

**Zur Klassifikation
achtdimensionaler kompakter Ebenen
mit mindestens 16–dimensionaler
Automorphismengruppe**

Von der Fakultät Mathematik der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Sven Boekholt
geboren in Aachen

Hauptberichter: Prof. Dr. Hermann Hahl
Mitberichter: Priv.-Doz. Dr. Markus Stroppel
Prof. Dr. Helmut Salzmann (Universität Tübingen)
Tag der mündlichen Prüfung: 9. Dezember 1999

Mathematisches Institut B der Universität Stuttgart
2000

Sven Boekholt
Mathematisches Institut B
Universität Stuttgart
D-70550 Stuttgart
Germany

boekholt@mathematik.uni-stuttgart.de

Mathematics Subject Classification (MSC 1991):

- 51H10** Topological linear incidence structures
- 51A40** Translation planes and spreads
- 17A35** Division algebras
- 51A10** Homomorphism, automorphism and dualities
- 51A35** Non-Desarguesian affine and projective planes

Schlagwörter: topologische Geometrie, kompakte projektive Ebene, Translationsebene, auflösbare Automorphismengruppe, Divisionsalgebra

Diese Dissertation ist auch in elektronischer Form verfügbar:

<http://elib.uni-stuttgart.de/opus>

Zusammenfassung

Jede achtdimensionale kompakte projektive Ebene, deren Automorphismengruppe mindestens 17-dimensional ist, ist eine Hughes-Ebene, eine Translationsebene oder eine duale Translationsebene. Die Ebenen dieser Art sind vollständig klassifiziert. Für Ebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe ist bisher nur bekannt, daß es sich (bis auf Dualität) um Translationsebenen handelt, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß das Fixgebilde der Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe nicht aus einer Fahne besteht. Bis jetzt gibt es auch keine vollständige Klassifikation der achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe.

Die vorliegende Arbeit enthält zunächst einen ausführlichen Beweis für die obige Aussage bezüglich Ebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe. Dann werden Translationsebenen untersucht, wobei sich herausstellt, daß große auflösbare Automorphismengruppen Ebenen charakterisieren, die nah am Lenz-Typ V sind. (Die Automorphismengruppe einer solchen Ebene fixiert genau eine Fahne.) Die Beschreibung einer bisher unbekanntem Familie von Ebenen liefert anschließend den letzten Baustein zur Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit (mindestens) 16-dimensionaler Automorphismengruppe. Eine Untersuchung der vorher schon bekannten Beispiele für Translationsebenen im Licht dieser Resultate zeigt, daß unter diesen Beispielen bis auf Isomorphie schon alle achtdimensionalen kompakten Ebenen vorkommen, die eine 16-dimensionale Automorphismengruppe haben, deren Zusammenhangskomponente nicht genau eine Fahne fixiert. Außerdem ergibt sich, daß zur Bestimmung aller nun noch unbekanntem achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe (deren Zusammenhangskomponente genau eine Fahne fixiert) nur noch Ebenen mit auflösbarer Automorphismengruppe und reellem Kern betrachtet werden müssen.

Abstract

Every eight-dimensional compact projective plane admitting an automorphism group of dimension at least 17 is a Hughes plane, a translation plane or the dual of a translation plane. All these planes are known explicitly. In the case of a 16-dimensional automorphism group, a similar result is known only under the additional hypothesis that the connected component of the automorphism group does not fix exactly one flag. These planes are translation planes (up to duality). Up to now, however, not all the eight-dimensional compact translation planes with an automorphism group of dimension 16 are known.

The first part of this thesis contains a detailed proof for the above mentioned fact concerning planes with 16-dimensional automorphism groups. For the case of translation planes, it is then shown that large solvable automorphism groups characterize planes which are similar to planes of Lenz type V (where the automorphism group fixes exactly one flag). By introducing a new family of planes, the classification of eight-dimensional compact planes having Lenz type V and admitting an automorphism group of dimension (at least) 16 is completed. In the light of these results, an

investigation of the known examples for translation planes yields that they comprise all the eight-dimensional compact planes with an automorphism group of dimension 16 whose connected component does not fix exactly one flag. Furthermore, in order to classify the still remaining eight-dimensional compact translation planes among those admitting a 16-dimensional automorphism group (with a connected component fixing exactly one flag) it suffices to consider planes with a solvable automorphism group and a real kernel.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung / Abstract	iii
Einleitung	vii
1 Grundlagen	1
Die Körper \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H}	1
Ein- und zweidimensionale Torusgruppen	2
Topologische Dimension	5
Kompakte projektive Ebenen	7
Automorphismengruppen	8
Translationsebenen	11
Ebenen vom Lenz-Typ V	14
2 Ebenen mit mindestens 16-dimensionalen Automorphismengruppe	21
Dimensionsbeschränkungen	22
Reelle Vektoruntergruppen und Elationsgruppen	25
Operation mit Fixpunkten	28
Fixpunktfreie Operation	32
Automorphismengruppen mit einer ungeraden Anzahl von Fixelementen	38
3 Translationsebenen mit auflösbaren Automorphismengruppen	41
Die Existenz eines Fixpunktes auf der Translationsachse	41
Auflösbare Automorphismengruppen	42
Ein Kriterium zur Erkennung des Lenz-Typ V	48
Wirkungen kompakter Gruppen auf kontrahierbaren Räumen	49
Charakterisierung auflösbarer Automorphismengruppen	51
Auflösbare lineare Gruppen	52
Ebenen mit großen auflösbaren Automorphismengruppen	55
4 Divisionsalgebren mit großen auflösbaren Automorphismengruppen und isomorphen Nuklei	65
Definition der Divisionsalgebren	65
Einteilung in Isotopieklassen	68
Exkurs über homogene Polynome vom Grad zwei	71
Die Isotopieklassen der Divisionsalgebren $D_{u,1}$	73

5 Ebenen vom Lenz–Typ V mit großen Torusgruppen und reellen Streckungsgruppen	80
Einführung von Koordinaten	81
Effektive Wirkung der Torusgruppe auf einer Gerade	82
Ineffektive Wirkung der Torusgruppe auf allen drei Geraden	90
6 Zu Translationsebenen mit komplexem Kern	97
7 Translationsebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe	104
Dimensionsabschätzungen	106
Ebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse	108
Die Ebenen des $SO_3\mathbb{R}$ –Satzes mit 16–dimensionaler Gruppe	108
Ebenen mit kleinen maximalen kompakten Gruppen	108
Fazit	111
Anhang	112
A Lokalkompakte Transformationsgruppen	112
Die Struktur lokalkompakter Gruppen	112
Topologische Transformationsgruppen	114
B Lie–Gruppen, Lie–Algebren und Darstellungen	117
Die Struktur von Lie–Gruppen und Lie–Algebren	117
Wirkungen von Lie–Gruppen und lineare Darstellungen	119
C Topologische projektive Ebenen	132
Elationsgruppen	134
Translationsebenen	136
Bezeichnungen	139
Index	143
Literaturverzeichnis	145

Einleitung

Ihren Ursprung hat die topologische Geometrie in dem Bestreben, die Axiome der Anordnung in der axiomatischen Charakterisierung der reellen (euklidischen) Geometrien, wie man sie bei [Hilbert \[1899\]](#) findet¹, durch (einfachere) topologische Forderungen zu ersetzen, die es auch ermöglichen, im Rahmen der Theorie zum Beispiel Geometrien über den komplexen Zahlen zu betrachten. Zum ersten Mal hat wohl A. N. Kolmogoroff topologische Geometrien unabhängig von Anordnungsaxiomen eingeführt. Sein Artikel ([Kolmogoroff \[32\]](#)), in dem er zusammenhängende lokalkompakte projektive Räume definiert, folgt (im Band 33 der *Annals of Mathematics*) sicher nicht zufällig direkt auf L. Pontrjagins Charakterisierung der Körper der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen und der Quaternionen als einzige zusammenhängende lokalkompakte (hausdorffsche) Körper ([Pontrjagin \[32\]](#)). Diese Charakterisierung legt es nahe, Geometrien zu betrachten, deren Trägermengen (Punktmenge, Geradenmenge, . . .) mit zusammenhängenden lokalkompakten Topologien ausgestattet sind, bezüglich derer die geometrischen Verknüpfungen stetig sind.

Die ersten Arbeiten über topologische projektive Ebenen erschienen Mitte der fünfziger Jahre: [Skornjakov \[54\]](#), [Salzmann \[55\]](#), [\[57\]](#) und [Freudenthal \[57a\]](#). Die Theorie wurde daraufhin vor allem von H. Salzmann und seinen Schülern ausgebaut. Etwa vierzig Jahre nach den Anfängen findet man den Stand der Forschung in dem Buch „Compact Projective Planes“ ([Salzmann et al. \[95\]](#)) zusammengefasst, das dieser Arbeit als Hauptreferenz zugrunde liegt. Ein Leitfaden für die Untersuchungen war (und ist) das von H. Salzmann aufgestellte Programm zur Klassifikation zusammenhängender kompakter² projektiver Ebenen anhand ihrer Automorphismengruppen. Das Ziel ist dabei eine Bestimmung der Ebenen entsprechend ihrer Homogenität, wobei die Homogenität der Ebene an der Größe der Automorphismengruppe gemessen wird. Versieht man die Automorphismengruppe einer kompakten projektiven Ebene mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich der Wirkung auf dem Punktraum, so erhält man eine topologische Gruppe, der man eine topologische Dimension zuordnen kann. Neben dem Lenz–Barlotti–Typ ist diese Dimension der Automorphismengruppe ein Maß für die Homogenität der Ebene. Ein erstes Klassifikationsergebnis ist die Bestimmung minimaler c_n mit der Eigenschaft, daß jede kompakte projektive Ebene der endlichen Dimension $n > 0$ mit einer Automorphismengruppe, deren Dimension größer als c_n ist, eine der klassischen (Moufang–)Ebenen ist (vgl. [1.22](#)). Als Dimensionen zusammenhängender kompakter projektiver Ebenen kommen (außer eventuell ∞) nur die Werte 2, 4, 8 und 16 vor. In der allgemeinsten Form läßt sich das Klassifikationsprogramm folgendermaßen formulieren:

Bestimme (bis auf Isomorphie) zu gegebenem n und (möglichst kleinem) d alle n -dimensionalen kompakten projektiven Ebenen, deren Automorphismengruppe mindestens d -dimensional ist.

¹Einen historischen Überblick über die Entwicklung der Axiomatisierung der Geometrie seit G. K. C. v. Staudt („Geometrie der Lage“, 1847) findet man in [Freudenthal \[57b\]](#) im Rahmen einer Besprechung von D. Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ (mit Vergleichen der bis 1957 erschienenen acht Auflagen).

²Zusammenhängende lokalkompakte projektive Ebenen sind stets kompakt (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 42.4).

Statt nur eine Mindestgröße für die Dimension der Automorphismengruppe zu fordern, ist es zunächst sinnvoll, weitere Voraussetzungen zu machen. So hat H. Hähl in einer Reihe von Arbeiten alle achtdimensionalen kompakten *Translationsebenen* mit mindestens 17-dimensionalen Automorphismengruppe bestimmt (vgl. Hähl [86] S. 334, Klassifikationssatz oder Salzmänn et al. [95] 82.25). Daß dabei durch die zusätzliche Forderung an den Lenz-Typ fast nichts verschenkt wurde und alle achtdimensionalen kompakten Ebenen mit mindestens 17-dimensionalen Automorphismengruppe bekannt sind, weil jede solche Ebene, die keine (eventuell duale) Translationsebene ist, eine Hughes-Ebene ist, zeigt Salzmänn [90].

In dieser Arbeit betrachten wir nun achtdimensionale kompakte Ebenen mit (mindestens) 16-dimensionalen Automorphismengruppe. Nach einem Abschnitt, in dem Grundlagen vor allem zu kompakten projektiven Ebenen bereitgestellt werden, folgt im Abschnitt 2 ein ausführlicher Beweis zu einem Teilergebnis aus Salzmänn [90], der dort ausdrücklich nur skizziert wurde. Dies komplettiert den Beweis, daß jede achtdimensionale kompakte Ebene mit 16-dimensionalen Automorphismengruppe bis auf Dualität eine Translationsebene ist, wenn ihr Fixgebilde nicht aus einer Fahne besteht.

Im darauf folgenden Abschnitt 3 werden speziell Translationsebenen betrachtet, deren Automorphismengruppe auflösbar ist, wobei sich herausstellt, daß unter diesen die achtdimensionalen kompakten Ebenen mit mindestens 16-dimensionalen Automorphismengruppe in dem Sinn nahe am Lenz-Typ V sind, daß der Stabilisator eines nicht auf der Translationsachse liegenden Punktes der Ebene einen abelschen Normalteiler enthält, der auf der Translationsachse transitiv auf dem Komplement eines Punktes wirkt. Weiterhin stellt sich heraus, daß unter diesen Normalteilern ein solcher existiert, der tatsächlich aus Scherungen besteht, wenn die Ebene einen komplexen Kern hat, was bedeutet, daß eine und damit jede (volle) Streckungsgruppe, deren Achse die Translationsachse der Ebene ist, zweidimensional ist. Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung ist die Ebene also vom Lenz-Typ V und kann deshalb nach N. Knarrs Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit komplexem Kern (siehe Knarr [95]) als bekannt angesehen werden.

In den Abschnitten 4 und 5 geht es darum, die Klassifikation der achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 16-dimensionalen Automorphismengruppe zu vollenden. Dazu werden im Abschnitt 4 vierdimensionale reelle Divisionsalgebren konstruiert, die eine große auflösbare Autotopismengruppe und isomorphe Links-, Mittel- und Rechtsnuklei haben. Im Abschnitt 5 wird dann gezeigt, daß unter diesen Divisionsalgebren diejenigen mit reellen Nuklei sämtliche Ebenen der letzten bisher unbekannt Klasse achtdimensionaler kompakter Ebenen vom Lenz-Typ V mit (mindestens) 16-dimensionalen Automorphismengruppe (und reellem Kern) koordinatisieren.

Nachdem in Abschnitt 6 bewiesen wird, daß die Automorphismengruppe einer achtdimensionalen kompakten Translationsebene mit komplexem Kern keine zu $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ lokal isomorphe Untergruppe enthalten kann, wird in Abschnitt 7 der Stand der Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit mindestens 16-dimensionalen Automorphismengruppe wiedergegeben. Mit dem Resultat aus Abschnitt 6 wird dabei geschlossen, daß nur noch Ebenen mit auflösbarer Automorphismengruppe zu bestimmen sind, womit eine Motivation für diese schon in Abschnitt 3 gemachte Voraussetzung nachgereicht wird. Der letzte noch offene Fall, der

zur vollständigen Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit mindestens 16-dimensionaler Automorphismengruppe noch betrachtet werden muß, wird in 7.10 beschrieben.

Im Anhang findet man außer Untersuchungen zu Darstellungen einiger linearer Gruppen hauptsächlich Referenzen zu den im Haupttext aus der Literatur benötigten Zitaten, deren Aussagen dort zur Bequemlichkeit der Leser noch einmal formuliert sind.

Ich danke allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Hermann Hähl für die Einführung in das Gebiet der topologischen Geometrie, für die Anregung, die speziellen Fragestellungen dieser Arbeit zu untersuchen, und für viele Ratschläge, die er mir als stets ansprechbarer Betreuer der Arbeit gegeben hat. Wertvolle Anregungen verdanke ich außerdem Herrn Priv. Doz. Dr. Markus Stroppel, der mir mit seiner ständigen Diskussionsbereitschaft sehr geholfen hat.

1 Grundlagen

Die Körper \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H}

Von Körpern wird in dieser Arbeit nicht verlangt, daß ihre Multiplikation kommutativ ist. Die reellen Zahlen \mathbb{R} , die komplexen Zahlen \mathbb{C} und die Quaternionen \mathbb{H} betrachten wir in dieser Arbeit hauptsächlich so, daß $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ gilt. Dabei fassen wir zunächst \mathbb{C} als direkte Summe $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ auf mit der *imaginären Einheit* $i \in \mathbb{C}$ so, daß $i^2 = -1$ gilt. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich dann in eindeutiger Weise schreiben als $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ mit *Realteil* $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ und *Imaginärteil* $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Mit \bar{z} sei die zu z *komplex-konjugierte Zahl* $\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$ und mit $|z|$ sei der (euklidische) Betrag $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ bezeichnet. Entsprechend erhalten wir \mathbb{C} als Teilmenge von \mathbb{H} , indem wir den Quaternionenkörper als direkte Summe $\mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ schreiben mit einem komplexen Teilkörper \mathbb{C} von \mathbb{H} und $j \in \mathbb{H}$ derart, daß $j^2 = -1$ und $jz = \bar{z}j$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Die Komplexkonjugation wird auf den Quaternionenkörper durch die Definition $\overline{x + jy} := \bar{x} - jy$ (für $x, y \in \mathbb{C}$) fortgesetzt, und der (euklidische) Betrag von h wird analog definiert als $|h| := \sqrt{h\bar{h}}$. Der Teilraum $\operatorname{Pu}\mathbb{H}$ der *reinen* Quaternionen ist der Negativraum $\{h \in \mathbb{H}; \bar{h} = -h\}$ der Konjugation auf \mathbb{H} . Der Quaternionenkörper ist dann die direkte Summe $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \operatorname{Pu}\mathbb{H}$. Jede Quaternion $h \in \mathbb{H}$ läßt sich also in eindeutiger Weise schreiben als $h = \operatorname{Re}(h) + \operatorname{Pu}(h)$ mit $\operatorname{Re}(h) \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Pu}(h) \in \operatorname{Pu}\mathbb{H}$. Dabei gilt $\operatorname{Re}(x + jy) = \operatorname{Re}(x)$ und $\operatorname{Pu}(x + jy) = i \operatorname{Im}(x) + jy$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

1.1 Komplexe Zahlen und Quaternionen als Vektoren und als Matrizen

Gemäß der Aufteilung in Real- und Imaginärteil identifizieren wir \mathbb{C} durch die Gleichsetzung

$$a + ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

auch mit dem reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 . Außerdem werden wir die komplexen Zahlen durch die Gleichsetzung

$$a + ib = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{R}$$

mit einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen 2×2 -Matrizen $M_2\mathbb{R}$ identifizieren. Dabei ist die multiplikative Gruppe \mathbb{C}^\times eine Untergruppe von $GL_2\mathbb{R}$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir den Quaternionenkörper als komplexen (und reellen) Vektorraum durch die Gleichsetzung

$$x + jy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4,$$

und wir können Quaternionen auch als komplexe 2×2 -Matrizen (und gemäß der Identifikation mit \mathbb{C} als Teilmenge von $M_2\mathbb{R}$ auch als reelle 4×4 -Matrizen) auffassen:

$$x + jy = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{C} \subseteq M_4\mathbb{R}$$

Mit Hilfe der Involution

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$$

läßt sich die Komplexkonjugation in der folgenden Weise ausdrücken: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $\bar{z} = Jz$, und bei Betrachtung von z als Element von $M_2\mathbb{R}$ gilt $\bar{z} = JzJ$, was äquivalent zur Gleichung $Jz = \bar{z}J$ ist. Man beachte jedoch, daß J keine komplexe Zahl darstellt, womit auch zJ und Jz in der Matrixschreibweise nur für $z = 0$ komplexe Zahlen sind.

1.2 Einheitssphären

Die (bezüglich der von der euklidischen Metrik herrührenden Topologie) zur dreidimensionalen Sphäre \mathbb{S}_3 homöomorphe Menge der Quaternionen von Betrag 1 bezeichnen wir mit

$$\mathbb{S}_{\mathbb{H}} := \{h \in \mathbb{H}; |h| = 1\} = \{x + jy; x, y \in \mathbb{C}, |x|^2 + |y|^2 = 1\}.$$

Außerdem sei

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$$

die zur Kreislinie \mathbb{S}_1 homöomorphe Einheitssphäre in \mathbb{C} . In der Matrixschreibweise ist $\mathbb{S}_{\mathbb{H}} = \mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ die Gruppe der speziellen unitären Matrizen aus $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ und $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ ist die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$.

Ein- und zweidimensionale Torusgruppen

1.3 Homomorphismen zur Beschreibung der Torusgruppen

Die eindimensionale Torusgruppe $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ besteht aus den Drehmatrizen in $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$. Wir beschreiben sie auch mit Hilfe des (surjektiven) Homomorphismus

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{SO}_2\mathbb{R} : r \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi r) & -\sin(2\pi r) \\ \sin(2\pi r) & \cos(2\pi r) \end{pmatrix}.$$

Die zweidimensionale Torusgruppe $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ identifizieren wir mit Hilfe des Homomorphismus

$$\tilde{\delta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathrm{GL}_4\mathbb{R} : (r, t) \mapsto \begin{pmatrix} \delta(r) & 0 \\ 0 & \delta(t) \end{pmatrix}$$

in naheliegender Weise mit der Untergruppe $\{\tilde{\delta}(r, t); r, t \in \mathbb{R}\}$ von $\mathrm{GL}_4\mathbb{R}$.

Homomorphismen zwischen Torusgruppen lassen sich folgendermaßen beschreiben:

1.4 Lemma

Es seien T und \tilde{T} Torusgruppen und $\varphi : T \rightarrow \tilde{T}$ ein stetiger Homomorphismus.

(i) Ist $T = \tilde{T} = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$, dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(\delta(r)) = \delta(rk)$$

für alle $r \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\mathrm{Ker} \varphi = \left\{ \delta\left(\frac{z}{k}\right); z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(ii) Sind $T = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ und $\tilde{T} = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$, dann existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(\delta(r)) = \tilde{\delta}(rk, rl)$$

für alle $r \in \mathbb{R}$, und im Fall $\varphi \neq 0$ gilt

$$\mathrm{Ker} \varphi = \left\{ \delta\left(\frac{z}{\mathrm{ggT}(k, l)}\right); z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(iii) Ist $T = \tilde{T} = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$, dann existieren $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(\tilde{\delta}(r, t)) = \tilde{\delta}(rm + tk, rn + tl)$$

für alle $r, t \in \mathbb{R}$. Dabei gilt $\dim \mathrm{Ker} \varphi = 0$ genau dann, wenn $ml - nk \neq 0$ gilt, und es ist dann

$$\mathrm{Ker} \varphi = \left\{ \tilde{\delta}\left(\frac{xl - yk}{ml - nk}, \frac{xn - ym}{nk - ml}\right); x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Beweis: Die Aussagen lassen sich mit Hilfe der Homomorphismen δ und $\tilde{\delta}$ leicht verifizieren. Wir behandeln hier exemplarisch die Aussage über den Kern von φ im Fall $T = \tilde{T} = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$.

Mit der Ableitung $\mathfrak{l}\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, t) \mapsto (rm + tk, rn + tl)$ von φ gilt dann $\varphi\tilde{\delta} = \tilde{\delta}\mathfrak{l}\varphi$. Ist $\dim \mathrm{Ker} \varphi = 0$, so folgt $0 \neq \det_{\mathbb{R}}(\mathfrak{l}\varphi) = ml - nk$ aus $\tilde{\delta}(\mathrm{Ker} \mathfrak{l}\varphi) \subseteq \mathrm{Ker} \varphi$. Im Fall $ml - nk \neq 0$ gilt umgekehrt

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(r, t) \in \mathrm{Ker} \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{l}\varphi(r, t) \in \mathbb{Z}^2 \\ &\Leftrightarrow (r, t) \in (\mathfrak{l}\varphi)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \\ &\Leftrightarrow \text{Es existieren } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit} \\ &\quad (r, t) = \left(\frac{xl - yk}{ml - nk}, \frac{-xn + ym}{ml - nk}\right), \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, daß der Kern von φ sogar endlich ist. □

Die abelsche Gruppe $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ ist ihr eigener Zentralisator in der Gruppe $\mathrm{SL}_4\mathbb{R}$. Wir benötigen eine Verallgemeinerung dieser Tatsache.

1.5 Lemma

Es sei Δ eine Untergruppe von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ derart, daß die Projektionen

$$\pi_1 : \Delta \rightarrow \mathrm{SO}_2\mathbb{R} : (\delta_1, \delta_2) \mapsto \delta_1 \quad \text{und} \quad \pi_2 : \Delta \rightarrow \mathrm{SO}_2\mathbb{R} : (\delta_1, \delta_2) \mapsto \delta_2$$

beide surjektiv sind. Außerdem gebe es $\vartheta \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{I}_2\}$ mit $\{(\vartheta, \mathbb{I}_2), (\mathbb{I}_2, \vartheta)\} \cap \Delta \neq \emptyset$.

Für jede zusammenhängende kompakte Untergruppe K des Zentralisators $C_{\mathrm{GL}_4\mathbb{R}}\Delta$ von Δ in $\mathrm{GL}_4\mathbb{R}$ gilt $K \leq \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$.

Beweis: Sind $\tilde{\vartheta} \in \{(\vartheta, \mathbb{I}_2), (\mathbb{I}_2, \vartheta)\} \cap \Delta$ und

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix} \in K$$

(mit $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$), dann folgt $\kappa_2 = 0 = \kappa_3$ und $\kappa_1, \kappa_4 \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ aus $\kappa\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}\kappa$. Die Determinanten $\det_{\mathbb{R}}(\kappa_1)$ und $\det_{\mathbb{R}}(\kappa_4)$ sind Bilder der zusammenhängenden kompakten

Gruppe K unter stetigen Homomorphismen in die multiplikative Gruppe \mathbb{R}^\times . Deshalb gilt $\kappa_1, \kappa_4 \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$, und wegen $\pi_1(\Delta) = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} = \pi_2(\Delta)$ ergibt sich schließlich $\kappa_1, \kappa_4 \in \mathrm{C}_{\mathrm{SL}_2\mathbb{R}}\mathrm{SO}_2\mathbb{R} = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$. \square

Die Elemente aus $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ sind genau die \mathbb{C} -linearen Elemente von $M_2\mathbb{R}$ (das heißt, der Teilring \mathbb{C} ist sein eigener Zentralisator in $M_2\mathbb{R}$), und die Elemente von $\mathbb{C}J = \mathbb{R} \cdot \mathrm{O}_2^-\mathbb{R}$ sind genau diejenigen, die \mathbb{C} -antilinear sind (das heißt, es sind genau diejenigen $A \in M_2\mathbb{R}$ mit $Az = \bar{z}A$ für alle $z \in \mathbb{C} \subseteq M_2\mathbb{R}$). Berücksichtigt man, daß $i = \delta(1/4)$ und $\overline{\delta(r)} = \delta(-r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt, so läßt sich dies folgendermaßen ausdrücken.

1.6 Lemma

- (i) Für $A \in M_2\mathbb{R}$ gilt $\delta(1/4) \cdot A \cdot \delta(-1/4) = A$ genau dann, wenn $A \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ ist.
- (ii) Für $A \in M_2\mathbb{R}$ gilt $\delta(1/4) \cdot A \cdot \delta(-1/4) = -A$ genau dann, wenn $A \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{O}_2^-\mathbb{R}$ ist.
- (iii) Für alle $A \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{O}_2^-\mathbb{R}$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $A \cdot \delta(r) = \delta(-r) \cdot A$. \square

Da wir die Homomorphismen zwischen Torusgruppen mit Hilfe der ganzen Zahlen beschrieben haben, werden natürlich deren Eigenschaften bei der Untersuchung von Torusgruppen eine Rolle spielen. Wir werden im Abschnitt 5 die Aussagen der folgenden Lemmata verwenden.

1.7 Lemma

Es seien $k \in \mathbb{Z}$, $l \in 4\mathbb{Z} + 2$ und $m, n \in 2\mathbb{Z} + 1$. Ist $ml - nk \in 4\mathbb{Z} + 2$, dann gilt $k \in 4\mathbb{Z}$.

Beweis: Wegen $l \in 4\mathbb{Z} + 2$ und $m \in 2\mathbb{Z} + 1$ ist $ml \in 4\mathbb{Z} + 2$. Aus $ml - nk \in 4\mathbb{Z} + 2$ folgt dann $nk \in 4\mathbb{Z}$. Dies liefert wegen $n \notin 2\mathbb{Z}$ die Behauptung. \square

1.8 Lemma

Es seien $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, $k \in 4\mathbb{Z}$, $l \in 4\mathbb{Z} + 2$ und $c, d \in 2\mathbb{Z} + 1$. Ist $0 \neq |ad - bc| = |ml - nk|$, dann gilt $|ak - cm| \neq |al - cn|$ oder $|bk - dm| \neq |bl - dn|$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $|ak - cm| = |al - cn|$ und $|bk - dm| = |bl - dn|$ gilt. Dann existieren $\mu, \nu \in \{-1, 1\}$ mit

$$ak - cm = \mu(al - cn) \quad \text{und} \quad bk - dm = \nu(bl - dn).$$

Wegen $k \in 4\mathbb{Z}$ und $l \notin 4\mathbb{Z}$ ist $k - \mu l \neq 0 \neq k - \nu l$. Es gilt also

$$a = c \frac{m - \mu n}{k - \mu l} \quad \text{und} \quad b = d \frac{m - \nu n}{k - \nu l}$$

und damit

$$cd \left(\frac{m - \mu n}{k - \mu l} - \frac{m - \nu n}{k - \nu l} \right) = ad - bc \neq 0,$$

woraus $\mu \neq \nu$, also $\mu = -\nu$, folgt. Wegen $|ad - bc| = |ml - nk|$ existiert dann ein $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ mit

$$ml - nk = \varepsilon(ad - bc) = \varepsilon cd \left(\frac{m - \mu n}{k - \mu l} - \frac{m + \mu n}{k + \mu l} \right) = \varepsilon cd 2\mu \frac{ml - nk}{k^2 - l^2},$$

was

$$\frac{2cd}{k^2 - l^2} \in \{-1, 1\}$$

impliziert. Da $k^2 - l^2 \in 4\mathbb{Z}$ aus $k, l \in 2\mathbb{Z}$ folgt, ergibt sich damit ein Widerspruch zu $c, d \notin 2\mathbb{Z}$. □

1.9 Lemma

Sind $d, k, l \in \mathbb{Z}$ mit $d \neq 0$ und $-d \neq k \neq -l$, dann gilt $|k + d| \neq |l - d|$ oder $|k - d| \neq |l + d|$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $|k + d| = |l - d|$ und $|k - d| = |l + d|$ gilt.

Aus $k \neq -l$ folgt $k + d \neq -(l - d)$. Also muß $k + d = l - d$ und damit $l = k + 2d$ gelten. Wegen $|k - d| = |l + d|$ muß dann $k - d = k + 3d$ oder $k - d = -k - 3d$ gelten. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $0 \neq d \neq -k$. □

Topologische Dimension

Die topologischen Grundlagen, die dieser Arbeit zugrunde liegen, findet man in den meisten Lehrbüchern zur Topologie (zum Beispiel [Dugundji \[66\]](#)). Ein zentraler Begriff im Zusammenhang mit der Untersuchung topologischer Ebenen und ihrer Automorphismengruppen ist die (topologische) Dimension. Da es verschiedene Ansätze zur Definition einer topologischen Dimension gibt, sind im folgenden die in dieser Arbeit verwendeten dimensionstheoretischen Grundlagen zusammengefaßt.

1.10 Anforderungen an topologische Dimensionsbegriffe

Eine topologische Dimensionsfunktion ist eine Abbildung d , die jedem topologischen Raum eine ganze Zahl ≥ -1 zuordnet. Wir verlangen, daß eine Dimensionsfunktion die folgenden Eigenschaften hat.

- (d1) Die Dimension soll eine topologische Invariante sein, das heißt, für homöomorphe Räume X und Y soll $d(X) = d(Y)$ gelten.
- (d2) Die Dimension soll monoton sein. Für $T \subset X$ soll also stets $d(T) \leq d(X)$ gelten.
- (d3) Die Dimension soll lokal in dem Sinne sein, daß $d(X) \leq n$ genau dann gelten soll, wenn $d(U_x) \leq n$ für alle $x \in X$ und jede Umgebung U_x von x gilt³. Angesichts der Monotonie ist dies äquivalent dazu, daß es einen Punkt in X gibt, der beliebig kleine Umgebungen U mit $\dim X = \dim U$ besitzt.
- (d4) Für topologische Mannigfaltigkeiten soll der Dimensionsbegriff mit dem im Rahmen der Theorie dieser Objekte üblichen Dimensionsbegriff übereinstimmen. Dazu genügt es zu fordern, daß $d(\mathbb{R}^n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Die *kleine induktive Dimension* (siehe zum Beispiel [Pears \[75\]](#) Chap. 4, Sec. 1 zu deren Definition) hat alle diese hier geforderten Eigenschaften. Es gibt jedoch verschiedene topologische Dimensionsbegriffe, die nicht alle der hier geforderten Eigenschaften

³Man beachte, daß der leeren Menge auf diese Weise die Dimension -1 zugeordnet wird.

erfüllen. Die topologischen Räume, denen in dieser Arbeit topologische Dimensionen zugeordnet werden sollen, werden jedoch alle separabel und metrisierbar sein, und auf solchen Räumen stimmen die üblichen Dimensionsbegriffe (die Überdeckungsdimension, die kleine induktive Dimension und die große induktive Dimension) überein (vgl. Pears [75] Chap. 4, 5.10). Eine Einführung in die Dimensionstheorie für separable metrisierbare Räume liefert Hurewicz–Wallman [48]. Für beliebige topologische Räume findet man in Pears [75] und in Engelking [78] Einführungen mit vielen historischen Anmerkungen.

Wir werden $\dim X$ für die (topologische) Dimension eines (separablen metrisierbaren) topologischen Raumes X schreiben.

1.11 Dimensionen von Mannigfaltigkeiten

Ist X eine Teilmenge von \mathbb{R}^n mit $\dim X = n$, dann enthält X eine nichtleere offene Teilmenge von \mathbb{R}^n (siehe Hurewicz–Wallman [48] Theorem IV 3). Angesichts der Lokalisierbarkeit und der lokalen Homogenität von Mannigfaltigkeiten gilt für eine Teilmenge T einer Mannigfaltigkeit M also genau dann $\dim T = \dim M$, wenn T eine nichtleere offene Teilmenge von M enthält.

Der folgende Satz zeigt, daß die Offenheit von Teilmengen in \mathbb{R}^n nur vom Homöomorphietyp der Teilmenge abhängt:

1.12 Satz von L. E. J. Brouwer über die Gebietsinvarianz

Existiert zu einer Teilmenge X von \mathbb{R}^n eine offene Teilmenge U von \mathbb{R}^n mit $X \approx U$, dann ist X offen in \mathbb{R}^n .

Beweis: Dugundji [66] Chap. XVII, Theorem 3.1. □

Die Monotonie und die Lokalität der Dimension implizieren das folgende Verhalten der Dimension bei stetigen injektiven Abbildungen:

1.13 Lemma

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Injektion von einem lokalkompakten in einen hausdorffschen topologischen Raum, dann gilt $\dim X \leq \dim f(X) \leq \dim Y$.

Beweis: Es sei x ein Element von X mit beliebig kleinen Umgebungen der Dimension $\dim X$. Angesichts der Lokalkompaktheit von X existiert eine kompakte Umgebung U von x . Die Einschränkung von f auf U ist ein Homöomorphismus auf $f(U)$. Mit der Monotonie der Dimension folgt $\dim X = \dim U = \dim f(U) \leq \dim f(X) \leq \dim Y$. □

In Hurewicz–Wallman [48] Chap. II wird eine Theorie für nulldimensionale topologische Räume entwickelt, die man auch erhält, wenn man die kleine induktive Dimension als Dimensionsbegriff zugrunde legt. Ein topologischer Raum ist demnach nulldimensional, wenn jeder Punkt beliebig kleine Umgebungen besitzt, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Für die Beweise der folgenden Aussagen wird die in Hurewicz–Wallman [48] Chap. II, §2, D), S. 15 und Chap. II, §4 Remark 1, S. 22 vorausgesetzte Metrisierbarkeit nicht benötigt, wenn man stattdessen nur verlangt, daß die Räume das Trennungaxiom T_1 erfüllen (zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiere stets eine Umgebung von x , die y nicht enthält).

1.14 Nulldimensionale topologische Räume

Ist X ein nulldimensionaler topologischer Raum, der das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, dann ist X total unzusammenhängend.

Ist X lokalkompakt⁴, dann gilt auch die Umkehrung: Wenn X total unzusammenhängend ist, dann ist $\dim X = 0$. □

Kompakte projektive Ebenen

In dieser Arbeit sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ stets eine *zusammenhängende kompakte projektive Ebene* mit Punktmenge P und Geradenmenge \mathcal{L} . Die *Inzidenz* sei dabei die Elementrelation auf $P \times \mathcal{L}$, was bedeutet, daß \mathcal{L} eine Teilmenge der Potenzmenge von P ist. Inzidente Punkt–Geradenpaare werden als *Fahnen*, und die Inzidenzrelation selbst, also die Menge $\{(p, L) \in P \times \mathcal{L} ; p \in L\}$, wird damit auch als Menge der Fahnen von \mathcal{P} bezeichnet. Deren Komplement $\{(p, L) \in P \times \mathcal{L} ; p \notin L\}$ ist die Menge der *Antifahren* von \mathcal{P} .

Den Schnittpunkt zweier (verschiedener) Geraden $G, H \in \mathcal{L}$ bezeichnen wir mit $G \wedge H$, und die Verbindungsgerade zweier (verschiedener) Punkte $p, q \in P$ bezeichnen wir mit $p \vee q$ oder auch kurz mit pq .

1.15 Eigenschaften kompakter projektiver Ebenen

Daß \mathcal{P} eine kompakte Ebene ist, bedeutet zunächst, daß \mathcal{P} eine *topologische* projektive Ebene ist, das heißt, Punkt- und Geradenmenge sind so mit (weder diskreten noch indiskreten) Topologien versehen, daß die Operationen \wedge und \vee stetig sind. Unter dieser Voraussetzung sind P und \mathcal{L} automatisch reguläre Hausdorff–Räume (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 41.4).

Ist $p \in P$ ein Punkt, dann bezeichnet \mathcal{L}_p das Büschel $\{L \in \mathcal{L} ; p \in L\}$ der Geraden durch p . Die Stetigkeit von Schneiden und Verbinden impliziert, daß jedes Geradenbüschel \mathcal{L}_p zu jeder Gerade homöomorph ist (wobei \mathcal{L}_p als Teilmenge von \mathcal{L} und jede Gerade als Teilmenge von P mit den entsprechenden Spurtopologien versehen seien).

Eine *affine* (oder auch *punktierte*) Gerade ist das Komplement eines Punktes in einer Gerade. Ist der Punktraum, der Geradenraum, eine Gerade oder eine affine Gerade lokalkompakt und zusammenhängend, so sind schon alle diese Räume zusammenhängend und bis auf die affine Gerade sogar kompakt. Die affinen Geraden sind dann lokalkompakt und außerdem (lokal und global) kontrahierbar (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 41.7, 42.1, 42.4 und 42.8). Punkt und Geradenraum einer lokalkompakten projektiven Ebene haben stets eine abzählbare Basis (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 41.8). Angesichts der Regularität dieser Räume bedeutet dies, daß sie und ihre Teilräume metrisierbar und separabel sind (siehe [Dugundji \[66\]](#) Chap. IX, Corollary 9.2 (Satz von P. Urysohn) und Chap. VIII, Theorem 7.3). Deshalb stimmen für diese Räume die Dimensionsbegriffe aus [1.10](#) überein. Dabei haben Punkt- und Geradenraum der lokalkompakten Ebene \mathcal{P} dieselbe Dimension. Diese wird deshalb auch als *Dimension der Ebene \mathcal{P}* bezeichnet. Ist sie endlich, dann kann die Dimension von \mathcal{P} nur einen der Werte 2, 4, 8 oder 16 annehmen (siehe [Löwen \[83b\]](#) Theorem 1, vgl. auch [Salzmann et al. \[95\]](#) 54.11). Die Geraden und die Geradenbüschel haben dann die halbe Dimension. Bisher ist nicht bekannt, ob kompakte projektive Ebenen unendlicher Dimension

⁴Wir verlangen von kompakten und lokalkompakten Räumen stets, daß sie hausdorffsch sind.

existieren, deshalb setzen wir in dieser Arbeit jedenfalls voraus, daß \mathcal{P} endliche Dimension hat.

Zu weiteren Eigenschaften topologischer projektiver Ebenen, wie zum Beispiel zu den Homöomorphietypen von Punkt- und Geradenräumen, siehe [[Anhang: C](#)].

1.16 Unterebenen

Eine *Unterebene* von \mathcal{P} ist ein Paar $\mathcal{E} = (E, \mathcal{L}_{\mathcal{E}})$ mit $E \subseteq P$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{L}$ so, daß $\tilde{\mathcal{E}} := (E, \{L \cap E; L \in \mathcal{L}_{\mathcal{E}}\})$ eine projektive Ebene ist. Die Unterebene heißt (*topologisch abgeschlossen*), wenn ihre Punktmenge E eine abgeschlossene Teilmenge von P ist. Dies ist äquivalent dazu, daß $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ eine abgeschlossene Teilmenge von \mathcal{L} ist. Ist \mathcal{E} eine abgeschlossene Unterebene der (endlichdimensionalen) kompakten projektiven Ebene \mathcal{P} , so ist $\tilde{\mathcal{E}}$ (mit den induzierten Topologien) ebenfalls eine kompakte projektive Ebene. Insbesondere gilt $\dim E \in \{0, 2, 4, 8, 16\}$, wobei $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ aus $\dim E \geq \dim P$ folgt. Man beachte auch, daß eine topologische (projektive) Ebene genau dann unzusammenhängend ist, wenn sie total unzusammenhängend ist (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 42.1), weshalb die nulldimensionalen genau die unzusammenhängenden Ebenen sind. Für jede abgeschlossene Unterebene \mathcal{E} gilt $\dim E = (\dim P)/2$ genau dann, wenn \mathcal{E} eine *Baer-Unterebene* von \mathcal{P} ist, das heißt, wenn \mathcal{E} eine echte Unterebene von \mathcal{P} ist, die zu jedem Punkt aus P eine Gerade enthält, auf der dieser Punkt liegt, und zu jeder Gerade aus \mathcal{L} einen Punkt enthält, der auf dieser Gerade liegt (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 55.5).

1.17 Das Erzeugnis

Das *Erzeugnis* $\langle M \rangle$ einer Menge M von Punkten und/oder Geraden der Ebene \mathcal{P} sei das Paar der (topologischen) Abschlüsse der Menge aller Punkte und der Menge aller Geraden, die man mit Hilfe der Operationen \wedge und \vee aus den Elementen von M konstruieren kann. Ein *echtes Dreieck* (*Viereck*) in \mathcal{P} besteht aus drei (vier) Punkten, die (von denen je drei) nicht in einer Gerade enthalten sind. Ist $M \subseteq P \cup \mathcal{L}$ derart, daß die Menge $(M \cap P) \cup \{L_1 \wedge L_2; L_1, L_2 \in M \cap \mathcal{L}, L_1 \neq L_2\}$ ein echtes Viereck enthält, dann ist $\langle M \rangle$ eine Unterebene von \mathcal{P} , und zwar die kleinste abgeschlossene Unterebene von \mathcal{P} , die alle Punkte und Geraden aus M enthält.

1.18 Affine Punktmengen

Obwohl die in dieser Arbeit im Mittelpunkt des Interesses stehenden Translations Ebenen eigentlich eher ein affines Phänomen sind, werden affine (topologische) Ebenen nicht explizit vorkommen. Für den Punktraum $P \setminus L$ der affinen Ableitung $\mathcal{P}^L := (P \setminus L, \mathcal{L} \setminus \{L\})$ der projektiven Ebene \mathcal{P} an einer Gerade $L \in \mathcal{L}$ führen wir jedoch die abkürzende Schreibweise P^L ein.

Automorphismengruppen

Als *Automorphismen* der topologischen Ebene \mathcal{P} bezeichnen wir die Homöomorphismen σ der Punktmenge P auf sich mit der Eigenschaft, daß für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ ihr Bild $\sigma(L) = \{\sigma(p); p \in L\}$ wieder eine Gerade ist. Alle stetigen Permutationen des kompakten Punktraumes mit dieser Eigenschaft sind Automorphismen der Ebene und induzieren auf dem Geradenraum ebenfalls Homöomorphismen (siehe [Salzmann](#)

et al. [95] 44.2). Die *volle* Automorphismengruppe (das ist die Gruppe aller Automorphismen) von \mathcal{P} bezeichnen wir mit Σ .

Man macht die Automorphismengruppe Σ zu einer topologischen Gruppe, indem man sie mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich der Wirkung auf P versieht (vgl. Dugundji [66] Chap. XII, Definition 1.1). Sie ist dann eine lokalkompakte topologische Gruppe mit einer abzählbaren Basis, die als topologische Transformationsgruppe auf P und auf \mathcal{L} wirkt (siehe Löwen [76] 2.3 Hilfssatz und 2.9 Satz oder Salzmann et al. [95] 44.3). Auch für Teilmengen der Automorphismengruppe stimmen also die in 1.10 angesprochenen Dimensionsbegriffe überein. Anhang A enthält eine Zusammenstellung der Eigenschaften lokalkompakter Transformationsgruppen, die in dieser Arbeit verwendet werden. Es sei hier speziell auf die Dimensionsformel [Anhang: A.9] hingewiesen, die bei Dimensionsuntersuchungen immer wieder verwendet wird, ohne daß explizit darauf hingewiesen wird.

1.19 Fixgebilde und Stabilisatoren

Das *Fixgebilde* einer Teilmenge Ω von Σ ist das Paar $(\text{Fix}_P \Omega, \text{Fix}_{\mathcal{L}} \Omega)$. Für eine Teilmenge M einer Menge X und eine Teilmenge Ω einer Gruppe Γ , die auf X wirkt, bezeichne dabei $\text{Fix}_M \Omega$ die Menge $\{x \in M ; \omega(x) = x \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$ der von jedem Element aus Ω fixierten Elemente von M . Ist dabei X ein Hausdorff-Raum, auf dem Γ als topologische Transformationsgruppe wirkt, so ist $\text{Fix}_M \Omega$ eine abgeschlossene Teilmenge von M . Das Fixgebilde $(\text{Fix}_P \Omega, \text{Fix}_{\mathcal{L}} \Omega)$ einer Teilmenge Ω von Σ ist gleich seinem Erzeugnis $\langle \text{Fix}_P \Omega \cup \text{Fix}_{\mathcal{L}} \Omega \rangle$ (vgl. Hughes–Piper [73] Lemma 4.2, Corollary). Umgekehrt schreiben wir $\Omega_{[M]}$ für den Stabilisator aller Elemente von M in Ω , also für die Teilmenge $\{\omega \in \Omega ; M \subseteq \text{Fix}_X \Omega\}$ von Ω . Stabilisatoren endlich vieler Elemente kennzeichnen wir auch durch Indizierung mit den stabilisierten Elementen, das heißt zum Beispiel, für $x, y, z \in X$ schreiben wir kurz $\Omega_{x,y,z}$ statt $\Omega_{\{x,y,z\}}$. Ist X ein topologischer Raum, dessen einelementige Teilmengen abgeschlossen sind (Trennungsaxiom T_1), und wirkt Γ als topologische Transformationsgruppe auf X , so ist jeder Stabilisator einer Teilmenge von X eine abgeschlossene Untergruppe von Γ .

1.20 Elationen und Homologien

Axiale Automorphismen einer (projektiven) Ebene sind solche, die jeden Punkt einer Gerade (der Achse) fixieren. Die axialen Automorphismen sind genau die *zentralen* Automorphismen, das heißt, es sind genau diejenigen, die ein Zentrum besitzen, also einen Punkt mit der Eigenschaft, daß der Automorphismus jede mit diesem Punkt inzidente Gerade fixiert (siehe Hughes–Piper [73] Theorem 4.9). Axiale Automorphismen, bei denen das Zentrum auf der Achse liegt, heißen *Elationen*. Liegt das Zentrum eines axialen Automorphismus nicht auf der Achse, so wird er *Homologie* genannt. Die Gruppen, die aus Homologien mit gemeinsamer Achse und gemeinsamen Zentrum bestehen, bezeichnen wir als *Streckungsgruppen*. *Volle* Streckungsgruppen nennen wir die Gruppen *aller* Homologien mit einer gemeinsamen Achse und einem gemeinsamen Zentrum.

Bei der Bezeichnung von Mengen axialer Automorphismen benutzen wir die folgenden Konventionen. Sind $\Omega \subseteq \Sigma$ eine Menge von Automorphismen von \mathcal{P} und $Z \subseteq P$ eine Menge von Punkten in \mathcal{P} sowie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Geraden in \mathcal{P} , dann sei

$$\Omega_{[Z,\mathcal{A}]} := \bigcup_{z \in Z} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\Omega_{[z]} \cap \Omega_{[A]})$$

die Menge der Automorphismen in Ω mit einem Zentrum aus Z und einer Achse aus \mathcal{A} .

Definitionsgemäß sind Geraden Mengen von Punkten. Für $A \in \mathcal{L}$ ist deshalb $\Omega_{[A]}$ die Menge der Automorphismen in Ω mit Achse A . Dual dazu fassen wir jeden Punkt $z \in P$ auch als die Menge der Geraden durch z auf, das heißt, wir identifizieren z mit \mathcal{L}_z . Dies erlaubt zum Beispiel die Schreibweise $\Omega_{[z]}$ für die Menge $\Omega_{[\mathcal{L}_z]}$ der Automorphismen in Ω mit Zentrum z und die Schreibweise $\Omega_{[Z, z]}$ für die Automorphismen in Ω mit Zentrum in Z und Achse in \mathcal{L}_z . Da es angesichts der festgelegten Positionen in der Schreibweise bei der Bezeichnung von Mengen axialer Automorphismen nicht zu Verwechslungen kommen kann, verzichten wir dabei außerdem auf die Mengenklammern für einelementige Mengen. So schreiben wir also zum Beispiel $\Omega_{[z, A]}$ statt $\Omega_{[\{z\}, \{A\}]}$ für die Menge der Automorphismen in Ω mit Zentrum z und Achse A .

Neben der (zum Beispiel nach [Dugundji \[66\]](#) Chap. XII, Theorem 2.4 (1)) stetigen *Auswertungsabbildung*

$$\alpha_p : \Sigma \rightarrow P : \sigma \mapsto \sigma(p),$$

die für jeden Punkt $p \in P$, jede nicht mit p inzidente Gerade $A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p$ und jede abgeschlossene Untergruppe H der Elationsgruppe $\Sigma_{[A, A]}$ sogar einen Homöomorphismus von H auf die in $P \setminus A$ abgeschlossene Bahn $H(p)$ liefert (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 44.8 (c)), ist auch die (ebenfalls bezüglich der kompakt-offenen Topologie) stetige *Zentrumsabbildung*

$$\zeta : \Sigma_{[P, \mathcal{L}]} \setminus \{\text{id}_{\mathcal{P}}\} \rightarrow P,$$

die jedem nichttrivialen axialen Automorphismus von \mathcal{P} sein Zentrum zuordnet (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 44.8 (a) und 61.7), ein nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung axialer Automorphismen. Ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_{[P, \mathcal{L}]}$ ein stetiger Homomorphismus, dann ist die Zentrumsabbildung konstant auf $\varphi\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$ und damit auch auf $\varphi(\mathbb{Q} \setminus \{0\})$. Da $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, ist die stetige Abbildung ζ also auf $\varphi(\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ konstant. Insbesondere gilt für Gruppen axialer Automorphismen, die zu reellen Vektorgruppen isomorph sind, daß die Zentrumsabbildung auf den Mengen der nichttrivialen Elemente eindimensionaler Teilräume konstant ist.

1.21 Involutionen

Ein Element der Automorphismengruppe von \mathcal{P} heißt *planar*, wenn sein Fixgebilde eine Unterebene von \mathcal{P} ist. Involutorische Automorphismen sind entweder axial oder planar, wobei die Fixgebilde der letzteren stets (abgeschlossene) Baer-Unterebenen sind (vgl. [Hughes-Piper \[73\]](#) Theorem 4.3 und Theorem 4.4), weshalb planare Involutionen auch Baer-Involutionen genannt werden. Axiale Involutionen endlichdimensionaler kompakter projektiver Ebenen sind stets Homologien [[Anhang: C.10](#)].

Sind σ und ϱ verschiedene kommutierende involutorische Homologien, dann liegt das Zentrum von σ auf der Achse von ϱ und umgekehrt. Das Produkt $\sigma\varrho$ ist dann ebenfalls eine involutorische Homologie, und die Zentren und Achsen von σ , ϱ und $\sigma\varrho$ bilden ein echtes Dreieck (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 55.35).

1.22 Dimensionsschranken

Die volle Automorphismengruppe Σ einer zwei- oder vierdimensionalen kompakten projektiven Ebene ist stets eine Lie-Gruppe (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 32.21 und 71.2).

Für achtdimensionale kompakte projektive Ebenen gilt dies zumindest für die Zusammenhangskomponente Σ^1 , falls $\dim \Sigma \geq 12$ ist (siehe Priwitzer [94]), und die Zusammenhangskomponenten von mindestens 27-dimensionalen Automorphismengruppen 16-dimensionaler kompakter projektiver Ebenen sind ebenfalls Lie-Gruppen (siehe Priwitzer–Salzmann [98]).

An der Größe der Automorphismengruppe kann man außerdem ablesen, ob die Ebene klassisch ist. Für $c_2 := 4$, $c_4 := 8$, $c_8 := 18$, $c_{16} := 40$ und $d \in \{2, 4, 8, 16\}$ gilt: Ist die Automorphismengruppe der d -dimensionalen kompakten projektiven Ebene \mathcal{P} eine mindestens $(c_d + 1)$ -dimensionale Gruppe, so ist \mathcal{P} klassisch (siehe Salzmann et al. [95] 33.6, 72.8 und 85.16 für $d \neq 8$). Für den Fall $d = 8$ wird dieses Ergebnis in Salzmann [81] Satz 1 formuliert, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß das Fixgebilde der Automorphismengruppe nicht aus einer Fahne besteht, bewiesen. Den Beweis für den Fall einer Fixfahne findet man in Salzmann [90]; man beachte, daß die Ergänzungen zu Salzmann [90] aus dem Abschnitt 2 dieser Arbeit nicht diesen Fall betreffen.

Obige Schranken sind scharf, das heißt, es gibt jeweils nichtklassische d -dimensionale kompakte projektive Ebenen mit c_d -dimensionalen Automorphismengruppen (siehe zum Beispiel Salzmann et al. [95] 34.8, 73.11 oder 73.19, 82.20 und 87.7).

Translationsebenen

Außer im Abschnitt 2 sei \mathcal{P} stets eine (zusammenhängende kompakte⁵) *Translationsebene* mit *Translationsachse* $L_\infty \in \mathcal{L}$, was bedeutet, daß die *Translationsgruppe* $T := \Sigma_{[L_\infty, L_\infty]}$ transitiv auf der Menge P^{L_∞} der *affinen Punkte* von \mathcal{P} wirkt. Die L_∞ invariant lassenden (und somit auf P^{L_∞} wirkenden) Automorphismen von \mathcal{P} heißen *affine Automorphismen*. Eine projektive Ebene heißt *moufangsch*, wenn sie bezüglich jeder Gerade als Translationsachse eine Translationsebene ist. Die zusammenhängenden kompakten Moufang-Ebenen sind genau die klassischen Ebenen, also bis auf Isomorphie genau die Ebenen $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$, $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$ und $\mathcal{P}_2\mathbb{O}$ über den reellen Zahlen, den komplexen Zahlen, den Quaternionen und den Oktaven (vgl. Salzmann et al. [95] 42.7 oder 63.3). Ist \mathcal{P} eine nichtklassische Translationsebene, dann zeigen die Lenz–Barlotti-Klassifikation (zum Beispiel Salzmann et al. [95] Sec. 24) und der Satz von L. A. Skornjakov & R. L. San Soucie (vgl. Hughes–Piper [73] Theorem 6.16), daß jeder Automorphismus von \mathcal{P} die Translationsachse L_∞ fixiert.

1.23 Der Spread der Richtungskomponenten

Die Translationsgruppe T der zusammenhängenden kompakten Translationsebene \mathcal{P} ist isomorph zur reellen Vektorgruppe \mathbb{R}^n mit $n = \dim P$, und ihre *Richtungskompo-*

⁵Es sei hier daran erinnert, daß zusammenhängende lokalkompakte projektive Ebenen stets schon kompakt sind (vgl. Salzmann et al. [95] 42.4). Betrachtet man lokalkompakte Translationsebenen als affine Ebenen, so können sie als solche nicht kompakt sein (vgl. Salzmann et al. [95] 42.5). Die zusammenhängenden lokalkompakten Translationsebenen werden in dieser Arbeit jedoch als projektive Ebenen betrachtet und deshalb stets als kompakte Translationsebenen bezeichnet. Man beachte, daß sich jede zusammenhängende lokalkompakte affine Ebene zu einer kompakten projektiven Ebene erweitern läßt, vgl. Skornjakov [54] S. 368, Korollar 1 und Salzmann [67] 7.17. Aussagen über die projektive Erweiterbarkeit *unzusammenhängender* affiner Ebenen findet man in Grundhöfer [87]: Zum Beispiel läßt sich nach Grundhöfer [87] 5.2 jede lokalkompakte affine Translationsebene zumindest dann zu einer kompakten projektiven Ebene erweitern, wenn der Kern der Ebene nicht diskret ist.

nenten $T_{[p]} = \Sigma_{[p, L_\infty]}$ (mit $p \in L_\infty$) sind isomorph zur Vektorgruppe \mathbb{R}^l mit $l = n/2$. Die Menge $\mathcal{S} := \{T_{[p]}; p \in L_\infty\}$ der Richtungskomponenten besteht aus paarweise komplementären $n/2$ -dimensionalen Teilräumen von T , und die Vereinigung der Elemente von \mathcal{S} ist T (eine solche Menge von Teilräumen nennt man einen *Spread*). Durch die stetige Zentrumsabbildung $\zeta : \Sigma_{[P, \mathcal{L}]} \setminus \{\text{id}_P\} \rightarrow P$ wird (bezüglich der Grassmann-Topologie auf der Menge der l -dimensionalen Teilräume von $T = \mathbb{R}^n$) ein Homöomorphismus

$$\widehat{\zeta} : \mathcal{S} \rightarrow L_\infty : T_{[p]} \mapsto p$$

von \mathcal{S} auf die, zur (kompakten) l -dimensionalen Sphäre \mathbb{S}_l homöomorphe, Translationsachse L_∞ induziert (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 64.4).

Zu jedem l -dimensionalen, zu $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ komplementären, Teilraum V von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ existiert eine (eindeutig bestimmte) reell-lineare Abbildung $\lambda_V : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ derart, daß

$$V = \lambda_V = \{(x, \lambda_V(x)); x \in \mathbb{R}^l\}$$

gilt. Wählt man die Basis von $T = \mathbb{R}^n$ so, daß $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^l \subseteq \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ für ein $s \in L_\infty$ gilt, dann existiert also für alle $p \in L_\infty \setminus \{s\}$ (genau) eine reell-lineare Abbildung $\lambda(p) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ derart, daß $T_{[p]} = \lambda(p) = \{(x, \lambda(p)(x)); x \in \mathbb{R}^l\}$ gilt. Ist außerdem $T_{[w]} = \mathbb{R}^l \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ für ein $w \in L_\infty$, so ist $\lambda(w) = 0$ die Nullabbildung, und für $p \in L_\infty \setminus \{s, w\}$ ist $\lambda(p)$ regulär.

1.24 Automorphismen und der Kern einer Translationsebene

Die Transitivität der Wirkung von T auf P^{L_∞} impliziert, daß sich jede T enthaltende Untergruppe Γ von Σ_{L_∞} als semidirektes Produkt $T \rtimes \Gamma_o$ darstellen läßt, wobei $o \in P^{L_\infty}$ ein (beliebiger) affiner Punkt ist. Die Projektion $\pi : T \cdot \Gamma_o \rightarrow \Gamma_o : \tau\gamma \mapsto \gamma$ von Γ auf Γ_o ist stetig, denn die Auswertungsabbildung $\alpha_o : T \rightarrow P^{L_\infty} : \tau \mapsto \tau(o)$ ist ein Homöomorphismus (vgl. [1.20](#)), und für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $\pi(\gamma) = (\alpha^{-1}(\gamma(o)))^{-1}\gamma$. Ist Γ zusammenhängend, so ist also insbesondere auch Γ_o zusammenhängend. Umgekehrt folgt aus dem Zusammenhang von Γ_o , daß Γ als semidirektes Produkt der zusammenhängenden Untergruppen Γ_o und T zusammenhängend ist.

Außerdem impliziert die Freiheit der Wirkung von T auf P^{L_∞} , daß die Wirkung von Γ_o auf $P^{L_\infty} = T(o)$ äquivalent zur Konjugationswirkung von Γ_o auf T ist [[Anhang: A.7](#)]. Wie man sich leicht überzeugt, wird dabei jeder Automorphismus der Gruppe T , der den Spread \mathcal{S} invariant läßt, durch ein (angesichts der Freiheit der Wirkung von Γ_o auf P^{L_∞} eindeutig bestimmtes) Element von Γ_o induziert, wobei die Wirkungen eines solchen Elements auf \mathcal{L}_o und auf L_∞ äquivalent zu seiner durch Konjugation auf der Menge \mathcal{S} der Richtungskomponenten von T induzierten Wirkung ist.

Die Gruppe $\Sigma_{[o, L_\infty]}$ besteht genau aus denjenigen Elementen von Γ_o , die jedes Element des Spreads \mathcal{S} normalisieren. Sind $\alpha, \beta \in \Sigma_{[o, L_\infty]}$ und $\tau \in T \setminus \{\text{id}_P\}$, so liegt mit τ^α und τ^β und auch deren Produkt $\tau^\alpha\tau^\beta$ in der gleichen Richtungskomponente wie τ . Da die Abbildung $T \rightarrow T : \tau \mapsto \tau^\alpha\tau^\beta$ entweder ein Automorphismus von T oder gleich dem konstanten Endomorphismus $0 : T \rightarrow T : \tau \mapsto \tau^0$ mit $\tau^0 := \text{id}_P$ ist, existiert somit zu $\alpha, \beta \in \Sigma_{[o, L_\infty]} \cup \{0\}$ ein (eindeutig bestimmtes) Element $\alpha + \beta \in \Sigma_{[o, L_\infty]} \cup \{0\}$ mit $\tau^{\alpha+\beta} = \tau^\alpha\tau^\beta$ für alle $\tau \in T$. Dadurch erhält $\mathbb{K} := \Sigma_{[o, L_\infty]} \cup \{0\}$ eine Körperstruktur, und T sowie die Elemente von \mathcal{S} sind Vektorräume über diesem Körper. Angesichts der Transitivität der Translationsgruppe sind die Streckungsgruppen $\Sigma_{[p, L_\infty]}$ mit $p \in P^{L_\infty}$

alle konjugiert, woraus sich die Unabhängigkeit des Isomphietyps des Körpers \mathbb{K} von der Wahl des Bezugspunktes o ergibt. Man bezeichnet \mathbb{K} als *Kern der Ebene*. Da die reellen Skalarmultiplikationen Automorphismen von $T = \mathbb{R}^n$ liefern, die jeden Teilraum von T , also insbesondere jedes Element von \mathcal{S} , invariant lassen, enthält \mathbb{K} einen zu \mathbb{R} isomorphen Teilkörper. Tatsächlich ist der Kern einer zusammenhängenden kompakten Ebene stets ein zusammenhängender lokalkompakter Körper und deshalb isomorph zu \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 42.6).

Wie in [1.23](#) seien $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^l$ und $T_{[w]} = \mathbb{R}^l \times \{0\}$. Es läßt sich dann eine Skalarmultiplikation $\mathbb{R}^l \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^l : (x, \alpha) \mapsto x\alpha$ derart etablieren, daß $(x, y)^\alpha = (x\alpha, y\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $(x, y) \in T$ gilt. Wegen der Invarianz jeder Richtungskomponente von T unter der Wirkung von \mathbb{K} auf T gilt dabei

$$(x\alpha, (\lambda(p)(x))\alpha) = (x\alpha, \lambda(p)(x\alpha))$$

für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{R}^l$ und $p \in L_\infty \setminus \{s\}$, was bedeutet, daß die reell-lineare Abbildung $\lambda(p)$ sogar \mathbb{K} -linear ist. Genauer gilt: Für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ ist $\lambda(p)$ genau dann K -linear, wenn K isomorph zu einem Teilkörper des Kerns \mathbb{K} der Ebene ist.

1.25 Punktstabilisatoren sind semilineare Lie-Gruppen

Die affinen Automorphismen aus Σ_o normalisieren $\Sigma_{[o, L_\infty]}$ und wirken deshalb \mathbb{K} -semilinear auf T , wobei die durch die Konjugation auf $\Sigma_{[o, L_\infty]}$ induzierten (stetigen) Begleitautomorphismen stetig von den Elementen aus Σ_{o, L_∞} abhängen. Da jeder stetige Automorphismus von \mathbb{K} den Primkörper \mathbb{R} von \mathbb{K} punktweise fixiert, wirken die affinen Automorphismen in Σ_o alle auch \mathbb{R} -linear auf T . Ein Element aus $GL_n \mathbb{R}$ induziert genau dann einen Automorphismus von \mathcal{P} , wenn es jede Richtungskomponente von T wieder auf eine Richtungskomponente von T abbildet (vgl. [1.24](#)). Als kompakte Menge ist \mathcal{S} eine abgeschlossene Teilmenge der Menge der l -dimensionalen Teilräume von $T = \mathbb{R}^n$, woraus folgt, daß Σ_{o, L_∞} isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $GL_n \mathbb{R}$ und damit insbesondere eine Lie-Gruppe ist (vgl. [Varadarajan \[74\]](#) Theorem 2.12.6).

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wirkt also jeder in Σ_o enthaltene affine Automorphismus per Konjugation \mathbb{K} -linear auf T . Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann wirkt zumindest jeder in der Zusammenhangskomponente von Σ_{o, L_∞} enthaltene Automorphismus \mathbb{K} -linear auf T , denn außer der Identität ist die Komplexkonjugation der einzige stetige Automorphismus von \mathbb{C} . Der Deutlichkeit halber sei daran erinnert, daß die \mathbb{K} -Linearität eines affinen Automorphismus $\sigma \in \Sigma_o$ bedeutet, daß σ die Streckungsgruppe $\mathbb{K}^\times = \Sigma_{[o, L_\infty]}$ zentralisiert.

1.26 Reduzierte Stabilisatoren

Für jeden Körper K und jeden K -Vektorraum V bezeichnen wir mit $SL(V, K)$ die Kommutatorgruppe der Gruppe $GL(V, K)$ der K -linearen Automorphismen von V . Für jede Untergruppe Γ von Σ_{o, L_∞} sei

$$S\Gamma := \Gamma \cap SL(T, \mathbb{K}).$$

Die Gruppe $S\Sigma_{o, L_\infty}$ und ihre Untergruppen nennen wir auch *reduzierte Stabilisatoren*. Besteht Γ aus (per Konjugation) \mathbb{K} -linear auf T wirkenden affinen Automorphismen von \mathcal{P} , dann ist also die zu $(\Gamma \cdot SL(T, \mathbb{K}))/SL(T, \mathbb{K})$ (algebraisch) isomorphe Faktorgruppe $\Gamma/S\Gamma$ abelsch. Ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann gilt

$$S\Gamma = \{\gamma \in \Gamma ; \det_{\mathbb{K}} \gamma = 1\} = \text{Ker}(\det_{\mathbb{K}}|_{\Gamma})$$

(vgl. Hein [90] S. 24, Satz 9). Die Faktorgruppe $\Gamma/S\Gamma$ ist in diesem Fall also zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe \mathbb{K}^\times des Kerns der Ebene isomorph. Da $S\Sigma_{[o,L_\infty]}$ im Fall eines reellen Kerns zweielementig und im Fall eines komplexen Kerns maximal vierelementig ist (man beachte, daß 16–dimensionale Translationsebenen nach Buchanan–Hähl [77] Theorem 1 stets einen reellen Kern haben), wirkt $S\Gamma$ in diesen Fällen fast effektiv auf der Translationsachse L_∞ .

Daraus, daß die Kerne der 16–dimensionalen Translationsebenen reell sind, folgt weiterhin, daß der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ nur auftritt, wenn \mathcal{P} zur Quaternionenebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$ isomorph ist. Faßt man $M_2\mathbb{H}$ gemäß der Identifikation von \mathbb{H} mit $M_2\mathbb{C}$ (vgl. 1.1) als Teilmenge von $M_4\mathbb{C}$ auf, dann gilt in diesem Fall

$$S\Gamma = \{\gamma \in \Gamma ; \det_{\mathbb{C}} \gamma = 1\}$$

für jede Untergruppe Γ von Σ_{o,L_∞} , die \mathbb{H} –linear auf T wirkt (siehe Hein [90] S. 35, Satz 24).

Ebenen vom Lenz–Typ V

Existiert auf der Translationsachse L_∞ der Translationsebene \mathcal{P} ein Punkt s derart, daß die zu \mathcal{P} duale Ebene (die man durch Vertauschung der Rollen von Punkten und Geraden erhält, s.u.) eine Translationsebene bezüglich der Translationsachse s ist, dann nennen wir \mathcal{P} eine Ebene vom Lenz–Typ V (vgl. auch Salzmann et al. [95] 24.7)⁶. Dies ist genau dann der Fall, wenn für eine (und damit jede) Gerade $S \in \mathcal{L}_s \setminus \{L_\infty\}$ die Scherungsgruppe $\Sigma_{[s,S]}$ transitiv auf $L \setminus \{s\}$ für eine (und damit jede) Gerade aus $\mathcal{L}_s \setminus \{S\}$ wirkt. Wir bezeichnen die Ebene \mathcal{P} in diesem Fall deshalb auch als Ebene vom Lenz–Typ V mit Scherungszentrum s (und Translationsachse L_∞).

1.27 Divisionsalgebren und Ebenen vom Lenz–Typ V

Eine *reelle Divisionsalgebra* ist eine algebraische Struktur $D = (\mathbb{R}^l, +, \circ)$ mit Trägermenge \mathbb{R}^l , wobei $+$ die gewöhnliche Vektoraddition auf \mathbb{R}^l ist und die Multiplikation \circ mit Hilfe einer reell–linearen Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^l \rightarrow M_l\mathbb{R}$ mit $\mathbb{I}_l \in \lambda(\mathbb{R}^l \setminus \{0\}) \subseteq GL_l\mathbb{R}$ beschrieben werden kann durch $x \circ y = \lambda(x)y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^l$.

Die Ebene über der reellen Divisionsalgebra $(\mathbb{R}^l, +, \circ)$ ist die Translationsebene mit Translationsgruppe $T = \mathbb{R}^{2l}$, deren Richtungskomponenten die Teilräume $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ und $\{(x, m \circ x) ; x \in \mathbb{R}^l\}$ für alle $m \in \mathbb{R}^l$ sind. Eine solche Ebene hat stets den Lenz–Typ V.

Identifiziert man umgekehrt die Translationsgruppe T einer $2l$ –dimensionalen kompakten Ebene \mathcal{P} vom Lenz–Typ V derart mit \mathbb{R}^{2l} , daß $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^l$ für das Scherungszentrum s gilt und daß $\mathbb{R}^l \times \{0\}$ sowie $\text{id}_{\mathbb{R}^l} = \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}^l\}$ Richtungskomponenten von T sind, so erhält man mit Hilfe jedes Elements $c \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ auf folgende Weise eine reelle Divisionsalgebra: Für $m \in \mathbb{R}^l$ und $p \in L_\infty$ mit $(c, m) \in T_{[p]}$ sei $\lambda(m) \in M_l\mathbb{R}$ die Matrix mit $T_{[p]} = \{(x, \lambda(m)x) ; x \in \mathbb{R}^l\}$. Mit der üblichen Vektoraddition $+$ und der

⁶Die Lenz–Barlotti–Klassifikation wird oft in einer strikteren Weise interpretiert. Danach sind die Moufang–Ebenen (Lenz–Typ VII) nicht vom Lenz–Typ V, und Ebenen, die im hier verwendeten Sinn vom Lenz–Typ V sind, werden als *mindestens* vom Lenz–Typ V bezeichnet. Auf das „mindestens“ wird in dieser Arbeit verzichtet.

wie oben durch λ gegebenen Multiplikation \circ ist dann $D := (\mathbb{R}^l, +, \circ)$ eine Divisionsalgebra. Die Ebene über D ist isomorph zu \mathcal{P} (vgl. [Hughes–Piper \[73\]](#) Chap. V, Sec. 3 und Theorem 6.9), weshalb D *koordinatisierende* Divisionsalgebra von \mathcal{P} genannt wird.

Zusammenhängende kompakte projektive Ebenen vom Lenz–Typ V sind also bis auf Isomorphie genau die Ebenen über reellen Divisionsalgebren (dem Phänomen, daß es zusammenhängende kompakte Ebenen (vom Lenz–Typ V) nur in den Dimensionen 2, 4, 8 und 16 gibt, entspricht deshalb die Tatsache, daß es reelle Divisionsalgebren nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 gibt).

1.28 Nuklei

Jede Divisionsalgebra $D = (K, +, \circ)$ enthält als Teilkörper stets den Linksnukleus

$$N_\lambda(D) := \{a \in K ; a \circ (x \circ y) = (a \circ x) \circ y \text{ für alle } x, y \in K\},$$

den Mittelnukleus

$$N_\mu(D) := \{a \in K ; (x \circ a) \circ y = x \circ (a \circ y) \text{ für alle } x, y \in K\}$$

und den Rechtsnukleus

$$N_\rho(D) := \{a \in K ; (x \circ y) \circ a = x \circ (y \circ a) \text{ für alle } x, y \in K\}.$$

Da die Translationsgruppe einer Ebene \mathcal{P} vom Lenz–Typ V transitiv auf dem Komplement P^{L_∞} der Translationsachse L_∞ wirkt und die Scherungsgruppe transitiv auf dem Komplement $L_\infty \setminus \{s\}$ des Scherungszentrums s in der Translationsachse wirkt, gibt es in der Gruppe der L_∞ invariant lassenden Automorphismen von \mathcal{P} höchstens drei Isomorphietypen voller Streckungsgruppen, die nicht trivial sind:⁷ Die Gruppen mit einem Zentrum in P^{L_∞} (und der Fixgerade L_∞ als Achse), die Gruppen mit einem Zentrum in $L_\infty \setminus \{s\}$ und die Gruppen mit s als Zentrum. Die Isomorphietypen der Streckungsgruppen der Ebene über einer Divisionsalgebra D sind die Isomorphietypen der multiplikativen Gruppen der Nuklei von D : Ist w der (vom Scherungszentrum s dieser Ebene verschiedene) Punkt der Translationsachse L_∞ mit $T_{[w]} = K \times \{0\}$, dann lassen sich für jeden affinen Punkt $o \in P^{L_\infty}$ die Gruppen $\Sigma_{[s,ow]}$, $\Sigma_{[w,os]}$ und $\Sigma_{[o,L_\infty]}$ mit Hilfe ihrer freien Konjugationswirkung auf T folgendermaßen beschreiben (vgl. [Hughes–Piper \[73\]](#) Theorem 8.2): Es ist

$$\Sigma_{[s,ow]} = \{K^2 \rightarrow K^2 : (x, y) \mapsto (x, a \circ y) ; a \in N_\lambda(D) \setminus \{0\}\},$$

$$\Sigma_{[w,os]} = \{K^2 \rightarrow K^2 : (x, y) \mapsto (a \circ x, y) ; a \in N_\mu(D) \setminus \{0\}\}$$

und

$$\Sigma_{[o,L_\infty]} = \{K^2 \rightarrow K^2 : (x, y) \mapsto (x \circ a, y \circ a) ; a \in N_\rho(D) \setminus \{0\}\}.$$

Insbesondere ist der Rechtsnukleus $N_\rho(D)$ isomorph zum Kern der Ebene.

Wie die Kerne zusammenhängender kompakter Translationsebenen sind die Nuklei der reellen Divisionsalgebren stets isomorph zu einem der Körper \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} , wobei ein Nukleus einer Divisionsalgebra D nur dann zum Quaternionenkörper \mathbb{H} isomorph sein kann, wenn D isomorph zu \mathbb{H} ist (vgl. [Buchanan–Hähl \[77\]](#) 1.1). Insbesondere sind also sämtliche vollen Streckungsgruppen der zusammenhängenden kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V (topologisch) mindestens eindimensional.

⁷Wird L_∞ von der Automorphismengruppe bewegt, dann ist \mathcal{P} eine Moufang–Ebene, und die vollen Streckungsgruppen sind alle isomorph.

1.29 Isotopie

Divisionsalgebren liefern genau dann isomorphe projektive Ebenen, wenn sie isotop sind (siehe Hughes–Piper [73] Theorem 8.11). Ein *Isotopismus* zwischen zwei Divisionsalgebren $D = (K, +, \circ)$ und $D' = (K', +, *)$ ist ein Tripel (α, β, γ) additiver Isomorphismen von K auf K' derart, daß

$$\gamma(m \circ x) = \alpha(m) * \beta(x)$$

für alle $m, x \in K$ gilt. Ist (α, β, γ) ein Isotopismus, so sagen wir, daß D und D' *isotop* sind. Die Isotopismen von D auf sich nennen wir *Autotopismen*. Die Isomorphismen α der Divisionsalgebra D entsprechen genau den Isotopismen der Form (α, α, α) .

Bei der Betrachtung reeller (topologischer) Divisionsalgebren verlangt man natürlich stets, daß ein Isotopismus auch ein Homöomorphismus ist. Da stetige additive Isomorphismen zwischen reellen Vektorräumen linear sind, bestehen die, uns in dieser Arbeit interessierenden, (stetigen) Isotopismen aus Tripeln von Vektorraumisomorphismen. Sind für die reellen Divisionsalgebren D und D' Koordinaten gegeben, so bezeichnen wir das Tripel (A, B, C) der regulären Matrizen, die in diesen Koordinaten die linearen Abbildungen α, β und γ eines Isotopismus (α, β, γ) beschreiben, ebenfalls als Isotopismus von D auf D' . Beschreiben $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{R} \cup \{0\}$ und $\lambda' : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{R} \cup \{0\}$ die Linksmultiplikationen von D und von D' in Koordinaten, so ist ein Tripel (A, B, C) regulärer Matrizen genau dann ein Isotopismus von D auf D' , wenn

$$C\lambda(m) = \lambda'(Am)B$$

für alle $m \in D$ gilt.

1.30 Die Automorphismengruppe einer Ebene vom Lenz–Typ V

Wir betrachten eine Untergruppe Γ der Automorphismengruppe Σ einer zusammenhängenden kompakten Ebene \mathcal{P} vom Lenz–Typ V. Zusätzlich setzen wir voraus, daß Γ im Stabilisator Σ_{s, L_∞} der Translationsachse L_∞ und des Scherungszentrums s enthalten ist. Tatsächlich ist dies im nichtklassischen Fall jedoch keine Zusatzbedingung, da der Satz von L. A. Skornjakov & R. L. San Soucie (vgl. Hughes–Piper [73] Theorem 6.16) impliziert, daß $\Sigma = \Sigma_{s, L_\infty}$ gilt, wenn \mathcal{P} keine Moufang–Ebene ist (vgl. auch die Bemerkungen vor 1.23). Schließlich enthalte die Gruppe Γ die Translationsgruppe $T = \Sigma_{[L_\infty, L_\infty]}$ und die Scherungsgruppe $\Sigma_{[s, S]}$ für ein $S \in \mathcal{L}_s \setminus \{L_\infty\}$. Für $o \in S \setminus \{s\}$ ist $\Sigma_{[s, S]}$ ein Normalteiler von Γ_o . Ist $w \in L_\infty \setminus \{s\}$, dann ist Γ_o angesichts der Transitivität der Wirkung von $\Sigma_{[s, S]}$ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ ein semidirektes Produkt $\Gamma_o = \Sigma_{[s, S]} \rtimes \Gamma_{o, w}$. Wie für alle Translationsebenen gilt außerdem $\Gamma = T \rtimes \Gamma_o$, und wir erhalten die folgende Zerlegung:

$$\Gamma = T \rtimes (\Sigma_{[s, S]} \rtimes \Gamma_{o, w}).$$

Wenn \mathcal{P} eine Ebene der Dimension $2l$ ist, dann gilt $T \cong \mathbb{R}^{2l}$ und $\Sigma_{[s, S]} \cong \mathbb{R}^l$. Daraus folgt $\dim \Gamma = 3l + \dim \Gamma_{o, w}$, und Γ ist genau dann auflösbar, wenn $\Gamma_{o, w}$ auflösbar ist.

Wie wir in 1.24 gesehen haben, ist Γ_o genau dann zusammenhängend, wenn Γ zusammenhängend ist. Analog zeigt man unter Ausnutzung der scharfen Transitivität der Wirkung von $\Sigma_{[s, S]}$ auf $L_\infty \setminus \{s\}$, daß $\Gamma_{o, w}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn Γ_o zusammenhängend ist.

Ist \mathcal{P} die Ebene über einer reellen Divisionsalgebra $D = (\mathbb{R}^l, +, \circ)$, wobei (wie in 1.27) $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^l$ und $T_{[w]} = \mathbb{R}^l \times \{0\}$ gilt, dann wirken die Automorphismen aus dem Stabilisator $\Sigma_{o,w} = \Sigma_{o,s,w}$ per Konjugation effektiv auf $T = T_{[w]} \oplus T_{[s]}$ und induzieren dabei genau die Autotopismen von D . Zu jedem Element σ von $\Sigma_{o,s,w}$ existieren nämlich $\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma \in \text{GL}_l \mathbb{R}$ derart, daß

$$(x, y)^\sigma = (\beta_\sigma(x), \gamma_\sigma(y)) \quad \text{und} \quad z^\sigma = \alpha_\sigma(z)$$

für alle $(x, y) \in T$ und alle $z \in \Sigma_{[s,s]} \cong \mathbb{R}^l$ gilt. Das Tripel $(\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma)$ ist dann ein Autotopismus von D . Angesichts der Effektivität der Wirkung von $\Sigma_{o,s,w}$ auf T ist die Abbildung $\sigma \mapsto (\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma)$ injektiv. Ist umgekehrt (α, β, γ) ein Autotopismus von D , dann existiert ein Automorphismus σ aus $\Sigma_{o,s,w}$ mit $(\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Dabei wird die Wirkung von σ auf $T(o) = P^{L_\infty}$ durch die mit $\beta_\sigma = \beta$ und $\gamma_\sigma = \gamma$ (wie oben) beschriebene Konjugationswirkung auf T festgelegt, und die Wirkung auf $\Sigma_{[s,os]}(w) = L_\infty \setminus \{s\}$ wird durch die mit $\alpha_\sigma = \alpha$ beschriebene Konjugationswirkung von σ auf $\Sigma_{[s,os]}$ festgelegt.

1.31 Duale Ebenen

Durch Vertauschen der Rollen von Punkten und Geraden einer (topologischen) projektiven Ebene \mathcal{P} erhält man offenbar wieder eine (topologische) projektive Ebene, die zu \mathcal{P} *duale* Ebene $\mathcal{P}^* = (\mathcal{L}, P)$.⁸ Im allgemeinen sind \mathcal{P} und \mathcal{P}^* nicht isomorph, jedoch haben sie isomorphe Automorphismengruppen: Jeder Automorphismus von \mathcal{P} kann auch als Automorphismus von \mathcal{P}^* aufgefaßt werden.

Nach Definition ist die zu einer Ebene \mathcal{P} vom Lenz–Typ V duale Ebene ebenfalls vom Lenz–Typ V. Beim Dualisieren übernimmt die⁹ ursprüngliche Translationsachse die Rolle des Scherungszentrums und das Scherungszentrum von \mathcal{P} wird zur Translationsachse in \mathcal{P}^* . Entsprechend tauschen die (drei Typen von) Streckungsgruppen ihre Rollen. Der Kern von \mathcal{P}^* wird durch die Streckungsgruppen $\Sigma_{[s,W]}$ mit $W \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_s$ repräsentiert, und eine (den Kern von \mathcal{P} repräsentierende) Streckungsgruppe $\Sigma_{[o,L_\infty]}$ (mit $o \in P^{L_\infty}$) ist aus der Sicht von \mathcal{P}^* eine Gruppe mit dem Scherungszentrum von \mathcal{P}^* als Zentrum (und einer Achse, die das Scherungszentrum nicht enthält). Für die zugehörigen koordinatisierenden Divisionsalgebren D und D^* bedeutet dies, daß $N_\varrho(D) \cong N_\lambda(D^*)$, $N_\lambda(D) \cong N_\varrho(D^*)$ und $N_\mu(D) \cong N_\mu(D^*)$ gilt. Wie man sich leicht überlegt, gilt genauer: D^* ist die zu D antiisomorphe Divisionsalgebra, das heißt, ist $D = (K, +, \circ)$, so ist $D^* = (K, +, *)$ mit $a * b = b \circ a$ für alle $a, b \in K$.

1.32 Das Transponieren von Translationsebenen

Nach Buchanan–Hähl [78] S. 85, Corollary erhält man zu einer zusammenhängenden kompakten Translationsebene \mathcal{P} mit Kern \mathbb{K} und Translationsgruppe $T = \mathbb{K}^n$ eine ebenfalls zusammenhängende und kompakte Translationsebene, wenn man den Dualraum $T^\tau := (\mathbb{K}^n)^*$ der Linearformen $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ als Translationsgruppe und die Menge $\mathcal{S}^\tau := \{V^0; V \in \mathcal{S}\}$ aller Annulatoren $V^0 := \{\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*; \varphi(V) = \{0\}\}$ der Richtungskomponenten V von T als Spread auf T^τ wählt. Die zugehörige projektive Ebene \mathcal{P}^τ wird die zu \mathcal{P} *transponierte Translationsebene* genannt. Der Kern der transponierten

⁸Wir fassen hier die Punkte als Mengen von Geraden auf, indem wir jeden Punkt $p \in P$ mit dem Geradenbüschel \mathcal{L}_p der Geraden durch p identifizieren.

⁹Wir betrachten hier nur nichtklassische Ebenen, denn für klassische Ebenen ist das Dualisieren ein Isomorphismus.

Ebene \mathcal{P}^τ ist isomorph zum Kern \mathbb{K} von \mathcal{P} , und der Stabilisator eines affinen Punktes in der Automorphismengruppe von \mathcal{P} ist (als Transformationsgruppe) isomorph zum Stabilisator eines affinen Punktes in der Automorphismengruppe von \mathcal{P}^τ (vgl. [Buchanan–Hähl \[78\]](#) Proposition 2). Insbesondere ist die transponierte Ebene einer Ebene vom Lenz–Typ V ebenfalls eine Ebene vom Lenz–Typ V, wobei die Streckungsgruppen mit dem Scherungszentrum als Zentrum und die Streckungsgruppen mit einer Achse, die das Scherungszentrum enthält und von der Translationsachse verschieden ist, beim Transponieren ihre Rollen tauschen. Dies bedeutet für die koordinatisierenden Divisionsalgebren, daß der Linksnukleus und der Mittelnukleus ihre Rollen tauschen (vgl. [Buchanan–Hähl \[78\]](#) Proposition 3).

1.33 Die Ebenen über Rees–Algebren

Eine *Rees–Algebra* $\mathbb{R}_\vartheta = (\mathbb{C}^2, +, \circ)$ mit $\vartheta \in (0, \pi]$ ist die Divisionsalgebra mit der gewöhnlichen Vektoraddition $+$ auf \mathbb{C}^2 und der mit Hilfe der Multiplikation komplexer Zahlen und der Komplexkonjugation folgendermaßen definierten Multiplikation: Für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ sei

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + x_2 \overline{y_2} e^{i\vartheta}, x_1 y_2 + x_2 \overline{y_1}).$$

Für $\vartheta = \pi$ liefert diese Definition den Quaternionenkörper \mathbb{H} .

Nach [Rees \[50\]](#) sind die Rees–Algebren bis auf Isotopie genau die vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren, deren drei Nuklei jeweils mindestens zweidimensional sind (es genügt schon, daß zwei der drei Nuklei diese Eigenschaft haben, dann ist der dritte Nukleus auch mindestens zweidimensional). Mit \mathcal{R}_ϑ bezeichnen wir die Ebene über der Rees–Algebra R_ϑ (vgl. [1.27](#)). Die Ebenen \mathcal{R}_ϑ sind also bis auf Isomorphie genau die achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V, die zu jeder Achse und jedem nicht auf der Achse liegenden Zentrum eine mindestens zweidimensionale Streckungsgruppe zulassen. Läßt eine solche Ebene eine Streckungsgruppe von höherer Dimension zu, so sind alle vollen Streckungsgruppen dieser Ebene vierdimensional, und die Ebene ist isomorph zur Quaternionenebene $\mathcal{R}_\pi = \mathcal{P}_2\mathbb{H}$.

Die Ebenen \mathcal{R}_ϑ mit $0 < \vartheta \leq \pi$ sind unter den achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V bis auf Isomorphie auch dadurch charakterisiert, daß ihre Automorphismengruppe eine dreidimensionale Torusuntergruppe enthält, die zwei verschiedene, sich nicht auf der Translationsachse schneidende, Geraden fixiert. Außer im klassischen Fall (also außer im Fall $\vartheta = \pi$) hat \mathcal{R}_ϑ eine 17–dimensionale auflösbare Automorphismengruppe (siehe [Hähl \[75b\]](#) 4.3 und Satz 6.1 dieser Arbeit).

1.34 Klassifikation der Ebenen mit großen Automorphismengruppen

Der Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit mindestens 17–dimensionaler Automorphismengruppe (siehe [Hähl \[86\]](#) S. 334, Klassifikationsatz oder [Salzmann et al. \[95\]](#) 82.25) entnimmt man, daß außer den Ebenen, die isomorph zu einer Ebene \mathcal{R}_ϑ mit $0 < \vartheta \leq \pi$ sind (vgl. [1.33](#)), genau die folgenden achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V eine mindestens 17–dimensionale Automorphismengruppe haben:

Die achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit einer 18–dimensionalen Automorphismengruppe sind bis auf Isomorphie genau die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$, $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^*$ und $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^{\ast\tau}$ mit $h \in \{z \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}; \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, wobei die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ die

Ebenen vom Lenz–Typ V unter den Spin(3)–Ebenen sind (vgl. 7.4). Jede derartige Ebene $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ ist die Ebene über der Divisionsalgebra $Q_{h,\mathbb{R}} = (\mathbb{H}, +, \circ)$, deren Addition die gewöhnliche Addition auf den Quaternionen ist und deren Multiplikation mit Hilfe der Quaternionenmultiplikation folgendermaßen definiert ist (vgl. Hähl [86] Abschnitt 2 oder Salzmann et al. [95] 82.1 und 82.2): Jedes Element $x \in \mathbb{H}$ läßt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$x = p(x)h + \varphi(x) \quad \text{mit} \quad p(x) \in \text{Pu } \mathbb{H} \quad \text{und} \quad \varphi(x) \in \mathbb{R}.$$

Für $x, y \in \mathbb{H}$ setzt man damit

$$x \circ y := p(x)yh + y\varphi(x)$$

(läßt man zusätzlich $h = 1$ zu, dann erhält man so den Quaternionenkörper $Q_{1,\mathbb{R}}$). Die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ haben einen komplexen Kern und reelle Mittel- und Linksnuklei. In 3.32 werden wir sehen, daß die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe einer achtdimensionalen kompakten Ebene vom Lenz–Typ V auflösbar ist, wenn die Automorphismengruppe höchstens 16–dimensional ist. Zusammen mit der Klassifikation der Ebenen mit mindestens 17–dimensionaler Automorphismengruppe folgt daraus, daß die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ unter den achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V genau diejenigen sind, deren Kern komplex ist und deren Automorphismengruppe eine Zusammenhangskomponente hat, die nicht auflösbar ist.

Die achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit reellem Kern und 17–dimensionaler Automorphismengruppe sind bis auf Isomorphie die Ebenen vom Lenz–Typ V unter den $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen (vgl. 7.5). Dies sind die Ebenen $\mathcal{H}_{\alpha,\text{id}}$ über Divisionsalgebren $H_{\alpha,\text{id}} = (\mathbb{H}, +, \circ)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ (für $\alpha = 1$ erhält man den Quaternionenkörper), deren Addition die gewöhnliche Addition der Quaternionen ist und deren Multiplikation eine *Mutation* der Quaternionenmultiplikation ist: Für $x, y \in \mathbb{H}$ definiert man

$$x \circ y := x \text{Re}(y) + (\text{Re}(x) + \alpha \text{Pu}(x)) \text{Pu}(y)$$

(vgl. Salzmann et al. [95] 82.21 und 82.23). Alle Nuklei der Divisionsalgebren $H_{\alpha,\text{id}}$ sind reell, und zusammen mit 3.32 folgt aus Hähl [86] S. 334, Klassifikationssatz oder Salzmann et al. [95] 82.25, daß diese Ebenen genau die achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V sind, deren Streckungsgruppen sämtlich höchstens eindimensional sind und deren Automorphismengruppe eine Zusammenhangskomponente hat, die nicht auflösbar ist.

In früheren Arbeiten von H. Hähl (wie zum Beispiel in Hähl [75b] und in Hähl [84]) findet man andere Darstellungen der Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ und der $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen sowie von deren Koordinatenbereichen. Die Verbindung zwischen diesen Darstellungen und den hier angegebenen liefern Hähl [86] Abschnitt 5 und Salzmann et al. [95] 82.21.

Unter den achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V sind die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ und $\mathcal{H}_{\alpha,\text{id}}$ auch durch die (maximalen) kompakten Untergruppen in Achsenstabilisatoren charakterisiert. Ist \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Ebene vom Lenz–Typ V und sind S eine von der Translationsachse verschiedene Gerade, die das Scherungszentrum enthält, und W eine Gerade, die das Scherungszentrum nicht enthält, so ist \mathcal{P}

genau dann zu einer Ebene $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ isomorph, wenn der Kern von \mathcal{P} komplex¹⁰ ist und der Stabilisator Σ_S eine Untergruppe enthält, die zu $SU_2\mathbb{C}$ isomorph ist (siehe Hähl [86] 2.3 oder Salzmann et al. [95] 82.2). Die maximale kompakte Untergruppe der Zusammenhangskomponente $(\Sigma_{S,W})^{\mathbb{1}}$ von $\Sigma_{S,W}$ ist dann isomorph zu $U_2\mathbb{C}$ (siehe Hähl [86] 4.4 (C) oder Hähl [75b] S. 335, Klassifikationssatz (a1)). Die Ebene \mathcal{P} (vom Lenz–Typ V) ist genau dann zu einer Ebene $\mathcal{H}_{\alpha,\text{id}}$ isomorph, wenn Σ_S eine zu $SO_3\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe Φ enthält (siehe Hähl [84] 3.3 oder Salzmann et al. [95] 82.22). In dieser Situation ist die maximale kompakte Untergruppe von $(\Sigma_{S,W})^{\mathbb{1}}$ zu Φ konjugiert (siehe Hähl [84] 3.3 (iii) oder Hähl [75b] S. 335, Klassifikationssatz (b)).

1.35 Ebenen vom Lenz–Typ V mit komplexem Kern

Eine vollständige Klassifikation der achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit komplexem Kern findet man in Knarr [95] Theorem 6.6. Bis auf Isomorphie sind dies außer den Ebenen über Rees–Algebren genau die Ebenen $\mathcal{K}_{r,c}$ über Divisionsalgebren $K_{r,c}$ mit $(r, c) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}$ so, daß $\text{Im}(c) \geq 0$ und

$$x^4 + (2\text{Re}(c) - r^2)x^2 - 2rx + |c|^2 - 1 > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

gilt. Dabei ist die Addition auf $K_{r,c} = (\mathbb{C}^2, +, \circ)$ die gewöhnliche Vektoraddition auf \mathbb{C}^2 , und die Multiplikation ist mit Hilfe der Multiplikation komplexer Zahlen und der Komplexkonjugation folgendermaßen definiert: Für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ sei

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1y_1 - \overline{cx_2}y_2 - x_2y_2, \overline{x_1}y_2 + x_2y_1 + r\overline{x_2}y_2).$$

Für $r = 0$ ist die Bedingung (1) äquivalent zur Bedingung

$$\text{Im}(c) > 1 \quad \text{oder} \quad \text{Re}(c) > \sqrt{1 - \text{Im}(c)^2}.$$

Die Automorphismengruppe einer Ebene $\mathcal{K}_{r,c}$ ist genau dann 18–dimensional, wenn $r = 0$ und $\text{Im}(c) = 1$ gilt.¹¹ Nach 1.34 sind dies bis auf Isomorphie genau die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ mit $h \in \mathbb{C}$, $|h| = 1$, $\text{Re}(h) > 0$ und $\text{Im}(h) > 0$, woraus folgt, daß die zugehörigen Divisionsalgebren $K_{0,c}$ (mit $\text{Im}(c) = 1$) bis auf Isotopie genau die Divisionsalgebren $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ (mit h wie oben) sind.

Die Ebenen $\mathcal{K}_{0,c}$ mit $\text{Im}(c) \neq 1$ haben sämtlich eine 16–dimensionale Automorphismengruppe. Wir werden sehen, daß dies bis auf Isomorphie genau die achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit komplexem Kern sind, deren Automorphismengruppen eine 16–dimensionale auflösbare Zusammenhangskomponente haben (siehe 3.34).

Die übrigen Ebenen $\mathcal{K}_{r,c}$ (mit $r \neq 0$) haben sämtlich eine 15–dimensionale Automorphismengruppe. Auch die Zusammenhangskomponenten der Automorphismengruppen dieser Ebenen sind auflösbar (siehe 3.32).

¹⁰Verzichtet man auf die Voraussetzung eines komplexen Kerns, dann gibt es außerdem nur noch die drei Möglichkeiten, daß \mathcal{P} zur klassischen Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$, zu einer Ebene $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^*$ oder zu einer Ebene $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^{\ast\tau}$ isomorph ist.

¹¹Die Dimensionen der Automorphismengruppen von Ebenen $\mathcal{K}_{r,c}$ sind in Knarr [95] S. 83 ohne Beweis angegeben.

2 Ebenen mit mindestens 16–dimensionaler Automorphismengruppe

Salzmann [90] zeigt, daß jede achtdimensionale kompakte projektive Ebene mit einer mindestens 17–dimensionalen Automorphismengruppe stets eine Translationsebene, eine duale Translationsebene oder eine (verallgemeinerte) Hughes–Ebene ist (siehe zum Beispiel Salzmann et al. [95] 86.4 für eine Definition der Hughes–Ebenen). Die achtdimensionalen Hughes–Ebenen haben bis auf die klassische Quaternionenebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$ sämtlich eine 17–dimensionale Automorphismengruppe (vgl. Salzmann et al. [95] 86.35 und 86.36). Man erhält Hughes–Ebenen, wenn große halbeinfache Untergruppen in der Automorphismengruppe existieren:

2.1 Satz

Ist Δ eine mindestens 16–dimensionale zusammenhängende halbeinfache Untergruppe der Automorphismengruppe einer nichtklassischen, achtdimensionalen kompakten projektiven Ebene \mathcal{P} , dann ist $\Delta \cong \mathrm{SL}_3\mathbb{C}$, und \mathcal{P} ist eine verallgemeinerte Hughes–Ebene.

Insbesondere läßt Δ unter diesen Voraussetzungen eine (zur klassischen komplexen projektiven Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ isomorphe) Baer–Unterebene von \mathcal{P} invariant.

Beweis: Siehe Salzmann [81] Satz 2. Zur Existenz der invarianten Baer–Unterebene siehe Salzmann et al. [95] 86.33. □

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß das Fixgebilde der Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe nicht aus einer Fahne besteht, zeigt Salzmann [90], daß auch Ebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe Translationsebenen oder duale Translationsebenen sind. Wir betrachten hier noch einmal Ebenen, deren Automorphismengruppe eine mindestens 16–dimensionale zusammenhängende Untergruppe enthält, die ein Fixgebilde mit einer ungeraden Anzahl von Elementen hat. Dieser Fall wurde in Salzmann [90] unter Hinweis auf einen späteren Artikel ausdrücklich nur skizzenhaft behandelt, wobei auf einige im Verlauf der Beweise auftretende Fälle nicht näher eingegangen wurde. Ein solcher Artikel wurde jedoch nicht veröffentlicht, weshalb diese Situation hier noch einmal ausführlich untersucht werden soll.

Es wird sich herausstellen, daß eine hinreichend große Gruppe von Automorphismen, die ein Fixgebilde mit einer ungeraden Anzahl von Elementen hat, keine echte Unterebene von \mathcal{P} invariant lassen kann. Deshalb erhält man unter dieser Voraussetzung auch im Fall einer (mindestens) 17–dimensionalen Automorphismengruppe keine Hughes–Ebene, sondern es gilt der folgende Satz:

2.2 Satz

Ist \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte projektive Ebene, deren Automorphismengruppe Σ eine mindestens 16–dimensionale zusammenhängende Gruppe Δ enthält, die eine ungerade Anzahl von Elementen in $P \cup \mathcal{L}$ fixiert, dann ist \mathcal{P} oder die zu \mathcal{P} duale Ebene eine Translationsebene.

Im Anschluß an eine Betrachtung der achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe werden die Ebenen aus Satz 2.2 für den Fall $\dim \Sigma = 16$ in 7.11 vollständig klassifiziert.

Generalvoraussetzung

Im folgenden sei \mathcal{P} stets eine achtdimensionale kompakte projektive Ebene.

Dimensionsbeschränkungen

Die Transitivität der Translationsgruppe in der Situation von Satz 2.2 wird im wesentlichen durch die Dimension der Automorphismengruppe erzwungen. Daran orientiert sich auch der Beweis. In diesem Abschnitt werden obere Schranken für die Dimensionen von Automorphismengruppen mit gewissen Eigenschaften angegeben. Zumeist werden die Gruppen dabei durch ihr Fixgebilde charakterisiert. Da durch Bildung des topologischen Abschlusses (bezüglich der kompakt-offenen Topologie) sich das Fixgebilde einer Untergruppe von Σ nicht ändert, können wir in den Beweisen für Aussagen zu oberen Dimensionsschranken stillschweigend davon ausgehen, daß die betrachteten Gruppen abgeschlossen sind (zum Beispiel um auf Lokalkompaktheit für die Anwendung der Dimensionsformel [Anhang: A.9] schließen zu können, vgl. [Anhang: A.1]).

Zunächst betrachten wir Automorphismengruppen, die Elationsgruppen normalisieren (vgl. Salzmann [90] (D)):

2.3 Lemma

Das Fixgebilde \mathcal{F} der Untergruppe Λ von Σ sei eine Unterebene von \mathcal{P} . Existiert eine Gerade $W \in \mathcal{L}$ und ein Punkt $v \in W$ derart, daß die Elationsgruppe $\Sigma_{[v,W]}$ eine (unter Konjugation) Λ -invariante Untergruppe Θ enthält mit $\Theta \cong \mathbb{R}^q$ für ein $q \in \{1, 2, 3\}$ und mit $C_\Theta \Lambda \neq \{\text{id}_\mathcal{P}\}$, dann gilt $\dim \Lambda \leq 4 - q$.

Beweis: Für die Fälle $q \in \{2, 3\}$ findet man den Beweis in Salzmann [81] S. 346, Lemma und §1 (1.3). Da der Fall $q = 2$ dort sehr knapp behandelt wird, betrachten wir diesen hier zusammen mit dem Fall $q = 1$ noch einmal ausführlicher.

Die Gruppe Λ wirkt per Konjugation additiv und stetig und somit reell-linear auf der Vektorgruppe Θ , weshalb $C_\Theta \Lambda$ ein reeller Teilraum von Θ ist. Da die nichttriviale Vektorgruppe $C_\Theta \Lambda$ frei und stetig auf $F^W := (\text{Fix}_\mathcal{P} \Lambda) \setminus W$ wirkt, ist das Fixgebilde \mathcal{F} von Λ also eine zusammenhängende Unterebene von \mathcal{P} . Nach [Anhang: C.5] können wir annehmen, daß \mathcal{F} zweidimensional ist und $q = 2$ gilt. Es ist dann $\dim \Lambda \leq 2$ zu zeigen. Dazu sei $a \in F^W$. Die Bahn $\Theta(a)$ ist eine Teilmenge der Gerade av , und das Erzeugnis $\mathcal{Q} := \langle F^W \cup \Theta(a) \rangle$ ist wegen $\dim \Theta(a) = \dim \Theta = 2$ eine mindestens vierdimensionale Unterebene von \mathcal{P} . Wegen $\Theta^\Lambda = \Theta$ und $a \in \text{Fix}_\mathcal{P} \Lambda$ sind die Bahn $\Theta(a)$ und damit auch die Ebene \mathcal{Q} invariant unter Λ . Ist \mathcal{Q} vierdimensional und damit eine Baer-Unterebene von \mathcal{P} , dann ist $\dim \Lambda \leq 1$ [Anhang: C.4]. Wir können also annehmen, daß $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ gilt. Daraus folgt zunächst, daß Λ effektiv auf Θ wirkt. Ist \mathcal{F} in einer Baer-Unterebene von \mathcal{P} enthalten (die nicht notwendigerweise von Λ invariant gelassen werden muß), dann ist Λ kompakt [Anhang: C.4] und somit angesichts der effektiven Wirkung auf $\Theta \cong \mathbb{R}^2$ zu einer Untergruppe von $\text{SO}_2\mathbb{R}$ äquivalent, also insbesondere höchstens eindimensional. Wenn \mathcal{F} in keiner Baer-Unterebene von \mathcal{P} enthalten ist, dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \langle F^W \cup \{x\} \rangle$ für jedes Element $x \in \Theta(a) \setminus F^W$, was bedeutet, daß Λ frei auf der zweidimensionalen Menge $\Theta(a) \setminus F^W$ wirkt, woraus $\dim \Lambda \leq 2$ folgt. \square

Dies läßt sich auf Stabilisatoren ausgearteter Vierecke anwenden:

2.4 Folgerung

Die zusammenhängende Untergruppe Ω von Σ fixiere drei Punkte $a, u, v \in P$, die nicht auf einer Gerade liegen, und einen weiteren Punkt $b \in P \setminus av$. Existiert eine Ω -invariante Elationsgruppe $\Theta \leq \Sigma_{[v,uv]}$ mit $\Theta \cong \mathbb{R}^q$ für ein $q \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt $\dim \Omega \leq 4$.

Beweis: Wir wählen einen Punkt $c \in \Theta(a) \setminus \{a\}$ und setzen $\Lambda := \Omega_c^{\mathbb{1}}$. Da die drei verschiedenen Punkte a, c, v in der Gerade av enthalten sind und die beiden verschiedenen Punkte b, u nicht in dieser Gerade enthalten sind, fixiert Λ mit den fünf Punkten a, b, c, u, v in jedem Fall ein echtes Viereck und damit eine Unterebene von \mathcal{P} . Die Freiheit der Wirkung von Θ auf $P \setminus uv$ impliziert, daß genau ein Element $\vartheta \in \Theta$ mit $\vartheta(a) = c$ existiert. Dieses wird von der Θ normalisierenden und die Punkte a und c fixierenden Gruppe Λ zentralisiert. Nach 2.3 gilt somit $\dim \Lambda \leq 4 - q$. Die Θ normalisierende und a fixierende Gruppe Ω läßt die q -dimensionale Bahn $\Theta(a)$ invariant, und wir erhalten $\dim \Omega = \dim \Omega_c + \dim \Omega(c) \leq \dim \Lambda + q \leq 4$. \square

Enthält eine Vektorgruppe von Elationen zu einer festen Achse W Elationen mit verschiedenen Richtungen, dann erhalten wir die folgenden Dimensionsabschätzungen für Untergruppen von Σ , die im Stabilisator der Achse W enthalten sind:

2.5 Lemma

Es sei Δ eine Untergruppe des Stabilisators Σ_W einer Gerade $W \in \mathcal{L}$. Außerdem sei $\Theta \cong \mathbb{R}^q$ eine nichttriviale Vektoruntergruppe der Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$. Sind $a, b, c \in P$ drei nicht kollineare Punkte derart, daß $b, c \in \Theta(a)$ gilt und Θ invariant unter der Konjugationswirkung von $\Delta_a^{\mathbb{1}}$ ist, dann gilt $\dim \Delta_{a,b,c} \leq 3$ und $\dim \Delta_a \leq 3 + 2q$.

Beweis: Da Δ die Gerade W fixiert, enthält die Fixpunktmenge $F := \text{Fix}_P \Delta_{a,b,c}$ außer b und c auch die beiden Punkte $ab \wedge W$ und $ac \wedge W$. Je drei dieser vier Punkte sind nicht kollinear, woraus folgt, daß F die Punktmenge einer abgeschlossenen Unterebene von \mathcal{P} ist. Auf der Bahn $\Theta(a)$ wirkt die Elationsgruppe Θ scharf transitiv, weshalb die Wirkung von Δ_a auf $\Theta(a)$ äquivalent zur Konjugationswirkung von Δ_a auf Θ ist [Anhang: A.7]. Deshalb wird das Element $\vartheta \in \Theta$ mit $\vartheta(a) = b$ von $\Delta_{a,b,c}$ zentralisiert. Nun bewirkt Δ_a per Konjugation reell-lineare Automorphismen der Gruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^q$. Also zentralisiert $\Delta_{a,b,c}$ die Einparametergruppe Π durch ϑ in Θ . Folglich enthält F die zusammenhängende Menge $\Pi(a)$, weshalb F nicht total unzusammenhängend und somit mindestens zweidimensional ist, womit wir $\dim \Delta_{a,b,c} \leq 3$ erhalten [Anhang: C.5]. Da sowohl $\Delta_{a,b}(c)$ als auch $\Delta_a(b)$ in der q -dimensionalen Bahn $\Theta(a)$ enthalten sind, schließen wir daraus $\dim \Delta_a = \dim \Delta_{a,b,c} + \dim \Delta_{a,b}(c) + \dim \Delta_a(b) \leq 3 + 2q$. \square

In Salzmann [90] (E') ist der Beweis für die folgende Aussage über den Stabilisator einer Fahne ausgeführt:

2.6 Lemma

Es seien $W \in \mathcal{L}$, $v \in W$ und $\Delta \leq \Sigma_{v,W}$. Läßt Δ eine echte Unterebene von \mathcal{P} invariant, dann gilt $\dim \Delta \leq 11$. \square

Wenn man nicht wie in 2.6 verlangt, daß die Gruppe Δ sowohl einen Punkt als auch eine Gerade fixiert, dann ergibt sich die folgende Schranke für die Dimension von Δ :

2.7 Folgerung

Fixiert eine Untergruppe Δ von Σ einen Punkt oder eine Gerade der Ebene \mathcal{P} und läßt Δ gleichzeitig eine echte abgeschlossene Unterebene $\mathcal{F} = (F, \mathcal{L}_{\mathcal{F}})$ von \mathcal{P} invariant, dann gilt $\dim \Delta \leq 13$.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß Δ eine Gerade W fixiert. Für alle $v \in W$ zeigt 2.6 dann $\dim \Delta_v \leq 11$. Als echte abgeschlossene Unterebene von \mathcal{P} ist \mathcal{F} eine null-, zwei- oder vierdimensionale kompakte Ebene.

Falls ein Punkt $v \in F \cap W$ existiert, folgt $\dim \Delta(v) \leq 2$ aus $\Delta(F \cap W) \subseteq F \cap W$ und $\dim(F \cap W) \leq 2$.

Ist $F \cap W = \emptyset$, dann kann \mathcal{F} keine Baer-Unterebene von \mathcal{P} sein, woraus $\dim \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \leq 2$ folgt. Die injektive und stetige Abbildung $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \rightarrow W : L \mapsto L \wedge W$ ist ein Homöomorphismus der kompakten Geradenmenge $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ auf ihr Bild $V := \{L \wedge W ; L \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}\}$, weshalb V eine höchstens zweidimensionale Δ -invariante Teilmenge der Gerade W ist. Für $v \in V$ gilt deshalb $\dim \Delta(v) \leq 2$.

In beiden Fällen gilt somit $\dim \Delta = \dim \Delta_v + \dim \Delta(v) \leq 13$. □

Im Fall einer ungeraden Anzahl von Fixelementen vereinfacht sich der Beweis der Aussage Salzmans [90] (2):

2.8 Lemma

Ist Δ eine Untergruppe von Σ , die eine Antifahne fixiert und deren Fixgebilde in $P \cup \mathcal{L}$ insgesamt eine ungerade Anzahl von Elementen enthält, dann gilt $\dim \Delta \leq 11$.

Beweis: Es sei $(a, W) \in P \times \mathcal{L}$ eine Antifahne in $\text{Fix}_P \Delta \times \text{Fix}_{\mathcal{L}} \Delta$. Da $\text{Fix}_P \Delta \cup \text{Fix}_{\mathcal{L}} \Delta$ eine ungerade Anzahl von Elementen enthält, existiert ein weiterer Fixpunkt oder eine weitere Fixgerade. Mit einem weiteren Fixpunkt wird auch die Verbindungsgerade dieses Punktes mit a fixiert. In jedem Fall existiert also eine weitere Fixgerade. Der Schnittpunkt u dieser Fixgerade mit W wird dann ebenfalls von Δ fixiert. Außer den vier Fixelementen a, u, au und W muß das Fixgebilde mindestens noch ein weiteres Element enthalten.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß Δ einen weiteren Punkt v auf au oder auf W fixiert. Der Stabilisator Δ_w eines Punktes $w \in W \setminus \{u, v\}$ fixiert dann vier Punkte, von denen drei auf einer Gerade liegen und einer außerhalb dieser Gerade liegt. Deshalb ist $\dim \Delta_w \leq 7$ [Anhang: C.6]. Da W eine Fixgerade von Δ ist, gilt außerdem $\Delta(w) \subseteq W$, woraus $\dim \Delta(w) \leq 4$ und somit $\dim \Delta = \dim \Delta_w + \dim \Delta(w) \leq 11$ folgt.

Enthält das Fixgebilde keinen weiteren Punkt auf au oder auf W , dann muß eine dritte Gerade des Büschels \mathcal{L}_a fixiert werden. In diesem Fall betrachten wir eine Gerade $L \in \mathcal{L}_a \setminus \{au\}$. Die zu [Anhang: C.6] duale Aussage zeigt dann $\dim \Delta_L \leq 7$, und wegen $\Delta(L) \subseteq \mathcal{L}_a$ und $\dim \mathcal{L}_a \leq 4$ folgt $\dim \Delta = \dim \Delta_L + \dim \Delta(L) \leq 11$. □

Reelle Vektoruntergruppen und Elationsgruppen

In der uns interessierenden Situation sind zusammenhängende lokalkompakte abelsche Normalteiler stets reelle Vektorgruppen:

2.9 Lemma

Es sei Θ ein zusammenhängender lokalkompakter abelscher Normalteiler einer in Σ enthaltenen zusammenhängenden Lie-Gruppe Δ . Fixiert Δ keine Antifahne und läßt Δ keine Baer-Unterebene invariant, dann ist Θ zu einer reellen Vektorgruppe \mathbb{R}^t isomorph.

Beweis: Nach dem Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa [Anhang: A.6] ist Θ das direkte Produkt einer reellen Vektorgruppe \mathbb{R}^t und einer zusammenhängenden kompakten abelschen Gruppe Φ . Letztere ist als Untergruppe der Lie-Gruppe Δ eine Torusgruppe [Anhang: B.6], die als Normalteiler im Zentrum der zusammenhängenden Gruppe Δ liegt [Anhang: B.8]. Die Fixgebilde der Elemente von Φ werden somit von Δ invariant gelassen. Da Δ keine Antifahne fixiert, enthält Φ also keine (nichttriviale) Homologie, und da Δ keine Baer-Unterebene invariant läßt, enthält Φ keine planare Involution. Damit enthält Φ gar keine Involution (vgl. 1.21), und es gilt $\Phi = \{\text{id}_{\mathcal{P}}\}$. \square

Den Beweis dafür, daß in der uns interessierenden Situation jeder minimale Normalteiler, der zu einer reellen Vektorgruppe isomorph ist, eine Elationsgruppe ist, findet man in Salzmann [90] (4):

2.10 Lemma

Die Ebene \mathcal{P} sei nicht klassisch, und Δ sei eine mindestens 16-dimensionale zusammenhängende Untergruppe von Σ . Enthält die Menge $\text{Fix}_{\mathcal{L}} \Delta$ genau ein Element W und ist Θ ein zu einer reellen Vektorgruppe isomorpher minimaler Normalteiler von Δ , dann ist $\Theta \leq \Delta_{[W,W]}$, oder es existiert ein $v \in W$ mit $\Theta \leq \Delta_{[v,v]}$. \square

Wir betrachten nun Vektorgruppen von Elationen.

2.11 Lemma

Es seien $W \in \mathcal{L}$ und Θ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe der Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$ derart, daß Θ nicht transitiv auf P^W wirkt. Existiert kein Punkt $z \in W$ mit $\dim \Theta_{[z]} \leq 2$, dann existiert ein Punkt $v \in W$ mit $\dim \Theta_{[v]} = 4$ und $\dim \Theta_{[z]} = 3$ für alle $z \in W \setminus \{v\}$. Dieser Punkt v ist ein Fixpunkt des Normalisators $N_{\Sigma_W} \Theta$ von Θ in Σ_W .

Beweis: Die zusammenhängende Elationsgruppe Θ enthält nach Voraussetzung zu jedem Punkt $z \in W$ eine Elation mit Zentrum z . Sie ist deshalb zur Vektorgruppe \mathbb{R}^t isomorph, wobei die Richtungskomponenten $\Theta_{[z]}$ mit $z \in W$ Teilräume sind, die sich paarweise trivial schneiden [Anhang: C.12]. Da Θ nicht transitiv auf P^W wirkt, ist $\dim \Theta < 8$. Deshalb existiert höchstens ein $v \in W$ mit $\dim \Theta_{[v]} = 4$. Es sei also $v \in W$ mit $\dim \Theta_{[z]} \leq 3$ für alle $z \in W \setminus \{v\}$. Andererseits gilt nach Voraussetzung $\dim \Theta_{[z]} > 2$ für alle $z \in W$, und wir schließen, daß $\dim \Theta_{[z]} = 3$ für alle $z \in W \setminus \{v\}$ gilt. Nach [Anhang: C.13] ist dann $\Theta_{[v]}$ transitiv, also $\dim \Theta_{[v]} = 4$. Der Punkt v muß ein Fixpunkt von $N_{\Sigma_W} \Theta$ sein, denn für alle $\sigma \in N_{\Sigma_W} \Theta$ gilt $\Theta_{[\sigma(v)]} = (\Theta_{[v]})^\sigma$ und $\dim(\Theta_{[v]})^\sigma = \dim \Theta_{[v]}$. \square

Zwischen der Dimension einer Elationsgruppe und den Dimensionen ihrer Richtungskomponenten besteht der folgende Zusammenhang:

2.12 Lemma

Es sei Θ eine lokalkompakte Gruppe von Elationen mit einer gemeinsamen Achse W . Für alle $z \in W$ gilt dann $\dim \Theta - \dim \Theta_{[z]} \leq 4$.

Beweis: Für $L \in \mathcal{L}_z$ ist $\Theta_{[z]} = \Theta_L$ und $\Theta(L) \subseteq \mathcal{L}_z$. Daraus schließen wir $\dim \Theta - \dim \Theta_{[z]} = \dim \Theta - \dim \Theta_L = \dim \Theta(L) \leq \dim \mathcal{L}_z = 4$. \square

Damit folgt, daß Elationsgruppen, die mindestens fünfdimensional sind, keine trivialen Richtungskomponenten haben und genau von den Elationen mit derselben Achse zentralisiert werden:

2.13 Lemma

Es sei $W \in \mathcal{L}$. Ist Θ eine mindestens fünfdimensionale lokalkompakte Untergruppe der Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$, dann gilt $C_{\Sigma_W} \Theta = \Sigma_{[W,W]}$ und $\dim \Theta_{[z]} \geq 1$ für alle $z \in W$.

Beweis: Für $z \in W$ gilt $\dim \Theta_{[z]} \geq \dim \Theta - 4$ nach 2.12. Im hier betrachteten Fall bedeutet dies $\dim \Theta_{[z]} \geq 1$. Insbesondere enthält $\Sigma_{[W,W]}$ Elationen mit verschiedenen Zentren. Deshalb ist $\Sigma_{[W,W]}$ abelsch [Anhang: C.9], was bedeutet, daß $\Sigma_{[W,W]} \subseteq C_{\Sigma} \Theta$ gilt. Ist $\sigma \in C_{\Sigma_W} \Theta \setminus \{\text{id}_{\mathcal{P}}\}$, dann fixiert σ das Zentrum jeder Elation aus Θ . Jedes Element $z \in W$ ist wegen $\dim \Theta_{[z]} \geq 1$ das Zentrum eines Elements aus Θ , was bedeutet, daß W eine Achse von σ ist. Da σ und Θ sich zentralisieren, fixiert Θ das Zentrum z von σ , woraus $z \in \text{Fix}_{\mathcal{P}} \Theta = W$ folgt. Somit ist σ selbst eine Elation mit Achse W . \square

Das folgende Lemma beschreibt die Struktur einer Gruppe affiner Automorphismen von \mathcal{P} , die einen mindestens fünfdimensionalen minimalen Normalteiler in ihrer Translationsgruppe enthält.

2.14 Lemma

Es seien W eine Gerade in \mathcal{P} und Δ eine im Stabilisator Σ_W enthaltene zusammenhängende Lie-Gruppe¹² mit $16 \leq \dim \Delta \leq 18$. Wir betrachten eine Levi-Zerlegung $\Delta = \Psi \cdot \Omega$, wobei $\Omega = \sqrt{\Delta}$ das auflösbare Radikal und Ψ ein halbeinfaches Levi-Komplement (von Ω) in Δ seien. Des Weiteren sei Θ eine minimale Δ -invariante reelle Vektorgruppe in der Elationsgruppe $T := \Delta_{[W,W]}$. Ist $\dim T \leq 6$ und $\dim \Theta \geq 5$, dann ist Ψ fasteinfach und wirkt per Konjugation effektiv auf Θ . Dabei gilt $\dim \Theta = 5$ und $\dim \Psi = 10$, oder es gilt $\dim \Theta = 6$ und $\dim \Psi = 8$. Für die per Konjugation induzierte Wirkung auf Θ ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

- (i) Im Fall $\dim \Theta = 5$ bewirkt Ω auf $\Theta \cong \mathbb{R}^5$ nur Skalarmultiplikationen mit reellen Faktoren und Ψ wirkt reell-irreduzibel und nicht komplex-linear.
- (ii) Im Fall $\dim \Theta = 6$ bewirkt Ω auf $\Theta \cong \mathbb{C}^3$ die volle Gruppe der Skalarmultiplikationen mit komplexen Faktoren und Ψ wirkt komplex-linear und irreduzibel.

¹²Nach 1.22 genügt es angesichts der Dimension von Δ , zu verlangen, daß Δ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von Σ_W ist.

Beweis: Nach 2.13 ist T der Zentralisator von Θ in Δ . Deshalb induziert die Konjugation in Δ eine effektive reell-lineare Wirkung von $\tilde{\Delta} = \Delta/T$ auf der reellen Vektorgruppe Θ . Die Minimalität von Θ erzwingt die Irreduzibilität dieser Wirkung.

Die Faktorgruppe $\tilde{\Omega} := (\Omega \cdot T)/T$ ist als stetiges homomorphes Bild von Ω eine zusammenhängende auflösbare Untergruppe von $\tilde{\Delta}$, und $\tilde{\Psi} := (\Psi \cdot T)/T$ ist eine halbeinfache Lie-Untergruppe von $\tilde{\Gamma}$ (man beachte, daß $\mathfrak{l}((\Psi \cdot T)/T) \cong (\mathfrak{l}\Psi \oplus \mathfrak{l}T)/\mathfrak{l}T$ gilt). Wegen $\Delta = \Psi \cdot \Omega$ ist $\tilde{\Delta} = \tilde{\Psi} \cdot \tilde{\Omega}$, und eine Betrachtung der Lie-Algebra $\mathfrak{l}\tilde{\Delta} \cong \mathfrak{l}\Delta/\mathfrak{l}T = (\mathfrak{l}\Psi \oplus \mathfrak{l}\Omega)/\mathfrak{l}T \cong \mathfrak{l}\Psi \oplus (\mathfrak{l}\Omega/\mathfrak{l}T)$ zeigt, daß $\tilde{\Psi} \cdot \tilde{\Omega}$ eine Levi-Zerlegung von $\tilde{\Delta}$ ist [Anhang: B.9]. Angesichts der Struktur irreduzibler linearer Gruppen [Anhang: B.15] gilt dabei $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Delta})'$ und $\tilde{\Omega} = (C\tilde{\Delta})^{\parallel}$ sowie $\dim \tilde{\Omega} = \dim C\tilde{\Delta} \leq 2$. Mit $\dim T \leq 6$ erhalten wir $\dim \Omega \leq \dim \tilde{\Omega} + \dim T \leq 8$, was zusammen mit $\dim \Delta \geq 16$ impliziert, daß $\dim \Psi = \dim \Delta - \dim \Omega \geq 8$ gelten muß. Da T ein abelscher abgeschlossener Normalteiler von Δ ist [Anhang: C.8], muß $\Psi \cap T$ im diskreten Zentrum von Ψ enthalten sein und damit andererseits $\dim \Psi \leq 13$ gelten, denn es ist $\dim \Delta \leq 18$ und $\dim T \geq \dim \Theta \geq 5$.

Die Wirkung von Ψ auf Θ ist effektiv, das heißt, es gilt sogar $\Psi \cap T = \{\text{id}_P\}$. Wäre nämlich $\text{id}_P \neq \tau \in \Psi \cap T \subseteq C\Psi$, dann müßte Ψ das Zentrum z von τ fixieren, was bedeuten würde, daß Ψ und damit auch $\tilde{\Psi}$ die gesamte Richtungskomponente $\Theta_{[z]}$ invariant ließen. Aufgrund der Struktur irreduzibler linearer Gruppen [Anhang: B.15] müßte die Dimension von Θ gerade sein und $\dim \Theta_{[z]} = \dim \Theta/2$ gelten. Also wäre $\dim \Theta = 6$ und $\dim \Theta_{[z]} = 3$. Die halbeinfache Gruppe Ψ würde dann den achtdimensionalen halbeinfachen Kopf $SL_3\mathbb{R}$ von $GL_3\mathbb{R}$ überlagern. Es ergäbe sich $C\Psi \cong \mathbb{Z}_2$, und τ wäre eine involutorische Elation, was unmöglich ist [Anhang: C.10].

Wir betrachten zunächst den Fall, daß Ψ nicht komplex-linear auf Θ wirkt. In diesem Fall bewirkt $C\tilde{\Delta}$ auf Θ nur reelle skalare Multiplikationen. Da $\tilde{\Delta}$ reell-irreduzibel auf Θ wirkt, müssen dann $(\tilde{\Delta})'$ und damit auch $\tilde{\Psi}$ irreduzibel auf Θ wirken.

Um zu zeigen, daß Ψ fasteinfach ist, nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist Ψ nach [Anhang: B.26] isomorph zum direkten Produkt $SL_2\mathbb{R} \times SL_3\mathbb{R}$, und die Wirkung von Ψ auf Θ induziert eine Darstellung, die quasi-äquivalent zur Tensorprodukt-Darstellung der gewöhnlichen Darstellungen von $SL_2\mathbb{R}$ in $GL(\mathbb{R}^2)$ und von $SL_3\mathbb{R}$ in $GL(\mathbb{R}^3)$ ist. Das Element $(-\mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3) \in SL_2\mathbb{R} \times SL_3\mathbb{R}$ bewirkt auf $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$ die skalare Multiplikation mit -1 . Die diesem Element entsprechende Involution ω in Ψ fixiert deshalb alle Zentren von Elementen aus Θ . Nach 2.13 fixiert ω also alle Punkte von W und ist deshalb eine Homologie mit einem Zentrum $a \in P^W$ (vgl. 1.21). Dem Element

$$(\mathbb{I}_2, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}) \in SL_2\mathbb{R} \times SL_3\mathbb{R}$$

entspricht eine weitere Involution $\beta \in \Psi$. Auf dem $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ entsprechenden vierdimensionalen Teilraum Ξ von Θ bewirkt β die skalare Multiplikation mit -1 . Da die Richtungskomponenten von Θ höchstens dreidimensional sind, schneidet Ξ mehr als zwei Richtungskomponenten von Θ . Diese Richtungskomponenten werden alle von β invariant gelassen, woraus folgt, daß β die zugehörigen Zentren auf W fixiert. Außerdem fixiert β das Zentrum a von ω , denn ω wird von β zentralisiert. Da es keine kommutierenden involutorischen Homologien mit gleichem Zentrum und gleicher Achse

geben kann (siehe 1.21), muß das Fixgebilde von β eine Baer–Unterebene \mathcal{B} von \mathcal{P} sein. Die zu $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe H von Ψ , die der Gruppe

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} ; A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \right\}$$

entspricht, zentralisiert β und wirkt somit auf \mathcal{B} . Da $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ fasteinfach und nicht kompakt ist und das zweielementige Zentrum der einzige Normalteiler von $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ ist (vgl. Hein [90] S. 25, Corollary und S. 28, Satz 12), muß H dann aber fast effektiv auf \mathcal{B} wirken [Anhang: C.4]. Dies ist unmöglich, denn jede (zusammenhängende lokalkompakte) halbeinfache Untergruppe der Automorphismengruppe einer vierdimensionalen kompakten projektiven Ebene ist fasteinfach [Anhang: C.7].

Wirkt Ψ komplex–linear auf Θ , dann muß die reelle Dimension von Θ gerade sein, also $\Theta \cong \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$ gelten. Da in diesem Fall echte Ψ –invariante Teilräume von Θ nach [Anhang: B.15] nur reell dreidimensional und somit keine komplexen Teilräume von Θ sein können, muß Ψ komplex–irreduzibel auf Θ wirken. Außerdem muß Ψ auch in diesem Fall fasteinfach sein, denn eine effektive (und irreduzible) Darstellung eines Produkts von mindestens zwei fasteinfachen Lie–Gruppen kann (als Tensorprodukt–Darstellung, vgl. die Bemerkungen vor [Anhang: B.19]) nicht dreidimensional sein.

Der Tabelle [Anhang: B.21] über die fasteinfachen Lie–Gruppen und ihre irreduziblen reellen Darstellungen können wir nun die folgenden Informationen entnehmen: Die Dimensionsbeschränkung $8 \leq \dim \Psi \leq 13$ erzwingt $\dim \Psi \in \{8, 10\}$, wobei $\dim \Psi = 8$ (und $\dim \Theta = 6$) gelten muß, falls Ψ komplex–linear auf Θ wirkt, und andernfalls entweder $\dim \Psi = 8$ und $\dim \Theta = 6$ oder $\dim \Psi = 10$ und $\dim \Theta = 5$ gelten muß.

Ist $\dim \Psi = 8$, dann folgt

$$\dim \tilde{\Omega} = \dim \tilde{\Delta} - \dim \tilde{\Psi} = \dim \Delta - \dim T - \dim \Psi \geq 2.$$

In diesem Fall bewirkt Ω auf Θ die volle Gruppe der komplexen skalaren Multiplikationen. Daraus folgt, daß die $\tilde{\Omega} = (\mathrm{C}\tilde{\Delta})^{\parallel}$ zentralisierende Gruppe $\tilde{\Psi}$ (und damit auch Ψ) komplex–linear auf Θ wirkt. \square

Operation mit Fixpunkten

Es sei nun Δ eine mindestens 16–dimensionale zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe des Stabilisators $\Sigma_{u,v}$ zweier verschiedener Punkte u und v aus P . Die Verbindungsgerade uv dieser beiden Punkte sei mit W bezeichnet. Aus Dimensionsgründen ist Δ eine Lie–Gruppe (vgl. 1.22). Man beachte, daß dies für die Beweise von 2.18, 2.19 und 2.21 zur Anwendung des Lemmas über Homologien und Elationen [Anhang: C.14] sichergestellt sein muß. Zur Abkürzung schreiben wir T für die Elationsgruppe $\Delta_{[W,W]}$.

Für die folgenden beiden Aussagen muß eigentlich nicht vorausgesetzt werden, daß Δ neben dem Punkt u auch noch den Punkt v fixiert. Außerdem könnten wir im folgenden Lemma auch auf die Voraussetzung verzichten, daß W von Δ fixiert wird.

2.15 Lemma

Es seien $L \in \mathcal{L}_u$ und $a \in L \setminus \{u\}$. Ist $\dim \Delta_{a,b} \leq 4$ für alle $b \in L \setminus \{a, u\}$, dann ist L zur vierdimensionalen Sphäre \mathbb{S}_4 homöomorph, und Δ_L^{\parallel} wirkt zweifach transitiv auf $L \setminus \{u\}$.

Beweis: Aus $\dim \Delta_{a,b} \leq 4$, $\dim \Delta \geq 16$ und $\dim \Delta(a) \leq \dim P = 8$ folgt

$$\dim \Delta_a(b) = \dim \Delta - \dim \Delta(a) - \dim \Delta_{a,b} \geq 4.$$

Da u von Δ fixiert wird, gilt $\Delta_a(b) \subseteq L$, und wir erhalten $\dim \Delta_a(b) = 4$. Dies gilt für alle b aus der zusammenhängenden vierdimensionalen Menge $L \setminus \{a, u\}$, woraus wir mit [Anhang: C.1] schließen, daß die in Δ_L enthaltene Gruppe Δ_a transitiv auf $L \setminus \{a, u\}$ wirkt und daß L zu \mathbb{S}_4 homöomorph ist. Weiterhin gilt

$$\dim \Delta_b(a) = \dim \Delta - \dim \Delta(b) - \dim \Delta_{a,b} \geq 4.$$

Insbesondere wird a wegen $\Delta_b \leq \Delta_L$ von Δ_L bewegt. Insgesamt bedeutet dies, daß Δ_L zweifach transitiv auf $L \setminus \{u\}$ wirkt. Mit [Anhang: A.11] folgt, daß dies auch schon für die Zusammenhangskomponente $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ gilt (man beachte, daß $\Delta_p^{\mathbb{1}} \leq \Delta_L^{\mathbb{1}}$ und $L \setminus \{p, u\} \approx \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ für alle $p \in L \setminus \{u\}$ gilt). \square

Das folgende Lemma ist bei der Anwendung der zu [Anhang: C.14] dualen Aussage über Homologien und Elationen nützlich. Hier muß Δ die Gerade W fixieren, während der Punkt v auch bewegt werden dürfte.

2.16 Lemma

Existieren zu jeder Gerade $L \in \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$ Punkte $a, b \in L \setminus \{u\}$ mit $\dim \Delta_{a,b} \leq 4$, dann wirkt Δ transitiv auf $\mathcal{L}_u \setminus \{W\}$.

Beweis: Wegen $\Delta_{L,a} = \Delta_a$ und $\Delta_L(a) \subseteq L$ sowie $\Delta_a(b) \subseteq L$ folgt

$$\dim \Delta_L = \dim \Delta_a + \dim \Delta_L(a) = \dim \Delta_{a,b} + \dim \Delta_a(b) + \dim \Delta_L(a) \leq 12$$

aus $\dim \Delta_{a,b} \leq 4$ (und $\dim L \leq 4$). Angesichts $\dim \Delta \geq 16$ und $\Delta(L) \subseteq \mathcal{L}_u$ ergibt sich daraus $4 \geq \dim \Delta(L) = \dim \Delta - \dim \Delta_L \geq 4$. Die zu [Anhang: C.1] duale Aussage zeigt dann, daß $\Delta(L)$ eine offene Teilmenge des zur Sphäre \mathbb{S}_4 homöomorphen Geradenbüschels \mathcal{L}_u ist. Da dies für alle Geraden L aus der zusammenhängenden Menge $\mathcal{L}_u \setminus \{W\}$ gilt, liefert dies die Behauptung. \square

2.17 Lemma

Es sei $\Gamma := \Delta_L^{\mathbb{1}}$ für eine Gerade $L \in \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$. Enthält die Richtungskomponente $T_{[v]}$ eine Γ -invariante reelle Vektorgruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^q$ mit $q \in \{1, 2, 3\}$, dann enthält jeder Stabilisator Γ_a eines Punktes $a \in L \setminus \{u\}$ eine Spiegelung, deren Achse eine der beiden Geraden av oder W ist, und die Wirkung von Γ auf L ist nicht effektiv.

Beweis: Wir betrachten die Faktorgruppe $\tilde{\Gamma} := \Gamma/\Gamma_{[L]}$ von Γ nach dem Ineffektivitätskern der Wirkung von Γ auf L . Nach [Anhang: A.10] und 2.4 gilt $\dim \Gamma_{a,b} = \dim (\Gamma_{a,b})^{\mathbb{1}} \leq 4$ für alle $a \in L \setminus \{u\}$ und $b \in L \setminus \{a, u\}$, und mit 2.15 folgt, daß L homöomorph zur Sphäre \mathbb{S}_4 ist und Γ zweifach transitiv auf $L \setminus \{u\}$ wirkt. Da $L \setminus \{u\}$ nicht kompakt ist, existiert somit nach [Anhang: B.11] in der effektiv auf L wirkenden Gruppe $\tilde{\Gamma}$ eine normale Vektorgruppe $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}^4$, die scharf transitiv auf $L \setminus \{u\}$ wirkt. Die Auswertungsabbildung $\mathcal{T} \rightarrow L \setminus \{u\} : v \mapsto v(a)$ ist dann ein Homöomorphismus [Anhang: A.8], weshalb die Wirkung des Stabilisators $\tilde{\Gamma}_a$ auf $L \setminus \{u\} \approx \mathbb{R}^4$ zur reell-linearen Konjugationswirkung auf \mathcal{T} äquivalent ist [Anhang: A.7]. Wegen der

zweifachen Transitivität von Γ auf $L \setminus \{u\}$ ist die Wirkung von $\tilde{\Gamma}_a$ auf $L \setminus \{a, u\}$ transitiv. Mit [Anhang: B.24] schließen wir auf die Existenz einer zu $SU_2\mathbb{C}$ äquivalenten Untergruppe in Γ_a . Insbesondere enthält Γ_a eine Involution, die außer a und u keinen weiteren Punkt auf $L = au$ fixiert. Diese ist also eine Homologie (vgl. 1.21), deren Achse angesichts der Fixpunkte a, u und v eine der Geraden av oder $uv = W$ ist.

Wir nehmen nun an, daß Γ effektiv auf L wirkt. Aus $\dim \Gamma_{a,b} \leq 4$ und $\dim \Gamma_a(b) \leq \dim L = 4$ folgt $\dim \Gamma_a \leq 8$, und aus $\dim \Delta \geq 16$ und $\dim \Delta(a) \leq \dim P = 8$ folgt $\dim \Gamma_a = \dim \Delta_a \geq 8$. Deshalb zeigt [Anhang: B.24], daß die Kommutatorgruppe $K := (\Gamma_a)'$ der linear auf $L \setminus \{u\}$ und transitiv auf $L \setminus \{a, u\}$ wirkenden Gruppe Γ_a äquivalent zur Gruppe $SL_2\mathbb{C}$ ist und insbesondere auf $L \setminus \{u\}$ eine komplex-lineare Wirkung induziert. Diese \mathbb{C} -Linearität hat zur Folge, daß für alle $b \in L \setminus \{a, u\}$ der Stabilisator K_b eine zweidimensionale Teilmenge von $L \setminus \{u\}$ punktweise fixiert. Da jede (reell) höchstens dreidimensionale Darstellung von $SL_2\mathbb{C}$ trivial ist [Anhang: B.21], wird Θ von K zentralisiert. Insbesondere fixiert K die mindestens eindimensionale Bahn $\Theta(a) \subseteq av$. Somit ist das Fixgebilde von K_b eine Baer-Unterebene von \mathcal{P} , und K_b ist kompakt [Anhang: C.4]. Dies ist ein Widerspruch, denn in $SL_2\mathbb{C}$ ist jeder Stabilisator eines Elements aus $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ zur additiven Gruppe von \mathbb{C} isomorph. \square

Damit folgt nun aus der Nichttrivialität der Gruppe der Translationen in Richtung eines Fixpunktes von Δ die Transitivität dieser Richtungskomponente:

2.18 Folgerung

Enthält $T_{[v]}$ eine mindestens eindimensionale reelle Vektorgruppe Θ , die unter der Konjugationswirkung von Δ invariant¹³ ist, dann gilt $\dim T_{[v]} = 4$.

Beweis: Wir können annehmen, daß $\dim \Theta < 4$ gilt. Nach 2.17 wirkt die Zusammenhangskomponente $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ des Stabilisators einer Gerade $L \in \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$ ineffektiv auf L und enthält deshalb eine Homologie (mit Achse L und Zentrum v). Die zu [Anhang: C.14] duale Aussage über Homologien und Elationen zeigt dann $\Delta(L) = T_{[v]}(L)$ (man beachte, daß $\Delta_{[v,v]} = \Delta_{[v,W]} = T_{[v]}$ wegen $u \in \text{Fix}_P \Delta$ gilt). Da $\dim \Delta_{a,b} = \dim (\Delta_{a,b})^{\mathbb{1}}$ für alle $a, b \in P$ gilt, wirkt Δ nach 2.4 und 2.16 transitiv auf $\mathcal{L}_u \setminus \{W\}$, und es folgt $\dim T_{[v]} = 4$. \square

Auch die Gruppe der Translationen in Richtung des zweiten Fixpunktes ist in der Situation von 2.17 transitiv:

2.19 Folgerung

Es sei $L \in \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$. Enthält $T_{[v]}$ eine $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ -invariante reelle Vektorgruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^q$ mit $q \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt $T_{[u]} \cong \mathbb{R}^4$.

Beweis: Wir schreiben $\Gamma := \Delta_L^{\mathbb{1}}$. Für einen Punkt $a \in L \setminus \{u\}$ sei $A \in \{av, W\}$ die Achse einer nach 2.17 in Γ_a enthaltenen Spiegelung. Man beachte, daß Γ (wegen $\dim \Gamma_{a,b} = \dim (\Gamma_{a,b})^{\mathbb{1}}$ für alle $b \in P$) nach 2.4 und 2.15 transitiv auf $L \setminus \{u\}$ wirkt.

Ist $A = W$, dann erhalten wir¹⁴ $\Gamma(a) \subseteq T_{[u]}(a)$ aus dem Lemma über Homologien und Elationen [Anhang: C.14] und wegen $\Gamma_{[W,W]} \leq T_{[u]}$. Angesichts der Transitivität

¹³Es würde reichen, daß jede Gerade in $\mathcal{L}_u \setminus \{W\}$ einen von u verschiedenen Punkt a enthält, unter dessen Stabilisator $\Delta_a^{\mathbb{1}}$ die Gruppe Θ invariant ist.

¹⁴Bei Betrachtung von Δ statt von Γ kann man in diesem Fall tatsächlich schon schließen, daß T transitiv auf P^W wirkt.

von Γ auf $L \setminus \{u\}$ und der Fixpunktfreiheit der Wirkung von $T_{[u]}$ auf $L \setminus \{u\}$ zeigt dies $\dim T_{[u]} = \dim \Gamma(A) = 4$.

Ist $A = av$, dann ist der nicht in A enthaltene Fixpunkt u das Zentrum der Spiegelung. Wegen $v \in \text{Fix}_P \Delta$ gilt $\Delta_{[u,u]} = \Delta_{[u,W]} = T_{[u]}$, weshalb die zu [Anhang: C.14] duale Aussage dann $\Delta(A) = T_{[u]}(A)$ zeigt. Aus der Transitivität von Γ auf $L \setminus \{u\}$ folgt, daß Δ (sogar schon Γ) transitiv auf $\mathcal{L}_v \setminus \{W\}$ wirkt. Die Fixpunktfreiheit der Wirkung von $T_{[u]}$ auf $\mathcal{L}_v \setminus \{W\}$ impliziert dann $\dim T_{[u]} = \dim \Delta(A) = 4$.

Insbesondere wirkt in beiden Fällen schon die vierdimensionale Zusammenhangskomponente $T_{[u]}^{\mathbb{1}}$ transitiv auf $L \setminus \{u\}$, woraus $T_{[u]} = T_{[u]}^{\mathbb{1}}$ folgt. Da T mit Elementen aus Θ und aus $T_{[u]}$ Elationen mit verschiedenen Zentren enthält, erhalten wir schließlich $T_{[u]} \cong \mathbb{R}^4$ [Anhang: C.12]. \square

Ist Δ höchstens 18-dimensional, dann sind die Voraussetzungen von 2.17 gegeben, wenn $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ per Konjugation effektiv auf $T_{[v]}$ wirkt:

2.20 Lemma

Es gelte $\dim \Delta \leq 18$. Außerdem sei $T_{[v]} \cong \mathbb{R}^t$ mit $t > 0$. Wirkt die Zusammenhangskomponente $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ des Stabilisators einer Gerade $L \in \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$ per Konjugation effektiv auf $T_{[v]}$, dann existiert in $T_{[v]}$ eine $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ -invariante Vektorgruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^q$ mit $q \in \{1, 2, 3\}$.

Beweis: Wir können annehmen, daß $t = 4$ gilt. Insbesondere wirkt Δ dann transitiv auf $\mathcal{L}_u \setminus \{W\}$. Wegen $16 \leq \dim \Delta \leq 18$ und $\dim(\mathcal{L}_u \setminus \{W\}) = 4$ impliziert dies

$$\dim \Delta_L^{\mathbb{1}} = \dim \Delta_L = \dim \Delta - \dim \Delta(L) \in \{12, 13, 14\}.$$

Auf der vierdimensionalen reellen Vektorgruppe $T_{[v]}$ wirkt $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ per Konjugation effektiv und reell-linear. Nach [Anhang: B.23] kann diese Wirkung angesichts der Dimension von $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ nicht irreduzibel sein, woraus die Existenz der gesuchten $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ -invarianten Vektorgruppe Θ in $T_{[v]}$ folgt. \square

2.21 Folgerung

Es sei $L \in \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$. Gilt $\dim \Delta \leq 18$ und enthält $T_{[v]}$ eine $\Delta_L^{\mathbb{1}}$ -invariante nichttriviale reelle Vektorgruppe Θ , dann ist auch $T_{[u]}^{\mathbb{1}}$ eine nichttriviale reelle Vektorgruppe.

Beweis: Die Zusammenhangskomponente von $T_{[u]}$ ist eine reelle Vektorgruppe, da Θ (nichttriviale) Elationen mit Zentrum $v \neq u$ enthält [Anhang: C.12]. Wir schreiben wieder $\Gamma := \Delta_L^{\mathbb{1}}$. Nach 2.19 und 2.20 können wir annehmen, daß $\mathbb{R}^4 \cong \Theta = T_{[v]}$ gilt und daß die Konjugationswirkung von Γ auf $T_{[v]}$ nicht effektiv ist. Es existiert dann ein Element $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}_P\}$, das die auf $\mathcal{L}_u \setminus \{W\}$ transitiv wirkende Elationsgruppe $T_{[v]}$ zentralisiert. Mit L fixiert γ die volle Bahn $T_{[v]}(L) = \mathcal{L}_u \setminus \{W\}$. Somit ist γ in $\Delta_{[u]}$ enthalten. Die Achse A von γ liegt im Büschel \mathcal{L}_v derjenigen Geraden, die den Fixpunkt v enthalten.

Wir betrachten zunächst den Fall $A \neq W$. Dann ist γ eine Homologie mit Achse A und Zentrum u , und wegen $\Gamma_{[u,u]} = \Gamma_{[u,uv]} \leq T_{[u]}$ folgt $\Gamma(A) \subseteq T_{[u]}(A)$ aus der zu [Anhang: C.14] dualen Aussage über Homologien und Elationen. Für $B \in \mathcal{L}_v \setminus \{A, W\}$

zeigt die zu [Anhang: C.6] duale Aussage $\dim \Gamma_{A,B} \leq 7$ (man beachte, daß L und W von Γ fixiert werden). Weiterhin gilt $\Delta_{B,L} = \Delta_b$ für $b := B \wedge L$. Wegen $\dim \Delta \geq 16$ und $\dim \Delta(b) \leq \dim P = 8$ folgt

$$\dim \Gamma_B = \dim \Delta_{B,L} = \dim \Delta_b = \dim \Delta - \dim \Delta(b) \geq 8,$$

und wir erhalten

$$\dim T_{[u]} = \dim T_{[u]}(A) \geq \dim \Gamma(A) \geq \dim \Gamma_B(A) = \dim \Gamma_B - \dim \Gamma_{A,B} \geq 1.$$

Ist $A = W$, dann gilt $\gamma \in T_{[u]}$. Wir betrachten in diesem Fall den Zentralisator Ω von γ in der Zusammenhangskomponente $\Delta_a^{\mathbb{H}}$ des Stabilisators eines Punktes $a \in P^W$. Die Elation γ erzeugt eine unendlich zyklische Untergruppe Z von $T_{[u]}$ [Anhang: C.10]. Mit γ zentralisiert Ω die ganze Gruppe Z , weshalb die in der Gerade au enthaltene Bahn $Z(a)$ punktweise von Ω fixiert wird. Da Ω außerdem den Punkt v fixiert, folgt $\dim \Omega \leq 7$ [Anhang: C.6]. Wegen $\dim \Delta_a^{\mathbb{H}} = \dim \Delta - \dim \Delta(a) \geq 8$ ist Ω also eine echte Untergruppe von $\Delta_a^{\mathbb{H}}$. Daraus folgt, daß $\dim T_{[u]} > 0$ gilt, denn andernfalls wäre $T_{[u]}$ ein total unzusammenhängender Normalteiler von Δ und würde deshalb von der zusammenhängenden Gruppe $\Delta_a^{\mathbb{H}}$ zentralisiert werden. \square

Fixpunktfreie Operation

In diesem Abschnitt sei Δ wieder eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe des Stabilisators Σ_W einer Gerade W . Diesmal fixiere Δ jedoch keinen Punkt auf W . Außerdem bezeichnen wir die Elationsgruppe $\Delta_{[W,W]}$ wieder mit T .

Die Fixpunktfreiheit der Wirkung von Δ auf W liefert eine Schranke für die Dimension von T , falls \mathcal{P} keine Translationsebene mit Translationsachse W ist:

2.22 Lemma

Wirkt T nicht transitiv auf P^W , dann gilt $\dim T \leq 6$.

Beweis: Wegen der fixpunktfreien Wirkung von Δ auf W existiert nach 2.11 ein Punkt $z \in W$ mit $\dim T_{[z]} \leq 2$. Zusammen mit 2.12 ergibt sich daraus $\dim T \leq 6$. \square

Wir betrachten nun reelle Vektorgruppen, die in T enthalten sind.

2.23 Lemma

Enthält die Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$ eine nichttriviale reelle Vektorgruppe Θ , die von Δ normalisiert wird, dann enthält Θ Elationen mit verschiedenen Zentren, und es gilt $\dim \Delta \leq 2 \dim \Theta + 11$.

Beweis: Da Θ von Δ normalisiert wird und Δ keinen Punkt auf W fixiert, existieren in Θ Elemente mit verschiedenen Zentren. Nach 2.5 gilt deshalb $\dim \Delta_a \leq 3 + 2 \dim \Theta$ für jeden Punkt $a \in P^W$. Wegen $\dim \Delta(a) \leq 8$ und $\dim \Delta = \dim \Delta_a + \dim \Delta(a)$ folgt daraus die Behauptung. \square

Die affinen Bahnen einer zu \mathbb{R}^3 isomorphen Δ -invarianten Translationsgruppe erzeugen die ganze Ebene \mathcal{P} :

2.24 Lemma

Enthält die Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$ eine Δ -invariante dreidimensionale reelle Vektoruntergruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^3$, dann gilt $\dim \Theta_{[z]} \leq 1$ für alle $z \in W$ und $\langle \Theta(a) \rangle = \mathcal{P}$ für alle $a \in P^W$.

Beweis: Für alle $z \in W$ und alle $\delta \in \Delta$ gilt $\Theta_{[z]} \cong \Theta_{[z]}^\delta = \Theta_{[\delta(z)]}$. Da Δ keinen Punkt auf W fixiert und die Richtungskomponenten $\Theta_{[z]}$ der Vektorgruppe Θ paarweise trivialen Schnitt haben, existiert im Fall $\dim \Theta = 3$ also kein $z \in W$ mit $\dim \Theta_{[z]} \geq 2$. Die Menge der nichttrivialen Richtungskomponenten von Θ ist somit genau die zur reellen projektiven Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ homöomorphe Menge der eindimensionalen Teilräume von Θ , und die Abbildung $\hat{\zeta} : \mathcal{P}\Theta \rightarrow W : \Theta_{[z]} \mapsto z$, die jeder Richtungskomponente von Θ ihr Zentrum zuordnet, bettet diese Menge homöomorph in die Gerade W ein (vgl. 1.20). Die Bahn $\Theta(a)$ jedes Punktes $a \in P^W$ ist eine dreidimensionale Teilmenge von \mathcal{P} , die wegen der Existenz von Translationen verschiedener Richtungen in Θ nicht in einer Gerade enthalten ist und somit eine mindestens vierdimensionale Unterebene $\mathcal{F} := \langle \Theta(a) \rangle$ erzeugt. Wäre \mathcal{F} vierdimensional, dann wäre der Schnitt $F \cap W$ der Punktmenge F von \mathcal{F} mit der Gerade W als Punktmenge einer Gerade von \mathcal{F} homöomorph zu \mathbb{S}_2 . Andererseits enthielte $F \cap W$ die Menge der Zentren der Elemente aus Θ , die, wie wir eben gesehen haben, homöomorph zu $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ ist. Die reelle projektive Ebene läßt sich jedoch nicht homöomorph in die zweidimensionale Sphäre \mathbb{S}_2 einbetten, denn sonst wäre die projektive Ebene nach L. E. J. Brouwers Satz von der Gebietsinvarianz (siehe 1.12) eine (nichtleere) offene und kompakte Teilmenge der zusammenhängenden Sphäre \mathbb{S}_2 , aber $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ und \mathbb{S}_2 sind nicht homöomorph (zum Beispiel, weil $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ im Gegensatz zu \mathbb{S}_2 nicht einfach-zusammenhängend ist, vgl. Greenberg–Harper [81] (5.11)). Also ist \mathcal{F} nicht vierdimensional, woraus $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ folgt. \square

Wir schätzen nun die Dimension von Δ in der Situation von 2.24 ab, wobei wir zunächst voraussetzen, daß der in Δ enthaltene Stabilisator eines eigentlichen Punktes irreduzibel auf Θ wirkt.

2.25 Lemma

Enthält die Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$ eine Δ -invariante Vektoruntergruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^3$ und existiert ein Punkt $a \in P^W$ derart, daß $\Delta_a^\mathbb{1}$ per Konjugation irreduzibel auf Θ wirkt, dann gilt $\dim \Delta < 13$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $\dim \Delta \geq 13$ gilt. Jedes Element aus $\Gamma := \Delta_a^\mathbb{1}$, das Θ zentralisiert, fixiert $\Theta(a)$ punktweise, weshalb $C_\Gamma\Theta = \{\text{id}_\mathcal{P}\}$ aus 2.24 folgt. Deshalb operiert Γ per Konjugation effektiv als lineare Automorphismengruppe auf der reellen Vektorgruppe Θ . Die ungerade Dimension von Θ und die Struktur irreduzibler linearer Gruppen [Anhang: B.15] erzwingen die Irreduzibilität der Konjugationswirkung der (topologisch abgeschlossenen) Kommutatorgruppe Γ' von Γ auf Θ . Außerdem kann das Zentrum $C\Gamma$ von Γ nur reelle skalare Multiplikationen auf Θ bewirken, so daß $\dim C\Gamma \leq 1$ ist. Für die Dimension der Kommutatorgruppe von Γ folgern wir unter Berücksichtigung von $\dim \Delta \geq 13$ und $\dim \Delta(a) \leq \dim P = 8$ ebenfalls mit [Anhang: B.15]

$$\dim \Gamma' = \dim \Gamma - \dim C\Gamma \geq \dim \Delta_a - 1 = \dim \Delta - \dim \Delta(a) - 1 \geq 4.$$

Da $\dim \Theta$ eine Primzahl ist, muß Γ' fasteinfach sein [Anhang: B.20]. Nach [Anhang: B.21] ist die mindestens vierdimensionale fasteinfache Gruppe $\Gamma^\mathbb{1}$ mit ihrer effek-

tiven und irreduziblen reell-linearen Wirkung auf $\Theta \cong \mathbb{R}^3$ dann (als Transformationsgruppe) äquivalent zu $\mathrm{SL}_3\mathbb{R}$. Im folgenden identifizieren wir entsprechend Θ mit \mathbb{R}^3 und Γ^1 mit der Matrizengruppe $\mathrm{SL}_3\mathbb{R}$ so, daß die Konjugationswirkung von Γ^1 auf Θ der gewöhnlichen Matrizenwirkung von $\mathrm{SL}_3\mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^3 entspricht (man beachte, daß diese Identifikation nach [Anhang: B.15] von einem Isomorphismus topologischer Gruppen herrührt). Es seien

$$\Lambda := \left\{ \begin{pmatrix} r & & \\ & r^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \leq \Gamma'$$

und

$$\beta := \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Weiter sei $\Pi := \{0\} \times \mathbb{R} \leq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \Theta$. Die Gruppe Λ zentralisiert den eindimensionalen Teilraum Π von Θ , weshalb die Bahn $\Pi(a)$ von Λ punktweise fixiert wird. Außerdem normalisiert Λ die beiden Richtungskomponenten $\mathbb{R} \times \{0\}$ sowie $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ von Θ und fixiert deshalb die beiden auf W liegenden Zentren der Elemente dieser Komponenten. Das Fixgebilde von Λ enthält also ein echtes Viereck und ist somit eine Unterebene von \mathcal{P} . Diese ist im Fixgebilde \mathcal{F}_β der Involution β enthalten, was bedeutet, daß β planar ist und \mathcal{F}_β eine Baer-Unterebene von \mathcal{P} ist (vgl. 1.21). Dann muß Λ aber kompakt sein [Anhang: C.4], was im Widerspruch zur Definition von Λ steht, nach der Λ homöomorph zu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist. \square

Ohne die Irreduzibilitätsvoraussetzung erhalten wir die folgende Dimensionsschranke:

2.26 Lemma

Enthält die Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]}$ eine dreidimensionale reelle Vektoruntergruppe Θ , die von Δ normalisiert wird, dann gilt $\dim \Delta < 16$.

Beweis: Es seien $a \in P^W$ und Φ ein minimaler unter der (linearen) Konjugationswirkung von Δ_a^1 invarianter Teilraum von $\Theta \cong \mathbb{R}^3$. Ist $\Phi = \Theta$, dann folgt die Behauptung aus 2.25. Im Fall $\dim \Phi = 2$ ist $\Phi(a)$ nach 2.24 nicht in einer Gerade enthalten, und wir erhalten $\dim \Delta_a \leq 7$ aus 2.5. Ist $\dim \Phi = 1$, dann wählen wir $b \in \Phi(a) \setminus \{a\}$ und $c \in \Theta(a) \setminus ab$ (dies ist möglich, da $\Theta(a)$ nach 2.24 nicht in einer Gerade enthalten ist). Nach 2.5 gilt dann $\dim \Delta_{a,b,c} \leq 3$. Wegen $\dim \Delta_{a,b}(c) \leq \dim \Theta(c) = \dim \Theta = 3$ und $\dim \Delta_a(b) = \dim \Delta_a^1(b) \leq \dim \Phi(a) = \dim \Phi = 1$ erhalten wir auch in diesem Fall $\dim \Delta_a = \dim \Delta_{a,b,c} + \dim \Delta_{a,b}(c) + \dim \Delta_a(b) \leq 7$. In beiden Fällen ist somit $\dim \Delta = \dim \Delta_a + \dim \Delta(a) \leq 7 + 8 = 15$. \square

Wir untersuchen nun die Konsequenzen der Existenz einer vierdimensionalen reellen Vektorgruppe von Elationen mit Achse W . Aus 2.5 erhalten wir sofort:

2.27 Lemma

Ist $a \in P^W$ und enthält die Elationsgruppe T eine Δ_a^1 -invariante vierdimensionale reelle Vektoruntergruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^4$, die nicht in einer Richtungskomponente von T enthalten ist, dann gilt $\dim \Delta_a \leq 11$. \square

Dies nutzen wir aus, um zu zeigen, daß T transitiv ist, wenn Δ eine zu $SU_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe enthält, die effektiv auf einer vierdimensionalen Vektoruntergruppe von T wirkt.

2.28 Lemma

Die Elationsgruppe T enthalte eine Δ -invariante Untergruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^4$. Ist $\dim \Delta \geq 16$ und existiert in Δ eine zu $SU_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe Φ mit $C_\Phi\Theta = \{\text{id}_\mathcal{P}\}$, dann wirkt T transitiv auf P^W .

Beweis: Wäre die in Φ enthaltene (zentrale) Involution ω keine Homologie, dann wäre sie planar, und \mathcal{P} enthielte eine abgeschlossene Baer-Unterebene (vgl. 1.21), woraus folgte, daß die Geraden von \mathcal{P} homöomorph zur 4-Sphäre \mathbb{S}_4 wären [Anhang: C.2]. Dies gälte insbesondere für die Φ -invariante Gerade W , deren Schnitt mit der Fixpunktmenge der Baer-Involution ω zweidimensional wäre. Daraus ergäbe sich ein Widerspruch zu R. W. Richardsons Klassifikation kompakter Wirkungen auf der 4-Sphäre [Anhang: A.12], nach der die zentrale Involution ω entweder die gesamte Gerade W punktweise oder genau zwei Punkte auf W fixieren müßte (man beachte, daß das zweielementige Zentrum der einzige Normalteiler von $SU_2\mathbb{C}$ ist, vgl. Hein [90] S. 65, Satz 11). Also ist ω eine Homologie. Wegen $C_\Phi\Theta = \{\text{id}_\mathcal{P}\}$ liefert die Konjugation der Elemente von $\Theta \cong \mathbb{R}^4$ mit Elementen von Φ eine effektive Darstellung $\Phi \rightarrow GL(\Theta, \mathbb{R})$. Bis auf Äquivalenz ist die gewöhnliche Wirkung auf \mathbb{C}_2 die einzige effektive Darstellung von $SU_2\mathbb{C}$ in $GL(\mathbb{R}^4)$ [Anhang: B.21]. Auf Θ bewirkt ω per Konjugation also eine reelle skalare Multiplikation (mit -1), woraus folgt, daß ω die auf W liegenden Zentren der Richtungskomponenten von Θ fixiert. Die Achse von ω muß deshalb die Gerade W sein, denn die Menge der Zentren aller nichttrivialen Elemente aus Θ ist eine Vereinigung von in W enthaltenen Bahnen unter Δ , die alle zusammenhängend und (wegen der Fixpunktfreiheit der Wirkung von Δ auf W) nicht einelementig sind. Ist $a \in P^W$ das Zentrum von ω , dann folgt $\Delta(a) = T(a)$ aus dem Lemma [Anhang: C.14] über Homologien und Elationen (man beachte, daß die mindestens 16-dimensionale zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Δ von Σ eine Lie-Gruppe ist, vgl. 1.22). Angesichts der Existenz von Elationen mit verschiedenen Zentren in Θ gilt $\dim \Delta_a \leq 11$ nach 2.27, und wir erhalten $\dim T = \dim T(a) = \dim \Delta(a) = \dim \Delta - \dim \Delta_a \geq 5$. Als kompakte Gruppe wirkt Φ vollständig reduzibel auf T [Anhang: B.15]. Deshalb existiert ein Φ -invariantes Komplement Ξ von Θ in $T = \Theta \oplus \Xi$. Wegen $\dim T \geq 5$ gilt dabei $\dim \Xi(a) = \dim \Xi \geq 1$. Als Homologie mit Achse W fixiert ω in P^W nur das Zentrum a . Insbesondere fixiert ω die Bahn $\Xi(a)$ nicht punktweise. Dies impliziert, daß Ξ von ω nicht zentralisiert wird. Da ω im einzigen nichttrivialen echten Normalteiler von Φ (dem zweielementigen Zentrum) liegt, wirkt die zu $SU_2\mathbb{C}$ isomorphe Gruppe Φ also effektiv auf Ξ , weshalb Ξ mindestens vierdimensional sein muß [Anhang: B.21]. Damit gilt $\dim T = \dim \Theta + \dim \Xi \geq 8$, was bedeutet, daß T transitiv auf P^W wirkt [Anhang: C.11 (ii)]. □

Damit können wir nun beweisen, daß \mathcal{P} im Fall $\dim \Theta = 4$ eine Translationsebene ist.

2.29 Lemma

Es gelte $16 \leq \dim \Delta \leq 18$. Enthält die Elationsgruppe T eine Δ -invariante reelle Vektorgruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^4$, dann wirkt T transitiv auf P^W .

Beweis: Für $a \in P^W$ und $\Gamma = \Delta_a^1$ gilt $\dim \Gamma = \dim \Delta - \dim \Delta(a) \geq 16 - \dim P = 8$. Da Δ fixpunktfrei auf W wirkt und Θ frei auf P^W wirkt, ist die Bahn $\Theta(a)$ eine vierdimensionale Menge von Punkten, die nicht in einer Gerade enthalten ist. Also ist das Γ -invariante Erzeugnis $\mathcal{F} := \langle \Theta(a) \rangle$ eine mindestens vierdimensionale Unterebene von \mathcal{P} . Wir unterscheiden zwei Fälle:

Zunächst betrachten wir den Fall, daß $\mathcal{F} = (F, \mathcal{L}_{\mathcal{F}})$ eine echte Unterebene und somit eine Baer-Unterebene von \mathcal{P} ist. Der Ineffektivitätskern der Wirkung von $\Upsilon := \Theta \times \Gamma$ auf \mathcal{F} ist in Γ enthalten und stimmt deshalb mit dem Ineffektivitätskern Λ der Wirkung von Γ auf \mathcal{F} überein. Für diesen gilt $\dim \Lambda \leq 1$ [Anhang: C.5]. Wegen $\dim \Upsilon = \dim \Gamma + \dim \Theta \geq 12$ bewirkt Υ auf der vierdimensionalen Ebene \mathcal{F} also eine mindestens elfdimensionale Automorphismengruppe, woraus folgt, daß \mathcal{F} zur klassischen vierdimensionalen Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ isomorph ist (vgl. 1.22). Die Zusammenhangskomponenten der Stabilisatoren von Antifahren in der Automorphismengruppe von $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ sind zu $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ isomorph. Nach [Anhang: C.3] ist die zusammenhängende Gruppe $\tilde{\Gamma} := \Gamma/\Lambda$ somit als Transformationsgruppe auf $F \setminus W \approx \mathbb{C}^2$ äquivalent zu einer Untergruppe von $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$. Aus $\dim \Gamma \geq 8$ und $\dim \Lambda \leq 1$ folgt $\dim \tilde{\Gamma} \geq 7$. Untergruppen von $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$, die nicht irreduzibel auf \mathbb{C}^2 wirken, sind als reelle Gruppe höchstens sechsdimensional, was sich zum Beispiel an einer geeigneten zugehörigen komplexen Matrizen­gruppe von oberer Dreiecksgestalt ablesen läßt. Also wirkt $\tilde{\Gamma}$ irreduzibel auf $F \setminus W$. Die in [Anhang: B.15] angegebene Struktur irreduzibler linearer Gruppen zeigt dann, daß die Kommutatorgruppe $\tilde{\Gamma}'$ der mindestens siebendimensionalen Gruppe $\tilde{\Gamma}$ eine mindestens fünfdimensionale halbeinfache Lie-Gruppe ist. Da einfache reelle Lie-Algebren dreidimensional oder mindestens sechsdimensional sind [Anhang: B.21], was damit auch für direkte Summen solcher Lie-Algebren gilt, ist $\tilde{\Gamma}'$ mindestens sechsdimensional und deshalb isomorph zum sechsdimensionalen halbeinfachen Kopf $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ von $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$. Insbesondere enthält $\tilde{\Gamma}'$ eine zu $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe $\tilde{\Phi}$. Nach [Anhang: B.4] existiert eine zusammenhängende Untergruppe Φ von Γ derart, daß $\mu : \Phi \rightarrow \tilde{\Phi} : \varphi \mapsto \varphi \cdot \Lambda$ eine Überlagerung ist. Wegen des einfachen Zusammenhangs von $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ ist μ ein Isomorphismus, weshalb Φ per Konjugation effektiv auf Θ wirkt. Mit 2.28 folgt daraus die Transitivität von T auf P^W .

Es sei nun $\mathcal{F} = \mathcal{P}$. Wegen der Minimalität von Θ induziert die Konjugationswirkung von Δ auf Θ eine effektive irreduzible Darstellung von $\tilde{\Delta} := \Delta/C_{\Delta}\Theta$ in $\mathrm{GL}(\Theta, \mathbb{R})$. Jedes Element aus Γ , das Θ zentralisiert, fixiert $\Theta(a)$ und damit auch die Punktmenge P des Erzeugnisses $\langle \Theta(a) \rangle = \mathcal{P}$ elementweise. Deshalb gilt $C_{\Gamma}\Theta = \{\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\}$, und die Einschränkung $\Gamma \rightarrow \tilde{\Delta} : \gamma \mapsto \gamma \cdot C_{\Delta}\Theta$ der kanonischen Projektion $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$ ist eine stetige Injektion, woraus $\dim \tilde{\Delta} \geq \dim \Gamma \geq 8$ folgt (vgl. 1.13). Wegen $\dim \Delta \leq 18$ und $\Theta \subseteq C_{\Delta}\Theta$ gilt andererseits

$$\dim \tilde{\Delta} = \dim \Delta - \dim C_{\Delta}\Theta \leq 18 - \dim \Theta = 14,$$

und die Struktur irreduzibler linearer Gruppen [Anhang: B.15] zeigt $6 \leq \dim \tilde{\Delta}' \leq 14$. Aus [Anhang: B.23] folgt dann, daß $\tilde{\Delta}'$ isomorph zu $\mathrm{Sp}_4\mathbb{R}$, zu $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ oder zu $\mathrm{O}_4(\mathbb{R}, r)^{\mathbb{1}}$ mit $r \in \{0, 1, 2\}$ ist. Ist dabei $\dim \tilde{\Delta}' = 6$, so gilt $\dim C\tilde{\Delta}' = 2$ nach [Anhang: B.15], woraus folgt, daß $\tilde{\Delta}'$ in diesem Fall komplex-linear auf Θ wirkt. Insbesondere kann $\tilde{\Delta}'$ zu keiner der Gruppen $\mathrm{O}_4(\mathbb{R}, r)^{\mathbb{1}}$ mit $r \in \{0, 1, 2\}$ isomorph sein. Also ist $\tilde{\Delta}'$ zu einer der beiden verbleibenden Gruppen $\mathrm{Sp}_4\mathbb{R}$ und $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ isomorph und enthält somit eine zu $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe $\tilde{\Phi}$. Wie im Fall (I) können wir nun auf die Existenz einer

Untergruppe Φ von Δ schließen, die isomorph zu $\tilde{\Phi}$ ist und per Konjugation effektiv auf Θ wirkt. Wiederum folgt mit 2.28 die Transitivität von T auf P^W . \square

Das nächste Lemma zeigt, daß die Gruppe Θ in der Situation von 2.14 bei fixpunktfreier Wirkung von Δ auf W nicht fünfdimensional sein kann.

2.30 Lemma

Es sei $\Theta \cong \mathbb{R}^t$ eine Δ -invariante abgeschlossene Untergruppe von $\Sigma_{[W,W]}$. Enthält Δ eine zehndimensionale fasteinfache Lie-Gruppe Ψ , die per Konjugation effektiv, reell-linear und irreduzibel auf Θ wirkt, dann gilt $t \neq 5$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $t = 5$ gilt. Die fixpunktfreie Wirkung auf W impliziert, daß Δ fixpunktfrei auf den sich paarweise trivial schneidenden Richtungskomponenten der Vektorgruppe Θ wirkt. Daraus folgt $\dim \Theta_{[z]} \leq 2$ für alle $z \in W$. Der Tabelle [Anhang: B.21] entnehmen wir, daß Ψ isomorph zu $O_5(\mathbb{R}, r)^\mathbb{1}$ mit $r \in \{0, 1, 2\}$ ist und auf Θ die gewöhnliche Wirkung dieser Gruppe induziert. Wäre $r = 0$, dann würde die zu $O_5(\mathbb{R}, 0)^\mathbb{1} = SO_5\mathbb{R}$ äquivalente Gruppe Ψ transitiv auf den eindimensionalen Teilräumen von $\Theta \cong \mathbb{R}^5$ wirken. Dies würde implizieren, daß Ψ auch transitiv auf den Richtungskomponenten $\Theta_{[z]}$ von Θ wirkt, die dann insbesondere alle dieselbe Dimension haben müßten. Nach [Anhang: C.13] ist das jedoch unmöglich (man beachte, daß die Richtungskomponenten höchstens zweidimensional sind). Also gilt $r = 1$ oder $r = 2$, und Ψ enthält (im Fall $r = 1$) eine zu $O_4(\mathbb{R}, 0)^\mathbb{1} = SO_4\mathbb{R}$ bzw. (im Fall $r = 2$) eine zu $O_4(\mathbb{R}, 2)^\mathbb{1}$ isomorphe Untergruppe Φ , die auf einem vierdimensionalen Teilraum Ξ von Θ effektiv wie $SO_4\mathbb{R}$ bzw. wie $O_4(\mathbb{R}, 2)^\mathbb{1}$ auf \mathbb{R}^4 wirkt und ein eindimensionales Komplement zu Ξ in Θ punktweise fixiert. Die zentrale Involution ω in Φ bewirkt auf Ξ die skalare Multiplikation mit -1 . Somit normalisiert ω alle eindimensionalen Teilräume von Ξ , und das Fixgebilde \mathcal{F}_ω von ω in \mathcal{P} enthält die Zentren aller Richtungskomponenten von Ξ . Da die Richtungskomponenten von Θ höchstens zweidimensional sind, fixiert ω also mehr als zwei Punkte auf W . Wäre ω axial, dann müßte ω also eine Homologie mit Achse W sein [Anhang: C.10]. Es folgte $\tau^\omega = \tau^{-1}$ für alle $\tau \in T$, denn $\tau^\omega \tau = \omega \tau \omega \tau = (\omega \tau)^2$ wäre sowohl eine Elation als auch eine Homologie. Dies ist angesichts des eindimensionalen Teilraumes von Θ , der von Φ punktweise fixiert wird, unmöglich. Also ist ω planar, und \mathcal{F}_ω ist eine Baer-Unterebene (vgl. 1.21). Der Ineffektivitätskern der Wirkung von Φ auf \mathcal{F}_ω ist höchstens eindimensional [Anhang: C.5]. Da sowohl in $SO_4\mathbb{R}$ als auch in $O_4(\mathbb{R}, 2)^\mathbb{1}$ das zu \mathbb{Z}_2 isomorphe Zentrum der einzige nichttriviale höchstens eindimensionale Normalteiler ist, kommt somit nur das Zentrum $C\Phi$ von Φ als Ineffektivitätskern in Frage. Die Faktorgruppe $\Phi/C\Phi$ ist lokal isomorph zu Φ und damit in beiden Fällen halbeinfach aber nicht fasteinfach. Dies steht im Widerspruch dazu, daß jede (zusammenhängende lokalkompakte) halbeinfache Gruppe, die effektiv als Automorphismengruppe auf einer vierdimensionalen kompakten projektiven Ebene wirkt, fasteinfach sein muß [Anhang: C.7]. \square

Unter der Voraussetzung einer fixpunktfreien Wirkung von Δ auf W folgt die Transitivität der Elationsgruppe T in der Situation von 2.14, falls Θ ein sechsdimensionaler Normalteiler von Δ ist:

2.31 Lemma

Es sei $\Theta \cong \mathbb{R}^6$ eine Δ -invariante abgeschlossene Untergruppe von T . Außerdem sei

$\Delta = \Psi \cdot \Omega$ eine Levi-Zerlegung der zusammenhängenden Lie-Gruppe¹⁵ Δ mit einem achtdimensionalen Levi-Komplement Ψ . Bewirkt das auflösbare Radikal Ω per Konjugation auf Θ die volle Gruppe der komplexen Skalarmultiplikationen, dann gilt $\dim T = 8$.

Beweis: Die Δ -invariante reelle Vektorgruppe Θ ist eine Untergruppe des auflösbaren Radikals Ω von Δ . Da Ω per Konjugation die volle Gruppe der komplexen skalaren Streckungen auf Θ bewirkt und Θ vollständig im Ineffektivitätskern dieser Wirkung enthalten ist, gilt $\dim \Omega \geq \dim \Theta + \dim \mathbb{C}^\times = 8$. Es folgt $\dim \Delta = \dim \Omega + \dim \Psi \geq 16$.

Nach 2.12 und weil Δ fixpunktfrei auf den sich paarweise trivial schneidenden Richtungskomponenten der Vektorgruppe Θ wirkt, gilt $2 \leq \dim \Theta_{[z]} \leq 3$ für alle $z \in W$. Deshalb existiert nach [Anhang: C.13] ein $z \in W$ mit $\dim \Theta_{[z]} = 3$. Die Wirkung von Ω auf Θ als volle Gruppe der komplexen Skalarmultiplikationen impliziert, daß Ω keinen dreidimensionalen Teilraum von Θ normalisiert. Angesichts des Zusammenhangs von Ω folgt $|\Omega(z)| > 2$. Wegen $(\Omega \cdot T)/T = C(\Delta/T)$ ¹ (vgl. den Beweis von 2.14) fixiert Δ_z die Bahn $\Omega(z)$ punktweise, und mit 2.4 folgt $\dim \Delta_{a,z} \leq 4$ (man beachte erneut, daß $\dim \Delta_{a,z} = \dim (\Delta_{a,z})^\#$ gilt).

In Ω existiert nach Voraussetzung ein Element ω , das auf Θ die skalare Multiplikation mit -1 bewirkt. Dieses Element läßt alle Richtungskomponenten von Θ invariant. Da keine der Richtungskomponenten von Θ trivial ist, muß W eine Achse von ω sein. Weiterhin folgt mit [Anhang: C.9], daß die Θ enthaltende Elationsgruppe T abelsch ist. Wegen $\omega \notin C_\Delta \Theta$ ist ω also eine Homologie mit einem Zentrum $a \in P^W$, und wir schließen $\Delta(a) = T(a)$ mit dem Lemma über Homologien und Elationen [Anhang: C.14]. Unter Ausnutzung von $\Delta_a(z) \subseteq W$ und $\dim W = 4$ erhalten wir schließlich

$$\dim T = \dim T(a) = \dim \Delta(a) = \dim \Delta - \dim \Delta_{a,z} - \dim \Delta_a(z) \geq 8,$$

was wegen $\dim T = \dim T(a) \leq \dim P$ insgesamt bedeutet, daß $\dim T = 8$ gilt. \square

Automorphismengruppen mit einer ungeraden Anzahl von Fixelementen

Zum Beweis von Satz 2.2 betrachten wir nun eine nichtklassische achtdimensionale kompakte projektive Ebene \mathcal{P} . Ihre Automorphismengruppe Σ enthalte eine mindestens 16-dimensionale zusammenhängende Untergruppe Δ , deren Fixgebilde in $P \cup \mathcal{L}$ aus einer ungeraden Anzahl von Elementen besteht. Da der Abschluß von Δ das gleiche Fixgebilde hat und immer noch zusammenhängend ist, können wir annehmen, daß Δ eine abgeschlossene Untergruppe von Σ ist.

Es folgt eine erste Analyse der Situation.

2.32 Lemma

Die Gruppe Δ ist eine höchstens 18-dimensionale Lie-Gruppe, und das Fixgebilde von Δ besteht (bis auf Dualität) aus einer Gerade W und einer geraden Anzahl von Punkten, die auf W liegen. Außerdem enthält Δ einen minimalen (nichttrivialen) zusammenhängenden abgeschlossenen abelschen Normalteiler Θ , der isomorph zu einer

¹⁵Vgl. 1.22 bezüglich der Bedingung, daß Δ eine Lie-Gruppe ist.

reellen Vektorgruppe ist. Die Gruppe Θ ist in der Gruppe $T := \Delta_{[W,W]}$ der Elationen mit Achse W in Δ enthalten.

Beweis: Als mindestens 16-dimensionale abgeschlossene Untergruppe der Zusammenhangskomponente von Σ ist Δ eine Lie-Gruppe, und da \mathcal{P} nach Voraussetzung nicht klassisch ist, gilt $\dim \Delta \leq \dim \Sigma \leq 18$ (vgl. 1.22). Nach 2.7 läßt Δ keine echte Unterebene von \mathcal{P} invariant. Deshalb zeigt 2.1, daß Δ nicht halbeinfach (und \mathcal{P} keine Hughes-Ebene) ist. Somit enthält Δ einen minimalen (nichttrivialen) zusammenhängenden abgeschlossenen abelschen Normalteiler Θ . Gemäß 2.8 fixiert Δ außerdem keine Antifahne, und 2.9 zeigt, daß Θ zu einer reellen Vektorgruppe isomorph ist. Angesichts der Nichtexistenz einer Antifahne im Fixgebilde und der ungeraden Anzahl von Fixelementen fixiert Δ bis auf Dualität genau eine Gerade W und auf dieser eine gerade Anzahl¹⁶ von Punkten. Weiterhin ist Θ nach 2.10 eine Elationsgruppe, die in $\Delta_{[W,W]}$ oder in $\Delta_{[v,v]}$ für ein $v \in W$ enthalten ist. Im zweiten Fall fixiert Θ in der Geradenmenge genau das Büschel \mathcal{L}_v . Da Θ von Δ normalisiert wird, operiert Δ also auf diesem Büschel und fixiert deshalb den Punkt v . Dieser Punkt kann angesichts der geraden Anzahl von Fixpunkten nicht der einzige Fixpunkt von Δ auf W sein. Deshalb fixieren Δ und damit insbesondere auch Θ in diesem Fall noch einen weiteren Punkt $w \in W$, woraus folgt, daß W die Achse eines jeden Elements von Θ ist, das heißt, Θ ist auch in diesem Fall eine Untergruppe von $\Delta_{[W,W]}$. \square

Wir betrachten zunächst noch einmal den Fall, daß Δ (mindestens) zwei Punkte fixiert (die dann auf W liegen müssen).

2.33 Lemma

Sind u und v zwei verschiedene Fixpunkte von Δ auf W , dann gilt $\Theta \leq T_{[u]}$ oder $\Theta \leq T_{[v]}$.

Beweis: Angesichts der Minimalität von Θ gilt $\Theta_{[x]} = \{\text{id}_{\mathcal{P}}\}$ oder $\Theta \leq T_{[x]}$ für alle $x \in \text{Fix}_W \Delta$. Wir nehmen an, daß $\Theta_{[u]} = \{\text{id}_{\mathcal{P}}\} = \Theta_{[v]}$ gilt. Nach 2.13 gilt dann $\dim \Theta \leq 4$. Es seien Π eine Einparametergruppe in Θ und $a \in P^W$ sowie $c \in \Pi(a) \setminus \{a\}$. Die Trivialität der Richtungskomponenten $\Theta_{[u]}$ und $\Theta_{[v]}$ impliziert, daß die Punkte a, c, u, v ein echtes Viereck bilden. Da Θ frei auf P^W wirkt und Δ per Konjugation lineare Automorphismen der reellen Vektorgruppe Θ induziert, zentralisieren sich Π und $\Delta_{a,c}$, woraus folgt, daß $\Delta_{a,c}$ die zusammenhängende Bahn $\Pi(a)$ punktweise fixiert. Insgesamt fixiert $\Delta_{a,c}$ also eine zusammenhängende und somit mindestens zweidimensionale Unterebene von \mathcal{P} , woraus $\dim \Delta_{a,c} \leq 3$ folgt [Anhang: C.5]. Andererseits gilt $\Delta_a(c) \subseteq \Theta(a)$ wegen $c \in \Theta(a)$ und $\Theta \trianglelefteq \Delta$, woraus $\dim \Delta_a(c) \leq \dim \Theta(a) \leq \dim \Theta \leq 4$ folgt. Dies alles liefert den Widerspruch

$$3 \geq \dim \Delta_{a,c} = \dim \Delta - \dim \Delta(a) - \dim \Delta_a(c) \geq 16 - \dim P - 4 \geq 4. \quad \square$$

Mit dem folgenden Lemma schließen wir den Beweis von Satz 2.2 ab.

2.34 Lemma

Fixiert Δ keinen Punkt oder (mindestens) zwei Punkte auf W , dann wirkt T transitiv auf P^W .

¹⁶Tatsächlich kann Δ aus Dimensionsgründen nur höchstens zwei Punkte auf W fixieren [Anhang: C.6].

Beweis: Es seien zunächst u und v zwei verschiedene (in W enthaltene) Fixpunkte von Δ . Ohne Einschränkung können wir nach 2.33 annehmen, daß $\Theta \leq T_{[v]}$ gilt. Mit 2.18 folgt dann $\dim T_{[v]} = 4$, und 2.21 zeigt, daß die Zusammenhangskomponente von $T_{[u]}$ eine mindestens eindimensionale reelle Vektorgruppe ist. Eine erneute Anwendung von 2.18 (diesmal mit vertauschten Rollen für u und v) zeigt, daß auch $\dim T_{[u]} = 4$ gilt. Dies impliziert $\dim T = 8$ und damit die Transitivität von T .

Es bleibt, den Fall zu betrachten, daß Δ fixpunktfrei auf W operiert. Nach 2.23 und 2.26 gilt dann $\dim \Theta > 3$. Im Fall $\dim \Theta = 4$ folgt die Transitivität von T auf P^W aus 2.29. Ist $\dim \Theta > 4$, so zeigt 2.14 zusammen mit 2.30 und 2.31, daß $\dim T > 6$ gilt, woraus mit 2.22 die Transitivität der Wirkung von T auf P^W folgt. \square

3 Translationsebenen mit auflösbaren Automorphismengruppen

Im Abschnitt 7 werden wir sehen, daß H. Hahl im Rahmen der Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Automorphismengruppe auch schon alle achtdimensionalen kompakten Translationsebenen bestimmt hat, deren 16-dimensionale Automorphismengruppe eine Zusammenhangskomponente hat, die nicht auflösbar ist. Deshalb betrachten wir nun Translationsebenen mit (großen) auflösbaren Automorphismengruppen. Dazu sei hier zunächst vor allem an die für Translationsebenen relevanten Grundlagen und Bezeichnungen der Seiten 11 ff. erinnert.

Die Existenz eines Fixpunktes auf der Translationsachse

Auf der klassischen zweidimensionalen reellen Ebene, der einzigen zweidimensionalen kompakten Translationsebene, induziert die Gruppe

$$\mathbb{C}^\times = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \right\} \leq \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$$

mit ihrer gewöhnlichen Wirkung¹⁷ auf \mathbb{R}^2 eine Automorphismengruppe, die fixpunktfrei auf einer Translationsachse wirkt.

Nach [Salzmann et al. \[95\]](#) 73.4 fixiert jede auflösbare zusammenhängende affine Automorphismengruppe einer vierdimensionalen kompakten Translationsebene einen Punkt auf der Translationsachse. Das Folgende zeigt, daß auch die auflösbaren affinen Automorphismengruppen höherdimensionaler kompakter Translationsebenen stets einen Punkt auf der Translationsachse fixieren. Zunächst betrachten wir allgemein Wirkungen von Torusgruppen auf Sphären gerader Dimension.

3.1 Lemma

Jede Torusgruppe Θ , die stetig auf einer Sphäre von gerader Dimension wirkt, fixiert einen Punkt auf dieser Sphäre.

Beweis: Die Torusgruppe Θ enthält eine dichte Einparameteruntergruppe ϕ . Da jede Sphäre gerade Dimension die Eulercharakteristik 2 hat (siehe zum Beispiel [Greenberg–Harper \[81\]](#) (20.1)), zeigt ein Fixpunktsatz von S. Lefschetz, daß ϕ einen Punkt der Sphäre fixiert (siehe [Spanier \[66\]](#) Chap. 4, Sec. 7, Theorem 12). Daraus folgt die Behauptung, denn angesichts der Stetigkeit der Wirkung wird jeder Fixpunkt der Gruppe ϕ auch von ihrem Abschluß Θ fixiert. □

3.2 Satz

Ist \mathcal{P} eine kompakte Translationsebene mit $\dim P \in \{4, 8, 16\}$, dann fixiert jede auflösbare zusammenhängende Untergruppe A des Stabilisators Σ_{L_∞} einen Punkt auf der Translationsachse L_∞ .

¹⁷Matrizenwirkung von links auf Spaltenvektoren

Beweis: Das Produkt $T \cdot A$ des abelschen Normalteilers T der Translationen von \mathcal{P} mit A ist eine auflösbare zusammenhängende Untergruppe von Σ_{L_∞} . Wir können deshalb annehmen, daß $T \subseteq A$ gilt. Die Gruppe A ist dann gleich dem semidirekten Produkt $T \rtimes A_o^1$ der (zusammenhängenden) Translationsgruppe mit der Zusammenhangskomponente des in A enthaltenen Stabilisators eines affinen Punktes $o \in P^{L_\infty}$. Da L_∞ von T punktweise fixiert wird, genügt es also zu zeigen, daß jede auflösbare zusammenhängende Untergruppe Ω von Σ_{o,L_∞} einen Punkt auf L_∞ fixiert.

Im Zentrum von Σ_{o,L_∞} liegt eine zur Zusammenhangskomponente $\mathbb{R}_{>0}$ von \mathbb{R}^\times isomorphe abgeschlossene Untergruppe P von $\Sigma_{[o,L_\infty]} \cong \mathbb{K}^\times$ (die Gruppe der „positiven reellen Streckungen“ mit Zentrum o). Der Abschluß $\overline{\Omega \cdot P}$ des Produkts von Ω mit dieser Streckungsgruppe ist immer noch eine auflösbare zusammenhängende Untergruppe von Σ_{o,L_∞} . Wir können deshalb annehmen, daß Ω abgeschlossen in Σ_{o,L_∞} (also insbesondere eine Lie-Gruppe) ist und die Gruppe P enthält.

Die zusammenhängende Gruppe Ω wirkt per Konjugation reell-linear auf $T \cong \mathbb{R}^{\dim P}$. Als auflösbare Lie-Gruppe läßt Ω dabei einen höchstens zweidimensionalen Teilraum invariant [Anhang: B.17]. Läßt eine Untergruppe von Ω einen Teilraum invariant, der vollständig in einer Richtungskomponente $T_{[p]}$ mit $p \in L_\infty$ enthalten ist, dann fixiert sie den Punkt p .

Da jeder eindimensionale reelle Teilraum von T in einer Richtungskomponente enthalten ist, bleibt der Fall zu betrachten, daß ein zweidimensionaler reeller Teilraum V von T existiert, der nicht in einer Richtungskomponente enthalten ist und auf dem Ω irreduzibel wirkt. Der Zentralisator $C_\Omega V$ von V in Ω fixiert dann ein echtes Viereck in \mathcal{P} und ist deshalb kompakt [Anhang: C.15]. Die Wirkung von Ω induziert eine irreduzible effektive Wirkung von $\Omega/C_\Omega V$ auf V . Also ist $\Omega/C_\Omega V$ zu einer Untergruppe von \mathbb{C}^\times isomorph [Anhang: B.15]. Das Urbild Θ der maximalen kompakten Untergruppe von $\Omega/C_\Omega V$ unter der kanonischen Projektion $\Omega \rightarrow \Omega/C_\Omega V$ ist eine Erweiterung der kompakten Gruppe $C_\Omega V$ mit einer kompakten Gruppe und ist deshalb selbst kompakt [Anhang: A.2]. Die Struktur von $\Omega/C_\Omega V$ liefert $\dim \Theta \geq \dim \Omega - 1$. Andererseits ist das Produkt von Θ mit der zentralen kompaktfreien abgeschlossenen Untergruppe P von Ω eine Gruppe der Dimension $\dim \Theta + 1$. Da Ω zusammenhängend ist, folgt $\Omega = P \times \Theta$. Dies zeigt auch, daß die zu Ω/P isomorphe Gruppe Θ zusammenhängend ist. Als zusammenhängende, kompakte und auflösbare Lie-Gruppe ist Θ eine Torusgruppe [Anhang: A.5 und B.6]. Die Menge der Richtungskomponenten von T ist (bezüglich der Grassmann-Topologie) zur Sphäre der Dimension $(\dim P)/2 \in \{2, 4, 8\}$ homöomorph. Nach 3.1 fixiert Θ somit die Richtungskomponente $T_{[p]}$ eines Punktes $p \in L_\infty$. Da P trivial auf L_∞ wirkt, wird p dann von der ganzen Gruppe Ω fixiert. \square

Auflösbare Automorphismengruppen

Die folgende Untersuchung von Translationsebenen mit auflösbaren Automorphismengruppen liefert eine Charakterisierung der (acht-dimensionalen) Ebenen vom Lenz-Typ V über Rees-Algebren.

Generalvoraussetzung

In diesem Abschnitt sei die Translationsebene \mathcal{P} nicht klassisch. Für den Kern \mathbb{K} von \mathcal{P} gilt dann $\mathbb{K} \neq \mathbb{H}$ (vgl. 1.26), und jeder Automorphismus von \mathcal{P} ist affin, das heißt, es

gilt $\Sigma = \Sigma_{L_\infty}$ (vgl. die Bemerkungen vor 1.23). Mit o sei ein Punkt aus P^{L_∞} bezeichnet. Da es höchstens zwei stetige Automorphismen von $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gibt, zentralisieren die zusammenhängenden Untergruppen von Σ_o die Streckungsgruppe $\Sigma_{[o, L_\infty]}$ und wirken per Konjugation \mathbb{K} -linear auf der Translationsgruppe T (vgl. 1.25).

Die Auflösbarkeit einer Untergruppe Γ von Σ_o kann man schon an der Zusammenhangskomponente $(S\Gamma)^\natural$ des reduzierten Stabilisators $S\Gamma$ ablesen:

3.3 Lemma

Ist Γ eine zusammenhängende Untergruppe von Σ_o und $\tilde{\Gamma} := \Gamma \cdot (\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural$, dann ist $\tilde{\Gamma}/(S\Gamma)^\natural$ auflösbar. Insbesondere ist $\tilde{\Gamma}$ auflösbar, falls $(S\Gamma)^\natural$ auflösbar ist.

Beweis: Da $(\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural$ von der zusammenhängenden Gruppe Γ zentralisiert wird, ist Γ ein Normalteiler des Produkts $\Gamma \cdot (\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural$, und die zu $(\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural / (\Gamma \cap (\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural)$ (algebraisch) isomorphe Faktorgruppe $\tilde{\Gamma}/\Gamma = (\Gamma \cdot (\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural) / \Gamma$ ist abelsch. Sowohl die Gruppe $S\Gamma$ als auch deren Zusammenhangskomponente sind Normalteiler von Γ , und $S\Gamma/(S\Gamma)^\natural$ ist als Faktorgruppe einer topologischen Gruppe nach ihrer Zusammenhangskomponente total unzusammenhängend. Somit ist $S\Gamma/(S\Gamma)^\natural$ als total unzusammenhängender Normalteiler der zusammenhängenden Gruppe $\Gamma/(S\Gamma)^\natural$ im Zentrum dieser Gruppe enthalten. Da $\Gamma/S\Gamma$ nach Definition von $S\Gamma$ abelsch ist und Auflösbarkeit eine Erweiterungseigenschaft ist, ergeben sich daraus die Behauptungen dieses Lemmas (man beachte, daß $(S\Gamma)^\natural$ als charakteristische Untergruppe von Γ ein Normalteiler von $\tilde{\Gamma}$ ist). □

Generalvoraussetzung

Für den Rest dieses Abschnitts sei \mathcal{P} achtdimensional.

Es folgt eine Betrachtung von Achsenstabilisatoren und ihren maximalen kompakten Untergruppen.

3.4 Lemma

Eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Δ von Σ_o fixiere auf L_∞ zwei verschiedene Punkte s und w . Ist die maximale kompakte Untergruppe K von $(S\Delta)^\natural$ auflösbar, dann ist K eine höchstens zweidimensionale Torusgruppe, und Δ ist eine höchstens fünfdimensionale abelsche Gruppe. Ist dabei Θ die maximale kompakte Untergruppe von Δ , dann ist sie eine höchstens dreidimensionale Torusgruppe, und es gilt $\Delta \cong \Theta \times \mathbb{R}^t$ mit $t \leq 2$.

Im Fall eines reellen Kerns \mathbb{K} ist Θ höchstens zweidimensional und damit Δ höchstens vierdimensional.

Beweis: Nach dem Satz über Achsenstabilisatoren [Anhang: C.16] ist $(S\Delta)^\natural$ isomorph zum direkten Produkt von K mit einer Vektorgruppe¹⁸. Insbesondere ist $(S\Delta)^\natural$ auflösbar, woraus wir mit 3.3 schließen, daß die Gruppe $\tilde{\Delta} := \Delta \cdot (\Sigma_{[o, L_\infty]})^\natural$ auflösbar ist.

¹⁸Daraus folgt auch, daß K die einzige maximale kompakte Untergruppe von $(S\Delta)^\natural$ ist.

Es sei \tilde{K} die maximale kompakte Untergruppe der zusammenhängenden abgeschlossenen (also insbesondere lokalkompakten) Untergruppe $(S\tilde{\Delta})^{\mathbb{1}}$ des Achsenstabilisators $\Sigma_{o,s,w}$. Die (nach dem Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa [Anhang: A.6]) zusammenhängende und kompakte Gruppe \tilde{K} ist als auflösbare Untergruppe der Lie-Gruppe Σ eine Torusgruppe [Anhang: A.5 und B.6]. Wir verwenden erneut den Satz über Achsenstabilisatoren [Anhang: C.16], aus dem wir nun schließen, daß $(S\tilde{\Delta})^{\mathbb{1}}$ abelsch ist und daß $\dim(S\tilde{\Delta})^{\mathbb{1}} \leq \dim \tilde{K} + 1$ gilt. Auch die (zusammenhängende) Gruppe $\tilde{\Delta}$ ist somit als fastdirektes Produkt ihrer abelschen Untergruppen $(\Sigma_{[o,L_\infty]})^{\mathbb{1}}$ und $(S\tilde{\Delta})^{\mathbb{1}}$ abelsch.

Insbesondere ist jede zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\tilde{\Delta}$ nach dem Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa isomorph zum direkten Produkt ihrer maximalen kompakten Untergruppe mit einer reellen Vektorgruppe. Mit $\tilde{\Theta}$ bezeichnen wir die maximale kompakte Untergruppe von $\tilde{\Delta}$. Als Untergruppen von $S\Sigma_o$ wirken die Torusgruppen K und $\tilde{K} = (S\tilde{\Theta})^{\mathbb{1}}$ fast effektiv auf L_∞ (vgl. 1.26). Deshalb sind sie nach R. W. Richardsons Klassifikation kompakter Wirkungen auf der 4-Sphäre [Anhang: A.12] höchstens zweidimensional. Die Faktorgruppe $\tilde{\Theta}/S\tilde{\Theta}$ ist isomorph zum Bild von $\tilde{\Theta}$ unter dem stetigen Homomorphismus $\det_{\mathbb{K}}$, also zu einer kompakten Untergruppe der multiplikativen Gruppe \mathbb{K}^\times des Kerns der Ebene, weshalb sie höchstens eindimensional ist. Wegen $\dim S\tilde{\Theta} = \dim(S\tilde{\Theta})^{\mathbb{1}}$ folgt

$$\dim \Theta \leq \dim \tilde{\Theta} = \dim S\tilde{\Theta} + \dim(\tilde{\Theta}/S\tilde{\Theta}) \leq \dim \tilde{K} + 1 \leq 3,$$

wobei Θ nur dann dreidimensional sein kann, wenn \mathbb{K}^\times eine eindimensionale kompakte Untergruppe enthält. Das ist im Fall $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}$ unmöglich.

Sind $t, \tilde{t} \in \mathbb{N}_0$ mit $\Delta \cong \Theta \times \mathbb{R}^t$ und $\tilde{\Delta} \cong \tilde{\Theta} \times \mathbb{R}^{\tilde{t}}$, dann ist $t \leq \tilde{t}$, da abgeschlossene Vektoruntergruppen des direkten Produkts einer kompakten Gruppe mit \mathbb{R}^t höchstens t -dimensional sein können. Die Faktorgruppe $\tilde{\Delta}/S\tilde{\Delta}$ ist isomorph zu $(\Sigma_{[o,L_\infty]})^{\mathbb{1}}$, also zur Zusammenhangskomponente von \mathbb{K}^\times , womit sie höchstens zweidimensional ist. Wir erhalten die Abschätzung

$$\dim \Delta \leq \dim \tilde{\Delta} = \dim S\tilde{\Delta} + \dim(\tilde{\Delta}/S\tilde{\Delta}) \leq \dim(S\tilde{\Delta})^{\mathbb{1}} + 2 \leq \dim \tilde{K} + 3 \leq 5.$$

Ist dabei $\dim \tilde{\Delta} = \dim \tilde{K} + 3$, dann muß $\dim(\tilde{\Delta}/S\tilde{\Delta}) = 2$, also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gelten. Daraus folgt, daß $\tilde{\Theta} \cap \Sigma_{[o,L_\infty]}$ eine eindimensionale Torusgruppe ist und $\dim \tilde{\Theta} = \dim \tilde{K} + 1$ gilt. In jedem Fall gilt $\dim \tilde{\Delta} \leq \dim \tilde{\Theta} + 2$, also $t \leq \tilde{t} \leq 2$. \square

Im folgenden Lemma und in der anschließenden Bemerkung könnte auf die Voraussetzung $\mathbb{K} \neq \mathbb{H}$ verzichtet werden. In den Beweisen wird von dieser Annahme kein Gebrauch gemacht.

3.5 Lemma

Es sei Γ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von Σ_o . Auf L_∞ fixiere Γ einen Punkt s . Existiert ein Punkt $w \in L_\infty$ mit einer mindestens dreidimensionalen Bahn¹⁹ $\Gamma(w) \subseteq L_\infty$ so, daß der Stabilisator Γ_w eine dreidimensionale Torusunter-

¹⁹Unter der Voraussetzung $\mathbb{K} \neq \mathbb{H}$ ist es keine zusätzliche Bedingung an Γ , daß $\Gamma(w)$ in L_∞ enthalten ist.

gruppe Θ enthält, dann wirkt die Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,os]}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$, und \mathcal{P} ist eine Ebene vom Lenz-Typ V.

Beweis: Die Gruppe Γ wirkt per Konjugation reell-linear auf der Richtungskomponente $T_{[s]}$ der Translationen in Richtung s . Weil die maximalen Torusgruppen in $GL_4\mathbb{R}$ zweidimensional sind, enthält die dreidimensionale Torusgruppe Θ somit nichttriviale Homologien mit Achse $S := os$ und Zentrum w . Mit [Anhang: C.14] folgt daraus

$$\Gamma(w) = \Gamma_{[s,S]}(w) \approx \Gamma_{[s,S]}.$$

Insbesondere ist $\Gamma_{[s,S]} = \Gamma_{[S,S]}$ zusammenhängend, und es gilt

$$\dim \Gamma_{[s,S]} = \dim \Gamma(w) \geq 3.$$

Wegen $\Gamma_{[s,S]} \neq \{\text{id}_{\mathcal{P}}\} \neq T_{[s]}$ ist $\Gamma_{[s,S]}$ nach (der dualen Fassung von) [Anhang: C.12] als zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\Sigma_{[s,S]}$ isomorph zu einer Vektorgruppe \mathbb{R}^k mit $3 \leq k \leq 4$. Auf $\Gamma_{[s,S]}$ wirkt Γ_w per Konjugation reell-linear, wobei diese Wirkung auf kanonische Weise äquivalent zur Wirkung von Γ_w auf der in $L_\infty \setminus \{s\}$ enthaltenen Bahn $\Gamma_{[s,S]}(w)$ ist [Anhang: A.7]. Der Ineffektivitätskern $\Theta_{[L_\infty]}$ der Wirkung von Θ auf L_∞ ist als Torusuntergruppe der Streckungsgruppe $\Sigma_{[o,L_\infty]}$ höchstens eindimensional. Nach R. W. Richardsons Klassifikation kompakter Wirkungen auf der 4-Sphäre [Anhang: A.12] wirkt Θ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ deshalb wie $SO_2\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R} \leq GL_4\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. Da bei dieser Wirkung kein (nichttriviales) Element eine mindestens dreidimensionale Fixmenge hat, wirkt somit $\Theta/\Theta_{[L_\infty]}$ auf $\Gamma_{[s,S]} \cong \mathbb{R}^k$ effektiv als zweidimensionale Torusuntergruppe von $GL_k\mathbb{R}$. In $GL_3\mathbb{R}$ existiert keine solche Untergruppe. Also ist $k = 4$, weshalb die Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,S]}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt [Anhang: C.11 (i)] und \mathcal{P} vom Lenz-Typ V ist. □

Die Ebenen vom Lenz-Typ V, deren Automorphismengruppe einen Achsenstabilisator mit dreidimensionaler Torusuntergruppe zuläßt, sind in Hähl [75b] Satz 6.1 bestimmt worden. Jede solche Ebene läßt eine Koordinatisierung mit einer Rees-Algebra (vgl. 1.33) zu. Wir geben hier die für diese Feststellung relevanten Teile des Beweises von Hähl [75b] Satz 6.1 wieder:

3.6 Bemerkung

In der Situation von 3.5 ist \mathcal{P} isomorph zu einer Ebene über einer Rees-Algebra.

Beweis: Die achtdimensionale kompakte Ebene \mathcal{P} ist als Ebene vom Lenz-Typ V isomorph zur Ebene über einer vierdimensionalen reellen Divisionsalgebra D . Die Ineffektivitätskerne $\Theta_{[L_\infty]}$, $\Theta_{[os]}$ und $\Theta_{[ow]}$ entsprechen dabei Untergruppen der multiplikativen Gruppen des Kerns (oder Rechtsnukleus) $\mathbb{K} = N_\rho(D)$, des Linksnukleus $N_\lambda(D)$ und des Mittelnukleus $N_\mu(D)$. Da (die maximale kompakte Untergruppe $SO_4\mathbb{R}$ von) $GL_4\mathbb{R}$ keine dreidimensionale Torusuntergruppe enthält enthalten \mathbb{K} , $N_\lambda(D)$ und $N_\mu(D)$ also jeweils einen komplexen Teilkörper. Die Divisionsalgebren mit dieser Eigenschaft sind in Rees [50] klassifiziert worden. Es sind bis auf Isotopie die Rees-Algebren, woraus folgt, daß \mathcal{P} zu einer Ebene über einer Rees-Algebra isomorph ist (vgl. 1.33 und 1.29). □

Es lassen sich nun Eigenschaften gewisser Automorphismengruppen, in denen zumindest ein Achsenstabilisator (mit minimaler Kodimension) auflösbar ist, ableiten. Die

Ausführungen nach Satz 3.9 zeigen, daß auch in den folgenden beiden Lemmata auf die Voraussetzung $\mathbb{K} \neq \mathbb{H}$ verzichtet werden könnte. In den Beweisen wird jedoch auf die Aussagen aus 3.4, in deren Beweis diese Voraussetzung eingegangen ist, Bezug genommen.

3.7 Lemma

Die mindestens achtdimensionale zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Γ von Σ_o ($= \Sigma_{o, L_\infty}$) fixiere einen Punkt $s \in L_\infty$. Des weiteren sei w ein Punkt in $L_\infty \setminus \{s\}$ mit einer Bahn $\Gamma(w)$ von minimaler Dimension. Ist die maximale kompakte Untergruppe K der Zusammenhangskomponente von $S\Gamma_w$ auflösbar (kurz: Ist $(S\Gamma_w)^\mathbb{H}$ abelsch), dann ist Γ höchstens neundimensional und wirkt transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$.

Ist dabei $\dim \Gamma_w = 5$ (was dann gleichbedeutend zu $\dim \Gamma = 9$ ist), so ist \mathcal{P} isomorph zu einer Ebene vom Lenz-Typ V über einer Rees-Algebra.

Beweis: Nach 3.4 ist Γ_w abelsch (weshalb die Auflösbarkeit von K dazu äquivalent ist, daß $(S\Gamma_w)^\mathbb{H}$ abelsch ist), und es gilt $\dim \Gamma_w \leq 5$, was

$$\dim \Gamma = \dim \Gamma(w) + \dim \Gamma_w \leq \dim L_\infty + 5 = 9$$

impliziert. Ist $\dim \Gamma_w < 5$, dann folgt $\dim \Gamma(w) \geq 4$ aus $\dim \Gamma \geq 8$. Wegen der Minimalität der Dimension der Bahn $\Gamma(w)$ sind somit alle Bahnen von Γ in $L_\infty \setminus \{s\}$ offen (siehe 1.11; vgl. auch [Anhang: C.1]). Da $L_\infty \setminus \{s\}$ zusammenhängend ist, wirkt Γ dort also transitiv. Ist $\dim \Gamma_w = 5$, dann enthält Γ_w nach 3.4 eine dreidimensionale Torusgruppe. Mit 3.5 folgt daraus, daß \mathcal{P} vom Lenz-Typ V ist (womit insbesondere Γ auch in diesem Fall transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt), und 3.6 zeigt, daß \mathcal{P} dann isomorph zu einer Ebene über einer Rees-Algebra ist. \square

Dies alles läßt sich auf auflösbare mindestens achtdimensionale Stabilisatoren von o anwenden.

3.8 Lemma

Ist Ω eine auflösbare mindestens achtdimensionale zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von Σ_o , dann fixiert Ω einen Punkt $s \in L_\infty$, und für jeden Punkt $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ gilt: $4 \leq \dim \Omega_w \leq 5$, und Ω_w enthält eine mindestens zweidimensionale Torusgruppe Θ . Außerdem ist Ω eine höchstens neundimensionale Gruppe, die transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt, und \mathcal{P} ist isomorph zu einer Ebene vom Lenz-Typ V über einer Rees-Algebra, falls ein Punktstabilisator Ω_w (mit $w \in P^{L_\infty}$) existiert, der eine dreidimensionale Torusgruppe enthält (was nach 3.4 zum Beispiel aus $\dim \Omega_w = 5$ folgt und somit insbesondere im Fall $\dim \Omega = 9$ gilt).

Beweis: Nach 3.2 fixiert Ω einen Punkt $s \in L_\infty$. Für $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ gilt

$$\dim \Omega_w = \dim \Omega - \dim \Omega(w) \geq 4$$

wegen $\dim \Omega \geq 8$ und $\dim \Omega(w) \leq \dim L_\infty = 4$. Der Rest folgt aus 3.4 und 3.7 sowie aus 3.6, da Untergruppen auflösbarer Gruppen stets auflösbar sind. Die Dimensionsabschätzung für Ω erhält man dabei erneut aus der Dimensionsformel für die Bahn und den Stabilisator von w . \square

Lüneburg [92] III. Satz 1 zeigt, daß eine auflösbare zusammenhängende abgeschlossene Lie-Untergruppe der Automorphismengruppe einer achtdimensionalen kompakten projektiven Ebene höchstens 17-dimensional ist. Als Spezialfall davon kann man auch die Abschätzung aus 3.8 erhalten, denn das Produkt von Ω mit der auflösbaren achtdimensionalen Gruppe der Translationen von \mathcal{P} ist eine auflösbare zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von Σ der Dimension $\dim \Omega + 8$.

Wir können nun die nichtklassischen Ebenen vom Lenz-Typ V über Rees-Algebren durch die Auflösbarkeit ihrer Automorphismengruppe charakterisieren.

3.9 Satz

Enthält Σ_o eine auflösbare (mindestens) neundimensionale Untergruppe, dann ist \mathcal{P} eine Ebene vom Lenz-Typ V, die isomorph zu einer Ebene über einer Rees-Algebra ist. Ist umgekehrt \mathcal{P} isomorph zu einer nichtklassischen Ebene über einer Rees-Algebra, dann sind Σ und Σ_o auflösbare Gruppen mit $\dim \Sigma_o = 9$ (und $\dim \Sigma = 17$).

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus 3.8 (man beachte, daß der Abschluß einer auflösbaren Untergruppe einer topologischen Gruppe stets auflösbar ist).

Für die Aussagen über die Automorphismengruppe nichtklassischer Ebenen über Rees-Algebren sei hier auf 1.33 oder auf die Ausführungen vor 4.15 verwiesen. □

Die (35-dimensionale) Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe der klassischen achtdimensionalen kompakten Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$ ist zwar nicht auflösbar (vgl. Lüneburg [92] III. Satz 1), aber sie enthält eine 17-dimensionale auflösbare Untergruppe: Der Stabilisator $\Sigma_{W,o}$ einer Gerade W aus $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$ und eines nicht auf W liegenden Punktes o ist isomorph zu einem semidirekten Produkt der Automorphismengruppe der Quaternionen mit der Gruppe $GL_2\mathbb{H}$ (siehe Salzmann et al. [95] 12.10). Letztere enthält die achtdimensionale auflösbare Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{C}^\times, c \in \mathbb{H} \right\}.$$

Die Automorphismengruppe von \mathbb{H} ist isomorph zur dreidimensionalen speziellen orthogonalen Gruppe $SO_3\mathbb{R}$ (siehe Salzmann et al. [95] 11.29) und enthält deshalb eine zur Torusgruppe $SO_2\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe. Somit existiert in $\Sigma_{W,o}$ eine neundimensionale auflösbare Untergruppe, und das semidirekte Produkt dieser Gruppe mit der in Σ_W normalen Elationsgruppe $\Sigma_{[W,W]} \cong \mathbb{R}^8$ ist eine 17-dimensionale auflösbare Gruppe.

Berücksichtigt man, daß jede achtdimensionale kompakte Ebene mit einer mindestens 17-dimensionalen Automorphismengruppe nach Salzmann [90] eine Translationsebene, die duale Ebene einer Translationsebene oder eine Hughes-Ebene ist (vgl. auch Abschnitt 2), dann läßt sich die Aussage des vorherigen Satzes noch verschärfen. Auflösbare Untergruppen der zu $PGL_3\mathbb{C}$ isomorphen Automorphismengruppe von $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ sind höchstens 10-dimensional, was man zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von S. Lie über komplexe Darstellungen auflösbarer Gruppen [Anhang: B.17] einsehen kann, nach dem jede auflösbare Untergruppe von $GL_3\mathbb{C}$ zu einer Gruppe oberer Dreiecksmatrizen isomorph ist (vgl. auch Lüneburg [92] III. Satz 1). Deshalb ist jede auflösbare Untergruppe der Automorphismengruppe einer nichtklassischen Hughes-Ebene höchstens 11-dimensional, denn eine solche induziert auf der klassischen Baer-Unterebene

eine auflösbare Automorphismengruppe (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 86.36), und der Ineffektivitätskern der Wirkung einer Automorphismengruppe auf einer Baer–Unterebene ist höchstens eindimensional [[Anhang: C.4](#)]. Also ist jede achtdimensionale kompakte Ebene, deren Automorphismengruppe eine 17–dimensionale auflösbare Untergruppe enthält, eine Translationsebene oder die duale Ebene einer Translationsebene, und man erhält mit [3.9](#):

3.10 Satz

Die Ebenen (vom Lenz–Typ V) über den Rees–Algebren sind genau die achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen, deren Automorphismengruppe eine 17–dimensionale auflösbare Untergruppe, also eine auflösbare Automorphismengruppe maximaler Dimension, enthält. Im nichtklassischen Fall ist dies die Zusammenhangskomponente der vollen Automorphismengruppe. □

Ein Kriterium zur Erkennung des Lenz–Typ V

Ein Kriterium zur Entscheidung, ob eine achtdimensionale kompakte Translationsebene vom Lenz–Typ V ist, liefert [3.5](#). Dort wurde ausgenutzt, daß die Automorphismengruppe eine dreidimensionale Torusgruppe enthält, deren mögliche Wirkungen auf einer Gerade man mit R. W. Richardsons Klassifikation kompakter Wirkungen auf der 4–Sphäre [[Anhang: A.12](#)] eingrenzen kann. Unter der Voraussetzung der transitiven Wirkung auf der punktierten Translationsachse lassen sich Ebenen vom Lenz–Typ V einfacher schon an der Existenz gewisser Homologien erkennen. Man beachte, daß das folgende Lemma auch ohne Voraussetzungen an die Dimension von \mathcal{P} seine Gültigkeit behält (auch im Fall $\dim P = \infty$).

3.11 Lemma

Es sei \mathcal{P} eine lokalkompakte Translationsebene mit Translationsachse L_∞ , und H sei eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von Σ , die L_∞ sowie zwei Punkte $o \in P^{L_\infty}$ und $s \in L_\infty$ fixiert. Auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirke H transitiv. Enthält H außerdem eine nichttriviale Homologie η mit einer von L_∞ verschiedenen Achse, dann wirkt schon die Untergruppe $H_{[s,os]}$ der Scherungen mit Zentrum s und Achse os transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$, womit \mathcal{P} vom Lenz–Typ V ist.

Beweis: Die Achse von η sei mit A bezeichnet. Da η ein affiner Automorphismus ist, liegt das Zentrum von η auf der von A verschiedenen und durch η fixierten Gerade L_∞ (und ist von $A \wedge L_\infty$ verschieden). Der nicht auf L_∞ liegende Fixpunkt o von η muß dann auf der Achse A liegen.

Ist $A = os$, dann folgt aus der Transitivität der Wirkung von H auf $L_\infty \setminus \{s\}$ mit dem Lemma über Homologien und Elationen [[Anhang: C.14](#)], daß $H_{[s,os]} = H_{[os,os]}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Andernfalls ist der Fixpunkt $s \in P \setminus A$ das Zentrum der Homologie η , und die zu [[Anhang: C.14](#)] duale Aussage liefert die Transitivität der Wirkung von $H_{[s,s]}$ auf $\mathcal{L}_o \setminus \{os\}$, woraus die Transitivität der Wirkung von $H_{[s,os]} = H_{[s,s]}$ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ folgt (man beachte, daß H die Gerade L_∞ sowie die Punkte o und s fixiert und daß für eine Untergruppe von Σ_{o,s,L_∞} die Transitivität der Wirkung auf $L_\infty \setminus \{s\}$ gleichbedeutend mit der Transitivität der Wirkung auf $\mathcal{L}_o \setminus \{os\}$ ist). □

Zusammen mit 3.8 liefert dies in der uns interessierenden Situation:

3.12 Folgerung

Es seien \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Translationsebene und Ω eine auflösbare mindestens achtdimensionale abgeschlossene Untergruppe des Stabilisators eines nicht auf der Translationsachse L_∞ liegenden Punktes in Σ_{L_∞} . Enthält die Zusammenhangskomponente von Ω eine nichttriviale Homologie mit einer von L_∞ verschiedenen Achse, dann ist \mathcal{P} vom Lenz-Typ V. □

Wirkungen kompakter Gruppen auf kontrahierbaren Räumen

Im weiteren Verlauf betrachten wir Translationsebenen, die insofern „nah am Lenz-Typ V sind“, als ihre Automorphismengruppe transitiv auf der punktierten Translationsachse wirkt. Es wird sich nun herausstellen, daß jede kompakte Untergruppe einer derartig auf einer Gerade wirkenden Automorphismengruppe einen weiteren Punkt dieser Gerade fixiert.

Wir benötigen einige Hilfsmittel aus der algebraischen Topologie (siehe dazu zum Beispiel Spanier [66] Chap. 7). Sind X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann heißt eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ Homotopieinverse zu f , wenn zwei stetige Abbildungen $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ und $G : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ existieren mit

$$F(x, 0) = g(f(x)), \quad F(x, 1) = x, \quad G(y, 0) = f(g(y)) \quad \text{und} \quad G(y, 1) = y$$

für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$. Existiert eine solche Homotopieinverse, dann heißt f Homotopieäquivalenz zwischen X und Y , und die beiden Räume werden als zueinander homotopieäquivalent bezeichnet. Eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen X und Y ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, die eine Bijektion zwischen den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y sowie in jeder Dimension $n \geq 0$ einen Isomorphismus $f_\# : \pi_n X \rightarrow \pi_n Y$ zwischen den Homotopiegruppen von X und Y induziert. Die topologischen Räume X und Y bezeichnen wir dann als zueinander schwach homotopieäquivalent.

Jede Homotopieäquivalenz ist stets auch eine schwache Homotopieäquivalenz (vgl. Spanier [66] Chap. 7, Sec. 3, Theorem 15). Für CW-Komplexe gilt auch die Umkehrung (siehe Spanier [66] Chap. 7, Sec. 6, Corollary 24). Da jede endlichdimensionale Mannigfaltigkeit zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent ist (siehe Hirsch [76] Chap. 6, Theorem 4.3) erhalten wir:

3.13 Lemma

Zwei Lie-Gruppen sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie schwach homotopieäquivalent sind. □

Schwache Homotopieäquivalenz liegt zum Beispiel zwischen gewissen Gruppen und Untergruppen vor, wenn ihr Quotient kontrahierbar ist.

3.14 Lemma

Es seien Γ eine zusammenhängende Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von Γ . Ist Γ/H kontrahierbar, so sind Γ und H schwach homotopieäquivalent. Insbesondere ist H dann zusammenhängend.

Beweis: Die Inklusion $\iota : H \hookrightarrow \Gamma$ liefert zusammen mit der kanonischen Projektion $\kappa : \Gamma \rightarrow \Gamma/H$ eine exakte Homotopie-Sequenz

$$\cdots \rightarrow \pi_k H \rightarrow \pi_k \Gamma \rightarrow \pi_k(\Gamma/H) \rightarrow \pi_{k-1} H \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(\Gamma/H) \rightarrow \pi_0 H \rightarrow \pi_0 \Gamma$$

(siehe Steenrod [51] 7.5 und 17.4; weitere Zitate hierfür liefert der Beweis von Salzmann et al. [95] 96.12)²⁰. Mit der Kontrahierbarkeit von Γ/H folgt daraus, daß ι eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen H und Γ ist. Um dabei auch die Bijektivität der von ι zwischen den Wegzusammenhangskomponenten induzierten Abbildung zu erhalten, nutzen wir den Wegzusammenhang der zusammenhängenden Lie-Gruppe Γ aus. Aus der Exaktheit der obigen Sequenz folgt nämlich, daß auch H wegzusammenhängend ist. \square

Statt die Exaktheit der Homotopiesequenz wie in obigem Beweis zu verwenden, kann man den Zusammenhang von H aus dem einfachen Zusammenhang von Γ/H auch direkter erhalten, wenn man sich überlegt, daß die kanonische Abbildung $\Gamma/H^{\text{h}} \rightarrow \Gamma/H$ eine Überlagerung ist (vgl. Salzmann et al. [95] 94.4 (a)).

Im Fall von Lie-Gruppen ergeben sich in der Situation von 3.14 unter Ausnutzung eines Satzes von H. Scheerer Konsequenzen für kompakte Untergruppen.

3.15 Lemma

Sind Γ eine zusammenhängende Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von Γ derart, daß Γ und H schwach homotopieäquivalent sind, dann enthält H eine maximale kompakte Untergruppe, und jede solche ist auch eine maximale kompakte Untergruppe von Γ .

Beweis: Nach 3.14 ist H zusammenhängend. Aus dem Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa [Anhang: A.6] folgt deshalb, daß H eine maximale kompakte Untergruppe K enthält, die zusammenhängend ist und mit der $H \approx K \times \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Insbesondere sind K und H homotopieäquivalent. Auf Γ angewendet liefert der Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa, daß K in einer maximalen kompakten Untergruppe Λ von Γ liegt, die wiederum zusammenhängend und homotopieäquivalent zu Γ ist. Nach 3.13 sind die schwach homotopieäquivalenten Lie-Gruppen Γ und H homotopieäquivalent, was insgesamt die Homotopieäquivalenz von K und Λ zur Folge hat. Scheerer [68] zeigt, daß homotopieäquivalente zusammenhängende kompakte Lie-Gruppen lokal isomorph sind. Da K in Λ enthalten ist, bedeutet dies hier $K = \Lambda$. \square

Für unsere Zwecke genügt die Aussage aus 3.15. Sie läßt sich allerdings noch ein wenig verallgemeinern. Nutzt man nämlich statt des Resultats von H. Scheerer dessen Verallgemeinerung aus Boekholt [98] aus, dann kann in 3.15 die schwache Homotopieäquivalenz von Γ und H durch die scheinbar schwächere Bedingung ersetzt werden, daß Γ und H in jeder Dimension isomorphe Homotopiegruppen haben.

Obige Beobachtungen können bei transitiven Wirkungen lokalkompakter Gruppen auf kontrahierbaren Räumen ausgenutzt werden.

²⁰Für $M = \Gamma/\Delta$ mit einer abgeschlossenen Untergruppe Δ von Γ (und der kanonischen Wirkung von Γ auf Γ/Δ) ist Salzmann et al. [95] 96.12 korrekt. Um in anderen Fällen die im Beweis von Salzmann et al. [95] 96.12 benötigte Homöomorphie $\Gamma/\Gamma_a \approx M$ schließen zu können, müßte man zum Beispiel zusätzlich voraussetzen, daß Γ ein Lindelöf-Raum ist (vgl. [Anhang: A.8]).

3.16 Lemma

Ist Γ eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis, die transitiv auf einem kontrahierbaren lokalkompakten Raum X wirkt, dann fixiert jede kompakte Untergruppe von Γ einen Punkt in X .

Beweis: Es sei N der Ineffektivitätskern der Wirkung von Γ auf X . Die kanonische Projektion $p : \Gamma \rightarrow \Gamma/N$ ist eine stetige offene Surjektion, woraus folgt, daß die Faktorgruppe $\Psi := \Gamma/N$ eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis ist. Da die Wirkung von Γ auf X eine effektive transitive Wirkung von Ψ auf X induziert, liefert der Satz von J. Szenthe [Anhang: B.10], daß Ψ eine Lie-Gruppe ist. Für $x \in X$ impliziert die Transitivität der Wirkung von Ψ auf X , daß $\Psi/\Psi_x \approx X$ gilt [Anhang: A.8]. Also ist Ψ/Ψ_x kontrahierbar, und Ψ_x ist nach 3.14 zusammenhängend. Deshalb existiert nach dem Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa [Anhang: A.6] eine maximale kompakte Untergruppe Φ in Ψ_x , und 3.15 zeigt mit 3.14, daß Φ auch eine maximale kompakte Untergruppe von Ψ ist. Ist nun K eine kompakte Untergruppe von Γ , dann ist $p(K)$ eine kompakte Untergruppe von Ψ . Eine solche ist nach dem Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa stets in einer maximalen kompakten Untergruppe von Ψ enthalten, die wiederum zu Φ konjugiert ist, woraus folgt, daß K einen Punkt von X fixiert. □

Für Automorphismengruppen zusammenhängender kompakter Ebenen bedeutet dies:

3.17 Folgerung

Eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Γ der Automorphismengruppe einer zusammenhängenden kompakten projektiven Ebene fixiere einen Punkt s auf einer Gerade L . Wirkt Γ transitiv auf $L \setminus \{s\}$, dann fixiert jede kompakte Untergruppe von Γ einen weiteren Punkt auf L .

Beweis: Die punktierte Gerade $L \setminus \{s\}$ ist kontrahierbar, und Γ ist eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis (siehe Salzmann et al. [95] 42.8 und 44.3). □

Charakterisierung auflösbarer Automorphismengruppen

Wir können nun große auflösbare Automorphismengruppen achtdimensionaler kompakter Translationsebenen folgendermaßen charakterisieren:

3.18 Satz

Ist die Zusammenhangskomponente Σ^1 der Gruppe Σ mindestens 16-dimensional, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Σ^1 ist auflösbar.
- (ii) Σ^1 fixiert einen Punkt $s \in L_\infty$ und wirkt transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$, und es existieren Punkte $o \in P^{L_\infty}$ und $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ so, daß die maximale kompakte Untergruppe K von $(S\Sigma_{o,w})^1$ auflösbar (also eine Torusgruppe) ist.

Die Ebene \mathcal{P} ist dann nicht klassisch.

Beweis: Es sei zunächst $\Sigma^{\mathbb{1}}$ eine auflösbare Gruppe. Weil \mathcal{P} dann nicht klassisch ist (vgl. die Bemerkungen nach Satz 3.9), wird L_∞ von Σ fixiert, und nach 3.2 fixiert $\Sigma^{\mathbb{1}}$ einen Punkt $s \in L_\infty$. Für $o \in P^{L_\infty}$ gilt $\Sigma = T \rtimes \Sigma_o$. Dies impliziert $\dim \Sigma_o^{\mathbb{1}} = \dim \Sigma_o \geq 8$ und aus 3.8 folgt, daß schon $\Sigma^{\mathbb{1}}_o = \Sigma_o^{\mathbb{1}}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Da Untergruppen der auflösbaren Gruppen stets auflösbar sind, ergibt sich daraus insgesamt die Implikation (i) \Rightarrow (ii).

Es wirke nun umgekehrt Σ transitiv auf der punktierten Translationsachse $L_\infty \setminus \{s\}$, und für $o \in P^{L_\infty}$ und $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ sei die maximale kompakte Untergruppe K von $(S\Sigma_{o,w})^{\mathbb{1}}$ auflösbar. Wir betrachten ein Levi-Komplement Ψ in $\Sigma_o^{\mathbb{1}}$. Nach Bödi [96] Corollary 6.2 ist Ψ kompakt und fixiert deshalb nach 3.17 einen weiteren Punkt auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Da mit $\Sigma^{\mathbb{1}}$ auch $\Sigma_o^{\mathbb{1}} = \Sigma^{\mathbb{1}}_o$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt, können wir annehmen, daß Ψ in $\Sigma_{o,w}$ enthalten ist. Die halbeinfache Gruppe Ψ hat keine abelsche Faktorgruppe und ist deshalb eine Untergruppe von $S\Sigma_{o,w}$. Als zusammenhängende kompakte Gruppe ist Ψ also in der (nach dem Satz über Achsenstabilisatoren [Anhang: C.16] einzigen) maximalen kompakten Untergruppe K von $(S\Sigma_{o,w})^{\mathbb{1}}$ enthalten. Aus der Auflösbarkeit von K und der Halbeinfachheit von Ψ folgt dann $\Psi = \{\text{id}_{\mathcal{P}}\}$ und damit die Auflösbarkeit von $\Sigma_o^{\mathbb{1}}$. Die Auflösbarkeit von $\Sigma^{\mathbb{1}}$ ergibt sich nun aus der Tatsache, daß $\Sigma^{\mathbb{1}}$ ein semidirektes Produkt von $\Sigma_o^{\mathbb{1}}$ mit der auflösbaren Vektorgruppe der Translationen $T \cong \mathbb{R}^8$ ist. \square

Mit Hilfe von 3.7 läßt sich obige Bedingung (ii) noch abschwächen:

3.19 Bemerkung

In 3.18 kann die Transitivität der Wirkung von $\Sigma^{\mathbb{1}}$ auf $L_\infty \setminus \{\infty\}$ dadurch ersetzt werden, daß der Punkt w unter den Punkten von $L_\infty \setminus \{s\}$ eine Bahn minimaler Dimension hat. Wegen $\dim \Sigma_o = \dim \Sigma - \dim T \geq 8$ folgt daraus nämlich die im Punkt (ii) verlangte Transitivität. \square

Andererseits impliziert die Transitivität der Wirkungen von Σ auf der affinen Punktmenge P^{L_∞} und auf der punktierten Gerade $L_\infty \setminus \{s\}$, daß die Achsenstabilisatoren $\Sigma_{os,ow} = \Sigma_{o,w}$ mit $o \in P^{L_\infty}$ und $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ alle isomorph sind.

Auflösbare lineare Gruppen

Die Konjugationswirkung einer auflösbaren zusammenhängenden Gruppe $\Gamma \leq \Sigma_{o,L_\infty}$ (mit $o \in P^{L_\infty}$) auf der Komponente $T_{[s]}$ aller Translationen in Richtung eines in L_∞ enthaltenen Fixpunktes s von Γ (vgl. 3.2) ist eine lineare Wirkung einer auflösbaren Gruppe auf \mathbb{R}^4 . Solche Wirkungen sollen nun untersucht werden. Zunächst führen wir die folgenden abkürzenden Bezeichnungen für einige Matrizen­gruppen ein. Es seien

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R} ; A, B \in \text{GL}_2\mathbb{R}, U \in \text{M}_2\mathbb{R} \right\}, \\ B &:= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R} ; U \in \text{M}_2\mathbb{R} \right\}, \\ \Delta &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R} ; A, B \in \mathbb{C}^\times \right\} \end{aligned}$$

und

$$\Theta := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R} ; A, B \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \right\}$$

(mit $\mathbb{C}^\times \subseteq \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$, vgl. 1.1; man beachte auch $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} = \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \leq \mathbb{C}^\times$).

3.20 Lemma

Es sei Φ eine auflösbare zusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_4\mathbb{R}$. Enthält Φ eine zweidimensionale Torusgruppe, dann ist Φ zu einer Untergruppe von

$$B \rtimes \Delta = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R} ; A, B \in \mathbb{C}^\times, U \in \mathrm{M}_2\mathbb{R} \right\}$$

konjugiert.

Beweis: Wir betrachten die gewöhnliche Wirkung²¹ von Φ auf \mathbb{R}^4 . Da Φ auflösbar ist, existiert in \mathbb{R}^4 ein Φ -invarianter Teilraum der Dimension 1 oder 2 [Anhang: B.17]. Die in Φ enthaltene zweidimensionale Torusgruppe ist als maximale Torusgruppe in $\mathrm{GL}_4\mathbb{R}$ zu Θ konjugiert [Anhang: B.7]. Da Θ keinen eindimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^4 invariant läßt, läßt Φ also einen zweidimensionalen Teilraum invariant und ist somit konjugiert zu einer Untergruppe von A .

Auch in A sind die zweidimensionalen Torusgruppen als maximale Torusgruppen zueinander konjugiert, weshalb Φ sogar konjugiert zu einer Untergruppe $\tilde{\Phi}$ von A ist, in der die Torusgruppe Θ enthalten ist. Die Bilder der stetigen Projektionen

$$\tilde{\Phi} \rightarrow \mathrm{GL}_2\mathbb{R} : \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \mapsto A \quad \text{und} \quad \tilde{\Phi} \rightarrow \mathrm{GL}_2\mathbb{R} : \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \mapsto B$$

sind auflösbare zusammenhängende Untergruppen von $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$, die jeweils $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ enthalten. Das Erzeugnis zweier verschiedener Torusuntergruppen von $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ ist eine mindestens zweidimensionale Lie-Untergruppe von $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$. Zweidimensionale Lie-Gruppen sind abelsch, wenn sie eine Torusuntergruppe enthalten. Da $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ keine zweidimensionale Torusuntergruppe enthält, erzeugen zwei verschiedene zu $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ konjugierte Untergruppen von $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ somit schon die gesamte dreidimensionale Gruppe $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$. Diese fasteinfache Gruppe ist in keiner auflösbaren Gruppe enthalten. Deshalb ist $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ normal in den Bildern der obigen Projektionen. Die Zusammenhangskomponente des Normalisators von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ in $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ ist aber gerade \mathbb{C}^\times , woraus die Behauptung folgt. \square

3.21 Folgerung

Enthält eine auflösbare Untergruppe von $\mathrm{GL}_4\mathbb{R}$ eine zweidimensionale Torusgruppe, dann ist sie höchstens achtdimensional. \square

Es bezeichne nun κ die Wirkung von $\Theta = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ auf $\mathrm{M}_2\mathbb{R}$, die durch die Konjugation von Θ auf B induziert wird. Das heißt, es sei $\kappa : \Theta \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{M}_2\mathbb{R})$ mit

$$\kappa\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) : \mathrm{M}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{M}_2\mathbb{R} : U \mapsto B^{-1}UA$$

für alle $A, B \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$. Für die folgenden Betrachtungen sei auch an die Involution J aus 1.1 und insbesondere an die Gleichung $zJ = J\bar{z}$ für $z \in \mathbb{C} \subseteq \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ erinnert.

²¹Matrizenwirkung von links auf Spaltenvektoren

3.22 Lemma

Es gibt genau vier κ -invariante zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen der additiven Gruppe von $M_2\mathbb{R}$, nämlich $M_2\mathbb{R}$, \mathbb{C} , $\mathbb{C}J$ und $\{0\}$.

Beweis: Durch κ wird der vierdimensionale reelle Vektorraum $M_2\mathbb{R}$ zu einem Θ -Modul. Die κ -invarianten zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen von $(M_2\mathbb{R}, +)$ sind Θ -Untermoduln von $M_2\mathbb{R}$ [Anhang: B.5]. Da die Matrixmultiplikation von Elementen aus $\mathbb{C} \subseteq M_2\mathbb{R}$ mit Elementen aus $SO_2\mathbb{R} = S_{\mathbb{C}}$ der gewöhnlichen komplexen Multiplikation entspricht, sind die reellen Teilräume \mathbb{C} und $\mathbb{C}J$ irreduzible Θ -Untermoduln von $M_2\mathbb{R}$. Wegen $AUJ = UJA^{-1}$ und $AU = UA$ für alle $A \in SO_2\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ und alle $U \in \mathbb{C}$ sind außerdem die Kerne der durch κ induzierten Wirkungen von Θ auf \mathbb{C} und auf $\mathbb{C}J$ verschieden, weshalb diese beiden Untermoduln nicht isomorph sind. Da zusätzlich $M_2\mathbb{R} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}J$ gilt, enthält $M_2\mathbb{R}$ dann bekanntlich außer $\{0\}$, \mathbb{C} , $\mathbb{C}J$ keine weiteren echten Θ -Untermoduln: Ist nämlich V ein Θ -Untermodul von $M_2\mathbb{R}$, so sind die Bilder und die Kerne der Projektionen (längs $\mathbb{C}J$ bzw. längs \mathbb{C}) von V auf die irreduziblen, nicht isomorphen Θ -Untermoduln \mathbb{C} und $\mathbb{C}J$ in $\{\{0\}, \mathbb{C}, \mathbb{C}J\}$ enthalten. □

3.23 Lemma

Es sei Φ eine auflösbare zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $GL_4\mathbb{R}$, die eine zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorphe Untergruppe Δ_Φ enthält. Dann ist Φ zu $\tilde{B} \rtimes \Delta$ konjugiert, wobei \tilde{B} eine der Gruppen

$$\{0\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}; U \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{oder} \quad B$$

ist. Das Element aus $GL_4\mathbb{R}$, mit dem konjugiert wird, kann dabei so gewählt werden, daß es Δ_Φ auf Δ wirft.

Beweis: Nach 3.20 ist Φ konjugiert zu einer Untergruppe $\tilde{\Phi}$ des semidirekten Produkts $B \rtimes \Delta$. In $B \rtimes \Delta$ ist die zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorphe Untergruppe Δ der Zentralisator der maximalen Torusuntergruppe Θ . Mit den maximalen Torusgruppen [Anhang: B.7] sind auch deren Zentralisatoren zueinander konjugiert. Wir können also erreichen, daß Δ_Φ bei der Konjugation auf Δ abgebildet wird. Es ist dann $\tilde{\Phi} = (B \cap \tilde{\Phi}) \rtimes \Delta$. Die Möglichkeiten für den Normalteiler $B \cap \tilde{\Phi}$ von $\tilde{\Phi}$ liefert 3.22, und die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Konjugation mit

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}$$

die beiden Untergruppen

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}; A, B \in \mathbb{C}^\times, U \in \mathbb{C} \right\}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}; A, B \in \mathbb{C}^\times, U \in \mathbb{C}J \right\}$$

vertauscht und dabei Δ invariant läßt. □

3.24 Bemerkung

In 3.23 ist \tilde{B} die Kommutatorgruppe von $\tilde{B} \rtimes \Delta$. Das Element, mit dem konjugiert wird, wirft also zusätzlich die Kommutatorgruppe von Φ auf \tilde{B} . Daraus folgt, daß die Kommutatorgruppe von Φ im Fall $\tilde{B} \notin \{\{0\}, B\}$ ein minimaler Normalteiler von Φ ist, denn dann wirkt zum Beispiel die Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R}; A \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

von Δ per Konjugation transitiv auf $\tilde{B} \setminus \{\mathbb{I}_4\}$. □

Wir beschreiben nun noch die Automorphismen der Gruppen aus 3.23:

3.25 Lemma

Es sei $\Phi := \tilde{B} \rtimes \Delta$ mit \tilde{B} wie in 3.23, das heißt, es gelte

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R}; A, B \in \mathbb{C}^\times, U \in \mathcal{U} \right\}$$

mit $\mathcal{U} \in \{\{0\}, \mathbb{C}, \mathrm{M}_2\mathbb{R}\}$. Die Automorphismen von Φ , die Δ invariant lassen, sind genau die Abbildungen

$$\Phi \rightarrow \Phi : \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho_1(A)\sigma_1(B) & 0 \\ \varrho_2(A)\xi(U)\sigma_1(B) & \varrho_2(A)\sigma_2(B) \end{pmatrix},$$

wobei ξ ein Automorphismus von $(\mathcal{U}, +)$ und $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2$ Homomorphismen von \mathbb{C}^\times auf sich derart sind, daß

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times : (A, B) \mapsto (\varrho_1(A)\sigma_1(B), \varrho_2(A)\sigma_2(B))$$

ein Automorphismus ist und

$$\varrho_2(A)\xi(UA) = \xi(U)\varrho_1(A) \quad \text{sowie} \quad \xi(BU)\sigma_1(B) = \sigma_2(B)\xi(U)$$

für alle $A, B \in \mathbb{C}^\times$ und alle $U \in \mathcal{U}$ gilt.

Beweis: Als Kommutatorgruppe von Φ bleibt

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R}; U \in \mathcal{U} \right\}$$

unter allen Automorphismen von Φ invariant. Durch Einschränkung auf die Kommutatorgruppe und auf Δ weist man deshalb leicht nach, daß die Automorphismen von Φ , die Δ invariant lassen, die angegebene Gestalt haben. □

Ebenen mit großen auflösbaren Automorphismengruppen

Wir setzen weiterhin voraus, daß \mathcal{P} eine nichtklassische achtdimensionale kompakte Translationsebene ist und betrachten eine auflösbare mindestens achtdimensionale zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Ω des Stabilisators Σ_o eines Punktes $o \in P^{L_\infty}$. Nach 3.8 ist Ω höchstens neundimensional, fixiert einen Punkt $s \in L_\infty$ und

wirkt transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Die Verbindungsgerade os bezeichnen wir mit S . Des weiteren sei w ein von s verschiedener Punkt auf L_∞ . Der Fall, daß Ω eine dreidimensionale Torusgruppe enthält, wurde in 3.5 behandelt. Es liegt dann eine Ebene vom Lenz-Typ V über einer Rees-Algebra vor (vgl. 3.6). Im folgenden enthalte Ω deshalb keine solche dreidimensionale Torusgruppe. Insbesondere ist Ω dann achtdimensional, und der nach 3.14 zusammenhängende Stabilisator Ω_w eines Punktes $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ (man beachte, daß gemäß [Anhang: A.8] der Faktorraum $\Omega/\Omega_w \approx \Omega(w) = L_\infty \setminus \{s\} \approx \mathbb{R}^4$ kontrahierbar ist) ist nach 3.4 zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorph. Es soll hier untersucht werden, ob \mathcal{P} vom Lenz-Typ V ist. Da dies nach 3.12 der Fall ist, wenn Ω eine (nichttriviale) Homologie mit einer Achse durch o enthält, setzen wir schließlich voraus, daß keine solche Homologie existiert.

Zur weiteren Bestimmung der Eigenschaften von Ω betrachten wir die Konjugationswirkung von Ω auf $T_{[s]}$ und die von der Konjugationswirkung auf T induzierte Wirkung auf dem Faktorraum $T/T_{[s]}$. Wir erhalten so zwei Darstellungen φ_S und $\varphi_{\mathcal{L}_s}$ von Ω in $GL_4\mathbb{R}$, wobei φ_S zur Wirkung von Ω auf $T_{[s]}$ gehöre (die zur Wirkung auf $S \setminus \{s\}$ äquivalent ist) und $\varphi_{\mathcal{L}_s}$ zur Wirkung von Ω auf $T/T_{[s]}$ (die zur Wirkung auf $\mathcal{L}_s \setminus \{L_\infty\}$ äquivalent ist). Wir betrachten diese beiden Wirkungen zunächst simultan. Dazu sei

$$\varphi \in \{\varphi_S, \varphi_{\mathcal{L}_s}\}.$$

3.26 Lemma

Der Ineffektivitätskern von φ ist die Scherungsgruppe $\Omega_{[s,S]}$. Insbesondere wirkt die Gruppe Ω_w effektiv auf $T_{[s]}$ bzw. auf $T/T_{[s]}$, und es gilt $\varphi(\Omega_w) \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$.

Beweis: Da Ω nach Voraussetzung keine Homologie mit einer Achse durch o enthält und L_∞ sowie o fixiert, ist $\Omega_{[S]} = \Omega_{[s,S]} = \Omega_{[s]}$ der Ineffektivitätskern von φ , und da Ω_w einen trivialen Schnitt mit $\Omega_{[s,S]}$ hat, ist die Einschränkung von φ auf Ω_w injektiv. Als kompakte Gruppe wird die zu $SO_2\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R} \leq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorphe zweidimensionale Torusuntergruppe von $\Omega_w \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ auf eine zweidimensionale Torusuntergruppe Θ von $GL_4\mathbb{R}$ abgebildet. Weil Ω_w eine vierdimensionale abelsche Gruppe ist, ist $\varphi(\Omega_w)$ dann gleich dem zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorphen Zentralisator von Θ in $GL_4\mathbb{R}$. \square

Nach 3.23 können wir nun durch eine geeignete Basiswahl erreichen, daß

$$\varphi(\Omega) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}; A, B \in \mathbb{C}^\times, U \in \mathcal{U} \right\} \quad (2)$$

mit $\mathcal{U} \in \{\{0\}, \mathbb{C}, M_2\mathbb{R}\}$ und

$$\varphi(\Omega_w) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}; A, B \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

gilt. Das volle Urbild Ψ der Kommutatorgruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in GL_4\mathbb{R}; U \in \mathcal{U} \right\}$$

von $\varphi(\Omega)$ unter dem Homomorphismus φ ist ein Normalteiler von Ω . Man erhält Ψ wegen $\text{Ker } \varphi = \Omega_{[s,S]}$ auch als Urbild der Kommutatorgruppe von $\Omega/\Omega_{[s,S]}$ unter der kanonischen Projektion $\Omega \rightarrow \Omega/\Omega_{[s,S]}$, was bedeutet, daß man unabhängig von der Basiswahl und unabhängig davon, ob man $\varphi = \varphi_S$ oder $\varphi = \varphi_{\mathcal{L}_s}$ betrachtet, für Ψ stets dieselbe Untergruppe von Ω erhält.

3.27 Lemma

- (i) Die (achtdimensionale) Gruppe Ω ist ein semidirektes Produkt $\Psi \rtimes \Omega_w$ (womit Ψ insbesondere zusammenhängend und vierdimensional ist), und Ψ wirkt scharf transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$.
- (ii) Es gilt $4 - \dim \Omega_{[s,S]} = \dim \varphi(\Psi) = \dim \mathcal{T} \in \{0, 2, 4\}$.
- (iii) Die Zusammenhangskomponente $(\Omega_{[s,S]})^\natural$ der Scherungsgruppe $\Omega_{[s,S]}$ ist im Zentrum $C\Psi$ von Ψ enthalten. Ist $\dim \varphi(\Psi) \neq 2$, so ist Ψ sogar abelsch.
- (iv) Die Kommutatorgruppe von Ψ ist eine höchstens eindimensionale Untergruppe von $\Omega_{[s,S]}$.

Beweis: (i) Offensichtlich ist $\varphi(\Omega) = \varphi(\Psi) \rtimes \varphi(\Omega_w)$. Da $\text{Ker } \varphi$ vollständig im Urbild Ψ von $\varphi(\Psi)$ enthalten ist und einen trivialen Schnitt mit Ω hat, liefert dies $\Omega = \Psi \rtimes \Omega_w$. Insbesondere wirkt Ψ scharf transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$, denn Ω wirkt dort transitiv.

(ii) Aus der Beschreibung von $\varphi(\Omega)$ und Ψ folgt $\dim \varphi(\Psi) = \dim \mathcal{T} \in \{0, 2, 4\}$ und $\dim \varphi(\Omega) = \dim \varphi(\Omega_w) + \dim \varphi(\Psi) = 4 + \dim \varphi(\Psi)$. Wegen $\Omega_{[s,S]} = \text{Ker } \varphi$ gilt andererseits $\dim \varphi(\Omega) = \dim \Omega - \dim \Omega_{[s,S]} = 8 - \dim \Omega_{[s,S]}$.

(iii) Bei geeigneter Basiswahl für \mathcal{T} läßt sich $\Omega_{[s,S]}$ (effektiv) als abgeschlossene Untergruppe der zur Vektorgruppe \mathbb{R}^{16} isomorphen Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_4 & 0 \\ M & \mathbb{I}_4 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R} ; M \in \text{M}_4\mathbb{R} \right\}$$

von $\text{GL}_8\mathbb{R}$ darstellen. Insbesondere ist $\Omega_{[s,S]}$ abelsch, die Zusammenhangskomponente von $\Omega_{[s,S]}$ ist eine reelle Vektorgruppe,²² und im Fall $\dim \Omega_{[s,S]} = 0$ ist $\Omega_{[s,S]}$ diskret (vgl. B.5)²³. Im Fall $\dim \varphi(\Psi) = 0$ ist die zusammenhängende Gruppe Ψ in $\text{Ker } \varphi = \Omega_{[s,S]}$ enthalten, woraus folgt, daß Ψ als volles Urbild von $\varphi(\Psi)$ gleich der (abelschen) Gruppe $\Omega_{[s,S]}$ ist. Ist $\dim \varphi(\Psi) = 4$, so folgt $\dim \Omega_{[s,S]} = 0$ aus (ii). Als abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe Ω ist $\Omega_{[s,S]}$ dann diskret, und φ sowie die Einschränkung von φ auf Ψ sind Überlagerungen [Anhang: B.3]. Angesichts des einfachen Zusammenhangs von $\varphi(\Psi) \cong \mathbb{R}^4$ folgt $\Psi \cong \mathbb{R}^4$. Es bleibt, die Behauptung für den Fall $\dim \varphi(\Psi) = 2$ zu zeigen. In diesem Fall ist $(\Omega_{[s,S]})^\natural$ eine zu \mathbb{R}^2 isomorphe Vektorgruppe, und Ω bewirkt per Konjugation stetige, also lineare Automorphismen dieser Vektorgruppe. Da $(\Omega_{[s,S]})^\natural$ von $\text{Ker } \varphi = \Omega_{[s,S]}$ zentralisiert wird, induziert diese Konjugationswirkung von Ω auf $(\Omega_{[s,S]})^\natural$ eine lineare Darstellung $\kappa : \varphi(\Omega) \rightarrow \text{GL}_2\mathbb{R}$.

Enthält $\kappa(\varphi(\Omega))$ eine Torusgruppe, dann ist $\kappa(\varphi(\Omega))$ als auflösbare Untergruppe von $\text{GL}_2\mathbb{R}$ zu einer Untergruppe von \mathbb{C}^\times isomorph, weshalb die zur additiven Gruppe von \mathbb{C} isomorphe Gruppe $\varphi(\Psi)$ in diesem Fall einen nichttrivialen Schnitt mit $\text{Ker } \kappa$ haben muß. Da $\varphi(\Psi)$ im zu betrachtenden Fall nach 3.24 ein minimaler Normalteiler von $\varphi(\Omega)$ ist, folgt daraus, daß $\varphi(\Psi)$ vollständig in $\text{Ker } \kappa$ enthalten ist, was bedeutet, daß $(\Omega_{[s,S]})^\natural$ von Ψ zentralisiert wird.

Enthält $\kappa(\varphi(\Omega))$ jedoch keine Torusgruppe, dann enthält $\text{Ker } \kappa$ die Involution

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R}.$$

²²Unter Ausnutzung der dualen Fassungen von [Anhang: C.9 und C.12] erhält man dies auch, wenn \mathcal{P} keine Translationsebene ist, sofern $\Sigma_{[s,s]} \setminus \Sigma_{[s,S]}$ nicht leer ist.

²³Auch dies gilt in allgemeineren Situationen, solange Ω eine Lie-Gruppe ist.

Mit dieser Involution enthält der Normalteiler $\text{Ker } \kappa$ für jedes $U \in \mathbb{C}$ das Element

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ \frac{1}{2}U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ \frac{1}{2}U & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Auch in diesem Fall ist also $\varphi(\Psi)$ eine Untergruppe von $\text{Ker } \kappa$.

(iv) Im Fall $\dim \varphi(\Psi) \in \{0, 4\}$ ist Ψ nach (iii) abelsch. Es bleibt erneut, den Fall $\dim \varphi(\Psi) = 2$ zu betrachten. Da $\Psi/\Omega_{[s,S]} = \Psi/\text{Ker } \varphi$ (algebraisch) zu $\varphi(\Psi)$ isomorph und damit abelsch ist, ist die Kommutatorgruppe von Ψ in $\Omega_{[s,S]}$ enthalten. Bezeichnen \mathfrak{l} die (vierdimensionale) Lie-Algebra von Ψ (man beachte, daß Ψ als Urbild der in $\varphi(\Omega)$ abgeschlossenen Untergruppe $\varphi(\Psi)$ eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe Ω ist) und \mathfrak{s} die (zweidimensionale) Lie-Algebra von $\Omega_{[s,S]}$, dann ist also die Kommutatoralgebra \mathfrak{l}' in der zweidimensionalen und nach (iii) zentralen Unteralgebra \mathfrak{s} enthalten. Daraus folgt, daß für jedes Komplement \mathfrak{v} von \mathfrak{s} in \mathfrak{l} die Kommutatoralgebra \mathfrak{l}' das Bild von $\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ unter der Lie-Klammer ist. Dieses Bild ist höchstens eindimensional, da die Lie-Klammer schiefssymmetrisch ist und $\dim \mathfrak{v} = 2$ gilt. \square

Wir können nun die Möglichkeiten für die Gestalt der Gruppe Ω eingrenzen.

3.28 Lemma

Es existieren Homomorphismen $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2$ von \mathbb{C}^\times auf sich und ein Automorphismus ξ von $(\mathcal{T}, +)$ derart, daß Ω auf T bei geeigneter Koordinatenwahl mit $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^4$ und $T_{[w]} = \mathbb{R}^4 \times \{0\}$ als Untergruppe der in $\text{GL}_8\mathbb{R}$ enthaltenen Gruppe

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \varrho_1(A)\sigma_1(B) & 0 & 0 & \\ \varrho_2(A)\xi(U)\sigma_1(B) & \varrho_2(A)\sigma_2(B) & A & 0 \\ \hline & V & U & B \end{array} \right) ; \begin{array}{l} A, B \in \mathbb{C}^\times, \\ U \in \mathcal{T}, \\ V \in \text{M}_4\mathbb{R} \end{array} \right\}$$

wirkt. Dabei ist $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times : (A, B) \mapsto (\varrho_1(A)\sigma_1(B), \varrho_2(A)\sigma_2(B))$ ein Automorphismus von $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ und für alle $A, B \in \mathbb{C}^\times$ und alle $U \in \mathcal{T}$ gilt $\varrho_2(A)\xi(AU) = \xi(U)\varrho_1(A)$ sowie $\xi(BU)\sigma_1(B) = \sigma_2(B)\xi(U)$.

Die Elemente der Untergruppe Ψ von Ω sind bei dieser Darstellung auf T genau diejenigen, für die $A = \mathbb{I}_2 = B$ gilt.

Beweis: Wie das Bild von φ aussieht, ist (bis auf eine geeignete Basiswahl) nach (2) und 3.27 (ii) nur von der Dimension der Scherungsgruppe $\Omega_{[s,S]}$ abhängig. Auch die Gruppe Ψ ist unabhängig davon, ob $\varphi = \varphi_S$ oder $\varphi = \varphi_{\mathcal{L}_s}$ betrachtet wird. Bei einer Basiswahl für $T = \mathbb{R}^8$ mit $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^4$ und mit $T_{[w]} = \mathbb{R}^4 \times \{0\}$ läßt sich die $T_{[s]}$ normalisierende Gruppe Ω als Gruppe von Blockmatrizen mit 4×4 -Blöcken darstellen, wobei der untere rechte Block der Wirkung auf $T_{[s]}$ entspricht und der obere linke Block der Wirkung auf $T/T_{[s]}$. Daß Ω und Ψ sich in der angegebenen Weise darstellen lassen, folgt nun aus 3.25. \square

Wir werden im folgenden sehen, daß Ψ im Fall eines komplexen Kerns der Ebene nur aus Scherungen mit Achse S und Zentrum s besteht (vgl. 3.31). Insbesondere ist Ψ dann abelsch. In 3.27 haben wir schon gesehen, daß Ψ eine höchstens eindimensionale Kommutatorgruppe hat. Tatsächlich ist Ψ unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts in jedem Fall abelsch, also insbesondere auch dann, wenn der Kern von \mathcal{P} reell ist:

3.29 Lemma

Ist der Kern der Ebene \mathcal{P} reell, dann ist der Normalteiler Ψ von Ω abelsch.

Beweis: Daß die Behauptung für $\dim \Omega_{[s,S]} \neq 2$ gilt, zeigt 3.27 (iii). Es sei nun also $\dim \Omega_{[s,S]} = 2$. Des weiteren nehmen wir an, daß Ψ nicht abelsch ist. Die Kommutatorgruppe von Ψ ist dann gemäß 3.27 (iv) eindimensional. Es sei Θ die zu $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \leq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorphe Untergruppe von $\Omega_w \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$. Die Wirkung von Θ per Konjugation auf Ψ induziert eine lineare Wirkung auf der Lie-Algebra \mathfrak{l} von Ψ . Unter dieser Wirkung werden die zur Scherungsgruppe $\Omega_{[s,S]}$ gehörende Unter- algebra \mathfrak{s} und die in ihr enthaltene Kommutatoralgebra \mathfrak{l}' invariant gelassen. Auf dem eindimensionalen Vektorraum \mathfrak{l}' kann Θ nur trivial wirken. Auf \mathfrak{s} wirkt die kompakte Gruppe Θ vollständig reduzibel [Anhang: B.14]. Wegen $\dim \mathfrak{s} = 2$ existiert also ein eindimensionales Θ -invariantes Komplement von \mathfrak{l}' in \mathfrak{s} , auf dem Θ ebenfalls trivial wirken muß. Also wirkt Θ trivial auf \mathfrak{s} , woraus folgt, daß $(\Omega_{[s,S]})^\mathfrak{l}$ von Θ zentralisiert wird. Das bedeutet aber, daß Θ die zweidimensionale Bahn $(\Omega_{[s,S]})^\mathfrak{l}(w)$ punktweise fixiert. Dies steht im Widerspruch dazu, daß die zweidimensionale Torusgruppe Θ im Fall eines reellen Kerns der Ebene fast effektiv auf der Gerade L_∞ wirken muß, woraus mit der Klassifikation aller kompakten Wirkungen auf der 4-Sphäre [Anhang: A.12] folgt, daß Θ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ die gewöhnliche Wirkung von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ induziert und deshalb dort nur einen Fixpunkt haben kann. Dieser Widerspruch zeigt, daß Ψ abelsch ist. □

Der Fall, daß \mathcal{P} vom Lenz-Typ V ist, wird Gegenstand des Abschnitts 5 sein, in dem diese Ebenen vollständig klassifiziert werden (vgl. 5.19). Es bleibt jedoch offen, ob Ψ vollständig aus Scherungen bestehen muß, wenn der Kern von \mathcal{P} reell ist. In 7.10 werden wir noch einmal die Eigenschaften der hier betrachteten Ebenen \mathcal{P} (mit reellem Kern) für den Fall zusammenfassen, daß Ψ nicht nur aus Scherungen besteht, was äquivalent dazu ist, daß \mathcal{P} nicht vom Lenz-Typ V ist.

Wir wenden uns nun den Ebenen mit komplexem Kern zu. Bei diesen kann man die Wirkung der Gruppe Ψ auf der Translationsachse leicht an den darstellenden Matrizen ablesen.

3.30 Bemerkung

Ist der Kern von \mathcal{P} komplex, dann kann man T mit \mathbb{C}^4 identifizieren und die Matrizen aus 3.28 als Elemente von $\mathrm{GL}_4\mathbb{C}$ auffassen. Auf T wirkt Ψ deshalb bei geeigneter Wahl der Koordinaten (wobei erreicht werden kann, daß $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{C}^4$ und $T_{[w]} = \mathbb{C}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}^4$ gilt) per Konjugation als Untergruppe der in $\mathrm{GL}_4\mathbb{C}$ enthaltenen Gruppe

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \xi(u) & 1 & & \\ v_1 & v_2 & 1 & \\ v_3 & v_4 & u & 1 \end{pmatrix} ; u, v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C} \right\},$$

wobei ξ ein Automorphismus der additiven Gruppe von \mathbb{C} ist. Die Wirkung von Ψ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ ist äquivalent zur Konjugationswirkung auf der Nebenklasse $\{(0, 1)\} \times \mathbb{C}^2$ von $T_{[s]}$. Diese komplex-affine Wirkung entspricht der gewöhnlichen Wirkung der unteren rechten 3×3 -Blöcke der Matrizen aus H auf $\{1\} \times \mathbb{C}^2$. □

In der vorliegenden Situation erzwingt der komplexe Kern, daß \mathcal{P} vom Lenz–Typ V ist.

3.31 Lemma

Ist der Kern der Ebene \mathcal{P} komplex, dann gilt $\dim \Omega_{[s,S]} = 4$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $\dim \Omega_{[s,S]} \neq 4$ gilt, und identifizieren Ψ mit der die Wirkung auf \mathcal{T} darstellenden Untergruppe der Matrizen­gruppe H aus 3.30. Die (nicht notwendigerweise komplexe!) Lie–Algebra \mathfrak{l} von Ψ ist dann wegen $\dim \Psi = \dim \Omega - \dim \Omega_w = 4$ eine vierdimensionale (reelle) Unter­algebra von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(\mu) & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_3 & \nu_4 & \mu & 0 \end{pmatrix} ; \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die Scherungsgruppe $\Omega_{[s,S]}$ ist der Schnitt von Ψ mit der Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \\ v_3 & v_4 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C} \right\},$$

was bedeutet, daß die Lie–Algebra \mathfrak{s} von $\Omega_{[s,S]}$ der Kern der Projektion

$$\pi : \mathfrak{l} \rightarrow \mathbb{C} : \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(\mu) & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_3 & \nu_4 & \mu & 0 \end{pmatrix} \mapsto \mu$$

ist. Da \mathfrak{l} vierdimensional ist und \mathbb{C} nur zweidimensional ist, folgt mit 3.27 (ii) und der Annahme $\dim \Omega_{[s,S]} \neq 4$, daß π surjektiv und \mathfrak{s} zweidimensional ist. Zu jedem Element $Z \in \mathfrak{s}$ existieren $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \mathbb{C}$ mit

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(Z) & 0 \end{pmatrix} \in M_4\mathbb{C}, \quad \text{wobei} \quad \omega(Z) := \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{C}.$$

Ist $Z \neq 0$, dann gilt $\omega(Z) \in \text{GL}_2\mathbb{C}$, denn für jede Scherung $\omega \in \Omega_{[s,S]} \setminus \{\text{id}_{\mathcal{P}}\}$ ist $\text{Fix}_{\mathcal{P}}\{\omega\} = S$, also $C_{\mathcal{T}}\{\omega\} = T_{[s]}$ (man beachte außerdem, daß

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 \\ \omega(Z) & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \exp(Z) \in \Omega_{[s,S]}$$

gilt). Es seien nun $\mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{C}$ so, daß

$$M := \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(\mu) & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_3 & \nu_4 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

ein Element von \mathfrak{l} ist. Nach 3.27 (iii) kommutiert M mit jedem Element $Z \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$, woraus $\mu\omega_2 = 0$ und $\mu\omega_1 = \omega_4\xi(\mu)$ folgen (man beachte, daß $\mathfrak{s} \neq \{0\}$ gilt). Wenn wir M

aus $\mathfrak{l} \setminus \mathfrak{s}$ wählen, dann ist $\mu \neq 0$, und wir erhalten $\omega_2 = 0$, was wegen $\omega(Z) \in \text{GL}_2\mathbb{C}$ zusätzlich $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_4$ liefert. Mit $\kappa := \omega_4/\omega_1$ ist dann

$$\xi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \kappa^{-1}x,$$

und der Quotient κ ist unabhängig von der Wahl von $Z \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$, was bedeutet, daß \mathfrak{s} eine (reelle) Unteralgebra der Lie-Algebra

$$\mathfrak{t} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ \omega_1 & 0 & 0 & \\ \omega_3 & \kappa\omega_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

ist. Wegen der Surjektivität von π existieren $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \mathbb{C}$ so, daß

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \kappa^{-1} & 0 & & \\ \eta_1 & \eta_2 & 0 & \\ \eta_3 & \eta_4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Element von \mathfrak{l} ist. Der Kommutator von M und N ist

$$[M, N] = MN - NM = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ \kappa^{-1}(\nu_2 - \mu\eta_2) & & 0 & 0 \\ (\kappa^{-1}\nu_4 - \nu_1) - \mu(\kappa^{-1}\eta_4 - \eta_1) & \mu\eta_2 - \nu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $[M, N]$ nach 3.27 (iv) ein Element von $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$ ist, gilt $\mu\eta_2 - \nu_2 = -(\mu\eta_2 - \nu_2)$, woraus wir $\nu_2 = \mu\eta_2$ schließen können. Insbesondere ist $\omega([M, N])$ nicht regulär, weshalb $[M, N] = 0$ ist. Dies impliziert $\nu_4 = \kappa\nu_1 + \mu(\eta_4 - \kappa\eta_1)$. Wegen

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \kappa^{-1}\mu & 1 & & \\ * & \nu_2 & 1 & \\ * & * & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

existiert angesichts der Transitivität der in 3.30 beschriebenen Wirkung von Ψ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ ein Element $M \in \mathfrak{l}$ so, daß $\nu_2 \neq 0$ gilt. Wir nutzen erneut $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$ aus, um zu schließen, daß $M \notin \mathfrak{s}$, also $\mu \neq 0$ gilt, und erhalten $\eta_2 \neq 0$. Setzt man $\tau_1 := \eta_2$ und $\tau_2 := \eta_4 - \kappa\eta_1$, so sind die Elemente aus \mathfrak{l} alle von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \kappa^{-1}\mu & 0 & & \\ \nu & \tau_1\mu & 0 & \\ \chi & \kappa\nu + \tau_2\mu & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mu, \nu, \chi \in \mathbb{C}$. Durch Anpassung der Koordinaten mit Hilfe der durch die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} \tau_1 & & & \\ -\tau_2 & \kappa\tau_1 & & \\ & & \kappa & \\ & & & \kappa \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{C}$$

gegebenen Transformation wird jedes Element $M \in \mathfrak{l}$ durch TMT^{-1} ersetzt, und \mathfrak{l} wird zu einer vierdimensionalen reellen Unteralgebra der (sechsdimensionalen) abelschen Lie-Algebra

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \mu & 0 & & \\ \nu & \mu & 0 & \\ \chi & \nu & \mu & 0 \end{pmatrix} ; \mu, \nu, \chi \in \mathbb{C} \right\}$$

Die Beschreibung der Wirkung von Ψ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ (siehe 3.30) impliziert dann wegen der Transitivität dieser Wirkung, daß die Unteralgebra von $M_3\mathbb{C}$, die man aus \mathfrak{l} durch Streichung der ersten Zeile und der ersten Spalte in den Matrizen erhält, vierdimensional sein muß. Zu jedem Paar $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2$ existiert also ein $\chi \in \mathbb{C}$ mit

$$M(\mu, \nu, \chi) := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \mu & 0 & & \\ \nu & \mu & 0 & \\ \chi & \nu & \mu & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{l},$$

und es gibt $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{C}$ derart, daß die Matrizen $A := M(1, 0, \alpha)$, $B := M(i, 0, \beta)$, $C := M(0, 1, \gamma)$ und $D := M(0, i, \varepsilon)$ eine Basis des reellen Vektorraumes \mathfrak{l} bilden. Für alle $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ ist insbesondere die Matrix

$$\psi(\mu, \nu) := \exp(\mu_1 A + \mu_2 B + \nu_1 C + \nu_2 D) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \mu & 1 & & \\ \nu + \frac{\mu^2}{2} & \mu & 1 & \\ \chi(\mu, \nu) & \nu + \frac{\mu^2}{2} & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\mu := \mu_1 + i\mu_2$, $\nu := \nu_1 + i\nu_2$ und

$$\chi(\mu, \nu) := \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 + \gamma\nu_1 + \varepsilon\nu_2 + \mu\nu + \frac{\mu^3}{6}$$

in Ψ enthalten. Jedes Element von Ψ bildet die Richtungskomponente $T_{[w]}$ auf eine Richtungskomponente von T ab. Ist $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, dann zeigt die Gestalt des linken unteren 2×2 -Blocks

$$\psi_3(\mu, \nu) := \begin{pmatrix} \nu + \frac{\mu^2}{2} & \mu \\ \chi(\mu, \nu) & \nu + \frac{\mu^2}{2} \end{pmatrix}$$

von $\psi(\mu, \nu)$, daß $T_{[w]}$ durch $\psi(\mu, \nu)$ auf eine von $T_{[w]}$ verschiedene Richtungskomponente abgebildet wird (man beachte, daß $T_{[s]}$ und $T_{[w]}$ durch die Koordinatentransformation mit T invariant gelassen werden). Insbesondere wird jedes von der Identität verschiedene Element von $T_{[w]}$ auf eine Translation abgebildet, die nicht in $T_{[w]}$ liegt, woraus folgt, daß

$$D(\mu, \nu) := \det_{\mathbb{C}}(\psi_3(\mu, \nu)) = \nu^2 - (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 + \gamma\nu_1 + \varepsilon\nu_2)\mu + \frac{\mu^4}{12}$$

für alle $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$ von 0 verschieden sein muß. Wir führen nun die Annahme $\dim \Omega_{[s, s]} \neq 4$ zum Widerspruch, indem wir zeigen, daß ein Element $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ mit $D(\mu, \nu) = 0$ existiert. Dazu schreiben wir $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ und $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Außerdem betrachten wir nur solche Paare (μ, ν) mit $\mu_2 = 0$ und

$\nu_2 = 1$. Es gilt dann stets $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, und Real- und Imaginärteil von $D(\mu, \nu)$ berechnen sich zu

$$\operatorname{Re}(D(\mu, \nu)) = \nu_1^2 - 1 - \alpha_1 \mu_1^2 - \gamma_1 \nu_1 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_1 + \frac{\mu_1^4}{12}$$

und

$$\operatorname{Im}(D(\mu, \nu)) = 2\nu_1 - \alpha_2 \mu_1^2 - \gamma_2 \nu_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_1.$$

Aus $\operatorname{Im}(D(\mu, \nu)) = 0$ ergibt sich

$$\nu_1(2 - \gamma_2 \mu_1) = \alpha_2 \mu_1^2 + \varepsilon_2 \mu_1.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man ν_1 aus der Gleichung

$$\operatorname{Re}(D(\mu, \nu))(2 - \gamma_2 \mu_1)^2 = 0$$

eliminieren. Die Betrachtung der linken Seite dieser Gleichung als Funktion in μ_1 führt dann zu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x) = & -4 + 4(\gamma_2 - \varepsilon_1)x - (4\alpha_1 + 2\gamma_1\varepsilon_2 + \gamma_2^2 - 4\gamma_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2)x^2 \\ & + (\gamma_2(4\alpha_1 + \gamma_1\varepsilon_2 - \gamma_2\varepsilon_1) - 2\alpha_2(\gamma_1 - \varepsilon_2))x^3 \\ & + \left(\frac{1}{3} + \alpha_2^2 - \gamma_2(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)\right)x^4 - \frac{\gamma_2}{3}x^5 + \frac{\gamma_2^2}{12}x^6 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = -4 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

(man beachte, daß dies sowohl im Fall $\gamma_2 \neq 0$ als auch im Fall $\gamma_2 = 0$ gilt) hat f mindestens zwei Nullstellen. Wir wählen μ_1 so, daß $f(\mu_1) = 0$ und $\gamma_2 \mu_1 \neq 2$ gilt, und setzen

$$\nu_1 := \frac{\alpha_2 \mu_1^2 + \varepsilon_2 \mu_1}{2 - \gamma_2 \mu_1}.$$

Dann ist

$$\operatorname{Re}(D(\mu, \nu)) = \frac{f(\mu_1)}{(2 - \gamma_2 \mu_1)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(D(\mu, \nu)) = 0. \quad \square$$

Unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts ist \mathcal{P} also vom Lenz-Typ V, wenn der Kern komplex ist. Ohne die Voraussetzungen dieses Abschnitts gilt umgekehrt:

3.32 Lemma

Ist \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Ebene vom Lenz-Typ V mit $\dim \Sigma \leq 16$, dann ist $\Sigma^{\mathbb{1}}$ auflösbar.

Beweis: Wegen $\dim \Sigma \leq 16$ ist \mathcal{P} nicht klassisch, weshalb Σ die Translationsachse L_∞ und das (auf L_∞ liegende) Scherungszentrum s fixiert. Wir betrachten den Stabilisator $\Delta := \Sigma_{o,w}$ zweier Punkte $o \in P^{L_\infty}$ und $w \in L_\infty \setminus \{s\}$. Angesichts der Dimension von Σ gilt $\dim \Delta^{\mathbb{1}} = \dim \Sigma^{\mathbb{1}} - \dim \mathcal{T} - \dim \Sigma_{[s,os]} \leq 4$ (vgl. 1.30). Wir zeigen, daß die maximale kompakte Untergruppe K von $(S\Delta)^{\mathbb{1}}$ höchstens zweidimensional ist. Als zusammenhängende Lie-Gruppe ist sie dann nämlich auflösbar, und mit 3.4 folgt,

daß Δ auflösbar (sogar abelsch) ist. Da auch $\Sigma_{[s,os]}$ und T auflösbar (abelsch) sind, bedeutet dies, daß Σ auflösbar ist.

Ist der Kern von \mathcal{P} komplex, dann ist $\Delta/S\Delta$ zweidimensional, woraus folgt, daß $S\Delta$ (und damit natürlich auch K) höchstens zweidimensional ist. Im Fall eines reellen Kerns der Ebene gilt $\dim(S\Delta)^{\mathbb{1}} = \dim S\Delta = \dim \Delta - 1 \leq 3$. Die den Mittelnukleus einer koordinatisierenden Divisionsalgebra repräsentierende Gruppe $\Sigma_{[w,os]}$ enthält eine zur Zusammenhangskomponente $\mathbb{R}_{>0}$ der multiplikativen Gruppe \mathbb{R}^{\times} isomorphe abgeschlossene Untergruppe. Das Produkt dieser Gruppe mit der Zusammenhangskomponente von $\Sigma_{[o,L_{\infty}]}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe P von Δ , die zur Vektorgruppe \mathbb{R}^2 isomorph ist. Da die Faktorgruppe P/SP isomorph zu einer Untergruppe der (eindimensionalen) multiplikativen Gruppe des Kerns der Ebene ist, ist dann $(SP)^{\mathbb{1}}$ eine (mindestens) eindimensionale abgeschlossene Untergruppe von $(S\Delta)^{\mathbb{1}}$. Angesichts der Kompaktfreiheit von \mathbb{R}^2 ist $(SP)^{\mathbb{1}}$ nicht kompakt. Damit kann auch $(S\Delta)^{\mathbb{1}}$ nicht kompakt sein, und es folgt $\dim K \leq \dim(S\Delta)^{\mathbb{1}} - 1 \leq 2$. \square

Zusammengefaßt erhalten wir das folgende Ergebnis:

3.33 Satz

Es sei \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Translationsebene mit komplexem Kern. Ist die Gruppe Σ der stetigen Automorphismen von \mathcal{P} 16-dimensional, dann gilt:

Die Gruppe $\Sigma^{\mathbb{1}}$ ist genau dann auflösbar, wenn \mathcal{P} vom Lenz-Typ V ist.

Beweis: Die Zusammenhangskomponente $\Sigma^{\mathbb{1}}$ der Automorphismengruppe von \mathcal{P} sei zunächst auflösbar. Enthält $\Sigma^{\mathbb{1}}$ eine Homologie mit einer von L_{∞} verschiedenen Achse, dann zeigt 3.12, daß \mathcal{P} vom Lenz-Typ V ist. Andernfalls folgt dies aus 3.5 und 3.31 (mit [Anhang: C.11 (i)]); man beachte auch die Ausführungen auf S. 56 über die Einordnung der Betrachtungen dieses Abschnitts). Die umgekehrte Implikation ist ein Spezialfall der Aussage aus 3.32. \square

3.34 Bemerkung

Nach N. Knarrs Klassifikation der achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit komplexem Kern (siehe 1.35) sind also die achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit komplexem Kern, deren Automorphismengruppen 16-dimensional sind und eine auflösbare Zusammenhangskomponente haben, bis auf Isomorphie genau die Ebenen $\mathcal{K}_{0,c}$ über den Divisionsalgebren $K_{0,c}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \operatorname{Im}(c) \neq 1$ sowie entweder $\operatorname{Im}(c) > 1$ oder $\operatorname{Re}(c) > \sqrt{1 - \operatorname{Im}(c)^2}$. \square

4 Divisionsalgebren mit großen auflösbaren Autotopismengruppen und isomorphen Nuklei

Bei der Bestimmung der achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit einer mindestens 16–dimensionalen auflösbaren Automorphismengruppe, deren volle Streckungsgruppen alle isomorph sind, wird sich im Abschnitt 5 herausstellen, daß diese Ebenen bis auf Isomorphie genau die Ebenen über den Divisionsalgebren sind, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden (vgl. auch 4.15).

Die Bedingung an die Streckungsgruppen bedeutet auf der Seite der Divisionsalgebren, daß die drei Nuklei isomorph sind (vgl. 1.28). Zu den Divisionsalgebren, die isotop zu Rees–Algebren und somit unter den Algebren mit isomorphen Nuklei dadurch charakterisiert sind, daß ihr Kern mindestens zweidimensional ist (vgl. 1.33), kommen hier noch Divisionsalgebren mit reellem Kern hinzu. Die Klasse von Divisionsalgebren, die in 4.2 definiert wird, kann deshalb als Verallgemeinerung der Klasse der Rees–Algebren betrachtet werden.

Die Bedingung an die Dimension der Automorphismengruppe der Ebene bedeutet, daß die koordinatisierende Divisionsalgebra mindestens eine vierdimensionale auflösbare Autotopismengruppe hat (vgl. 1.30). Die oben angesprochene Charakterisierung der Ebenen über den in 4.2 definierten Divisionsalgebren zeigt, daß keine Divisionsalgebra mit reellen Nuklei und kleinerer Autotopismengruppe zu einer der Divisionsalgebren aus 4.2 isotop ist (vgl. erneut 4.15).

Definition der Divisionsalgebren

Im folgenden sei stets

$$\mathbb{D} := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 ; 2(|u| - \operatorname{Re}(u)) > |v|^2\}.$$

Es sei noch einmal an die Betrachtung der komplexen Zahlen als Teilmenge der reellen 2×2 –Matrizen erinnert (vgl. 1.1). Außerdem erinnern wir an die Identifikation von \mathbb{H} mit \mathbb{C}^2 und mit \mathbb{R}^4 (gemäß der Identifikation von \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2). Als Teilmengen von \mathbb{R}^4 bezeichnen \mathbb{R} und \mathbb{C} im folgenden deshalb auch die beiden Mengen $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Wir definieren nun algebraische Strukturen mit einer Addition und einer Multiplikation, die im Abschnitt 5 als Kandidatinnen für Koordinatenbereiche von Ebenen vom Lenz–Typ V auftreten werden, und bestimmen anschließend diejenigen unter diesen Strukturen, deren Multiplikation nullteilerfrei ist. Denn diese werden genau diejenigen sein, die projektive Ebenen koordinatisieren, wobei sich herausstellen wird, daß diese Strukturen (mit nullteilerfreier Multiplikation) Divisionsalgebren sind, was bedeutet, daß die zugehörigen Ebenen vom Lenz–Typ V sind.

4.1 Satz

Es seien $u, v \in \mathbb{C}$ und

$$\lambda : \mathbb{C}^2 \rightarrow M_4\mathbb{R} : \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_1 & \kappa(m_2)u \\ m_2 & \kappa(m_1) + \kappa(m_2)vJ \end{pmatrix},$$

wobei κ entweder die Identität auf \mathbb{C} oder die Komplexkonjugation sei (man beachte, daß obige Matrizen als reelle 4×4 -Matrizen in Blockschreibweise aufzufassen sind und daß

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right)$$

wegen $J \in \text{GL}_2\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ nur dann auch eine komplexe 2×2 -Matrix ist, wenn $\kappa(m_2)v = 0$ gilt). Auf \mathbb{C}^2 sei damit die Verknüpfung \circ durch

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \lambda\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1x_1 + \kappa(m_2)ux_2 \\ m_2x_1 + \kappa(m_1)x_2 + \kappa(m_2)v\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

definiert.

(i) Mit der gewöhnlichen Vektoraddition $+$ ist $(\mathbb{C}^2, +, \circ)$ genau dann eine Divisionsalgebra, wenn $\lambda(m) \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ für alle $m \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, daß κ die Komplexkonjugation ist und $(u, v) \in \mathbb{D}$ gilt.

(ii) Ist κ die Komplexkonjugation, dann gilt

$$\det_{\mathbb{R}}(\lambda\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right)) = |m_1|^4 - |m_1m_2|^2(|v|^2 + 2\text{Re}(u)) + |m_2|^4|u|^2$$

für alle

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Beweis: Mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält $(\mathbb{C}^2, +, \circ)$ ein Null- und ein Einselement. Sind $a, b \in \mathbb{C}^2$ und $r \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda(a) + \lambda(b) = \lambda(a + b)$ und $\lambda(ra) = r\lambda(a)$, was bedeutet, daß $\lambda(m)$ reell-linear von m abhängt. Da die Linksmultiplikationsabbildungen $\lambda(m)$ selbst ebenfalls \mathbb{R} -lineare Endomorphismen sind, ist die Multiplikation \circ insgesamt reell-bilinear. Ob $(\mathbb{C}^2, +, \circ)$ eine Divisionsalgebra ist, hängt somit nur von der Nullteilerfreiheit der Multiplikation ab, also davon, ob $\lambda(m) \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ für alle $m \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ gilt.

Ist κ die Identität auf \mathbb{C} , dann erhält man Nullteiler, indem man m_1 so wählt, daß $m_1^2 - m_1v - u = 0$ gilt. Es ist dann nämlich

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (v - m_1)i \\ i \end{pmatrix} = 0.$$

Ab jetzt sei κ also die Komplexkonjugation. Um zu entscheiden, ob $\lambda(m) \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ für

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

gilt, betrachten wir die Determinante von $\lambda(m)$. Aus

$$0 = \det_{\mathbb{R}}(\lambda\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)) = \det_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & \overline{m_1} \end{pmatrix}\right) = |m_1|^4$$

folgt $m_1 = 0$. Es genügt also, den Fall $m_2 \neq 0$ zu betrachten. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{R}}(\lambda(m)) &= \det_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} m_2 & -m_1 \\ 0 & m_2^{-1} \end{pmatrix} \lambda(m)\right) \\ &= \det_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 & m_2 \overline{m_2} u - m_1 \overline{m_1} - m_1 \overline{m_2} v J \\ 1 & m_2^{-1} \overline{m_1} + m_2^{-1} \overline{m_2} v J \end{pmatrix}\right) \\ &= \det_{\mathbb{R}}(|m_2|^2 u - |m_1|^2 - m_1 \overline{m_2} v J). \end{aligned}$$

Man rechnet nach, daß für komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ bei Betrachtung dieser Zahlen als reelle 2×2 -Matrizen $\det_{\mathbb{R}}(z_1 + z_2 J) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ gilt. Damit ergibt sich die Behauptung (ii):

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{R}}(\lambda(m)) &= \left| |m_2|^2 u - |m_1|^2 \right|^2 - |m_1 m_2 v|^2 \\ &= |m_1|^4 - |m_1 m_2|^2 (|v|^2 + 2 \operatorname{Re}(u)) + |m_2|^4 |u|^2. \end{aligned}$$

Also ist $\det_{\mathbb{R}}(\lambda(m)) = 0$, genau dann, wenn

$$x := |m_1^2 m_2^{-2}|$$

die reelle quadratische Gleichung $x^2 - x(|v|^2 + 2 \operatorname{Re}(u)) + |u|^2 = 0$ erfüllt. Diese Gleichung hat genau dann eine nichtnegative Lösung, wenn $|v|^2 + 2 \operatorname{Re}(u) \geq 2|u|$ gilt. Dies ist also die Bedingung dafür, daß Nullteiler in $(\mathbb{C}^2, +, \circ)$ existieren, womit insgesamt auch die Behauptung (i) bewiesen ist. \square

Wir führen nun eine Bezeichnung für die Divisionsalgebren aus 4.1 ein.

4.2 Die Divisionsalgebren $D_{u,v}$ und die Ebenen $\mathcal{D}_{u,v}$

Für $(u, v) \in \mathbb{D}$ sei

$$\lambda_{u,v} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \operatorname{GL}_4 \mathbb{R} : \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_1 & \overline{m_2} u \\ m_2 & \overline{m_1} + \overline{m_2} v J \end{pmatrix}.$$

Die Divisionsalgebra $(\mathbb{C}^2, +, \circ)$ mit der gewöhnlichen Vektoraddition $+$ und der durch die Abbildung $\lambda_{u,v}$ definierten Multiplikation

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \lambda_{u,v} \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 x_1 + \overline{m_2} u x_2 \\ m_2 x_1 + \overline{m_1} x_2 + \overline{m_2} v \overline{x_2} \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir mit $D_{u,v}$.

Wie schon bemerkt, werden die Ebenen über diesen Divisionsalgebren im Abschnitt 5 eine Rolle spielen. Wir bezeichnen die Ebene über $D_{u,v}$ mit $\mathcal{D}_{u,v}$.

Die Rees-Algebren sind dadurch charakterisiert, daß ihre drei Nuklei gleich sind und die komplexen Zahlen enthalten (vgl. 1.33; für das Folgende sei hier auch an die Definition der Nuklei $N_\lambda(D)$, $N_\mu(D)$ und $N_\varrho(D)$ einer Divisionsalgebra D aus 1.28 erinnert). Die erste Eigenschaft wird auch von den Divisionsalgebren $D_{u,v}$ erfüllt:

4.3 Lemma

Für alle $(u, v) \in \mathbb{D}$ ist $N_\lambda(D_{u,v}) = N_\mu(D_{u,v}) = N_\varrho(D_{u,v})$. Ist $v \neq 0$, so ist $N_\varrho(D_{u,v}) = \mathbb{R}$. Andernfalls ist $N_\varrho(D_{u,v}) = \mathbb{C}$, falls $u \notin \mathbb{R}$ gilt. Im verbleibenden Fall $v = 0$ und $u \in \mathbb{R}$ ist $D_{u,v}$ isomorph zum Quaternionenkörper (wobei $u < 0$ aus $2(|u| - \operatorname{Re}(u)) > |v|^2$ folgt).

Beweis: Es sei $(u, v) \in \mathbb{D}$. Für $a, b, c \in \mathbb{C}^2$ mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = \begin{pmatrix} d_1(a, b, c) \\ d_2(a, b, c) \end{pmatrix}$$

mit

$$d_1(a, b, c) = a_2 \bar{v} b_2 u c_2 - \bar{a}_2 u \bar{b}_2 v \bar{c}_2$$

und

$$d_2(a, b, c) = \bar{a}_2 v \bar{b}_2 c_1 + a_2 \bar{u} \bar{b}_2 c_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_1 v \bar{c}_2 + a_1 \bar{b}_2 v \bar{c}_2 + a_2 \bar{v} b_2 v \bar{c}_2 - \\ a_2 \bar{b}_2 u c_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_2 v \bar{c}_2 - \bar{a}_2 v \bar{b}_2 \bar{c}_1 - \bar{a}_2 v b_1 \bar{c}_2 - \bar{a}_2 v b_2 \bar{v} c_2.$$

Es sei zunächst $v = 0$. Dann ist stets $d_1(a, b, c) = 0$ und $d_2(a, b, c) = a_2 \bar{b}_2 c_2 (\bar{u} - u)$. Daran liest man sofort ab, daß die drei Nuklei gleich \mathbb{C} sind, sofern u nicht reell ist, und daß andernfalls stets $d_1(a, b, c) = 0 = d_2(a, b, c)$ gilt, was bedeutet, daß $D_{u,v}$ ein Körper ist.

Nun sei $v \neq 0$. Man beachte, daß in jedem Fall $u \neq 0$ aus $(u, v) \in \mathbb{D}$ folgt. Ist c in $N_\varrho(D_{u,v})$ enthalten, so gilt $d_1(a, b, c) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{C}^2$. Das bedeutet, daß $x c_2 = \bar{x} \bar{c}_2$, also $x c_2 \in \mathbb{R}$, für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt, was $c_2 = 0$ impliziert. Dies zieht dann $d_2(a, b, c) = \bar{a}_2 v \bar{b}_2 c_1 - \bar{a}_2 v \bar{b}_2 \bar{c}_1$ für alle $a, b \in \mathbb{C}^2$ nach sich, woraus $c_1 = \bar{c}_1$, also $c_1 \in \mathbb{R}$ und damit insgesamt $c \in \mathbb{R}$, folgt. Umgekehrt zeigen diese Rechnungen, daß $d_1(a, b, c) = 0 = d_2(a, b, c)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt. Analoge Rechnungen zeigen, daß auch $N_\lambda(D_{u,v})$ und $N_\mu(D_{u,v})$ in diesem Fall gleich \mathbb{R} sind. \square

Einteilung in Isotopieklassen

Da (reelle) Divisionsalgebren genau dann isomorphe projektive Ebenen liefern, wenn sie (linear) isotop sind, stellt sich nun die Frage, wann zwei der Divisionsalgebren $D_{u,v}$ und $D_{\bar{u},\bar{v}}$ isotop sind. Der Isotopietyp einer Divisionsalgebra legt die Isomorphietypen der Nuklei fest. Dies zeigt Bruck [46] S. 250, Theorem 1B für zweistellige Verknüpfungen mit Neutralelement. Der Beweis läßt sich direkt auf Divisionsalgebren übertragen (die Isomorphismen die in Bruck [46] konstruiert werden, respektieren die Addition, da sie aus dem gegebenen Isotopismus und (Inversen von) Links- und Rechtsmultiplikationen mit Elementen der Divisionsalgebren hervorgehen).²⁴ Nach 4.3 ist also keine Divisionsalgebra $D_{u,v}$ mit $v \neq 0$ zu einer Divisionsalgebra $D_{\bar{u},0}$ isotop. Innerhalb dieser beiden Klassen gibt es jedoch verschiedene isotope Divisionsalgebren. Zum Beispiel sind die Divisionsalgebren $D_{u,0}$ mit $u \in \mathbb{R}$ nach 4.3 alle isomorph zum Quaternionenkörper, und die Divisionsalgebren, deren Nuklei sämtlich isomorph zu \mathbb{C} sind, sind genau diejenigen, die isotop zu einer vom Quaternionenkörper verschiedenen Rees–Algebra sind (vgl. 1.33). Wir werden die Isotopie der Divisionsalgebren $D_{u,0}$ zu den Rees–Algebren im Beweis des folgenden Lemmas noch einmal durch die Angabe konkreter Isotopismen belegen.

²⁴Man kann die Isomorphie der Nuklei auch geometrisch mit Hilfe der zugehörigen Streckungsgruppen der Ebenen (vgl. 1.28) beweisen.

4.4 Lemma

Für alle $(u, v) \in \mathbb{D}$ gilt:

- (i) Die Divisionsalgebra $D_{u,v}$ ist isomorph zu $D_{\bar{u},\bar{v}}$ (man beachte, daß $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{D}$ aus $(u, v) \in \mathbb{D}$ folgt).
- (ii) Im Fall $v = 0$ ist $D_{u,0}$ isomorph zur Rees–Algebra R_ϑ (vgl. 1.33) mit demjenigen Parameter $\vartheta \in (0, \pi]$, für den $e^{i\vartheta} \in \{u/|u|, \bar{u}/|u|\}$ gilt (man beachte hierbei, daß $\text{Im}(u) \neq 0$ oder $\text{Re}(u) < 0$ wegen $|u| - \text{Re}(u) > 0$ gilt).
- (iii) Im Fall $v \neq 0$ ist $D_{u,v}$ isotop zur Divisionsalgebra $D_{\tilde{u},1}$ mit $\tilde{u} := u/|v|^2$ (man überzeugt sich leicht, daß hier stets $(u/|v|^2, 1) \in \mathbb{D}$ gilt).

Beweis: (i) Mit

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R}$$

ist

$$\begin{aligned} A\lambda_{u,v}(m) &= \begin{pmatrix} Jm_1 & J\bar{m}_2u \\ Jm_2 & J\bar{m}_1 + J\bar{m}_2vJ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{m}_1J & m_2\bar{u}J \\ \bar{m}_2J & m_1J + m_2\bar{v}JJ \end{pmatrix} \\ &= \lambda_{\bar{u},\bar{v}}(Am)A \end{aligned}$$

für alle

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Also ist die Abbildung $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$ ein Isomorphismus von $D_{u,v}$ auf $D_{\bar{u},\bar{v}}$.

(ii) Nach (i) können wir annehmen, daß $u/|u| = e^{i\vartheta}$ gilt. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{|u|}J \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R}$$

liefert dann einen Isomorphismus von $D_{u,0}$ auf R_ϑ .

(iii) In diesem Fall ist das Tripel (A, B, C) mit

$$A = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & |v|^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{v} \end{pmatrix},$$

wobei die komplexen Zahlen $1, v, v^{-1}, |v|^2$ und \bar{v} wieder als reelle 2×2 -Matrizen aufgefaßt sind, ein Isotopismus von $D_{u,v}$ auf $D_{\tilde{u},1}$. □

Eine anschauliche Beschreibung der Menge $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \times \{1\})$ mit Hilfe einer Parabel in der komplexen Ebene liefert die folgende Beobachtung:

4.5 Bemerkung

Für $u \in \mathbb{C}$ ist $(u, 1)$ genau dann in \mathbb{D} enthalten, wenn $\text{Re}(u) < \text{Im}(u)^2 - 1/4$ gilt.

Beweis: Wir setzen $u_1 := \operatorname{Re}(u)$ und $u_2 := \operatorname{Im}(u)$. Ist $u_1 < -1/2$, so gilt offenbar

$$2(|u| - u_1) > 1 \quad \text{und} \quad u_1 < u_2^2 - \frac{1}{4}.$$

Es bleibt, den Fall $u_1 \geq -1/2$ zu betrachten. Durch Quadrieren der beiden Seiten der zu $2(|u| - u_1) > 1$ äquivalenten Ungleichung

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} > u_1 + \frac{1}{2}$$

erhalten wir die (unter der Voraussetzung $u_1 \geq -1/2$) äquivalente Ungleichung

$$u_1^2 + u_2^2 > u_1^2 + u_1 + \frac{1}{4},$$

die wiederum zu $u_1 < u_2^2 - 1/4$ äquivalent ist. □

Für die Rees–Algebren liefert Rees [50] Theorem 3.2 eine vollständige Einteilung in die verschiedenen Isotopieklassen: Zwei Divisionsalgebren R_ϑ und R_φ mit $\vartheta, \varphi \in (0, \pi]$ sind genau dann isotop, wenn $\varphi = \vartheta$ gilt. Wir zeigen nun, daß Divisionsalgebren $D_{u,1}$ und $D_{u',1}$ mit $(u, 1), (u', 1) \in \mathbb{D}$ genau dann isotop sind, wenn $u' \in \{u, \bar{u}\}$ gilt. Im Beweis werden die Determinanten der Rechts- und der Linksmultiplikationen verwendet, die wir hier vorab betrachten.

4.6 Bemerkung

Für $(u, v) \in \mathbb{D}$ sei

$$\varrho_{u,v} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \operatorname{GL}_4\mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 u J \\ x_2 J & x_1 + \bar{x}_2 v J \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$\varrho_{u,v}(x)m = \lambda_{u,v}(m)x$$

für alle $x, m \in \mathbb{C}^2$, das heißt $\varrho_{u,v}$ beschreibt die Rechtsmultiplikation in $D_{u,v}$. Dabei stimmen die Determinanten der Rechts- und der Linksmultiplikationsabbildungen überein:

$$\det_{\mathbb{R}}(\varrho_{u,v}(x)) = \det_{\mathbb{R}}(\lambda_{u,v}(x)).$$

Beweis: Eine einfache Rechnung zeigt die Gültigkeit der ersten Gleichung. Für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

gilt im Fall $x_2 = 0$

$$\det_{\mathbb{R}}(\varrho_{u,v}(x)) = \det_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}\right) = |x_1|^4 = \det_{\mathbb{R}}(\lambda_{u,v}(x)),$$

und für $x_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann man ähnlich wie bei der Berechnung der Determinante der Linksmultiplikation im Beweis von 4.1 vorgehen, indem man $\varrho_{u,v}(x)$ zunächst (von links) mit

$$\begin{pmatrix} x_2 J & -\bar{x}_1 \\ 0 & J x_2^{-1} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_4\mathbb{R}$$

multipliziert. Dies liefert

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{R}}(\varrho_{u,v}(x)) &= \det_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 & x_2\overline{x_2u} - \overline{x_1}x_1 - \overline{x_1x_2}vJ \\ 1 & Jx_2^{-1}x_1 + \overline{x_2}^{-1}x_2\overline{v} \end{pmatrix}\right) \\ &= \det_{\mathbb{R}}(|x_2|^2\overline{u} - |x_1|^2 - \overline{x_1x_2}vJ) \\ &= \left||x_2|^2u - |x_1|^2\right|^2 - |x_1x_2v|^2 \\ &= \det_{\mathbb{R}}(\lambda_{u,v}(x)). \end{aligned}$$

□

Die Abbildung, die jedem Element von $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ die Determinante der Links- bzw. der Rechtsmultiplikation mit diesem Element in $D_{u,v}$ zuordnet, läßt sich als Summe der Quadrate zweier quadratischer Formen von \mathbb{R}^4 schreiben:

4.7 Definition und Bemerkung

Für $(u, v) \in \mathbb{D}$ seien

$$f_{u,v} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \det_{\mathbb{R}}(\lambda_{u,v}(x)) \quad (= \det_{\mathbb{R}}(\varrho_{u,v}(x))),$$

$$\varphi_{u,v} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x_1|^2 - \left(\frac{1}{2}|v|^2 + \operatorname{Re}(u)\right)|x_2|^2$$

und

$$\psi_{u,v} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x_2|^2 \sqrt{|u|^2 - \left(\frac{1}{2}|v|^2 + \operatorname{Re}(u)\right)^2}$$

(man beachte, daß für $(u, v) \in \mathbb{D}$ stets $|u|^2 > (|v|^2/2 + \operatorname{Re}(u))^2$ gilt). Wegen $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$ (für $z \in \mathbb{C}$) sind $\varphi_{u,v}$ und $\psi_{u,v}$ quadratische Formen auf \mathbb{R}^4 , und man rechnet leicht nach, daß

$$f_{u,v}(x) = \varphi_{u,v}(x)^2 + \psi_{u,v}(x)^2 \tag{3}$$

für alle $x \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ gilt.

Im folgenden wird stets $v = 1$ sein, weshalb wir kurz f_u , φ_u und ψ_u anstatt $f_{u,1}$, $\varphi_{u,1}$ und $\psi_{u,1}$ schreiben werden.

□

Exkurs über homogene Polynome vom Grad zwei

Als notwendige Bedingung dafür, daß zwei Divisionsalgebren $D_{u,1}$ und $D_{u',1}$ isotop sind, wird sich die projektive Äquivalenz der Formen f_u und $f_{u'}$ herausstellen. Um dies ausnutzen zu können, benötigen wir ein Kriterium zur Entscheidung, wann Summen von Quadraten verschiedener Paare quadratischer Formen gleich sind. Ein solches Kriterium wird durch die folgende Betrachtung homogener Polynome vom Grad zwei bereitgestellt.

4.8 Lemma

Ein komplexes Polynom $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ der Form

$$p = \sum_{\nu=1}^n c_{\nu}x_{\nu}^2$$

mit $c_{\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für alle $\nu \in \{1, \dots, n\}$ ist genau dann irreduzibel, wenn $n > 2$ gilt.

Beweis: Es sei $p = q \cdot r$ mit komplexen Polynomen $q, r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, deren Grad jeweils verschieden von Null ist. Als homogenes Polynom läßt sich p nur in Produkte homogener Polynome zerlegen. Also existieren $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ derart, daß

$$q = \sum_{\nu=1}^n a_\nu x_\nu \quad \text{und} \quad r = \sum_{\nu=1}^n b_\nu x_\nu$$

gelten. Es folgt $a_\mu b_\nu = -a_\nu b_\mu$ für $\mu \neq \nu$ und $a_\nu b_\nu = c_\nu$. Gegebenenfalls durch Normierung können wir erreichen, daß $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ gilt. Wäre nun $n \geq 3$, dann folgte $b_2 = -a_2$ und $b_3 = -a_3$ aus $a_1 b_2 = -a_2 b_1$ und $a_1 b_3 = -a_3 b_1$. Dies würde $a_2 b_3 = a_3 b_2$ bedeuten, was wegen $a_2 b_3 = -a_3 b_2$ im Widerspruch zu $a_2 b_2 = c_2 \neq 0$ und $a_3 b_3 = c_3 \neq 0$ steht. Umgekehrt ist p offenbar reduzibel, wenn $n \in \{1, 2\}$ gilt. \square

4.9 Lemma

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ mit

$$|\{\nu \in \{1, \dots, n\} ; |a_\nu| + |b_\nu| \neq 0\}| > 2$$

und derart, daß die Polynome

$$p_1 := \sum_{\nu=1}^n a_\nu x_\nu^2 \quad \text{und} \quad p_2 := \sum_{\nu=1}^n b_\nu x_\nu^2$$

linear unabhängig sind. Ist

$$p_1^2 + p_2^2 = q_1^2 + q_2^2,$$

wobei q_1 und q_2 homogene reelle Polynome vom Grad zwei sind, dann existiert eine orthogonale Matrix $X \in O_2 \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir betrachten die komplexe Faktorisierung

$$(p_1 + ip_2)(p_1 - ip_2) = (q_1 + iq_2)(q_1 - iq_2).$$

Nach 4.8 sind dabei $p_1 + ip_2$ und $p_1 - ip_2$ irreduzible komplexe Polynome. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Polynome existieren also $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ und $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$q_1 + iq_2 = c(p_1 + \varepsilon ip_2) \quad \text{und} \quad q_1 - iq_2 = c^{-1}(p_1 - \varepsilon ip_2).$$

Wir schreiben $c = c_1 + ic_2$ und $c^{-1} = \tilde{c}_1 + i\tilde{c}_2$ und zerlegen die beiden obigen Gleichungen jeweils in Real- und Imaginärteil. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$q_1 = c_1 p_1 - \varepsilon c_2 p_2 \quad \text{und} \quad q_2 = c_2 p_1 + \varepsilon c_1 p_2,$$

und aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$q_1 = \tilde{c}_1 p_1 + \varepsilon \tilde{c}_2 p_2 \quad \text{und} \quad q_2 = -\tilde{c}_2 p_1 + \varepsilon \tilde{c}_1 p_2.$$

Die lineare Unabhängigkeit von p_1 und p_2 erzwingt $c_1 = \tilde{c}_1$ und $c_2 = -\tilde{c}_2$, also $|c| = 1$, und mit

$$X = \begin{pmatrix} c_1 & -\varepsilon c_2 \\ c_2 & \varepsilon c_1 \end{pmatrix}$$

folgt die Behauptung. □

Die Isotopieklassen der Divisionsalgebren $D_{u,1}$

Wir kehren nun zur Betrachtung der Divisionsalgebren $D_{u,1}$ zurück. Zur Beschreibung der reell-linearen Abbildungen (bzw. der reellen Matrizen), die bei Isotopismen zwischen solchen Divisionsalgebren vorkommen, führen wir zunächst einige abkürzende Bezeichnungen ein.

4.10 Bezeichnungen

Es sei wieder

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \text{GL}_4\mathbb{R}; A, B \in \mathbb{C}^\times \right\}.$$

Neben deren Untergruppe

$$\Theta := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \Delta; AB^{-1} \in \text{SO}_2\mathbb{R} \right\}$$

(man beachte den Unterschied zur auf S. 53 definierten Gruppe Θ) betrachten wir außerdem die in $\text{GL}_4\mathbb{R}$ enthaltene achtelementige Diedergruppe

$$E := \left\langle \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & J \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß sich die Bedingung zur Definition von Θ auch mit Hilfe des Betrages komplexer Zahlen ausdrücken läßt: Für alle $A, B \in \mathbb{C}$ ist $AB^{-1} \in \text{SO}_2\mathbb{R}$ äquivalent zu $|A| = |B|$.

Schließlich sei

$$\tilde{J} := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}.$$

Der Beweis des folgenden Lemmas basiert auf einer Idee, die dem Beweis von Rees [50] Theorem 3.2 entnommen ist.

4.11 Lemma

Sind $(u, 1), (u', 1) \in \mathbb{D}$ und sind $A, B, C \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ derart, daß (A, B, C) ein Isotopismus von $D_{u,1}$ auf $D_{u',1}$ ist, dann gilt $\{A, B\} \subseteq \Delta \cdot E$.

Beweis: Da

$$C\lambda_{u,1}(x) = \lambda_{u',1}(Ax)B \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gilt, ist mit $r := \det_{\mathbb{R}}(B) \det_{\mathbb{R}}(C)^{-1}$

$$f_u(x) = r f_{u'}(Ax).$$

Die Beschreibung (3) zeigt, daß die Formen f_u und $f_{u'}$ positiv definit sind (dies folgt wegen $f_u(1) = 1 = f_{u'}(1)$ auch aus der Nullteilerfreiheit der Divisionsalgebren, der Stetigkeit der Determinante und dem Zusammenhang von $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$). Deshalb ist $r > 0$, und mit $\tilde{A} := \sqrt[4]{r}A$ gilt

$$\varphi_u(x)^2 + \psi_u(x)^2 = \varphi_{u'}(\tilde{A}x)^2 + \psi_{u'}(\tilde{A}x)^2. \quad (4)$$

Bezeichnet Q den reellen Vektorraum der quadratischen Formen auf \mathbb{R}^4 , dann ist

$$\alpha : Q \rightarrow Q : q(x) \mapsto q(\tilde{A}x)$$

ein linearer Automorphismus, der jede quadratische Form aus Q auf eine äquivalente quadratische Form in Q abbildet. Da φ_u und ψ_u linear unabhängige quadratische Formen auf \mathbb{R}^4 sind, schließen wir mit 4.9 aus der Gleichung (4) auf die Existenz einer orthogonalen Matrix $X \in O_2\mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} \varphi_u(x) \\ \psi_u(x) \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \varphi_{u'}(\tilde{A}x) \\ \psi_{u'}(\tilde{A}x) \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, daß α den Teilraum $V := \mathbb{R}(x_1^2 + x_2^2) + \mathbb{R}(x_3^2 + x_4^2)$ von Q invariant läßt, denn es gilt

$$\mathbb{R}\varphi_u + \mathbb{R}\psi_u = V = \mathbb{R}\varphi_{u'} + \mathbb{R}\psi_{u'}.$$

Die einzigen ausgearteten positiven Formen in V sind die positiven Vielfachen von $x_1^2 + x_2^2$ und von $x_3^2 + x_4^2$. Deshalb existieren $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\alpha(x_1^2 + x_2^2) = s(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{und} \quad \alpha(x_3^2 + x_4^2) = t(x_3^2 + x_4^2)$$

oder

$$\alpha(x_1^2 + x_2^2) = s(x_3^2 + x_4^2) \quad \text{und} \quad \alpha(x_3^2 + x_4^2) = t(x_1^2 + x_2^2).$$

Im ersten Fall folgt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{s}\omega_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{t}\omega_2 \end{pmatrix},$$

und im zweiten Fall folgt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t}\omega_2 \\ \sqrt{s}\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit $\omega_1, \omega_2 \in O_2\mathbb{R}$), was $A \in \Delta \cdot E$ zeigt.

Betrachtet man statt der Links- die Rechtsmultiplikationen, dann erhält man

$$f_u(x) = \tilde{r} f_{u'}(Bx) \quad (\text{mit } \tilde{r} := \det_{\mathbb{R}}(A) \det_{\mathbb{R}}(C)^{-1})$$

aus $C\varrho_u(x) = \varrho_{u',1}(Bx)A$. Deshalb gilt auch $B \in \Delta \cdot E$. □

Zur endgültigen Bestimmung der Isotopieklassen unter den Divisionsalgebren vom Typ $D_{u,1}$ präzisieren wir die Aussage aus 4.11:

4.12 Lemma

Sind $(u, 1), (u', 1) \in \mathbb{D}$ und $A, B, C \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ derart, daß (A, B, C) ein Isotopismus von $D_{u,1}$ auf $D_{u',1}$ ist, dann gilt

$$\{A, B, C\} \subseteq \Theta \quad \text{und} \quad u' = u,$$

oder es gilt

$$\{A, B, C\} \subseteq \Theta \cdot \tilde{J} \quad \text{und} \quad u' = \bar{u}.$$

Beweis: Nach 4.11 gilt $\{A, B\} \subseteq \Delta \cdot E$. Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a_1\sigma_1 & a_2\sigma_2 \\ a_3\sigma_3 & a_4\sigma_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1\tau_1 & b_2\tau_2 \\ b_3\tau_3 & b_4\tau_4 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

mit $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4 \in \mathbb{C} \subseteq \text{M}_2\mathbb{R}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_4, \tau_1, \dots, \tau_4 \in \{\mathbb{I}_2, J\}$ und $c_1, \dots, c_4 \in \text{M}_2\mathbb{R}$. Da $Jx = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (aufgefaßt als Elemente von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) und $Jx = xJ$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (aufgefaßt als Elemente von $\mathbb{C} \subseteq \text{M}_2\mathbb{R}$) gilt, erhalten wir aus $C\lambda_{u,1}(m) = \lambda_{u',1}(Am)B$, daß für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \text{GL}_2\mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen in $\text{M}_2\mathbb{R}$ gelten:

$$c_1m_1 + c_2m_2 = (a_1b_1\tau_1 + \bar{a}_3u'b_3\tau_3)m_1 + (a_2b_1\tau_1 + \bar{a}_4u'b_3\tau_3)m_2 \quad (5)$$

$$c_2m_1 + (c_1u + c_2J)m_2 = (a_1b_2\tau_2 + \bar{a}_3u'b_4\tau_4)m_1 + (a_2b_2\tau_2 + \bar{a}_4u'b_4\tau_4)m_2 \quad (6)$$

$$c_3m_1 + c_4m_2 = (a_3b_1\tau_1 + \bar{a}_1b_3\tau_3 + \bar{a}_3\bar{b}_3\tau_3J)m_1 + (a_4b_1\tau_1 + \bar{a}_2b_3\tau_3 + \bar{a}_4\bar{b}_3\tau_3J)m_2 \quad (7)$$

$$c_4m_1 + (c_3u + c_4J)m_2 = (a_3b_2\tau_2 + \bar{a}_1b_4\tau_4 + \bar{a}_3\bar{b}_4\tau_4J)m_1 + (a_4b_2\tau_2 + \bar{a}_2b_4\tau_4 + \bar{a}_4\bar{b}_4\tau_4J)m_2. \quad (8)$$

Wir setzen nun

$$H := \Delta \cdot \left\langle \left(\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \right) \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} ; \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times J \right\}$$

und zeigen zunächst, daß $A, B \in H$ gilt. Dazu unterscheiden wir drei Fälle.

Zunächst nehmen wir an, daß $A \in (\Delta \cdot E) \setminus H$ gilt. Dann ist $a_1 = 0 = a_4$ und $a_2 \neq 0 \neq a_3$.

Nehmen wir zusätzlich $B \in (\Delta \cdot E) \setminus H$ an, dann gilt $b_1 = 0 = b_4$ und $b_2 \neq 0 \neq b_3$. Mit $(m_1, m_2) = (0, 1)$ erhalten wir zunächst

$$c_3u + c_4J = 0 \quad (9)$$

aus der Gleichung (8). Wir betrachten nun die (8) entsprechende Gleichung (das ist die rechte untere Komponente der (Block-)Matrizengleichung $C\lambda_{u,1}(m) = \lambda_{u',1}(Am)B$) für

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

(mit der imaginären Einheit $i \in \mathbb{C}$). Unter Berücksichtigung von $a_4 = 0 = b_4$ erhalten wir $-(c_3u - c_4J)i = 0$, was angesichts von (9) impliziert, daß $c_3 = 0 = c_4$ gelten muß (man beachte, daß $u \neq 0$ aus $(u, 1) \in \mathbb{D}$ folgt). Dies steht jedoch im Widerspruch zu $C \in \text{GL}_4\mathbb{R}$.

Im Fall $B \in H$ gilt $b_1 \neq 0 \neq b_4$ und $b_2 = 0 = b_3$, und mit $(m_1, m_2) = (1, 0)$ folgt $c_1 = 0$ aus (5). Mit $(m_1, m_2) = (0, 1)$ liefert (6) dann aber auch $c_2 = 0$, was erneut im Widerspruch zu $C \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ steht.

Es bleibt, den Fall $A \in H$ und $B \in (\Delta \cdot E) \setminus H$ zu betrachten. Hier ist $a_1 \neq 0 \neq a_4$, $a_2 = 0 = a_3$, $b_1 = 0 = b_4$ und $b_2 \neq 0 \neq b_3$, und aus (8) mit $(m_1, m_2) = (1, 0)$ folgt $c_4 = 0$. Dann liefert aber (7) mit $m_1 = 0$ und $m_2 = 1$ den Widerspruch $\overline{a_4}b_3\tau_3J = 0$.

Damit ist $\{A, B\} \subseteq H$ gezeigt. Das heißt, es gilt $a_1 \neq 0 \neq a_4$, $a_2 = 0 = a_3$, $b_1 \neq 0 \neq b_4$ und $b_2 = 0 = b_3$. Aus (5) mit $(m_1, m_2) = (0, 1)$ und aus (7) mit $(m_1, m_2) = (1, 0)$ folgt dann

$$c_2 = 0 = c_3.$$

Mit $(m_1, m_2) = (1, 0)$ liefern (5) und (8) nun

$$c_1 = a_1b_1\tau_1 \quad \text{sowie} \quad c_4 = \overline{a_1}b_4\tau_4, \quad (10)$$

und mit $(m_1, m_2) = (0, 1)$ liefern die Gleichungen (6)–(8)

$$c_1 = \overline{a_4}u'b_4\tau_4u^{-1} \quad \text{sowie} \quad a_4b_1\tau_1 = c_4 = \overline{a_4}b_4\tau_4. \quad (11)$$

Wegen $\det_{\mathbb{R}}(z) = |z|^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\det_{\mathbb{R}}(J) = -1 = -\det_{\mathbb{R}}(\mathbb{I}_2)$ folgt $\tau_1 = \tau_4$ und

$$|a_1||b_1| = |a_4||b_4||u'u^{-1}| \quad \text{sowie} \quad |a_1||b_4| = |a_4||b_1| = |a_4||b_4|.$$

Die letzte Gleichungskette impliziert $|a_1| = |a_4|$ und $|b_1| = |b_4|$.

Als nächstes zeigen wir nun $\sigma_1 = \sigma_4 = \tau_1$. Für $\tau \in \{\mathbb{I}_2, J\}$ und die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ gilt $\tau i = \det_{\mathbb{R}}(\tau)i$ (bei Betrachtung in \mathbb{R}^2) und $i\tau = \det_{\mathbb{R}}(\tau)\tau i$ (bei Betrachtung in $M_2\mathbb{R}$). Für

$$m = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

erhalten wir damit

$$c_1 i = \det_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \det_{\mathbb{R}}(\tau_1) a_1 b_1 \tau_1 i \quad \text{sowie} \quad c_4 i = \det_{\mathbb{R}}(\sigma_4) \det_{\mathbb{R}}(\tau_1) a_4 b_1 \tau_1 i$$

aus der (ersten Spalte der Blockmatrizen-) Gleichung $C\lambda_{u,1}(m) = \lambda_{u',1}(Am)B$, was zusammen mit (10) und (11) impliziert, daß $\det_{\mathbb{R}}(\sigma_1) = \det_{\mathbb{R}}(\tau_1) = \det_{\mathbb{R}}(\sigma_4)$ und somit $\sigma_1 = \tau_1 = \sigma_4$ gilt.

Ist $\tau_1 = \mathbb{I}_2$, dann gilt also $\{A, B, C\} \subseteq \Theta$, und aus (10) und (11) folgt

$$\frac{u'}{u} = \frac{a_1 b_1}{\overline{a_4} b_4} = \frac{a_1 \overline{a_1}}{\overline{a_4} a_4} = \frac{|a_1|^2}{|a_4|^2} = 1.$$

In diesem Fall gilt also $u' = u$. Durch Nachschalten des Isomorphismus aus dem Beweis von 4.4 (i) erhalten wir daraus, daß $u' = \bar{u}$ im Fall $\{A, B, C\} \subseteq \Theta \cdot \tilde{J}$ gilt. \square

Damit haben wir die Isotopieklassen für die Divisionsalgebren vom Typ $D_{u,1}$ bestimmt:

4.13 Satz

Sind $(u, 1), (u', 1) \in \mathbb{D}$, dann sind die Divisionsalgebren $D_{u,1}$ und $D_{u',1}$ genau dann isotop, wenn $u' \in \{u, \bar{u}\}$ gilt. □

Ein Versuch, die Gleichungen (10) und (11) mit Elementen $a_1, a_4, b_1, b_4, c_1, c_4 \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{R}_{>0} \cdot \text{SO}_2\mathbb{R}$ zu erfüllen, kann zu folgender Darstellung der Autotopismengruppen der Divisionsalgebren vom Typ $D_{u,1}$ führen²⁵.

4.14 Satz

Für $r_a, r_b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $s, t \in \mathbb{R}$ sei

$$\omega(r_a, r_b, s, t) := \left(r_a \tilde{\delta}(2s, 2t), r_b \tilde{\delta}(-s - 3t, s - t), r_a r_b \tilde{\delta}(s - 3t, -s - t) \right)$$

(mit dem in 1.3 definierten Homomorphismus $\tilde{\delta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{GL}_4\mathbb{R}$). Es ist dann

$$\Omega := \{ \omega(r_a, r_b, s, t) ; r_a, r_b \in \mathbb{R}_{>0}, s, t \in \mathbb{R} \}$$

eine zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorphe Untergruppe von $(\text{GL}_4\mathbb{R})^3$.

Bezeichnet A die volle Gruppe der Autotopismen von $D_{u,1}$ (für $(u, 1) \in \mathbb{D}$), dann ist

$$A = \Omega \quad \text{im Fall } u \notin \mathbb{R},$$

und es ist

$$A = \Omega \rtimes \langle (\tilde{J}, \tilde{J}, \tilde{J}) \rangle \quad \text{im Fall } u \in \mathbb{R}.$$

In beiden Fällen ist A also vierdimensional und auflösbar. Dabei ist Ω die Zusammenhangskomponente von A , die im Fall $u \in \mathbb{R}$ eine Untergruppe vom Index 2 in A ist.

Beweis: Die zweielementige Untergruppe $\langle (-\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2) \rangle$ von $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ ist der Schnitt der Kerne der Homomorphismen

$$\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} : \tilde{\delta}(s, t) \mapsto \tilde{\delta}(2s, 2t),$$

$$\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} : \tilde{\delta}(s, t) \mapsto \tilde{\delta}(-s - 3t, s - t)$$

und

$$\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} : \tilde{\delta}(s, t) \mapsto \tilde{\delta}(s - 3t, -s - t)$$

²⁵Andere Darstellungen liefert eine Berücksichtigung der Untersuchungen aus Abschnitt 5. Unter Ausnutzung der Beziehungen zwischen den Autotopismengruppen von Divisionsalgebren und den Automorphismengruppen der zugehörigen projektiven Ebenen vom Lenz-Typ V können dazu die Gleichungen (10) und (11) zur Bestimmung von Parametern $a, b, c, d, k, l, m, n, p, q, u, v \in \mathbb{Z}$ für die zu $\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe Θ aus Abschnitt 5 herangezogen werden. Diese können dann so gewählt werden, daß sie außerdem den Gleichungen (42)–(46) und (49)–(51) sowie denen des Lemmas 5.14 genügen. Für $k := q := 0, a := -b := -d := -m := n := -v := 1, l := -p := 2$ und $c := -u := 3$ führt dies zum Beispiel auf

$$\Omega = \left\{ \left(r_a \tilde{\delta}(-2s - 3t, -t), r_b \tilde{\delta}(s + 3t, -s - t), r_a r_b \tilde{\delta}(-s, s + 2t) \right) ; r_a, r_b \in \mathbb{R}_{>0}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(vgl. 1.4 (iii)), woraus folgt, daß $\langle(-\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2)\rangle$ der Kern des Homomorphismus

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \Omega : (r_a \delta(s), r_b \delta(t)) \mapsto \omega(r_a, r_b, s, t)$$

ist. Also ist Ω zur Faktorgruppe $(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times) / \langle(-\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2)\rangle$ und damit zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorph. Des weiteren wird Ω von der nicht in $\Omega \subseteq (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)^3$ enthaltenen Involution $(\tilde{J}, \tilde{J}, \tilde{J})$ normalisiert, da die in $GL_2\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ enthaltene Involution J per Konjugation auf $\mathbb{C} \subseteq M_2\mathbb{R}$ die Komplexkonjugation induziert.

Ist $(A, B, C) \in \mathcal{A}$ mit $A, B, C \in \Theta$, dann existieren $r_a, r_b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $s_a, t_a, s_b, t_b \in \mathbb{R}$ mit $A = r_a \tilde{\delta}(s_a, t_a)$ und $B = r_b \tilde{\delta}(s_b, t_b)$. Dabei können wir annehmen, daß $s', t' \in [0, 1]$ mit $s_b = s' - (s_a + 3t_a)/2$ und $t_b = t' + (s_a - t_a)/2$ existieren. Aus den Gleichungen (10) und (11) für c_4 folgt

$$\delta(t_b - s_a) = \delta(t_a + s_b),$$

woraus wir

$$t' - s' = t_b - \frac{s_a - t_a}{2} - s_b - \frac{s_a + 3t_a}{2} = (t_b - s_a) - (t_a + s_b) \in \mathbb{Z}$$

schließen, was wegen $s', t' \in [0, 1]$ bedeutet, daß $s' = t'$ gilt. Die Gleichung

$$\delta(s_a - t_b) = \delta(t_a + t_b),$$

die ebenfalls aus den Gleichungen (10) und (11) für c_4 folgt, impliziert dann $2t' = 2t_b - s_a + t_a \in \mathbb{Z}$, also $2t' \in \{0, 1\}$. Nach (10) gilt außerdem $C = r_a r_b \tilde{\delta}(s_a + s_b, t_b - s_a)$. Wir wählen nun $t := t_a/2$ und $s := s_a/2 + s' = s_a/2 + t'$. Dann ist

$$(A, B, C) = \omega(r_a, r_b, s, t) \in \Omega$$

(man beachte, daß $\delta(t') = \delta(-t')$ aus $2t' \in \{0, 1\}$ folgt). Umgekehrt ist es nicht aufwendig nachzurechnen, daß $C \lambda_{u,1}(m) = \lambda_{u,1}(Am)B$ für alle $(A, B, C) \in \Omega$ und alle $m \in \mathbb{C}^2$ gilt.

Im Fall $u \notin \mathbb{R}$ ist \mathcal{A} nach 4.12 in Θ^3 enthalten, und wir schließen $\mathcal{A} = \Omega$. Im Fall $u \in \mathbb{R}$ ist \mathcal{A} nach 4.12 in $\Theta^3 \cdot \langle(\tilde{J}, \tilde{J}, \tilde{J})\rangle$ enthalten. Der Beweis von 4.4 (i) zeigt, daß die Abbildung $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto \tilde{J}x$ in diesem Fall ein Automorphismus von $\mathbb{D}_{u,1}$ ist, und wir erhalten hier $\mathcal{A} = \Omega \rtimes \langle(\tilde{J}, \tilde{J}, \tilde{J})\rangle$. \square

Den Autotopismengruppen der Divisionsalgebren $D_{u,0}$ mit $u \notin \mathbb{R}$ können wir uns auf geometrischem Weg nähern. In Hähl [75b] 6.1 sind die Automorphismengruppen der Ebenen über Rees-Algebren R_ϑ mit $0 < \vartheta < \pi$ bestimmt worden: Ist S eine von der Translationsachse verschiedene Gerade, die das Scherungszentrum s enthält und ist W eine Gerade, die nicht mit s inzidiert, dann ist die Zusammenhangskomponente $(\Sigma_{S,W})^\parallel$ des Stabilisators von S und W in der Automorphismengruppe Σ von R_ϑ isomorph zu $SO_2\mathbb{R} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$, und die Faktorgruppe $\Sigma_{S,W}/(\Sigma_{S,W})^\parallel$ ist isomorph zur vierelementigen abelschen Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Da $\Sigma_{S,W}$ zur Autotopismengruppe von R_ϑ isomorph ist (vgl. 1.30) und jede Divisionsalgebra $D_{u,0}$ mit $u \notin \mathbb{R}$ nach 4.4 zu einer Rees-Algebra R_ϑ mit $0 < \vartheta < \pi$ isomorph ist, kennen wir damit die Autotopismengruppen der (nicht zum Quaternionenkörper isomorphen) Divisionsalgebren $D_{u,0}$. Insbesondere sind diese Autotopismengruppen fünfdimensional und auflösbar.

Unter Vorgriff auf das Resultat 5.18 des Abschnitts 5 gelangen wir (ebenfalls mit Hilfe der geometrischen Interpretation der Autotopismengruppe) zu folgender Charakterisierung der Divisionsalgebren $D_{u,v}$:

4.15 Bemerkung

Die Divisionsalgebren $D_{u,v}$ mit $(u, v) \in \mathbb{D} \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ sind bis auf Isotopie (siehe 4.4 und 4.13 zur genaueren Einteilung in Isotopieklassen) genau die reellen vierdimensionalen Divisionsalgebren mit isomorphen Nuklei und einer mindestens vierdimensionalen Autotopismengruppe, deren Zusammenhangskomponente auflösbar ist.

Beweis: Wie wir in 4.3 gesehen haben, sind die drei Nuklei jeder Divisionsalgebra $D_{u,v}$ mit $(u, v) \in \mathbb{D} \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ isomorph, und unter Ausnutzung von 4.4 zeigt 4.14 zusammen mit den 4.14 folgenden Ausführungen, daß sogar die vollen Autotopismengruppen dieser Divisionsalgebren auflösbar sind.

Ist umgekehrt D eine Divisionsalgebra mit isomorphen Nuklei und einer mindestens vierdimensionalen Autotopismengruppe A , deren Zusammenhangskomponente auflösbar ist, dann kann D angesichts der Auflösbarkeit von $A^{\mathbb{H}}$ nicht zum Quaternionenkörper \mathbb{H} isotop sein. Sind die Nuklei zweidimensional, dann ist D zu einer Rees–Algebra und damit zu einer Divisionsalgebra $D_{u,0}$ mit $u \notin \mathbb{R}$ isotop. Sind die Nuklei eindimensional, dann zeigt 5.18 unter Berücksichtigung von 4.4 und der Beziehungen zwischen Streckungsgruppen von Ebenen vom Lenz–Typ V und Nuklei von Divisionsalgebren (vgl. 1.28) sowie zwischen Automorphismengruppen von Ebenen vom Lenz–Typ V und Autotopismengruppen von Divisionsalgebren (vgl. 1.30), daß die Ebene über D zu einer Ebene $\mathcal{D}_{u,1}$ isomorph ist, woraus folgt, daß D und $D_{u,1}$ isotop sind. \square

5 Ebenen vom Lenz–Typ V mit großen Torusgruppen und reellen Streckungsgruppen

Im Abschnitt 3 haben wir gesehen, daß eine achtdimensionale kompakte Translations-ebene mit einer mindestens 16–dimensionalen auflösbaren Automorphismengruppe den Lenz–Typ V hat, wenn ihr Kern komplex ist. Im Fall eines reellen Kerns fixiert die Automorphismengruppe nach 3.2 einen Punkt s auf der Translationsachse L_∞ und der Stabilisator eines affinen Punktes enthält nach 3.27 und 3.29 einen abelschen Normalteiler, der transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Es ist bisher nicht klar, ob es stets einen solchen Normalteiler gibt, der nur aus Scherungen besteht. Im folgenden setzen wir voraus, daß ein solcher Normalteiler existiert, und bestimmen die zugehörigen Ebenen, das heißt, wir bestimmen alle Ebenen vom Lenz–Typ V mit einer Automorphismengruppe der oben beschriebenen Art. Es sei also \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Ebene vom Lenz–Typ V mit reellem Kern und einer mindestens 16–dimensionalen Automorphismengruppe Σ , deren Zusammenhangskomponente Σ^\natural auflösbar ist.

Die Bedingung an den Kern der Ebene bedeutet, daß sämtliche Streckungsgruppen mit L_∞ als Achse höchstens eindimensional sind. Existiert eine zweidimensionale Streckungsgruppe in Σ , dann erhalten wir durch Dualisieren oder durch Transponieren und anschließendes Dualisieren eine Ebene $\tilde{\mathcal{P}}$ vom Lenz–Typ V mit komplexem Kern (siehe 1.31 und 1.32), und mit 3.9 zeigt die Klassifikation dieser Ebenen durch N. Knarr (vgl. 1.35), daß $\tilde{\mathcal{P}}$ isomorph zu einer Ebene $\mathcal{K}_{0,c}$ mit $\text{Im}(c) \neq 1$ ist (man beachte, daß sämtliche Streckungsgruppen der Ebenen über Rees–Algebren mindestens zweidimensional sind und daß die Ebenen $\mathcal{K}_{r,c}$ mit $r \neq 0$ nur eine 15–dimensionale Automorphismengruppe haben).

Wir nehmen daher ab jetzt zusätzlich an, daß sämtliche Streckungsgruppen höchstens eindimensional sind. Das (auf L_∞ liegende) Scherungszentrum sei mit s bezeichnet. Außerdem seien $o \in P^{L_\infty}$, $S := os$, $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ und $W := ow$.

Die Voraussetzung $\dim \Sigma \geq 16$ ersetzen wir nun dadurch, daß die Gruppe $\Sigma_{S,W}$ eine zweidimensionale Torusuntergruppe Θ enthält:

5.1 Lemma

Es gilt $\dim \Sigma \geq 16$ genau dann, wenn $\Sigma_{S,W}$ eine zweidimensionale Torusuntergruppe enthält.

Diese Torusuntergruppe ist dann die maximale kompakte Untergruppe von $(\Sigma_{S,W})^\natural$, und es gilt $\dim \Sigma = 16$.

Beweis: Es gelte zunächst $\dim \Sigma \geq 16$. Dann ist

$$\dim (\Sigma_{S,W})^\natural = \dim \Sigma_{S,W} = \dim \Sigma - \dim T - \dim \Sigma_{[s,S]} \geq 4$$

(vgl. 1.30). Deshalb zeigt 3.4 angesichts des reellen Kerns von \mathcal{P} und der Auflösbarkeit von Σ^\natural , daß die maximale kompakte Untergruppe der vierdimensionalen (abelschen) Gruppe $(\Sigma_{S,W})^\natural$ eine zweidimensionale Torusgruppe ist. Außerdem gilt $\dim \Sigma = 16$ wegen $\dim (\Sigma_{S,W})^\natural = 4$.

Die Gruppe $\Sigma_{S,W}$ enthalte nun umgekehrt eine zweidimensionale Torusuntergruppe Θ . Das Produkt der Zusammenhangskomponenten der (jeweils eindimensionalen) Streckungsgruppen $\Sigma_{[o,L_\infty]}$ und $\Sigma_{[s,W]}$ ist eine zu \mathbb{R}^2 isomorphe zentrale Untergruppe von

$(\Sigma_{S,W})^{\mathbb{1}}$. Das direkte Produkt dieser kompaktfreien Gruppe mit Θ ist dann eine vierdimensionale Untergruppe von $(\Sigma_{S,W})^{\mathbb{1}}$. Wegen $\dim \Sigma = \dim T + \dim \Sigma_{[s,S]} + \dim \Sigma_{S,W}$ folgt daraus $\dim \Sigma \geq 16$. □

Außerdem verzichten wir im folgenden auf die Voraussetzung, daß $\Sigma^{\mathbb{1}}$ auflösbar ist. Wir setzen also nur voraus, daß \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Ebene vom Lenz-Typ V mit höchstens eindimensionalen Streckungsgruppen ist und daß $\Sigma_{S,W}$ eine zweidimensionale Torusuntergruppe enthält. Im Nachhinein wird sich herausstellen, daß eine solche Ebene eine 16-dimensionale auflösbare Automorphismengruppe hat.

Die Wirkungen von $\Sigma_{S,W} = \Sigma_{o,w}$ auf $S \setminus \{s\}$ und auf $W \setminus \{w\}$ sind zu den Konjugationswirkungen auf den Richtungskomponenten $T_{[s]}$ und $T_{[w]}$ der Translationsgruppe T äquivalent, und die Wirkung von Σ_w auf $L_\infty \setminus \{s\}$ ist äquivalent zur Konjugationswirkung auf der (scharf transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkenden) Scherungsgruppe $\Sigma_{[s,S]}$ [Anhang: A.7]. Da die maximalen kompakten Untergruppen der zu \mathbb{R}^\times isomorphen Streckungsgruppen von \mathcal{P} zweielementig sind, wirkt Θ auf den drei Geraden S , W und L_∞ jeweils fast effektiv mit höchstens zweielementigen Ineffektivitätskernen

$$\Theta_{[S]} = \Theta_{[w,S]} = C_\Theta T_{[s]}, \quad \Theta_{[W]} = \Theta_{[s,W]} = C_\Theta T_{[w]}, \quad \Theta_{[L_\infty]} = \Theta_{[o,L_\infty]} = C_\Theta \Sigma_{[s,S]}.$$

Somit induzieren die stetigen Konjugationswirkungen effektive reell-lineare Wirkungen der Faktorgruppen $\Theta/\Theta_{[S]}$, $\Theta/\Theta_{[W]}$ und $\Theta/\Theta_{[L_\infty]}$ auf den vierdimensionalen Vektorgruppen $T_{[s]}$, $T_{[w]}$ und $\Sigma_{[s,S]}$, die äquivalent zur klassischen Wirkung auf $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ der in $GL_4\mathbb{R}$ maximalen Torusuntergruppe $SO_2\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R}$ sind.

5.2 Einführung einer Hilfsfunktion

Die Elemente der durch obige Wirkungen induzierten Torusgruppen beschreiben wir mit Hilfe der in 1.3 eingeführten Homomorphismen δ und $\tilde{\delta}$. Dabei werden Elemente $\delta(x/4) \in SO_2\mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{Z}$ eine entscheidende Rolle spielen. Zur Unterscheidung dieser Elemente führen wir eine Funktion ein. Es sei

$$\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in 4\mathbb{Z} + \{0, 1\}, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\delta(x/4) = \begin{cases} \eta(x)\mathbb{I}_2 & \text{falls } x \in 2\mathbb{Z}, \\ \eta(x)\delta(1/4) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{12}$$

außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{Z}$

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta(-x) & \text{falls } x \in 2\mathbb{Z}, \\ -\eta(-x) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{13}$$

Einführung von Koordinaten

Als Elemente von \mathbb{R}^4 betrachtet seien im folgenden stets

$$1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad j := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren von nun an T mit $\mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ und $\Sigma_{[s,S]}$ mit \mathbb{R}^4 . Dabei werden wir die Basis von T stets so wählen, daß $T_{[w]} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}^4\} \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ und $T_{[s]} = \{(0, y); y \in \mathbb{R}^4\} \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ gilt. Für $z \in \Sigma_{[s,S]} = \mathbb{R}^4$ bezeichnen wir mit (z) das Bild $(z) := z(w) \in L_\infty \setminus \{s\}$ von w unter z (damit gilt $\sigma((z)) = (\sigma z \sigma^{-1}) = (z^\sigma)$ für alle $\sigma \in \Sigma_{S,w}$). Gemäß 1.23 wird die Komponente der Translationen in Richtung (z) mit Hilfe einer (durch die Koordinaten von T eindeutig bestimmten) Matrix $\lambda(z) \in \text{GL}_4\mathbb{R} \cup \{0\}$ folgendermaßen beschrieben:

$$T_{[(z)]} = \{(x, \lambda(z)x); x \in \mathbb{R}^4\}. \quad (14)$$

Mit dieser Matrix schreiben wir auch $[\lambda(z)] := T_{[(z)]}$. Die Abbildung

$$\lambda : (\mathbb{R}^4, +) \rightarrow (\text{M}_4\mathbb{R}, +)$$

ist ein reell–linearer Monomorphismus, da \mathcal{P} eine Ebene vom Lenz–Typ V ist (siehe 1.27). Wir schreiben $\lambda(z)$ im folgenden als Blockmatrix

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_2(z) \\ \lambda_3(z) & \lambda_4(z) \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_4 reell–lineare Homomorphismen $(\mathbb{R}^4, +) \rightarrow (\text{M}_2\mathbb{R}, +)$ sind. Da wir die Koordinaten so wählen werden, daß $(1, z)$ in der Richtungskomponente $T_{[(z)]} = [\lambda(z)]$ liegt, wird $\lambda(z)1 = z$ und damit

$$\lambda_1(z) = \begin{pmatrix} z_1 & * \\ z_2 & * \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_3(z) = \begin{pmatrix} z_3 & * \\ z_4 & * \end{pmatrix} \quad (15)$$

für alle $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gelten.

Effektive Wirkung der Torusgruppe auf einer Gerade

Es soll nun gezeigt werden, daß Θ auf keiner der drei Geraden L_∞, S oder W effektiv wirken kann. Dazu nehmen wir an, daß dies doch der Fall ist.

5.3 Untersuchung der Wirkungen von Θ auf $T_{[w]}$ und auf $\Sigma_{[s,S]}$

Ist $L \in \{S, W, L_\infty\}$ derart, daß Θ effektiv auf L (wie $\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R}$ auf der Einpunkt-kompaktifizierung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) wirkt, dann fixieren zwei der drei Involutionen in Θ jeweils eine zweidimensionale Teilmenge von L elementweise. Diese beiden Involutionen sind deshalb keine Homologien, sondern planare Automorphismen (vgl. 1.21). Die dritte Involution in Θ ist jedoch eine Homologie, denn sie fixiert genau zwei Punkte auf L und kann deshalb nicht planar sein. Da Θ auf den drei Geraden S, W und L_∞ jeweils mit höchstens zweielementigem Ineffektivitätskern wirkt (vgl. S. 81), wirkt Θ also auf genau einer dieser drei Geraden ineffektiv, und der zugehörige Ineffektivitätskern wird von der oben genannten involutorischen Homologie erzeugt. Durch Dualisieren und Transponieren können wir erreichen, daß Θ auf der Gerade L_∞ ineffektiv wirkt. Wir wählen nun die Koordinaten für $\Sigma_{[s,S]}$ und für $T_{[w]}$ jeweils so, daß Θ dort die klassische Wirkung von $\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ induziert und identifizieren

dann die Gruppe Θ entsprechend ihrer effektiven Konjugationswirkung auf $T_{[w]}$ so mit $\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R}$, daß für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $(x, 0) \in T_{[w]} \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$

$$(x, 0)^{\tilde{\delta}(r,t)} = (\tilde{\delta}(r, t)x, 0) \quad (16)$$

gilt. Nach 1.4 existieren dann $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ derart, daß

$$z^{\tilde{\delta}(r,t)} = \tilde{\delta}(rm + tk, rn + tl)z \quad (17)$$

für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $z \in \Sigma_{[s,S]} = \mathbb{R}^4$ gilt. Wie die Wirkung auf $T_{[w]}$ zeigt, ist $\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ die involutorische Homologie in Θ . Der mit dem Ineffektivitätskern $\Theta_{\{L_\infty\}}$ übereinstimmende Zentralisator $C_{\Theta\Sigma_{[s,S]}}$ von $\Sigma_{[s,S]}$ in Θ ist deshalb $\{\tilde{\delta}(0, 0), \tilde{\delta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, woraus wir mit 1.4 (ii)

$$\text{ggT}(k, l) = 1 = \text{ggT}(m, n) \quad (18)$$

schließen. Jede ganze Zahl läßt sich somit als $xl - yk$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ oder auch als $xn - ym$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ darstellen. Mit 1.4 (iii) folgern wir angesichts des Ineffektivitätskerns der Wirkung von Θ auf L_∞ , daß

$$ml - nk \in \{-2, 2\} \quad (19)$$

gilt. Außerdem können wir

$$l \notin 2\mathbb{Z} \quad (20)$$

gegebenenfalls durch Vertauschung der Rollen der beiden Komponenten in $\Sigma_{[s,S]} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit Hilfe einer Koordinatentransformation erreichen. Ist $k = 0$, dann folgt $l \in \{-1, 1\}$ aus $\text{ggT}(k, l) = 1$ und $m \in \{-2, 2\}$ aus $ml - nk \in \{-2, 2\}$. Wegen $\text{ggT}(m, n) = 1$ ist dann n ungerade. Durch eine Koordinatentransformation auf $T_{[w]}$ können in diesem Fall die beiden Komponenten von Θ und damit die Rollen von k und m sowie von l und n vertauscht werden. Es ist dann $k \neq 0$. Zusätzlich können wir durch eine geeignete Koordinatentransformation auf $\Sigma_{[s,S]}$ noch

$$k > 0 \quad \text{und} \quad l > 0$$

erreichen. Da $\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2})$ als planare Involution eine zweidimensionale Teilmenge auf der Fixgerade L_∞ punktweise fixieren, also einen zweidimensionalen Teilraum von $\Sigma_{[s,S]}$ zentralisieren muß, folgt

$$k \in 2\mathbb{Z} \quad (21)$$

aus $l \notin 2\mathbb{Z}$. Mit (19) und (18) ergibt sich daraus dann

$$m \in 2\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n \notin 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

5.4 Untersuchung der Wirkung von Θ auf $T_{[s]}$

Die Konjugation mit Elementen aus $\Sigma_{[s,S]}$ ist ein reeller Vektorraumautomorphismus von T , der alle Nebenklassen von $T_{[s]}$ (also insbesondere auch $T_{[s]} + (1, 0)$) invariant läßt. Indem wir $(1, z) := (1, 0)^z$ für alle $z \in \Sigma_{[s,S]} = \mathbb{R}^4$ setzen (man beachte, daß $\Sigma_{[s,S]}$ per Konjugation auf $T_{[s]} + (1, 0)$ wie auf $ps \setminus \{s\}$ wirkt, wenn p das Bild von o unter $(1, 0) \in T_{[w]}$ bezeichnet, und daß diese Wirkung scharf transitiv ist), erhalten wir

somit reelle Koordinaten für $T = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ derart, daß $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ und $(1, z) \in T_{[(z)]}$ für alle $z \in \mathbb{R}^4$ gilt.²⁶

Der Zentralisator $C_{\Theta}(1, 0)$ von $(1, 0) \in T_{[w]}$ in Θ ist nach (16)

$$C_{\Theta}(1, 0) = \left\{ \tilde{\delta}(0, t) ; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \tilde{\delta}(r, t) ; r \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da die $T_{[s]} \subseteq T$ normalisierende und $(1, 0) \in T$ zentralisierende Gruppe $C_{\Theta}(1, 0)$ auch die Nebenklasse $(1, 0) + T_{[s]}$ invariant läßt, wirkt jedes Element $\tilde{\delta}(0, t) \in C_{\Theta}(1, 0)$ auf dieser Nebenklasse und damit auch auf $T_{[s]}$ wie auf $\Sigma_{[s, S]}$. Für alle $(0, y) \in T_{[s]}$ gilt also

$$(0, y)^{\tilde{\delta}(0, t)} = (0, \tilde{\delta}(tk, tl)y).$$

Wegen $k \neq 0 \neq l$ induziert $C_{\Theta}(1, 0)$ auf den Teilräumen $\{0\} \times (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ und $\{0\} \times (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ von $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^4$ jeweils die volle klassische Wirkung von $SO_2\mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^2 , wobei $\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2})$ wegen (20) und (21) als $\delta(\frac{1}{2})$ wirkt. Nach 1.5 induziert Θ somit auf $T_{[s]}$ die Wirkung einer Untergruppe von $SO_2\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R}$. Deshalb existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ derart, daß

$$(0, y)^{\tilde{\delta}(r, 0)} = (0, \tilde{\delta}(rp, rq)y)$$

für alle $(0, y) \in T_{[s]}$ und alle Elemente $\tilde{\delta}(r, 0)$ des zur eindimensionalen Torusgruppe isomorphen Zentralisators

$$C_{\Theta}(j, 0) = \left\{ \tilde{\delta}(r, 0) ; r \in \mathbb{R} \right\}$$

von $(j, 0) \in T_{[w]}$ in Θ gilt. Angesichts der Effektivität der Wirkung von Θ auf S (aus der folgt, daß Θ auf $T_{[s]}$ effektiv wirkt) gilt dabei

$$\text{ggT}(p, q) = 1$$

nach 1.4 (ii). Insgesamt erhalten wir

$$(0, y)^{\tilde{\delta}(r, t)} = (0, \tilde{\delta}(rp + tk, rq + tl)y) \quad (23)$$

für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $(0, y) \in T_{[s]}$, und wir können

$$pl - qk \in \{-1, 1\} \quad (24)$$

wie bei der Herleitung von (19) unter Ausnutzung von 1.4 (iii) folgern.

Nach (17) wird $1 \in \Sigma_{[s, S]}$ von allen Elementen $\tilde{\delta}(r, -rmk^{-1}) \in \Theta$ mit $r \in \mathbb{R}$ zentralisiert. Diejenigen unter ihnen, die zusätzlich das Element $(0, 1) \in T_{[s]}$ zentralisieren, zentralisieren dann auch $(1, 0) \in T_{[w]}$, was bedeutet, daß für diese Elemente $r \in \mathbb{Z}$ gilt. Wegen

$$(0, 1)^{\tilde{\delta}(r, -rmk^{-1})} = (0, \tilde{\delta}(r(p - m), r(qk - ml)k^{-1})1)$$

²⁶Dies entspricht einer Übertragung der Koordinaten von L_{∞} auf S , indem zunächst die Punkte von L_{∞} durch Zentralprojektion mit dem Zentrum o auf die Verbindungsgerade von s mit dem Bild von o unter $(1, 0) \in T_{[w]}$ abgebildet wird und anschließend die Punkte dieser Gerade durch Zentralprojektion mit dem Zentrum w auf die Gerade S abgebildet werden.

(vgl. (23)) muß dann für alle $r \in \mathbb{R}$ gelten, daß $r \in \mathbb{Z}$ aus $r(p - m) \in \mathbb{Z}$ folgt, woraus wir

$$d_1 := p - m \in \{-1, 1\} \quad (25)$$

schließen. Genauso können wir mit Hilfe der $(0, j) \in T_{[s]}$ zentralisierenden Elemente unter den $j \in \Sigma_{[s, s]}$ zentralisierenden Elementen $\tilde{\delta}(r, -rnl^{-1}) \in \Theta$ folgern, daß auch

$$d_2 := q - n \in \{-1, 1\} \quad (26)$$

gelten muß. Mit (22) ergibt sich aus (25) und (26) schließlich

$$p \notin 2\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad q \in 2\mathbb{Z}. \quad (27)$$

5.5 Bestimmung der Richtungskomponenten von T

Die Konjugationswirkung von Θ auf T induziert eine Wirkung auf der Menge \mathcal{S} der Richtungskomponenten von T , wobei

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(r, t)} = [\lambda(z^{\tilde{\delta}(r, t)})]$$

für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $z \in \Sigma_{[s, s]}$ angesichts der Beziehung zwischen den Koordinaten von T und von $\Sigma_{[s, s]}$ gilt. Gemäß der Analyse der Wirkung von Θ auf $T = T_{[w]} \oplus T_{[s]}$ und der Beschreibung (14) der von $T_{[s]}$ verschiedenen Elemente von \mathcal{S} gilt außerdem

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(r, t)} = [\tilde{\delta}(rp + tk, rq + tl) \cdot \lambda(z) \cdot \tilde{\delta}(-r, -t)]$$

(man beachte $\tilde{\delta}(r, t)^{-1} = \tilde{\delta}(-r, -t)$). In Blockmatrixschreibweise bedeutet dies

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(r, t)} = \left[\begin{pmatrix} \delta(rp + tk) \cdot \lambda_1(z) \cdot \delta(-r) & \delta(rp + tk) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta(-t) \\ \delta(rq + tl) \cdot \lambda_3(z) \cdot \delta(-r) & \delta(rq + tl) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta(-t) \end{pmatrix} \right]. \quad (28)$$

5.6 Betrachtung der Richtungskomponenten $T_{[(z)]}$ mit $z \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

Für

$$z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

liegt das Element

$$\tilde{\delta}\left(\frac{1}{4}, \frac{-m}{4k}\right) \in \Theta$$

gemäß der Beschreibung (17) der Wirkung von Θ auf L_∞ im Stabilisator von (z) und normalisiert deshalb $T_{[(z)]} = [\lambda(z)]$. Wegen $d_1 = p - m \in \{-1, 1\}$ (siehe (25)) gilt dann nach (15) und (28)

$$\begin{pmatrix} z_1 & * \\ z_2 & * \end{pmatrix} = \lambda_1(z) = \delta\left(\frac{d_1}{4}\right) \cdot \lambda_1(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} * & -d_1 z_2 \\ * & d_1 z_1 \end{pmatrix},$$

woraus

$$\lambda_1(z) = \begin{pmatrix} z_1 & -d_1 z_2 \\ z_2 & d_1 z_1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

folgt. Des weiteren erhalten wir mit (15) und (28)

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \lambda_3(z) = \delta\left(\frac{qk - ml}{4k}\right) \cdot \lambda_3(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

woraus

$$\lambda_3(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

folgt. Da k nach (21) gerade ist, liegt nach (17) auch das Element $\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2}) \in \Theta$ im Stabilisator von (z) , und wir erhalten mit (28)

$$\lambda_2(z) = \delta\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{2}\right) = -\lambda_2(z),$$

was bedeutet, daß

$$\lambda_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

gelten muß. Zur Bestimmung von $\lambda_4(z)$ nutzen wir aus, daß nach (17), (12) und (21)

$$z^{\tilde{\delta}(0, \frac{1}{4})} = \eta(k)z$$

(mit η aus 5.2) gilt, woraus

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(0, \frac{1}{4})} = [\lambda(\eta(k)z)]$$

folgt. Angesichts der \mathbb{R} -Linearität von λ ist $\lambda(\eta(k)z) = \eta(k) \cdot \lambda(z)$, und nach (12) und (20) gilt

$$\delta\left(\frac{l}{4}\right) = \eta(l) \cdot \delta\left(\frac{1}{4}\right).$$

Mit (28) schließen wir daraus

$$\eta(k) \cdot \lambda_4(z) = \delta\left(\frac{l}{4}\right) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right) = \eta(l) \cdot \delta\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right),$$

und mit $h_1 := \eta(k)\eta(l)$ erhalten wir unter Ausnutzung von 1.6

$$\lambda_4(z) \in \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}_2\mathbb{R} & \text{falls } h_1 = 1, \\ \mathbb{R} \cdot \mathrm{O}_2^-\mathbb{R} & \text{falls } h_1 = -1. \end{cases} \quad (32)$$

Speziell für $z = 1 \in \mathbb{R}^4$ existiert also ein Paar $(\xi, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -h_1 v \\ 0 & 0 & v & h_1 \xi \end{pmatrix} \quad (33)$$

(man beachte $\lambda(1) \in \text{GL}_4\mathbb{R}$). In Blockmatrixschreibweise gilt dann für alle $t \in \mathbb{R}$

$$[\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(0,tk^{-1})} = \left[\begin{array}{cc} \delta(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \delta(t(l-h_1)k^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \xi & -h_1v \\ v & h_1\xi \end{pmatrix} \end{array} \right].$$

Da $\lambda(z) - \lambda(\tilde{z}) = \lambda(z - \tilde{z}) \in \text{GL}_4\mathbb{R}$ für alle $z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^4$ mit $z \neq \tilde{z}$ gilt, muß somit $t(l-h_1)k^{-1} \in \mathbb{Z}$ genau dann gelten, wenn $t \in \mathbb{Z}$ gilt. Daraus folgt $l-h_1 \in \{k, -k\}$, was wegen $k, l > 0$ und $h_1 \in \{-1, 1\}$ bedeutet, daß

$$l - h_1 = k \tag{34}$$

gilt.

5.7 Betrachtung der Richtungskomponenten $T_{[z]}$ mit $z \in \{0\} \times \mathbb{R}^2$

Im folgenden betrachten wir

$$z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \{0\} \times \mathbb{R}^2.$$

Gemäß der Beschreibung (17) der Wirkung von Θ auf L_∞ fixiert

$$\tilde{\delta}\left(\frac{1}{4}, \frac{-n}{4l}\right) \in \Theta$$

den Punkt (z) und normalisiert damit die Richtungskomponente $T_{[(z)]} = [\lambda(z)]$. Für $\lambda_1(z)$ bedeutet dies nach (15) und (28)

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \lambda_1(z) = \delta\left(\frac{pl-nk}{4l}\right) \cdot \lambda_1(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

woraus

$$\lambda_1(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

folgt. Mit $d_2 = q - n \in \{-1, 1\}$ (siehe (26)) erhalten wir unter Ausnutzung von (15) und (28) wie bei der Herleitung der Gleichung (29) außerdem

$$\begin{pmatrix} z_3 & * \\ z_4 & * \end{pmatrix} = \lambda_3(z) = \delta\left(\frac{d_2}{4}\right) \cdot \lambda_3(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} * & -d_2z_4 \\ * & d_2z_3 \end{pmatrix},$$

also

$$\lambda_3(z) = \begin{pmatrix} z_3 & -d_2z_4 \\ z_4 & d_2z_3 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Wegen $n \notin 2\mathbb{Z}$ (vgl. (22)) gilt nach (17)

$$z^{\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, 0)} = -z,$$

woraus mit $\lambda(-z) = -\lambda(z)$ und $q \in 2\mathbb{Z}$ (vgl. (27)) und mit (28)

$$-\lambda_4(z) = \delta\left(\frac{q}{2}\right) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta(0) = \lambda_4(z),$$

also

$$\lambda_4(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

folgt. Es bleibt die Bestimmung von $\lambda_2(z)$. Nach (20) und (22) ist $n+l \in 2\mathbb{Z}$, weshalb nach (17) und (12)

$$z^{\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} = \eta(n+l)z$$

gilt, woraus

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} = [\lambda(\eta(n+l)z)]$$

folgt. Auch hier nutzen wir nun $\lambda(\eta(n+l)z) = \eta(n+l) \cdot \lambda(z)$ und die nach (21), (27) und (12) geltende Gleichung

$$\delta\left(\frac{p+k}{4}\right) = \eta(p+k) \cdot \delta\left(\frac{1}{4}\right)$$

aus und erhalten mit (28)

$$\begin{aligned} \eta(n+l) \cdot \lambda_2(z) &= \delta\left(\frac{p+k}{4}\right) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \eta(p+k) \cdot \delta\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta\left(-\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Mit $h_j := \eta(n+l)\eta(p+k)$ ergibt sich unter Ausnutzung von 1.6

$$\lambda_2(z) \in \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \text{SO}_2\mathbb{R} & \text{falls } h_j = 1, \\ \mathbb{R} \cdot \text{O}_2^-\mathbb{R} & \text{falls } h_j = -1. \end{cases} \quad (38)$$

Speziell für $z = j \in \mathbb{R}^4$ existiert ein Paar $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu & -h_j \nu \\ 0 & 0 & \nu & h_j \mu \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

(man beachte $\lambda(j) \in \text{GL}_4\mathbb{R}$). In Blockmatrixschreibweise gilt dann für alle $t \in \mathbb{R}$

$$[\lambda(j)]^{\tilde{\delta}(0, tl^{-1})} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \delta(t(k-h_j)l^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \mu & -h_j \nu \\ \nu & h_j \mu \end{pmatrix} \\ \delta(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Wie in der Herleitung von (34) erhalten wir auch hier, daß $t(k-h_j)l^{-1} \in \mathbb{Z}$ genau dann gelten muß, wenn $t \in \mathbb{Z}$ gilt. Daraus folgt $k-h_j \in \{l, -l\}$, was wegen $k, l > 0$ und $h_j \in \{-1, 1\}$ bedeutet, daß $k-h_j = l$ gilt. Mit (34) schließen wir

$$h_j = -h_1. \quad (40)$$

5.8 Die Existenz einer Torusuntergruppe in der Streckungsgruppe

Für

$$z := \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

erhalten wir mit (33) und (39) angesichts der Linearität von λ

$$\lambda(z) = r \cdot \lambda(1) + \lambda(j) = \begin{pmatrix} r & 0 & \mu & h_1\nu \\ 0 & rd_1 & \nu & -h_1\mu \\ 1 & 0 & r\xi & -rh_1\nu \\ 0 & d_2 & rv & rh_1\xi \end{pmatrix}.$$

Wegen $z \neq 0$ muß dann

$$\det_{\mathbb{R}}(\lambda(z)) = r^4 d_1 h_1 (\xi^2 + \nu^2) - d_2 h_1 (\mu^2 + \nu^2) + r^2 (d_2 - d_1) h_1 (\mu\xi - \nu\nu)$$

von 0 verschieden sein. Wäre $d_2 = d_1$, so verschwände der rechte Ausdruck für

$$r = \sqrt[4]{(\mu^2 + \nu^2)(\xi^2 + \nu^2)^{-1}}$$

(man beachte $(\xi, \nu) \neq (0, 0)$). Wegen $d_1, d_2 \in \{-1, 1\}$ muß also

$$d_2 = -d_1$$

gelten. Damit und mit (40) sowie der Additivität von λ schließen wir, daß

$$\lambda_1(z) \in \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \text{SO}_2\mathbb{R} & \text{falls } d_1 = 1 \\ \mathbb{R} \cdot \text{O}_2^-\mathbb{R} & \text{falls } d_1 = -1 \end{cases} \quad (\text{nach (29) und (35)}),$$

$$\lambda_2(z) \in \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \text{SO}_2\mathbb{R} & \text{falls } h_1 = -1 \\ \mathbb{R} \cdot \text{O}_2^-\mathbb{R} & \text{falls } h_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{nach (31) und (38)}),$$

$$\lambda_3(z) \in \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \text{SO}_2\mathbb{R} & \text{falls } d_1 = -1 \\ \mathbb{R} \cdot \text{O}_2^-\mathbb{R} & \text{falls } d_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{nach (30) und (36)}),$$

$$\lambda_4(z) \in \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \text{SO}_2\mathbb{R} & \text{falls } h_1 = 1 \\ \mathbb{R} \cdot \text{O}_2^-\mathbb{R} & \text{falls } h_1 = -1 \end{cases} \quad (\text{nach (32) und (37)})$$

für alle $z \in \mathbb{R}^4$ gilt. Unter Ausnutzung von 1.6 (iii) und der Kommutativität von $\text{SO}_2\mathbb{R}$ folgt, daß für alle $r \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : (x, y) \mapsto (\tilde{\delta}(d_1 r, -h_1 r)x, \tilde{\delta}(r, -r)y)$$

jede Richtungskomponente aus \mathcal{S} invariant läßt und deshalb einen Automorphismus auf \mathcal{P} induziert, der jede Ursprungsgerade fixiert. Dies bedeutet aber, daß $\Gamma_{[0, L_\infty]}$ eine Torusuntergruppe enthält, was im Widerspruch dazu steht, daß der Kern der Ebene reell ist.

Zusammenfassend stellen wir fest:

5.9 Lemma

Ist \mathcal{P} eine Ebene vom Lenz-Typ V mit Translationsachse L_∞ und Scherungszentrum s und sind $S \in \mathcal{L}_s \setminus \{L_\infty\}$ sowie $W \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_s$ derart, daß die Streckungsgruppen $\Sigma_{[S \wedge W, L_\infty]}$, $\Sigma_{[L_\infty \wedge W, S]}$ und $\Sigma_{[s, W]}$ jeweils eindimensional sind, dann enthält $\Sigma_{S, W}$ keine zweidimensionale Torusuntergruppe, die auf einer der drei Geraden S, W, L_∞ effektiv wirkt. \square

Ineffektive Wirkung der Torusgruppe auf allen drei Geraden

Wir betrachten nun den Fall, daß Θ auf jeder der drei Geraden L_∞ , S und W mit zweielementigem Ineffektivitätskern wirkt.

5.10 Untersuchung der Wirkung von Θ auf T

Jede der drei Geraden L_∞ , S und W ist unter den gegebenen Voraussetzungen Achse einer der involutorischen Homologien in Θ . Wir identifizieren Θ so mit $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$, daß $\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ trivial auf W wirkt, $\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2})$ trivial auf S wirkt und $\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, 0)$ trivial auf L_∞ wirkt. Für $T = T_{[w]} \oplus T_{[s]}$ wählen wir dann Koordinaten derart, daß Θ auf den Richtungskomponenten $T_{[w]} = \mathbb{R}^4 \times \{0\}$ und $T_{[s]} = \{0\} \times \mathbb{R}^4$ jeweils die klassische Wirkung von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ induziert (man beachte den Unterschied zur Betrachtung effektiver Wirkungen, bei der wir die Koordinaten zunächst für $T_{[w]}$ und für $\Sigma_{[s,S]}$ gewählt und die Koordinaten für $T_{[s]}$ erst später eingeführt hatten). Nach 1.4 liefert dies $a, b, c, d, k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ so, daß

$$(x, y)^{\tilde{\delta}(r,t)} = (\tilde{\delta}(ra + tc, rb + td)x, \tilde{\delta}(rm + tk, rn + tl)y) \quad (41)$$

für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $(x, y) \in T$ gilt. Angesichts der Ineffektivitätskerne der (den Wirkungen auf W und S entsprechenden) Konjugationswirkungen von Θ auf $T_{[w]}$ und auf $T_{[s]}$ können wir mit 1.4 (ii) schließen, daß

$$\mathrm{ggT}(a, b) = 1 = \mathrm{ggT}(c, d)$$

und

$$\mathrm{ggT}(m, n) = 1, \quad \mathrm{ggT}(k, l) = 2 \quad (42)$$

gelten, und mit 1.4 (iii) folgt

$$\{ad - bc, ml - nk\} \subseteq \{-2, 2\}. \quad (43)$$

Die beiden in Θ enthaltenen involutorischen Homologien $\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2})$ und $\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, 0)$ haben jeweils eine von W verschiedene Achse, woraus

$$(x, 0)^{\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2})} = (-x, 0) = (x, 0)^{\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, 0)}$$

für alle $(x, 0) \in T_{[w]}$ folgt, was

$$a, b, c, d \notin 2\mathbb{Z} \quad (44)$$

impliziert. Da S nicht die Achse der involutorischen Homologie $\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \Theta$ ist, gilt genauso

$$(0, y)^{\tilde{\delta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = (0, -y)$$

für alle $(0, y) \in T_{[s]}$, woraus $m + k \notin 2\mathbb{Z}$ sowie $n + l \notin 2\mathbb{Z}$ und dann mit (42)

$$m, n \notin 2\mathbb{Z} \quad (45)$$

folgt. Wegen $\mathrm{ggT}(k, l) = 2$ gilt $k \notin 4\mathbb{Z}$ oder $l \notin 4\mathbb{Z}$. Gegebenenfalls durch Vertauschung der beiden Komponenten von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $T_{[s]} = \{0\} \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ können wir erreichen, daß $l \notin 4\mathbb{Z}$ gilt. Mit 1.7 folgt dann

$$l \in 4\mathbb{Z} + 2 \quad \text{und} \quad k \in 4\mathbb{Z}. \quad (46)$$

Nach 1.8 können wir auch nötigenfalls durch Vertauschung der beiden Komponenten von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $T_{[w]} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \times \{0\}$ erreichen, daß

$$|ak - cm| \neq |al - cn| \tag{47}$$

gilt.

5.11 Untersuchung der Wirkung von Θ auf $\Sigma_{[s,S]}$

Mit Hilfe der den affinen Teilraum $T_{[s]} + (1, 0)$ von T invariant lassenden reell-linearen Konjugationswirkung von $\Sigma_{[s,S]}$ auf T übertragen wir nun wie im Fall der effektiven Wirkung (allerdings in umgekehrter Richtung) die Koordinaten von $T_{[s]}$ auf $\Sigma_{[s,S]}$. Es sei also $z \in \mathbb{R}^4$ das Element von $\Sigma_{[s,S]}$ mit $(1, 0)^z = (1, z)$ (vgl. 5.4). Der Zentralisator $C_\Theta(1, 0)$ von $(1, 0) \in T$ in Θ wirkt dann auf $\Sigma_{[s,S]}$ wie auf $T_{[s]}$.

Für alle $r \in \mathbb{R}$ zeigt (41), daß $\tilde{\delta}(-cr, ar)$ ein Element von $C_\Theta(1, 0)$ ist und daß

$$(0, y)^{\tilde{\delta}(-cr, ar)} = (0, \tilde{\delta}(r(ak - cm), r(al - cn))y)$$

für alle $(0, y) \in T_{[s]}$ gilt. Wegen $a, c, m, n \notin 2\mathbb{Z}$ und $k, l \in 2\mathbb{Z}$ (vgl. (42), (44) und (45)) ist $ak - cm \neq 0 \neq al - cn$. Also induziert $C_\Theta(1, 0)$ auf $\{0\} \times (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \subseteq T_{[s]}$ und auf $\{0\} \times (\{0\} \times \mathbb{R}^2) \subseteq T_{[s]}$ und damit auch auf den entsprechenden Teilmengen von $\Sigma_{[s,S]}$ jeweils die volle Wirkung von $SO_2\mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^2 . Außerdem gilt $|ak - cm| \neq |al - cn|$ nach (47). Es seien also $r, t \in \mathbb{Z}$ mit $\{r, t\} = \{ak - cm, al - cn\}$ und $|r| > |t|$. Für alle $z \in \Sigma_{[s,S]}$ gilt dann

$$z^{\tilde{\delta}(-cr^{-1}, ar^{-1})} = \begin{cases} \tilde{\delta}(1, tr^{-1})z = \tilde{\delta}(0, tr^{-1})z & \text{falls } r = ak - cm, \\ \tilde{\delta}(tr^{-1}, 1)z = \tilde{\delta}(tr^{-1}, 1)z & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $|r| > |t|$ gilt $tr^{-1} \notin \mathbb{Z}$, also $\delta(tr^{-1}) \neq \mathbb{I}_2$. Wir können somit 1.5 anwenden und erhalten, daß die abelsche Gruppe Θ auf $\Sigma_{[s,S]}$ als Untergruppe von $SO_2\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R}$ wirkt. Nach 1.4 existieren also $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$ so, daß

$$z^{\tilde{\delta}(r,t)} = \tilde{\delta}(rp + tu, rq + tv)z \tag{48}$$

für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $z \in \Sigma_{[s,S]}$ gilt. Mit 1.4 (ii) und (iii) können wir angesichts des Ineffektivitätskerns $C_\Theta \Sigma_{[s,S]} = \Theta_{[L_\infty]} = \{\mathbb{I}_4, \tilde{\delta}(\frac{1}{2}, 0)\}$ der Wirkung von Θ auf $\Sigma_{[s,S]}$ (und auf L_∞) schließen, daß

$$\text{ggT}(p, q) = 2, \quad \text{ggT}(u, v) = 1 \quad \text{und} \quad pv - qu \in \{-2, 2\} \tag{49}$$

gilt. Wie bei der Untersuchung der Wirkung von Θ auf $T_{[s]}$ können wir

$$u, v \notin 2\mathbb{Z} \tag{50}$$

aus $z^{\tilde{\delta}(0, \frac{1}{2})} = -z$ (was für alle $z \in \Sigma_{[s,S]}$ gilt) schließen. Wiederum mit 1.7 erhalten wir

$$p \in 4\mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad q \in 4\mathbb{Z},$$

woraus nach Definition der Hilfsfunktion η aus 5.2 zusammen mit (49)

$$\eta(p) = -\eta(q) \tag{51}$$

folgt.

5.12 Anpassung der Koordinaten unter Berücksichtigung der Funktion η

Wir passen nun erneut die Koordinaten für T an, wobei die Koordinaten für $\Sigma_{[s,S]}$ gemäß der Übertragung der Koordinaten von $T_{[s]}$ (bzw. von $T_{[s]} + (1, 0)$) auf $\Sigma_{[s,S]}$ (siehe 5.11) in gleicher Weise geändert werden. Man beachte, daß die folgenden Koordinatentransformationen nur die Vorzeichen von a, b, c, d, l, n, q und u beeinflussen und die restlichen Arrangements aus 5.10 und 5.11 bestehen bleiben.

Gegebenenfalls durch eine Koordinatentransformation auf T mit

$$\begin{pmatrix} J & \\ & \mathbb{I}_6 \end{pmatrix} \in \text{GL}_8\mathbb{R}$$

kann man nach (44) und (13) erreichen, daß

$$\eta(m)\eta(a) = \eta(p) \tag{52}$$

gilt. Anschließend kann zusätzlich

$$\eta(m)\eta(b) = -\eta(p) \tag{53}$$

gegebenenfalls erneut durch eine Koordinatentransformation mit

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & & \\ & J & \\ & & \mathbb{I}_4 \end{pmatrix} \in \text{GL}_8\mathbb{R}$$

erreicht werden, und schließlich erreicht man, ohne obige Gleichungen zu verletzen,

$$\eta(n)\eta(b) = \eta(p) \tag{54}$$

gegebenenfalls durch eine Koordinatentransformation mit

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_6 & \\ & J \end{pmatrix} \in \text{GL}_8\mathbb{R}.$$

Aus (53) und (54) folgt dann $\eta(m) = -\eta(n)$, und unter Berücksichtigung von (51) ergibt sich

$$\eta(n)\eta(a) = \eta(q), \quad \eta(n)\eta(b) = -\eta(q) \quad \text{und} \quad \eta(m)\eta(b) = \eta(q). \tag{55}$$

5.13 Bestimmung der Richtungskomponenten $T_{[(1)]}$ und $T_{[(j)]}$

Für die durch die Konjugationswirkung von Θ auf der Translationsgruppe T induzierte Wirkung auf der Menge \mathcal{S} der Richtungskomponenten von T gilt wie in 5.5 auch hier

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(r,t)} = [\lambda(z^{\tilde{\delta}(r,t)})]$$

für alle $\tilde{\delta}(r, t) \in \Theta$ und alle $z \in \Sigma_{[s,S]}$. Die Beschreibung (14) der von $T_{[s]}$ verschiedenen Richtungskomponenten und die Beschreibung (41) der Wirkung von Θ auf T implizieren außerdem

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(r,t)} = [\tilde{\delta}(rm + tk, rn + tl) \cdot \lambda(z) \cdot \tilde{\delta}(-ra - tc, -rb - td)].$$

In Blockmatrixschreibweise ist also $[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(r,t)}$ gleich

$$\left[\begin{pmatrix} \delta(rm + tk) \cdot \lambda_1(z) \cdot \delta(-ra - tc) & \delta(rm + tk) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta(-rb - td) \\ \delta(rn + tl) \cdot \lambda_3(z) \cdot \delta(-ra - tc) & \delta(rn + tl) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta(-rb - td) \end{pmatrix} \right]. \tag{56}$$

Mit Hilfe der Funktion η beschreiben wir nun die Wirkung von $\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, 0)$ auf \mathcal{L}_o . Für alle $z \in \mathbb{R}^4$ gilt nach (56), (44), (45) und (12)

$$[\lambda(z)]^{\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, 0)} = \left[\begin{pmatrix} \delta(\frac{m}{4}) \cdot \lambda_1(z) \cdot \delta(-\frac{a}{4}) & \delta(\frac{m}{4}) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta(-\frac{b}{4}) \\ \delta(\frac{n}{4}) \cdot \lambda_3(z) \cdot \delta(-\frac{a}{4}) & \delta(\frac{n}{4}) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta(-\frac{b}{4}) \end{pmatrix} \right] =$$

$$\left[\begin{pmatrix} \eta(m)\eta(a) \cdot \delta(\frac{1}{4}) \cdot \lambda_1(z) \cdot \delta(-\frac{1}{4}) & \eta(m)\eta(b) \cdot \delta(\frac{1}{4}) \cdot \lambda_2(z) \cdot \delta(-\frac{1}{4}) \\ \eta(n)\eta(a) \cdot \delta(\frac{1}{4}) \cdot \lambda_3(z) \cdot \delta(-\frac{1}{4}) & \eta(n)\eta(b) \cdot \delta(\frac{1}{4}) \cdot \lambda_4(z) \cdot \delta(-\frac{1}{4}) \end{pmatrix} \right].$$

Andererseits liest man an der Wirkung von $\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, 0)$ auf $\Sigma_{[s, s]}$ (vgl. (48)) ab, daß

$$[\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, 0)} = [\eta(p)\lambda(1)] \quad \text{und} \quad [\lambda(j)]^{\tilde{\delta}(\frac{1}{4}, 0)} = [\eta(q)\lambda(j)]$$

gilt (man beachte $p, q \in 2\mathbb{Z}$ und (12)). Mit (52)–(55), unter Berücksichtigung von 1.6 und unter Ausnutzung von (15) und der Regularität von $\lambda(1)$ und $\lambda(j)$ folgt

$$\lambda_1(1) = \mathbb{I}_2, \quad \lambda_2(1) \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{O}_2^- \mathbb{R}, \quad \lambda_3(1) = 0, \quad \lambda_4(1) \in \mathbb{R}^\times \cdot \text{SO}_2 \mathbb{R} \quad (57)$$

sowie

$$\lambda_1(j) = 0, \quad \lambda_2(j) \in \mathbb{R}^\times \cdot \text{SO}_2 \mathbb{R}, \quad \lambda_3(j) = \mathbb{I}_2, \quad \lambda_4(j) \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{O}_2^- \mathbb{R}. \quad (58)$$

Für die Bilder von $[\lambda(1)]$ und $[\lambda(j)]$ unter Θ erhalten wir daraus mit 1.6 und (56)

$$[\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(r, t)} = \left[\begin{pmatrix} \delta(r(m-a) + t(k-c)) & \delta(r(m+b) + t(k+d)) \cdot \lambda_2(1) \\ 0 & \delta(r(n-b) + t(l-d)) \cdot \lambda_4(1) \end{pmatrix} \right] \quad (59)$$

und

$$[\lambda(j)]^{\tilde{\delta}(r, t)} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \delta(r(m-b) + t(k-d)) \cdot \lambda_2(j) \\ \delta(r(n-a) + t(l-c)) & \delta(r(n+b) + t(l+d)) \cdot \lambda_4(j) \end{pmatrix} \right]. \quad (60)$$

Zur weiteren Bestimmung von λ betrachten wir die Beziehungen zwischen den Parametern c, d, k und l noch einmal genauer.

5.14 Lemma

Es gilt $0 \notin \{k \pm c, k \pm d, l \pm c, l \pm d\}$ und

- (i) $|k - c| = |l - d|$ sowie $|l - c| = |k - d|$, wobei $k - c = l - d$ genau dann gilt, wenn $l - c = k - d$ gilt.
- (ii) $k + d = l - d$ im Fall $\lambda_2(1) \neq 0$ sowie $l + d = k - d$ im Fall $\lambda_4(j) \neq 0$.
- (iii) entweder $\lambda_2(1) = 0$ oder $\lambda_4(j) = 0$.

Beweis: Nach (42) und (44) gilt $k, l \in 2\mathbb{Z}$ und $c, d \notin 2\mathbb{Z}$, woraus die erste Behauptung $0 \notin \{k \pm c, k \pm d, l \pm c, l \pm d\}$ folgt.

- (i) Für $t := \max\{|k - c|, |l - d|\}$ sei $z := 1^{\tilde{\delta}(0, t^{-1})} \in \Sigma_{[s, s]}$. Die Gleichung (59) zeigt dann wegen $[\lambda(z)] = [\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(0, (k+d)^{-1})}$, daß $\lambda_3(z) = 0 = \lambda_3(1)$ und außerdem $\lambda_1(z) = \lambda_1(1)$

oder $\lambda_4(z) = \lambda_4(1)$ gilt. Insbesondere ist $\lambda(z-1) = \lambda(z) - \lambda(1)$ singulär, woraus $\lambda(z) - \lambda(1) = 0$ folgt. Dazu muß $\{k-c, l-d\} \subseteq t\mathbb{Z}$ gelten, was nach Wahl von t zusätzlich $|k-c| = t = |l-d|$ impliziert. Für den Beweis der Aussage (ii) halten wir hier schon fest, daß im Fall $\lambda_2(1) \neq 0$ außerdem $k+d \in t\mathbb{Z} = (l-d)\mathbb{Z}$ folgt.

Analog zeigt man $|k-d| = |l-c|$ durch Betrachtung von $t := \max\{|l-c|, |k-d|\}$ und $z := j^{\tilde{\delta}(0,t^{-1})}$. Auch hier halten wir für den Beweis von (ii) fest, daß sich im Fall $\lambda_4(j) \neq 0$ zusätzlich $l+d \in t\mathbb{Z} = (k-d)\mathbb{Z}$ ergibt.

Es gilt $k-c = -(l-d)$ genau dann, wenn $k-d = -(l-c)$ gilt. Wegen $|k-c| = |l-d|$ und $|k-d| = |l-c|$ folgt daraus, daß auch $k-c = l-d$ genau dann gilt, wenn $k-d = l-c$ gilt.

(ii) Für $z := 1^{\tilde{\delta}(0,(k+d)^{-1})} \in \Sigma_{[s,S]}$ gilt $[\lambda(z)] = [\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(0,(k+d)^{-1})}$, also $\lambda_2(z) = \lambda_2(1)$ nach (59). Im Fall $l-d \notin (k+d)\mathbb{Z}$ zeigt (59) andererseits, daß $\lambda(z) \neq \lambda(1)$, also insbesondere $z \neq 1$ gilt. Nach (48) ist $z \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und somit auch $z-1 \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Da $u \neq 0$ (nach (50)) gilt, zeigt die Beschreibung (48) der Wirkung von Θ auf $\Sigma_{[s,S]}$, daß ein $t \in \mathbb{R}$ mit $|z-1|^{-1}(z-1) = 1^{\tilde{\delta}(0,t)}$ existiert. Wegen $\lambda_2(z) = \lambda_2(1)$ ergibt sich dann $\lambda_2(|z-1|^{-1}(z-1)) = |z-1|^{-1}(\lambda_2(z) - \lambda_2(1)) = 0$, woraus wir angesichts der Gleichung $[\lambda(1^{\tilde{\delta}(0,t)})] = [\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(0,t)}$ mit (59) folgern, daß $\lambda_2(1) = 0$ gilt. Im Fall $\lambda_2(1) \neq 0$ muß deshalb $l-d \in (k+d)\mathbb{Z}$ gelten. Wie wir im Beweis von (i) schon gesehen haben, gilt in diesem Fall auch $k+d \in (l-d)\mathbb{Z}$, und wir erhalten $|k+d| = |l-d|$. Wegen $k \in 4\mathbb{Z}$ und $l \notin 4\mathbb{Z}$ (vgl. (46)) ist außerdem $k \neq -l$, woraus schließlich $k+d \neq -(l-d)$ und somit $k+d = l-d$ folgt.

Analog erhält man im Fall $\lambda_4(j) \neq 0$ durch Betrachtung von $z := j^{\tilde{\delta}(0,(l+d)^{-1})} \in \Sigma_{[s,S]}$ (es ist dann $z \in \{0\} \times \mathbb{R}^2$), daß $l+d = k-d$ gilt.

(iii) Nach (44) und (46) sind die Voraussetzungen für 1.9 erfüllt, wonach $|k+d| \neq |l-d|$ oder $|k-d| \neq |l+d|$ gilt. Mit (ii) folgt daraus $\lambda_2(1) = 0$ oder $\lambda_4(j) = 0$. Wären gleichzeitig $\lambda_2(1) = 0$ und $\lambda_4(j) = 0$, dann wären nach (57) und (58) angesichts der Linearität von λ alle $\lambda(z)$ in $\mathrm{GL}_2\mathbb{C} \cup \{0\}$ enthalten, was entgegen der Voraussetzung bedeuten würde, daß der Kern der Ebene mindestens komplex ist. \square

Im folgenden identifizieren wir wieder \mathbb{R}^4 mit $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und fassen die komplexen Zahlen als reelle 2×2 -Matrizen auf (vgl. 1.1).

5.15 Lemma

Es ist

$$\lambda : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathrm{M}_4\mathbb{R} : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & \kappa(z_1) \cdot \lambda_2(1) + \kappa(z_2) \cdot \lambda_2(j) \\ z_2 & \kappa(z_1) \cdot \lambda_4(1) + \kappa(z_2) \cdot \lambda_4(j) \end{pmatrix},$$

wobei κ entweder die Identität auf \mathbb{C} oder die Komplexkonjugation ist.

Beweis: Nach 5.14 (i) gilt $k-c = \mu(l-d)$ und gleichzeitig $k-d = \mu(l-c)$ mit $\mu \in \{-1, 1\}$. Im Fall $\mu = 1$ sei κ die Identität auf \mathbb{C} und sonst sei κ die Komplexkonjugation. Zu $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ existieren $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $|z_1|\delta(t_1(k-c)) = z_1$ und $|z_2|\delta(t_2(l-c)) = z_2$ (man beachte, daß $k-c \neq 0 \neq l-c$ gilt, vgl. 5.14). Betrachte

tet man $[\lambda(1)]^{\tilde{\delta}(0,t_1)}$ und $[\lambda(j)]^{\tilde{\delta}(0,t_2)}$, dann zeigen die Beschreibungen (59) und (60) angesichts der Linearität von λ zusammen mit (15) und den Aussagen aus 5.14, daß

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = |z_1| \begin{pmatrix} \delta(t_1(k-c)) & \delta(t_1\mu(k-c)) \cdot \lambda_2(1) \\ 0 & \delta(t_1\mu(k-c)) \cdot \lambda_4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & \kappa(z_1) \cdot \lambda_2(1) \\ 0 & \kappa(z_1) \cdot \lambda_4(1) \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = |z_2| \begin{pmatrix} 0 & \delta(t_2\mu(l-c)) \cdot \lambda_2(j) \\ \delta(t_2(l-c)) & \delta(t_2\mu(l-c)) \cdot \lambda_4(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(z_2) \cdot \lambda_2(j) \\ z_2 & \kappa(z_2) \cdot \lambda_4(j) \end{pmatrix}$$

gilt. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß λ ein additiver Homomorphismus ist. □

5.16 Erneute Anpassung der Koordinaten

Durch eine Koordinatentransformation auf T mit

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_4 & \\ & M_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_8\mathbb{R} \quad \text{für} \quad M_1 = \begin{pmatrix} & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R}$$

können die Rollen von $(0, 1)$ und $(0, j)$ vertauscht werden, wobei gleichzeitig auch die Rollen von $1 \in \Sigma_{[s,S]}$ und $j \in \Sigma_{[s,S]}$ vertauscht werden (wie in 5.12 führen wir gemäß der Übertragung der Koordinaten von S auf $\Sigma_{[s,S]}$ die entsprechende Koordinatentransformation mit M_1 auch auf der Scherungsgruppe durch). Nach einer solchen Koordinatentransformation haben die von $T_{[s]}$ verschiedenen Elemente von \mathcal{S} die folgende Gestalt: Für alle $z \in \mathbb{R}^4$ ist $T_{[(z)]} = \{(x, M_1\lambda(M_1^{-1}z)x; x \in \mathbb{R}^4)\}$. Die Abbildung λ wird also durch

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow M_4\mathbb{R} : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & \kappa(z_2) \cdot \lambda_4(1) + \kappa(z_1) \cdot \lambda_4(j) \\ z_2 & \kappa(z_2) \cdot \lambda_2(1) + \kappa(z_1) \cdot \lambda_2(j) \end{pmatrix}$$

ersetzt, was bedeutet, daß in der Beschreibung aus 5.15 nur $\lambda_2(1)$ und $\lambda_4(j)$ sowie $\lambda_4(1)$ und $\lambda_2(j)$ vertauscht werden, weshalb (57) und (58) ihre Gültigkeit behalten. Nach 5.14 (iii) können wir also annehmen, daß $\lambda_2(1) = 0$ und $\lambda_4(j) \neq 0$ gilt.

Eine anschließende Koordinatentransformation mit

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_4 & \\ & M_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_8\mathbb{R} \quad \text{für} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \\ & (\lambda_4(1))^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4\mathbb{R}$$

(auf T und auf $\Sigma_{[s,S]}$) hat dann zur Folge, daß $\lambda(1)$ durch \mathbb{I}_4 ersetzt wird. Außerdem werden $\lambda_2(j)$ durch $\kappa(\lambda_4(1)) \cdot \lambda_2(j)$ und $\lambda_4(j)$ durch $\kappa(\lambda_4(1)) \cdot (\lambda_4(1))^{-1} \cdot \lambda_4(j)$ ersetzt (man beachte, daß $\lambda_4(1) \in \mathbb{R}^\times \cdot \mathrm{SO}_2\mathbb{R} = \mathbb{C}^\times$ gilt). Die Relationen aus (58) behalten somit ihre Gültigkeit, und λ wird weiterhin gemäß 5.15 (mit $\lambda_2(1) = 0$ und $\lambda_4(1) = \mathbb{I}_2$) beschrieben.

5.17 Beschreibung von \mathcal{P} als Ebene über einer Divisionsalgebra

Nun hat λ die Gestalt aus 4.1, wobei $u = \lambda_2(j)$ und $vJ = \lambda_4(j)$ ist (man beachte, daß $\lambda_2(j) \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}_2\mathbb{R} = \mathbb{C}$ und $\lambda_4(j) \in (\mathbb{R} \cdot \mathrm{O}_2^-\mathbb{R}) \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times J$ gilt). Also ist \mathcal{P} zur Ebene über einer der Divisionsalgebren aus 4.2 isomorph. Da sämtliche Streckungsgruppen von \mathcal{P} nach Voraussetzung höchstens eindimensional sind, sind die Nuklei ihrer koordinatisierenden Divisionsalgebra sämtlich reell (siehe 1.28). Die Divisionsalgebren aus 4.2 mit dieser Eigenschaft sind nach 4.3 und 4.4 bis auf Isotopie genau die Divisionsalgebren $D_{u,1}$ mit $(u, 1) \in \mathbb{D}$. Für $u \in \mathbb{C}$ ist dabei $(u, 1) \in \mathbb{D}$ äquivalent zu $\mathrm{Re}(u) < \mathrm{Im}(u)^2 - 1/4$ (vgl. 4.5).

Umgekehrt zeigt die Beschreibung 4.14 der Autotopismengruppe von $D_{u,1}$ angesichts des Zusammenhangs dieser Autotopismengruppe mit der Automorphismengruppe von $\mathcal{D}_{u,1}$ (vgl. 1.30), daß letztere eine 16–dimensionale auflösbare Gruppe ist. Insgesamt haben wir damit den folgenden Satz bewiesen:

5.18 Satz

Eine achtdimensionale kompakte Ebenen vom Lenz–Typ V ist genau dann zu einer Ebene $\mathcal{D}_{u,1}$ aus 4.2 mit $u \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}(u) < \operatorname{Im}(u)^2 - 1/4$ isomorph, wenn ihre Streckungsgruppen höchstens eindimensional sind und ihre Automorphismengruppe eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (i) Sie ist mindestens 16–dimensional und hat eine auflösbare Zusammenhangskomponente.
- (ii) Im Stabilisator zweier von der Translationsachse verschiedener Geraden, von denen genau eine das Scherungszentrum enthält, ist eine zweidimensionale Torusuntergruppe enthalten. □

Nach 3.32 ist die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe einer acht-dimensionalen kompakten Ebene vom Lenz–Typ V auflösbar, wenn sie 16–dimensional ist. Angesichts von H. Hähls und N. Knarrs Klassifikationen der achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit mindestens 17–dimensionaler Automorphismengruppe bzw. mit komplexem Kern (siehe 1.34 und 1.35) sind somit alle Ebenen vom Lenz–Typ V mit mindestens 16–dimensionaler Automorphismengruppe klassifiziert:

5.19 Satz

Die achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit einer mindestens 16–dimensionalen Automorphismengruppe sind bis auf Isomorphie genau die folgenden:

- (i) Die klassische Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H}$, deren Automorphismengruppe 35–dimensional ist.
- (ii) Die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$, $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^*$ und $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^{*T}$ mit $h \in \mathbb{C}$, $|h| = 1$, $\operatorname{Re}(h) > 0$ und $\operatorname{Im}(h) > 0$ (bzw. die Ebenen $\mathcal{K}_{0,c}$, $(\mathcal{K}_{0,c})^*$ und $(\mathcal{K}_{0,c})^{*T}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Im}(c) = 1$, vgl. 1.34 und 1.35). Jede dieser Ebenen hat eine 18–dimensionale Automorphismengruppe und sowohl eindimensionale als auch zweidimensionale volle Streckungsgruppen.
- (iii) Die Ebenen \mathcal{R}_ϑ mit $0 < \vartheta < \pi$ (vgl. 1.33), die alle eine 17–dimensionale Automorphismengruppe haben und die dadurch charakterisiert sind, daß sämtliche vollen Streckungsgruppen zweidimensional sind.
- (iv) Die Ebenen $\mathcal{H}_{\alpha,\operatorname{id}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ (vgl. 1.34), die alle eine 17–dimensionale Automorphismengruppe und nur eindimensionale volle Streckungsgruppen haben.
- (v) Die Ebenen $\mathcal{K}_{0,c}$, $(\mathcal{K}_{0,c})^*$ und $(\mathcal{K}_{0,c})^{*T}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \operatorname{Im}(c) \neq 1$ sowie entweder $\operatorname{Im}(c) > 1$ oder $\operatorname{Re}(c) > \sqrt{1 - \operatorname{Im}(c)^2}$ (vgl. 1.35). Jede dieser Ebenen hat eine 16–dimensionale Automorphismengruppe und sowohl eindimensionale als auch zweidimensionale volle Streckungsgruppen.
- (vi) Die Ebenen $\mathcal{D}_{u,1}$ mit $u \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}(u) < \operatorname{Im}(u)^2 - 1/4$ (vgl. 4.2 und 4.5), die alle eine 16–dimensionale Automorphismengruppe und nur eindimensionale volle Streckungsgruppen haben.

Die zu den Ebenen aus (iii), (v) und (vi) isomorphen Ebenen sind dabei genau diejenigen, deren Automorphismengruppe eine auflösbare Zusammenhangskomponente hat. □

6 Zu Translationsebenen mit komplexem Kern

In einer Reihe von Arbeiten hat H. Hähl verschiedene Klassen achtdimensionaler kompakter Translationsebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe beschrieben. Es wird sich im Abschnitt 7 herausstellen, daß darunter tatsächlich schon alle achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe, deren Zusammenhangskomponente nicht auflösbar ist, zu finden sind. Um das einsehen zu können, müssen wir zunächst noch zeigen, daß keine Automorphismengruppe einer achtdimensionalen kompakten Translationsebene mit komplexem Kern eine abgeschlossene Untergruppe enthalten kann, die lokal isomorph zum direkten Produkt $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ ist. Dazu nehmen wir an, daß doch eine solche zu $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ lokal isomorphe Gruppe Ψ in der Automorphismengruppe Σ einer achtdimensionalen kompakten Translationsebene \mathcal{P} mit Kern $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ enthalten ist. Da \mathcal{P} unter diesen Voraussetzungen insbesondere nicht klassisch ist, fixiert Σ die Translationsachse L_∞ , und die Lie–Algebra von Σ ist eine direkte Summe der Lie–Algebra \mathfrak{t} der Translationsgruppe T und der Lie–Algebra \mathfrak{s} des Stabilisators Σ_o eines Punktes $o \in P^{L_\infty}$. Angesichts der Halbeinfachheit von $\mathfrak{su}_2\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ und der Kommutativität von \mathfrak{t} enthält \mathfrak{s} dann eine zu $\mathfrak{su}_2\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ isomorphe Unteralgebra. Wir können also annehmen, daß Ψ eine zusammenhängende (abgeschlossene) Untergruppe von Σ_o ist. Wegen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wirkt Ψ per Konjugation komplex–linear auf der Translationsgruppe T .

Bei den folgenden Betrachtungen werden die beiden Untergruppen

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

und

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R} \right\}$$

von $SL_2\mathbb{R}$ sowie ihr semidirektes Produkt

$$H := B \rtimes A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

eine entscheidende Rolle spielen. Zur bequemeren Bezeichnung der Elemente von H setzen wir

$$\eta_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.

6.1 Bemerkung

Jede zu H isomorphe abgeschlossene Untergruppe von $S\Sigma_o$ fixiert höchstens einen²⁷ Punkt der Translationsachse L_∞ . Die dabei den Untergruppen A und B von H entsprechenden Gruppen fixieren jeweils höchstens zwei Punkte auf L_∞ .

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Satz über Achsenstabilisatoren [Anhang: C.16], denn H ist eine zweidimensionale kompaktfreie Gruppe und die abgeschlossenen Untergruppen A und B sind zur additiven Gruppe von \mathbb{R} isomorph. □

²⁷Da H auflösbar ist, fixiert eine solche Gruppe nach 3.2 somit genau einen Punkt auf L_∞ .

Zunächst bestimmen wir, wie die Gruppe Ψ per Konjugation auf der Translationsgruppe T wirkt.

6.2 Lemma

Die Wirkung von Ψ auf T ist äquivalent zum Tensorprodukt der gewöhnlichen Wirkung von $SU_2\mathbb{C}$ auf \mathbb{C}^2 und der Wirkung von $SL_2\mathbb{R}$ auf \mathbb{C}^2 , die man erhält, wenn man die reellen 2×2 -Matrizen als komplexe 2×2 -Matrizen auffaßt und diese gewöhnlich auf \mathbb{C}^2 wirken läßt.

Beweis: Wäre die (komplex-lineare) Wirkung von Ψ auf T nicht irreduzibel, dann enthielte Ψ nach [Anhang: B.28] eine abgeschlossene Untergruppe Ω , die zu $SL_2\mathbb{R}$ isomorph ist und die auf einem komplex zweidimensionalen Teilraum V_1 von T eine zur „gewöhnlichen“ Wirkung von $SL_2\mathbb{R}$ auf \mathbb{C}^2 äquivalente Wirkung induziert und trivial auf einem (ebenfalls komplex zweidimensionalen) Komplement V_2 von V_1 in T wirkt. Als fasteinfache Gruppe wäre Ω in $S\Sigma_o$ enthalten. Die der Gruppe H entsprechende Untergruppe von Ω normalisierte dann einen eindimensionalen komplexen Teilraum von V_1 und fixierte damit das Zentrum $p \in L_\infty$ der Richtungskomponente, in der dieser eindimensionale Teilraum enthalten ist. Die Richtungskomponente $T_{[p]}$ könnte neben dem eindimensionalen Teilraum von V_1 nicht auch den (reell vierdimensionalen) Teilraum V_2 vollständig enthalten. Da V_2 von H zentralisiert werden würde, müßte also mindestens ein von p verschiedener Punkt $q \in L_\infty$ existieren, der von H fixiert wird, was im Widerspruch zu 6.1 stünde. Also ist δ eine irreduzible Darstellung, und die Behauptung des Lemmas folgt aus der Beschreibung der irreduziblen Darstellungen in [Anhang: B.28]. \square

6.3 Vereinbarungen

Aufgrund der Effektivität der Konjugationswirkung auf T ist Ψ nach 6.2 ein fastdirektes Produkt $\Xi \cdot \Omega$ mit $\Xi \cong SU_2\mathbb{C}$ sowie $\Omega \cong SL_2\mathbb{R}$ und dem zweielementigem Zentrum $C\Psi$ als Schnitt $\Xi \cap \Omega$. Entsprechend der Beschreibung der Wirkung von Ψ auf der Translationsgruppe schreiben wir letztere im folgenden als komplexes Tensorprodukt $T = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ und identifizieren Ξ mit $SU_2\mathbb{C}$ und Ω mit $SL_2\mathbb{R}$ derart, daß für $\xi \in \Xi$ und $\omega \in \Omega$ die Konjugation von $v \otimes_{\mathbb{C}} w \in T$ mit $\xi\omega \in \Psi$ durch

$$(v \otimes_{\mathbb{C}} w)^{\xi\omega} = \xi\omega(v \otimes_{\mathbb{C}} w)(\xi\omega)^{-1} = \xi v \otimes_{\mathbb{C}} \omega w$$

beschrieben wird. Die Abbildung

$$\psi : SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R} \rightarrow \Psi : (\xi, \omega) \mapsto \xi\omega$$

ist dann eine zweiblättrige Überlagerung, und ihre Einschränkungen auf die Faktoren $SU_2\mathbb{C}$ und $SL_2\mathbb{R}$ sind angesichts der Identifikation von Ξ und Ω mit diesen Gruppen jeweils die Identität auf Ξ bzw. Ω .

Des weiteren seien $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Schließlich sei mit \mathcal{F} die folgende Menge zweidimensionaler komplexer Teilräume von T bezeichnet:

$$\mathcal{F} := \{ \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} v\mathbb{C} ; v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}^2 \}.$$

Es wird sich nun herausstellen, daß \mathcal{F} gleich der Menge $\text{Fix}_{\mathcal{S}} \Xi$ der Richtungskomponenten von T ist, die von Ξ fixiert (normalisiert) werden (es sei bei dieser Gelegenheit noch einmal an die Definition des Spreads \mathcal{S} der Richtungskomponenten von T aus 1.23 erinnert).

6.4 Lemma

Es gilt $\mathcal{F} \subseteq \text{Fix}_{\mathcal{S}} \Xi$.

Beweis: An der Beschreibung der Wirkung von Ψ auf T liest man direkt ab, daß Ξ jeden in \mathcal{F} enthaltenen zweidimensionalen komplexen Teilraum von T normalisiert.

Die Gruppe $B \leq \Omega$ zentralisiert $V := \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} e_1 \mathbb{C}$. Wäre der reell vierdimensionale Teilraum V von T nicht in \mathcal{S} enthalten, so zentralisierte B Elemente aus mindestens drei Richtungskomponenten und fixierte damit deren verschiedene Zentren (auf L_{∞}), was nach 6.1 unmöglich ist. Also ist V ein Element von \mathcal{S} . Da $\text{SL}_2 \mathbb{R}$ bei der gewöhnlichen Wirkung transitiv auf den eindimensionalen Teilräumen von \mathbb{R}^2 operiert, wirkt die Gruppe Ω transitiv auf \mathcal{F} . Damit ist jedes Element von \mathcal{F} als Element der Bahn $\Omega(V) = \{V^{\omega} ; \omega \in \Omega\}$ eine Richtungskomponente von T . □

6.5 Lemma

Auf der Menge \mathcal{S} wirkt Ξ so wie $\text{SO}_3 \mathbb{R}$ auf der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$, wobei $(\{0\} \oplus \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ die Menge der Fixpunkte ist und $\text{SO}_3 \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^3 \oplus \{0\}$ gewöhnlich wirkt. Insbesondere ist die Menge $\text{Fix}_{\mathcal{S}} \Xi$ der von Ξ fixierten Richtungskomponenten von T homöomorph zur Kreislinie \mathbb{S}_1 .

Beweis: Die (zentrale) Involution in Ξ bewirkt auf $T = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ die Skalarmultiplikation mit -1 . Sie normalisiert also jeden Teilraum von T und damit insbesondere jedes Element von \mathcal{S} . Die Gruppe $\Sigma_{[\mathcal{S}]}$ der die Menge \mathcal{S} elementweise fixierenden, also jede Richtungskomponente von T normalisierenden, Automorphismen von \mathcal{P} ist die multiplikativen Gruppe $\mathbb{K}^{\times} = \Sigma_{[0, L_{\infty}]}$ des Kerns $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Diese enthält insbesondere keine zu $\text{SU}_2 \mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe. Da $\Xi = \text{SU}_2 \mathbb{C}$ keine weiteren Normalteiler enthält (vgl. Hein [90] S. 65, Satz 11), besteht der Ineffektivitätskern der Wirkung von Ξ auf \mathcal{S} aus dem zweielementigen Zentrum, und Ξ wirkt als $\text{SO}_3 \mathbb{R}$ auf der zur 4-Sphäre \mathbb{S}_4 homöomorphen Menge \mathcal{S} . Daß diese Wirkung von der gewöhnlichen linearen herrührt, folgt aus R. W. Richardsons Klassifikation der Wirkungen kompakter Gruppen auf der 4-Sphäre [Anhang: A.12]. □

Damit läßt sich zeigen, daß \mathcal{F} alle durch Ξ fixierten Richtungskomponenten von T enthält.

6.6 Folgerung

Es gilt $\mathcal{F} = \text{Fix}_{\mathcal{S}} \Xi$.

Beweis: Die in der Grassmann-Mannigfaltigkeit der vierdimensionalen Teilräume von \mathbb{R}^8 enthaltene Teilmenge \mathcal{F} ist homöomorph zur Menge der eindimensionalen reellen Teilräume von \mathbb{R}^2 . Diese ist zur Kreislinie \mathbb{S}_1 homöomorph. Da \mathcal{F} nach 6.4 eine Teilmenge der ebenfalls zur Kreislinie homöomorphen Menge $\text{Fix}_{\mathcal{S}} \Xi$ ist, folgt daraus die Gleichheit dieser beiden Mengen. □

6.7 Bezeichnungen für die Elemente von Ξ und von Torusgruppen in Ψ

Zur Beschreibung der Elemente von $\Xi = \mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ erinnern wir uns daran, daß $\mathrm{SU}_2\mathbb{C} = \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ bei Betrachtung von \mathbb{H}^\times als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ gilt (siehe 1.2). Für $q = x + jy \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ (mit $x, y \in \mathbb{C}$) schreiben wir in der Matrixvariante (als Element von Ξ) der Deutlichkeit halber ξ_q statt q , also

$$\xi_q = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}.$$

Damit ist $\Xi = \{\xi_q; q \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}\}$. Die Menge der auf L_∞ liegenden Fixpunkte von Ξ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}_{L_\infty} \Xi &= \{p \in L_\infty; T_{[p]} \in \mathrm{Fix}_{\mathcal{S}} \Xi\} = \{p \in L_\infty; T_{[p]} \in \mathcal{F}\} \\ &= \{\widehat{\zeta}(V); V \in \mathcal{F}\} = \widehat{\zeta}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

(wobei $\widehat{\zeta} : \mathcal{S} \rightarrow L_\infty$ der durch die Zentrumsabbildung ζ induzierte Homöomorphismus ist, vgl. 1.23). Bei der Bestimmung der Stabilisatoren von Elementen des Komplements $L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ dieser Menge wird sich das fastdirekte Produkt

$$\Theta := \Theta_\Xi \cdot \Theta_\Omega$$

als ein typischer Vertreter herausstellen, wobei $\Theta_\Xi := \{\xi_z; z \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}\} \leq \Xi$ zur Torusgruppe $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ isomorph ist und $\Theta_\Omega := \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \leq \Omega$ sei. Für die Matrixvariante von $z = a + ib \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ führen wir die Bezeichnung ω_z ein, um z damit als Element von $\Theta_\Omega = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ kenntlich zu machen. Es ist dann also

$$\omega_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$$

und $\Theta_\Omega = \{\omega_z; z \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}\}$.

6.8 Lemma

Für jeden Punkt $p \in L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ ist die Zusammenhangskomponente $\Psi_p^{\mathbb{1}}$ des Stabilisators von p in Ψ konjugiert zur kompakten Untergruppe Θ von Ψ .

Beweis: Zum Nachweis, daß $\Psi_p^{\mathbb{1}}$ kompakt ist, betrachten wir eine abgeschlossene Einparameteruntergruppe P von Ψ_p . Zu P existiert eine Einparameteruntergruppe \tilde{P} in $\widetilde{\Psi}_p := (\psi^{\leftarrow}(\Psi_p))^{\mathbb{1}} \leq \mathrm{SU}_2\mathbb{C} \times \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ mit $P = \psi(\tilde{P})$ (vgl. Hilgert–Neeb [91] I.9.3). Die natürlichen Projektionen von $\mathrm{SU}_2\mathbb{C} \times \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ auf die Faktoren $\mathrm{SU}_2\mathbb{C} = \Xi$ und $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} = \Omega$ seien mit π_Ξ bzw. π_Ω bezeichnet. Die Gruppe $\pi_\Omega(\tilde{P})$ ist dann eine Einparameteruntergruppe von Ω . Jede zu \mathbb{R} isomorphe Einparameteruntergruppe von Ω ist (unter Ω) zu A oder zu B konjugiert (siehe Hilgert–Hofmann [85] S. 23). An der Beschreibung der Wirkung von Ω auf \mathcal{F} liest man ab, daß A und B Elemente von \mathcal{F} fixieren. Wäre die Gruppe $\pi_\Omega(\tilde{P})$ nicht kompakt, so fixierte sie also das Zentrum $q = \widehat{\zeta}(T_{[q]})$ einer Richtungskomponente $T_{[q]} \in \mathcal{F}$. Da $\pi_\Omega(\tilde{P})$ als Untergruppe von Ω auf der zur (kompakten) Kreislinie \mathbb{S}_1 homöomorphen Teilmenge $\widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ von L_∞ wirkt, ergäbe sich ein Widerspruch zum Satz über Achsenstabilisatoren [Anhang: C.16], nach dem sich die Bahnen der Gruppe $\pi_\Omega(\tilde{P}) \cong \mathbb{R}$ auf $L_\infty \setminus \{p, q\}$ jeweils sowohl bei p als auch bei q häufen müßten. Also ist $\pi_\Omega(\tilde{P})$ kompakt, womit auch P als abgeschlossene Untergruppe des fastdirekten Produkts $\Xi \cdot \pi_\Omega(\tilde{P})$ kompakt ist.

Der Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa [[Anhang: A.6](#)] zeigt nun, daß $\Psi_p^{\mathbb{1}}$ kompakt und konjugiert zu einer Untergruppe der maximalen kompakten Untergruppe $\Xi \cdot \Theta_\Omega$ der zusammenhängenden Gruppe Ψ ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\Psi_p^{\mathbb{1}}$ in $\Xi \cdot \Theta_\Omega$ enthalten ist. Die Zusammenhangskomponente $\widetilde{\Psi}_p$ des Urbildes von Ψ_p unter der (zweiblättrigen) Überlagerung ψ ist dann eine abgeschlossene Untergruppe von $\Xi \times \Theta_\Omega$ und ist somit ebenfalls kompakt.

Da der Kern von ψ zweielementig ist, stimmen die Dimensionen der abgeschlossenen Untergruppen von $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ mit den Dimensionen ihrer Bilder unter ψ überein. Insbesondere gilt

$$\dim \psi(\widetilde{\Psi}_p) = \dim \widetilde{\Psi}_p = \dim \psi^{-1}(\Psi_p) = \dim \Psi_p = \dim \Psi_p^{\mathbb{1}}.$$

Also ist $\psi(\widetilde{\Psi}_p)$ eine Untergruppe der vollen Dimension in der zusammenhängenden Lie-Gruppe $\Psi_p^{\mathbb{1}}$, was $\psi(\widetilde{\Psi}_p) = \Psi_p^{\mathbb{1}}$ impliziert. Wegen $\dim \Psi = 6$ und $\dim \Psi(p) \leq \dim L_\infty = 4$ ist

$$\dim \widetilde{\Psi}_p = \dim \Psi_p = \dim \Psi - \dim \Psi(p) \geq 2.$$

Die Lie-Algebra von $SU_2\mathbb{C}$ ist isomorph zu \mathbb{R}^3 mit dem Vektorprodukt als Lie-Klammer (vgl. [Hilgert–Neeb \[91\]](#) II.1.16), woran man ablesen kann, daß sie keine zweidimensionalen Unteralgebren enthält. Echte abgeschlossene Untergruppen von $SU_2\mathbb{C}$ sind also höchstens eindimensional, weshalb $\widetilde{\Psi}_p$ als mindestens zweidimensionale abgeschlossene Untergruppe von $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ keine echte Untergruppe der dreidimensionalen Gruppe $SU_2\mathbb{C}$ ist. Wegen $T_{[p]} \notin \mathcal{F} = \text{Fix}_S \Xi$ ist andererseits $N := SU_2\mathbb{C} \cap \widetilde{\Psi}_p$ verschieden von $SU_2\mathbb{C}$, und wir schließen $\widetilde{\Psi}_p \not\leq SU_2\mathbb{C}$.

Als Kern der Einschränkung von π_Ω auf $\widetilde{\Psi}_p$ ist N ein Normalteiler von $\widetilde{\Psi}_p$. Wäre $\pi_\Xi(\widetilde{\Psi}_p) = SU_2\mathbb{C}$, dann wäre $N = \pi_\Xi(N)$ als epimorphes Bild eines Normalteilers ein Normalteiler von $SU_2\mathbb{C}$ und müßte wegen $N \neq SU_2\mathbb{C}$ im zweielementigen Zentrum von $SU_2\mathbb{C}$ liegen (vgl. [Hein \[90\]](#) S. 65, Satz 11). Dies ist aber aus Dimensionsgründen nicht möglich, denn $\pi_\Omega(\widetilde{\Psi}_p)$ ist als kompakte Untergruppe von $SL_2\mathbb{R}$ zu einer Untergruppe der (eindimensionalen) maximalen kompakten Untergruppe $SO_2\mathbb{R} = \Theta_\Omega$ von $SL_2\mathbb{R}$ isomorph, woraus

$$1 \geq \dim \pi_\Omega(\widetilde{\Psi}_p) = \dim \widetilde{\Psi}_p - \dim N \geq 2 - \dim N,$$

also $\dim N \geq 1$, folgt. Wegen $N = \pi_\Xi(N) \leq \pi_\Xi(\widetilde{\Psi}_p)$ ist $\pi_\Xi(\widetilde{\Psi}_p)$ somit eine echte, mindestens eindimensionale zusammenhängende kompakte Untergruppe von $SU_2\mathbb{C}$. Damit ist sie (in $SU_2\mathbb{C}$) konjugiert zur maximalen Torusgruppe $\Theta_\Xi \leq SU_2\mathbb{C}$. Aus Dimensionsgründen ist dann $\pi_\Omega(\widetilde{\Psi}_p)$ (in $SL_2\mathbb{R}$) konjugiert zur maximalen kompakten Untergruppe Θ_Ω . Also ist $\widetilde{\Psi}_p$ eine mindestens zweidimensionale Gruppe, die zu einer Untergruppe der zweidimensionalen Torusgruppe $\Theta_\Xi \times \Theta_\Omega$ konjugiert ist. Dies zeigt, daß $\widetilde{\Psi}_p$ zweidimensional und zu $\Theta_\Xi \times \Theta_\Omega$ konjugiert ist, woraus wegen $\psi(\widetilde{\Psi}_p) = \Psi_p^{\mathbb{1}}$ die Behauptung dieses Lemmas folgt. \square

Im Beweis von [6.4](#) haben wir schon ausgenutzt, daß die Gruppe Ω transitiv auf \mathcal{F} wirkt. Wir wollen nun einsehen, daß Ψ nur zwei Bahnen auf der Menge der Punkte der Translationsachse L_∞ hat. Tatsächlich weisen wir sogar eine echte Untergruppe von Ψ auf, die transitiv auf $L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ wirkt:

6.9 Lemma

Die Untergruppe $\Xi \cdot H$ von Ψ wirkt transitiv auf $L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ (und damit per Konjugation auch auf $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$).

Beweis: Nach 6.8 ist $\dim \Psi_p = 2$ für alle $p \in L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$, woraus

$$\dim \Psi(p) = \dim \Psi - \dim \Psi_p = 4$$

folgt. Auf der Menge $L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ wirkt Ψ also mit lauter vierdimensionalen Bahnen, die nach [Anhang: C.1] sämtlich offen sind. Wegen des Zusammenhangs von $L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ folgt daraus die Transitivität der Wirkung von Ψ auf dieser Menge.

Die kompaktfreie abgeschlossene Untergruppe H von Ω hat einen trivialen Schnitt mit der kompakten Gruppe Θ_Ω . Deshalb ist die stetige Abbildung

$$\Theta_\Omega \times H \rightarrow \Omega : (\vartheta, \eta) \mapsto \vartheta\eta$$

injektiv, und $\Theta_\Omega \cdot H$ ist eine dreidimensionale und damit offene Teilmenge von Ω (vgl. 1.13 und 1.11). Andererseits ist das Produkt der kompakten Untergruppe Θ_Ω mit der abgeschlossenen Untergruppe H eine abgeschlossene Teilmenge von Ω . Also ist $\Theta_\Omega \cdot H = \Omega$. Es sei nun $p \in L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ mit $\Psi_p = \Theta$. Dann gilt

$$\Psi_p \cdot (\Xi \cdot H) = (\Theta_\Xi \cdot \Theta_\Omega) \cdot (\Xi \cdot H) = (\Theta_\Xi \cdot \Xi) \cdot (\Theta_\Omega \cdot H) = \Xi \cdot \Omega = \Psi.$$

Deshalb impliziert die Transitivität von Ψ auf der Menge $L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$, daß schon die Untergruppe $\Xi \cdot H$ auf dieser Menge transitiv wirkt. \square

6.10 Herleitung eines Widerspruchs

Es seien $s, w \in \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ die Punkte mit $T_{[s]} = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} e_2 \mathbb{C}$ sowie $T_{[w]} = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} e_1 \mathbb{C}$. Angesichts des komplexen Kerns der Ebene existiert dann zu jedem Punkt $p \in L_\infty \setminus \{s, w\}$ eine reguläre komplexe Matrix

$$\lambda(p) \in \text{GL}_2 \mathbb{C}$$

derart, daß

$$T_{[p]} = \{x \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \lambda(p)x \otimes_{\mathbb{C}} e_2 ; x \in \mathbb{C}^2\}$$

gilt. Wir wählen nun einen Punkt $p \in L_\infty \setminus \widehat{\zeta}(\mathcal{F})$ mit $\Psi_p = \Theta$.

Für alle $x \in \mathbb{C}^2$, alle $q \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ und alle $z = a + ib \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ ist

$$\begin{aligned} (x \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \lambda(p)x \otimes_{\mathbb{C}} e_2)^{\xi_q \omega_z} &= \\ \xi_q x \otimes_{\mathbb{C}} (e_1 a + e_2 b) + \xi_q \lambda(p)x \otimes_{\mathbb{C}} (-e_1 b + e_2 a) &= \\ \xi_q (xa - \lambda(p)xb) \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \xi_q (xb + \lambda(p)xa) \otimes_{\mathbb{C}} e_2 & \end{aligned}$$

ein Element der Richtungskomponente $T_{[p]}$. Betrachtet man nun speziell das Bild von $x \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \lambda(p)x \otimes_{\mathbb{C}} e_2 \in T_{[p]}$ unter der Konjugationswirkung von $\xi_q \omega_1 \in \Theta = \Psi_p$, dann erhält man

$$\xi_q x \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \xi_q \lambda(p)x \otimes_{\mathbb{C}} e_2 = \xi_q x \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \lambda(p)\xi_q x \otimes_{\mathbb{C}} e_2$$

für alle $x \in \mathbb{C}^2$, woraus $\xi_q \lambda(p) = \lambda(p) \xi_q$ für alle $q \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ folgt. Das heißt, $\lambda(p)$ liegt im Zentralisator $C_{\text{GL}_2 \mathbb{C}} \Theta_{\Xi}$ von Θ_{Ξ} in $\text{GL}_2 \mathbb{C}$. Dieser besteht genau aus den komplexen Skalarmultiplikationen auf \mathbb{C}^2 . Es existiert also eine komplexe Zahl $z_p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\lambda(p)v = vz_p$ für alle $v \in \mathbb{C}^2$.

Bei Betrachtung des Bildes von $x \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + xz_p \otimes_{\mathbb{C}} e_2 \in T_{[p]}$ unter $\xi_q \omega_i \in \Theta$ erhält man

$$-\xi_q x z_p \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \xi_q x \otimes_{\mathbb{C}} e_2 = -\xi_q x z_p \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + (-\xi_q x z_p) z_p \otimes_{\mathbb{C}} e_2$$

für alle $x \in \mathbb{C}^2$ und alle $q \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$. Daraus folgt $z_p^2 = -1$, also

$$z_p \in \{-i, i\}.$$

Wir setzen $\tau_e := e_1 \otimes_{\mathbb{C}} e_1$. Wegen $\tau_e \notin T_{[s]} = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} e_2 \mathbb{C}$ ist die Nebenklasse

$$\tau_e \cdot T_{[s]} = e_1 \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} e_2 \mathbb{C}$$

ein Repräsentantensystem für die Menge $\mathcal{S} \setminus \{T_{[s]}\}$ der von $T_{[s]}$ verschiedenen Elemente in \mathcal{S} , und die Abbildung

$$\sigma : \tau_e \cdot T_{[s]} \rightarrow \mathcal{S} \setminus \{T_{[s]}\} : \tau \mapsto T_{[\zeta(\tau)]}$$

ist ein Homöomorphismus. Für $q \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ ist

$$\xi_q^{-1} e_1 (a + z_p b)^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \xi_q^{-1} e_1 (a + z_p b)^{-1} z_p \otimes_{\mathbb{C}} e_2$$

ein Element von $T_{[p]}$, und

$$\begin{aligned} & (\xi_q^{-1} e_1 (a + z_p b)^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + \xi_q^{-1} e_1 (a + z_p b)^{-1} z_p \otimes_{\mathbb{C}} e_2)^{\xi_q \eta_{a,b}} = \\ & e_1 (a + z_p b)^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} e_1 a + e_1 (a + z_p b)^{-1} z_p \otimes_{\mathbb{C}} (e_1 b + e_2 a^{-1}) = \\ & e_1 \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + (e_1 \otimes_{\mathbb{C}} e_2) (ab - z_p a^2)^{-1} \end{aligned}$$

ist das Bild der Richtungskomponente $T_{[p]}^{\xi_q \eta_{a,b}}$ unter σ^{-1} . Daraus folgt jedoch, daß das Bild der Bahn $T_{[p]}^{\Xi \cdot H} = \{T_{[p]}^{\xi \eta} ; \xi \in \Xi, \eta \in H\} \subseteq \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ unter σ^{-1} in der (reell) zweidimensionalen Menge $e_1 \otimes_{\mathbb{C}} e_1 + (e_1 \otimes_{\mathbb{C}} e_2) \mathbb{C}$ enthalten ist, was im Widerspruch zur Transitivität von $\Xi \cdot H$ auf der (reell) vierdimensionalen Menge $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ steht (vgl. 6.9).

Durch Herleitung dieses Widerspruchs haben wir insgesamt bewiesen:

6.11 Satz

Ist \mathcal{P} eine achtdimensionale kompakte Translationsebene mit komplexem Kern, dann enthält die Gruppe $\Sigma_{L_{\infty}}$ der die Translationsachse L_{∞} fixierenden Automorphismen von \mathcal{P} keine abgeschlossene Untergruppe, die zu $\text{SU}_2 \mathbb{C} \times \text{SL}_2 \mathbb{R}$ lokal isomorph ist. \square

7 Translationsebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß H. Hähl im Rahmen der Untersuchungen, die zur Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit mindestens 17–dimensionaler Automorphismengruppe geführt haben, auch schon alle Translationsebenen beschrieben hat, deren Automorphismengruppe 16–dimensional ist und eine Zusammenhangskomponente hat, die nicht auflösbar ist. Zunächst stellen wir diese Ebenen aus H. Hähls Arbeiten vor, indem wir jeweils eine Abbildung λ angeben, die jedem $m \in \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ derart zuordnet, daß

$$\mathcal{S} = \{\lambda(m); m \in \mathbb{R}^4\} \cup \{\{0\} \times \mathbb{R}^4\}$$

für den Spread \mathcal{S} der Richtungskomponenten in der Translationsgruppe gilt (vgl. 1.23, man beachte, daß hier jede der Abbildungen $\lambda(m)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ aufgefaßt wird).

7.1 Spin(4)–Ebenen

Die Spin(4)–Ebenen \mathcal{F}_φ sind nach Hähl [80a] 3.2 genau die achtdimensionalen kompakten Translationsebenen, deren Automorphismengruppe eine zu Spin(4) isomorphe Untergruppe im Stabilisator eines affinen Punktes enthält. Jede stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ (zur Definition von $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ siehe 1.2) liefert eine solche Ebene \mathcal{F}_φ . Der zugehörige Spread läßt sich mit Hilfe der Quaternionenmultiplikation durch

$$\lambda(m)(x) = m \cdot \varphi(|m|)^{-1} \cdot x \cdot \varphi(|m|) \quad \text{und} \quad \lambda(0)(x) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{H}^\times$ und alle $x \in \mathbb{H}$ beschreiben. Nach Hähl [80a] 3.4 und 4.2 erhält man auf diese Weise eine Ebene mit mindestens 15–dimensionaler Automorphismengruppe Σ , deren Zusammenhangskomponente genau zwei Punkte der Translationsachse L_∞ fixiert. Dabei hat \mathcal{F}_φ genau dann einen reellen Kern und eine 16–dimensionale Automorphismengruppe, wenn $\varphi(\mathbb{R}_{>0})$ in keinem komplexen Teilkörper von \mathbb{H} enthalten ist und multiplikative Homomorphismen $c : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ sowie $c : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ derart existieren, daß

$$\varphi(t) = c(t)^{-1} d(t) \tag{61}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Einen komplexen Kern und eine 16–dimensionale Automorphismengruppe hat \mathcal{F}_φ genau dann, wenn φ nicht die Gestalt aus (61) hat, aber $\varphi(\mathbb{R}_{>0})$ in einem komplexen Teilkörper von \mathbb{H} enthalten ist.

7.2 SO₄ℝ–Ebenen

Nach Hähl [80b] 2.2 sind die SO₄ℝ–Ebenen \mathcal{K}_φ genau die achtdimensionalen kompakten Translationsebenen, deren Automorphismengruppe eine zu SO₄ℝ isomorphe Untergruppe im Stabilisator eines affinen Punktes enthält. Bis auf die klassische Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H} = \mathcal{K}_{\text{id}}$ hat jede diese Ebenen einen reellen Kern und eine 15– oder 16–dimensionale Automorphismengruppe Σ , die (wie ihre Zusammenhangskomponente) genau zwei Punkte auf der Translationsachse L_∞ fixiert (siehe Hähl [80b] 3.1 und 3.3). Die SO₄ℝ–Ebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe sind dabei genau die

Ebenen \mathcal{K}_φ , die für jeden von der Identität verschiedenen multiplikativen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit Hilfe der Quaternionenmultiplikation folgendermaßen definiert sind: Für $m \in \mathbb{H}^\times$ und $x \in \mathbb{H}$ sei

$$\lambda(m)(x) := m \left(\operatorname{Re}(x) + \frac{\varphi(|m|)}{|m|} \operatorname{Pu}(x) \right) \quad \text{und} \quad \lambda(0)(x) := 0.$$

7.3 $\operatorname{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebenen

Als $\operatorname{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebenen werden nach Hähl [82] diejenigen achtdimensionalen kompakten Translationsebenen bezeichnet, deren Automorphismengruppe eine zu $\operatorname{SL}_2\mathbb{C}$ (lokal) isomorphe Untergruppe enthält. Bis auf die klassische Quaternionenebene haben diese Ebenen 15- und 16-dimensionale Automorphismengruppen, deren Zusammenhangskomponenten jeweils fixpunktfrei auf der Punktmenge P wirken (siehe Hähl [82] 2.4 und 2.5). Der Spread \mathcal{S} einer $\operatorname{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebene läßt sich folgendermaßen beschreiben: Jedem $z \in \mathbb{S}_\mathbb{C}$ ist ein Element $B_z \in \operatorname{GL}_2\mathbb{C}$ derart zugeordnet, daß

$$\lambda(m)(x) = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} + B_z \begin{pmatrix} r\bar{x}_1 \\ r\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

für alle $m = \begin{pmatrix} c \\ rz \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ (mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) und alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ gilt (Hähl [82] 3.1).

Die $\operatorname{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe und reellem Kern sind in Hähl [82] 3.3 beschrieben. Eine solche erhält man genau dann, wenn ein Paar (ϱ, k) mit $\varrho \in (0, 1)$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ derart existiert, daß

$$B_z = z \begin{pmatrix} \cos(kt) & -\sin(kt) \\ \sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varrho^{-1} \\ \varrho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kt) & \sin(kt) \\ -\sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix}$$

für alle $z = e^{2it}$ (mit $t \in \mathbb{R}$) gilt. Die $\operatorname{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebenen mit komplexem Kern haben jeweils eine 16-dimensionale Automorphismengruppe. Dies sind nach Hähl [82] 3.4 genau die Ebenen, zu denen eine stetige Abbildung $\sigma : \mathbb{S}_\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, die nicht konstant ist und mit der

$$B_z = z \begin{pmatrix} \sigma(z) & -\sqrt{1 + |\sigma(z)|^2} \\ \sqrt{1 + |\sigma(z)|^2} & -\sigma(z) \end{pmatrix}$$

für jede der Matrizen B_z gilt.

7.4 $\operatorname{Spin}(3)$ - $\operatorname{SO}_3\mathbb{R}$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen

Außer durch die Existenz einer zu $\operatorname{Spin}(3) \cong \operatorname{SU}_2\mathbb{C}$ isomorphen Gruppe von Automorphismen, die als $\operatorname{SO}_3\mathbb{R}$ auf der Translationsachse L_∞ wirkt, sind die nichtklassischen $\operatorname{Spin}(3)$ - $\operatorname{SO}_3\mathbb{R}$ -Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\phi}$ gemäß Hähl [86] 2.3 dadurch charakterisiert, daß der Stabilisator eines affinen Punktes in der Automorphismengruppe Σ eine mindestens dreidimensionale Untergruppe enthält, die aus Scherungen mit einer gemeinsamen Achse $S \in \mathcal{L} \setminus \{L_\infty\}$ (und Zentrum $s = S \wedge L_\infty$) besteht. Das Scherungszentrum s ist dann der einzige Fixpunkt der Zusammenhangskomponente Σ^1 von Σ , und es gilt $\dim \Sigma \in \{15, 16, 17, 18\}$ (vgl. Hähl [86] 4.2). Jede der Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\phi}$ ist festgelegt durch ein $h \in \mathbb{S}_\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(h) > 0$ und $\operatorname{Im}(h) \geq 0$ sowie eine zu \mathbb{R} homöomorphe abgeschlossene Teilmenge ϕ von \mathbb{H} , die 0 und 1 enthält und ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von $(\operatorname{Pu}\mathbb{H}) \cdot h$ in \mathbb{H} ist (auch für das Folgende sei hier an die Inklusionen

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ erinnert). Der Spread \mathcal{S} von $\mathcal{Q}_{h,\phi}$ kann folgendermaßen beschrieben werden (siehe Hähl [86] Abschnitt 2, vgl. auch 1.34): Jedes Element $m \in \mathbb{H}$ läßt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$m = p(m)h + \varphi(m) \quad \text{mit} \quad p(m) \in \text{Pu } \mathbb{H} \quad \text{und} \quad \varphi(m) \in \Phi.$$

Für $m, x \in \mathbb{H}$ setzt man damit

$$\lambda(m)(x) := p(m)xh + x\varphi(m).$$

Keine andere Parameterwahl als $(h, \Phi) = (1, \mathbb{R})$ liefert dabei eine zur klassischen Quaternionenebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H} = \mathcal{Q}_{1,\mathbb{R}}$ isomorphe Ebene, und die schon in 1.34 beschriebenen Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$ sind genau die Ebenen vom Lenz–Typ V unter den $\text{Spin}(3)$ – $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen. Der Kern einer Ebene $\mathcal{Q}_{h,\phi}$ ist genau dann reell, wenn $\Phi \not\subseteq \mathbb{C}$ gilt. Dabei gibt es unter den Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\phi}$ mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe sowohl solche mit komplexem als auch solche mit reellem Kern. Die Bedingungen an die Parameter h und Φ , unter denen $\mathcal{Q}_{h,\phi}$ eine 16–dimensionale Automorphismengruppe hat, kann man Hähl [86] 4.3 entnehmen.

7.5 $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen mit großen Scherungsgruppen

Bis auf Isomorphie sind die nichtklassischen $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen aus Hähl [84] genau die achtdimensionalen kompakten Translationsebenen, deren Automorphismengruppe Σ im Stabilisator eines affinen Punktes außer einer zu $\text{SO}_3\mathbb{R}$ isomorphen Untergruppe eine mindestens dreidimensionale Scherungsgruppe mit fester Achse $S \in \mathcal{L} \setminus \{L_\infty\}$ (und Zentrum $s = S \wedge L_\infty$) enthält (siehe Hähl [84] 3.3). Wie in 1.34 betrachten wir diese Ebenen hier in einer Darstellung, die man zum Beispiel in Salzmann et al. [95] 82.21 findet. Dabei beschreiben wir λ mit Hilfe einer (verallgemeinerten) Mutation der Quaternionenmultiplikation. Diejenigen $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen, die von der Quaternionenebene $\mathcal{P}_2\mathbb{H} = \mathcal{H}_{1,\text{id}}$ und von den (in 1.34 beschriebenen) Ebenen $\mathcal{H}_{\alpha,\text{id}}$ verschiedenen sind, haben 15– und 16–dimensionale Automorphismengruppen mit $\text{Fix}_P \Sigma^{\mathbb{1}} = \{s\}$ (vgl. Hähl [84] 3.3). Die $\text{SO}_3\mathbb{R}$ –Ebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe sind (bis auf Isomorphie) genau die Ebenen $\mathcal{H}_{\alpha,\varphi}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und einer stückweise linearen Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto \begin{cases} r & \text{für } r \geq 0 \\ kr & \text{für } r \leq 0 \end{cases}$$

mit $k > 1$. Der Spread \mathcal{S} von $\mathcal{H}_{\alpha,\varphi}$ läßt sich mit Hilfe der Quaternionenmultiplikation folgendermaßen beschreiben: Für alle $m, x \in \mathbb{H}$ ist

$$\lambda(m)(x) = m \text{Re}(x) + (\varphi(\text{Re}(m)) + \alpha \text{Pu}(m)) \text{Pu}(x).$$

Dimensionsabschätzungen

Wir untersuchen nun eine beliebige achtdimensionale kompakte Translationsebene \mathcal{P} mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe Σ . In der Vorgehensweise orientieren wir uns eng am Beweis des Klassifikationssatzes für achtdimensionale kompakte Translationsebenen mit mindestens 17–dimensionaler Automorphismengruppe aus Hähl [86] S. 334 ff. Wegen $\dim \Sigma = 16$ ist \mathcal{P} insbesondere nicht klassisch, das heißt, für den

Kern \mathbb{K} von \mathcal{P} gilt $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und Σ fixiert die Translationsachse L_∞ . Das Komplement P^{L_∞} der Translationsachse ist eine Bahn unter der in Σ enthaltenen Translationsgruppe. Für $o \in P^{L_\infty}$ gilt wegen $\dim \Sigma = 8$ und $\dim P^{L_\infty} = 8$ also

$$\dim \Sigma_o = \dim \Sigma - \dim \Sigma(o) = 8. \quad (62)$$

Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponente von Σ_o mit Γ und wählen einen Punkt $s \in L_\infty$ mit einer Bahn $\Gamma(s)$ minimaler Dimension. Nach dem Satz über kleine Bahnen in Translationsebenen [Anhang: C.17] gilt $\dim \Gamma(s) \leq 2$. Des weiteren wählen wir einen Punkt $w \in L_\infty \setminus \{s\}$, der im Fall $\Gamma(s) \neq \{s\}$ in $\Gamma(s) \setminus \{s\}$ enthalten sei. In jedem Fall sei w unter den möglichen Punkten so gewählt, daß $\dim \Gamma_s(w)$ minimal ist, was

$$\dim \Sigma(s) + \dim \Sigma_s(w) \leq 4 \quad (63)$$

impliziert. Die Zusammenhangskomponente von $\Gamma_{s,w}$ bezeichnen wir mit Δ . Wegen $\dim \Delta = \dim \Gamma_{s,w}$ gilt $\dim \Gamma = \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) + \dim \Delta$, und mit (62) folgt dann

$$\dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) + \dim \Delta = 8. \quad (64)$$

Angesichts der Isomorphie der Faktorgruppe $\Delta/S\Delta$ zur Zusammenhangskomponente der multiplikativen Gruppe \mathbb{K}^\times des Kerns von \mathcal{P} gilt

$$\dim \Delta = \dim S\Delta + \dim \mathbb{K}. \quad (65)$$

Bezeichnet K die maximale kompakte Untergruppe der Zusammenhangskomponente $(S\Delta)^\natural$ des reduzierten Achsenstabilisators $S\Delta$, dann zeigt der Satz über Achsenstabilisatoren [Anhang: C.16]:

$$\dim S\Delta = \dim (S\Delta)^\natural = \dim K + k \quad (66)$$

mit $k = 1$ oder $k = 0$ je nachdem, ob $(S\Delta)^\natural$ eine Kompressionsuntergruppe enthält oder nicht. Aus (64)–(66) folgt nun

$$\dim K + k + \dim \mathbb{K} + \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) = 8, \quad (67)$$

woraus mit (63)

$$\dim K + k + \dim \mathbb{K} \geq 4, \quad (68)$$

also insbesondere $\dim K \geq 1$, folgt.

7.6 Die Wirkung von K auf L_∞

Als Untergruppe von $S\Gamma$ wirkt K fast effektiv auf der 4-Sphäre L_∞ . Da K die beiden Punkte $s, w \in L_\infty$ fixiert, ergeben sich nach R. W. Richardsons Klassifikation der Wirkungen kompakter Gruppen auf der 4-Sphäre [Anhang: A.12] folgende Möglichkeiten für (die zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe) K :

Entweder wirkt K auf L_∞ wie

- (a) $SO_4\mathbb{R}$ auf $\mathbb{S}_4 \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ (mit $\text{Fix}_{L_\infty} K = \{s, w\}$),
- (b) $U_2\mathbb{C}$ oder $SU_2\mathbb{C}$ auf $\mathbb{S}_4 \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ (ebenfalls mit $\text{Fix}_{L_\infty} K = \{s, w\}$),
- (c) $SO_3\mathbb{R}$ auf $\mathbb{S}_4 \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ (mit $\{s, w\} \subseteq \text{Fix}_{L_\infty} K \approx \mathbb{S}_1$)

und überlagert die entsprechende klassische Gruppe endlich, oder

- (d) K ist eine höchstens zweidimensionale Torusgruppe.

Wir betrachten nun die Fälle im einzelnen.

Ebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse

In den Fällen 7.6 (a) und (b) hat K außer den beiden Fixpunkten s und w lauter zur 3–Sphäre homöomorphe Bahnen auf L_∞ und enthält eine zu $SU_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe. Nach dem Sphärensatz [Anhang: C.19] ist die Ebene dann entweder vom Lenz–Typ V, oder s und w werden von Γ fixiert.

Sind s und w Fixpunkte von Γ , so muß (67) zufolge $\dim K + 3 \geq 8$, also $\dim K \geq 5$ gelten, woraus $K|_{L_\infty} \cong SO_4\mathbb{R}$ folgt. Für die fast effektiv auf L_∞ wirkende Gruppe K gibt es dann zwei Möglichkeiten: Ist K isomorph zur (zweiblättrigen) universellen Überlagerungsgruppe $\text{Spin}(4)$ von $SO_4\mathbb{R}$, dann ist \mathcal{P} zu einer der $\text{Spin}(4)$ –Ebenen aus 7.1 isomorph. Andernfalls ist $K \cong SO_4\mathbb{R}$, und \mathcal{P} ist (bis auf Isomorphie) eine der $SO_4\mathbb{R}$ –Ebenen aus 7.2.

Die achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V, deren Automorphismengruppe eine zu $SU_2\mathbb{C} \cong \text{Spin}(3)$ isomorphe Untergruppe enthält, sind gemäß Hähl [86] 5.7 (vgl. auch Salzmann et al. [95] 82.2) bis auf Isomorphie genau die Ebenen $\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}}$, $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^*$ und $(\mathcal{Q}_{h,\mathbb{R}})^{\ast\tau}$ (mit $h \in \mathbb{S}_\mathbb{C}$, $\text{Re}(h) > 0$ sowie $\text{Im}(h) \geq 0$), die bis auf die klassische Quaternionenebene $\mathcal{Q}_{1,\mathbb{R}} \cong \mathcal{P}_2\mathbb{H}$ sämtlich eine 18–dimensionale Automorphismengruppe haben (vgl. 1.34).

Die Ebenen des $SO_3\mathbb{R}$ –Satzes mit 16–dimensionaler Gruppe

Der Fall 7.6 (c) ist Gegenstand des $SO_3\mathbb{R}$ –Satzes [Anhang: C.20]. Die darin auftretenden $\text{Spin}(4)$ –Ebenen und $SO_4\mathbb{R}$ –Ebenen haben wir schon bei der Behandlung der Fälle 7.6 (a) und (b) betrachtet, und die $SL_2\mathbb{C}$ –Ebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe sind in 7.3 beschrieben.

Die Ebenen, in denen Γ einen dreidimensionalen Normalteiler aus Scherungen mit Zentrum s (und Achse os) wie in Alternative (2) des $SO_3\mathbb{R}$ –Satzes enthält, sind im Fall $K \cong SU_2\mathbb{C}$ zu den $\text{Spin}(3)$ – $SO_3\mathbb{R}$ –Ebenen aus 7.4 isomorph. Für $K \cong SO_3\mathbb{R}$ führt die Alternative (2) des $SO_3\mathbb{R}$ –Satzes zu den $SO_3\mathbb{R}$ –Ebenen aus 7.5.

Schließlich betrachten wir noch die Alternative (1) des $SO_3\mathbb{R}$ –Satzes, gemäß der K ein Normalteiler von Γ wäre und \mathcal{P} (wegen $\dim \Sigma = 16$) einen komplexen Kern hätte. Nach [Anhang: C.21] müßte $(S\Gamma)^\mathbb{1}$ in diesem Fall lokal isomorph zu $SO_3\mathbb{R} \times SL_2\mathbb{R}$ sein, was nach 6.11 jedoch unmöglich ist.

Ebenen mit kleinen maximalen kompakten Gruppen

Zum Schluß betrachten wir nun den Fall 7.6 (d). Hier gilt $\dim K + k + \dim \mathbb{K} \leq 5$ und nach (67) somit $\dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) \geq 3$, was wegen $\dim \Gamma(s) \leq 2$ insbesondere

$$\dim \Gamma_s^\mathbb{1}(w) = \dim \Gamma_s(w) \geq 1$$

impliziert. Das folgende Lemma schränkt die Möglichkeiten für $\dim \Gamma_s(w)$ weiter ein:

7.7 Lemma

Es seien s und w verschiedene Punkte der Translationsachse L_∞ und $o \in P^{L_\infty}$ ein affiner Punkt der nichtklassischen achtdimensionalen kompakten Translationsebene \mathcal{P} .

Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von $\Sigma_{o,s}$ und enthält H_w eine dreidimensionale Torusgruppe Θ , dann gilt $\dim H(w) = \dim H_{[s,os]} \in \{0, 2, 4\}$ (und der Kern \mathbb{K} der Ebene ist komplex).

Beweis: Auf den zur vierdimensionalen Sphäre \mathbb{S}_4 isomorphen Geraden L_∞ und $S := os$ wirkt Θ nach R. W. Richardsons Klassifikation [Anhang: A.12] jeweils mit mindestens eindimensionalem Ineffektivitätskern. Für die Wirkung auf L_∞ können wir genauer schließen, daß $\Theta_{[L_\infty]}$ eine eindimensionale Untergruppe von \mathbb{K}^\times (und $\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$) ist und daß Θ als zweidimensionale Torusgruppe mit Fixpunktmenge $\text{Fix}_{L_\infty} \Theta = \{s, w\}$ auf L_∞ wirkt. Aus $\dim \Theta_{[S]} \geq 1$ folgt insbesondere die Existenz von Homologien mit Achse S und Zentrum w in $H^\mathbb{1}$. Das Lemma über Homologien und Elationen [Anhang: C.14] zeigt dann $H^\mathbb{1}(w) = H^\mathbb{1}_{[s,S]}(w)$. Man beachte, daß L_∞ von der Automorphismengruppe der nichtklassischen Ebene \mathcal{P} fixiert wird, was $H_{[S,S]} = H_{[s,S]}$ impliziert. Angesichts der Freiheit der Wirkung von $H_{[s,S]}$ auf L_∞ und unter Ausnutzung von [Anhang: A.9 und A.10] folgt $\dim H(w) = \dim H_{[s,S]}$. Da s auf der Translationsachse der Translationsebene \mathcal{P} liegt, zeigt die duale Version von [Anhang: C.12], daß $(H_{[s,S]})^\mathbb{1}$ eine reelle Vektorgruppe ist. Die Wirkung von Θ auf $H^\mathbb{1}(w)$ entspricht der stetigen und somit reell-linearen Konjugationswirkung von Θ auf $(H_{[s,S]})^\mathbb{1}$ [Anhang: A.7]. Daß $\dim H_{[s,S]} \neq 1$ gilt, schließen wir nun daraus, daß Θ andernfalls die eindimensionale Bahn $H^\mathbb{1}(w)$ punktweise fixieren müßte, da $\text{GL}_1\mathbb{R}$ keine Torusgruppe enthält. Wir hatten aber schon festgestellt, daß $\text{Fix}_{L_\infty} \Theta = \{s, w\}$ gilt. Die Annahme $\dim H_{[s,S]} = 3$ liefert auf folgende Weise einen Widerspruch: Der Zentralisator Φ von $(H_{[s,S]})^\mathbb{1}$ in Θ wäre mindestens zweidimensional, da die maximalen Torusuntergruppen von $\text{GL}_3\mathbb{R}$ eindimensional sind. Die Zusammenhangskomponente der Faktorgruppe $\Phi/\Phi_{[L_\infty]}$ wäre dann (als Transformationsgruppe) zu einer mindestens eindimensionalen Torusuntergruppe von $\Theta/\Theta_{[L_\infty]}$ isomorph, deren Fixpunktmenge die dreidimensionale Bahn $H^\mathbb{1}(w)$ enthielte. Die Äquivalenz der Wirkung von $\Theta/\Theta_{[L_\infty]}$ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ zur gewöhnlichen Wirkung von $\text{SO}_2\mathbb{R} \times \text{SO}_2\mathbb{R} \leq \text{GL}_4\mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^4 impliziert jedoch, daß $\Theta/\Theta_{[L_\infty]}$ keine solche Untergruppe enthält. □

Damit können wir obige Abschätzung für den Fall 7.6 (d) noch verschärfen: Enthält $\Gamma_{s,w}$ eine dreidimensionale Torusuntergruppe, so zeigt 7.7 wegen $\dim \Gamma_s(w) \geq 1$ und angesichts der Wahl von s und w , daß

$$\dim \Gamma(s) = 2 = \dim \Gamma_s(w) \quad \text{oder} \quad (\dim \Gamma(s) = 0 \quad \text{und} \quad \dim \Gamma_s(w) = 4)$$

gilt. Dies erhalten wir auch, wenn $\Gamma_{s,w}$ keine dreidimensionale Torusuntergruppe enthält, denn in diesem Fall schließen wir

$$\dim K + \dim \mathbb{K} = 3, \quad k = 1 \quad \text{und} \quad \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) = 4. \tag{69}$$

7.8 Zweifach transitive Wirkung auf einer zweidimensionalen Sphärenbahn

Wir betrachten (weiterhin unter der Voraussetzung, daß K eine Torusgruppe ist) nun zunächst den Fall $\dim \Gamma(s) = 2 = \dim \Gamma_s(w)$. Enthält $\Gamma_{s,w}$ eine dreidimensionale Torusgruppe, so folgt aus 7.7 und [Anhang: C.22], daß $\Gamma(s)$ homoömorph zur 2-Sphäre ist. Existiert keine solche Torusgruppe, so zeigt (69), daß $k = 1$ gilt und somit $(S\Gamma_{s,w})^\mathbb{1}$ eine Kompressionsuntergruppe enthält. Die von $\Gamma_{s,w}$ auf L_∞ induzierte Transformationsgruppe ist dann also nicht relativ kompakt, weshalb nach dem Sphärenlemma [Anhang: C.18] auch in diesem Fall $\Gamma(s) \approx \mathbb{S}_2$ gilt.

Aufgrund der vorausgesetzten Minimalität der Dimension der Bahn $\Gamma_s(w)$ ist jede Bahn von Γ_s in $\Gamma(s)$ zweidimensional, woraus folgt, daß Γ_s transitiv auf $\Gamma(s) \setminus \{s\}$ wirkt und daß Γ zweifach transitiv auf $\Gamma(s) \approx \mathbb{S}_2$ wirkt. Nach [Anhang: B.11] wirkt Γ auf $\Gamma(s)$ wie $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ auf $\mathcal{P}_1\mathbb{C}$. Der halbeinfache Kopf von Γ_o enthält also eine zu $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ lokal isomorphe Untergruppe Λ , und \mathcal{P} ist isomorph zu einer der $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ –Ebenen aus 7.3.

7.9 Auflösbare Automorphismengruppen

Es bleibt, den Fall zu betrachten, daß $\dim \Gamma(s) = 0$ und $\dim \Gamma_s(w) = 4$ gilt. Aufgrund des Zusammenhangs von Γ ist $\Gamma(s)$ zusammenhängend, woraus folgt, daß s von Γ fixiert wird. Die Minimalität der Dimension der Bahn von w unter $\Gamma_s = \Gamma$ impliziert, daß alle Bahnen von Γ auf $L_\infty \setminus \{s\} \approx \mathbb{R}^4$ vierdimensional sind, woraus mit [Anhang: C.1] folgt, daß Γ in diesem Fall transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Da \mathcal{K} nach Voraussetzung eine Torusgruppe ist, zeigt 3.18 nun, daß Σ^1 auflösbar ist.

Hat die Ebene \mathcal{P} in dieser Situation einen komplexen Kern, so ist sie nach 3.33 vom Lenz–Typ V, und gehört somit zu den Ebenen, die N. Knarr beschrieben hat (vgl. 1.35). Die Ebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe unter diesen Ebenen sind gemäß 3.34 genau die Ebenen $\mathcal{K}_{0,c}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \mathrm{Im}(c) \neq 1$ sowie entweder $\mathrm{Im}(c) > 1$ oder $\mathrm{Re}(c) > \sqrt{1 - \mathrm{Im}(c)^2}$.

Hat die Ebene \mathcal{P} einen reellen Kern, dann ist bisher nicht klar, ob sie stets vom Lenz–Typ V ist (vgl. Abschnitt 3). Setzt man dies voraus, so zeigt die Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz–Typ V mit einer mindestens 16–dimensionalen Automorphismengruppe 5.19, daß \mathcal{P} zu einer der Ebenen $(\mathcal{K}_{0,c})^*$ oder $(\mathcal{K}_{0,c})^{*\tau}$ mit c wie oben im Fall eines komplexen Kerns²⁸ oder zu einer der Ebenen $\mathcal{D}_{u,1}$ aus 4.2 (mit $u \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}(u) < \mathrm{Im}(u)^2 - 1/4$) isomorph ist.

7.10 Problem

Obige Analyse zeigt zusammen mit den Untersuchungen aus Abschnitt 3 (insbesondere 3.2, 3.4, 3.12 und 3.27–3.29), daß unter den achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit 16–dimensionaler Automorphismengruppe nur noch die (eventuell leere) Klasse derjenigen Ebenen \mathcal{P} zu bestimmen ist, die folgenden Bedingungen genügen:

- Der Kern von \mathcal{P} ist reell.
- Die Zusammenhangskomponente Σ^1 der Automorphismengruppe von \mathcal{P} ist auflösbar.
- Der (zusammenhängende) Stabilisator Γ eines affinen Punktes $o \in P^{L_\infty}$ in Σ^1 fixiert einen Punkt s der Translationsachse L_∞ und enthält einen (zusammenhängenden) abelschen Normalteiler Ψ , der (scharf) transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt.
- Die Scherungsgruppe $\Sigma_{[s,os]}$ ist eine in Ψ enthaltene null- oder zweidimensionale Gruppe (insbesondere ist \mathcal{P} nicht vom Lenz–Typ V).
- Der Stabilisator Γ_w^1 jedes weiteren Punktes $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ in Γ ist zu $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ isomorph und wirkt effektiv auf den beiden Geraden os und ow .
- Auf der Translationsgruppe T wirkt Γ (per Konjugation) als Untergruppe der in 3.28 beschriebenen Gruppe.

²⁸Man beachte, daß die Ebenen $(\mathcal{K}_{0,c})^*$ und $(\mathcal{K}_{0,c})^{*\tau}$ mit $\mathrm{Im}(c) \neq 1$ im Gegensatz zur Ebene $\mathcal{K}_{0,c}$ (mit demselben c) keinen komplexen Kern haben können, da sie (zum Beispiel angesichts der Größe ihrer Automorphismengruppe) nicht zu Ebenen über Rees–Algebren isomorph sind (vgl. 1.31 – 1.33).

Fazit

Die Betrachtungen dieses Abschnitts zeigen, daß in 7.1–7.5 alle achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit einer 16-dimensionalen Automorphismengruppe, deren Zusammenhangskomponente nicht auflösbar ist, beschrieben sind. Tatsächlich hat H. Hähl mit diesen Ebenen (bis auf Dualität und Isomorphie) schon alle achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen bestimmt, deren Automorphismengruppe 16-dimensional ist und eine Zusammenhangskomponente hat, deren Fixgebilde nicht aus einer Fahne besteht. Nach dem Resultat aus Salzmann [90] ist jede solche Ebene nämlich isomorph zu einer Translationsebene oder zu einer dualen Translationsebene (vgl. Abschnitt 2), und da das Fixgebilde der Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe nicht aus einer Fahne besteht, ist diese Zusammenhangskomponente nach 3.18 nicht auflösbar. Insbesondere ergibt sich folgende Klassifikation der Ebenen aus Satz 2.2:

7.11 Satz

Die achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe Σ , deren Zusammenhangskomponente $\Sigma^{\mathbb{1}}$ ein Fixgebilde hat, das nicht aus einer Fahne besteht, sind bis auf Dualität und Isomorphie genau die Ebenen mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe unter den $\text{Spin}(4)$ -Ebenen aus 7.1, den $\text{SO}_4\mathbb{R}$ -Ebenen aus 7.2 und den $\text{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebenen aus 7.3. Dabei besteht das Fixgebilde²⁹ von $\Sigma^{\mathbb{1}}$ im Fall der $\text{Spin}(4)$ -Ebenen und der $\text{SO}_4\mathbb{R}$ -Ebenen aus der Translationsachse L_∞ sowie zwei auf L_∞ liegenden Punkten und im Fall der $\text{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebenen nur aus der Translationsachse.

Die Bestimmung der Ebenen \mathcal{P} mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe, deren Zusammenhangskomponente genau eine Fahne (s, L_∞) fixiert, scheint schwierig zu sein. Selbst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß \mathcal{P} eine Translationsebene ist, könnte es noch Ebenen geben, die bisher nicht bekannt sind (vgl. 7.10). Die Sätze 3.33 und 6.11 haben jedoch die letzten Bausteine zur Klassifikation aller achtdimensionalen kompakten Translationsebenen mit komplexem Kern und 16-dimensionaler Automorphismengruppe geliefert. Mit ihnen konnten wir zeigen, daß diese Ebenen alle schon von H. Hähl und N. Knarr beschrieben wurden. Außerdem ist es in dieser Arbeit gelungen, die Klassifikation der achtdimensionalen kompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit 16-dimensionaler Automorphismengruppe abzuschließen (vgl. 5.18 und 5.19).

²⁹Ohne die Tatsache zu verwenden, daß die Ebene bis auf Dualität eine Translationsebene ist, zeigt Salzmann [90] (3), daß das Fixgebilde von $\Sigma^{\mathbb{1}}$ bis auf Dualität aus einer Gerade und höchstens zwei Punkten auf dieser besteht.

Anhang

A Lokalkompakte Transformationsgruppen

Die Struktur lokalkompakter Gruppen

Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe, deren Trägermenge Γ eine Topologie derart trägt, daß die Gruppenverknüpfung $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ und die Inversion $\Gamma \rightarrow \Gamma : \alpha \mapsto \alpha^{-1}$ stetig sind. Die Grundlagen der Theorie topologischer Gruppen findet man zum Beispiel in [Montgomery–Zippin \[55\]](#) oder in [Hewitt–Ross \[79\]](#) Chap. II. In dieser Arbeit treten Gruppen als Automorphismengruppen zusammenhängender kompakter projektiver Ebenen auf. Versehen mit der kompakt–offenen Topologie (vgl. [Dugundji \[66\]](#) Chap. XII, Definition 1.1) sind solche Automorphismengruppen stets lokalkompakt³⁰ und haben eine abzählbare Basis (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 44.3). Eine Zusammenstellung der Eigenschaften solcher Gruppen, die im Rahmen der Theorie kompakter projektiver Ebenen benötigt werden, findet man im Anhang von [Salzmann et al. \[95\]](#).

Da offene Untergruppen topologischer Gruppen stets auch abgeschlossen sind und eine Teilmenge eines lokalkompakten topologischen Raumes genau dann lokalkompakt ist, wenn sie Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge ist (siehe [Dugundji \[66\]](#) Chap. XI, Theorem 6.5 (3)), gilt:

A.1 Lokalkompakte Untergruppen

Die abgeschlossenen Untergruppen einer lokalkompakten Gruppe sind genau die lokalkompakten Untergruppen dieser Gruppe. □

Der *Nebenklassen-* oder auch *Faktorraum* Γ/Δ einer topologischen Gruppe Γ nach einer Untergruppe Δ kann auf kanonische Weise mit der Quotiententopologie bezüglich der Abbildung $\Gamma \rightarrow \Gamma/\Delta : \gamma \mapsto \gamma\Delta$ versehen werden. Ist dabei Δ ein Normalteiler von Γ , dann macht die Quotiententopologie die Faktorgruppe Γ/Δ zu einer topologischen Gruppe. Für kompakte und lokalkompakte Gruppen gilt:

A.2 Kompaktheit und Lokalkompaktheit von Faktorräumen

Es sei Δ eine abgeschlossene Untergruppe der hausdorffschen topologischen Gruppe Γ .

- (i) *Ist Γ kompakt (lokalkompakt), dann ist auch der Faktorraum Γ/Δ kompakt (lokalkompakt).*
- (ii) *Sind Δ und Γ/Δ kompakt (lokalkompakt), dann ist auch Γ kompakt (lokalkompakt).*

Beweis: [Hewitt–Ross \[79\]](#) (5.22) und (5.25) (man beachte, daß (lokal)kompakte Räume bei [Hewitt–Ross \[79\]](#) nicht notwendigerweise hausdorffsch sein müssen; jedoch sind Faktorgruppen nach abgeschlossenen Untergruppen stets hausdorffsch). □

³⁰Wir verlangen von kompakten und lokalkompakten Räumen stets, daß sie hausdorffsch sind.

Bezüglich der Dimensionen von Faktorräumen lokalkompakter Gruppen gilt:

A.3 Dimensionsformel für lokalkompakte homogene Räume

Es ist $\dim \Gamma = \dim \Delta + \dim(\Gamma/\Delta)$ für jede abgeschlossene Untergruppe Δ einer lokalkompakten Gruppe Γ .

Beweis: Mostert [56] Sec. 5, Corollary 2. □

A.4 Zusammenhangskomponenten

Die *Zusammenhangskomponente* $\Gamma^{\mathbb{1}}$ des Neutralelements einer topologischen Gruppe Γ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von Γ , die das Neutralelement $\mathbb{1}$ enthalten. Man erhält auf diese Weise die maximale zusammenhängende Untergruppe von Γ . Da stetige Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind, ist $\Gamma^{\mathbb{1}}$ charakteristisch in Γ (bezüglich stetiger Automorphismen). Der topologische Abschluß einer zusammenhängenden Untergruppe von Γ ist stets eine zusammenhängende Untergruppe von Γ . Insbesondere ist $\Gamma^{\mathbb{1}}$ also ein zusammenhängender abgeschlossener Normalteiler. Die Faktorgruppe $\Gamma/\Gamma^{\mathbb{1}}$ ist eine total unzusammenhängende hausdorffsche Gruppe (vgl. Hewitt–Ross [79] (7.3)). Total unzusammenhängende lokalkompakte Räume sind nulldimensional (vgl. 1.14). Nach A.3 gilt also $\dim \Gamma^{\mathbb{1}} = \dim \Gamma$ für jede lokalkompakte Gruppe Γ (vgl. auch Salzmänn et al. [95] 93.6).

A.5 Kompakte auflösbare Gruppen

Jede zusammenhängende kompakte auflösbare Gruppe ist abelsch.

Beweis: Iwasawa [49] Lemma 2.2. □

Durch den folgenden Satz wird die Analyse der Struktur zusammenhängender lokalkompakter Gruppen im wesentlichen auf das Studium zusammenhängender kompakter Gruppen reduziert.

A.6 Satz von A. I. Mal'cev & K. Iwasawa

Für jede zusammenhängende lokalkompakte Gruppe Γ gilt:

- (i) Es existiert eine maximale kompakte Untergruppe K in Γ , die zusammenhängend ist und die zu jeder kompakten Untergruppe von Γ eine konjugierte Untergruppe enthält.
- (ii) Es gibt, zur additiven Gruppe von \mathbb{R} isomorphe, Untergruppen P_1, \dots, P_k derart, daß die Abbildung

$$\varphi : P_1 \times \dots \times P_k \times K \rightarrow \Gamma : (\varrho_1, \dots, \varrho_k, \kappa) \mapsto \varrho_1 \cdots \varrho_k \kappa$$

ein Homöomorphismus ist. Insbesondere gilt $\Gamma \approx \mathbb{R}^k \times K$. Ist Γ abelsch, so ist φ ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis: Iwasawa [49] S. 549, Theorem 13 (und Iwasawa [49] Lemma 4.1 sowie Montgomery–Zippin [55] Sec. 4.6, Theorem für den Beweis, daß jede zusammenhängende lokalkompakte Gruppe eine (L)–Gruppe gemäß Iwasawa [49] S. 541 ist). □

Topologische Transformationsgruppen

Eine (*stetige*) *Wirkung* einer (topologischen) Gruppe Γ auf einem (topologischen) Raum M ist eine (stetige) Abbildung $\Gamma \times M \rightarrow M$. Das Paar (Γ, M) heißt dann (*topologische*) *Transformationsgruppe* (da normalerweise aus dem Kontext hervorgeht, wie Γ auf M wirkt, wird die Wirkung selbst bei dieser (etwas laxen) Bezeichnungsweise nicht explizit angegeben). In etwas abgewandelter Sprechweise sagen wir auch, daß Γ als (topologische) Transformationsgruppe auf M wirkt. Der *Ineffektivitätskern* $\Gamma_{[M]}$ der Wirkung von Γ auf M ist der Stabilisator aller Elemente von M in Γ . Die Wirkung von Γ auf M heißt *effektiv*, wenn $\Gamma_{[M]} = \{\mathbb{1}\}$ gilt, und *fast effektiv*, wenn $\Gamma_{[M]}$ endlich ist.

Zwei (topologische) Transformationsgruppen (Γ, M) und (Δ, N) bzw. die zugehörigen Wirkungen heißen *äquivalent*, wenn ein Isomorphismus $\sigma : \Gamma \cong \Delta$ (topologischer Gruppen) und eine Bijektion (ein Homöomorphismus) $\eta : M \rightarrow N$ derart existieren, daß $\sigma(\gamma)(y) = \eta^{-1}(\gamma(\eta(y)))$ für alle $y \in N$ und alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Wenn die Wirkungen aus dem Kontext hervorgehen, nennen wir dann auch die Gruppen Γ und Δ äquivalent oder sagen, daß Γ als Transformationsgruppe zu Δ isomorph ist.

Untergruppen Γ von $\mathrm{GL}_n K$ (mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) fassen wir ebenfalls als topologische Transformationsgruppen (Γ, K^n) auf (mit ihrer gewöhnlichen Wirkung auf K^n). Eine Untergruppe Δ von $\mathrm{GL}_m \tilde{K}$ (ebenfalls mit $\tilde{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) oder eine als Transformationsgruppe wirkende Gruppe Ω heißen in diesem Sinn äquivalent zu Γ , wenn die entsprechenden Transformationsgruppen äquivalent sind.³¹

Von jeder Wirkung auf einer Gruppe verlangen wir, daß sie mit der Gruppenverknüpfung verträglich ist. Eine *Gruppenwirkung* einer (topologischen) Gruppe Γ auf einer (topologischen) Gruppe H wird deshalb durch einen (stetigen) Homomorphismus $\Gamma \rightarrow \mathrm{Aut} H$ gegeben (wobei $\mathrm{Aut} H$ im topologischen Fall mit der kompakt-offenen Topologie versehen sei).

A.7 Frei wirkende Normalteiler

Sind (Γ, M) eine Transformationsgruppe, H ein Normalteiler von Γ und $a \in M$, so wirkt der Stabilisator Γ_a auf der Bahn $H(a)$. Wenn H *frei* auf dieser Bahn wirkt (das heißt, wenn $H_x = \{\mathbb{1}\}$ für alle $x \in H(a)$ gilt), dann ist die Auswertungsabbildung $\alpha_a : H \rightarrow H(a) : \eta \mapsto \eta(a)$ eine Bijektion, die auf kanonische Weise eine Äquivalenz zwischen der Wirkung von Γ_a auf $H(a)$ und der Konjugationswirkung von Γ_a auf H induziert. Ist (Γ, M) eine topologische Transformationsgruppe und ist α ein Homöomorphismus (zum Beispiel, wenn H eine in der Automorphismengruppe einer kompakten projektiven Ebene abgeschlossene Untergruppe von Elationen ist und a nicht auf der Achse liegt; vgl. 1.20), so erhält man auf diese Weise eine Äquivalenz topologischer Transformationsgruppen.

A.8 Offene Wirkungen

Ist Γ eine lokalkompakte Lindelöf-Gruppe³² und ist M ein lokalkompakter topologischer Raum, auf dem Γ transitiv wirkt, dann ist für jedes Element $a \in M$ die Auswer-

³¹Man beachte den Unterschied zur Definition von Äquivalenz und Quasi-Äquivalenz für lineare Darstellungen in B.12.

³²Ein topologischer Raum heißt Lindelöf-Raum, wenn jede offene Überdeckung des Raumes eine abzählbare Teilüberdeckung enthält (vgl. Dugundji [66] Chap. VIII, Sec. 6).

tungsabbildung $\alpha_a : \Gamma \rightarrow M : \gamma \mapsto \gamma(a)$ nicht nur stetig, sondern auch offen. Sie induziert deshalb einen Homöomorphismus von dem Faktorraum Γ/Γ_a auf M .

Beweis: Salzmann et al. [95] 96.8. □

Halder [71] zeigt, daß bei der Wirkung einer lokalkompakten Lindelöf-Gruppe auf einem separablen metrischen Raum die Dimensionen der Bahn eines Punktes mit der Dimension des Faktorraumes der Gruppe nach dem Stabilisator des Punktes in der Gruppe übereinstimmt. Mit A.3 ergibt sich daraus das folgende nützliche Hilfsmittel (vgl. auch Salzmann et al. [95] 96.10).

A.9 Dimensionsformel

Es sei Γ eine lokalkompakte Lindelöf-Gruppe, und M sei ein regulärer topologischer Raum mit abzählbarer Basis, auf dem Γ stetig operiere. Ist a ein Element von M , dessen Bahn $\Gamma(a)$ endliche Dimension hat, dann gilt

$$\dim \Gamma = \dim \Gamma_a + \dim \Gamma(a).$$
□

Bei Dimensionsuntersuchungen ist es unerheblich, ob man eine Gruppe oder deren Zusammenhangskomponente betrachtet:

A.10 Bemerkung

Die Zusammenhangskomponente $\Gamma_a^{\mathbb{1}}$ des Stabilisators von a in Γ ist als zusammenhängende und a fixierende Untergruppe von Γ im Stabilisator $\Gamma_a^{\mathbb{1}}$ von a in $\Gamma^{\mathbb{1}}$ enthalten. Deshalb ist $\dim \Gamma_a^{\mathbb{1}} \leq \dim \Gamma_a^{\mathbb{1}} \leq \dim \Gamma_a$. Da die Dimension jeder lokalkompakten topologischen Gruppe stets mit der Dimension ihrer Zusammenhangskomponente übereinstimmt (vgl. A.4), gilt im lokalkompakten Fall $\dim \Gamma_a^{\mathbb{1}} = \dim \Gamma_a$ womit in obiger Ungleichheitskette tatsächlich stets Gleichheit gilt:

$$\dim \Gamma_a^{\mathbb{1}} = \dim \Gamma_a^{\mathbb{1}} = \dim \Gamma_a.$$

Unter den Voraussetzungen aus A.9 erhalten wir für die Dimension der Bahn von a unter $\Gamma^{\mathbb{1}}$:

$$\dim \Gamma^{\mathbb{1}}(a) = \dim \Gamma^{\mathbb{1}} - \dim \Gamma_a^{\mathbb{1}} = \dim \Gamma - \dim \Gamma_a = \dim \Gamma(a).$$
□

A.11 Folgerung

Ist M in der Situation von A.9 außerdem lokalkompakt, lokal homogen, lokal kontrahierbar, zusammenhängend und endlichdimensional und wirkt Γ transitiv auf M , dann wirkt schon die Zusammenhangskomponente $\Gamma^{\mathbb{1}}$ transitiv auf M .

Beweis: Salzmann et al. [95] 96.11. □

Die Wirkungen kompakter Gruppen auf der 4-Sphäre wurden von R. W. Richardson analysiert (siehe Richardson [61]). In Salzmann et al. [95] 96.34 findet man die folgende Version:

A.12 Satz (Klassifikation kompakter Wirkungen auf der 4-Sphäre)

Ist (Γ, \mathbb{S}_4) eine effektive topologische Transformationsgruppe mit einer mindestens zweidimensionalen zusammenhängenden kompakten Gruppe Γ , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Γ hat eine mindestens zweidimensionale Bahn auf \mathbb{S}_4 .
- (ii) Γ ist eine Lie-Gruppe.
- (iii) Die Wirkung von Γ ist äquivalent zur Wirkung einer Untergruppe von $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}$ auf $\mathbb{S}_4 \subseteq \mathbb{R}^5$, die von der gewöhnlichen linearen Wirkung induziert wird.

Es gibt acht Möglichkeiten für Wirkungen mindestens zweidimensionaler abgeschlossener Untergruppen Γ von $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^5 , die eine effektive Wirkung auf der vierdimensionalen Einheitssphäre in \mathbb{R}^5 induzieren:

- (a) Die gewöhnliche Wirkung von $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}$ und die irreduzible (Ausnahme-)Wirkung von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^5 sowie die reduzible Wirkung von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. In diesen Fällen fixiert Γ keinen Punkt der Einheitssphäre.
- (b) Die Wirkung der Gruppe $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ oder einer ihrer Untergruppen $\mathrm{U}_2\mathbb{C}$, $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ oder $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$. In diesen Fällen fixiert Γ genau zwei Punkte der Einheitssphäre.
- (c) Die Wirkung von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. In diesem Fall fixiert Γ eine zur Kreislinie \mathbb{S}_1 homöomorphe Menge von Punkten der Einheitssphäre. □

B Lie-Gruppen, Lie-Algebren und Darstellungen

Eine Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen, der Lie-Algebren und ihrer Darstellungen findet man in [Varadarajan \[74\]](#). Ausgehend von Matrizen Gruppen wird die Strukturtheorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren in [Hilgert-Neeb \[91\]](#) entwickelt. Als bequeme Referenz dient neben [Tits \[67\]](#) der Anhang von [Salzmann et al. \[95\]](#).

Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe Γ bezeichnen wir stets mit $\mathfrak{l}\Gamma$.

Die Struktur von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Ist N ein abgeschlossener Normalteiler von Γ , dann ist die Faktorgruppe Γ/N (mit der Quotiententopologie) eine Lie-Gruppe, und es gilt $\mathfrak{l}(\Gamma/N) = \mathfrak{l}\Gamma/\mathfrak{l}N$ (siehe [Hilgert-Neeb \[91\]](#) III.3.12). Insbesondere gilt somit $\dim \Gamma = \dim N + \dim \Gamma/N$.

B.1 Kommutatoren und Auflösbarkeit

Die *Kommutatorgruppe* Γ' einer Gruppe Γ ist das Erzeugnis aller *Kommutatoren* $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma$. Sie kann äquivalent auch als Schnitt aller Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe (oder als minimaler Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe) definiert werden. Die n -te Kommutatorgruppe von Γ wird induktiv durch $\Gamma^{(0)} := \Gamma$ und $\Gamma^{(n)} := (\Gamma^{(n-1)})'$ definiert. Die Gruppe Γ heißt *auflösbar*, wenn ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma^{(l)} = \{\mathbb{1}\}$ existiert.

Die *Kommutatoralgebra* $\mathfrak{l}' = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ einer Lie-Algebra \mathfrak{l} ist das Ideal in \mathfrak{l} , das (als Untervektorraum von \mathfrak{l}) von allen Elementen $[X, Y]$ mit $X, Y \in \mathfrak{l}$ erzeugt wird. Auch hier definiert man induktiv $\mathfrak{l}^{(0)} := \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}^{(n)} := (\mathfrak{l}^{(n-1)})'$ und nennt \mathfrak{l} *auflösbar*, wenn ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{l}^{(l)} = \{0\}$ existiert.

Ist Γ eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{l}\Gamma$, dann gilt $\Gamma^{(n)} = \langle \mathfrak{l}^{(n)} \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe [Varadarajan \[74\]](#) Theorem 3.18.8). Insbesondere ist Γ genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{l}\Gamma$ auflösbar ist.

Das (*auflösbare*) *Radikal* $\sqrt{\Gamma}$ einer Lie-Gruppe Γ ist der maximale zusammenhängende auflösbare Normalteiler von Γ , und das (*auflösbare*) *Radikal* $\sqrt{\mathfrak{l}}$ einer Lie-Algebra \mathfrak{l} ist das größte auflösbare Ideal von \mathfrak{l} . Das Radikal $\sqrt{\Gamma}$ ist eine charakteristische abgeschlossene Untergruppe von Γ , und es gilt $\mathfrak{l}\sqrt{\Gamma} = \sqrt{\mathfrak{l}\Gamma}$ (siehe [Hilgert-Neeb \[91\]](#) III.3.21).

B.2 Einfachheit und Halbeinfachheit

Eine Lie-Algebra \mathfrak{l} heißt *einfach*, wenn sie nicht abelsch ist und außer \mathfrak{l} und $\{0\}$ keine Ideale besitzt. Ist dabei $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\Gamma$ die Lie-Algebra einer zusammenhängenden Lie-Gruppe Γ , dann heißt Γ *fasteinfach*.

Eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe heißt *halbeinfach*, wenn sie außer der trivialen Gruppe $\{\mathbb{1}\}$ keinen zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler enthält. Jeder auflösbare Normalteiler einer halbeinfachen lokalkompakten Gruppe ist somit total unzusammenhängend und liegt deshalb im Zentrum der Gruppe. Eine Lie-Algebra \mathfrak{l} heißt *halbeinfach*, wenn $\sqrt{\mathfrak{l}} = \{0\}$ gilt. Damit ist eine zusammenhängende Lie-Gruppe genau dann halbeinfach, wenn die zugehörige Lie-Algebra halbeinfach ist. Halbeinfache Lie-Algebren sind auch dadurch charakterisiert, daß sie direkte Summen einfacher

Lie-Algebren sind (siehe [Varadarajan \[74\]](#) Theorem 3.10.4). Das impliziert, daß jede halbeinfache Lie-Gruppe ein fastdirektes Produkt fasteinfacher Lie-Gruppen ist. An dieser Charakterisierung kann man ablesen, daß Faktorgruppen halbeinfacher Lie-Gruppen ebenfalls halbeinfach sind.

B.3 Überlagerungen und lokale Isomorphie

Eine Überlagerung einer topologischen Gruppe H ist ein surjektiver, stetiger und offener Homomorphismus $\Gamma \rightarrow H$ von einer topologischen Gruppe Γ auf H , dessen Kern diskret ist. Die Gruppe Γ wird dann Überlagerungsgruppe von H genannt. Sind Γ und H Lie-Gruppen, dann ist jeder surjektive stetige Homomorphismus $\Gamma \rightarrow H$ mit diskretem Kern eine Überlagerung. Zu jeder zusammenhängenden Lie-Gruppe existiert bis auf Isomorphie genau eine einfach-zusammenhängende Überlagerungsgruppe. Solche einfach-zusammenhängenden Überlagerungsgruppen werden auch universelle Überlagerungsgruppen genannt.

Zwei topologische Gruppen Γ und H sind lokal isomorph, wenn eine offene Umgebung Ω des Neutralelements von Γ und ein Homöomorphismus φ von Ω auf eine offene Teilmenge von H derart existieren, daß $\alpha\beta = \gamma$ für $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ genau dann gilt, wenn $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\gamma)$ gilt.

Für zusammenhängende Lie-Gruppen sind äquivalent:

- (i) Γ und H haben eine gemeinsame (universelle) Überlagerungsgruppe.
- (ii) Γ und H sind lokal isomorph.
- (iii) Die Lie-Algebren $\mathfrak{L}\Gamma$ und $\mathfrak{L}H$ sind isomorph.

Beweis: [Varadarajan \[74\]](#) Sec. 2.6 und Sec. 2.8. □

B.4 Lemma

Es sei Γ eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis. Ist $\pi : \Gamma \rightarrow H$ ein Epimorphismus von Γ auf eine Lie-Gruppe H und ist Λ eine (zusammenhängende) halbeinfache Lie-Untergruppe von H , dann enthält Γ eine Lie-Gruppe Ψ derart, daß die Einschränkung von π auf Ψ eine Überlagerung von Λ ist.

Beweis: [Löwen \[83a\]](#) Lemma 3.9. □

B.5 Abgeschlossene Untergruppen von \mathbb{R}^n

Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{R}^n . Ist $H \neq \{0\}$, dann existieren linear unabhängige Vektoren $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ derart, daß

$$H = x_1\mathbb{R} + \dots + x_k\mathbb{R} + y_1\mathbb{Z} + \dots + y_m\mathbb{Z}$$

gilt.

Beweis: [Hewitt-Ross \[79\]](#) (9.11). □

Für abelsche Lie-Gruppen ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von der additiven Gruppe der zugehörigen Lie-Algebra in die Zusammenhangskomponente der Gruppe. Da der Kern dieser Abbildung eine abgeschlossene Untergruppe der additiven Gruppe der Lie-Algebra ist, zeigt [B.5](#) (vgl. [Hilgert-Neeb \[91\]](#) III.3.25):

B.6 Struktursatz für abelsche Lie-Gruppen

Jede zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe ist isomorph zum direkten Produkt einer reellen Vektorgruppe mit einer Torusgruppe. \square

Nach A.5 sind die Torusgruppen somit genau die zusammenhängenden kompakten auflösbaren Lie-Gruppen. Für Torusuntergruppen in beliebigen Lie-Gruppen gilt:

B.7 Maximale Torusuntergruppen

Die maximalen Torusuntergruppen einer (zusammenhängenden) Lie-Gruppe sind zueinander konjugiert.

Beweis: Hilgert-Neeb [91] III.7.4. \square

Da die Torsionsgruppe (die Untergruppe aller Elemente endlicher Ordnung) einer Torusgruppe eine total unzusammenhängende charakteristische Untergruppe ist, die dicht in der Torusgruppe liegt, gilt:

B.8 Normale Torusuntergruppen

Ist die Torusgruppe Θ ein Normalteiler der zusammenhängenden Lie-Gruppe Γ , dann ist Θ im Zentrum von Γ enthalten. \square

B.9 Satz von E. E. Levi & A. I. Mal'cev

Ist Γ eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit auflösbarem Radikal $\sqrt{\Gamma}$, dann gilt $\Gamma = H \cdot \sqrt{\Gamma}$ für jede maximale halbeinfache Lie-Untergruppe H von Γ . Die maximalen halbeinfachen Lie-Untergruppen werden deshalb auch als Levi-Komplemente (von $\sqrt{\Gamma}$) in Γ bezeichnet. Je zwei Levi-Komplemente sind (unter der Kommutatorgruppe $(\sqrt{\Gamma})'$ des Radikals) zueinander konjugiert.

Ist umgekehrt $\Gamma = H \cdot \Omega$ mit einer (zusammenhängenden) halbeinfachen Untergruppe H und einem zusammenhängenden abgeschlossenen auflösbaren Normalteiler Ω , dann ist aus Dimensionsgründen $\Omega = \sqrt{\Gamma}$ das auflösbare Radikal von Γ , und H ist ein Levi-Komplement (von Ω).

Beweis: Varadarajan [74] Theorem 3.18.13. \square

Wirkungen von Lie-Gruppen und lineare Darstellungen

B.10 Satz von J. Szenthe

Es sei M ein lokalkompakter, zusammenhängender und lokal kontrahierbarer topologischer Raum. Auf M wirke eine lokalkompakte Gruppe Γ transitiv. Hat Γ eine abzählbare Basis, dann ist Γ eine Lie-Gruppe (und M ist eine Mannigfaltigkeit).

Beweis: Salzmann et al. [95] 96.14. \square

B.11 Zweifach transitive Wirkungen

Es seien M ein topologischer Raum und Γ eine zusammenhängende Lie-Gruppe, die effektiv und zweifach transitiv auf M wirke. Existiert ein $a \in M$ mit $\dim(\Gamma/\Gamma_a) > 1$, dann ist Γ entweder einfach und M kompakt, oder Γ enthält einen scharf transitiven Normalteiler $\Theta \cong \mathbb{R}^n \approx M$.

Ist M kompakt und zweidimensional, dann ist (Γ, M) zu $(\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}, \mathcal{P}_1\mathbb{C})$ äquivalent.

Beweis: Salzmann et al. [95] 96.16 und³³ 96.17 (für die Aussage $\Theta \approx M$ beachte man auch A.8). □

B.12 Lineare Darstellungen topologischer Gruppen

Eine reelle bzw. komplexe (lineare) Darstellung der Dimension $n \in \mathbb{N}$ einer topologischen Gruppe Γ ist ein stetiger Homomorphismus $\Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(V, K)$, wobei $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ und V ein n -dimensionaler K -Vektorraum seien. Wir sprechen dann von einer Darstellung von Γ in $\mathrm{GL}(V, K)$ oder auch von einer Darstellung von Γ auf V . Durch eine solche Darstellung wird V zu einem Γ -Modul. Zwei lineare Darstellungen $\varphi_1 : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(V, K)$ und $\varphi_2 : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(\tilde{V}, K)$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Vektorraumisomorphismus $\psi : V \rightarrow \tilde{V}$ mit $\varphi_1(\gamma)(v) = \psi(\varphi_2(\gamma)(\psi^{-1}(v)))$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle $v \in V$ gibt. Wenn zu zwei linearen Darstellungen $\varphi_1 : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(V, K)$ und $\varphi_2 : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathrm{GL}(\tilde{V}, K)$ zweier topologischer Gruppen Γ und $\tilde{\Gamma}$ ein Isomorphismus $\alpha : \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ derart existiert, daß φ_1 und $\varphi_2\alpha$ äquivalente Darstellungen von Γ sind, so nennen wir φ_1 und φ_2 *quasi-äquivalent*. Wie jede Wirkung heißt eine Darstellung *effektiv*, wenn ihr Kern trivial ist, und *fast effektiv*, wenn ihr Kern endlich ist.

Die *gewöhnliche Darstellung* einer Untergruppe der Matrizen­gruppe $\mathrm{GL}_n K$ (mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ist gegeben durch die Multiplikation der Spaltenvektoren aus K^n mit den Matrizen der Gruppe (von links). Jede n -dimensionale effektive lineare Darstellung ist äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung einer Untergruppe von $\mathrm{GL}_n K$. Deshalb betrachten wir n -dimensionale K -lineare Darstellungen auch als stetige Homomorphismen in $\mathrm{GL}_n K$; man beachte, daß auf allen Teilmengen von $M_n K \cong K^{n^2}$ die gewöhnliche (zum Beispiel von der euklidischen Metrik herrührende) Topologie mit der kompakt-offenen Topologie (bezüglich der gewöhnlichen Wirkung und der gewöhnlichen Topologie auf K^n) übereinstimmt. Da die kompakt-offene Topologie die größte Topologie auf einer Gruppe Γ ist, die eine (lineare) Wirkung von Γ auf K^n stetig macht (vgl. Dugundji [66] Chap. XII, Sec. 7), liefert jede lineare Transformationsgruppe (Γ, K^n) eine Darstellung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_n K$. Wenn diese Darstellung effektiv ist und Γ die kompakt-offene Topologie bezüglich der Wirkung auf K^n trägt, dann sind Γ und die Untergruppe $\varphi(\Gamma)$ von $\mathrm{GL}_n K$ äquivalent (das heißt, die Transformationsgruppen (Γ, K^n) und $(\varphi(\Gamma), K^n)$ sind äquivalent, vgl. S. 114).

B.13 Irreduzible und reduzible Darstellungen

Ist $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung, dann heißt ein Teilraum U von V *invariant* unter einer Untergruppe H von Γ (oder auch *H-invariant*), wenn $\varphi(\eta)(U) \subseteq U$ für

³³In Salzmann et al. [95] 96.17 werden alle zweifach transitiven Wirkungen einfacher Lie-Gruppen angegeben, wobei die Klassifikation der zweifach transitiven Wirkungen aller Lie-Gruppen aus Tits [55] IV.F, S. 222 ff. zum Beweis herangezogen wird. In Mostow [50] Chap. II, Sec. 10 findet man eine Klassifikation aller transitiven Wirkungen von Lie-Gruppen auf Flächen, die ebenfalls einen Beweis für die zweite Aussage von B.11 liefert.

alle $\eta \in H$ gilt. Der Teilraum U ist dann ein Γ -Untermodul des Γ -Moduls V . Die Darstellung φ heißt *irreduzibel*, wenn V nicht trivial ist und $\{0\}$ und V die einzigen Γ -invarianten Teilräume von V sind, andernfalls heißt φ *reduzibel*. Läßt sich V so in eine direkte Summe Γ -invarianter Teilräume zerlegen, daß die Einschränkungen von φ auf jeden dieser Teilräume irreduzibel ist, dann heißt φ *vollständig reduzibel*. Wir nennen einen Γ -invarianten Teilraum U von V irreduzibel, reduzibel bzw. vollständig reduzibel, wenn die Einschränkung von φ auf U die jeweilige Eigenschaft hat.

Mit Hilfe des Haar-Maßes kann man zeigen (vgl. [Hein \[90\]](#) S. 174, Satz 30):

B.14 Lemma

Jede lineare Darstellung einer kompakten Gruppe ist vollständig reduzibel. □

B.15 Die Struktur irreduzibler linearer Gruppen

Es seien Δ eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe und $\varphi : \Delta \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine irreduzible Darstellung. Dann ist die Faktorgruppe $\Delta/\text{Ker } \varphi$ (als topologische Gruppe) isomorph zu $\Gamma := \varphi(\Delta)$. Die Gruppe Γ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$, und sie ist das fastdirekte Produkt $\Gamma = \Gamma' \cdot C\Gamma$ ihrer (topologisch abgeschlossenen) halbeinfachen Kommutatorgruppe Γ' mit ihrem Zentrum $C\Gamma$. Nach [B.9](#) ist also die Zusammenhangskomponente $(C\Gamma)^\dagger$ des Zentrums $C\Gamma$ das auflösbare Radikal von Γ , und Γ' ist das eindeutig bestimmte Levi-Komplement von $\sqrt{\Gamma}$ in Γ . Deshalb wird Γ' auch als der halbeinfache Kopf von Γ bezeichnet. Des weiteren ist $C\Gamma$ isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe der multiplikativen Gruppe \mathbb{C}^\times der komplexen Zahlen und bewirkt auf \mathbb{R}^n die entsprechenden reellen oder komplexen skalaren Multiplikationen. Wirkt Γ' nicht irreduzibel auf \mathbb{R}^n , dann hat jeder nichttriviale unter Γ' irreduzible Teilraum von \mathbb{R}^n die Dimension $n/2$, und \mathbb{R}^n läßt sich als Summe zweier solcher unter Γ' irreduzibler komplementärer Teilräume darstellen. Die auf je zwei solchen komplementären Teilräumen induzierten Darstellungen von Γ' sind äquivalent.

Beweis: [Salzmann et al. \[95\]](#) 95.6. □

B.16 Lineare Darstellungen von Lie-Algebren und von Lie-Gruppen

Als reelle bzw. komplexe n -dimensionale lineare Darstellung einer reellen Lie-Algebra \mathfrak{l} wird jeder Homomorphismus reeller Lie-Algebren $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(V, \mathbb{R})$ bzw. $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ bezeichnet, wobei V ein n -dimensionaler reeller bzw. komplexer Vektorraum ist (und $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ die *Reellifizierung* der komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(V, \mathbb{C})$, also die $2n^2$ -dimensionale reelle Lie-Algebra bezeichnet, die man aus $\mathfrak{gl}(V, \mathbb{C})$ durch Einschränkung des Skalarbereichs erhält). Eine komplexe n -dimensionale lineare Darstellung einer komplexen Lie-Algebra ist ein Homomorphismus komplexer Lie-Algebren $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(V, \mathbb{C})$ mit einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum V . Analog zu den Definitionen der Äquivalenz und der Quasi-Äquivalenz von Darstellungen von Lie-Gruppen definiert man *Äquivalenz* und *Quasi-Äquivalenz* von Darstellungen von Lie-Algebren. Wie die Darstellungen von Lie-Gruppen betrachten wir auch Darstellungen von Lie-Algebren als Homomorphismen in die entsprechenden Matrizenalgebren $\mathfrak{gl}_n \mathbb{R}$ und $\mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$.

Zu jeder linearen Darstellung φ einer Lie-Gruppe Γ erhält man durch Ableiten die zugehörige lineare Darstellung $\mathfrak{l}\varphi$ der Lie-Algebra $\mathfrak{l}\Gamma$ der Gruppe. Dabei ist $\mathfrak{l}\varphi$ eine effektive Darstellung, wenn φ effektiv ist. Umgekehrt ist jede Lie-Algebra \mathfrak{l} die

Lie-Algebra einer bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten einfach-zusammenhängend Lie-Gruppe $\tilde{\Gamma}$, und zu jeder linearen Darstellung von \mathfrak{l} gibt es genau eine Darstellung von $\tilde{\Gamma}$ derart, daß die Darstellung von \mathfrak{l} die Ableitung der Darstellung von $\tilde{\Gamma}$ ist. Ist φ eine effektive Darstellung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe Γ , für die $\mathfrak{l}\Gamma = \mathfrak{l}$ gilt, und ist $\tilde{\varphi}$ die Darstellung von $\tilde{\Gamma}$, für die $\mathfrak{l}\tilde{\varphi} = \mathfrak{l}\varphi$ gilt, dann ist $\tilde{\Gamma}$ die universelle Überlagerungsgruppe der (als Lie-Gruppe) zu Γ isomorphen Faktorgruppe $\tilde{\Gamma}/\text{Ker } \tilde{\varphi}$ und $\tilde{\varphi}$ induziert auf $\tilde{\Gamma}/\text{Ker } \tilde{\varphi}$ in natürlicher Weise eine zu φ quasi-äquivalente Darstellung (vgl. [Varadarajan \[74\]](#) Sec. 2.7). Sind also H eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\text{GL}_n\mathbb{R}$ und φ eine effektive Darstellung der zusammenhängenden Lie-Gruppe Γ derart, daß die Ableitung von φ und die Ableitung der natürlichen Darstellung von H quasi-äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{l}\Gamma$ und von $\mathfrak{l}H \leq \mathfrak{gl}_n\mathbb{R}$ sind, dann ist Γ zu H äquivalent.

Aus dem Satz von S. Lie über komplexe Darstellungen auflösbarer Lie-Gruppen (siehe [Sagle-Walde \[73\]](#) Theorem 10.19) folgt:

B.17 Reelle Darstellungen auflösbarer Lie-Gruppen

Ist $\varphi : \Gamma \rightarrow \text{GL}(V, \mathbb{R})$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe Γ , dann existiert ein höchstens zweidimensionaler Γ -invarianter reeller Teilraum von V .

Beweis: Wir betrachten die Komplexifizierung $\varphi_{\mathbb{C}} : \Gamma \rightarrow \text{GL}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \mathbb{C})$ (definiert durch $\varphi_{\mathbb{C}}(\gamma)(v \otimes_{\mathbb{R}} c) = \varphi(\gamma)(v) \otimes_{\mathbb{R}} c$ für alle $\gamma \in \Gamma$, $v \in V$ und $c \in \mathbb{C}$). Nach dem Satz von S. Lie (siehe [Sagle-Walde \[73\]](#) Theorem 10.19) existiert dann ein Γ -invarianter eindimensionaler komplexer Teilraum von $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Es existieren also $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ sowie $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so, daß zu jedem $\gamma \in \Gamma$ ein Eigenwert $\lambda_{\gamma} \in \mathbb{C}$ mit

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\gamma) \left(\sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} c_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} c_k \right) \lambda_{\gamma} = \sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} c_k \lambda_{\gamma}$$

existiert. Setzt man $\overline{v \otimes_{\mathbb{R}} c} := v \otimes_{\mathbb{R}} \bar{c}$ für alle $v \in V$ und alle $c \in \mathbb{C}$, so erhält man (durch additive Fortsetzung) eine (reell-lineare) Abbildung $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : x \mapsto \bar{x}$. Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{C}}(\gamma) \left(\sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} \bar{c}_k \right) &= \sum_{k=1}^n \varphi(\gamma)(v_k) \otimes_{\mathbb{R}} \bar{c}_k = \overline{\sum_{k=1}^n \varphi(\gamma)(v_k) \otimes_{\mathbb{R}} c_k} \\ &= \overline{\varphi_{\mathbb{C}}(\gamma) \left(\sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} c_k \right)} = \overline{\sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} c_k \lambda_{\gamma}} = \sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} \overline{c_k \lambda_{\gamma}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{C}}(\gamma) \left(\sum_{k=1}^n v_k (c_k + \bar{c}_k) \otimes_{\mathbb{R}} 1 \right) &= \sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} (c_k \lambda_{\gamma} + \overline{c_k \lambda_{\gamma}}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n v_k (c_k + \bar{c}_k) \frac{1}{2} (\lambda_{\gamma} + \bar{\lambda}_{\gamma}) \otimes_{\mathbb{R}} 1 \right) - \left(\sum_{k=1}^n v_k i (c_k - \bar{c}_k) \frac{i}{2} (\lambda_{\gamma} - \bar{\lambda}_{\gamma}) \otimes_{\mathbb{R}} 1 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{C}}(\gamma) \left(\sum_{k=1}^n v_k i(c_k - \bar{c}_k) \otimes_{\mathbb{R}} 1 \right) &= \sum_{k=1}^n v_k \otimes_{\mathbb{R}} i(c_k \lambda_{\gamma} - \bar{c}_k \bar{\lambda}_{\gamma}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n v_k (c_k + \bar{c}_k) \frac{i}{2} (\lambda_{\gamma} - \bar{\lambda}_{\gamma}) \otimes_{\mathbb{R}} 1 \right) + \left(\sum_{k=1}^n v_k i(c_k - \bar{c}_k) \frac{1}{2} (\lambda_{\gamma} + \bar{\lambda}_{\gamma}) \otimes_{\mathbb{R}} 1 \right). \end{aligned}$$

Man beachte, daß $c_k + \bar{c}_k$, $i(c_k - \bar{c}_k)$, $\lambda_{\gamma} + \bar{\lambda}_{\gamma}$ und $i(\lambda_{\gamma} - \bar{\lambda}_{\gamma})$ reell sind. Der von den beiden Elementen $\sum_{k=1}^n v_k (c_k + \bar{c}_k)$ und $\sum_{k=1}^n v_k i(c_k - \bar{c}_k)$ erzeugte (höchstens zweidimensionale) Teilraum von V ist deshalb Γ -invariant. \square

Für halbeinfache Lie-Algebren gilt:

B.18 Satz von H. Weyl

Jede endlichdimensionale Darstellung einer (reellen oder komplexen) halbeinfachen Lie-Algebra ist vollständig reduzibel.

Beweis: Varadarajan [74] Theorem 3.13.1. \square

Zur Bestimmung der irreduziblen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren zerlegt man die Algebren in ihre einfachen Bestandteile. Jede irreduzible Darstellung einer Summe einfacher Lie-Algebren ist eine Tensorproduktdarstellung irreduzibler Darstellungen der Summanden (vgl. Samelson [69] Chap. III, Sec. 4, Theorem E).

B.19 Tensorproduktdarstellungen

Eine Darstellung $\varphi : \Gamma \cdot H \rightarrow V \otimes W$ eines fastdirekten Produkts $\Gamma \cdot H$ zweier Lie-Gruppen Γ und H auf dem Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier Vektorräume V und W heißt *Tensorproduktdarstellung* zweier Darstellungen $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{GL}(V)$ und $\sigma : H \rightarrow \text{GL}(W)$ (in Zeichen: $\varphi = \varrho \otimes \sigma$), wenn

$$\varphi(gh)(v \otimes w) = \varrho(g)(v) \otimes \sigma(h)(w)$$

für alle $(g, h) \in \Gamma \times H$ und $(v, w) \in V \times W$ gilt.

Die Ableitung einer Tensorproduktdarstellung eines Produkts zweier Lie-Gruppen ist eine Tensorproduktdarstellung der Summe ihrer Lie-Algebren. Sind $\tilde{\varrho} : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ und $\tilde{\sigma} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ Darstellungen zweier Lie-Algebren \mathfrak{l} und \mathfrak{h} , dann ist die Tensorproduktdarstellung

$$\tilde{\varrho} \otimes \tilde{\sigma} : \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(V \otimes W)$$

der direkten Summe $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{h}$ definiert durch

$$(\tilde{\varrho} \otimes \tilde{\sigma})(X + Y)(v \otimes w) = \tilde{\varrho}(X)(v) \otimes w + v \otimes \tilde{\sigma}(Y)(w)$$

für alle $(X, Y) \in \mathfrak{l} \times \mathfrak{h}$ und $(v, w) \in V \times W$.

B.20 Irreduzible reelle Darstellungen halbeinfacher reeller Lie-Algebren

Bei der Bestimmung der effektiven irreduziblen Darstellungen $\varphi : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\eta} \mathbb{R}$ halbeinfacher reeller Lie-Algebren \mathfrak{l} werden wir folgendermaßen vorgehen: Wir betrachten

zunächst eine zu φ gehörige irreduzible komplexe Darstellung $\widehat{\varphi} : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}_d \mathbb{C}$ (siehe Tits [67] 11.5). Für die Dimension d von $\widehat{\varphi}$ gilt dabei $d = n$ oder $d = n/2$, je nachdem ob $\widehat{\varphi}$ vom reellen Typ ist oder nicht (letzteres ist offenbar nur möglich, wenn n gerade und größer als drei ist). In jedem Fall ist $\widehat{\varphi}$ ebenfalls eine effektive lineare Darstellung von \mathfrak{l} . Die halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{l} ist eine direkte Summe $\mathfrak{l} = \bigoplus_{\nu=1}^k \mathfrak{l}_\nu$ mit einfachen reellen Lie-Algebren \mathfrak{l}_ν . Nach Samelson [69] Chap. III, Sec. 4, Theorem E ist dann $\widehat{\varphi}$ das Tensorprodukt irreduzibler Darstellungen $\widehat{\varphi}_\nu : \mathfrak{l}_\nu \rightarrow \mathfrak{gl}_{d_\nu} \mathbb{C}$, wobei $d_1 d_2 \cdots d_k = d$ gilt. Da $\widehat{\varphi}$ eine effektive Darstellung ist, sind die Darstellungen $\widehat{\varphi}_\nu$ ebenfalls effektiv, weshalb insbesondere $d_\nu \geq 2$ gelten muß. Die Darstellungen $\widehat{\varphi}_\nu$ haben eindeutige (d_ν -dimensionale) Fortsetzungen auf die in natürlicher Weise als komplexe Lie-Algebren aufgefaßten Komplexifizierungen $\mathfrak{l}_\nu \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ von \mathfrak{l}_ν (siehe Tits [67] 11.2). Ist die Komplexifizierung von \mathfrak{l}_ν eine einfache komplexe Lie-Algebra, so nennen wir \mathfrak{l}_ν eine reelle Form dieser einfachen komplexen Lie-Algebra. Andernfalls ist \mathfrak{l}_ν die Reellifizierung einer einfachen komplexen Lie-Algebra. Die Komplexifizierung $\mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ der Reellifizierung \mathfrak{r} einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ läßt sich auf folgende Weise in eine direkte Summe zweier zu $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ isomorpher (komplexer) Ideale \mathfrak{n}_1 und \mathfrak{n}_2 zerlegen: Wählt man $\mathfrak{n}_1 := \{X \otimes_{\mathbb{R}} 1 + iX \otimes_{\mathbb{R}} i ; X \in \mathfrak{r}\}$ und $\mathfrak{n}_2 := \{X \otimes_{\mathbb{R}} 1 - iX \otimes_{\mathbb{R}} i ; X \in \mathfrak{r}\}$, dann ist $\mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. In dieser Summe ist die ursprüngliche reelle Lie-Algebra \mathfrak{r} in der Form $\mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} 1$ als Diagonale enthalten. Man beachte, daß diese zwar eine reelle Lie-Unteralgebra der Reellifizierung von $\mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, jedoch keine komplexe Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist. Die Lie-Algebra \mathfrak{r} ist genau dann einfach (als reelle Lie-Algebra), wenn $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ bzw. \mathfrak{n}_1 und \mathfrak{n}_2 (als komplexe Lie-Algebren) einfach sind.

Die Fortsetzungen der Darstellungen $\widehat{\varphi}_\nu$ auf die Komplexifizierungen von \mathfrak{l}_ν sind genau dann selbstkonjugiert, wenn $\widehat{\varphi}$ vom reellen oder vom quaternionalen Typ ist (vgl. Tits [67] 11.4 und 11.1). Ist \mathfrak{l}_ν die Reellifizierung einer einfachen komplexen Lie-Algebra, dann ist die Fortsetzung von $\widehat{\varphi}_\nu$ auf die Komplexifizierung von \mathfrak{l}_ν ein Tensorprodukt irreduzibler Darstellungen der beiden einfachen Komponenten der Komplexifizierung. Diese Fortsetzung von $\widehat{\varphi}_\nu$ ist genau dann selbstkonjugiert, wenn die entsprechenden charakteristischen Zahlen (vgl. Tits [67] 7.3) der Darstellungen der beiden Komponenten der Komplexifizierung übereinstimmen (vgl. Tits [67] 11.1). Insbesondere ist die Fortsetzung von $\widehat{\varphi}_\nu$ dann ein Tensorprodukt zweier Darstellungen gleicher Dimension und ist wegen $d_\nu > 1$ somit eine mindestens vierdimensionale komplexe Darstellung. Sind die Darstellungen $\widehat{\varphi}_\nu$ alle selbstkonjugiert, so erkennt man folgendermaßen, ob $\widehat{\varphi}$ vom reellen Typ ist: Man betrachtet unter den die Darstellungen $\widehat{\varphi}_\nu$ kennzeichnenden charakteristischen Zahlen diejenigen, die jeweils zu einer selbstkonjugierten quaternionalen Fundamentaldarstellung von \mathfrak{l}_ν gehören, und berechnet die Summe dieser Zahlen. Die Darstellung $\widehat{\varphi}$ ist genau dann vom reellen Typ, wenn diese Summe gerade ist (vgl. Tits [67] 11.4).

Wir benötigen hier (bis auf Quasi-Äquivalenz) alle sechsdimensionalen irreduziblen reellen Darstellungen von höchstens 14-dimensionalen einfachen reellen Lie-Algebren. Entsprechend obiger Anleitung bestimmen wir zunächst alle höchstens sechsdimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen von höchstens 14-dimensionalen einfachen komplexen Lie-Algebren. Diese können wir der Tabelle Tits [67] II. entnehmen. Verschiedene aber äquivalente Darstellungen werden im folgenden nicht unterschieden.

Bis auf Isomorphie sind die einzigen höchstens 14-dimensionalen einfachen komplexen Lie-Algebren die dreidimensionale Algebra $\mathfrak{sl}_2 \mathbb{C}$, die achtdimensionale Algebra $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$,

die zehndimensionale Algebra $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$ sowie die 14-dimensionale Algebra \mathfrak{g}_2 .

Die gewöhnliche Darstellung in $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ ist die einzige Fundamentaldarstellung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist die Darstellung, deren höchstes Gewicht das $(m - 1)$ -fache des höchsten Gewichts der Fundamentaldarstellung ist, die eindeutig bestimmte irreduzible komplexe Darstellung der Dimension m von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$.

Die beiden dreidimensionalen Fundamentaldarstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ sind bis auf Äquivalenz die einzigen höchstens fünfdimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Es handelt sich bei diesen Darstellungen um die gewöhnliche Darstellung in $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ und um deren kontragrediente Darstellung, die man erhält, indem man die Matrizen aus $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ transponiert und negiert und dann gewöhnlich auf \mathbb{C}^3 wirken läßt (vgl. Tits [67] 7.7). Insbesondere sind diese beiden Darstellungen quasi-äquivalent. Höchste Gewichte, die durch Verdoppelung aus dem höchsten Gewicht einer Fundamentaldarstellung entstehen, charakterisieren jeweils die beiden sechsdimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Auch diese beiden Darstellungen sind quasi-äquivalent. Man kann sie auf die gleiche Weise wie die beiden Fundamentaldarstellungen ineinander überführen.

Außer der gewöhnlichen Darstellung in $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^5)$ hat die Lie-Algebra $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$ noch eine weitere Fundamentaldarstellung. Es handelt sich dabei um die gewöhnliche vierdimensionale komplexe Darstellung der zu $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$ isomorphen Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$.

Jede weitere irreduzible komplexe Darstellung einer der Algebren $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$ ist mindestens achtdimensional. Da die beiden Fundamentaldarstellungen von \mathfrak{g}_2 sieben- und 14-dimensional sind, haben wir damit alle höchstens sechsdimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen von höchstens 14-dimensionalen einfachen komplexen Lie-Algebren beschrieben, und wir können im nächsten Schritt die reell höchstens sechsdimensionalen irreduziblen Darstellungen von höchstens 14-dimensionalen einfachen reellen Lie-Algebren bestimmen. Zunächst betrachten wir dazu die reellen Formen der Algebren $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ und $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$, die wir zum Beispiel der Tabelle Tits [67] II. entnehmen können. Unter Ausnutzung der Kriterien aus Tits [67] 11.4 entscheiden wir wiederum mit Hilfe der Tabelle Tits [67] II., welche der Einschränkungen der oben beschriebenen komplexen Darstellungen auf die reellen Formen vom reellen Typ sind.

Die Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ und $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ sind die reellen Formen von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Alle komplexen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ sind vom reellen Typ, während eine irreduzible komplexe Darstellung von $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ genau dann vom reellen Typ ist, wenn die zugehörige charakteristische Zahl gerade ist (vgl. Tits [67] 11.4), was hier bedeutet, daß die (komplexe) Dimension der Darstellung ungerade ist. Sämtliche irreduziblen komplexen Darstellungen gerader Dimension von $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ sind quaternional.

Die reellen Formen der Algebra $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ sind $\mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$ und die Algebren $\mathfrak{su}_3(\mathbb{C}, r)$ mit $r \in \{0, 1\}$. Wie im Fall der reellen Algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ sind alle komplexen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$ vom reellen Typ. Die beiden Fundamentaldarstellungen der reellen Formen $\mathfrak{su}_3\mathbb{C} = \mathfrak{su}_3(\mathbb{C}, 0)$ und $\mathfrak{su}_3(\mathbb{C}, 1)$ sind jeweils nicht selbstkonjugiert, sondern zueinander konjugiert, woraus folgt, daß keine dieser vier Darstellungen vom reellen Typ ist.

Sämtliche Einschränkungen der gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$ auf ihre reellen Formen $\mathfrak{o}_5(\mathbb{R}, r)$ mit $r \in \{0, 1, 2\}$ sind jeweils äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_5(\mathbb{R}, r)$. Die vierdimensionale irreduzible komplexe Darstellung von $\mathfrak{o}_5\mathbb{C} \cong \mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ liefert nur bei Einschränkung auf die Form $\mathfrak{o}_5(\mathbb{R}, 2) \cong \mathfrak{sp}_4\mathbb{R}$ eine Darstellung vom reellen Typ.

Da es keine höchstens sechsdimensionale irreduzible komplexe Darstellung der Ausnahmealgebra \mathfrak{g}_2 gibt, haben ihre reellen Formen $\mathfrak{g}_{2(-14)}$ und $\mathfrak{g}_{2(2)}$ auch keine höchstens sechsdimensionalen irreduziblen reellen Darstellungen.

Es bleibt, die Reellifizierungen \mathfrak{r} der Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, $\mathfrak{o}_5\mathbb{C}$ und \mathfrak{g}_2 zu betrachten. Nur für die (zur sechsdimensionalen reellen Form $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$ von $\mathfrak{o}_4\mathbb{C}$ isomorphe) Reellifizierung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r} \leq 14$. Entsprechend obiger Anleitung betrachten wir die Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ einer komplexen Darstellung $\hat{\varphi}$ von \mathfrak{r} auf die Komplexifizierung $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ von \mathfrak{r} . Wenn $\hat{\varphi}$ vom reellen Typ ist, dann ist $\tilde{\varphi}$ das Tensorprodukt zweier dimensionsgleicher Darstellungen der beiden einfachen Komponenten von $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$. Diese beiden Darstellungen müssen dann jeweils zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ quasi-äquivalent sein. In diesem Fall stammt $\hat{\varphi}$ von einer zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$ quasi-äquivalenten irreduziblen reellen Darstellung (denn diese ist nicht komplex). Ist $\hat{\varphi}$ nicht vom reellen Typ, dann muß die höchstens dreidimensionale komplexe Darstellung $\tilde{\varphi}$ als Tensorprodukt der beiden zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ isomorphen Komponenten von $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ das Tensorprodukt einer eindimensionalen und einer zwei- oder dreidimensionalen komplexen Darstellung sein. Im Fall $\dim_{\mathbb{C}} \hat{\varphi} = 2$ gehört $\hat{\varphi}$ zu einer vierdimensionalen reellen Darstellung, die quasi-äquivalent zur Darstellung ist, die man durch Einschränkung des Skalarbereichs aus der gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ erhält. Andernfalls gehört $\hat{\varphi}$ zu einer sechsdimensionalen reellen Darstellung, die (auf die gleiche Weise) quasi-äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_3\mathbb{C}$ ist (man beachte, daß $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \cong \mathfrak{o}_3\mathbb{C}$ gilt).

B.21 Irreduzible Darstellungen fasteinfacher Lie-Gruppen

$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{l}$	\mathfrak{l}	$\dim_{\mathbb{R}} \varphi$	φ	Bemerkung
3	$\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$	3	$SO_3\mathbb{R} \leq GL_3\mathbb{R}$	$\mathfrak{su}_2\mathbb{C} \cong \mathfrak{o}_3\mathbb{R}$ $\mathbb{H} = \mathbb{R} \cdot SU_2\mathbb{C}$
		4	$SU_2\mathbb{C} \leq GL_1\mathbb{H}$	
		5	$SO_3\mathbb{R} \rightarrow GL_5\mathbb{R}$	
3	$\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$	$2n$	$SL_2\mathbb{R} \rightarrow GL_{2n}\mathbb{R}$	$n \geq 1$
		$2n + 1$	$PSL_2\mathbb{R} \rightarrow GL_{2n+1}\mathbb{R}$	$n \geq 1$
6	$\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$	4	$SL_2\mathbb{C} \leq GL_2\mathbb{C}$	$\mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \cong \mathfrak{o}_3\mathbb{C} \cong \mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$ $O_4(\mathbb{R}, 1)^{\mathbb{1}} \cong PSL_2\mathbb{C} \cong SO_3\mathbb{C}$
		4	$O_4(\mathbb{R}, 1)^{\mathbb{1}} \leq GL_4\mathbb{R}$	
		6	$SO_3\mathbb{C} \leq GL_3\mathbb{C}$	
8	$\mathfrak{su}_3(\mathbb{C}, r)$	6	$SU_3(\mathbb{C}, r) \leq GL_3\mathbb{C}$	$r \in \{0, 1\}$
8	$\mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$	3	$SL_3\mathbb{R} \leq GL_3\mathbb{R}$	
		6	$SL_3\mathbb{R} \rightarrow GL_6\mathbb{R}$	
10	$\mathfrak{o}_5(\mathbb{R}, r)$	5	$O_5(\mathbb{R}, r)^{\mathbb{1}} \leq GL_5\mathbb{R}$	$r \in \{0, 1\}$
10	$\mathfrak{o}_5(\mathbb{R}, 2)$	4	$Sp_4\mathbb{R} \leq GL_4\mathbb{R}$	$\mathfrak{o}_5(\mathbb{R}, 2) \cong \mathfrak{sp}_4\mathbb{R}$
		5	$O_5(\mathbb{R}, 2)^{\mathbb{1}} \leq GL_5\mathbb{R}$	
14	$\mathfrak{g}_{2(i)}$			$i \in \{-14, 2\}$

In obiger Tabelle sind die Ergebnisse der Betrachtungen aus B.20 zusammengefaßt.

Die Tabelle enthält (bis auf Isomorphie) alle höchstens 14-dimensionalen einfachen reellen Lie-Algebren \mathfrak{l} (vgl. auch Tits [55] Tableau IV, S. 245 ff. oder Salzmann et al. [95] 94.33) und (bis auf Quasi-Äquivalenz) alle höchstens sechsdimensionalen irreduziblen effektiven Darstellungen φ von zugehörigen zusammenhängenden Lie-Gruppen (vgl. auch Tits [67] II. oder Salzmann et al. [95] 95.10). Ob die entsprechende Darstellung reell, komplex oder quaternional ist, kann man in der Tabelle daran ablesen, ob die Gruppe in $GL_n\mathbb{R}$, in $GL_n\mathbb{C}$ oder in $GL_n\mathbb{H}$ dargestellt ist. Die gewöhnliche Darstellung einer Gruppe G ist durch die Schreibweise $G \leq GL_nK$ (statt $G \rightarrow GL_nK$) gekennzeichnet.

B.22 Lemma

Ist \mathfrak{l} eine halbeinfache reelle Lie-Algebra mit $4 \leq \dim \mathfrak{l} \leq 14$ und $\varphi : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$ eine effektive Darstellung, dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- (i) Die Darstellung φ ist irreduzibel, und \mathfrak{l} ist isomorph zu $\mathfrak{sp}_4\mathbb{R}$ oder zu einer der Lie-Algebren $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, r)$ mit $r \in \{0, 1, 2\}$. Ist \mathfrak{l} dabei isomorph zu $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$, so ist φ quasi-äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$ oder φ ist quasi-äquivalent zur Darstellung der (zu $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$ isomorphen) Reellifizierung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, die man durch Einschränkung des Skalarenbereichs aus der gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ erhält. In den anderen drei Fällen ist φ quasi-äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung der oben angegebenen Lie-Algebra.
- (ii) Die Darstellung φ ist die Summe zweier irreduzibler zweidimensionaler Darstellungen ϱ und σ , und \mathfrak{l} ist isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 2)$, die wiederum isomorph zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ ist. Dabei wird einer der beiden zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ isomorphen Summanden von \mathfrak{l} unter ϱ (bis auf Quasi-Äquivalenz) gewöhnlich (auf \mathbb{R}^2) und unter σ trivial (ebenfalls auf \mathbb{R}^2) dargestellt, während umgekehrt der zweite Summand unter ϱ trivial und unter σ (bis auf Quasi-Äquivalenz) gewöhnlich dargestellt wird.

Beweis: Daß φ entweder irreduzibel oder die Summe zweier irreduzibler zweidimensionaler Darstellungen ist, folgt angesichts der Dimension und der Effektivität von φ mit dem Satz von H. Weyl B.18.

(i) Unter der Voraussetzung, daß φ irreduzibel ist, betrachten wir zunächst den Fall, daß \mathfrak{l} einfach ist. Den Betrachtungen aus B.20 oder der Tabelle B.21 können wir dann entnehmen, daß \mathfrak{l} unter diesen Voraussetzungen isomorph zu $\mathfrak{sp}_4\mathbb{R}$ oder zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ ist und daß φ zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{sp}_4\mathbb{R}$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$ oder zu einer der beiden in der Behauptung beschriebenen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \cong \mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 1)$ quasi-äquivalent ist.

Im Fall, daß \mathfrak{l} nicht einfach ist, gehen wir vor wie in B.20 beschrieben und benutzen die Bezeichnungen von dort. Aus $d \leq 4$, $k \geq 2$ und $d_\nu \geq 2$ für alle $\nu \in \{1, \dots, k\}$ ergibt sich $d = 4$, $k = 2$ und $d_1 = 2 = d_2$. Wegen $d = \dim \mathbb{R}^4$ ist dann $\widehat{\varphi}$ insbesondere vom reellen Typ, und da nichttriviale selbstkonjugierte Darstellungen von Reellifizierungen einfacher komplexer Lie-Algebren mindestens vierdimensional sind, sind \mathfrak{l}_1 und \mathfrak{l}_2 reelle Formen von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, der einzigen einfachen komplexen Lie-Algebra mit zweidimensionaler irreduzibler komplexer Darstellung. Der reelle Typ von $\widehat{\varphi}$ erzwingt, daß entweder beide Algebren isomorph zu $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ sind, deren einzige zweidimensionale irreduzible komplexe Darstellung vom quaternionalen Typ ist, oder beide Algebren sind isomorph zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$, deren einzige zweidimensionale irreduzible komplexe Darstellung vom reellen Typ ist. Somit ist \mathfrak{l} isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$, die wiederum isomorph zu $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 2)$

ist, oder \mathfrak{l} ist isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{su}_2\mathbb{C} \oplus \mathfrak{su}_2\mathbb{C}$, die isomorph zu $\mathfrak{o}_4\mathbb{R}$ ist. Im ersten Fall ist φ quasi-äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}, 2)$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$, und im zweiten Fall ist φ quasi-äquivalent zur gewöhnlichen Darstellung von $\mathfrak{o}_4\mathbb{R}$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$.

(ii) Es sei nun $\varphi = \varrho \oplus \sigma$ mit zweidimensionalen irreduziblen Darstellungen ϱ und σ . Die gemäß Tits [67] 11.5 zugehörige irreduzible komplexe Darstellungen $\widehat{\varrho}$ und $\widehat{\sigma}$ sind dann jeweils zweidimensionale Darstellungen vom reellen Typ. Entsprechend den Bezeichnungen aus B.20 schreiben wir diese beiden Darstellungen jeweils als Tensorprodukt $\widehat{\varrho} = \bigotimes_{\nu=1}^k \widehat{\varrho}_\nu$ und $\widehat{\sigma} = \bigotimes_{\mu=1}^k \widehat{\sigma}_\mu$ mit irreduziblen komplexen Darstellungen $\widehat{\varrho}_\nu$ und $\widehat{\sigma}_\mu$.

Weil $\widehat{\varrho}$ und $\widehat{\sigma}$ jeweils zweidimensional sind, existieren genau ein $\widetilde{\nu}$ und genau ein $\widetilde{\mu}$ derart, daß $\widehat{\varrho}_{\widetilde{\nu}}$ und $\widehat{\sigma}_{\widetilde{\mu}}$ jeweils zweidimensionale Darstellungen sind. Die restlichen Darstellungen $\widehat{\varrho}_\nu$ und $\widehat{\sigma}_\mu$ sind alle trivial. Da keine der Einschränkungen der effektiven Darstellung φ auf einen der einfachen Summanden \mathfrak{l}_ν trivial ist, folgt $k \leq 2$. Der reelle Typ von $\widehat{\varrho}$ und von $\widehat{\sigma}$ und die Trivialität der von $\widehat{\varrho}_{\widetilde{\nu}}$ und $\widehat{\sigma}_{\widetilde{\mu}}$ verschiedenen Darstellungen $\widehat{\varrho}_\nu$ und $\widehat{\sigma}_\mu$ implizieren, daß auch $\widehat{\varrho}_{\widetilde{\nu}}$ und $\widehat{\sigma}_{\widetilde{\mu}}$ vom reellen Typ sind. Reellifizierungen von einfachen komplexen Lie-Algebren haben keine zweidimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen vom reellen Typ. Also sind die Summanden \mathfrak{l}_ν jeweils reelle Formen einfacher komplexer Lie-Algebren. Die einzige reelle Form einer einfachen komplexen Lie-Algebra, die eine zweidimensionale irreduzible komplexe Darstellung hat, ist die dreidimensionale Algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$. Deshalb ist die mindestens vierdimensionale reelle Lie-Algebra \mathfrak{l} isomorph zur direkten Summe $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$, und φ hat die in der Behauptung beschriebene Gestalt. □

B.23 Folgerung

Es sei Γ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_4\mathbb{R}$, deren gewöhnliche Darstellung auf \mathbb{R}^4 irreduzibel ist. Gilt $4 \leq \dim \Gamma' \leq 14$, dann ist die Kommutatorgruppe Γ' zur (reell) sechsdimensionalen komplexen speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$, zur zehndimensionalen reellen symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_4\mathbb{R}$ oder zur sechsdimensionalen Zusammenhangskomponente $\mathrm{O}_4(\mathbb{R}, r)$ ³⁴ der orthogonalen Gruppe zu einer Form vom Index $r \in \{0, 1, 2\}$ äquivalent.³⁴ In jedem Fall ist Γ höchstens elfdimensional.

Beweis: Nach B.15 ist die Kommutatorgruppe Γ' von Γ halbeinfach. Außerdem ist die natürliche Darstellung von Γ' auf \mathbb{R}^4 irreduzibel, oder es gibt zwei komplementäre zweidimensionale Teilräume von \mathbb{R}^4 , auf denen zwei äquivalente irreduzible Darstellungen von Γ' induziert werden. Die Möglichkeiten für Γ' liefert dann B.22 nach Übergang zur Darstellung der Lie-Algebra von Γ' , die man durch Ableiten aus der natürlichen Darstellung von Γ' enthält. Man beachte hierbei, daß die beiden Darstellungen ϱ und σ aus B.22 (ii) zwar quasi-äquivalent, jedoch nicht äquivalent sind. Die Dimensionsbeschränkung für Γ ergibt sich nun mit B.15 aus der Tatsache, daß bis auf $\mathrm{Sp}_4\mathbb{R}$ alle Kandidatinnen für Γ' sechsdimensional sind und die Darstellungen von $\mathrm{Sp}_4\mathbb{R}$ nicht komplex sind. □

³⁴Die Zusammenhangskomponente $\mathrm{O}_4(\mathbb{R}, r)$ ³⁴ der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}_4(\mathbb{R}, r)$ ist ihre Kommutatorgruppe $\mathrm{O}'_4(\mathbb{R}, r)$. Als solche wird sie auch in Salzmann [90] bezeichnet.

B.24 Wirkungen auf der Sphäre der Halbstrahlen in \mathbb{R}^4

Ist Γ eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis, die linear auf \mathbb{R}^4 und dabei transitiv auf der dreidimensionalen Sphäre

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4} := \{v\mathbb{R}_{>0} ; v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\}$$

der Halbstrahlen in \mathbb{R}^4 wirkt, dann ist die effektiv auf \mathbb{R}^4 wirkende Faktorgruppe $\tilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_{[\mathbb{R}^4]}$ zu einer (abgeschlossenen) Untergruppe von $GL_4\mathbb{R}$ äquivalent, und Γ enthält eine zu $SU_2\mathbb{C}$ äquivalente Untergruppe.

Ist die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ achtdimensional, dann ist ihr halbeinfacher Kopf, die Kommutatorgruppe $\tilde{\Gamma}'$, zu $SL_2\mathbb{C}$ äquivalent.

Beweis: Die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ ist zu einer (zusammenhängenden) lokalkompakten (also abgeschlossenen) Untergruppe von $GL_4\mathbb{R}$ äquivalent. Insbesondere ist sie eine Lie-Gruppe, und nach [Salzmann et al. \[95\] 96.19](#) wirkt jede maximale kompakte Untergruppe Φ von $\tilde{\Gamma}$ transitiv auf $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4}$. Die effektiv auf $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4}$ wirkende Gruppe $\tilde{\Phi} = \Phi/\Phi_{[\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4}]}$ enthält nach [Salzmann et al. \[95\] 96.21](#) eine fasteinfache Untergruppe $\tilde{\Psi}$, die transitiv auf $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4}$ wirkt und nach [Salzmann et al. \[95\] 96.22](#) zu $SU_2\mathbb{C}$ äquivalent ist. Nun enthält Γ nach [B.4](#) eine Untergruppe Ψ derart, daß die Einschränkung $\pi|_{\Psi}$ des kanonischen Epimorphismus $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma_{[\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4}]}$ auf Ψ eine Überlagerung von $\tilde{\Psi}$ liefert. Aufgrund des einfachen Zusammenhangs von $SU_2\mathbb{C}$ ist $\pi|_{\Psi}$ ein Isomorphismus, womit Ψ zu $SU_2\mathbb{C}$ äquivalent ist.

Wir betrachten nun den Fall, daß $\dim \tilde{\Gamma} = 8$ gilt. In [B.22](#) sind die Darstellungen der Lie-Algebren der sechsdimensionalen Gruppen $O_4(\mathbb{R}, r)^{\mathbb{I}}$ mit $r \in \{0, 1, 2\}$ nicht komplex. Eine irreduzibel auf \mathbb{R}^4 wirkende zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $GL_4\mathbb{R}$, deren halbeinfacher Kopf eine dieser Untergruppen ist, kann also nach [B.15](#) höchstens siebendimensional sein. Da die zehndimensionale reelle symplektische Gruppe $Sp_4\mathbb{R}$ nicht in der achtdimensionalen Gruppe $\tilde{\Gamma}$ enthalten sein kann, liefert [B.23](#) die Äquivalenz von $\tilde{\Gamma}'$ und $SL_2\mathbb{C}$. □

B.25 Lemma

Es sei \mathfrak{l} eine halbeinfache reelle Lie-Algebra mit $\dim \mathfrak{l} \geq 7$, und $\varphi : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ sei eine effektive irreduzible Darstellung mit $n \leq 6$. Ist \mathfrak{l} nicht einfach, dann gilt $n = 6$ sowie $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$, und φ ist quasi-äquivalent zu einem Tensorprodukt $\varphi_1 \otimes_{\mathbb{R}} \varphi_2$, wobei φ_1 die gewöhnliche Darstellung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2)$ und φ_2 die gewöhnliche Darstellung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$ ist.

Beweis: Wir gehen wieder vor wie in [B.20](#) beschrieben und benutzen die Bezeichnungen von dort. Da wir voraussetzen, daß \mathfrak{l} nicht einfach ist, gilt $k \geq 2$. Wegen $d_1 d_2 \cdots d_k = d \leq 6$ folgt $k = 2$ und o.B.d.A. $d_1 = 2, d_2 \in \{2, 3\}$ (man beachte, daß mit φ auch die Darstellungen $\hat{\varphi}_\nu$ effektiv sind). Aus $d = d_1 d_2 \geq 4 > n/2$ folgt nun, daß $\hat{\varphi}$ und damit auch $\hat{\varphi}_1$ und $\hat{\varphi}_2$ vom reellen Typ sind. Daraus schließen wir, daß weder \mathfrak{l}_1 noch \mathfrak{l}_2 die Reellifizierung einer einfachen komplexen Lie-Algebra sein kann, denn sonst müßte $\hat{\varphi}_1$ oder $\hat{\varphi}_2$ als nichttriviale komplexe Darstellung vom reellen Typ mindestens vierdimensional sein. Da $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ bis auf Isomorphie die einzige einfache komplexe Lie-Algebra mit einer zweidimensionalen irreduziblen komplexen Darstellung und die beiden Algebren $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ sowie $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ bis auf Isomorphie die einzigen einfachen komplexen

Lie-Algebren sind, die eine dreidimensionale irreduzible komplexe Darstellung haben, ist \mathfrak{l}_1 bis auf Isomorphie eine reelle Form von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, und \mathfrak{l}_2 ist bis auf Isomorphie eine reelle Form von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Aus Dimensionsgründen muß \mathfrak{l}_2 eine reelle Form von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ sein. Der Analyse in B.20 entnehmen wir, daß \mathfrak{l}_1 isomorph zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ ist, \mathfrak{l}_2 isomorph zu $\mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$ ist und $\widehat{\varphi}_1$ sowie $\widehat{\varphi}_2$ Fundamentaldarstellungen dieser Lie-Algebren sind. Dies liefert die Behauptung, denn die beiden Fundamentaldarstellungen von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{R}$ sind quasi-äquivalent. \square

B.26 Folgerung

Es sei Γ eine (zusammenhängende) halbeinfache Lie-Gruppe mit $\dim \Gamma \geq 7$, und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ sei eine effektive irreduzible Darstellung mit $n \leq 6$. Ist Γ nicht fasteinfach, dann ist $n = 6$, Γ ist isomorph zum direkten Produkt $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SL}_3\mathbb{R}$, und φ ist quasi-äquivalent zum Tensorprodukt $\varphi_1 \otimes_{\mathbb{R}} \varphi_2 : \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SL}_3\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3)$, wobei φ_1 die gewöhnliche Darstellung von $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ ist und φ_2 die gewöhnliche Darstellung von $\mathrm{SL}_3\mathbb{R}$ ist.

Beweis: Folgt aus B.25 durch Übergang zur Lie-Algebra $\mathfrak{l}\Gamma$ und zur Darstellung $\mathfrak{l}\varphi$. \square

B.27 Lemma

Es sei $\varphi : \mathfrak{su}_2\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^4)$ eine effektive komplexe Darstellung.

- (i) Ist die Darstellung φ irreduzibel, dann ist sie quasi-äquivalent zum Tensorprodukt der gewöhnlichen Darstellungen von $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ und $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ in $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ (wobei $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ in natürlicher Weise als reelle Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_2\mathbb{C}$ aufgefaßt wird).
- (ii) Andernfalls ist φ bis auf Äquivalenz eine direkte Summe $\varphi_1 \oplus \varphi_2$, wobei die Einschränkungen von φ_1 auf $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ sowie von φ_2 auf $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ jeweils triviale Darstellungen sind und die Einschränkungen von φ_1 auf $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ sowie von φ_2 auf $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ jeweils die gewöhnlichen Darstellungen dieser Algebren in $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ sind (wie in (i)).

Beweis: (i) Aus der Irreduzibilität von φ und der Tatsache, daß keine der beiden Algebren $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ trivial auf dem vierdimensionalen komplexen Vektorraum \mathbb{C}^4 wirkt, schließen wir, daß φ das Tensorprodukt zweier zweidimensionaler komplexer Darstellungen ist. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß die gewöhnlichen bis auf Äquivalenz die einzigen zweidimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ und von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ sind.

(ii) Nach dem Satz von H. Weyl B.18 ist die Darstellung φ der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{su}_2\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ vollständig reduzibel. Wir können sie also als direkte Summe

$\bigoplus_{\nu=1}^k \varphi_{\nu}$ mit irreduziblen Darstellungen

$$\varphi_{\nu} : \mathfrak{su}_2\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{d_{\nu}})$$

schreiben, wobei $\sum_{\nu=1}^k d_{\nu} = 4$ gilt. Außerdem ist $k \geq 2$, da φ im hier betrachteten Fall nicht irreduzibel ist. Jede der Darstellungen φ_{ν} ist das Tensorprodukt zweier irreduzibler Darstellungen

$$\varphi_{\nu,1} : \mathfrak{su}_2\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{d_{\nu,1}}) \quad \text{und} \quad \varphi_{\nu,2} : \mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{d_{\nu,2}}),$$

wobei $d_{\nu,1}d_{\nu,2} = d_\nu$ gilt. Ist eine der Darstellung $\varphi_{\nu,1}$ oder $\varphi_{\nu,2}$ eindimensional, dann bedeutet dies, daß $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ oder $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ den Teilraum \mathbb{C}^{d_ν} von \mathbb{C}^4 annulliert. Würde eine der beiden Komponenten $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ einen dreidimensionalen Teilraum von \mathbb{C}^4 annullieren, dann würde sie \mathbb{C}^4 vollständig annullieren, was der Effektivität von φ widerspräche. Ohne Einschränkung können wir also annehmen, daß $d_{1,1} \geq 2$ gilt. Angesichts der Bedingungen $k \geq 2$ sowie $\sum_{\nu=1}^k d_{\nu,1}d_{\nu,2} = 4$ folgt dann $(d_{1,1}, d_{1,2}, d_{2,1}, d_{2,2}) = (2, 1, 1, 2)$. Wie im Fall (i) nutzen wir nun die Tatsache aus, daß die gewöhnlichen Darstellungen bis auf Äquivalenz die einzigen zweidimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathfrak{su}_2\mathbb{C}$ und von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ sind. □

B.28 Folgerung

Es sei Γ eine zum direkten Produkt $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ lokal isomorphe zusammenhängende Lie-Gruppe, und $\varphi : \Gamma \rightarrow GL(\mathbb{C}^4)$ sei eine effektive komplexe Darstellung.

Ist die Darstellung φ irreduzibel, dann ist sie quasi-äquivalent zum Tensorprodukt der gewöhnlichen Darstellungen von $SU_2\mathbb{C}$ und $SL_2\mathbb{R}$ in $GL(\mathbb{C}^2)$ (wobei $SL_2\mathbb{R}$ in natürlicher Weise als Untergruppe von $GL_2\mathbb{C}$ aufgefaßt wird). Insbesondere ist Γ in diesem Fall isomorph zur Faktorgruppe $(SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}) / \langle (-\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2) \rangle$, die wiederum zum fastdirekten Produkt $SU_2\mathbb{C} \cdot SL_2\mathbb{R}$ isomorph ist, wobei der Schnitt der beiden Faktoren jeweils das zweielementige Zentrum von $SU_2\mathbb{C}$ und $SL_2\mathbb{R}$ ist.

Andernfalls enthält Γ eine zu $SL_2\mathbb{R}$ isomorphe abgeschlossene Untergruppe derart, daß die Einschränkung von φ auf diese Untergruppe zur direkten Summe der gewöhnlichen Darstellung von $SL_2\mathbb{R}$ in $GL(\mathbb{C}^2)$ und der (komplex) zweidimensionalen trivialen Darstellung äquivalent ist.

Beweis: Folgt aus B.27 durch Übergang zur Ableitung $\mathfrak{l}\varphi$ der Darstellung φ . Im irreduziblen Fall beachte man, daß $\mathfrak{l}\varphi$ quasi-äquivalent zur Ableitung einer Darstellung $\tilde{\varphi}$ des direkten Produkts $SU_2\mathbb{C} \times SL_2\mathbb{R}$ ist, deren Kern aus der zweielementigen Untergruppe $\langle (-\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2) \rangle$ besteht (vgl. B.16). □

C Topologische projektive Ebenen

Wenn auch die Voraussetzungen für einige Aussagen dieses Abschnitts abgeschwächt werden könnten, sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ im folgenden stets eine $2l$ -dimensionale kompakte projektive Ebene mit $0 < l < \infty$ (also mit $l \in \{1, 2, 4, 8\}$), und Δ sei eine abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe Σ .

Die Punkträume $2l$ -dimensionaler kompakter projektiver Ebenen sind in den Fällen $l = 1$ und $l = 2$ stets homöomorph zu denen der klassischen Ebenen $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$, und ihre Geraden und Geradenbüschel sind stets homöomorph zu Sphären der Dimension l (siehe [Salzmann et al. \[95\]](#) 53.5 und 53.15). In den Fällen $l = 4$ und $l = 8$ ist bisher nur bekannt, daß die Geraden homotopieäquivalent zu Sphären der Dimension l sind (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 54.11). Um schließen zu können, daß die Geraden von \mathcal{P} homöomorph zu Sphären sind, genügt es einzusehen, daß sie Mannigfaltigkeiten sind (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) 52.3). Für 8- und 16-dimensionale Ebenen weiß man dies jedoch nur in speziellen Situationen (vgl. [Salzmann et al. \[95\]](#) Kapitel 53). Ein hinreichendes Kriterium ist zum Beispiel die Existenz einer Gruppe von Automorphismen mit einer offenen Bahn in einer Gerade (solche Gruppen erhält man zum Beispiel sofort, wenn der Lenz–Barlotti–Typ der Ebene nicht trivial ist):

C.1 Bahnen der vollen Dimension in Geraden

Ist $x \in P$ ein Punkt, dessen l -dimensionale Bahn $\Delta(x)$ unter Δ in einer Gerade $L \in \mathcal{L}$ enthalten ist, dann ist $\Delta(x)$ offen in L , und L ist homöomorph zur Sphäre \mathbb{S}_l .

Beweis: [Salzmann et al. \[95\]](#) 53.2. □

Bei den uns interessierenden achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen ist die Existenz einer Baer–Unterebene ein weiteres hinreichendes Kriterium:

C.2 Abgeschlossene Baer–Unterebenen

Enthält die achtdimensionale kompakte Ebene \mathcal{P} eine abgeschlossene Baer–Unterebene, dann sind die Geraden von \mathcal{P} zur Sphäre \mathbb{S}_4 homöomorphe Mannigfaltigkeiten.

Beweis: [Salzmann et al. \[95\]](#) 53.10. □

In [Grundhöfer–Stroppel \[92\]](#) findet man Aussagen über die Topologien der Einschränkungen von Automorphismengruppen auf Unterebenen. In dieser Arbeit benötigen wir die folgende Konsequenz für Automorphismengruppen, die auf Baer–Unterebenen wirken:

C.3 Einschränkungen von Automorphismen auf Baer–Unterebenen

Ist \mathcal{B} eine abgeschlossene Baer–Unterebene von \mathcal{P} mit Δ -invarianter Punktmenge B , dann ist die Abbildung $\Delta/\Delta|_B \rightarrow \Delta|_B : \Delta|_B\delta \mapsto \delta|_B$ ein Homöomorphismus (wenn $\Delta|_B$ mit der Spurtopologie bezüglich der kompakt-offenen Topologie auf der Automorphismengruppe von \mathcal{B} versehen wird).

Beweis: [Grundhöfer–Stroppel \[92\]](#) (14) Theorem. □

Die Wirkung einer Automorphismengruppe auf eine Baer–Unterebene und auf ein in dieser Unterebene enthaltenes echtes Viereck liefert außerdem ein Kompaktheitskriterium und eine Dimensionsschranke für die Gruppe:

C.4 Stabilisatoren echter Vierecke

Fixiert Δ ein in einer Baer–Unterebene \mathcal{B} der achtdimensionalen kompakten Ebene \mathcal{P} enthaltenes echtes Viereck punktweise, dann ist Δ kompakt, und die Untergruppe der \mathcal{B} invariant lassenden Elemente in Δ ist höchstens eindimensional.

Beweis: Salzmann [79] 2.(4) und 2.(5) oder Salzmann et al. [95] 83.9 (mit $H = K$) und 83.11 (man beachte auch die Bemerkungen am Anfang des zweiten Abschnitts auf S. 143 von Salzmann [79] und vor Salzmann et al. [95] 83.4 über die Beziehung zwischen einem Viereckstabilisator und der Automorphismengruppe eines koordinatisierenden Ternärkörpers). □

Fixiert eine Untergruppe der Automorphismengruppe eine Unterebene von \mathcal{P} punktweise, dann ergibt sich daraus eine Schranke für die Dimension dieser Untergruppe:

C.5 Stabilisatoren von Unterebenen

Ist das Fixgebilde $\mathcal{F}_\Delta := (\text{Fix}_P \Delta, \text{Fix}_L \Delta)$ von Δ eine echte Unterebene der achtdimensionalen kompakten Ebene \mathcal{P} , dann gilt $\dim \Delta + \dim \text{Fix}_P \Delta \leq 5$.

Beweis: Siehe Salzmann [79] §2 oder Salzmann et al. [95] Abschnitt 83: Die achtdimensionale Ebene \mathcal{P} läßt sich mit einem vierdimensionalen (insbesondere zusammenhängenden) lokalkompakten topologischen Ternärkörper K koordinatisieren (vgl. Salzmann et al. [95] 43.2). Da die Unterebene \mathcal{F}_Δ ein echtes Viereck enthält, wirkt Δ auf K effektiv als (abgeschlossene) Untergruppe der Automorphismengruppe von K . Weil Δ nicht nur die Identität enthält, ist \mathcal{F}_Δ eine echte Unterebene von \mathcal{P} . Ist \mathcal{F}_Δ eine vierdimensionale Unterebene von \mathcal{P} , dann fixiert Δ einen zweidimensionalen Unterternärkörper von K , und es folgt $\dim \Delta + \dim \text{Fix}_P \Delta = \dim \text{Fix}_P \Delta = 4$ aus Salzmann et al. [95] 83.6 (man beachte, daß der Abschluß von Δ das gleiche Fixgebilde hat, wie Δ). Im Fall einer zweidimensionalen Fixebene \mathcal{F}_Δ gilt $\dim \Delta + \dim \text{Fix}_P \Delta \leq 3 + 2$ nach Salzmann et al. [95] 83.6. Schließlich gilt stets $\dim \Delta \leq 5$ nach Salzmann et al. [95] 83.15, was zeigt, daß die Behauptung auch im Fall $\dim \text{Fix}_P \Delta = 0$ gilt. □

Die folgende Aussage wird in dieser Arbeit auch in der dualen Fassung verwendet.

C.6 Stabilisatoren ausgearteter Vierecke

Fixiert Δ drei verschiedene Punkte der achtdimensionalen kompakten Ebene \mathcal{P} , die auf einer Gerade liegen, sowie einen nicht auf dieser Gerade liegenden Punkt, dann gilt $\dim \Delta \leq 7$.

Beweis: Salzmann [79] (*) oder Salzmann et al. [95] 83.17. □

R. Löwen hat alle halbeinfachen zusammenhängenden Lie–Gruppen bestimmt, die in Automorphismengruppen vierdimensionaler lokalkompakter stabiler Ebenen enthalten sein können. Dies sind genau die fasteinfachen zusammenhängenden Lie–Gruppen, die isomorph zu Untergruppen der Automorphismengruppe der komplexen projektiven Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ sind, und außerdem eventuell noch Gruppen, die $\text{PSL}_2\mathbb{R}$ mehr als zweiblättrig überlagern (siehe Löwen [78] Satz C). Ob unter letzteren (die zu keiner Untergruppe

der Automorphismengruppe von $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ isomorph sind) tatsächlich solche existieren, die in der Automorphismengruppe einer vierdimensionalen lokalkompakten stabilen Ebene enthalten sind, ist noch offen. Das folgende Teilergebnis behält seine Gültigkeit auch für stabile Ebenen.

C.7 Satz

Ist Δ eine (zusammenhängende lokalkompakte) halbeinfache Untergruppe der Automorphismengruppe einer vierdimensionalen kompakten projektiven Ebene, dann ist Δ fasteinfach.

Beweis: Löwen [78] Satz B (vgl. auch Salzmänn et al. [95] 71.8). □

Elationsgruppen

Mit Hilfe der stetigen Zentrumsabbildung (vgl. 1.20) können wir auf die Abgeschlossenheit von Elationsgruppen schließen (man beachte, daß im folgenden Lemma auf die Voraussetzung der (topologischen) Abgeschlossenheit von Δ verzichtet werden könnte).

C.8 Lemma über die Abgeschlossenheit von Elationsgruppen

Die Gruppe $\Delta_{[A,A]}$ der Elationen mit Achse $A \in \mathcal{L}$ ist (bezüglich der kompakt-offenen Topologie) abgeschlossen in Δ .

Beweis: Der Ineffektivitätskern $\Delta_{[A]} = \bigcap \{\Delta_a; a \in A\}$ der Wirkung von Δ auf A ist eine abgeschlossene Untergruppe von Δ . Das Urbild $\Delta_{[A]} \setminus \Delta_{[A,A]}$ der in der Punktmenge P offenen Teilmenge $P \setminus A$ unter der Einschränkung der stetigen Zentrumsabbildung $\zeta : \Sigma_{[P,\mathcal{L}]} \setminus \{\text{id}_P\} \rightarrow P$ auf $\Delta_{[A]} \setminus \{\text{id}_P\}$ ist eine offene Teilmenge von $\Delta_{[A]} \setminus \{\text{id}_P\}$. Da $\{\text{id}_P\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\Delta_{[A]}$ ist, folgt daraus die Abgeschlossenheit von $\Delta_{[A,A]}$ in $\Delta_{[A]}$ und in Δ . □

In beliebigen (nicht notwendigerweise topologischen) projektiven Ebenen gilt:

C.9 Elationsgruppen mit einer Achse und verschiedenen Zentren

Enthält die Gruppe $\Sigma_{[A,A]}$ der Elationen mit Achse $A \in \mathcal{L}$ Elemente mit verschiedenen Zentren, dann ist $\Sigma_{[A,A]}$ abelsch, und die nichttrivialen Elemente dieser Elationsgruppe haben alle dieselbe Ordnung.

Beweis: Hughes–Piper [73] Theorem 4.14. □

Mit Hilfe der Theorie für periodische Abbildungen von P. A. Smith kann man zeigen, daß die Elationen endlichdimensionaler zusammenhängender kompakter Ebenen (bis auf die triviale) unendliche Ordnung haben (siehe Salzmänn et al. [95] 55.28):

C.10 Axiale Automorphismen endlicher Ordnung

Jeder axiale Automorphismus von \mathcal{P} , der eine endliche Ordnung hat, ist eine Homologie. □

Das folgende Lemma findet man in [Salzmann et al. \[95\]](#) 61.4 in einer etwas allgemeineren Fassung, die auch Streckungsgruppen berücksichtigt. Wir brauchen die Aussage jedoch nur für Elationsgruppen. Man beachte auch die Bemerkungen in [Salzmann et al. \[95\]](#) 61.0 über die Voraussetzungen an Δ .

C.11 Lemma über Dimensionen von Elationsgruppen

Es sei Δ eine d -dimensionale Untergruppe der Gruppe $\Sigma_{[A,A]}$ aller Elationen, deren Achse die Gerade $A \in \mathcal{L}$ ist.

- (i) Existiert ein Punkt $z \in A$ mit $\Delta \leq \Sigma_{[z,A]}$, dann gilt $d \leq l$, und Δ wirkt genau dann transitiv auf $L \setminus \{z\}$ für $L \in \mathcal{L}_z \setminus \{A\}$, wenn $d = l$ gilt (in diesem Fall ist $\Delta = \Sigma_{[z,A]}$).
- (ii) Es gilt stets $d \leq 2l$, und $d = 2l$ gilt genau dann, wenn Δ transitiv auf P^A wirkt (in diesem Fall ist $\Delta = \Sigma_{[A,A]}$). □

Wie die Aussage aus [C.9](#) läßt sich auch die folgende, für zusammenhängende kompakte Ebenen geltende, Verschärfung in der dualen Version anwenden.

C.12 Zusammenhängende Elationsgruppen mit verschiedenen Zentren

Enthält die Gruppe $\Sigma_{[A,A]}$ der Elationen mit Achse $A \in \mathcal{L}$ Elemente mit verschiedenen Zentren, dann ist die Zusammenhangskomponente H von $\Delta \cap \Sigma_{[A,A]}$ zu einer reellen Vektorgruppe isomorph. Dies gilt auch für die Komponenten $H_{[a]}$ mit $a \in A$.

Beweis: [Salzmann et al. \[95\]](#) 61.6 und 61.9 mit [B.5](#). □

Haben alle Richtungskomponenten einer Elationsgruppe bis auf eine die gleiche positive Dimension, dann ist diese eine Richtungskomponente l -dimensional:

C.13 Lemma

Es seien $A \in \mathcal{L}$, $v, w \in A$, und T sei eine abgeschlossene Untergruppe der Elationsgruppe $\Sigma_{[A,A]}$. Gilt $\dim T_{[z]} = \dim T_{[w]} > 0$ für alle $z \in A \setminus \{v\}$, dann ist $T_{[v]}$ transitiv (auf jeder punktierten Gerade $L \setminus \{v\}$ mit $L \in \mathcal{L}_v \setminus \{A\}$).

Beweis: [Salzmann \[90\]](#) (G) oder [Salzmann et al. \[95\]](#) 61.12. □

Im Rahmen einer Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Elationen und Homologien in kompakten projektiven Ebenen zeigt [Hähl \[81\]](#) 1.3. Corollary, daß aus der Existenz einer Homologie auf die Größe der Elationsgruppe mit der gleichen Achse geschlossen werden kann. Dieses im folgenden Lemma formulierte Resultat läßt ebenfalls eine duale Fassung zu.

C.14 Lemma über Homologien und Elationen

Es sei Δ eine zusammenhängende Lie-Untergruppe des Stabilisators Σ_A einer Gerade $A \in \mathcal{L}$. Ist $a \in P^A$ ein Punkt, dessen Stabilisator Δ_a nicht effektiv auf A operiert, dann gilt $\Delta(a) = \Delta_{[A,A]}(a)$. □

Translationsebenen

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß \mathcal{P} eine Translationsebene mit Translationsachse L_∞ ist.

Während die Gruppe Δ in C.4 noch eine Baer–Unterebene invariant lassen mußte, damit auf die Kompaktheit der Gruppe geschlossen werden konnte, kann bei Translationsebenen auf diese Zusatzvoraussetzung verzichtet werden:

C.15 Vierecksstabilisatoren in Translationsebenen

Ist a, b, c, d ein echtes Viereck, dann ist der Stabilisator $\Sigma_{a,b,c,d}$ kompakt.

Beweis: Salzmann et al. [95] 81.5. □

Der Satz über Achsenstabilisatoren, der zunächst in Hähl [75a] 4.2 bewiesen und dann in Hähl [79] 2.1 weiterentwickelt worden ist, liefert kompakte Gruppen, die auf den zu vierdimensionalen Sphären isomorphen Punktmengen der Translationsachse und zweier Geraden, die sich nicht auf der Translationsachse schneiden, wirken. Einen Beweis für diesen Satz findet man auch in Salzmann et al. [95] 81.8.

C.16 Satz über Achsenstabilisatoren

Ist Δ eine zusammenhängende Untergruppe des reduzierten Stabilisators $S\Sigma_o$ eines Punktes $o \in P^{L_\infty}$ und fixiert Δ zwei verschiedene Punkte $s, w \in L_\infty$, so ist Δ entweder kompakt oder direktes Produkt der maximalen kompakten Untergruppe mit einer zu \mathbb{R} isomorphen abgeschlossenen Untergruppe Ξ . Im zweiten Fall existiert ein Isomorphismus $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \Xi$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für $t \rightarrow \infty$ konvergieren die Abbildungen $\xi(t)|_{L_\infty \setminus \{w\}}$ und $\xi(-t)|_{L_\infty \setminus \{s\}}$ auf kompakten Teilmengen von $L_\infty \setminus \{w\}$ bzw. von $L_\infty \setminus \{s\}$ gleichmäßig gegen die konstanten Abbildungen $L_\infty \setminus \{w\} \rightarrow \{s\}$ und $L_\infty \setminus \{s\} \rightarrow \{w\}$.

Insbesondere existiert keine solche Untergruppe Ξ , wenn Δ außer s und w noch einen weiteren Punkt von L_∞ fixiert, das heißt, in diesem Fall ist Δ kompakt. □

Eine Untergruppe Ξ der geschilderten Art wird auch als Kompressionsuntergruppe bezüglich w und s bezeichnet.

Nach Hähl [78] 1.2 Hauptsatz (vgl. auch Salzmann et al. [95] 82.14) hat die Automorphismengruppe kleine Bahnen auf der Translationsachse. Da die Dimensionen der Bahnen lokalkompakter Gruppen mit den Dimensionen der Bahnen ihrer Zusammenhangskomponenten übereinstimmen (vgl. A.10), können wir diese Tatsache in der folgenden Fassung formulieren:

C.17 Satz (Kleine Bahnen in Translationsebenen)

Ist \mathcal{P} eine nichtklassische kompakte Translationsebene der Dimension $2l$ mit $l \in \{4, 8\}$, dann existiert ein Punkt s auf der Translationsachse L_∞ so, daß $\dim \Delta(s) < l - 1$ gilt (man beachte, daß $\Delta(s) \subseteq L_\infty$ gilt, da \mathcal{P} nicht klassisch ist). □

Das folgende Sphärenlemma und der danach zitierte Sphärensatz sind Ergebnisse aus Hähl [79] 1.1 und 1.2.

C.18 Sphärenlemma

Es sei $\Delta \leq \Sigma_{L_\infty}$, und $S \subseteq L_\infty$ sei eine mindestens zweidimensionale Bahn der Zusammenhangskomponente $\Delta^{\mathbb{1}}$ von Δ .

Gibt es zwei verschiedene Punkte $s, w \in S$ so, daß die von dem Stabilisator $\Delta_{s,w}$ auf L_∞ induzierte Homöomorphismengruppe nicht relativ kompakt ist, so ist S homöomorph zu einer Sphäre. □

C.19 Sphärensatz

Es sei $l \in \{4, 8\}$. Hat eine Gruppe stetiger affiner Automorphismen von \mathcal{P} eine zur $(l - 1)$ -Sphäre homöomorphe Bahn in L_∞ , so trifft eine der folgenden Aussagen zu:

- (i) \mathcal{P} ist moufangsch, also isomorph zur klassischen Ebene über \mathbb{H} oder \mathbb{O} .
- (ii) Die Gruppe der affinen Automorphismen hat genau einen Fixpunkt in L_∞ , und \mathcal{P} ist vom Lenz-Typ V , also die Ebene über einer reellen Divisionsalgebra der Dimension l .
- (iii) Es gibt genau zwei Punkte $s, w \in L_\infty$ so, daß $\{s, w\}$ invariant unter Σ_{L_∞} ist. Die Zusammenhangskomponente $\Sigma^{\mathbb{1}}$ fixiert dann s und w und wirkt entweder transitiv auf $L_\infty \setminus \{s, w\}$ oder hat dort lauter zur $(l - 1)$ -Sphäre homöomorphe Bahnen. □

Eine Analyse der Situation, in der die Automorphismengruppe eine zu $\text{SO}_3\mathbb{R}$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, die mit Fixpunkten auf der Translationsachse L_∞ wirkt, finden wir in Hähl [83] 1.4.

C.20 $\text{SO}_3\mathbb{R}$ -Satz

Es sei Φ eine zusammenhängende kompakte zu $\text{SO}_3\mathbb{R}$ lokal isomorphe Untergruppe des Stabilisators Σ_o eines nicht auf der Translationsachse L_∞ liegenden Punktes einer achtdimensionalen kompakten Translationsebene. Auf L_∞ induziere Φ eine zu $\text{SO}_3\mathbb{R}$ isomorphe Transformationsgruppe, die Punkte von L_∞ fixiert (siehe A.12 für die Möglichkeiten einer solchen Wirkung).

Ist die Ebene \mathcal{P} nicht klassisch, dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- (0a) \mathcal{P} ist eine $\text{SO}_4\mathbb{R}$ -Ebene oder eine $\text{Spin}(4)$ -Ebene (vgl. 7.1 und 7.2).
- (0b) \mathcal{P} ist eine $\text{SL}_2\mathbb{C}$ -Ebene (vgl. 7.3).
- (1) Φ ist ein Normalteiler von $\Sigma_o^{\mathbb{1}}$, und es gilt $\dim \Sigma \leq 14 + d$, wobei $d \in \{1, 2\}$ die Dimension des Kerns von \mathcal{P} ist.
- (2) Σ fixiert genau einen Punkt $s \in L_\infty$, und $\Sigma_o^{\mathbb{1}}$ enthält einen dreidimensionalen abgeschlossenen Normalteiler $N \cong \mathbb{R}^3$, der aus Scherungen mit Scherungszentrum s besteht. □

Die Möglichkeiten für die Ebene werden in Hähl [83] 2.1–2.3 noch genauer eingegrenzt. Dabei ergeben sich folgende Konsequenzen für den Fall (1):

C.21 Bemerkung

Mit den Bezeichnungen aus dem $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ -Satz C.20 können in der Situation (1) zwei Fälle unterschieden werden.

- (i) Hat $(S\Sigma_o)^\natural$ keinen Fixpunkt auf L_∞ , dann wirkt $(S\Sigma_o)^\natural$ transitiv auf der Kreislinie \mathcal{F} der Fixpunkte von Φ auf L_∞ und $(S\Sigma_o)^\natural$ ist entweder lokal isomorph zu $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ und transitiv auf $L_\infty \setminus \mathcal{F}$ oder lokal isomorph zu $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$. Im ersten Fall gilt dabei $\dim \Sigma = 14 + d$, und im zweiten Fall gilt $\dim \Sigma = 12 + d$.
- (ii) Fixiert $(S\Sigma_o)^\natural$ einen Punkt auf L_∞ , dann gilt $\dim \Sigma \leq 13 + d$. □

Der Beweis des folgenden Lemmas über Scherungsgruppen stammt aus Hähl [77] 6.1.

C.22 Lemma

Es seien $S \in \mathcal{L} \setminus \{L_\infty\}$ und $s := S \wedge L_\infty$. Ist Δ eine zusammenhängende Untergruppe von Σ_{L_∞} derart, daß $1 \leq \dim \Delta(s) \leq \dim \Delta_{[s,S]} = m \geq 2$ gilt, so existiert ein Punkt $w \in \Delta(s) \setminus \{s\}$, und für jeden solchen gilt $\Delta(s) = (\Delta_{[s,S]})^\natural(w) \cup \{s\}$. Insbesondere ist $\Delta(s)$ dann eine m -Sphäre.

Beweis: Wir setzen $\Lambda := (\Delta_{[s,S]})^\natural$. Wegen $\dim \Delta(s) \geq 1$ enthält $\Delta(s) \setminus \{s\}$ einen Punkt w . Die Auswertungsabbildung $\Sigma \rightarrow P : \sigma \mapsto \sigma(w)$ liefert eine stetige Bijektion $\alpha : \Delta/\Delta_w \rightarrow \Delta(w)$ und (vgl. 1.20) einen Homöomorphismus von Λ auf die in $P \setminus S$ abgeschlossene Bahn $\Lambda(w) \subseteq L_\infty \setminus \{s\}$. Die duale Version von C.12 zeigt $\Lambda \cong \mathbb{R}^m$. Folglich ist $\Lambda(w) \cup \{s\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\Lambda(w) \approx \mathbb{R}^m$, also homöomorph zur m -Sphäre. Aus $\Lambda(w) \subseteq \Delta(w) = \Delta(s)$ und $\dim \Delta(s) \leq \dim \Lambda$ folgt $\dim \Delta/\Delta_w = \dim \Delta(w) = m \geq 2$. Wie Δ/Δ_w ist dann auch $\Omega := \Delta/\Delta_w \setminus \{\alpha^{-1}(s)\}$ eine m -dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Da Λ frei auf $P \setminus S$ wirkt, ist die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/\Delta_w$ auf Λ eine stetige Injektion. Als Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $\Lambda(w)$ von $\Delta(s) \setminus \{s\}$ ist $\pi(\Lambda) = \alpha^{-1}(\Lambda(w))$ abgeschlossen in Ω . Mit L. E. J. Brouwers Satz von der Gebietsinvarianz (siehe 1.12) schließen wir andererseits, daß $\pi(\Lambda)$ offen in Ω ist. Angesichts des Zusammenhangs von Ω erhalten wir $\pi(\Lambda) = \Omega$. Dies zeigt $\Delta(s) = \alpha(\Omega) \cup \{s\} = \Lambda(w) \cup \{s\}$. □

Bezeichnungen

Allgemein

\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Q}	der Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$	die Körper der reellen und der komplexen Zahlen, der Quaternionen(schief)körper und die Oktavenalgebra
K^\times	multiplikative Gruppe des Körpers K
$\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$	die reellen Zahlen x mit $x > 0$ bzw. mit $x \geq 0$
i	die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$; siehe S. 1
j	ein Element von \mathbb{H} mit $j^2 = -1$ und $jz = \bar{z}j$ für alle $z \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$; siehe S. 1
J	die Involution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2\mathbb{R}$; siehe S. 2
$\text{Re}(x)$	Realteil der Quaternion oder komplexen Zahl x ; siehe S. 1
$\text{Im}(z)$	Imaginärteil der komplexen Zahl z ; siehe S. 1
$\text{Pu}(h)$	der reine Anteil der Quaternion $h = \text{Re}(h) + \text{Pu}(h)$; siehe S. 1
$\text{Pu } \mathbb{H}$	der Teilraum der reinen Quaternionen in \mathbb{H} ; siehe S. 1
\bar{x}	das zu $x \in \mathbb{C}$ oder $x \in \mathbb{H}$ (komplex) konjugierte Element; siehe S. 1
$ x $	der (euklidische) Betrag von $x \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$; siehe S. 1
\mathbb{S}_K	die Einheitssphäre $\{x \in K ; x = 1\}$ in $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$; siehe 1.2
\mathbb{S}_n	die n -dimensionale Sphäre der Elemente von Norm 1 in \mathbb{R}^{n+1}
$V \oplus W$	direkte Summe der Vektorräume V und W
$V \otimes_K W$	das Tensorprodukt des K -Rechtsvektorraumes V und des K -Linksvektorraumes W
$X \approx Y$	die topologischen Räume X und Y sind homöomorph
$\dim X$	Dimension des topologischen Raumes X ; siehe 1.10
$f^{-1}(M)$	Urbild der Menge M unter der Abbildung f
$f _M$	Einschränkung der Abbildung f auf M
id_M	die identische Abbildung auf der Menge M
$\text{Ker } \varphi$	der Kern des Homomorphismus φ

Topologische Gruppen, Lie-Gruppen und deren Wirkungen

$\mathbb{1}$	das Neutralelement einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe
$\langle \Omega \rangle$	das Erzeugnis der Teilmenge Ω einer Gruppe (die kleinste Ω enthaltende Untergruppe)
$\alpha^\beta = \beta\alpha\beta^{-1}$	Konjugation für Elemente einer Gruppe
$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	die zyklische Gruppe der Ordnung n
$N \trianglelefteq \Gamma$	N ist Normalteiler der Gruppe Γ
$N_\Gamma H$	Normalisator von H in der Gruppe Γ
$C_\Gamma H$	Zentralisator von H in der Gruppe Γ
$C\Gamma$	Zentrum der Gruppe Γ
Γ'	die Kommutatorgruppe der Gruppe Γ [Anhang: B.1]
$\Gamma^\mathbb{1}$	die Zusammenhangskomponente des Neutralelements in der topologischen Gruppe Γ [Anhang: A.4]
$\Gamma _M$	Einschränkung der Wirkung einer Gruppe Γ auf eine Menge M (mit $\Gamma(M) = M$)
$\text{Fix}_M \Omega$	die Fixpunktmenge von Ω in M ; siehe 1.19
$\Omega_{[M]}$	Stabilisator aller Punkte von M in Ω (Ineffektivitätskern, falls Ω eine Gruppe ist, die auf M wirkt); siehe 1.19
$\Omega_{a,b,c}$	Stabilisator der Punkte a, b und c in Ω ; siehe 1.19
$\text{GL}(V, K)$	die Gruppe der K -linearen Automorphismen des K -Vektorraumes V
$\text{GL}(V)$	abkürzende Schreibweise für $\text{GL}(V, K)$ für Fälle, in denen offensichtlich oder unerheblich ist, welcher Körper K ist
$\text{SL}(V, K)$	die Kommutatorgruppe von $\text{GL}(V, K)$
$\mathfrak{l}\Gamma$	die Lie-Algebra der Lie-Gruppe Γ
$\mathfrak{gl}(V, K)$	die Lie-Algebra von $\text{GL}(V, K)$ bestehend aus allen K -linearen Endomorphismen des K -Vektorraumes V
\mathfrak{g}_2	die Lie-Algebra der Automorphismengruppe der komplexen Cayley-Algebra $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$
$\sqrt{\Gamma}, \sqrt{\mathfrak{l}}$	die auflösbaren Radikale der Lie-Gruppe Γ und der Lie-Algebra \mathfrak{l} ; siehe B.1
$\mathfrak{l}\varphi$	die Ableitung $\mathfrak{l}\varphi : \mathfrak{l}\Gamma \rightarrow \mathfrak{l}H$ eines Homomorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow H$ zwischen Lie-Gruppen; siehe Hilgert–Neeb [91] I.7
$\varphi \otimes \varrho$	das Tensorprodukt der Darstellungen φ und ϱ [Anhang: B.19]

Matrizengruppen und ihre Lie-Algebren

Beschreibungen der klassischen Gruppen findet man zum Beispiel in [Hein \[90\]](#) Kapitel I und Kapitel II, § 2. Im folgenden bezeichne X^t die zu einer Matrix X transponierte Matrix, und X^* sei die transponierte und komplex-konjugierte Matrix der komplexen Matrix X . Des weiteren seien (mit den $n \times n$ -Einheitsmatrizen \mathbb{I}_n)

$$\mathbb{I}_{k,l} := \begin{pmatrix} \mathbb{I}_k & \\ & -\mathbb{I}_l \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{J}_k := \begin{pmatrix} & -\mathbb{I}_k \\ \mathbb{I}_k & \end{pmatrix}.$$

$M_n K$	die Menge der $n \times n$ -Matrizen über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$
$GL_n K$	Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$
\mathbb{I}_n	$n \times n$ -Einheitsmatrix in $M_n K$ (mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$)
$X_{\mu,\nu}$	der Eintrag in der μ -ten Zeile und der ν -ten Spalte der Matrix X
$\det_K(X)$	die Determinante der Matrix $X \in M_n K$ (für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)
$SL_n K$	$= \{X \in M_n K; \det_K X = 1\}$ (die spezielle lineare Gruppe; für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)
$O_n(\mathbb{R}, r)$	$= \{X \in GL_n \mathbb{R}; X^t \mathbb{I}_{n-r,r} X = \mathbb{I}_{n-r,r}\}$ (die reelle orthogonale Gruppe zum Index r)
$SO_n(\mathbb{R}, r)$	$= O_n(\mathbb{R}, r) \cap SL_n \mathbb{R}$ (die spezielle reelle orthogonale Gruppe zum Index r)
$O_n \mathbb{R}, SO_n \mathbb{R}$	die reellen orthogonalen Gruppen zum Index 0
$O_n^- \mathbb{R}$	$= O_n \mathbb{R} \setminus SO_n \mathbb{R}$
$\delta, \tilde{\delta}$	die Homomorphismen $\delta : \mathbb{R} \rightarrow SO_2 \mathbb{R}$ und $\tilde{\delta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow GL_4 \mathbb{R}$ zur Beschreibung der ein- und zweidimensionalen Torusgruppen; siehe 1.3
$Spin(n)$	die zweiblättrige Überlagerungsgruppe von $SO_n \mathbb{R}$
$Sp_{2n} \mathbb{R}$	$= \{X \in GL_{2n} \mathbb{R}; X^t \mathbb{J}_n X = \mathbb{J}_n\}$ (die reelle symplektische Gruppe)
$O_n \mathbb{C}$	$= \{X \in GL_n \mathbb{R}; X^t X = \mathbb{I}_n\}$ (die komplexe orthogonale Gruppe)
$SO_n \mathbb{C}$	$= O_n \mathbb{C} \cap SL_n \mathbb{C}$ (die spezielle komplexe orthogonale Gruppe)
$U_n(\mathbb{C}, r)$	$= \{X \in GL_n \mathbb{C}; X^* \mathbb{I}_{n-r,r} X = \mathbb{I}_{n-r,r}\}$ (die unitäre Gruppe zum Index r)
$SU_n(\mathbb{C}, r)$	$= U_n(\mathbb{C}, r) \cap SL_n \mathbb{C}$ (die spezielle unitäre Gruppe zum Index r)
$U_n \mathbb{C}, SU_n \mathbb{C}$	die unitären Gruppen zum Index 0
$PGL_n K$	$= GL_n K / K^\times \mathbb{I}_n$ (die projektive lineare Gruppe; für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)
$PSL_n K$	$= SL_n K / \langle (-\mathbb{I}_n)^{n+1} \rangle$ (die projektive spezielle lineare Gruppe; für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

$\mathfrak{gl}_n K$	$= \mathfrak{LGL}_n K = M_n K$
$\mathfrak{sl}_n K$	$= \mathfrak{LSL}_n K = \left\{ X \in \mathfrak{gl}_n K ; \sum_{\mu=1}^n X_{\mu,\mu} = 0 \right\}$ (für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)
$\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}, r)$	$= \mathfrak{LO}_n(\mathbb{R}, r) = \mathfrak{LSO}_n(\mathbb{R}, r) =$ $\{X \in \mathfrak{gl}_n \mathbb{R} ; X^t \mathbb{I}_{n-r,r} = -\mathbb{I}_{n-r,r} X\}$
$\mathfrak{o}_n \mathbb{R}$	$= \mathfrak{o}_n(\mathbb{R}, 0)$
$\mathfrak{o}_n \mathbb{C}$	$= \mathfrak{LO}_n \mathbb{C} = \mathfrak{LSO}_n \mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mathbb{C} ; X^t = -X\}$
$\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}, r)$	$= \mathfrak{LU}_n(\mathbb{C}, r) = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mathbb{C} ; X^* \mathbb{I}_{n-r,r} = \mathbb{I}_{n-r,r} X\}$
$\mathfrak{u}_n \mathbb{C}$	$= \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}, 0)$
$\mathfrak{su}_n(\mathbb{C}, r)$	$= \mathfrak{LSU}_n(\mathbb{C}, r) = \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}, r) \cap \mathfrak{sl}_n \mathbb{C}$
$\mathfrak{su}_n \mathbb{C}$	$= \mathfrak{su}_n(\mathbb{C}, 0)$

Geometrie

$\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$	zusammenhängende kompakte projektive Ebene mit Punktraum P und Geradenraum \mathcal{L} ; siehe S. 7
\mathcal{P}^*	die zur projektiven Ebene \mathcal{P} duale Ebene; siehe 1.31
$\mathcal{P}_2 \mathbb{R}, \mathcal{P}_2 \mathbb{C}, \mathcal{P}_2 \mathbb{H}, \mathcal{P}_2 \mathbb{O}$	die klassischen zusammenhängenden kompakten projektiven Ebenen
P^L	der Punktraum $P^L = P \setminus L$ der affinen Ableitung \mathcal{P}^L der projektiven Ebene \mathcal{P} an einer Gerade L ; siehe S. 8
$pq = p \vee q$	Verbindungsgerade der (verschiedenen) Punkte $p, q \in P$; siehe S. 7
$G \wedge H$	Schnittpunkt der (verschiedenen) Geraden $G, H \in \mathcal{L}$
\mathcal{L}_p	das Büschel $\{L \in \mathcal{L} ; p \in L\}$ der Geraden durch den Punkt $p \in P$
$\langle M \rangle$	das Erzeugnis einer Menge von Punkten und/oder Geraden einer Ebene; siehe 1.17
Σ	Gruppe der (stetigen) Automorphismen der projektiven Ebene \mathcal{P} ; siehe S. 8
$\text{id}_{\mathcal{P}}$	der triviale Automorphismus der Ebene \mathcal{P}
$\Omega_{[Z, \mathcal{A}]}$	Menge der axialen Automorphismen in Ω mit einem Zentrum aus $Z \subseteq P$ und einer Achse in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$; siehe 1.20
ζ	die Zentrumsabbildung; siehe 1.20
L_∞	(die) Translationsachse der Translationsebene \mathcal{P}
T	die Translationsgruppe $\Sigma_{[L_\infty, L_\infty]}$
\mathcal{S}	der Spread $\{T_{[p]} ; p \in L_\infty\}$ der Richtungskomponenten von T ; siehe 1.23
\mathbb{K}	der Kern der Translationsebene \mathcal{P} ; siehe 1.24
$\mathcal{S}\Gamma$	der in $\Gamma \leq \Sigma_{o, L_\infty}$ (mit einem affinen Punkt o der Translationsebene \mathcal{P}) enthaltene reduzierte Stabilisator; siehe 1.26
$N_\lambda(D), N_\mu(D), N_\varrho(D)$	Links-, Mittel- und Rechtsnukleus der Divisionsalgebra D ; siehe 1.28

Index

Ableitung einer Darstellung	122	Hughes-	21
affine		komakte (zusammenhängende)	7
Ableitung	8	Moufang-	11
Ebene	8	topologische	7
Gerade	7	Translations-	11
Annulator	17	vom Lenz-Typ V	14
Antifahne	7	effektive Wirkung	114
Äquivalenz		Einfachheit	117
von Transformationsgruppen	114	Elation	9
linearer Darstellungen	120	Erzeugnis	8
Auflösbarkeit	117	Fahne	7
auflösbares Radikal	117	Faktorraum	112
Auswertungsabbildung	10	fast effektive Wirkung	114
Automorphismus	8	fasteinfache Lie-Gruppe	117
affiner	11	Fixgebilde	9
axialer	9	freie Wirkung	114
planarer	10	Fundamentaldarstellung	125
zentraler	9	Gebietsinvarianz	6
Autotopismus	16	Geradenbüschel	7
Baer-Involution	10	Gewicht einer Darstellung	125
Baer-Unterebene	8	gewöhnliche Darstellung	120
Betrag (euklidischer)	1	Gruppe	
Cayley-Algebra	140	auflösbare	117
charakteristische Zahlen	124	Faktor-	112
Darstellung		halbeinfache	117
effektive	120	topologische	112
fast effektive	120	Gruppenwirkung	114
gewöhnliche	120	Haar-Maß	121
irreduzible	121	Halbeinfachheit	117
selbstkonjugierte	124	halbeinfacher Kopf	121
(vollständig) reduzible	121	Homologie	9
vom reellen Typ	124	Hughes-Ebene (verallgemeinerte)	21
Dimension		imaginäre Einheit	1
einer kompakten Ebene	7	Imaginärteil (einer komplexen Zahl)	1
topologische	5	Involution	
Divisionsalgebra (reelle)	14	planare (Baer-Involution)	10
Dreieck (echtes)	8	Ineffektivitätskern	114
duale Ebene	17	Invarianz	120
Ebene (projektive)		Inzidenz	7
Dimension einer	7	irreduzible Darstellung	121
duale	17		

Isotopismus	16	Reellifizierung	121
Kern der Translationsebene	13	Rees–Algebra	18
Kommutatoralgebra	117	reine Quaternion	1
Kommutatorgruppe	117	Richtungskomponente	12
kompakt–offene Topologie	112	Scherungsgruppe	14
Komplexifizierung		Scherungszentrum	14
einer (reellen) Darstellung	122	$SL_2\mathbb{C}$ –Ebene	105
einer (reellen) Lie–Algebra	124	$SO_3\mathbb{R}$ –Ebene	106
Komplexkonjugation	1	$SO_4\mathbb{R}$ –Ebene	104
koordinatisierende Divisionsalgebra	15	$Spin(3)$ – $SO_3\mathbb{R}$ –Ebene	105
Lenz–Typ V	14	$Spin(4)$ –Ebene	104
Levi–Komplemente	119	Spread	12
Lie–Algebra		Stabilisator	9
auflösbare	117	Streckungsgruppe	9
einfache	117	Tensorproduktdarstellung	123
halbeinfache	117	Ternärkörper	133
Lie–Gruppe		Translations-	
auflösbare	117	achse	11
fasteinfache	117	ebene	11
halbeinfache	117	gruppe	11
Lindelöf–Raum	114	Torsionsgruppe	119
Linksnukleus	15	Torusgruppe	2
lokale Isomorphie	118	Transformationsgruppe	114
Mittelnukleus	15	transponierte Translationsebene	17
Modul	120	Überlagerung	118
Moufang–Ebene	11	Überlagerungsgruppe	118
Mutation	19	universelle Überlagerungsgruppe	118
Nebenklassenraum	112	Unterebene (abgeschlossene)	8
Nukleus	15	Untermodul	121
punktierte Gerade	7	Viereck (echtes)	8
quasi–äquivalente Darstellungen	120	volle Automorphismengruppe	9
Radikal (auflösbares)	117	volle Automorphismengruppe	9
Realteil (einer komplexen Zahl)	1	vollständig reduzible Darstellung	121
Rechtsnukleus	15	Wirkung (stetige)	114
reduzierter Stabilisator	13	Zentrumsabbildung	10
reduzible Darstellung	121	zentraler Automorphismus	9
reelle Form	124	Zusammenhangskomponente	113

Literaturverzeichnis

Bödi, R.

- [96] *Smooth Stable and Projective Planes*, Habilitationsschrift, Tübingen.
Zitiert auf S. 52

Boekholt, S.

- [98] *Compact Lie Groups with isomorphic Homotopy Groups*,
J. Lie Theory **8**, 183–185.
Zitiert auf S. 50

Bruck, R. H.

- [46] *Contributions to the theory of loops*, Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 245–354.
Zitiert auf S. 68

Buchanan, T. – Hähl, H.

- [77] *On the kernel and the nuclei of 8-dimensional locally compact quasifields*,
Arch. Math. (Basel) **29**, 472–480.
Zitiert auf S. 14, 15
- [78] *The transposition of locally compact, connected translation planes*,
J. Geom. **29**, 84–92.
Zitiert auf S. 17, 18

Dugundji, J.

- [66] *Topology*, Boston: Allyn & Bacon.
Zitiert auf S. 5, 6, 7, 9, 10, 112, 114, 120

Engelking, R.

- [78] *Dimension theory*, Amsterdam etc.: North-Holland.
Zitiert auf S. 6

Freudenthal, H.

- [57a] *Kompakte projektive Ebenen*, Illinois J. Math. **1**, 9–13.
Zitiert auf S. vii
- [57b] *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“*,
Nieuw Arch Wisk. (3) **5**, 105–142.
Zitiert auf S. vii

Greenberg, M. J. – Harper, J. R.

- [81] *Algebraic Topology: a first course*, Reading, Mass. etc.: Benjamin/Cummings.
Zitiert auf S. 33, 41

Grundhöfer, T.

- [87] *Ternary fields of compact projective planes*,
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57**, 87–101.
Zitiert auf S. 11

Grundhöfer, T. – Stroppel, M.

- [92] *On Restrictions of Automorphism Groups of Compact Projective Planes to Subplanes*, Result. Math. **21**, 319–327.
Zitiert auf S. **132**

Hähl, H.

- [75a] *Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen*, Geom. Dedicata **4**, 305–321.
Zitiert auf S. **136**
- [75b] *Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren*, Geom. Dedicata **4**, 333–361.
Zitiert auf S. **18, 19, 20, 45, 78**
- [77] *Eine Klassifikation achtdimensionaler lokalkompakter Translationsebenen nach ihrer Kollineationsgruppe*, Habilitationsschrift, Tübingen.
Zitiert auf S. **138**
- [78] *Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen*, Math. Z. **159**, 259–294.
Zitiert auf S. **136**
- [79] *Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse*, Result. Math. **2**, 62–87.
Zitiert auf S. **136, 137**
- [80a] *Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen Streckungsgruppen*, Arch. Math. (Basel) **34**, 231–242.
Zitiert auf S. **104**
- [80b] *Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen kompakten Kollineationsgruppen*, Monatsh. Math. **90**, 207–218.
Zitiert auf S. **104**
- [81] *Homologies and elations in compact, connected projective planes*, Topology Appl. **12**, 49–63.
Zitiert auf S. **135**
- [82] *Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit zu $SL_2(\mathbb{C})$ isomorphen Kollineationsgruppen*, J. Reine Angew. Math. **330**, 76–92.
Zitiert auf S. **105**
- [83] *Zur Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **53**, 84–102.
Zitiert auf S. **137**
- [84] *Eine Klasse von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen*, Monatsh. Math. **97**, 23–45.
Zitiert auf S. **19, 20, 106**
- [86] *Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe*, Geom. Dedicata **21**, 299–340.
Zitiert auf S. **viii, 18, 19, 20, 105, 106, 108**

Halder, H. R.

- [71] *Dimension der Bahnen lokal kompakter Gruppen*, Arch. Math. (Basel) **22**, 302–303.
Zitiert auf S. **115**

-
- Hein, W.
[90] *Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Berlin etc.: Springer.
Zitiert auf S. [14](#), [28](#), [35](#), [99](#), [101](#), [121](#), [141](#)
- Hewitt, E. – Ross, K. A.
[79] *Abstract Harmonic Analysis I*, Berlin etc.: Springer (2. Auflage).
Zitiert auf S. [112](#), [113](#), [118](#)
- Hirsch, M. W.
[76] *Differential topology*, New York etc.: Springer.
Zitiert auf S. [49](#)
- Hilbert, D
[1899] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Teubner;
Stuttgart: Teubner (13. Auflage, 1987).
Zitiert auf S. [vii](#)
- Hilgert, J. – Hofmann, K.-H.
[85] *Old and new on $Sl(2)$* , Manuscripta Math. **54**, 17–52.
Zitiert auf S. [100](#)
- Hilgert, J. – Neeb, K.-H.
[91] *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Braunschweig: Vieweg.
Zitiert auf S. [100](#), [101](#), [117](#), [118](#), [119](#), [140](#)
- Hughes, D. R. – Piper, F. C.
[73] *Projective Planes*, Berlin etc.: Springer.
Zitiert auf S. [9](#), [10](#), [11](#), [15](#), [16](#), [134](#)
- Hurewicz, W. – Wallman, H.
[48] *Dimension theory*, Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press.
Zitiert auf S. [6](#)
- Iwasawa, K.
[49] *On some types of topological groups*, Ann. of Math. (2) **50**, 507–558.
Zitiert auf S. [113](#)
- Knarr, N.
[95] *Translation planes: foundations and construction principles*,
Lecture Notes in Math. **1611**, Berlin etc.: Springer.
Zitiert auf S. [viii](#), [20](#)
- Kolmogoroff, A.
[32] *Zur Begründung der projektiven Geometrie*, Ann. of Math. (2) **33**, 175–176.
Zitiert auf S. [vii](#)
- Löwen, R.
[76] *Vierdimensionale stabile Ebenen*, Geom. Dedicata **5**, 239–294.
Zitiert auf S. [9](#)
[78] *Halbeinfache Automorphismengruppen von vierdimensionalen stabilen Ebenen sind quasi-einfach*, Math. Ann. **236**, 15–28.
Zitiert auf S. [133](#), [134](#)

- [83a] *Stable Planes with Isotropic Points*, Math. Z. **182**, 49–61.
Zitiert auf S. **118**
- [83b] *Topology and dimension of stable planes: On a conjecture of H. Freudenthal*, J. Reine Angew. Math. **343**, 108–122.
Zitiert auf S. **7**
- Lüneburg, M.
- [92] *Involutionen, auflösbare Gruppen und die Klassifikation topologischer Ebenen*, Dissertation, Tübingen.
Zitiert auf S. **47**
- Montgomery D. – Zippin, L.
- [55] *Topological transformation groups*, New York – London: Interscience Publishers.
Zitiert auf S. **112, 113**
- Mostert, P. S.
- [56] *Sections in principal fibre spaces*, Duke Math. J. **23**, 57–71.
Zitiert auf S. **113**
- Mostow, G. D.
- [50] *The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces*, Ann. of Math. (2) **52**, 606–636.
Zitiert auf S. **120**
- Pears, A. R.
- [75] *Dimension theory of general spaces*, London etc.: Cambridge Univ. Press.
Zitiert auf S. **5, 6**
- Pontrjagin, L.
- [32] *Über stetige algebraische Körper*, Ann. of Math. (2) **33**, 163–174.
Zitiert auf S. **vii**
- Priwitzer, B.
- [94] *Large Automorphism Groups of 8-Dimensional Projective Planes are Lie Groups*, Geom. Dedicata **52**, 33–40.
Zitiert auf S. **11**
- Priwitzer, B. – Salzmann, H.
- [98] *Large automorphism groups of 16-dimensional planes are Lie groups*, J. Lie Theory **8**, 83–93.
Zitiert auf S. **11**
- Rees D.
- [50] *The nuclei of non-associative division algebras*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **46**, 1–18.
Zitiert auf S. **18, 45, 70, 73**
- Richardson, R. W.
- [61] *Groups acting on the 4-sphere*, Illinois J. Math. **5**, 474–485.
Zitiert auf S. **115**

Sagle, A. A. – Walde, R. E.

- [73] *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*,
London – New York: Academic Press.
Zitiert auf S. [122](#)

Salzmann, H.

- [55] *Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen*,
Math. Z. **61**, 489–494.
Zitiert auf S. [vii](#)
- [57] *Topologische projektive Ebenen*, Math. Z. **67**, 436–466.
Zitiert auf S. [vii](#)
- [67] *Topological Planes*, Adv. in Math. **2**, 1–60.
Zitiert auf S. [11](#)
- [79] *Compact 8-dimensional projective planes with large collineation groups*,
Geom. Dedicata **8**, 139–161.
Zitiert auf S. [133](#)
- [81] *Kompakte 8-dimensionale projektive Ebenen mit großer
Automorphismengruppe*, Math. Z. **176**, 345–357.
Zitiert auf S. [11](#), [21](#), [22](#)
- [90] *Compact 8-dimensional Projective Planes*, Forum Math. **2**, 15–34.
Zitiert auf S. [viii](#), [11](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [25](#), [47](#), [111](#), [128](#), [135](#)

Salzmann, H. – Betten, D. – Grundhöfer, T. – Hähl, H. – Löwen, R. – Stroppel, M.

- [95] *Compact Projective Planes*, Berlin – New York: Walter de Gruyter.
Zitiert auf S. [vii](#), [viii](#), [7](#), [8](#), [9](#), [10](#), [11](#), [12](#), [13](#), [14](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#), [41](#), [47](#), [48](#), [50](#),
[51](#), [106](#), [108](#), [112](#), [113](#), [115](#), [117](#), [119](#), [120](#), [121](#), [127](#), [129](#), [132](#), [133](#), [134](#), [135](#), [136](#)

Samelson, H.

- [69] *Notes on Lie algebras*, New York etc.: Van Nostrand Reinhold Co.;
New York etc.: Springer (2. Auflage, 1990).
Zitiert auf S. [123](#), [124](#)

Scheerer, H.

- [68] *Homotopieäquivalente kompakte Liesche Gruppen*, Topology **9**, 227–232.
Zitiert auf S. [50](#)

Skornjakov, L. A.

- [54] *Topologische projektive Ebenen* (Russisch),
Trudy Moskov. Mat. Obšč. **3**, 347–373.
Zitiert auf S. [vii](#), [11](#)

Spanier, E. H.

- [66] *Algebraic Topology*, New York: Mc-Graw Hill; New York etc.: Springer (1989).
Zitiert auf S. [41](#), [49](#)

Steenrod, N.

- [51] *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press.
Zitiert auf S. [50](#)

Tits, J.

[55] *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*,
Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° **29**, No. 3.
Zitiert auf S. [120](#), [127](#)

[67] *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*,
Lecture Notes in Math. **40**, Berlin etc.: Springer.
Zitiert auf S. [117](#), [124](#), [125](#), [127](#), [128](#)

Varadarajan, V. S.

[74] *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*,
Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall; Berlin etc.: Springer (1984).
Zitiert auf S. [13](#), [117](#), [118](#), [119](#), [122](#), [123](#)