch zu.

(b) Da die in σ_n und p_1 auftretenden Parameter meist nicht bekannt sind, wäre eine zu (4.6) analoge Aussage interessant, in der die unbekannten Parameter durch geeignete Schätzer ersetzt werden. Dieses Problem wurde von Hall für Statistiken vom Typ $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_i\right)$ mit hinreichend glatter Funktion f in [13] untersucht.

4.3 Stochastische Entwicklungen

In Kapitel 1 wurde gezeigt, daß der Robbins-Monro-Prozeß $(X_{n+1} - \vartheta)$ durch die Summe $L_n^\circ + Q_n + \Delta_n$ einer Linear- und einer Bilinearform der Beobachtungsfehler und einem Restterm Δ_n der Ordnung $o_P(1/n)$ oder $O_P(n^{-3/2})$ dargestellt werden kann. Die Verteilung von $(X_{n+1} - \vartheta)$ läßt sich nach Abschnitt 4.1 durch eine Edgeworth-Entwicklung approximieren. Mit Satz 4.5 kann die quadratische Form Q_n in der Weise durch die quadrierte Linearform $L_n^{\circ 2}$ und eine Bias-Korrektur ersetzt werden, daß die Verteilungen von $X_{n+1} - \vartheta$ und $c_0/n + c_1 L_n^\circ + c_2 L_n^{\circ 2} + \Delta_n$ für geeignete c_0, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ übereinstimmen. Unter den Voraussetzungen der Sätze 4.1 oder 4.2 läßt sich damit leicht eine stochastische Entwicklung von $(X_{n+1} - \vartheta)$ im Sinne von [1] oder [9] folgern, die nur in Potenzen von $1/\sqrt{n}$ und einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen N definiert ist. Denn mit Korollar 4.3 gibt es Zahlen d_0, d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$ so, daß

$$X_{n+1} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\vartheta + \frac{d_0}{n}\right) N^0 + \frac{d_1}{\sqrt{n}} N + \frac{d_2}{n} N^2 + \Delta_n$$

mit $\Delta_n = o_P(1/n)$ bzw. $\Delta_n = O_P\left(n^{-3/2}\right)$.

Satz 4.5. *Es seien $E|V|^4 < \infty$ und $aA > 1$. Für den (beliebigen) Prozess (X_n) existiere die Edgeworth-Entwicklung*

$$P\left(\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \le x\right) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2} + \frac{1}{6} k_{3,1}(x^2 - 1)\right)\phi(x) + \delta_n \tag{4.7}$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ mit $\delta_n = o(1/\sqrt{n})$ oder, falls $aA > 3/2$, $\delta_n = O(1/n)$. Dann gilt

$$\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} L_n^\circ + \frac{1}{\sqrt{n}} b_2 \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} L_n^\circ\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} b_0 + \Delta_n\,, \tag{4.8}$$

wobei $\sigma_0^2 = \sigma^2/(2A-1)$, $b_2 = \left(k_{3,1} - (\rho/\sigma_0)^3/(3A-2)\right)/6$, $b_0 = k_{1,2} - b_2$, und $\Delta_n = O_P(\delta_n)$.

Korollar 4.3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 gilt*

$$\frac{X_n - \vartheta}{\sigma_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} N + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{k_{3,1}}{6} N^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(k_{1,2} - \frac{1}{6} k_{3,1}\right) + \Delta_n$$

mit $\Delta_n = O_P(\delta_n)$.

Beweis von Satz 4.5. Es sei wieder o.B.d.A. $a = 1$. Wegen $E|V|^4 < \infty$ und $A > 1$ kann für $L_n^\circ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{A-1} V_i$ eine Edgeworth-Entwicklung angeben werden — ohne daß für V die Cramér-Bedingung angenommen werden muß (siehe Bemerkung 3.1 und Beweis von Satz 3.2). Die Kumulanten von $L_n^\circ/\sigma(L_n^\circ)$ lauten

$$\overline{\kappa}_{1,n} = 0$$

$$\overline{\kappa}_{2,n} = 1$$
$$\overline{\kappa}_{3,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^3 \frac{(2A-1)^{3/2}}{3A-2} + O\big(n^{-3/2}\big) =: \frac{1}{\sqrt{n}} \overline{k}_{3,1} + O\big(n^{-3/2}\big) .$$

Also gilt

$$P\left(\frac{L_n^\circ}{\sigma(L_n^\circ)} \le x\right) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{6} \overline{k}_{3,1} (x^2-1)\phi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$. Dieselbe Entwicklung gilt auch für $P(\sqrt{n} L_n^\circ / \sigma_0 \le x)$.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := x + b_2 x^2$. Die ersten beiden Terme der letztgenannten Edgeworth-Entwicklung stellen die Verteilungsfunktionen zweier signierter Maße P_0 und P_1 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ dar. Wird das Intervall $I_n(y) := \big\{z \in \mathbb{R} : n^{1/2} f(n^{-1/2} z) \le y\big\}$ um $n = \infty$ entwickelt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&P\left(\sqrt{n} f\left(\frac{L_n^\circ}{\sigma_0}\right) \in I_n(y)\right) \\
&\quad = P_0(I_n(y)) + P_1(I_n(y)) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\quad = \int\limits_{z \in I_n(y)} d\Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{6} \overline{k}_{3,1} \int\limits_{z \in I_n(y)} d((x^2-1)\phi(x)) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\quad = \int\limits_{(-\infty, y]} d\left(\Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}} b_2 \phi(x)\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{6} \overline{k}_{3,1} \int\limits_{(-\infty, y]} d((x^2-1)\phi(x)) + O\left(\frac{1}{n}\right) .
\end{aligned}$$

Wir diskutieren nur die Entwicklung von $P_0(I_n(y))$ für $b_2 > 0$. Der Term $P_1(I_n(y))$ kann ähnlich behandelt werden.

Wir stellen fest, daß

$$I_n(y) = \left[-\frac{\sqrt{n}}{4b_2},\ \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b_2 y/\sqrt{n}}}\, y\right] =: [\underline{z}_n, \overline{z}_n] .$$

Offensichtlich gilt $\Phi(\underline{z}_n) = o\big(\frac{1}{n}\big)$.

Wir betrachten zunächst $y \in (0, 2\log n)$. Für n hinreichend groß folgt $\frac{2}{3} y \le \overline{z}_n \le 2y$. Damit kann der Restterm in der folgenden Taylor-Entwicklung abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\Phi(\overline{z}_n) &= \Phi\left(y - \frac{1}{\sqrt{n}} b_2 y^2 + O\left(\frac{y^3}{n}\right)\right) \\
&= \Phi(y) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} b_2 y^2 + O\left(\frac{y^3}{n}\right)\right) \phi(y) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} b_2 y^2 + O\left(\frac{y^3}{n}\right)\right)^2 O\left(\sup_{\zeta \in [\frac{2}{3} y, 2y]} |\zeta \phi(\zeta)|\right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$= \Phi(y) - \frac{1}{\sqrt{n}} b_2 y^2 \phi(y) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}|y|^5 + \frac{1}{n^2}|y|^7\right) \phi\left(\frac{2}{3}y\right)$$
$$= \Phi(y) - \frac{1}{\sqrt{n}} b y^2 \phi(y) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Für $y \geq 2\log n$ und n hinreichend groß gilt $\sqrt{y} \leq \overline{z}_n \leq y$, also $|\Phi(\overline{z}_n) - \Phi(y)| \leq |\overline{z}_n - y| \sup\{\phi(\zeta) : \zeta > \sqrt{n}\} = O\big(\frac{1}{n}\big)$.

Ist $y \in (-2\log n, 0)$ und n hinreichend groß, folgt $2y < \overline{z}_n < y$ und damit wie in (4.9) $\Phi(\overline{z}_n) = \Phi(y) - \frac{1}{\sqrt{n}} b_2 y^2 \phi(y) + O\big(\frac{1}{n}\big)$.

Der Fall $y \in \left[-\frac{\sqrt{n}}{4b_2},\ -2\log n\right]$ impliziert für n hinreichend groß $2y \leq \overline{z}_n < y$ und damit $|\Phi(\overline{z}_n) - \Phi(y)| \leq |\overline{z}_n - y| \sup\{\phi(\zeta) : \zeta < -2\log n\} = O\big(\frac{1}{n}\big)$.

Für $y < -\frac{\sqrt{n}}{4b_2}$ ist $I_n(y) = \emptyset$, also $P(n^{1/2} f(n^{-1/2}(n^{1/2} L_n^\circ/\sigma_0)) \in I_n(y)) = 0$. Mit $\Phi(y) = O\big(\frac{1}{n}\big)$ ist dann die Untersuchung von $P_0(I_n)$ abgeschlossen.

Eine weitere Taylor-Entwicklung führt schließlich auf

$$\begin{aligned} &P\left(n^{1/2} f\left(\frac{L_n^\circ}{\sigma_0}\right) + n^{-1/2} b_0 \leq x\right) \\ &\qquad = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(b_0 + b_2 x^2 + \frac{1}{6}\overline{k}_{3,1}(x^2 - 1)\right)\phi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

gleichmäßig in $\mathbb{R}$.

Wählen wir $b_0 = k_{1,2} - \frac{1}{6}(k_{3,1} - \overline{k}_{3,1})$ und $b_2 = \frac{1}{6}(k_{3,1} - \overline{k}_{3,1})$, so stimmen die beiden Entwicklungen (4.7) und (4.10) (bis auf den Restterm) überein. Mit $\sqrt{n}\sigma(L_n^\circ) = \sigma_0 + O\big(\frac{1}{n}\big)$ und $\sqrt{n} L_n^\circ = O_P(1)$ folgt daraus

$$\sqrt{n} f\left(\frac{L_n^\circ}{\sqrt{n}\sigma(L_n^\circ)}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} b_0 = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} L_n^\circ + \frac{1}{\sqrt{n}} b_2 \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} L_n^\circ\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} b_0 + O_P\left(\frac{1}{n}\right).$$

Damit ist (4.8) bewiesen. □

Beweis von Korollar 4.3. Wählt man für die Folge (V_n) unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.5, da in diesem Fall $\rho = 0$ und $\sqrt{n} L_n^\circ/\sigma_0$ $N(0,1)$-verteilt ist. □

Bezeichnungen

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$	Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$
$\Phi(x)$, $\phi(x)$	Verteilungsfunktion bzw. Dichte der Standardnormalverteilung
$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$	die Zufallsvariablen X und Y besitzen dieselbe Verteilung
$X_n = O_P(a_n)$	$\lim\limits_{R\to\infty} \overline{\lim\limits_{n}} P\left(\lvert X_n/a_n\rvert \geq R\right) = 0$
$X_n = o_P(a_n)$	$\forall\ R > 0 \quad \lim\limits_{n} P\left(\lvert X_n/a_n\rvert \geq R\right) = 0$
$X_n = O_{L^p}(a_n)$	$\overline{\lim\limits_{n}} E\lvert X_n/a_n\rvert^p < \infty$
$X_n = o_{L^p}(a_n)$	$\overline{\lim\limits_{n}} E\lvert X_n/a_n\rvert^p = 0$
$\sigma^2(X_n)$	$\mathrm{var(X_n)}$
σ^2	EV^2
ρ^3	EV^3
μ^4	EV^4
ε	falls nicht anders gefordert, kann $\varepsilon > 0$ als eine generische Konstante von Auftritt zu Auftritt ihren Wert ändern
$\lceil x \rceil$	kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist
$x \wedge y$	Minimum der reellen Zahlen x und y
$x \vee y$	Maximum der reellen Zahlen x und y
$\mathrm{sign}(x)$	Vorzeichen von $x \in \mathbb{R}$, wobei $\mathrm{sign}(0) := 0$
$1(A)$	Indikatorfunktion zu dem logischen Ausdruck A
$1_M(\omega)$	Indikatorfunktion zu der Menge M, d.h. $1(\omega \in M)$
$\lvert M\rvert$	Mächtigkeit der Menge M
$\prod_{i\in\emptyset} a_i := 1$	Produkt mit leerem Indexbereich

Literaturverzeichnis

[1] O.E. Barndorff-Nielsen und D.R. Cox. *Asymptotic Techniques for Use in Statistics.* Chapman and Hall, London, 1989.

[2] H. Behnke und F. Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Springer, Berlin, 3. Aufl., 1976.

[3] V. Bentkus, F. Götze, V. Paulauskas und A. Račkauskas. The accuracy of Gaussian approximation in Banach spaces. Preprint 90-100, Universität Bielefeld, 1990.

[4] R.N. Bhattacharya und J.K. Ghosh. On the validity of the formal Edgeworth expansion. *Ann. Statist.*, 6:434–451, 1978.

[5] R.N. Bhattacharya und R.R. Rao. *Normal Approximation and Asymptotic Expansions.* Wiley, New York, 1986.

[6] P.J. Bickel, F. Götze und W.R. van Zwet. The Edgeworth expansion for U-statistics of degree two. *Ann. Statist.*, 14:1463–1484, 1986.

[7] H. Callaert, P. Janssen und N. Veraverbeke. An Edgeworth expansion for U-statistics. *Ann. Statist.*, 8:299–312, 1980.

[8] K.L. Chung. On a stochastic approximation method. *Ann. Math. Statist.*, 25:463–483, 1954.

[9] D.R. Cox und N. Reid. Approximations to noncentral distributions. *Canad. J. Statist.*, 15:105–114, 1987.

[10] S.W. Dharmadhikari, V. Fabian und K. Jogdeo. Bounds on the moments of martingales. *Ann. Math. Statist.*, 39:1719–1723, 1968.

[11] M. Duflo. *Random Iterative Models.* Springer, Berlin, 1997.

[12] V. Fabian. Stochastic approximation of minima with improved asymptotic speed. *Ann. Math. Statist.*, 38:191–200, 1967.

[13] P. Hall. Inverting an Edgeworth expansion. *Ann. Statist.*, 11:569–576, 1983.

[14] P. Hall. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion.* Springer, New York, 1992.

[15] R. Helmers. *Edgeworth Expansions for Linear Combinations of Order Statistics.* Mathematical Centre 105. Amsterdam, 2nd edition, 1984.

[16] H.H. Kushner und G.G. Yin. *Stochastic Approximation Algorithms and Applications.* Springer, New York, 1997.

[17] M. Loève. *Probability Theory.* Van Nostrand, Princeton, 3rd edition, 1963.

[18] V.V. Petrov. *Sums of Independent Random Variables.* Springer, Berlin, 1975.

[19] V.V. Petrov. *Limit Theorems of Probability Theory.* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[20] B.T. Polyak. New method of stochastic approximation type. *Automat. and Remote Control*, 51:937–946, 1990.

[21] B.T. Polyak und A.B. Juditsky. Acceleration of stochastic approximation by averaging. *SIAM J. Control and Optimization*, 30:838–855, 1992.

[22] J. Renz. *Konvergenzgeschwindigkeit und asymptotische Konfidenzintervalle in der stochastischen Approximation.* Dissertation, Universität Stuttgart, 1991.

[23] P. Révész. Robbins-Monro procedure in a Hilbert space II. *Stud. Sci. Math. Hung.*, 8:469–472, 1973.

[24] H. Robbins und S. Monro. A stochastic approximation method. *Ann. Math. Statist.*, 22:400–407, 1951.

[25] D. Ruppert. Stochastic approximation. In: *Handbook of Sequential Analysis*, B.K. Gosh und P.K. Sen (eds.), 503–529. Marcel-Dekker, New York, 1991.

[26] L. Schmetterer. Stochastic approximation. In: *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1*, J. Neyman (ed.), 587–609. Univ. of California Press, Berkeley, 1961.

[27] J.H. Venter. An extension of the Robbins-Monro procedure. *Ann. Math. Statist.*, 38:181–190, 1967.

[28] H. Walk. An invariance principle for the Robbins-Monro process in a Hilbert space. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete*, 39:135–150, 1977.

[29] H. Walk. Foundations of stochastic approximation. In: *Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems*, L. Ljung, G. Pflug und H. Walk (eds.), 1–51. Birkhäuser, Basel, 1992.

[30] B. Zhidong und Z. Lincheng. Edgeworth expansions of distribution functions of independent random variables. *Scientia Sinica*, 29:1–22, 1984.

Lebenslauf

Ich wurde am 9. Februar 1959 in Beutelsbach im Remstal als Sohn von Gerhard Dippon und Dora Dippon geb. Rommel geboren. Dorothea geb. Kreß und ich heirateten am 21. Februar 1991. Unsere Tochter Julia wurde am 24. Januar 1993 geboren.

04/66 – 08/69	Grundschule in Beutelsbach
09/69 – 05/78	Remstalgymnasium in Weinstadt
07/78 – 09/79	Grundwehrdienst
10/79	Beginn des Studiums der Mathematik und Physik an der Universität Stuttgart
10/81	Vordiplom
07/85	Diplom in Mathematik, Universität Stuttgart
10/85 – 08/89	Wissenschaftlicher Angestellter bei Prof. Dr. H. Walk am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart
07/88	Promotion in Mathematik, Universität Stuttgart
09/89 – 08/91	Postdoktorandenstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft
10/89 – 05/90	Visiting Assistant Professor an der Michigan State University, USA
09/89 – 09/92	Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart
08/92 – 10/92	Gastdozent an der Universität Uppsala, Schweden
seit 10/92	Wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart
05/98	Habilitation in Mathematik, Universität Stuttgart