Ein Beitrag zur Modellierung der Eigendynamik elastischer Schalen mit Hamiltonschen Strukturen

Von der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl.-Math. Ivica Đurđević
geboren in Vrbanja

Hauptberichter:	Prof. Dr. K. Kirchgässner
Mitberichter:	Prof. Dr. A. Mielke Prof. Dr.-Ing. E. Ramm
Tag der Einreichung:	11. Januar 2000
Tag der mündlichen Prüfung:	27. Januar 2000

Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart

2000

Für Marijana,
Silvio Emanuel und
Antonio Luca

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1994–1999 während meiner Tätigkeit als Stipendiat des Graduiertenkollegs „Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen“ und Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart.

Ich danke Herrn Prof. Dr. K. Kirchgässner, meinem geschätzten wissenschaftlichen Lehrer, sehr herzlich für die Anregung und Ermutigung zu dieser Arbeit. Mein Dank gebührt ihm nicht nur für seine Unterstützung und die entgegengebrachte Geduld, sondern auch für die vielen fruchtbaren Denkanstöße. Insbesondere bin ich für sein Lehren der Art und Weise wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens dankbar.

Herrn Prof. Dr. A. Mielke danke ich herzlich für wertvolle Diskussionen über Approximationen in Hamiltonschen Systemen. Seine Anregungen und infizierende Motivation haben den theoretischen Teil dieser Arbeit entscheidend geprägt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Ramm danke ich sehr für die kritischen und wertvollen Anregungen zum Thema der Arbeit sowie für die Übernahme des Mitberichtes. Ich bedanke mich herzlichst für den interdisziplinären Austausch und interessante Denkanstöße, die ich am Institut für die Baustatik der Universität Stuttgart genossen habe.

Herrn Prof. Dr. P. G. Ciarlet danke ich herzlichst für lange Diskussionen über mathematische Probleme in der Theorie der Schalen. Seine Unterstützung während der Aufenthalte in Stuttgart (als Humboldt–Stipendiat in den Sommersemestern 1997 und 1998) haben den schalentheoretischen Teil dieser Arbeit in besonderer Weise geprägt.

Ganz wesentlich für das Gelingen meiner Arbeit waren auch die vielen, nicht nur fachlichen Gespräche mit meinen Kollegen und Mitkollegiaten. Zunächst gilt mein Dank der „Dynamik–Gruppe“ im GKKS, d. h. den Herren Dr. -Ing. F. Döngi, Dr. -Ing. H. Krause, Dr. -Ing. D. Kuhl. Mein ganz besonderer Dank geht an Dr. Mariana Courcelle, die stets ein offenes Ohr für meine theoretischen Probleme hatte. Ihr professioneller Rat hat entscheidend zum Gelingen beigetragen. Spezielles Dankeschön gebührt Herrn Dr. Andreas Rössle für sein unermüdliches Interesse, für die oft nächtelangen Diskussionen, Anregungen, Ideen, Kritik und Denkanstöße. Ebenso bedanke ich mich herzlich bei Prof. Dr. Monique Dauge, bei welcher ich durch gemeinsame Publikationen viel gelernt habe. Weiter möchte ich meinen Institutskolleginnen und –kollegen Dr. Jasmin Cantner, Dr. Xue-Nong Chen, Dr. Cristian–Aurelian Coclici, Dr. Wolfgang Hauck, Dr. Katharina Lankers, Dr. Andreas Kipp, Dr. Claus Köstler, Kinga Mathe, Dr. Alexander Seiler und Stefanie Siegert danken, die mir stets Gelegenheit zum Gedankenaustausch gaben und mit freundlichem Rat zur Seite standen.

Mein ganz besonderer Dank gebührt meinen Eltern, Ana und Mijo, und insbesondere meiner Ehefrau Marijana und unserem Sohn Silvio, deren steter Rückhalt und Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit bewundernswert waren. Beide haben mir viel Kraft gegeben, für nötigen Ausgleich gesorgt und vor allem in den Tiefpunkten der Durststrecken das Vertrauen geschenkt, ohne welches die Erstellung dieser Arbeit ungleich schwieriger gewesen wäre.

Allgemeine Bezeichnungen

Mengen

$\mathbb{N}$ ... natürliche Zahlen,

$\mathbb{Z}$ ... ganze Zahlen,

$\mathbb{R}$ ... reelle Zahlen,

$\mathbb{C}$ ... komplexe Zahlen,

ω ... ein Gebiet des $\mathbb{R}^2$,

Ω ... ein Gebiet des $\mathbb{R}^3$,

$\partial\Omega$ ... Rand des Gebietes Ω.

Funktionenräume

L^p ... Raum der p–fach Lebesgue–integrierbaren Funktionen,

L^∞ ... Raum der wesentlich beschränkten Funktionen,

H^k ... Sobolevraum $W^{k,2}$,

H_0^k ... H^k–Funktionen mit schwachen Nullrandwerten,

$\mathcal{C}^k$ ... k–fach stetig differenzierbare Funktionen.

Sonstiges

$(\cdot\,,\,\cdot)_\Omega$ ... Skalarprodukt in $L^2(\Omega)^3$,

$(\cdot\,,\,\cdot)_\omega$ ... Skalarprodukt in $L^2(\omega)^3$,

$\mathcal{O}$ ... Landau–Symbol,

$\blacksquare$ ... Ende eines Beweises.

ε ... kleiner, positiver Parameter,

ε_0 ... generische Schranke für ε,

C ... generische nichtnegative von ε unabhängige Konstante.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Schwingungen dünner elastischer Schalen im Rahmen der linearisierten Elastodynamik im energieerhaltenden Fall untersucht. Insbesondere wird eine dimensionsreduzierte Beschreibung (mit Hilfe des Koiterschen Modells) der Schalenbewegungen gegeben, wenn der Dickenparameter sehr klein wird. Erstmals wird nachgewiesen, daß die Schwingungen der dreidimensional ausgedehnten Schale aus den Schwingungen der Mittelfläche, bis auf angebbare Fehler, rekonstruiert werden können. Dazu wird unterschieden, ob eine Schale im biege– oder dehnungsdominanten Zustand schwingt. Für den ersten Fall gelingt die Rechtfertigung des Koiterschen Modell durch die Einführung einer langsamen Zeit unabhängig von der Form der Mittelfläche. Für dehnungsdominante Schwingungen kann das Koitersche Modell nur für Schalen mit positiv gekrümmter Mittelfläche gerechtfertigt werden.

Das mathematische Werkzeug für eine Rechtfertigung der Dimensionsreduktion in der Schalendynamik wird durch die Theorie der Hamiltonschen Systeme bereitgestellt. Wesentlich für den Erfolg ist der Ausbau einer Approximationstheorie in Hamiltonschen Systemen. In dieser Arbeit geschieht dies mit Hilfe der sogenannten Fast–Poisson–Abbildungen, für welche ein mathematisches Fundament gebaut wurde.

Abstract

The subject of this thesis is an investigation of vibrating thin linearly elastic shells in the conservative case. In particular, the behavior of the shell's motions is described when the thickness parameter tends to zero. It turns out that Koiter's model, governing the motion of shell's middle surface is convenient for an approximation of motions inside the three dimensionally extended shell. This approximation property is proved by constructing explicit error bounds with respect to the thickness parameter. The error bounds are given separately for bending and membrane dominated vibrations. In the first case, the dynamics is a slow one and the results hold true for any shape of the middle surface. The membrane dominated vibrations correspond to a fast dynamics of the shell and the error bound is sharp only for elliptic shells.

The underlying mathematical tools are taken from the theory of hamiltonian systems. Based on the concept of the almost Poisson mappings, an approximation method in hamiltonian systems is established.

Kapitel 1

Einleitung

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Analyse von Schwingungen dünner elastischer Schalen im Rahmen der linearisierten Elastodynamik. Die Größe 2ε ist im folgenden ein dimensionsloser Dickenparameter der Schale. In dieser Arbeit interessiert insbesondere die Beschreibung der Schalenbewegungen, wenn ε sehr klein wird. Die betrachtete Schale wird zum Zeitpunkt Null einer Verschiebung und Geschwindigkeit in jedem ihrer Materialpunkte unterworfen. Es wird davon ausgegangen, daß sich die Schale vorher im natürlichen Zustand befindet, d. h., der elastische Körper ist nicht bereits vorgespannt. Damit übernehmen für positive Zeiten die elastischen Kräfte die Rolle einer Rückstellkraft. Insbesondere wird hier von energieverzehrenden Mechanismen, wie von der Reibung und Temperatureinflüssen abgesehen. Damit sind für fortschreitende Zeiten Vibrationen des Körpers um seinen natürlichen Zustand zu erwarten. Das physikalische Problem besteht darin, aus den Anfangsdaten die Lage der Materialpunkte, sowie deren Geschwindigkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt anzugeben. Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe ergibt sich, wenn man zusätzlich zeitlich abhängige Belastungen durch Volumen– und Oberflächenkräfte in Betracht zieht. Hiervon wird abgesehen, da dies einerseits den Charakter eines Hamiltonschen Systems zerstören würde, und andererseits ist das Ziel, den einfachsten Fall zu verstehen. Das soll den Begriff *Eigendynamik* erläutern.

1.1 Das Reduktionsproblem

Wenn ε nur klein genug ist, liegt es wegen der Kontinuumshypothese [32] nahe, die aktuelle Lage eines jeden Materialpunktes in der Schale aus der aktuellen Lage des nächsten Punktes in der Mittelfläche zu rekonstruieren. Der Gegenstand des Reduktionsproblems in der Theorie dünner elastischer Körper ist also die strenge Rechtfertigung eines assoziierten dimensionsreduzierten Problems. Insbesondere versteht man darunter eine Konvergenzaussage für Lösungen des dreidimensionalen Ausgangsproblems. Ein weiterer zusätzlicher Punkt, der vor allem den Anwender interessiert, ist die Angabe einer Fehlerabschätzung für die Approximation.

Hierbei sollte betont werden, daß als Ausgangspunkt beim Reduktionsproblem stets ein dreidimensionaler, wenn auch dünner Körper betrachtet wird. Die Bewegung selbst hat dabei dem Ha-

miltonschen Prinzip [24] zu folgen. Sicherlich können bereits im Ausgangspunkt physikalische oder mechanische Annahmen getroffen werden, so etwa über die Größenordnung der Verschiebungen selbst.

1.2 Hauptresultate und Gliederung

Das Reduktionsproblem konnte für Schalen aus homogenem, isotropem Material im Rahmen der linearisierten Elastodynamik zufriedenstellend geklärt werden. Es wird gezeigt, daß mit Hilfe des Koiterschen Modells, vergleiche §4, bis auf kleine Fehler die Rekonstruktion der Bewegung der dreidimensional ausgedehnten Schale gelingt. Wegen der Anwesenheit von zwei Längenskalen (eine große in der Mittelfläche, eine kleine in der Dickenrichtung) in der Schale, ist es sinnvoll, das Reduktionsproblem auf zwei Zeitskalen getrennt zu diskutieren. In der langsamen Zeit $\tau = \varepsilon t$ ist der Approximationsfehler von der Größenordnung $\varepsilon^{1/5}$ in der H^1–Norm für die dicke Schale. Die Gültigkeit der Approximation erstreckt sich über Zeiten t der Größenordnung $1/\varepsilon$ für $\varepsilon \to 0$. Siehe hierzu den Satz 7.1.10 auf Seite 93. Für glatte Mittelflächen ist das Ergebnis korrekt ohne Einschränkung auf deren Form. Für die schnelle Dynamik, d. h. , in der unskalierten Zeit ist der Approximationsfehler von der Ordnung $\varepsilon^{1/4}$ und die Approximation gilt für Zeiten t der Größenordnung 1 für $\varepsilon \to 0$. In der vorliegenden Arbeit kann der Beweis hierzu nur für sogenannte elliptische Schalen erbracht werden. Darüber hinaus ist der Fehler für die Transversalkomponente nur in der L^2–Norm der dicken Schale. Siehe hierzu den Satz 7.2.11 auf Seite 99.

Die gewählte Methode, welche zum Erfolg führt, benutzt einen neuen Zugang zu Approximationen in Hamiltonschen Systemen. Es handelt sich dabei um das Konzept der sogenannten *Fast–Poisson–Abbildungen*. Diese sind erstmals in GE & SCOVEL [22] und in GE, KRUSE & MARSDEN [21] eingeführt. Die explizite Konstruktion einer solchen Approximation für den Schalenfall gelingt mit dem sogenannten Direktoransatz, vergleiche ab Seite 71 für Details.

1.2.1 Kurzbeschreibung der Approximation

Es bezeichne $\boldsymbol{u}(\varepsilon, t)$ die zu approximierenden Verschiebungsfelder der betrachteten Schale, deren Ausgangsform über $\Omega := \omega \times (-1, 1), \omega \subset \mathbb{R}^2$, parametrisiert ist. Für ausreichend kleine $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{x} := (\boldsymbol{y}, x_3)$ mit $\boldsymbol{y} \in \omega$ und $x_3 \in (-1, 1)$ setze

$$j\boldsymbol{\zeta}\big(\varepsilon, \boldsymbol{x}, t\big) := \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y}, t) + \varepsilon x_3 \boldsymbol{\zeta}^1(\boldsymbol{y}, t) + (\varepsilon x_3)^2 \boldsymbol{\zeta}^2(\boldsymbol{y}, t) + (\varepsilon x_3)^3 \boldsymbol{\zeta}^3(\boldsymbol{y}, t)\,. \tag{1.1}$$

Die Größen $\boldsymbol{\zeta}$ und $\boldsymbol{\zeta}^p, p = 1, 2, 3$, besitzen die Gestalt

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y}, t) = \zeta_i(\boldsymbol{y}, t)\boldsymbol{a}^i(\boldsymbol{y})\,.$$

Es gilt die Summationskonvention. Griechische Indizes und Exponenten (ausgenommen ε) gehören zu $\{1, 2\}$, lateinische dagegen zu $\{1, 2, 3\}$. Mit $\{\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{y})\}$ ist eine kovariante

Basis der Tangentialebene $T_{\boldsymbol{y}}S$ an die Schalenmittelfläche S bezeichnet. Der Vektor $\boldsymbol{a}^3(\boldsymbol{y})$ ist der Normalenvektor an $T_{\boldsymbol{y}}S$. In der vorliegenden Arbeit gilt $\zeta_3^3(\boldsymbol{y},\, t) \equiv 0$. Diese Wahl ist im Kapitel 6 erläutert. Wären alle anderen Einträge auf der rechten Seite von (1.1) frei, so würde (1.1) zu einer sogenannten *Schalentheorie mit elf Freiheitsgraden* führen. In der vorliegenden Arbeit sind allerdings nur die drei Komponenten von $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y},\, t)$ frei. Die Felder $\boldsymbol{\zeta}^1$, $\boldsymbol{\zeta}^2$ und $\boldsymbol{\zeta}^3$ werden in diesem Zusammenhang als *Schalendirektoren* bezeichnet. Diese hängen explizit von $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y},\, t)$ und dessen Ortsableitungen ab. Die Schalendirektoren sind also für jedes gegebene $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y},\, t)$ bekannt. Der genaue Zusammenhang ist im Kapitel 6, Abschnitt 2 erklärt. Mit

$$\big(\boldsymbol{A}^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}\big)(\varepsilon,\, \boldsymbol{x},\, t) = \big(j\boldsymbol{\zeta}\big)(\varepsilon,\, \boldsymbol{x},\, t) + \boldsymbol{U}(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{x},\, t) \tag{1.2}$$

ist die typische Approximation bezeichnet. Mit $\boldsymbol{U}$ ist hier ein Randkorrektor bezeichnet. Dieser ist so zu wählen, daß

$$\Big(j\boldsymbol{\zeta}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{x},\, t\big) + \boldsymbol{U}(\varepsilon,\, \boldsymbol{x},\, t)\Big)\big|_{\partial\omega\times(-1,\,1)} \equiv 0$$

gilt, und daß zur Herstellung der Verschiebung $\boldsymbol{U}$ in der Schale ausreichend wenig Energie verbraucht wird. Mehr Details zur Wahl der Randkorrektoren sind im Kapitel 6, Abschnitt 4 und Kapitel 7 beschrieben.

Mit der Approximation aus (1.2) gelingt es z. B. für die langsame Dynamik ein Resultat folgender Gestalt zu erhalten.

Gegeben seien: $T > 0$ und Anfangsbedingungen für das Ausgangsproblem, die eine geeignete Asymptotik in ε aufweisen, siehe hierzu die Hypothese 7.1.1.

Dann:

- Es lassen sich Anfangsbedingungen (über ω) für das Koitersche Modell konstruieren.
- Das Koitersche Modell besitzt zu diesen Anfangsbedingungen genau eine Lösung $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon t)$ (für alle Zeiten).
- Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Konstante $C > 0$, so daß für das zu approximierende Feld $\boldsymbol{u}$ die Abschätzung

  $$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon, \varepsilon t) - A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon t)\|_{H^1(\Omega)} \le C\varepsilon^{1/5} \tag{1.3}$$

  für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ und alle $t \in [0,\, T/\varepsilon]$ gilt.

Eine ähnliche Abschätzung gilt auch für die zugehörigen Geschwindigkeitsfelder. Resultate für die schnelle Dynamik sind gleichen Typs.

Die Abschätzung (1.3) stellt also eine Rechtfertigung einer Schalentheorie mit elf Freiheitsgraden dar. Problematisch ist jedoch die Tatsache, daß die Approximation $A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon t)$ in (1.3) die

Randkorrektoren enthält. Von diesen können neben der Existenz noch einige wichtige Eigenschaften gewonnen werden, nicht aber eine vetretbar einfache Gleichungen zur deren Bestimmung. Es liegen aber genügend Erkenntnisse vor, um zu zeigen, daß das sogenannte Kirchhoff–Love–Feld der gleichen Fehlerabschätzung genügt, wie $A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon t)$ selbst. Es gilt auch

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon, \varepsilon t) - \boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon t)\big)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1/5} \tag{1.4}$$

unter gleichen Bedingungen wie in (1.3). Dabei gilt

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) := \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) - \varepsilon x_3\big(\zeta^\varepsilon_{3|\alpha}(\tau) + b^\beta_\alpha \zeta^\varepsilon_\beta(\tau)\big)\boldsymbol{a}^\alpha\,.$$

Mit b^β_α sind die gemischten Komponenten des Krümmungstensors der Schalenmittelfläche bezeichnet. Das Symbol $|$ im Index kennzeichnet die kovariante Differentiation auf derselben.

Der gewählte Zugang weist das Koitersche Schalenmodell aus als ein geeignetes zur Beschreibung der Schalendynamik. Es kann nicht geschlossen werden, daß dieses Modell das einzige mit dieser Eigenschaft ist. So könnte z. B. Nagdhis Schalenmodell, siehe [48] zur selben Erkenntnis führen. Das Koitersche Modell ergibt sich in der nachfolgenden Analyse aus dem dreidimensionalen Modell, ohne zusätzliche Annahmen heuristischer Natur. Eine solche Herleitung des Nagdhi–Modells ist mir nicht gelungen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß zur Herleitung von (1.4) im allgemeinen mindestens „elf Freiheitsgrade“ erforderlich sind. Meine Vermutung ist, daß eine Herleitung von (1.4) mit weniger als „elf Freiheitsgraden“ nur dann möglich ist, wenn man zusätzliche Informationen hat, etwa über die Spannungsverteilungen über die Schalendicke oder über die Schalengeometrie.

1.2.2 Weitere Ergebnisse

Ein weiterer Aspekt ist die Tatsache, daß das Koitersche Modell selbst singulär gestörter Natur ist. Wenn Lösungen singulär gestörter Probleme mittels asymptotischer Entwicklungen approximiert werden, so wird typischerweise versucht, die auftretenden Grenzschichten zu extrahieren. In der vorliegenden Arbeit wird hiervon abgesehen. Insbesondere wird dadurch ein möglicher Typwechsel der zugrundeliegenden Differentialgleichung im Koiterschen Problem vermieden. Das erklärt zum Teil die Konverenzaussage für Schalen beliebiger Mittelfläche. Darüber hinaus scheint die Grenzschicht des Koiterschen Modells den dominanten Teil der Grenzschicht des Ausgangsproblem so gut zu approximieren, daß keine explizite Berechnung von weiteren Grenzschichtprofilen erforderlich ist. Aus technischen Gründen werden lediglich Randkorrektoren benötigt.

Der Nachteil des gewählten Zugangs liegt im Aufwand, präzise Abschätzungen für die höheren Sobolevnormen für Lösungen des Koiterschen Problems nachzuweisen. Insbesondere muß die ε–Abhängigkeit explizit kontrolliert werden. Das ist der Inhalt des Kapitels vier.

Die mathematische Abhandlung der genannten Ergebnisse ist im wesentlichen in den Kapiteln zwei, vier, sechs und sieben enthalten. Der Inhalt des Kapitels zwei befaßt sich mit der Approximation in Hamiltonschen Systemen. Der erste Teil davon behandelt eine Möglichkeit, den

Fast–Poisson–Abbildungen ein mathematisches Fundament zu bauen. Der zweite Teil befaßt sich mit hinreichenden Bedingungen, welche die Fast–Poisson–Eigenschaft sichern. In der Klasse der semilinearen Probleme mit ausreichend flachen Nichtlinearitäten können die Ergebnisse von KIRRMANN, SCHNEIDER & MIELKE [27] und MIELKE & SCHNEIDER [47] herangezogen werden, siehe hierzu Kapitel 2, Abschnitt 3. Offen bleibt der quasilineare Fall. Trotz nur schwacher Voraussetzungen an die Lösungen des zu approximierenden Problems, ist es nicht gelungen, für die geometrisch nichtlineare Elastizität im Dreidimensionalen eine rigorose Approximation zu konstruieren.

Die Kapitel drei bis sieben sind der Schalentheorie im Rahmen der linearen Elastodynamik gewidmet. Die Hauptergebnisse sind die oben genannten. Dabei ist zu betonen, daß die einzigen Inputdaten aus der Geometrie der Schale, deren Einspannung und den Anfangsdaten bestehen. In der vorliegenden Arbeit ist der Fall der sogenannten harten Einspannung diskutiert. Die Methode ist aber auch für andere seitliche Randbedingungen geeignet.

Wegen der ε–Abhängigkeit der Lösungen des Koiterschen Problems sind die Kapitel vier, sechs und sieben von technischen Einzelheiten geprägt. Wesentlich für das Verständis des Zugangs ist der Abschnitt §2.3.3 aus dem Kapitel zwei, dort insbesondere die Identität (2.35). Aus den restlichen Kapitel ist die Verbindung zwischen dem Koiterschen Modell und der dreidimensionalen Elastizität unerläßlich. Damit ist die Beweisidee der Hauptsätze in den Abschnitten §7.1.3 und §7.2.3 ersichtlich.

1.2.3 Bemerkungen

Es ist schwierig, einen Vergleich mit anderen Arbeiten auf diesem Gebiet zu ziehen. Gemessen an der Zahl der Veröffentlichungen über die Statik von Platten– und Schalenproblemen, gibt es relativ wenige Arbeiten zu deren Dynamik im Rahmen mathematischer Literatur. Die meisten davon befassen sich tatsächlich nicht mit dem Zusammenhang zum Bewegungsgesetz eines dreidimensionalen dünnen Körpers. Vielmehr werden zweidimensionale Modelle studiert, die mit heuristischen Annahmen geometrischer und mechanischer Natur ad hoc hergeleitet sind. Veröffentlichungen, die sich tatsächlich mit der Konvergenz der dreidimensionalen zu einer zweidimensionalen Dynamik bei Platten und Schalen beschäftigen, sind sehr rar. Das bisher einzige, mir bekannte rigorose Ergebnis für die Plattendynamik wurde von RAOULT [51] publiziert. Dort wird unter anderem ein Modell für die Biegeschwingung von Platten hergeleitet, das eine Rotationsträgheit enthält. Im Zusammenhang mit der Schalendynamik müssen die Arbeiten von XIAO [60, 61, 62] erwähnt werden. Die bisher einzig erschienene Arbeit aus dieser Serie befaßt sich mit der Dynamik linearelastischer elliptischer Schalen. Die dort benutzte Methode erlaubt zwar eine Konvergenzaussage, aber keine Fehlerabschätzung.

Im Gegensatz zu den genannten Publikationen, wird in der vorliegenden Arbeit ein hoher Anteil an Mechanik miteinbezogen. Es stellt sich heraus, daß alle relevanten Größen aus der Schalentheorie, welche eine mechanische Interpretation erlauben, wesentlich bessere Eigenschaften aufweisen, als die von der Mechanik losgelösten. So tritt das Phänomen auf, daß bestimmte Kombinationen von Ableitungen klein sind, obwohl das für die zugrundeliegenden Funktionen

nicht gezeigt werden kann. In diesem Sinne folgen die Beweise an entscheidenden Stellen der Schalenmechanik.

Kapitel 2

Eine Approximation in Hamiltonsystemen

Die zentrale Rolle in diesem Kapitel spielt ein abstrakter Satz über eine Approximation in Hamiltonsystemen, siehe Satz 2.2.2 auf Seite 17. Der Anstoß hierfür geht auf die Arbeiten von GE & SCOVEL [22] und GE, KRUSE & MARSDEN [21] zurück. In der letzteren wurde ein neues Konzept, nämlich das der Fast–Poisson–Abbildungen, benutzt, um dimensionreduzierte Modelle dünner elastischer Körper herzuleiten. Dortige Ergebnisse sind jedoch nur formaler Natur. Im ersten Teil dieses Kapitels sind die notwendigen Definitionen und Eigenschaften unendlichdimensionaler Hamiltonsysteme zusammengetragen. Im zweiten Abschnitt wird eine Möglichkeit aufgezeigt den Fast–Poisson–Abbildungen ein mathematisches Fundament zu bauen. Als eine Konsequenz ergibt sich der zentrale Satz 2.2.2. Da sich dessen wesentliche Voraussetzungen, nämlich eine sogenannte Fast–Poisson–Eigenschaft von Approximationen, relativ technisch gestaltet, werden im dritten Abschnitt hinreichende Bedingung für diese bereitgestellt. Hierbei wird die Verbindung zur Arbeit von MIELKE & SCHNEIDER [47] hergestellt. Es wird gezeigt, daß mindestens im semilinearen Fall der Zugang in [47, 27] den hier vorliegenden umfaßt.

2.1 Abstrakte Hamiltonsysteme

In der späteren Anwendung wird die Hamiltonsche Struktur der Elastodynamik [55] hyperelastischer Materialien [13] benutzt. Daher werden zuerst einige Grundbegriffe eingeführt, die für das Verständnis der Methode notwendig sind. Mehr Details zu den folgenden Ausführungen findet man in MARSDEN & HUGHES resp. MARSDEN & RATIU [41, 42], insbesondere in den Kapiteln 5 resp. 2. Es geht darum, die Maschinerie der Hamiltonsysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden auf unendlichdimensionale Systeme zu übertragen. Einschlägige Hinweise und Anwendungen findet man etwa in [41, 42] sowie in [49, 45, 31].

2.1.1 Grundlegendes Material

Als erstes werden die symplektischen Formen auf Banachräumen eingeführt.

Definition 2.1.1 *Es sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum. Eine beschränkte Bilinearform*

$$\Theta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

nennt man genau dann eine schwache symplektische Form *auf $\mathcal{X}$, wenn sie schiefsymmetrisch und schwach nichtentartet ist, d. h. , wenn*

(i) $\Theta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\Theta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$ *und*

(ii) $\Big(\Theta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{X} \Big) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} = 0$

gilt. Das Paar $(\mathcal{X}, \Theta)$ wird als Phasenraum *oder auch als* symplektischer Banachraum *bezeichnet.*

Für einen beliebigen Banachraum $\mathcal{X}$ mit dem (topologischen) Dualraum $\mathcal{X}'$ schreibt man die Dualpaarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}' \times \mathcal{X} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{X}', \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} .$$

Soll spezifiziert werden, auf welchem Raum die Dualform gebildet wird, so schreibt man auch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$.

Notation 2.1.2 *Es bezeichnen $\boldsymbol{V}$ und $\dot{\boldsymbol{V}}$ zwei reflexive Banachräume, wobei $\boldsymbol{V}$ dicht in $\dot{\boldsymbol{V}}$ liegt und die Einbettung $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \dot{\boldsymbol{V}}$ stetig ist.*

Die Bezeichnung $\dot{\boldsymbol{V}}$ soll darauf hindeuten, daß dies der Raum der Impulse ist.

Beispiel

a) Setze $\mathcal{X} := \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}'$ und definiere

$$\Theta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit}$$
$$\Theta\big((\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_1), (\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}_2)\big) := \langle \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} - \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_2 \rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} . \tag{2.1}$$

Dann ist Θ eine schwache symplektische Form auf $\mathcal{X}$. Ein solches Θ nennt man auch *kanonische symplektische Form*.

b) Es sei $\mathcal{X} := \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}$. Falls $(\cdot, \cdot) : \dot{\boldsymbol{V}} \times \dot{\boldsymbol{V}} \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, schwach nichtentartete Bilinearform ist, dann ist

$$\Theta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit}$$
$$\Theta\big((\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}), (\boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}})\big) := (\dot{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{u}) - (\dot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \tag{2.2}$$

eine schwache symplektische Form auf $\mathcal{X}$. Ist $\dot{\boldsymbol{V}}$ sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, dann läßt sich (2.1) mit (2.2) identifizieren.

Im folgenden wird die Definition der ersten Variation und der Gâteaux–Ableitung wiederholt, siehe dazu ZEIDLER, [64], §2.1.

Definition 2.1.3 *Es sei $\mathcal{U}(\boldsymbol{u}_0)$ eine offene Umgebung in einem normierten Raum $\mathcal{X}$, welche einen festen Punkt $\boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{X}$ enthält. Ferner sei $H : \mathcal{U}(\boldsymbol{u}_0) \to \mathbb{R}$ ein vorgegebenes Funktional. Für ein festes $\underline{\boldsymbol{h}} \in \mathcal{X}$ setzt man*

$$\xi(\tau) := H(\boldsymbol{u}_0 + \tau \underline{\boldsymbol{h}}) \,,$$

wobei τ zu einer offenen Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$ gehört. Wenn $\xi'(0)$ existiert, dann nennt man

$$DH(\boldsymbol{u}_0)[\underline{\boldsymbol{h}}] := \xi'(0)$$

die erste Variation *(Richtungsableitung) von H an der Stelle $\boldsymbol{u}_0$ in die Richtung $\underline{\boldsymbol{h}}$. Weiter sagt man, daß H an der Stelle $\boldsymbol{u}_0$ eine* Gâteaux- *oder* Funktionalableitung $\boldsymbol{d}H(\boldsymbol{u}_0) = \dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0)$ *besitzt, genau dann, wenn*

(i) $DH(\boldsymbol{u}_0)[\underline{\boldsymbol{h}}]$ *existiert für jedes $\underline{\boldsymbol{h}} \in \mathcal{X}$ und*

(ii) ein stetiges lineares Funktional $\boldsymbol{d}H(\boldsymbol{u}_0)$ auf $\mathcal{X}$ existiert, so daß

$$DH(\boldsymbol{u}_0)[\underline{\boldsymbol{h}}] = \langle \boldsymbol{d}H(\boldsymbol{u}_o), \underline{\boldsymbol{h}} \rangle_{\mathcal{X}} \qquad \forall\, \underline{\boldsymbol{h}} \in \mathcal{X}$$

besteht.

In der vorliegenden Arbeit interessiert insbesondere der Fall $\mathcal{X} = \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}'$. Hier hat man dann $\boldsymbol{u}_0 = (\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)$ und $\underline{\boldsymbol{h}} = (\boldsymbol{h}, \dot{\boldsymbol{h}}) = (\boldsymbol{h}, 0) + (0, \dot{\boldsymbol{h}})$ und dadurch auch auf natürliche Weise partielle Richtungsableitungen von H, nämlich

$$D_1 H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)[\boldsymbol{h}] = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Big(H(\boldsymbol{q}_0 + \tau \boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}_0) - H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0) \Big) \tag{2.3a}$$

und

$$D_2 H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)[\dot{\boldsymbol{h}}] = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Big((H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0 + \tau \dot{\boldsymbol{h}})) - H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0) \Big) \,. \tag{2.3b}$$

Analog zur obigen Definition macht es nun auch hier Sinn, von partiellen Gâteaux– oder Funktionalableitungen zu sprechen. Man sagt, daß H an der Stelle $\boldsymbol{u}_0 = (\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)$ die partiellen Funktionalableitungen $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}(\boldsymbol{u}_0)$ resp. $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}(\boldsymbol{u}_0)$ besitzt, wenn

(i) $D_1 H(\boldsymbol{u}_0)[\boldsymbol{h}]$ resp. $D_2 H(\boldsymbol{u}_0)[\dot{\boldsymbol{h}}]$ existiert für jedes $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V}$ resp. $\dot{\boldsymbol{h}} \in \dot{\boldsymbol{V}}'$,

(ii) ein stetiges lineares Funktional $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}(\boldsymbol{u}_0)$ auf $\boldsymbol{V}$ resp. $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}(\boldsymbol{u}_0)$ auf $\dot{\boldsymbol{V}}'$ existiert, so daß

$$D_1 H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)[\boldsymbol{h}] = \langle \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0),\, \boldsymbol{h} \rangle_{\boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V} \tag{2.4a}$$

resp.

$$D_2 H(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)[\dot{\boldsymbol{h}}] = \langle \dot{\boldsymbol{h}},\, \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0) \rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} \quad \forall \dot{\boldsymbol{h}} \in \dot{\boldsymbol{V}}' \tag{2.4b}$$

besteht.

Bemerkung

a) Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden in Zukunft die Argumente bei Funktionalableitungen ausgelassen.

b) Wegen der Reflexivität von $\dot{\boldsymbol{V}}$ ist die Ableitung $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}$ auch als ein Element von $\dot{\boldsymbol{V}}$ selbst aufzufassen.

Notation 2.1.4 *Es bezeichnen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ zwei reflexive Banachräume, wobei $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ dicht und stetig vorausgesetzt wird. Ferner bezeichnet in Zukunft $\mathcal{D}$ stets eine nichtleere in $\mathcal{Y}$ offene Menge. Die gleichen Eigenschaften sollen auch dann zutreffen, wenn die obigen Räume mit Indizes versehen sind.*

In der nächsten Definition werden die Hamiltonschen Operatoren eingeführt.

Definition 2.1.5 *Es sei Θ eine symplektische Form auf $\mathcal{X}$ und $\boldsymbol{X} : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ eine gegebene Abbildung. Dann heißt $\boldsymbol{X}$ ein* Hamiltonscher Operator*, genau dann, wenn ein Gâteaux–differenzierbares Funktional $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ existiert, so daß*

$$\Theta(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{u}),\, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{d}H(\boldsymbol{u}),\, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{X}} \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathcal{D},\ \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{Y} \tag{2.5}$$

gilt. In diesem Fall schreibt man $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_H$.

Bemerkung

a) Die Eindeutigkeit von $\boldsymbol{d}H$ folgt aus der Nichtentartungsbedingung von Θ sowie aus der Dichtheit von $\mathcal{Y}$.

b) Die Gleichung (2.5) besagt, daß im dort angegebenen Sinne $\boldsymbol{X}$ ein *Gradientenfeld* zum *Potential* H ist. Die Abbildung H nennt man ein *Hamilton–Funktional* oder auch eine *Energie* von $\boldsymbol{X}_H$. Im endlichdimensionalen Fall ist $\boldsymbol{X}_H$ eher als Hamiltonsches Vektorfeld bekannt. Diese Bezeichnung soll gelegentlich auch im vorliegenden Fall benutzt werden.

c) Natürlich ist nicht jedes Vektorfeld $\boldsymbol{X}$ automatisch ein Hamiltonscher Operator. Für $\mathcal{C}^1$–Vektorfelder (im Sinne von Fréchet) ist in [41], Kapitel 5, Theorem 3.2 ein Kriterium angegeben, wann dies zutrifft.

Die folgende Definition lokaler Flüsse ist aus [41], Seite 262.

Definition 2.1.6 *Es sei $\mathfrak{D}$ offen in $\mathcal{Y} \times \mathbb{R}$. Ein stetiger lokaler Fluß in $\mathcal{Y}$ ist eine Abbildung*

$$F : \mathfrak{D} \subset \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \to \mathcal{Y}\,,$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathcal{Y} \times \{0\} \subset \mathfrak{D}$ *und* $F(\boldsymbol{u},\, 0) = \boldsymbol{u} \qquad \forall\, (\boldsymbol{u}\,, 0) \in \mathfrak{D}\,,$

(ii) $\Big(F(\boldsymbol{u},\, t) \in \mathfrak{D} \;\Rightarrow\; F(\boldsymbol{u},\, t+s) \in \mathfrak{D} \Big) \;\Leftrightarrow\; (F(\boldsymbol{u},\, t),\, s) \in \mathfrak{D}$ *und es gilt*

$$F(\boldsymbol{u},\, t+s) = F\big(F(\boldsymbol{u},\, t),\, s\big)\,.$$

Bemerkung

a) In der vorliegenden Arbeit wird statt $F(\boldsymbol{u},\, t)$ auch $F^t\boldsymbol{u}$ geschrieben.

b) Für ein festes $\boldsymbol{u} \in \mathcal{Y}$ kann nachgewiesen werden, daß diejenigen Zeiten $t \geq 0$, für die der lokale Fluß F^t existiert, ein Intervall $[0,\, T_{\boldsymbol{u}})$ bilden. Die obere Schranke des Existenzintervalls wird als die *Lebenszeit* von $\boldsymbol{u}$ bezeichnet.

Hamiltonsche Operatoren können im folgenden Sinne lokale Flüsse erzeugen.

Definition 2.1.7 *Ein Hamilton–Operator* $\boldsymbol{X}_H :\; \mathcal{Y} \supset \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *heißt* Erzeuger *eines lokalen Flusses* F^t*, wenn für alle* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}$ *und* $t \in (-T_{\boldsymbol{u}},\, T_{\boldsymbol{u}})$ *die Beziehung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{X}_H\big(F^t\boldsymbol{u}\big) \tag{2.6}$$

besteht.

Bemerkung

a) Die Abbildung

$$F(\boldsymbol{u},\, \cdot\,) :\, [0,\, T_{\boldsymbol{u}}) \to \mathcal{X} \qquad \text{mit} \qquad t \mapsto F(\boldsymbol{u},\, t) = F^t\boldsymbol{u}$$

nennt man eine *Integralkurve* von $\boldsymbol{X}_H$ durch $\boldsymbol{u}$.

b) Wenn zum Hamilton–Operator $\boldsymbol{X}_H$ die Energie H gehört, dann sagt man auch, daß H einen Fluß F^t erzeugt, wenn die obige Beziehung (2.6) besteht.

c) Im Zusammenhang von (2.6) wird bei F^t auch von einem *Hamiltonschen Fluß* oder gelegentlich auch von einer *Hamiltondynamik* gesprochen.

Korollar 2.1.8 *Es sei* $\mathcal{X} = \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}'$ *und das Funktional* $H :\, \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *sei Gâteaux-differenzierbar. Bezüglich der kanonischen symplektischen Form* Θ *ist dann der zugehörige Hamilton–Operator* $\boldsymbol{X}_H :\, \mathcal{D} \to \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}'$ *für jedes* $(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) \in \mathcal{D}$ *durch*

$$\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) = \Big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0),\, -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) \Big) \tag{2.7}$$

gegeben.

Beweis. Es seien $(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) \in \mathcal{D}$ und $(\boldsymbol{h},\, \dot{\boldsymbol{h}}) \in \mathcal{Y} \subset \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}'$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Theta\Big(\big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0),\, -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)\big),\, (\boldsymbol{h},\, \dot{\boldsymbol{h}})\Big) &= \langle \dot{\boldsymbol{h}},\, \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)\rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} - \langle -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0),\, \boldsymbol{h}\rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} \\ &= \langle \boldsymbol{d}H(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0),\, (\boldsymbol{h},\, \dot{\boldsymbol{h}})\rangle_{\mathcal{X}}\,.\end{aligned}$$

Aus der Nichtentartetheit von Θ folgt dann (2.5) nur für $\boldsymbol{X}_H$ wie in der Behauptung angegeben. ■

Korollar 2.1.9 *Die Voraussetzungen des Korollars 2.1.8 mögen gelten. Der dort gegebene Hamiltonsche Operator erzeuge einen Fluß* $F^t(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{p}) =: \big(\boldsymbol{q}(t),\, \boldsymbol{p}(t)\big)$ *. Entlang dieses Flusses gelten dann die Beziehungen*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{q}(t) = \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}\big(\boldsymbol{q}(t),\, \boldsymbol{p}(t)\big) \qquad \textit{in} \quad \dot{\boldsymbol{V}}\,, \tag{2.8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{p}(t) = -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}\big(\boldsymbol{q}(t),\, \boldsymbol{p}(t)\big) \qquad \textit{in} \quad \dot{\boldsymbol{V}}'\,. \tag{2.8b}$$

Im folgenden sollen noch häufig verwendete Begriffe festgehalten werden.

Definition 2.1.10 *Es sei* $(\mathcal{X},\, \Theta)$ *ein Phasenraum, und* $\boldsymbol{X}_H$ *sei bezüglich* Θ *ein Hamiltonscher Operator zum Hamilton–Funktional* H *. Dann nennt man das Tripel*

$$\mathfrak{H} := (\mathcal{X},\, \Theta,\, \boldsymbol{X}_H)$$

ein Hamiltonsches System. *Ist* $\mathcal{X}$ *zusätzlich der Gestalt*

$$\mathcal{X} = \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}'\,,$$

und ist Θ *die kanonische symplektische Form auf* $\mathcal{X}$ *, so spricht man von einem* kanonischen Hamiltonschen System. *In diesem Fall bezeichnet man* $\boldsymbol{V}$ *auch als den* Konfigurationsraum *des Systems.*

Bemerkung

a) Wenn ein Hamiltonsches System einen Fluß F^t erzeugt, dann muß entlang von diesem die Beziehung (2.6) gelten. Daher wird gelegentlich das Gleichungssystem (2.6) bzw. im Falle eines kanonischen Systems die Differentialgleichungen (2.8) selbst als ein Hamiltonsches System bezeichnet.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $2n$ –dimensionale (d. h. $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{V}}' = \mathbb{R}^n$) kanonische Hamiltonsysteme können die Funktionalableitungen in (2.8) mit den klassischen partiellen Ableitungen identifiziert werden. Mit kanonischen Variablen $(q_1, \ldots\,,\, q_n, p_1, \ldots\,,\, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ reduziert sich das System (2.8) zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q_\ell &= \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p_\ell &= -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \qquad \textit{für} \quad \ell = 1,\, \ldots\,,\, n\,.\end{aligned}$$

2.1.2 Poisson–Klammer–Kalkül

Das Konzept der *Poisson–Klammer* erlaubt es, in Hamiltonschen Systemen statt der Hamiltonschen Vektorfelder die zugehörigen Potentiale zu verwenden.

Notation 2.1.11 *Von nun an bezeichnen H und K stets Gâteaux–differenzierbare Funktionale auf ihren Definitionsbereichen $\mathcal{D}_H$ resp. $\mathcal{D}_K$. Von diesen wird angenommen, daß sie nichtleer sind, beide in $\mathcal{Y}$ liegen und stets*

$$\mathcal{D}_K \supset \mathcal{D}_H$$

erfüllen. Wenn keine Spezifikation notwendig ist, wird $\mathcal{D} = \mathcal{D}_H$ gesetzt.

Definition 2.1.12 *Es seien $\boldsymbol{X}_H$ und $\boldsymbol{X}_K$ zwei Hamilton–Operatoren auf dem Phasenraum $(\mathcal{X},\, \Theta)$ mit den Definitionsbereichen $\mathcal{D}_H$ und $\mathcal{D}_K$ sowie den zugehörigen Energien H und K. Dann ist die* Poisson–Klammer *$\{H,\, K\}$ von H und K auf $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_K = \mathcal{D}_H$ durch*

$$\{H,\, K\}(\boldsymbol{y}) := \Theta\big(\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{y}),\, \boldsymbol{X}_K(\boldsymbol{y})\big) \tag{2.9}$$

definiert. Ist Θ kanonisch, dann nennt man die zugehörige Poisson–Klammer kanonisch.

Man beachte, daß $\{H,\, K\}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ liegt, d. h. , $\{H,\, K\}$ ist selbst wieder ein Funktional über $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_K$. Ist $\{H,\, K\}$ auch noch Gâteaux–differenzierbar, so existiert dazu ein Hamiltonscher Operator $\boldsymbol{X}_{\{H,\, K\}}$. Es sei G ein weiteres gegebenes Funktional, das die Eigenschaften von K besitzt. Dann macht es, Sinn die Poisson–Klammer

$$\big\{G,\, \{H,\, K\}\big\}$$

zu betrachten. Für solche Funktionale sind die wichtigsten Eigenschaften der Poisson–Klammer in folgender Proposition zusammengefaßt.

Proposition 2.1.13 *Vorgelegt seien drei Funktionale $G,\, H,\, K$, die allesamt denselben Definitionsbereich $\mathcal{D}$ besitzen und darauf zweimal Gâteaux–differenzierbar sind. Dann gelten:*

$$\begin{aligned}
&\{G + H,\, K\} = \{G,\, K\} + \{H,\, K\}\,,\\
&\{H,\, K\} = -\{K,\, H\}\,,\\
&\big\{G,\, \{H,\, K\}\big\} + \big\{H,\, \{K,\, G\}\big\} + \big\{K,\, \{G,\, H\}\big\} = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Weitere Bemerkungen zu diesen Beziehungen findet man in MIELKE [45], Seite 11.

Das Korollar 2.1.8 und die Einführung der Funktionalableitungen erlauben einen Darstellungssatz für die kanonische Poisson–Klammer.

Lemma 2.1.14 *Es sei* $(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)$ *beliebig in* $\mathcal{D}$*. Dann gilt für die Poisson–Klammer bezüglich der kanonischen symplektischen Form* Θ*:*

$$\begin{aligned}\{H,\, K\}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) &= D_{\boldsymbol{q}}H(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)\Big[\frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta p}}\Big] - D_{\boldsymbol{q}}K(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)\Big[\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}\Big] \\ &= \langle \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}},\, \frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta p}}\rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} - \langle \frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta q}},\, \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}\rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}}\,.\end{aligned}$$

Dabei sind alle auftretenden Funktionalableitungen an der Stelle $(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)$ *zu verstehen.*

Beweis. Es sei $(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)$ beliebig in $\mathcal{D}$. Nach dem Korollar 2.1.8 gilt

$$\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) = (\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}},\, -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{X}_K(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) = (\frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta p}},\, -\frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta q}})\,.$$

Es muß (2.9) nachgewiesen werden.

$$\begin{aligned}\{H,\, K\}(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0) &= \Theta\Big(\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0),\, \boldsymbol{X}_K(\boldsymbol{q}_0,\, \boldsymbol{p}_0)\Big) \\ &= \Theta\Big((\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}},\, -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}}),\, (\frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta p}},\, -\frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta q}})\Big) \\ &= \langle -\frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta q}},\, \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta p}}\rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}} - \langle -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta q}},\, \frac{\boldsymbol{\delta} K}{\boldsymbol{\delta p}}\rangle_{\dot{\boldsymbol{V}}}\,.\end{aligned}$$

■

Bemerkung

Für $2n$–dimensionale $(n \in \mathbb{N})$ kanonische Hamiltonsche Systeme ist die kanonische Poisson–Klammer durch

$$\{H,\, K\} = \sum_{\ell=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_\ell}\frac{\partial K}{\partial p_\ell} - \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\frac{\partial K}{\partial q_\ell}\Big) \tag{2.11}$$

gegeben. Hierbei bezeichnen q_ℓ und p_ℓ kanonische Variablen im Phasenraum, vergleiche hierzu Seite 73 in [42]. Die Darstellung im Lemma 2.1.14 gibt somit eine Analogie zu (2.11) in unendlichdimensionalen Systemen.

Die Bedeutung der Poisson–Klammer liegt größtenteils im folgenden Lemma, das die kanonischen Gleichungen alleine mit Hilfe der Potentiale angibt. Es wird garantiert, daß die zeitliche Entwicklung eines Funktionals K entlang des von H erzeugten Hamiltonschen Flusses durch die Poisson–Klammer $\{K,\, H\}$ beschrieben werden kann. Die Beziehung (2.12) spielt die Rolle einer schwachen Formulierung der Evolutionsgleichung (2.6).

Lemma 2.1.15 (CHERNOFF–MARSDEN, 1974) *Der Hamiltonsche Operator* $\boldsymbol{X}_H : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *mit der Energie* $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *sei stetig und erzeuge den stetigen lokalen Fluß* F^t*. Es sei*

$\boldsymbol{X}_K : \mathcal{D}_K \to \mathcal{X}$ ein Hamiltonscher Operator der Klasse $\mathcal{C}^1$ zum Funktional $K : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$. Dann ist $K\big(F^t\boldsymbol{u}\big)$ für jedes $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}$ nach t differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K\big(F^t\boldsymbol{u}\big) = \{K,\, H\}\big(F^t\boldsymbol{u}\big) \tag{2.12}$$

für $0 \le t < T_{\boldsymbol{u}}$, wobei $T_{\boldsymbol{u}}$ die Lebenszeit von $\boldsymbol{u}$ ist.

Einen ersten Beweis für unendlichdimensionale Räume findet man in CHERNOFF & MARSDEN [6]. Für eine verkürzte Version sei auf [41], Seite 264, Theorem 3.6. verwiesen.

Bemerkung

a) Es ist bemerkenswert, daß für die Gültigkeit von (2.12) das Funktional K selbst keinen Fluß erzeugen muß. Es ist lediglich eine stärkere Regularität an $\boldsymbol{X}_K$ vorausgesetzt. Die Schwierigkeit in der Beweisführung des obigen Lemmas liegt in der Nichtverfügbarkeit der Kettenregel für $K\big(F^t\boldsymbol{u}\big)$. Es ist nämlich nur die Stetigkeit von F^t in $\mathcal{Y}$, nicht jedoch dessen Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Damit eignet sich (2.12) zur Beschreibung quasilinearer Probleme.

b) Aus Lemma 2.1.15 folgt die Energieerhaltung entlang des Flusses F^t. Testet man in (2.12) mit $K = H$, dann folgt wegen der Schiefsymmetrie der Poisson–Klammer die Gültigkeit von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H\big(F^t\boldsymbol{u}\big) = 0$ und somit

$$H\big(F^t\boldsymbol{u}\big) = H\big(F^0\boldsymbol{u}\big) = H(\boldsymbol{u})\,. \tag{2.13}$$

c) Mit der Aussage (2.12) folgert man wie in [42], § 10.5, daß ein Hamiltonscher Fluß F^t die Poisson–Klammer respektiert.

Korollar 2.1.16 *Die Voraussetzungen des Lemmas 2.1.15 mögen gelten. Dann gilt*

$$\{K \circ F^t,\, H \circ F^t\}(\boldsymbol{u}) = \{K \circ F^t,\, H\}(\boldsymbol{u}) = \{K,\, H\}\big(F^t\boldsymbol{u}\big) \tag{2.14}$$

für jedes $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}$ und für alle t aus einer ausreichend kleinen Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$.

Abschließend zu diesem Abschnitt sollte noch erwähnt werden, daß die im Vorangegangenen eingeführte Theorie auch auf Banachmannigfaltigkeiten, siehe [33], übertragen werden kann. Explizite Beispiele dafür findet man z. B. in [45], Kapitel 2 und 5 oder in PÖSCHEL & TRUBOWITZ, [50], Anhang C sowie in mehreren Kapiteln von MARSDEN & RATIU, [43].

2.2 Ein Approximationssatz

In diesem Abschnitt wird ein allgemeiner Satz bewiesen, dessen Aussage eine Approximation der Hamiltondynamik auf einem Phasenraum $(\mathcal{X}_2, \Theta_2)$ durch die Dynamik eines zweiten Phasenraums $(\mathcal{X}_1, \Theta_1)$ behandelt. Das mathematische Werkzeug hierzu wird mit Hilfe der sogenannten *Fast–Poisson–Abbildungen* bereitgestellt. Erstmals wurden diese Abbildungen in GE & SCOVEL [22] und in [21] eingeführt. Obwohl deren approximativer Charakter bekannt zu sein scheint, ist es mir nicht möglich gewesen, dafür eine Referenz zu finden.

2.2.1 Das Konzept der Fast–Poisson–Abbildungen

Die Notationen des vorherigen Abschnitts werden verwendet. Es werden zwei Hamiltonsche Systeme $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ mit Phasenräumen $(\mathcal{X}_1, \Theta_1)$ und $(\mathcal{X}_2, \Theta_2)$ betrachtet, welche mit den Poisson–Klammern $\{\cdot, \cdot\}_1$ resp. $\{\cdot, \cdot\}_2$ ausgestattet sind. Die *Poisson–Abbildungen* selbst sind in MARSDEN [44] oder [42], Kapitel 10 eingeführt.

Der Begriff der Poisson–Abbildungen erweist sich als zu stark und daher nicht geeignet für komplexere Probleme, zu welchen auch die Modellierung von Platten und Schalen gehört. Die erforderliche Abschwächung des Begriffs der Poisson–Abbildung wird durch die folgende Definition eingeführt.

Definition 2.2.1 *Gegeben sind:*

- *reflexive Banachräume* $\mathcal{Y}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{X}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ *wie in der Notation 2.1.4,*
- *Phasenräume* $(\mathcal{X}_1, \Theta_1)$ *und* $(\mathcal{X}_2, \Theta_2)$ *mit Poisson–Klammern* $\{\cdot, \cdot\}_1$ *und* $\{\cdot, \cdot\}_2$,
- *ein Banachraum* $\mathcal{W}_1 \hookrightarrow \mathcal{Y}_1$, *dicht und stetig,*
- $T_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(T_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,
- *eine mit* ε *indizierte Familie von Funktionalen* $H_2^\varepsilon : \mathcal{D}_{H_2^\varepsilon} \to \mathbb{R}$. *Dabei ist* $\mathcal{D}_{H_2^\varepsilon}$ *offen in* $\mathcal{Y}_2$,
- *eine mit* ε *indizierte Familie von Funktionalen* $H_1^\varepsilon : \mathcal{D}_{H_1^\varepsilon} \to \mathbb{R}$. *Der Definitionsbereich* $\mathcal{D}_{H_1^\varepsilon}$ *umfaßt* $\mathcal{W}_1$ *und ist offen in* $\mathcal{Y}_1$,
- *eine in* $\mathcal{W}_1$ *offene Menge* $\mathcal{D}_{A^\varepsilon}$ *und eine Abbildung* $A^\varepsilon : \mathcal{D}_{A^\varepsilon} \to \mathcal{X}_2$.

Für ein gegebenes $\kappa > 0$ *heißt* A^ε *eine* $(H_2^\varepsilon, \kappa)$*–Poisson–Abbildung bezüglich* $(H_1^\varepsilon, \mathcal{W}_1)$ *genau dann, wenn* ***(H1)–(H4)*** *erfüllt sind.*

(H1) $H_2^\varepsilon : \mathcal{D}_{H_2^\varepsilon} \to \mathbb{R}$ *erzeugt einen stetigen, lokalen Hamiltonschen Fluß* $F_2^{t,\varepsilon}$ *mit* $F_2^{t,\varepsilon}(0) = 0$, *und das zugehörige Vektorfeld* $X_{H_2^\varepsilon}$ *ist stetig.*

(H2) $H_1^\varepsilon : \mathcal{D}_{H_1^\varepsilon} \to \mathbb{R}$ *erzeugt einen stetigen, lokalen Hamiltonschen Fluß* $F_1^{t,\varepsilon}$ *mit* $F_1^{t,\varepsilon}(0) = 0$ *, und das zugehörige Vektorfeld* $X_{H_1^\varepsilon}$ *ist stetig.*

(H3) A^ε *ist von der Klasse* $\mathcal{C}^1$ *, und es gilt* $A^\varepsilon(\mathcal{D}_{A^\varepsilon}) \subset \mathcal{D}_{H_2^\varepsilon}$ *.*

(H4) *Für das sogenannte* Poisson–Klammer–Residuum

$$r : (0, \varepsilon_0] \times \mathcal{X}_2' \times [-T_0, T_0] \times \mathcal{W}_1 \to \mathbb{R}$$

mit

$$r(\varepsilon, K, s, \boldsymbol{\zeta}) := \{K \circ F_2^{s,\varepsilon}, H_2^\varepsilon\}_2(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}) - \{K \circ F_2^{s,\varepsilon} \circ A^\varepsilon, H_1^\varepsilon\}_1(\boldsymbol{\zeta}) \tag{2.15}$$

existiert eine Konstante $C_{PKR} \geq 0$ *, so daß*

$$\sup_{s \in [-T_0, T_0]} |r(\varepsilon, K, s, \boldsymbol{\zeta})| \leq C_{PKR} \varepsilon^\kappa \|K\|_{\mathcal{X}_2'} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.16}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *, alle* $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ *und alle beschränkten, linearen Funktionale* $K \in \mathcal{X}_2'$ *gilt.*

Bemerkung

a) Die technischen Voraussetzungen in der obigen Definition sichern die Verfügbarkeit der kanonischen Gleichungen nach Lemma 2.1.15.

b) Die Definition ist nicht leer, denn $A^\varepsilon \equiv 0$ ist trivialerweise eine $(H_2^\varepsilon, \kappa)$–Poisson sogar für jedes $\kappa \in \mathbb{R}$, falls $F_2^{t,\varepsilon}(0) \equiv 0$ gilt. Jede nichttriviale Poisson–Abbildung A^ε mit $\mathcal{D}_{A^\varepsilon} = \mathcal{W}_1 = \mathcal{Y}_1$ von $(\mathcal{X}_1, \Theta_1)$ nach $(\mathcal{X}_2, \Theta_2)$ ist eine $(H_2^\varepsilon, \kappa)$–Poisson–Abbildung bezüglich $(H_2^\varepsilon \circ A^\varepsilon, \mathcal{W}_1)$ für jedes $\kappa \in \mathbb{R}$.

c) Wenn es der Kontext erlaubt, wird eine $(H_2^\varepsilon, \kappa)$–Poisson–Abbildung bezüglich $(H_1^\varepsilon, \mathcal{W}_1)$ kurz als eine *Fast–Poisson–Abbildung* bezeichnet.

Das Interesse an der obigen Einführung der Fast–Poisson–Abbildungen spiegelt sich im folgenden Satz und den daraus folgenden Korollaren wieder. Darin wird ein Kriterium angegeben, wann die Kleinheit des Poisson–Klammer–Residuums, die Kleinheit des *Kommutationsfehlers*

$$\|F_2^{t,\varepsilon} \circ A^\varepsilon - A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2}$$

nach sich zieht.

Satz 2.2.2 *Die Bezeichnungen aus der Definition 2.2.1 seien gültig. Es sei* $A^\varepsilon : \mathcal{D}_{A^\varepsilon} \to \mathcal{X}_2$ *eine* $(H_2^\varepsilon, \kappa)$*–Poisson–Abbildung bezüglich* $(H_1^\varepsilon, \mathcal{W}_1)$ *. Für ein* $\nu \in \mathbb{R}$ *mit* $\kappa - \nu > 0$ *existiere eine Konstante* $C_{Reg} > 0$ *, so daß*

$$\|F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \leq C_{Reg} \varepsilon^{-\nu} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1}$$

für alle $t \in [-T_0,\ T_0]$ *, alle* $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ *und alle* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *gilt. Dann existiert ein* $C \geq 0$ *, so daß*

$$|K\big(F_2^{t,\varepsilon} \circ A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big)| \leq C|t|\varepsilon^{\kappa-\nu} \|K\|_{\mathcal{X}_2'} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.17}$$

für jedes $t \in [-T_0,\ T_0]$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$, $K \in \mathcal{X}_2'$ *und* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *besteht.*

Korollar 2.2.3 *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes 2.2.2 mögen gelten. Dann existiert eine Konstante* $C \geq 0$ *, so daß*

$$\|F_2^{t,\varepsilon} \circ A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C\varepsilon^{\kappa-\nu} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.18}$$

für alle $t \in [-T_0,\ T_0]$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ *und* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *gilt.*

Korollar 2.2.4 *Die Voraussetzungen des Satzes 2.2.2 mögen gelten. Der lokale Fluß* $F_2^{t,\varepsilon}$ *auf* $\mathcal{X}_2$ *hänge für* $0 \leq t \leq T_0$ *Lipschitzstetig von den Daten ab. D. h. , zu jedem* $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$ *existiert eine Konstante* $C_1(\varepsilon)$ *, so daß*

$$\|F_2^{t,\varepsilon} \boldsymbol{u}_1 - F_2^{t,\varepsilon} \boldsymbol{u}_2\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_1(\varepsilon) \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathcal{X}_2}$$

für alle $t \in [-T_0,\ T_0]$ *und alle* $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{D}_{H_2^\varepsilon}$ *gilt. Dann ist die Ungleichung*

$$\sup_{t \in [0,\ T_0]} \|F_2^{t,\varepsilon} \boldsymbol{u} - A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_1(\varepsilon) \|\boldsymbol{u} - A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} + C\varepsilon^{\kappa-\nu} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.19}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ *und* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{H_2^\varepsilon}$ *wahr.*

Beweis von Satz 2.2.2 . Es sei

$$M(s,t)[\boldsymbol{\zeta}] := K \circ F_2^{s,\varepsilon} \circ A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}$$

für ein beliebiges $K \in \mathcal{X}_2'$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ und $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$. Dann gilt nach dem Chernoff–Marsden–Lemma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial s}(s,t)[\boldsymbol{\zeta}] &= \{K,\ H_2^\varepsilon\}_2\big(F_2^{s,\varepsilon} \circ A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big) \\ &= \{K \circ F_2^{s,\varepsilon},\ H_2^\varepsilon\}_2\big(A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial M}{\partial t}(s,t)[\boldsymbol{\zeta}] = \{K \circ F_2^{s,\varepsilon} \circ A^\varepsilon,\ H_1^\varepsilon\}_1\big(F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big).$$

Nach Voraussetzung ist für jedes $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ die zugehörige Integralkurve $F_1^{t,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{W}_1$ für $t \in [-T_0,\ T_0]$. Somit folgt

$$\frac{\partial M}{\partial s}(s,t)[\boldsymbol{\zeta}] - \frac{\partial M}{\partial t}(s,t)[\boldsymbol{\zeta}] = r\big(\varepsilon,\ K, s, F_1^{t,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big). \tag{2.20}$$

Mit $\sigma = s+t$, $\tau = s-t$ und $\widetilde{M}(\sigma,\,\tau) := M(\frac{\sigma+\tau}{2},\,\frac{\sigma-\tau}{2})$ geht (2.20) in

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} r\Big(\varepsilon,\, K, \frac{\sigma+\tau}{2}, F_1^{\frac{\sigma-\tau}{2},\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\Big)$$

über. Die allgemeine Lösung ist damit durch

$$\widetilde{M}(\sigma,\tau)[\boldsymbol{\zeta}] = f(\sigma) + \frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} r\Big(\varepsilon,\, K, \frac{\sigma+\tilde{\tau}}{2}, F_1^{\frac{\sigma-\tilde{\tau}}{2},\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\Big)\mathrm{d}\tilde{\tau}$$

gegeben. Die Integrationskonstante $f(\sigma)$ und die Anfangszeit τ_0 sind irrelevant, da nur

$$M(s,t)[\boldsymbol{\zeta}] - M(t,s)[\boldsymbol{\zeta}] = \frac{1}{2}\int\limits_{-(s-t)}^{+(s-t)} r\Big(\varepsilon,\, K, \frac{s+t+\tilde{\tau}}{2}, F_1^{\frac{s+t-\tilde{\tau}}{2},\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\Big)\mathrm{d}\tilde{\tau} \tag{2.21}$$

interessiert. Setzt man nun insbesondere $s=0$ in (2.21) ein, so folgt nun durch Betragsbildung unter Beachtung von $\|F_1^{t,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \le C_{\text{Reg}}\varepsilon^{-\nu}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1}$ und aus der Definition von M die Behauptung z. B. mit $C = C_{\text{Reg}}C_{\text{PKR}}$. ■

Beweis von Korollar 2.2.3 . Nach Voraussetzung ist $\mathcal{X}_2$ reflexiv, siehe Notation 2.1.4. Damit ist sichergestellt, daß die kanonische Einbettung

$$\mathcal{J} : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2''$$

mit

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u})(K) := K(\boldsymbol{u}) \qquad \forall\, K \in \mathcal{X}_2',\, \boldsymbol{u} \in \mathcal{X}_2$$

hier sogar eine bijektive Isometrie ist. Mit

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X}_2} = \|\mathcal{J}(\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{X}_2''} = \sup_{\|K\|_{\mathcal{X}_2'}\le 1} |\mathcal{J}(\boldsymbol{u})(K)| = \sup_{\|K\|_{\mathcal{X}_2'}\le 1} |K(\boldsymbol{u})|$$

folgt speziell für $\boldsymbol{u} := F_2^{t,\varepsilon}\circ A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}$ und der Abschätzung (2.17) die Behauptung. ■

Beweis von Korollar 2.2.4 . Die Fehlerabschätzung (2.19) folgt unmittelbar aus der Anwendung der Dreiecksungleichung (in $\mathcal{X}_2$) auf

$$F_2^{t,\varepsilon}\boldsymbol{u} - A^\varepsilon \circ F_1^{t,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta} = F_2^{t,\varepsilon}\boldsymbol{u} - F_2^{t,\varepsilon}\circ A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta} + F_2^{t,\varepsilon}\circ A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon\circ F_1^{t,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\,.$$

■

Bemerkung

Die rechte Seite in (2.16) braucht nicht linear in $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1}$ zu sein. Prinzipiell könnte dort $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1}$ durch jede andere positive, von ε unabhängige, endliche Größe ersetzt werden. Die Regularitätsbedingung für den Fluß $F_1^{t,\varepsilon}$ im Satz 2.2.2 muß dann entsprechend angepaßt werden.

2.3 Spezielle Systeme

Der Zugang zu Approximationen in Hamiltonschen Systemen wie im vorherigen Abschnitt eingeführt, besitzt für theoretische Zwecke gute Eigenschaften. Der wesentliche Vorteil liegt in der Schwachheit der Voraussetzungen an den zu approximierenden Fluß $F_2^{t,\varepsilon}$, sowie in der Globalität der Poisson–Klammern. Aus der Sicht des Anwenders sind aber Defizite vorhanden. So erscheint nach Meinung des Autors die Methode zu allgemein, um etwa präzise Angaben über den Zusammenhang zwischen der Zeitskala der Approximationsgültigkeit T_0 und dem maximal zulässigen Parameterwert ε_0 zu folgern. Vielmehr ist in der Definition 2.2.1 ein solcher Zusammenhang bereits als bekannt vorausgesetzt. Darüber hinaus ist in der Charakterisierung des Poisson–Klammer–Residuums der unbekannte Fluß $F_2^{t,\varepsilon}$ enthalten.

In diesem Abschnitt geht es darum, leichter zugängliche Charakterisierungen für das Poisson–Klammer–Residuum (2.15) und die Abschätzung (2.16) für spezielle Systeme der Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= L^\varepsilon \boldsymbol{u} + N^\varepsilon \boldsymbol{u} =: X^\varepsilon \boldsymbol{u} \qquad \text{in} \quad \mathcal{X}_2\,, \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

anzugeben. Im wesentlichen kann die Klasse semilinearer Probleme mit ausreichend flachen Nichtlinearitäten abgedeckt werden. Hierbei wird die erforderliche Flachheit der Nichtlinearität durch die gewünschte Zeitskala der Approximationsgültigkeit bestimmt. Die Gründe hierfür sind im Abschnitt §2.3.2 präzise beschrieben.

Die Bezeichnungen des vorherigen Abschnitts gelten. Insbesondere sind die hier auftretenden Funktionenräume und die topologischen Eigenschaften der Definitionsbereiche diejenigen aus der Definition 2.2.1. Wenn über den Parameter ε nichts anderes vermerkt ist, dann gilt stets $0 < \varepsilon \leq 1$.

Hypothese 2.3.1

(H1) *Der lineare Operator L^ε mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_{L^\varepsilon}$ erzeuge in $\mathcal{X}_2$ eine $\mathcal{C}^0$–Gruppe $G_2^\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Für ein gegebenes $\nu_2 \geq 0$ existiere eine Konstante $C_2 > 0$, so daß*

$$\|G_2^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2} \leq C_2 \varepsilon^{-\nu_2}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\,1)$ genügt.

(H2) *Die Abbildungen $N^\varepsilon : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2$ seien von der Klasse $\mathcal{C}^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Für gegebene $C_3 > 0$, $\mu \geq 0$ und $\nu_2 \geq 0$ aus **(H1)** existiere eine Konstante $C_{N^\varepsilon} > 0$, so daß*

$$\|N^\varepsilon(\boldsymbol{u}) - N^\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_{N^\varepsilon} \big(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X}_2} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X}_2}\big)^{\mu+\nu_2} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X}_2} \tag{2.23}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\,1)$ und alle $\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}_2$ mit $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{X}_2}\,,\,\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_3$ gilt.

(H3) *Für jedes $\varepsilon \in (0,\,1)$ bezeichnet $A^\varepsilon : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{X}_2$ mit $A^\varepsilon(\mathcal{W}_1) \subset \mathcal{D}_{L^\varepsilon}$ eine stetig differenzierbare Abbildung (hier auch Approximation genannt).*

(H4) *Mit* $G_1^\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}$ *ist in diesem Abschnitt eine* $\mathcal{C}^0$ *–Gruppe auf* $\mathcal{W}_1$ *bezeichnet. Von dieser wird angenommen, daß für ein gegebenes* $\nu_1 \geq 0$ *eine Konstante* $C_1 > 0$ *existiert, so daß*

$$\|G_1^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_1} \leq C_1 \varepsilon^{-\nu_1}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\ 1)$ *besteht. Der Zusammenhang zu* L^ε *und* A^ε *wird aus* (2.25) *klar.*

(H5) *Mit* $F_1^{t,\varepsilon}$ *sei ein differenzierbarer lokaler Fluß in* $\mathcal{W}_1$ *bezeichnet.*

Bemerkung

a) Das Verhalten $\|G_2^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\nu_2})$ in **(H1)** und $\|G_1^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\nu_1})$ in **(H4)** (jeweils für $\varepsilon \to 0$) besagt, daß sowohl $G_2^\varepsilon(t)$ als auch $G_1^\varepsilon(t)$ Lösungsoperatoren singulär gestörter Probleme darstellen können.

b) Die Zahl μ in **(H2)** soll die gewünschte Zeitskala für die Gültigkeit der Approximation kennzeichnen. Es wird später verlangt, daß die Approximation für alle $t \in (0, T_0/\varepsilon^\mu)$ gelten soll, wenn $T_0 > 0$ eine gegebene Zahl ist.

Die Existenz und Eindeutigkeit zu (2.22) ist wohlbekannt und in der nächsten Proposition wiederholt.

Proposition 2.3.2 *Die Annahmen* ***(H1)*** *und* ***(H2)*** *der Hypothese 2.3.1 mögen gelten. Dann definiert* (2.22) *in* $\mathcal{X}_2$ *einen lokalen Fluß* $F_2^{t,\varepsilon}$. *Für jedes* $\boldsymbol{u}_0$ *in* $\mathcal{D}_{X^\varepsilon}$ *und jedes* t *aus dem Existenzintervall von* $F_2^{t,\varepsilon}$ *gilt* $F_2^{t,\varepsilon}\boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{D}_{X^\varepsilon}$. *Darüber hinaus ist* $F_2^{t,\varepsilon}$ *(für jedes feste* t*) eine* $\mathcal{C}^k$ *–Abbildung, und es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_2^{t,\varepsilon}\boldsymbol{u}_0 = X^\varepsilon F_2^{t,\varepsilon}\boldsymbol{u}_0 = DF_2^{t,\varepsilon}(\boldsymbol{u}_0) \cdot X^\varepsilon \boldsymbol{u}_0\,. \tag{2.24}$$

Mit $DF_2^{t,\varepsilon}(\boldsymbol{u}_0)$ *ist die Linearisierung von* $F_2^{t,\varepsilon}$ *um* $\boldsymbol{u}_0$ *bezeichnet.*

Einen Beweis findet man in [41], Theorem 5.1, Seite 389.

2.3.1 Linearer Fall

Es soll zunächst der lineare Fall als ein Speziallfall von (2.22) studiert werden. In diesem Unterabschnitt gelte $N^\varepsilon \equiv 0$.

Satz 2.3.3 *Betrachte das System* (2.22) *mit* $N^\varepsilon \equiv 0$. *Es gelte* ***(H1)*** *der Hypothese 2.3.1. Die oben eingeführten Abbildungen seien so beschaffen, daß ein* $\kappa > 0$ *und eine Konstante* $C_4 \geq 0$ *existieren, so daß die Abschätzung*

$$\|L^\varepsilon A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_4 \varepsilon^\kappa \|G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.25}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ *und* $\varepsilon \in (0,\, 1)$ *gilt. Dann ist die folgende Aussage wahr: Es existiert eine Konstante* $C \geq 0$ *, so daß*

$$\|G_2^\varepsilon(t)A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C|t|\varepsilon^{\kappa-\nu_2-\nu_1}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1}\,, \tag{2.26a}$$

$$\|G_2^\varepsilon(t)\boldsymbol{u} - A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C\varepsilon^{-\nu_2}\big(\|\boldsymbol{u} - A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2} + |t|\varepsilon^{\kappa-\nu_1}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1}\big) \tag{2.26b}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$, $\varepsilon \in (0,\, 1)$ *und alle* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{L^\varepsilon}$ *gilt.*

Beweis. Setze

$$k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta}) := G_2^\varepsilon(t)A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}$$

für ein beliebiges $\varepsilon \in (0,\, 1)$ und $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$. Aus (2.22) folgt, daß der *Kommutationsfehler* $k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta})$ der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta})}{\mathrm{d}t} = L^\varepsilon k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta}) + L^\varepsilon A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}$$

mit $k^\varepsilon(0) = 0$ genügen muß. Deren Lösung lautet

$$k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta}) = \int_0^t G_2^\varepsilon(t-s)\big(L^\varepsilon A^\varepsilon(s)G_1^\varepsilon(s)\boldsymbol{\zeta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^\varepsilon(s)G_1^\varepsilon(s)\big)\mathrm{d}s\,.$$

Aus den Annahmen an die Operatornormen von $G_2^\varepsilon(t)$ und $G_1^\varepsilon(t)$ folgt zusammen mit (2.25) die Behauptung (2.26a) mit $C := C_1C_2C_4$. Um (2.26b) zu beweisen, wird für ein $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{L^\varepsilon}$ der *Gesamtfehler*

$$R^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\zeta}) := G_2^\varepsilon(t)\boldsymbol{u} - A^\varepsilon G_1^\varepsilon(t)\boldsymbol{\zeta}\,.$$

definiert. Wegen der Linearität von $G_2^\varepsilon(t)$ gilt

$$R^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\zeta}) = G_2^\varepsilon(t)(\boldsymbol{u} - A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}) + k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta})\,.$$

Die Dreiecksungleichung in $\mathcal{X}_2$ und die Wahl $C := \max\{C_2,\, C_1C_2C_4\}$ beenden den Beweis.
■

Bemerkung

a) Im obigen Beweis wurde noch nicht die Gruppenstruktur von $G_1^\varepsilon(t)$ benötigt.

b) Die Dauer der Approximationsgültigkeit ist durch $\|k^\varepsilon(t,\, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2}$ bestimmt.

Satz 2.3.4 *Die Voraussetzungen des Satzes 2.3.3 mögen gelten. Zusätzlich sei das System* (2.22) *Hamiltonsch bezüglich* $\big(H_2^\varepsilon,\, \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_2\big)$. *Die Gruppe* $G_1^\varepsilon(t)$ *sei vom Hamiltonschen Vektorfeld* $\boldsymbol{X}_{H_1^\varepsilon}$ *erzeugt, das zum Energiefunktional* H_1^ε *bezüglich* $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_1$ *gehört. Die Approximation* A^ε *sei linear. Die Gültigkeit der Abschätzung* (2.25) *impliziert dann die Existenz einer Konstanten* $C \geq 0$ *, so daß*

$$|\{K \circ G_2^\varepsilon(t),\, H_2^\varepsilon\}_2\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}\big) - \{K \circ G_2^\varepsilon(t)A^\varepsilon,\, H_1^\varepsilon\}_1(\boldsymbol{\zeta})| \leq C\varepsilon^{\kappa-\nu_2}\|K\|_{\mathcal{X}_2'}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.27}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\,1)$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$, $t \in \mathbb{R}$ *und alle* $K \in \mathcal{X}_2'$ *gilt. Die Abbildung* A^ε *ist eine* $(H_2^\varepsilon,\,\kappa-\nu_2)$*–Poisson–Abbildung bezüglich* $(H_1^\varepsilon,\,\mathcal{W}_1)$.

Beweis. Es seien $K \in \mathcal{X}_2'$, $\varepsilon \in (0,\,1)$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\{K \circ G_2^\varepsilon(t),\, H_2^\varepsilon\}_2\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K \circ G_2^\varepsilon(t) A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} = K \circ G_2^\varepsilon(t) \circ L^\varepsilon(t) A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}\,,$$

$$\{K \circ G_2^\varepsilon(t) A^\varepsilon,\, H_1^\varepsilon\}_1(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} K \circ G_2^\varepsilon(t) A^\varepsilon G_1^\varepsilon(s)\boldsymbol{\zeta} = K \circ G_2^\varepsilon(t) A^\varepsilon \boldsymbol{X}_{H_1^\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\,.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}|\{K \circ G_2^\varepsilon(t),\, H_2^\varepsilon\}_2\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}\big) - \{K \circ G_2^\varepsilon(t) A^\varepsilon,\, H_1^\varepsilon\}_1(\boldsymbol{\zeta})| \le \\ \le \|K\|_{\mathcal{X}_2'}\, \|G_2^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2}\, \|L^\varepsilon A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon(s) X_{H_1^\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{X}_2}\,.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung mit $C = C_2 C_4$ bewiesen, denn (2.25) ist insbesondere für $t = 0$ korrekt. ■

Bemerkung

a) Die umgekehrte Implikation ist im Satz 2.2.2 und Korollar 2.2.3 bewiesen.

b) Für das Verschwinden des Kommutationsfehlers ist notwendig, daß $A^\varepsilon(\mathcal{W}_1)$ unter L^ε invariant ist. Es muß $L^\varepsilon A^\varepsilon(\mathcal{W}_1) \subset A^\varepsilon(\mathcal{W}_1)$ gelten.

2.3.2 Der semilineare Fall

In diesem Unterabschitt wird das System (2.22) mit einem N^ε betrachtet, das **(H2)** der Hypothese 2.3.1 genügt. Es werden hinreichende Bedingungen angegeben, die sicherstellen, daß die betrachtete Approximation A^ε eine Fast–Poisson–Abbildung ist, wenn X^ε Hamiltonisch ist. Der erste Teil der folgenden Ausführungen stützt sich auf die Arbeiten von KIRRMANN, SCHNEIDER & MIELKE, [27], SCHNEIDER & MIELKE, [47], und MIELKE, [46].

Die Bedeutung der im folgenden auftretenden Symbole und deren Eigenschaften ist der Hypothese 2.3.1 zu entnehmen.

Für $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$ und $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{X^\varepsilon}$ sind die interessierenden *skalierten Fehler* durch

$$k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) := \varepsilon^{-n}\big(F_2^{\varepsilon,t} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} - A^\varepsilon F_1^{\varepsilon,t}\boldsymbol{\zeta}\big)\,, \qquad k(\varepsilon,\, 0,\, \boldsymbol{\zeta}) \equiv 0\,,$$

$$R(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\zeta}) := \varepsilon^{-n}\big(F_2^{\varepsilon,t}\boldsymbol{u} - A^\varepsilon F_1^{\varepsilon,t}\boldsymbol{\zeta}\big)\,, \qquad R(\varepsilon,\, 0,\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\zeta}) = \varepsilon^{-n}(\boldsymbol{u} - A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta})$$

definiert. Dabei ist $n > 1$ eine feste Zahl. Die erste Beobachtung ist, daß beide Fehler dieselbe Differentialgleichung erfüllen müssen. Setzt man $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t) := A^\varepsilon F_1^{\varepsilon,t}\boldsymbol{\zeta}$, so genügt $k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})$ der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) = L^\varepsilon k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon^{-n}\mathrm{Res}(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon^{-n}\mathcal{M}^\varepsilon\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\big) \tag{2.28}$$

mit

$$\mathrm{Res}(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) := L^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t) + N^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\,,$$

$$\mathcal{M}^\varepsilon\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\big) := N^\varepsilon\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t) + \varepsilon^n k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\big) - N^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\,.$$

Das Ziel ist, hinreichende Bedingungen anzugeben, so daß bei gegebenen $T_0 > 0,\ \mu \geq 0$, siehe **(H2)** der Hypothese 2.3.1, der Fehler $k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{O}(1)$ für $\varepsilon \to 0$ für alle $t \in [0,\, T_0/\varepsilon^\mu]$ erfüllt. Um den Vergleich mit den obengenannten Arbeiten zu erleichtern, wird davon ausgegangen, daß $\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{X}_2} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (für $\varepsilon \to 0$) für alle $t \in [0,\, T_0/\varepsilon^\mu]$ gilt.

Satz 2.3.5 *Die Annahmen der Hypothese 2.3.1 mögen gelten. Gegeben seien ein $T_0 > 0$, ein $\kappa > \mu + \nu_2 + n$ und eine Approximation $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)$, für welche eine Konstante $C_5 > 0$ existiert, so daß*

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^\mu]} \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_5\varepsilon \tag{2.29}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, 1)$ gilt. Es existiere eine Konstante $C_6 > 0$, so daß

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^\mu]} \|\mathrm{Res}(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_6\varepsilon^\kappa \tag{2.30}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, 1)$ besteht. Dann existiert ein $\varepsilon_0 \in (0,\, 1)$ und ein $C > 0$, so daß

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^\mu]} \|k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2} \leq C\varepsilon^{\kappa-(\mu+\nu_2+n)}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ gilt.

Beweis. Es sei $\varepsilon \in (0,\, 1]$ beliebig. Die Annahmen der Hypothese 2.3.1 garantieren die Anwendbarkeit der Formel für die Variation der Konstanten. Aus (2.28) folgt

$$k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta}) = \varepsilon^{-n}\int_0^t G_2^\varepsilon(t-s)\Big(\mathrm{Res}(\varepsilon,\, s,\, \boldsymbol{\zeta}) + N^\varepsilon\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s) + \varepsilon^n k(\varepsilon,\, s,\, \boldsymbol{\zeta})\big) - N^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s)\Big)\mathrm{d}s\,. \tag{2.31}$$

Setze $\alpha := T_0C_2C_6$ und $\beta = C_{N^\varepsilon}C_2(2C_5+C_3)^{\mu+\nu_2}$. Mit Hilfe der Gronwallschen Ungleichung erhält man für alle $t \in [0,\, T_0/\varepsilon^\mu]$ aus (2.23) und **(H1)** der Hypothese 2.3.1

$$\begin{aligned}\|k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2} &\leq \int_0^t C_2C_6\varepsilon^{\kappa-\nu_2-n}\mathrm{d}s + \varepsilon^\mu\int_0^t C_{N^\varepsilon}C_2(2C_5+C_3)^{\mu+\nu_2}\|k(\varepsilon,\, s,\, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2}\,\mathrm{d}s\\ &\leq \alpha\varepsilon^{\kappa-\nu_2-n-\mu}\exp\left(\beta\varepsilon^\mu t\right) =: M(\varepsilon,\, t)\,,\end{aligned}$$

solange $\|k(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_3$ gilt. Genau das wird erreicht, indem ein ε_0 so gewählt wird, daß $M(\varepsilon_0,\, T_0/\varepsilon^\mu)$ die Schranke C_3 unterbietet. Das ist hier möglich, da $M(0,\, T_0/\varepsilon^\mu) = 0$ gilt. Mit $\varepsilon_0 := C_3/(\alpha\exp(\beta T_0))$ und $C := \alpha\exp(\beta T_0)$ ist die Aussage bewiesen. ∎

Bemerkung

a) Der obige Zugang führt nicht zum Erfolg, wenn die Nichtlinearität die „Verluste der ε–Potenzen“ durch $G_2^\varepsilon(t)$ und die Betrachtung der langsamen Zeit $\tau = \varepsilon^\mu t$ auffangen kann.

b) Die Größenordnung der Dauer, auf welcher die Approximation ihre Gültigkeit besitzt, ist unabhängig von der Approximationsgüte κ.

c) Die rechte Seite von (2.31) definiert auf

$$\mathfrak{M} := \big\{k \in \mathcal{C}^0\big([0, T_0/\varepsilon^\mu]; \mathcal{X}_2\big) \;\Big|\; \sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^\mu]} \|k(t)\|_{\mathcal{X}_2} \le M(\varepsilon_0,\, T_0/\varepsilon^\mu)\big\}$$

eine Selbstabbildung $\mathcal{F}$ für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$. Ist ε_0 zusätzlich so klein gewählt, daß sogar $M(\varepsilon_0,\, T_0/\varepsilon^\mu) \le \min\{1/4,\, C_3\}$ besteht, so ist $\mathcal{F}$ auch eine Kontraktion. Die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ in $\mathcal{C}^0\big([0, T_0/\varepsilon^\mu]; \mathcal{X}_2\big)$ ist klar. Damit kann also geschlossen werden, daß für das Anfangswertproblem (2.22) auch Lösungen für lange Zeiten existieren, zum Beispiel für die Anfangsbedingung $\boldsymbol{u}_0 = A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}$.

d) Der Gesamtfehler $R(\varepsilon,\, t,\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\zeta})$ erfüllt die gleiche Differentialgleichung wie $k(\varepsilon,\, t, \boldsymbol{\zeta})$, jedoch mit der Anfangsbedingung $R(\varepsilon,\, 0,\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\zeta}) = \varepsilon^{-n}(\boldsymbol{u} - A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta})$. Durch Umzentrieren von $\mathfrak{M}$ folgen die analogen Aussagen wie für $k(\varepsilon,\, t, \boldsymbol{\zeta})$.

e) Explizite Beispiele zu obigem Approximationszugang sind in [27] gegeben. Weitergehende Anwendungen, insbesondere im Fall quadratischer Nichtlinearitäten sind in [47], sowie in SCHNEIDER, [54], und BOLLERMANN, [4], behandelt.

Im folgenden Satz wird die Verbindung zum Poisson–Klammer–Residuum hergestellt.

Satz 2.3.6 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 2.3.5. Zusätzlich sei das System* (2.22) *Hamiltonsch bezüglich* $\big(H_2^\varepsilon,\, \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_2\big)$. *Der lokale Fluß* $F_1^{t,\varepsilon}$ *sei vom Hamiltonschen Vektorfeld* $\boldsymbol{X}_{H_1^\varepsilon}$ *erzeugt, das zum Energiefunktional* H_1^ε *bezüglich* $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_1$ *gehört. Dann existiert ein* ε_1 *und eine Konstante* $C \ge 0$, *so daß*

$$|\{K \circ F_2^{t,\varepsilon},\, H_2^\varepsilon\}_2\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}\big) - \{K \circ F_2^{t,\varepsilon} A^\varepsilon,\, H_1^\varepsilon\}_1(\boldsymbol{\zeta})| \le C\varepsilon^{\kappa-\nu_2} \|K\|_{\mathcal{X}_2'} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathcal{W}_1} \tag{2.32}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_1)$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{W}_1$, $t \in [0,\, T_0/\varepsilon^\mu]$ *und alle* $K \in \mathcal{X}_2'$ *gilt. Die Abbildung* A^ε *ist eine* $(H_2^\varepsilon,\, \kappa - \nu_2)$*–Poisson–Abbildung bezüglich* $(H_1^\varepsilon,\, \mathcal{W}_1)$.

Beweis. Es sei ε_0 die Schranke für den Parameter ε aus dem Satz 2.3.5. $K \in \mathcal{X}_2'$ und $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ seien beliebig. Es gilt

$$\{K \circ F_2^{t,\varepsilon},\, H_2^\varepsilon\}_2\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K \circ F_2^{t,\varepsilon} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} = K \circ DF_2^{t,\varepsilon}(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}) \cdot X^\varepsilon A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}\,,$$

$$\{K \circ F_2^{t,\varepsilon} A^\varepsilon,\, H_1^\varepsilon\}_1(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} K \circ F_2^{t,\varepsilon} A^\varepsilon F_1^{s,\varepsilon} \boldsymbol{\zeta} = K \circ DF_2^{t,\varepsilon}(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}) \cdot \big(DA^\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{X}_{H_1^\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big)\,.$$

Für das Poisson–Klammer–Residuum $r(\varepsilon, K, t, \boldsymbol{\zeta})$, siehe (2.15), folgt

$$|r(\varepsilon, K, t, \boldsymbol{\zeta})| \le \|K\|_{\mathcal{X}_2'} \, \|DF_2^{t,\varepsilon}(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}) \cdot \big(X^\varepsilon A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta} - DA^\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{X}_{H_1^\varepsilon} \boldsymbol{\zeta}\big)\|_{\mathcal{X}_2}\,.$$

Nun wird ausgenutzt, daß $DF_2^{t,\varepsilon}(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta})$ die Lösung des um $A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}$ linearisierten Problems (2.22) ist. Für alle $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}_2$ gilt somit

$$DF_2^{t,\varepsilon}(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{v} = G_2^\varepsilon(t)\boldsymbol{v} + \int_0^t G_2^\varepsilon(t-s)\big(DN^\varepsilon(F_2^{s,\varepsilon}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}) \circ DF_2^{s,\varepsilon}(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{v}\big)\mathrm{d}s\,.$$

Mit dem Gronwallschen Lemma erhält man

$$\|DF_2^{t,\varepsilon}(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_2\varepsilon^{-\nu_2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{X}_2} \exp\big(C_2\varepsilon^{-\nu_2}m(\varepsilon)t\big)\,,$$

wobei

$$m(\varepsilon) := \sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^\mu]} \|DN(F_2^{t,\varepsilon}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}_2\to\mathcal{X}_2}$$

gesetzt wurde. Aus $DN^\varepsilon(F_2^{t,\varepsilon}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}) = DN^\varepsilon\big(F_1^{t,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta} + \varepsilon^n k(\varepsilon,\, t, \boldsymbol{\zeta})\big)$ und der Stetigkeit von DN^ε folgt unter Beachtung von (2.23) und (2.29), die Existenz einer von t und ε unabhängigen Konstante $\tilde{C}_{N^\varepsilon}$, so daß

$$m(\varepsilon) \leq \tilde{C}_{N^\varepsilon}(2C_5 + C_3)^{\mu+\nu_2}\varepsilon^{\mu+\nu_2}$$

gilt. Speziell mit $\boldsymbol{v} := X^\varepsilon A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta} - DA^\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{X}_{H_1^\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}$ und der Voraussetzung (2.30) folgt

$$|r(\varepsilon, K, t, \boldsymbol{\zeta})| \leq C_2C_6 \exp\big(C_2\tilde{C}_{N^\varepsilon}(2C_5 + C_3)^{\mu+\nu_2}\big)\varepsilon^{\kappa-\nu_2}\|K\|_{\mathcal{X}_2'}$$

für alle $t \in [0,\, T_0/\varepsilon^\mu]$. Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis des vorherigen Satzes schließt man den Beweis ab. ■

2.3.3 Schwache Fast–Poisson–Abbildungen

In diesem Unterabschnitt wird für lineare Hamiltonsysteme eine Identität (2.35) bereitgestellt, mit deren Hilfe die Forderungen in der Definition der Fast–Poisson–Abbildungen anwendungsrelevant abgeschwächt werden können. Genau diese wird später im Schalenproblem verwendet. Es geht um eine Methode, bei welcher die Approximation A^ε nicht den Definitionsbereich des betrachteten linearen Operators treffen muß. Dazu muß das gegebene Problem in seiner natürlichen Variationsform betrachtet werden. Wesentlich ist die Möglichkeit, auf die betrachtete Approximation A^ε eine weitere Zeitableitung abwälzen zu können.

Die Annahmen, die im folgenden hinzugezogen werden, sind für das Schalenproblem relevant. Für den Parameterwert ε gilt die Vereinbarung des vorherigen Abschnitts.

Hypothese 2.3.7

(H1) *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ω ist ein Gebiet, d. h. eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitzstetigem Rand $\partial\Omega$, so daß Ω lokal stets auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.*

(H2) *Gegeben sind $\boldsymbol{V}(\Omega)$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ sowie $\dot{\boldsymbol{V}}(\Omega)$. Die Funktionenräume $\boldsymbol{V}(\Omega)$ resp. $\dot{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ sind reelle Hilberträume mit Skalarprodukten $B(\varepsilon)(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ resp. $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$. Der Raum $\boldsymbol{V}(\Omega)$ ist*

in $\widetilde{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ *abgeschlossen. Die Beziehung zwischen* $\boldsymbol{V}(\Omega)$ *und* $\dot{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ *ist diejenige laut Notation 2.1.2.*

(H3) *Eine schwache symplektische Form* Θ *auf* $\mathcal{X}_2 := \boldsymbol{V}(\Omega) \times \dot{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ *ist laut* (2.2) *gegeben. Mit*

$$H(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u},\, \dot{\boldsymbol{u}}\big) := \frac{1}{2}B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u}\big) + \frac{1}{2}\big(\dot{\boldsymbol{u}},\, \dot{\boldsymbol{u}}\big)_\Omega$$

ist das betrachtete Hamilton–Funktional auf $\mathcal{X}_2$ *bezeichnet. Das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld bezüglich* Θ *ist durch* $(\boldsymbol{u},\, \dot{\boldsymbol{u}}) \mapsto \big(\dot{\boldsymbol{u}},\, -L(\varepsilon)\boldsymbol{u}\big)$ *definiert. Dabei gilt*

$$L(\varepsilon)\boldsymbol{u} := \frac{\boldsymbol{\delta} H(\varepsilon)}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u},\, \dot{\boldsymbol{u}})\,.$$

$G_2(\varepsilon,\, t)$ *ist der von* $\big(\dot{\boldsymbol{u}},\, -L(\varepsilon)\boldsymbol{u}\big)$ *erzeugte Hamiltonsche Fluß.*

(H4) *Mit* $\boldsymbol{S}(\partial\Omega)$ *sei ein reeller Hilbertraum über* $\partial\Omega$ *mit dem Skalarprodukt* $\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,\big)_{\partial\Omega}$ *gegeben. Die Spurabbildung*

$$\mathrm{tr} : \widetilde{\boldsymbol{V}}(\Omega) \to \boldsymbol{S}(\partial\Omega)$$

mit $(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ *ist beschränkt. Darüber hinaus existiert ein linearer Operator* $T(\varepsilon) :\ D\big(L(\varepsilon)\big) \to \boldsymbol{S}(\partial\Omega)$ *, so daß für alle* $\varepsilon \in (0,\, 1), \boldsymbol{u} \in D\big(L(\varepsilon)\big)$ *und alle* $\boldsymbol{v} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ *die* Greensche Formel

$$B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\big) = \big(L(\varepsilon)\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega + \big(T(\varepsilon)\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\big)_{\partial\Omega}$$

gilt.

(H5) $\boldsymbol{V}_1$ *sei ein reeller Hilbertraum. Die Abbildung* $A^\varepsilon : \boldsymbol{V}_1 \to \widetilde{\boldsymbol{V}}(\Omega)$ *sei linear und beschränkt.*

Der Gesamtfehler $\boldsymbol{R}$ erfüllt die Integralgleichung im folgenden Lemma.

Lemma 2.3.8 *Für* $\varepsilon \in (0,\, 1)$ *seien die Annahmen und Bezeichnungen der Hypothese 2.3.7 gültig. Es sei* $T > 0$ *. Benütze die Schreibweise* $\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, t)\big) := G_2(\varepsilon,\, t)(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0)$ *für* $(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0)$ *aus* $\big(D\big(L(\varepsilon)\big),\, \boldsymbol{V}(\Omega)\big)$ *. Es sei* $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon \in \mathcal{C}^2\big([0,\, T]; \boldsymbol{V}_1\big)$ *gegeben. Dann genügt der* Gesamtfehler

$$\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\, t),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, t)\big) := \big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, t)\big) - \big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\big)$$

der Identität

$$\begin{aligned} H(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\,t),\,\dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\,t)\big) &= H(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\,0),\,\dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\,0)\big) \\ &\quad + H(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\big) - H(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0)\big) \\ &\quad - \int_0^t \Big(B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s)\big) + \big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s)\big)_\Omega \\ &\qquad + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,T(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,s)\big)_{\partial\Omega}\Big)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.33}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\,1)$ *und alle* $t \in [0,\,T]$.

Beweis. Es seien $\varepsilon \in (0,\,1)$ und $t \in [0,\,T]$ beliebig. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varepsilon,\,t) := H(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\,t),\,\dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\,t)\big) + B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t)\big) \\ + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t)\big) - H(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Die Energieerhaltung entlang $\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t)\big)$ liefert

$$\mathcal{H}(\varepsilon,\,t) = \mathcal{H}(\varepsilon,\,0)\,. \tag{2.34}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t)\big) &= \int_0^t \Big(B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s)\big) + B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,s)\big)\Big)\mathrm{d}s \\ &\quad + B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\,\boldsymbol{u}_0\big)\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t)\big)_\Omega &= \int_0^t \Big(\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s)\big)_\Omega + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s)\big)_\Omega\Big)\mathrm{d}s \\ &\quad + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\,\dot{\boldsymbol{u}}_0\big)_\Omega \end{aligned}$$

folgt mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s) = -L(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,s)$ nach Anwendung der Greenschen Formel die Gleichheit

$$\begin{aligned} \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t)\big)_\Omega &= \int_0^t \Big(\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,s)\big)_\Omega - B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,s)\big) \\ &\quad + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\,T(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,s)\big)_{\partial\Omega}\Big)\mathrm{d}s + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\,\dot{\boldsymbol{u}}_0\big)_\Omega\,. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (2.34) beweist die Behauptung. ■

Aus (2.33) wird eine weitere Identität hergeleitet, welche beim Schalenproblem zum Einsatz kommt. Es geht darum die Zeitableitungen von $\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, t)$ auf die Approximation $A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)$ abzuwälzen. Dies hat den Vorteil, daß in der folgenden Identität das Gronwallsche Lemma angewandt werden kann, ohne explizit $L(\varepsilon)A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)$ zu berechnen. Insbesondere im Schalenproblem ist dies von Bedeutung. Dadurch erübrigt sich die explizite Berechnung von zweiten kovarianten Ableitungen.

Satz 2.3.9 *Für $\varepsilon \in (0,\, 1)$ seien die Annahmen und Bezeichnungen der Hypothese 2.3.7 sowie diejenigen des Lemmas 2.3.8 gültig. Es sei $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon \in \mathcal{C}^3\big([0,\, T];\, \boldsymbol{V}_1\big)$ gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
H(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,t),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, t)\big) &= H(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, 0)\big) \\
&\quad - B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, t)\big) - \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, t)\Big)_\Omega \\
&\quad + B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0)\big) + \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0)\Big)_\Omega \\
&\quad + \int_0^t \Big(B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, s)\big) + \big(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, s)\big)_\Omega \\
&\qquad + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, T(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, s)\big)_{\partial\Omega}\Big)\mathrm{d}s\,.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, 1)$ und alle $t \in [0,\, T]$.

Beweis. Benütze für ein beliebiges $\varepsilon \in (0,\, 1)$ und $t \in [0,\, T]$ die Beziehungen

$$\int_0^t B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, s)\big)\mathrm{d}s = B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t)\big) - B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, 0)\big)$$

$$- \int_0^t \Big(B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, s)\big)\mathrm{d}s$$

und

$$\int_0^t \big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, s)\big)_\Omega \mathrm{d}s = \big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t)\big)_\Omega - \big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, 0)\big)_\Omega$$

$$- \int_0^t \big(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, s)\big)_\Omega \mathrm{d}s\,.$$

Einsetzen in (2.33) unter Beachtung der Definition des Gesamtfehlers beendet den Beweis. ■

Eine Anwendung hiervon folgt im nächsten Kapitel. Für eine Fehlerabschätzung für das Schalenproblem wird in den Kapiteln 4–7 gezeigt, daß jede Zeile auf der rechten Seite von (2.35) ausreichend klein gehalten werden kann.

Kapitel 3

Differentialgeometrische Grundlagen

Um die Schalentheorie exakt zu formulieren, werden einige Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie eingeführt. Der erste Teil des Kapitels betrifft die Geometrie der Flächen. Der zweite Teil behandelt die Geometrie der Schalen. Es gilt die Vereinbarung, daß einmal eingeführte Symbole durch restliche Kapitel der Arbeit verwendet werden, ohne deren Bedeutung zu wiederholen.

3.1 Zur Differentialgeometrie der Fläche

Es werden weitgehend die Notationen von CIARLET benützt, siehe [14], [8]. Mit ω ist stets ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und mit $\boldsymbol{y} = (y_1,\, y_2)^\top$ ein beliebiger Punkt in $\overline{\omega}$ bezeichnet. Griechische Indizes und Exponenten (ausgenommen ε) gehören zu $\{1,\, 2\}$, lateinische dagegen zu $\{1,\, 2,\, 3\}$. Von nun an wird nur dann summiert, wenn im betrachteten Objekt die Indizes in Paaren auftreten. Das Symbol $\cdot$ steht für das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Für einen Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet $|\boldsymbol{a}|$ seine euklidische Länge.

Definition 3.1.1 *Setze* $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial y_\alpha}$. *Eine gegebene Abbildung* $\boldsymbol{\varphi}$ *gehöre zu* $\mathcal{C}^3(\overline{\omega};\, \mathbb{R}^3)$, *sei injektiv und die Vektoren*

$$\boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{y}) := \partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) \tag{3.1}$$

seien für jedes feste $\boldsymbol{y} \in \overline{\omega}$ *linear unabhängig.*
Dann heißt $\{\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{y}),\, \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{y})\}$ *eine* kovariante Basis *der Tangentialebene* $T_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})}S$ *an die Fläche*

$$S := \boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega}) \tag{3.2}$$

im Punkt $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$. *Die eindeutige Lösung* $\{\boldsymbol{a}^1(\boldsymbol{y}),\, \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{y})\} \in T_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})}S \times T_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})}S$ *des linearen Gleichungssystems*

$$\boldsymbol{a}^\alpha(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{a}_\beta(\boldsymbol{y}) = \delta^\alpha_\beta := \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad \alpha \neq \beta\,, \\ 1 & \textit{für} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

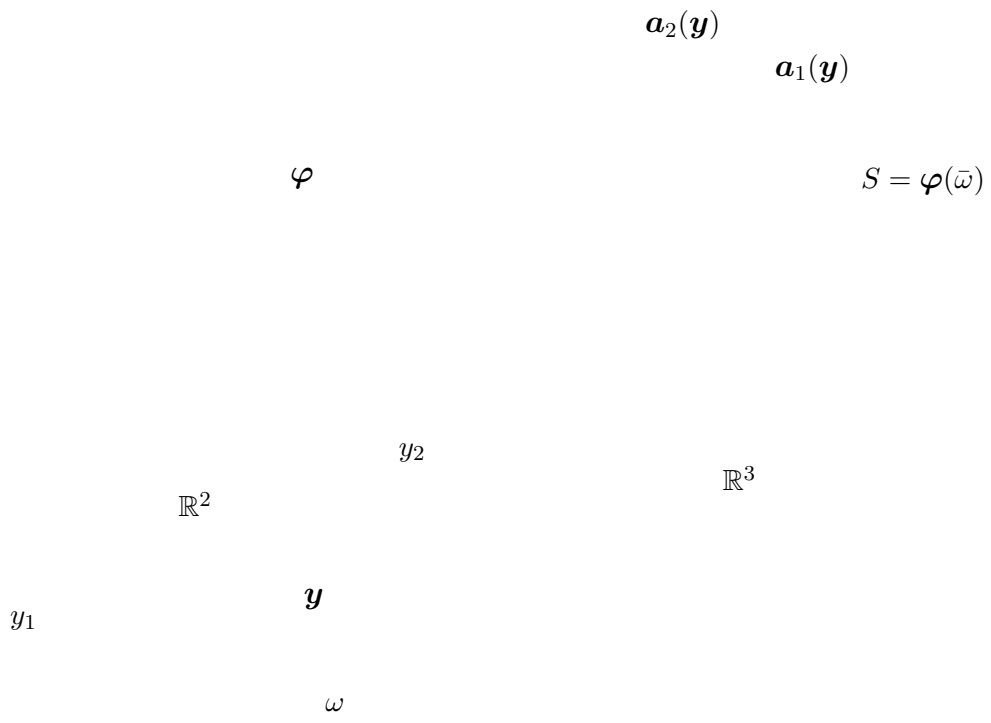

Abbildung 3.1: Eine Parametrisierung des Flächenstücks S mit einer lokalen Basis der Tangentialebene in $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$.

nennt man eine kontravariante Basis *der Tangentialebene* $T_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})}S$ *an die Fläche* S *. Den Vektor*

$$\boldsymbol{a}_3(\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{a}^3(\boldsymbol{y}) := \frac{\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{y})|} \tag{3.3}$$

bezeichnet man als den Normalenvektor *an* S *im Punkt* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$ *.*

Bemerkung

a) Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird die explizite $\boldsymbol{y}$ -Abhängigkeit in den oben eingeführten Ausdrücken unterdrückt. Das gleiche gilt für Größen, die aus den obigen abgeleitet werden.

b) Da $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ nicht notwendigerweise eine Orthogonalbasis bilden, ist die Einführung der kontravarianten Basis als eine Art Ersatz dafür anzusehen.

Definition 3.1.2 *Im dreidimensionalen euklidischen Raum sei die zweidimensionale Mannigfaltigkeit* $S = \boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ *wie in der Definition 3.1.1 gegeben.*

(i) Die Größen $a_{\alpha\beta} := \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_\beta$ *resp.* $a^{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}^\alpha \cdot \boldsymbol{a}^\beta$ *definieren* ko– *resp.* kontravariante Komponenten der ersten Fundamentalform *oder des* Metriktensors *von* S *.*

(ii) Die Größen $b_{\alpha\beta} := \boldsymbol{a}^3 \cdot \partial_\beta \boldsymbol{a}_\alpha$ *resp.* $b_\alpha^\beta = a^{\beta\sigma} b_{\sigma\alpha}$ *resp.* $b^{\alpha\beta} := a^{\alpha\lambda} b_\lambda^\beta$ *heißen* kovariante *resp.* gemischte *resp.* kontravariante Komponenten der zweiten Fundamentalform *oder des* Krümmungstensors *von* S *.*

(iii) Mit $c_{\alpha\beta} := b_{\alpha\sigma} b_\beta^\sigma$ *resp.* $c^{\alpha\beta} := b_\sigma^\alpha b^{\sigma\beta}$ *sind die* ko– *resp.* kontravarianten Komponenten der dritten Fundamentalform *bezeichnet.*

Bemerkung

a) Wegen $\boldsymbol{a}_\beta = \partial_\beta \boldsymbol{\varphi}$ gilt $\partial_\alpha \boldsymbol{a}_\beta = \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{\varphi} = \partial_{\beta\alpha} \boldsymbol{\varphi} = \partial_\beta \boldsymbol{a}_\alpha$ und $b_{\alpha\beta}$ ist klar symmetrisch. Daraus folgt auch die Symmetrie der dritten Fundamentalform.

b) Die Umkehrung von $b_\alpha^\beta = a^{\beta\sigma} b_{\sigma\alpha}$ ergibt $b_{\alpha\beta} = b_\alpha^\varrho a_{\varrho\beta}$.

c) Wenn im folgenden von Tensoren gesprochen wird, dann sind damit stets die Komponenten der relevanten multilinearen Abbildungen bezüglich der betrachteten Basen gemeint.

Definition 3.1.3 *Ein Flächenstück* S *sei wie in* (3.2) *definiert. Es sei* $\boldsymbol{y} \in \overline{\omega}$ *fest. Die Invarianten*

$$h(\boldsymbol{y}) := \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha(\boldsymbol{y}) \quad \textit{resp.} \quad k(\boldsymbol{y}) := \frac{\det\big(b_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})\big)}{a(\boldsymbol{y})} = b_1^1(\boldsymbol{y}) b_2^2(\boldsymbol{y}) - b_2^1(\boldsymbol{y}) b_1^2(\boldsymbol{y})$$

mit $a(\boldsymbol{y}) := |\det\big(a_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})\big)|$ *nennt man* mittlere *resp.* Gauß-Krümmung *von* S *im Punkt* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$ *.*

Bemerkung

Nach der Regularitätsvoraussetzung an $\boldsymbol{\varphi}$ ist sichergestellt, daß $a : \boldsymbol{y} \mapsto a(\boldsymbol{y})$ stetig auf dem Kompaktum $\overline{\omega}$ ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{\partial_1\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}),\, \partial_2\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\}$ für jedes $\boldsymbol{y} \in \overline{\omega}$ gilt dort $a(\boldsymbol{y}) > 0$. Somit nimmt a in $\overline{\omega}$ ein positives Minimum an.

3.1.1 Zur Tensoranalysis der Fläche

Es werden die benötigten Beziehungen aus der Tensoranalysis der Fläche zusammengefaßt.

Lemma 3.1.4 *Es sei $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega};\, \mathbb{R}^3)$ wie in der Definition 3.1.1 gegeben. Dann gelten die* Ableitungsgleichungen *(von Gauß und Weingarten):*

$$\partial_\beta \boldsymbol{a}_\alpha = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\lambda + b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_3 \tag{3.4a}$$

$$\partial_\beta \boldsymbol{a}^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\boldsymbol{a}^\lambda + b^\alpha_\beta\boldsymbol{a}_3 \tag{3.4b}$$

und

$$\partial_\alpha \boldsymbol{a}_3 = \partial_\alpha \boldsymbol{a}^3 = -b^\lambda_\alpha \boldsymbol{a}_\lambda = -b^\lambda_\alpha a_{\lambda\tau}\boldsymbol{a}^\tau = -b_{\alpha\tau}\boldsymbol{a}^\tau\,, \tag{3.5}$$

wobei mit

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} := \boldsymbol{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \boldsymbol{a}_\alpha. \tag{3.6}$$

die Christoffelschen Symbole *auf der Fläche $\boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ bezeichnet sind.*

Einen Beweis hierzu findet man zum Beispiel in STOKER, [59], Seite 134–136 oder in SPIVAK, [58], Band III, Kapitel II.

Lemma 3.1.5 *Es sei $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega};\, \mathbb{R}^3)$ wie in der Definition 3.1.1 gegeben. Das Symbol $|$ bezeichne die kovariante Differentiation bezüglich der Riemannmetrik, [5], die durch $(a_{\alpha\beta})$ resp. $(a^{\alpha\beta})$ repräsentiert wird.*

Für $\mathcal{C}^1$ – Tensoren f nullter Stufe auf der Fläche gilt dann:

$$f_{|\alpha} = \partial_\alpha f.$$

Für $\mathcal{C}^1$ –Tensoren erster Stufe $\boldsymbol{\eta} = \eta_\sigma \boldsymbol{a}^\sigma = \eta^\sigma \boldsymbol{a}_\sigma$ gilt dann:

$$\eta_{\sigma|\alpha} = \partial_\alpha \eta_\sigma - \Gamma^\varrho_{\alpha\sigma}\eta_\varrho\,, \qquad \eta^\sigma{}_{|\alpha} = \partial_\alpha \eta^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\varrho}\eta^\varrho\,.$$

Für $\mathcal{C}^1$ –Tensoren A zweiter Stufe mit den Komponenten $A_{\alpha\beta}$, A^α_β und $A^{\alpha\beta}$ gilt dann:

$$A_{\alpha\beta|\varrho} = \partial_\varrho A_{\alpha\beta} - \Gamma^\tau_{\alpha\varrho}A_{\tau\beta} - \Gamma^\tau_{\beta\varrho}A_{\alpha\tau}; \tag{3.7a}$$

$$A^\alpha_{\beta|\varrho} = \partial_\varrho A^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\varrho\tau}A^\tau_\beta - \Gamma^\tau_{\beta\varrho}A^\alpha_\tau; \tag{3.7b}$$

$$A^{\alpha\beta}{}_{|\varrho} = \partial_\varrho A^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\varrho\tau}A^{\tau\beta} + \Gamma^\beta_{\varrho\tau}A^{\alpha\tau}. \tag{3.7c}$$

Für $\mathcal{C}^1$–Tensoren B dritter Stufe mit den Komponenten $B^{\varrho}_{\sigma\tau}$ und $B_{\varrho\sigma\tau}$ gilt dann:

$$B^{\varrho}_{\sigma\tau|\alpha} = \partial_\alpha B^{\varrho}_{\sigma\tau} + \Gamma^{\varrho}_{\lambda\alpha} B^{\lambda}_{\sigma\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\tau\alpha} B^{\varrho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} B^{\varrho}_{\lambda\tau}\,; \tag{3.8a}$$

$$B_{\varrho\sigma\tau|\alpha} = \partial_\alpha B_{\varrho\sigma\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\varrho\alpha} B_{\lambda\sigma\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\alpha} B_{\varrho\lambda\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\tau\alpha} B_{\varrho\sigma\lambda}. \tag{3.8b}$$

Bemerkung

a) Ein Beweis hierzu ergibt sich durch Spezialisierung der allgemeinen Formel in [30], §97, Seite 417.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die kovariante Differentiation erzeugt aus einem Tensor der Stufe n einen der Stufe $n+1$. Damit folgen aus den beiden Formeln (3.7) und (3.8) die Definitionen für höhere kovariante Ableitungen. So ist $\eta_{\sigma|\alpha}$ als ein zweifach kovarianter Tensor aufzufassen und für dessen Ableitung ist folglich (3.7a) anzuwenden, d. h. ,

$$\eta_{\sigma|\alpha\beta} := (\eta_{\sigma|\alpha})_{|\beta} = \partial_\beta \eta_{\sigma|\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\sigma\beta}\eta_{\tau|\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\eta_{\sigma|\tau}.$$

Analog folgt aus (3.8a):

$$b^{\varrho}_{\sigma|\tau\alpha} := (b^{\varrho}_{\sigma|\tau})_{|\alpha} = \partial_\alpha b^{\varrho}_{\sigma|\tau} + \Gamma^{\varrho}_{\lambda\alpha} b^{\lambda}_{\sigma|\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\alpha} b^{\varrho}_{\lambda|\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\tau\alpha} b^{\varrho}_{\sigma|\lambda}.$$

Korollar 3.1.6 *Es sei $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i$ glatt auf der Fläche $\boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$. Dann gilt*

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\eta} = (\eta_{\sigma|\alpha} - b_{\alpha\sigma}\eta_3)\boldsymbol{a}^\sigma + (\partial_\alpha \eta_3 + b^{\varrho}_{\alpha}\eta_\varrho)\boldsymbol{a}^3. \tag{3.9}$$

Beweis. Die Beziehung (3.9) folgt direkt aus den Ableitungsgleichungen. ■

Die nächste Proposition behandelt die Nichtvertauschbarkeit der Reihenfolge der kovarianten Differentiationen auf einer Fläche im euklidischen Raum.

Proposition 3.1.7 *Es sei $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^4(\overline{\omega}; \mathbb{R}^3)$ wie in der Definition 3.1.1 gegeben. Dann gilt für $\mathcal{C}^2$–Tensoren erster Stufe $\boldsymbol{\eta} = \eta_\sigma \boldsymbol{a}^\sigma$*

$$\eta_{\alpha|\beta\gamma} - \eta_{\alpha|\gamma\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}\eta_\lambda\,,$$

wobei

$$R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} := b_{\alpha\gamma} b^{\lambda}_{\beta} - b_{\alpha\beta} b^{\lambda}_{\gamma}$$

die dreifach ko– und einfach kontravarianten Komponenten des Riemanntensors der Fläche *sind. Für die Komponenten des Krümmungstensors gilt*

$$b_{\alpha\beta|\sigma\tau} - b_{\alpha\beta|\tau\sigma} = R^{\lambda}_{\alpha\sigma\tau} b_{\lambda\beta} + R^{\lambda}_{\beta\sigma\tau} b_{\alpha\lambda}\,,$$

$$b^{\alpha}_{\beta|\sigma\tau} - b^{\alpha}_{\beta|\tau\sigma} = -R^{\alpha}_{\lambda\sigma\tau} b^{\lambda}_{\beta} + R^{\lambda}_{\beta\sigma\tau} b^{\alpha}_{\lambda}\,.$$

Im weiteren Verlauf der Rechnungen werden die Regeln aus dem folgenden Lemma benutzt.

Lemma 3.1.8 *Unter den Voraussetzungen der Proposition 3.1.7 gelten:*

(i) $a^{\alpha\beta}{}_{|\tau} = a_{\alpha\beta|\tau} \equiv 0\,,$ *(ii)* $\Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\varrho}_{\beta\alpha}\,,$ *(iii)* $b^{\alpha}_{\sigma|\tau} = b^{\alpha}_{\tau|\sigma}\,.$

Bemerkung

a) Die Beziehung in *(i)* ist *Ricci's Lemma*, [34], auf der Fläche.

b) Die Symmetrie der Christoffelschen Symbole auf der Fläche ist eine Folgerung aus der *Bianchi–Identität* für Mannigfaltigkeiten ohne Torsion, [34].

c) Die Beziehung in *(iii)* ist die *Codazzi–Gleichung*, [14]. Durch Kontraktion mit $a_{\alpha\lambda}$ entsteht (ebenfalls Codazzi-Gleichung) $b_{\lambda\sigma|\tau} = b_{\lambda\tau|\sigma}\,.$

Die Orthogonalität von $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}^3$ auf $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ bzw. $\{\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2\}$ erteilt bei Vektorfeldern $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i$ der $\boldsymbol{a}^3$-Komponente η_3 eine Sonderrolle. Bei Transformationsgesetzen (beim Koordinatenwechsel) verhält sich η_3 wie ein skalares Feld. Daher führt man folgende Bezeichnung ein.

Definition 3.1.9 *Es sei* $\boldsymbol{a}^3$ *wie in* (3.3) *gegeben. Es sei* $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i$ *ein glattes Vektorfeld auf der Fläche* $\boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ *. Dann setzt man* $\eta_{3|\alpha} := \partial_\alpha \eta_3$ *.*

Korollar 3.1.10 *Es sei* $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i$ *ein glattes Vektorfeld auf der Fläche* $\boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ *. Dann gilt*

$$\eta_{3|\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}\partial_\varrho \eta_3$$

und

$$\eta_{3|\alpha\beta\sigma} = \partial_\sigma \eta_{3|\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}\eta_{3|\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma}\eta_{3|\alpha\lambda}\,.$$

Beweis. Beide Behauptungen folgen aus den Rechenregeln im Lemma 3.1.5. ∎

3.2 Zur Differentialgeometrie der Schale

In diesem Abschnitt werden Schalen als spezielle Produktmannigfaltigkeiten der Dimension drei eingeführt. Für jedes $\varepsilon > 0$ definiere die Mengen

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon,\, \varepsilon); \quad \Gamma^\varepsilon_\pm = \omega \times \{\pm\varepsilon\}, \quad \Gamma^\varepsilon_0 = \partial\omega \times [-\varepsilon,\, \varepsilon].$$

Die Punkte in Ω^ε werden mit $x^\varepsilon_\alpha = y_\alpha$ und $x^\varepsilon_3 \in (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ bezeichnet.

Satz 3.2.1 *Im* $\mathbb{R}^3$ *sei ein Flächenstück* S *mit der Parametrisierung* $\boldsymbol{\varphi} : \omega \to \mathbb{R}^3$ *wie in der Definition 3.1.1 gegeben. Für die Abbildung*

$$\begin{aligned} &\Phi^\varepsilon : \overline{\Omega}^\varepsilon \to \mathbb{R}^3 \textit{ mit} \\ &\Phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon) := \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) + x^\varepsilon_3 \boldsymbol{a}^3(\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ *, so daß* Φ^ε *für alle* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *injektiv ist und die drei Vektoren*

$$\boldsymbol{g}^\varepsilon_i(\boldsymbol{x}^\varepsilon) := \partial^\varepsilon_i \Phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon) := \frac{\partial}{\partial x^\varepsilon_i}\Phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)$$

linear unabhängig sind.

Definition 3.2.2 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 3.2.1 und die Abbildung* Φ^ε *sei wie* (3.10) *gegeben.*

(i) *Die Menge* $\mathcal{S}^\varepsilon := \Phi^\varepsilon(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ *selbst nennt man eine* Schale *und die Menge* $S = \varphi(\overline{\omega})$ *heißt dann die* Mittelfläche *von* $\mathcal{S}^\varepsilon$.

(ii) *Die Punkte* (x_i^ε) *von* Ω^ε *bezeichnet man im vorliegenden Kontext auch als* krummlinige Koordinaten *der Schale.*

(iii) *Die Vektoren* $\{\boldsymbol{g}_1^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon),\, \boldsymbol{g}_2^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon),\, \boldsymbol{g}_3^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\}$ *nennt man eine* kovariante Basis für die Schale $\mathcal{S}^\varepsilon$ *im Punkt* $\Phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)$.

(iv) *Die eindeutige Lösung* $\{\boldsymbol{g}^{1,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon),\, \boldsymbol{g}^{2,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon),\, \boldsymbol{g}^{3,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *des linearen Gleichungssystems*

$$\boldsymbol{g}^{j,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon) = \delta_i^j := \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad i \neq j\,, \\ 1 & \textit{für} \quad i = j \end{cases}$$

nennt man eine kontravariante Basis *der Schale* $\mathcal{S}^\varepsilon$ *im Punkt* $\Phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)$.

(v) *Die Größen* $g_{ij}^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon) := \boldsymbol{g}_i^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{g}_j^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)$ *resp.* $g^{ij,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) := \boldsymbol{g}^{i,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{g}^{j,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon)$ *heißen* kovariante *resp.* kontravariante Komponenten des Metriktensors *von* Φ^ε .

(vi) *Mit*

$$\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) := \boldsymbol{g}^{p,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \cdot \partial_i^\varepsilon \boldsymbol{g}_j^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \tag{3.11}$$

sind die Christoffelschen Symbole der Schale $\Phi^\varepsilon(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ *definiert.*

(vii) *Mit* $g^\varepsilon := |\det(\boldsymbol{g}_1^\varepsilon,\, \boldsymbol{g}_2^\varepsilon,\, \boldsymbol{g}_3^\varepsilon)|$ *sei das Volumenelement der Schale bezeichnet.*

Bemerkung

a) Der Beweis des obigen Satzes 3.2.1 ist in [12] zu finden.

b) Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird die explizite $\boldsymbol{x}^\varepsilon$ -Abhängigkeit in den oben eingeführten Ausdrücken unterdrückt. Das gleiche gilt für Größen, die aus den obigen abgeleitet werden.

c) Es ist zu beachten, daß in der Schreibweise die Christoffelschen Symbole der Schale von denen der Fläche durch ein ε als Superskript zu unterscheiden sind. Wegen

$$\partial_i^\varepsilon \boldsymbol{g}_j^\varepsilon = \partial_{ij}^\varepsilon \Phi^\varepsilon = \partial_{ji}^\varepsilon \Phi^\varepsilon = \partial_j^\varepsilon \boldsymbol{g}_i^\varepsilon$$

gilt klar $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} = \Gamma_{ji}^{p,\varepsilon}$. Darüber hinaus folgt aus $\partial_i^\varepsilon \big(\boldsymbol{g}^{p,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{g}_j^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\big) = 0$ und aus (3.11) auch die Beziehung

$$\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) = -\partial_i^\varepsilon \boldsymbol{g}^{p,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{g}_j^\varepsilon(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\,.$$

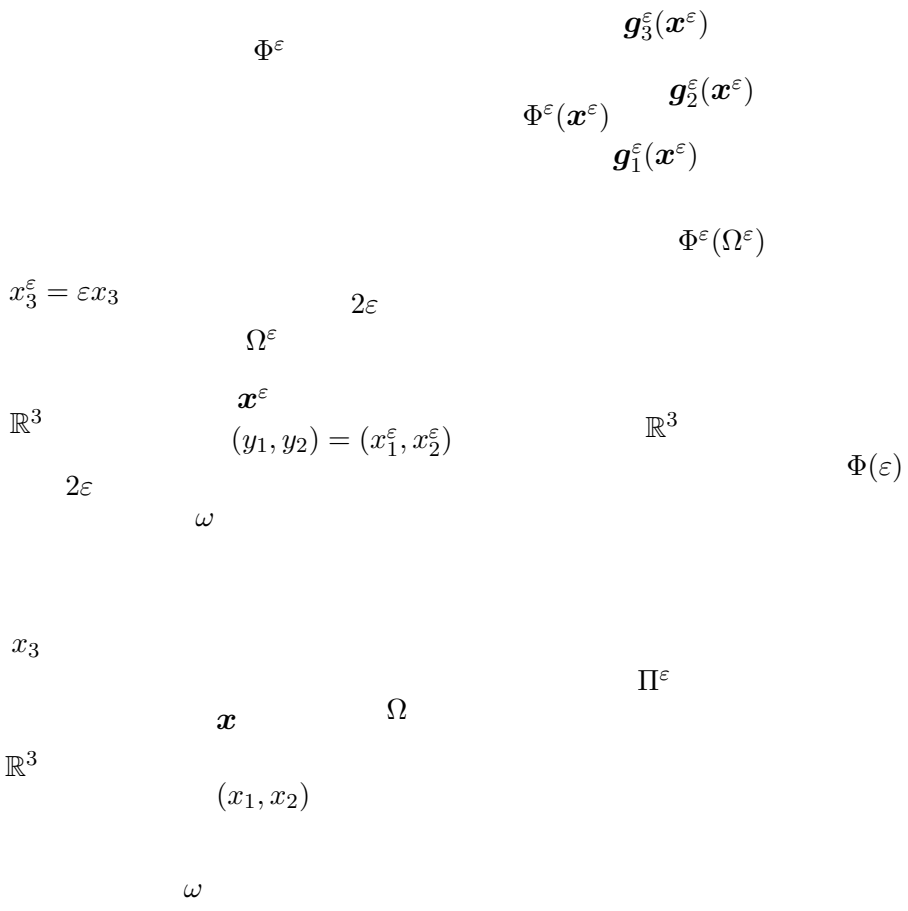

Abbildung 3.2: Eine Parametrisierung der Schale über einem dünnen und einem dicken Gebiet.

d) Die Menge $\Phi^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ ist natürlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension drei (z.B. mit der Kartenabbildung $\Phi^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \to \Phi^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$). Überträgt man das euklidische Skalarprodukt in jeden Punkt von $\Phi^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$, so wird $\Phi^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ auf natürliche Art zu einer Riemannmannigfaltigkeit mit der lokalen Darstellung der Riemannmetrik (g_{ij}^ε), vgl. [5].

Es gelten die üblichen Rechenregeln der Tensoralgebra, z.B. gilt für Vektoren $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^{i,\varepsilon} = v^i \boldsymbol{g}_i^\varepsilon$ die Beziehung $v^i = g^{ij,\varepsilon} v_j$ bzw. $v_j = g_{ij}^\varepsilon v^i$, siehe [23].

3.2.1 Kovariante Differentiation auf der Schale

Lemma 3.2.3 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 3.2.1 und des Lemmas 3.1.5. Das Symbol $\|$ bezeichne die kovariante Differentiation bezüglich der Riemannmetrik auf der Schale $\mathcal{S}^\varepsilon$, die durch $(g_{\alpha\beta}^\varepsilon)$ resp. $(g^{\alpha\beta,\varepsilon})$ repräsentiert wird.*

Für $\mathcal{C}^1$–Tensoren f nullter Stufe auf der Schale $\mathcal{S}^\varepsilon$ gilt dann

$$f_{\|k} = \partial_k^\varepsilon f.$$

Für einstufige $\mathcal{C}^1$–Tensoren $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^{i,\varepsilon} = v^i \boldsymbol{g}_i^\varepsilon$ gilt:

$$v_{i\|j} = \partial_j^\varepsilon v_i - \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} v_p\,, \qquad v^i{}_{\|j} = \partial_j^\varepsilon v^i + \Gamma_{jp}^{i,\varepsilon} v^p\,.$$

Für $\mathcal{C}^1$–Tensoren A zweiter Stufe mit den Komponenten A_{ij}, A_j^i und A^{ij} gilt dann:

$$A_{ij\|r} = \partial_r^\varepsilon A_{ij} - \Gamma_{ir}^{p,\varepsilon} A_{pj} - \Gamma_{jr}^{p,\varepsilon} A_{ip}\,; \tag{3.12a}$$

$$A_{j\|r}^i = \partial_r^\varepsilon A_j^i + \Gamma_{rp}^{i,\varepsilon} A_j^p - \Gamma_{jr}^{p,\varepsilon} A_p^i\,; \tag{3.12b}$$

$$A^{ij}{}_{\|r} = \partial_r^\varepsilon A^{ij} + \Gamma_{rp}^{i,\varepsilon} A^{pj} + \Gamma_{rp}^{j,\varepsilon} A^{ip}\,. \tag{3.12c}$$

Beweis. Durch Spezialisierung der allgemeinen Formel in [30], §97, Seite 418. ■

Korollar 3.2.4 *Es sei $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^{i,\varepsilon}$ ein Vektorfeld der Klasse $\mathcal{C}^2$ auf der Schale $\mathcal{S}^\varepsilon$. Dann gilt*

$$v_{i\|jr} = (\partial_{jr}^\varepsilon \boldsymbol{v} - \Gamma_{jr}^{m,\varepsilon} \partial_m^\varepsilon \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon\,.$$

Beweis. Da $v_{i\|j}$ als ein zweifach kovarianter Tensor aufzufassen ist, folgt aus (3.12a)

$$v_{i\|jr} := (v_{i\|j})_{\|r} = \partial_r^\varepsilon (v_{i\|j}) - \Gamma_{ir}^{p,\varepsilon} v_{p\|j} - \Gamma_{jr}^{p,\varepsilon} v_{i\|p}\,.$$

Beachtet man die Beziehung

$$\partial_j^\varepsilon \boldsymbol{v} = v_{i\|j}\, \boldsymbol{g}^{i,\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_{i\|j} = \partial_j \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon\,, \tag{3.13}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} v_{i\|jr} &= \partial_r^\varepsilon (\partial_j^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon) - \Gamma_{ir}^{m,\varepsilon} (\partial_j^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_m^\varepsilon) - \Gamma_{jr}^{m,\varepsilon} \partial_m^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon \\ &= \partial_{jr}^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \partial_r^\varepsilon \boldsymbol{g}_i^\varepsilon - \partial_j^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \underbrace{\Gamma_{ir}^{m,\varepsilon} \boldsymbol{g}_m^\varepsilon}_{= \partial_r^\varepsilon \boldsymbol{g}_i^\varepsilon} - \Gamma_{jr}^{m,\varepsilon} \partial_m^\varepsilon \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_i^\varepsilon\,. \end{aligned}$$

■

Bemerkung

a) Sukzessive Anwendung der Rechenregeln im Lemma 3.2.3 liefert

$$v_{i\|jr} = \partial_{rj}^\varepsilon v_i - (\partial_r^\varepsilon \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}) v_p - \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} \partial_r^\varepsilon v_p - \Gamma_{ir}^{m,\varepsilon} \partial_j^\varepsilon v_m - \Gamma_{jr}^{m,\varepsilon} \partial_m^\varepsilon v_i + \Gamma_{jr}^{m,\varepsilon}\, \Gamma_{im}^{p,\varepsilon} v_p\,.$$

b) Im Gegensatz zur Situation im Lemma 3.1.7, vertauschen die zweiten kovarianten Ableitungen auf der Schale. Die Metrik in $\overline{\Omega}^\varepsilon$ ist durch das euklidische Skalarprodukt induziert und nachdem der Riemannsche Tensor, siehe [34], in einem kartesischen Koordinatensystem verschwindet, ist dies auch in jedem anderen Koordinatensystem des euklidischen Raumes der Fall. Es gilt also

$$v_{i\|jk} = v_{i\|kj}.$$

c) Auf der Schale gilt das Lemma von Ricci, [34], nämlich $g_{ij\|k}^\varepsilon = g^{ij,\varepsilon}{}_{\|k} \equiv 0$.

3.2.2 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Schließlich sollen die hier relevanten Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten angegeben werden.

Definition 3.2.5 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 3.2.1. Die Abbildung* Φ^ε *sei wie* (3.10) *gegeben. Es sei* $\boldsymbol{v} = v_s \boldsymbol{g}^{s,\varepsilon} = v^s \boldsymbol{g}^\varepsilon_s$ *ein* $\mathcal{C}^2$*–Vektor– und* ϕ *ein* $\mathcal{C}^2$*–Skalarfeld auf* $\Phi^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$.

(i) Der Ausdruck $\nabla\phi := \boldsymbol{g}^{k,\varepsilon}\partial^\varepsilon_k\phi = \boldsymbol{g}^{k,\varepsilon}\phi_{\|k}$ *heißt* Gradient *von* ϕ.

(ii) Die Invariante (Funktion) $\nabla\cdot\boldsymbol{v} := \boldsymbol{g}^{k,\varepsilon}\cdot\partial^\varepsilon_k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}^{k,\varepsilon}\cdot(v_{j\|k}\boldsymbol{g}^{j,\varepsilon}) = g^{kj,\varepsilon}v_{j\|k} = v^k{}_{\|k}$ *nennt man die* Divergenz *von* $\boldsymbol{v}$.

(iii) Die Funktion $\Delta\phi := \nabla\cdot\nabla\phi = \boldsymbol{g}^{k,\varepsilon}\cdot\partial^\varepsilon_k(\partial^\varepsilon_j\phi\,\boldsymbol{g}^{j,\varepsilon}) = g^{kj,\varepsilon}\phi_{\|jk}$ *heißt* Laplace *von* ϕ.

(iv) Das Feld $\Delta\boldsymbol{v} := (\Delta v_s)\boldsymbol{g}^{s,\varepsilon} = g^{kj,\varepsilon}v_{s\|jk}\,\boldsymbol{g}^{s,\varepsilon}$ *wird als der* Diagonal-Laplace *von* $\boldsymbol{v}$ *bezeichnet.*

Bemerkung

Wegen $v_{s\|jk} = (g^\varepsilon_{sp}\,v^p)_{\|jk} = v^p{}_{\|jk}\,g^\varepsilon_{sp}$ und $g^\varepsilon_{sp}\,\boldsymbol{g}^{s,\varepsilon} = \boldsymbol{g}^\varepsilon_p$ gilt auch $(\Delta v_s)\boldsymbol{g}^{s,\varepsilon} = (\Delta v^p)\boldsymbol{g}^\varepsilon_p$.

Kapitel 4

Das Koitersche Schalenmodell

In diesem Abschnitt wird die Dynamik eines bereits zweidimensionalen Schalenmodells diskutiert. Dessen potentielle Energie stimmt mit derjenigen aus dem Koiterschen Modell [29] überein. Im Zusammenhang mit der Statik von Schalen hat JOHN [25, 26] für ausreichend dünne Schalen nachgewiesen, daß im Inneren der Schale der Spannungszustand approximativ planar ist. Darüber hinaus konnte er zeigen, daß sich Spannungen parallel zur Mittelfläche approximativ linear über die Schalendicke ändern. In KOITER [28, 29] wurden diese Approximationen der Spannungsverteilung a–priori angenommen und mit einer weiteren A–priori–Annahme geometrischer Natur, nämlich der sogenannten *Normalenhypothese*, kombiniert. In [28], Seite 15–16, heißt es: „jeder Punkt auf der Normalen der Mittelfläche bleibt auch nach der Deformation auf der Normalen“. Das ist tatsächlich der erste Teil der sogenannten *Kirchhoff–Love–Hypothese*. Der zweite Teil verlangt zusätzlich, daß der Abstand der Normalenpunkte nach der Deformation unverändert bleibt.

In diesem Kapitel wird erstmals die Dynamik des linearen Koiterschen Schalenmodells mathematisch analysiert. Insbesondere wird die explizite ε –Abhängigkeit der höheren Sobolevnormen des *Koiterschen Flusses* angegeben. Die Kenntnis dieser ist für die Rechtfertigung der Schalendynamik mit Hilfe des hier gewählten Zugangs (Direktorapproximation, siehe Kapitel 6) unerläßlich. Die Fehlerabschätzungen im Kapitel 7 werden bestätigen, daß sich das *dynamische Koitersche Modell* zur Konstruktion einer Approximation für den Fluß auf der Schale eignet. Das gelingt unabhängig von der Form der Mittelfläche.

Im ersten Teil des Kapitels werden die Notationen zum Koiterschen Modell angegeben. Der erste Abschnitt behandelt die elliptische Regularität des assoziierten Randwertproblems mit Hilfe der L^p –Theorie aus AGMON, DOUGLIS & NIRENBERG [2], Chapter IV. Der zweite Abschnitt ist der Regularität der Lösung des relevanten zeitabhängigen Problems für den Fall langsamer Dynamik gewidmet. Hierfür sind keine Einschränkungen der Geometrie der Mittelfläche (abgesehen von der Glattheit der Berandung) erforderlich. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels bereitet die spätere Rechtfertigung der schnellen Schalendynamik vor. Hierzu wird die Regularität des Koiterschen Flusses für Schalen mit elliptischer Mittelfläche diskutiert.

Im linearen Fall wird der *K*oitersche Fluß von der Energie

$$H^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) := B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\zeta}) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\zeta}) + (\dot{\boldsymbol{\zeta}},\, \dot{\boldsymbol{\zeta}})_\omega$$

unter der kanonischen symplektischen Form (mit dem Faktor 2 mutlipliziert) des Raumes $L^2(\omega)^3$ getrieben. Dabei gehört das Paar $(\boldsymbol{\zeta},\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) = (\zeta_i \boldsymbol{a}^i,\, \dot{\zeta}_i \boldsymbol{a}^i)$ zu

$$\mathcal{C}^0\big([0,\, T]; \boldsymbol{V}^K(\omega)\big) \times \mathcal{C}^0\big([0,\, T]; L^2(\omega)^3\big)$$

für ein gegebenes $T > 0$ mit

$$\boldsymbol{V}^K(\omega) := \big\{ \boldsymbol{\eta} = (\eta_\alpha,\, \eta_3) \in H^1(\omega)^2 \times H^2(\omega) \;:\; \boldsymbol{\eta}\big|_{\partial\omega} = 0,\, \partial_n \eta_3\big|_{\partial\omega} = 0 \big\} \;.$$

Mit $\boldsymbol{V}^K(\omega)$ ist also der Raum geometrisch zulässiger Verschiebungen für das Koitersche Modell einer entlang von ganz $\partial\omega$ fest eingespannten Schale bezeichnet. Die Massendichte ist hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf 1 gesetzt. Durch eine passende Gewichtung der Norm in $L^2(\omega)^3$ und entsprechende Anpassung der symplektischen Form läßt sich der allgemeine Fall auf den vorliegenden zurückführen.

Es sei daran erinnert, daß die Geometrienotationen im Kapitel 3 eingeführt sind. Von nun an wird eine Schale fest gewählt, für welche folgende Annahmen über die Regularität der Mittelfläche $S = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\omega})$ gelten sollen.

Hypothese 4.0.1
(H1) *Das Gebiet $\omega \subset \mathbb{R}^2$ besitzt eine Berandung $\partial\omega$ der Klasse $\mathcal{C}^\infty$.*

(H2) *Die Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : \bar{\omega} \to \mathbb{R}^3$ der Schalenmittelfläche S gehört zu $\mathcal{C}^\infty(\bar{\omega})$.*

Bemerkung

Für die Analysis im folgenden ist tatsächlich höchstens $\partial\omega \in \mathcal{C}^4$ und $\boldsymbol{\varphi} \in W^{3,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ erforderlich.

Abmachung 4.0.2 *Da für den Dickenparameter ε nur endlich viele Schranken vorkommen, wird mit ε_0 stets die kleinste unter allen bisher gewählten Schranken bezeichnet.*

Die quadratische Form $B^{\mathrm{m}}(\,\cdot,\, \cdot\,)$ nennt man auch ein *Membranpotential*. Für $\boldsymbol{\zeta} = \zeta_i \boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{V}^K(\omega)$ gilt die Vorschrift

$$B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\eta}) := \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

mit

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \tilde{\lambda} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu \left(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma} \right) \;, \quad \tilde{\lambda} := \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \,, \lambda, \mu > 0$$

und

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) := \frac{1}{2}(\zeta_{\alpha|\beta} + \zeta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\zeta_3 \,. \tag{4.1}$$

Bei der quadratischen Form $B^{\mathrm{b}}(\,\cdot,\,\cdot\,)$ spricht man auch von einem *Biegepotential*. Es gilt für $\boldsymbol{\zeta} = \zeta_i \boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{V}^K(\omega)$ die Vorschrift

$$B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\eta}) := \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) \varrho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

mit

$$\begin{aligned} \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) &:= \big(\zeta_{3|\alpha} + b^\gamma_\alpha \zeta_\gamma\big)_{|\beta} + b^\gamma_\beta(\zeta_{\gamma|\alpha} - b_{\gamma\alpha}\zeta_3) \\ &= \zeta_{3|\alpha\beta} + b^\gamma_\alpha \zeta_{\gamma|\beta} + b^\gamma_\beta \zeta_{\gamma|\alpha} + b^\gamma_{\alpha|\beta}\zeta_\gamma - c_{\alpha\beta}\zeta_3 \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die zweifach kovarianten Tensoren $\gamma_{\alpha\beta}$ und $\varrho_{\alpha\beta}$ der Schalenmittelfläche S erlauben eine geometrische Interpretation. Der Tensor $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ resp. $\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ beschreibt die von $\boldsymbol{\eta}$ induzierte (linearisierte) Änderung des Metriktensors resp. des Krümmungstensors. Es sei $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \boldsymbol{a}^i$ ein glattes Vektorfeld von $\bar{\omega}$ in den $\mathbb{R}^3$. Für ausreichend glatte Parametrisierungen $\boldsymbol{\varphi}$ des Flächenstücks S gilt

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= [a^*_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}]_{\mathrm{lin}} \,, \\ \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= [b^*_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}]_{\mathrm{lin}} \,. \end{aligned}$$

Dabei sind $a_{\alpha\beta}$ und $a^*_{\alpha\beta}$ die kovarianten Komponenten des Metriktensors der Flächenstücke $S = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\omega})$ und $S^* = \boldsymbol{\varphi}^*(\bar{\omega})$ mit $\boldsymbol{\varphi}^* := \boldsymbol{\varphi} + \eta_i \boldsymbol{a}^i$. Die Ausdrücke $b_{\alpha\beta}$ und $b^*_{\alpha\beta}$ sind die kovarianten Komponenten des Krümmungtensors von S und S^*. Mit $[\cdots]_{\mathrm{lin}}$ ist der lineare Anteil bezüglich $\boldsymbol{\eta}$ von $[\cdots]$ bezeichnet. Darüber hinaus besitzen sowohl $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ als auch $\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ eine intrinsische Darstellung. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_\alpha \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{a}_\beta + \partial_\beta \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{a}_\alpha = \gamma_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\eta}) \,, \\ \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= (\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{\eta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{a}_3 = \varrho_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\eta}) \,. \end{aligned}$$

Die Beweise und mehr Details hierzu findet man in den Abschnitten 2.4 und 2.5 von [14].

Definition 4.0.3 *Es sei* $0 < \varepsilon \leq 1$. *Für ausreichend glatte Vektorfelder* $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon$ *über* ω *wird* $L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = \big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\big)^i \boldsymbol{a}_i$ *mit*

$$\begin{aligned} \big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\big)^\sigma &:= -a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta|\tau}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau}\Big(b^\sigma_{\mu|\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) - 2\big(b^\sigma_\tau \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\big)_{|\mu}\Big) \,, \\ \big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\big)^3 &:= -a^{\alpha\beta\sigma\tau} b_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\varrho_{\alpha\beta|\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) - c_{\sigma\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\big) \end{aligned} \tag{4.3}$$

als Koiter–Operator *bezeichnet.*

Eine Interpretation des Koiter–Operators wird im folgenden geliefert. Durch konsequente Anwendung der Beziehung

$$\int_\omega \xi\eta_{|\sigma}\mathrm{d}\omega = -\int_\omega \xi_{|\sigma}\eta\mathrm{d}\omega \qquad \forall \quad \xi,\, \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)\,,$$

sowie aus der Dichtheit von $\mathcal{C}_0^\infty(\omega)^3$ in $\boldsymbol{V}^K(\omega)$ findet man

$$\Big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\eta}\Big)_\omega = B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\eta}) \tag{4.4}$$

für alle $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}^K(\omega)$. In [11], Theorem 1, ist bewiesen, daß eine Konstante $C_1 > 0$ existiert, so daß

$$B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) + B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) \geq C_1\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{\boldsymbol{V}^K(\omega)} \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}^K(\omega) \tag{4.5}$$

besteht. Wegen $0 < \varepsilon \leq 1$ gilt also

$$B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) \geq \frac{1}{3}\varepsilon^2\big(B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) + B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta})\big) \geq C_1\varepsilon^2\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{\boldsymbol{V}^K(\omega)}$$

für alle $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}^K(\omega)$. Dies garantiert insbesondere, daß $L^{K,\varepsilon}$ ein Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{V}^K(\omega)$ und $\big(\boldsymbol{V}^K(\omega)\big)'$ ist. Damit ist

$$D(L^{K,\varepsilon}) := (L^{K,\varepsilon})^{-1}\big|_{L^2(\omega)^3} = \{\boldsymbol{\zeta} \in L^2(\omega)^3 \mid (L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta} \in L^2(\omega)^3\}$$

sinnvoll definiert.

4.1 Ein Existenz– und Eindeutigkeitssatz

Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.1.1 *Es sei $0 < \varepsilon \leq 1$. Der Raum $\mathcal{X}^K := \boldsymbol{V}^K(\omega) \times L^2(\omega)^3$ sei mit der kanonischen symplektischen Form versehen. Dann erzeugt das Hamiltonfunktional $H^{K,\varepsilon}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ in $\mathcal{X}^K$ eine $\mathcal{C}^0$–Gruppe $G^{K,\varepsilon}(t),\, t \in \mathbb{R}$. Setzt man*

$$\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon\big) := \big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(t)\big) := G^{K,\varepsilon}(t)(\boldsymbol{\zeta}_0,\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0)\,,$$

dann gilt

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon \qquad \textit{in} \quad L^2(\omega)^3\,. \tag{4.6}$$

Die folgende Aussage ist wahr:

Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\|\dot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\omega)^3} + \varepsilon^2\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\|^2_{\boldsymbol{V}^K(\omega)} \leq C\Big(\|\dot{\boldsymbol{\zeta}}_0\|^2_{L^2(\omega)^3} + \|\boldsymbol{\zeta}_0\|^2_{\boldsymbol{V}^K(\omega)}\Big) \tag{4.7}$$

für alle $(\boldsymbol{\zeta}_0,\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0) \in D(L^{K,\varepsilon}) \times \boldsymbol{V}^K(\omega)$, alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon \in (0,\, 1)$ gilt.

Beweis. Da die zugrundeliegende symplektische Form die kanonische ist, kann unter Beachtung der $\boldsymbol{V}^K(\omega)$–Elliptizität (4.5) der Satz A.1.3 angewandt werden. Damit existiert also eine $\mathcal{C}^0$–Gruppe in $\mathcal{X}^K$ versehen mit der Energienorm $H^{K,\varepsilon}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^{\frac{1}{2}}$. Die Existenz von $G^{K,\varepsilon}(t)$ sowie die Abschätzung (4.7) folgen dann aus

$$H^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta}_0,\,\dot{\boldsymbol{\zeta}}_0) = H^{K,\varepsilon}\big(\boldsymbol{\zeta}(t),\,\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\big) \geq \big(\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t),\,\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\big)_{L^2(\omega)^3} + C_1\varepsilon^2\|\boldsymbol{\zeta}(t)\|^2_{\boldsymbol{V}^K(\omega)} \tag{4.8}$$

sowie aus der Stetigkeit von $B^{\mathrm{m}}(\,\cdot,\,\cdot\,) + B^{\mathrm{b}}(\,\cdot,\,\cdot\,)$ in $\boldsymbol{V}^K(\omega)^2$.

Die Darstellung (4.6) folgt aus den kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\zeta} &= \frac{\boldsymbol{\delta}H^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\,\dot{\boldsymbol{\zeta}})}{\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\zeta}}}\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= -\frac{\boldsymbol{\delta}H^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\,\dot{\boldsymbol{\zeta}})}{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\zeta}}\end{aligned}$$

mit $\dfrac{\boldsymbol{\delta}H^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\,\dot{\boldsymbol{\zeta}})}{\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\zeta}}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}$ und $\dfrac{\boldsymbol{\delta}H^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\,\dot{\boldsymbol{\zeta}})}{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\zeta}} = L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}$. ■

4.2 Regularität des zeitunabhängigen Problems

Für Funktionen, Vektor– und Tensorfelder auf ω werden kürzere Schreibweisen für deren Normen eingeführt.

Notation 4.2.1 *Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien mit $H^k(\omega)$ die Funktionenräume wie auf Seite* vi *bezeichnet. Es seien $l,\,m \in \mathbb{N}_0$. Die Vereinbarung $H^0(\omega) := L^2(\omega)$ gilt. Für Vektorfelder $\boldsymbol{\zeta} := \zeta_i\boldsymbol{a}^i$ über $S = \boldsymbol{\varphi}(\omega)$ gilt fortan*

$$\boldsymbol{\zeta}_* := \zeta_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha = \zeta^\alpha\boldsymbol{a}_\alpha\,.$$

Außerdem schreibt man

$$\begin{aligned}&\|\zeta_i\|_{k,\omega} := \|\zeta_i\|_{H^k(\omega)}\,, && \|\boldsymbol{\zeta}_*\|_{k,\omega} := (\|\zeta_1\|^2_{H^k(\omega)} + \|\zeta_2\|^2_{H^k(\omega)})^{\frac{1}{2}},\\ &\|\boldsymbol{\zeta}\|_{k,l,m,\omega} := \big(\|\zeta_1\|^2_{H^k(\omega)} + \|\zeta_2\|^2_{H^l(\omega)} + \|\zeta_3\|^2_{H^m(\omega)}\big)^{\frac{1}{2}}, && \|\boldsymbol{\zeta}\|_{k,\omega} := \Big(\sum_{i=1}^{3}\|\zeta_i\|^2_{H^k(\omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},\\ &\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta})\|_{k,\omega} := \Big(\sum_{\alpha,\beta}\|\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\|^2_{H^k(\omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}, && \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{k,\omega} := \Big(\sum_{\alpha,\beta}\|\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\|^2_{H^k(\omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Wie später gezeigt wird, erfordert die Rechtfertigung des Koiterschen Modells Abschätzungen der Form

$$\|\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t)\|_{k,\omega} \leq C(\varepsilon)\|(\boldsymbol{\zeta}_0,\,\dot{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|\,,$$

für $k = 2,\, 3,\, 4$ und $\ell = 0, \ldots, 3$. Dabei ist wieder

$$\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(t),\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(t)\big) := G^{K,\varepsilon}(t)(\boldsymbol{\zeta}_0,\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0)$$

gesetzt. Die Normen auf der rechten Seite hängen von k und ℓ ab und werden später spezifiziert. Für jedes feste $\varepsilon > 0$ sind solche Abschätzungen relativ einfach zu gewinnen. Das Ziel dieses Abschnitts ist aber die explizite Bestimmung der Konstanten $C(\varepsilon)$, so daß eine Abschätzung obiger Gestalt gleichmäßig in ε (für ausreichend kleine ε) besteht. Dazu wird zunächst das zu (4.6) assoziierte Randwertproblem $L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = \boldsymbol{f}$, d. h.

$$-a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta|\tau}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau}\Big(b^\sigma_{\mu|\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) - 2\big(b^\sigma_\tau\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\big)_{|\mu}\Big) = f^\sigma\,, \tag{4.9a}$$

$$-a^{\alpha\beta\sigma\tau}b_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\varrho_{\alpha\beta|\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon) - c_{\sigma\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\big) = f^3\,, \tag{4.9b}$$

$$\zeta_j\big|_{\partial\omega} = 0\,, \tag{4.9c}$$

$$\partial_n\zeta_3\big|_{\partial\omega} = 0 \tag{4.9d}$$

untersucht. Hierbei ist $\boldsymbol{f} = f^i\boldsymbol{a}_i$ ein gegebenes Feld. Zur Regularitätsaussage für (4.9) wird der Satz 15.2 aus AGMON, DOUGLIS & NIRENBERG [1] herangezogen. Daher werden zunächst die dortigen Schreibweisen eingeführt. Die linken Seiten von (4.9) erlauben auch eine Schreibweise mit Matrizen, deren Einträge Differentialoperatoren sind:

$$\mathcal{L}^{ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha)\zeta_j(\boldsymbol{y}) := \big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y})\big)^i = f^i(\boldsymbol{y}) \quad \text{in } \omega,\ \boldsymbol{y} \in \omega\,, \tag{4.10a}$$

$$\mathcal{B}^{qj}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha)\zeta_j(\boldsymbol{y}) = 0 \quad \text{auf } \partial\omega,\ q = 1, \ldots, 4 \tag{4.10b}$$

mit

$$\mathcal{B}^{ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha) := \delta^{ij}\,, \tag{4.11a}$$

$$\mathcal{B}^{4j}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha) := \delta^{3j}\partial_n\,. \tag{4.11b}$$

Wenn die Argumente in $\mathcal{L}^{ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha)$ und $\mathcal{B}^{ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha)$ den Sinn nicht ändern, werden sie fortan ausgelassen. Die Anwendung des Satzes 15.2 aus [1] erfordert die Kenntnis des Hauptteils $(\mathcal{L}^{H,ij})$ von $(\mathcal{L}^{ij})$.

Um $(\mathcal{L}^{H,ij})$ zu finden, wird nach [2], Chapter I, der j-ten Unbekannten ζ_j ein Gewicht $t_j \geq 0$ und der i-ten Zeile $\mathcal{L}^{ij}\zeta_j = f^i$ ein Gewicht $s_i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ so zugeordnet, daß

$$\deg \mathcal{L}^{ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha) \leq s_i + t_j \qquad \text{f.ü. in } \omega$$

gilt. Dabei sei $\mathcal{L}^{ij} = 0$ falls $s_i + t_j < 0$ ist. Der Hauptteil $\big(\mathcal{L}^{H,ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha)\big)$ ist dann exakt durch diejenigen Einträge von $(\mathcal{L}^{ij})$ gegeben, die

$$\deg \mathcal{L}^{ij}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha) = s_i + t_j \qquad \text{f.ü. in } \omega$$

erfüllen. Für elliptische Operatoren ist es stets möglich, solche Gewichte $t_j,\ s_i$ zu finden. Diese müssen aber nicht eindeutig sein. Darüber hinaus ist die Diagonalsumme

$$\sum_{i=1}^{3} s_i + t_i =: 2m$$

stets gerade. Man spricht bei der Zahl $2m$ auch von der *Ordnung des Systems*. Die Zahl m selbst bestimmt die Anzahl der Randbedingungen, die vorgeschrieben werden dürfen und müssen, um überhaupt ein korrekt gestelltes Problem zu erhalten. Es kann zusätzlich noch der q-ten Randbedingung $\mathcal{B}^{qj}\zeta_j = g^q$ ein Gewicht r_q, $q = 1, \dots, m$ so zugeordnet werden, daß stets

$$\deg \mathcal{B}^{qj}(\boldsymbol{y},\, \partial_\alpha) \le r_q + t_j \qquad \text{f.ü. auf } \partial\omega$$

gilt. Der Hauptteil des Randoperators ist dann durch die Einträge von $\mathcal{B}^{qj}$ gegeben, welche

$$\deg \mathcal{B}^{qj} = r_q + t_j$$

erfüllen.

Benützt man die Definitionen von $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)$ und $\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)$, sowie die Gewichte

$$t_1 = t_2 = 3,\ t_3 = 4;\ s_1 = s_2 = -1,\ s_3 = 0;\ r_1 = r_2 = -3,\ r_3 = -4,\ r_4 = -3\,,$$

so läßt sich in (4.9a)–(4.9b) der Hauptteil isolieren. Es ergibt sich das System

$$\Big(a^{\alpha\beta\sigma\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^\alpha_\lambda b^\sigma_\mu\Big)\zeta_{\alpha|\beta\tau} + \frac{2}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau} b^\sigma_\tau\ \zeta_{3|\alpha\beta\mu} \quad = \mathcal{F}^\sigma\,, \tag{4.12a}$$

$$2a^{\alpha\beta\sigma\tau} b^\lambda_\alpha \zeta_{\lambda|\beta\sigma\tau} \qquad + a^{\alpha\beta\sigma\tau}\zeta_{3|\alpha\beta\sigma\tau} \quad = \mathcal{F}^3 \tag{4.12b}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^\sigma :=& - f^\sigma + a^{\alpha\beta\sigma\tau}(b_{\alpha\beta}\zeta_3)_{|\tau} - \frac{1}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau} b^\sigma_{\tau|\mu}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) \\
&- \frac{2}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau} b^\sigma_\tau \Big(b^\lambda_{\alpha|\beta\mu}\zeta_\lambda + 2b^\lambda_{\alpha|\mu}\zeta_{\lambda|\beta} + b^\lambda_{\alpha|\beta}\zeta_{\lambda|\mu} - (c_{\alpha\beta}\zeta_3)_{|\mu}\Big)\,, \\
\mathcal{F}^3 :=& \frac{3}{\varepsilon^2}\Bigg(f^3 + a^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(b_{\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 c_{\sigma\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\big) \\
&- \frac{1}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau}\Big(\big([b^\lambda_\alpha\zeta_\lambda]_{|\beta\sigma\tau} - b^\lambda_\alpha\zeta_{\lambda|\beta\sigma\tau}\big) + \big([b^\lambda_\beta(\zeta_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha}\zeta_3)]_{|\sigma\tau} - b^\lambda_\beta\zeta_{\lambda|\alpha\sigma\tau}\big)\Big)\Bigg)\,.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Man beachte, daß die linken Seiten die höchsten Ableitungen jeder Unbekannten enthalten. Der Hauptteil der kovarianten Ableitungen stimmt mit dem der gewöhnlichen überein. Daher wird auf ein Umschreiben der kovarianten Ableitungen verzichtet.

Satz 4.2.2 *Es sollen **(H1)** und **(H2)** der Hypothese 4.0.1 gelten.* $\boldsymbol{f} = f^\alpha \boldsymbol{a}_\alpha + f^3 \boldsymbol{a}_3$ *sei mit*

$$f^\alpha \in H^{k+1}(\omega)\,, \qquad f^3 \in H^k(\omega)$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$ *gegeben. Dann existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$ *und eine universelle (nur von* ω *abhängige) Konstante* $C_{elli} > 0$ *, so daß die folgende Aussage wahr ist:*
Für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ *besitzt die Lösung* $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = \zeta^\varepsilon_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha + \zeta^\varepsilon_3 \boldsymbol{a}^3$ *von* (4.10) *die Regularität*

$$\zeta_\alpha \in H^{k+3}(\omega)\,, \qquad \zeta_3 \in H^{k+4}(\omega)$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{k+3,\omega} \;\le\; C_{elli}\Big(\|\boldsymbol{f}\|_{k+1,k+1,k,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|_{k,\omega} + \|\zeta^\varepsilon_3\|_{k+2,\omega}\Big)\,, \tag{4.14a}$$

$$\|\zeta^\varepsilon_3\|_{k+4,\omega} \;\le\; C_{elli}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}(\|f^3\|_{k,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|_{k,\omega}) + \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{k+3,\omega}\Big)\,. \tag{4.14b}$$

Beweis. Es seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \varepsilon \le 1$. Für ein festes $\boldsymbol{y} \in \omega$ erhält man mit $\partial_\alpha \mapsto ik_\alpha$, $\boldsymbol{k} := (k_1,\, k_2)$ das Fouriersymbol des Hauptteils von $L^{K,\varepsilon}$ als eine Matrix $\mathcal{A}$ mit Einträgen

$$(\mathcal{A})_{\alpha\beta}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) := \begin{pmatrix} -\Big(a^{1\beta1\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^1_\lambda b^1_\mu\Big) k_\beta k_\tau & -\Big(a^{2\beta1\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^2_\lambda b^1_\mu\Big) k_\beta k_\tau \\ -\Big(a^{1\beta2\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^1_\lambda b^2_\mu\Big) k_\beta k_\tau & -\Big(a^{2\beta2\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^2_\lambda b^2_\mu\Big) k_\beta k_\tau \end{pmatrix}\,,$$

$$(\mathcal{A})_{\lambda3}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) := -\frac{2i}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau} b^\lambda_\tau k_\alpha k_\beta k_\mu\,,$$

sowie

$$(\mathcal{A})_{3\lambda}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) := -2i a^{\alpha\beta\sigma\tau} b^\lambda_\alpha k_\beta k_\sigma k_\tau$$

und schließlich

$$(\mathcal{A})_{33}(\boldsymbol{y}) := a^{\alpha\beta\sigma\tau} k_\alpha k_\beta k_\sigma k_\tau\,.$$

Das Ziel ist zu zeigen, daß eine von ε und $\boldsymbol{y}$ -unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, so daß gleichmäßige Elliptizität für ein System der Ordnung 8, also

$$C^{-1}|\boldsymbol{k}|^8 \le \det \mathcal{A}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) \le C|\boldsymbol{k}|^8 \qquad \forall\, \boldsymbol{y} \in \omega\,, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2 \tag{4.15}$$

und alle ausreichend kleine ε gilt. Durch Entwicklung nach der dritten Spalte findet man

$$\det \mathcal{A}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) \ge\; a^{\alpha\beta\sigma\tau} k_\alpha k_\beta k_\sigma k_\tau \det \tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) - C_0 \varepsilon^2 |\boldsymbol{k}|^8$$

mit $\tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) := \big(\mathcal{A}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})\big)_{\alpha\beta}$ und einer von ε und $\boldsymbol{y}$ –unabhängigen Konstanten $C_0 > 0$. Dabei wurde einerseits die Tatsache benutzt, daß alle von $\boldsymbol{y}$ –abhängigen Größen, d. h. Produkte der Komponenten des Metriktensors, des Krümmungstensors sowie dessen kovariante Ableitungen, zu $L^\infty(\omega)$ gehören. Andererseits wurde die elementare Ungleichung

$$\sum_{\alpha_i} \prod_{i=1}^{8} k_{\alpha_i} \ge -C|\boldsymbol{k}|^8$$

benutzt. Beachte, daß $\tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})$ symmetrisch ist. Um $\det \tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})$ abzuschätzen, benützt man die assoziierte quadratische Form $\boldsymbol{x}^\top \tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ zur Abschätzung der Eigenwerte von $\tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})$. Es gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^\top \tilde{\mathcal{A}} \boldsymbol{x} &= \Big(a^{\alpha\beta\sigma\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^\alpha_\lambda b^\sigma_\mu\Big) x_\alpha x_\sigma k_\beta k_\tau \\ &\geq C_1 \sum_{\alpha,\,\beta} (x_\alpha k_\beta)^2 - C_2 \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\,\beta} (x_\alpha k_\beta)^2 = (C_1 - C_2\varepsilon^2)|\boldsymbol{x}|^2\,|\boldsymbol{k}|^2\end{aligned}$$

mit von ε und $\boldsymbol{y}$–unabhängigen Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Dabei wurden die Symmetrien $a^{\alpha\beta\sigma\tau} = a^{\beta\alpha\sigma\tau} = a^{\alpha\beta\tau\sigma}$ und (gleichmäßige) positive Definitheit des Tensors $a^{\alpha\beta\sigma\tau} = a^{\alpha\beta\sigma\tau}(\boldsymbol{y})$, d. h. ,

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau}(\boldsymbol{y}) t_{\alpha\beta} t_{\sigma\tau} \geq C_1 \sum_{\alpha,\,\beta} (t_{\alpha\beta})^2 \tag{4.16}$$

für alle symmetrischen Matrizen $(t_{\alpha\beta})$ und $\boldsymbol{y} \in \overline{\omega}$, benutzt. Einen Beweis der Abschätzung (4.16) findet man in [14], Theorem 3.3.2, Seite 134. Für $\varepsilon \leq \varepsilon_1 := \sqrt{C_1/(2C_0)}$ liegen die (reellen) Eigenwerte von $\tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})$ also außerhalb der Kugel vom Radius $(C_1 - C_2\varepsilon^2)|\boldsymbol{k}|^2$. Folglich gilt

$$\det \tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) \geq (C_1 - C_2\varepsilon^2)^2 |\boldsymbol{k}|^4 \,. \tag{4.17}$$

Mit nochmaliger Anwendung von (4.16) findet man

$$\det \mathcal{A}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) \geq \Big(C_1(C_1 - C_2\varepsilon^2)^2 - C_0\varepsilon^2\Big)|\boldsymbol{k}|^8 \,.$$

Also gilt für alle $\boldsymbol{y} \in \omega$ und alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_1]$ zunächst

$$\det \mathcal{A}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) \geq (\frac{C_1^3}{4} - \varepsilon^2 C_0)|\boldsymbol{k}|^8$$

und somit

$$\det \mathcal{A}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) \geq \frac{C_1^3}{8}|\boldsymbol{k}|^8$$

für alle $\boldsymbol{y} \in \omega$ und alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ mit

$$\varepsilon_0 := \min\{\sqrt{\frac{C_1^3}{8C_0}},\, \varepsilon_1\} \,.$$

Damit ist mit $C := 8/C_1^3$ die Forderung (4.15) bewiesen. Auf eine Nachprüfung der „complementing condition“ und der „supplementing condition“ wird hier verzichtet, da es sich klar um ein Dirichletsystem handelt, vgl. [52]. Die Voraussetzungen an die Glattheit von ω und $\boldsymbol{\varphi}$ erlauben schließlich die Anwendung des Satzes 15.2 aus [1]. Dieser garantiert hier, daß der Lösungsoperator zu (4.12) unter (4.9c)–(4.9d)

$$(\mathcal{F}^\sigma,\, \mathcal{F}^3) \mapsto \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon :\, H^{k-s_\sigma}(\omega)^2 \times H^{k-s_3}(\omega) \to H^{k+t_\sigma}(\omega)^2 \times H^{k+t_3}(\omega)\,,$$

wenn er existiert, auch stetig abbildet. Darüber hinaus ist für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ dessen Beschränktheitskonstante von ε unabhängig. Aus der $\boldsymbol{V}^K(\omega)$–Elliptizität der zu $L^{K,\varepsilon}$ zugehörigen Dirichletform, siehe (4.5), folgt schließlich mit Lax–Milgram die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Damit hätte man eine Abschätzung der Gestalt

$$\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\|_{k+3,k+3,k+4,\omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{k+1,k+1,k,\omega}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Mit folgenden Argumenten findet man eine feinere Abschätzung, welche zur Rechtfertigung der Dimensionreduktion unerläßlich ist. Für eine Lösung $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon$ zu (4.12) unter (4.9c)–(4.9d) betrachte man das zu (4.12a) äquivalente System

$$\Big(a^{\alpha\beta\sigma\tau} + \frac{4}{3}\varepsilon^2 a^{\lambda\beta\mu\tau} b^\alpha_\lambda b^\sigma_\mu\Big)\zeta^\varepsilon_{\alpha|\beta\tau} = \mathcal{F}^\sigma - \frac{2}{3}\varepsilon^2 a^{\alpha\beta\mu\tau} b^\sigma_\tau \zeta^\varepsilon_{3|\alpha\beta\mu}\,, \tag{4.18}$$

wobei jetzt auf der linken der „Hauptteil in $\boldsymbol{\zeta}_*$“ steht. Dabei sind dieselben Gewichte $t_\alpha,\ s_\beta$ wie bereits eingeführt verwendet. Hierzu gehört das Fouriersymbol $\tilde{\mathcal{A}}(\varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k})$ und (4.17) garantiert die Existenz einer (universellen) Konstanten $C > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{k+3,\omega} &\leq C\Big(\varepsilon^2 \sum_{\alpha,\beta,\mu} \|\zeta^\varepsilon_{3|\alpha\beta\mu}\|_{k+1,\omega} + \sum_\sigma \|\mathcal{F}^\sigma\|_{k+1,k+1,k,\omega}\Big) \\ &\leq C\Big(\varepsilon^2 \|\zeta^\varepsilon_3\|_{k+4,\omega} + \sum_\sigma \|\mathcal{F}^\sigma\|_{k+1,k+1,k,\omega}\Big) \end{aligned} \tag{4.19}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ besteht. Betrachte andererseits die zu (4.12b) äquivalente skalare Gleichung für ζ^ε_3, nämlich

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau}\zeta^\varepsilon_{3|\alpha\beta\sigma\tau} = \mathcal{F}^3 - 2a^{\alpha\beta\sigma\tau} b^\lambda_\alpha \zeta_{\lambda|\beta\sigma\tau}\,. \tag{4.20}$$

Die Gültigkeit von (4.16) garantiert die gleichmäßige Elliptizität des Differentialoperators auf der linken Seite von (4.20). Damit folgt die Existenz einer Konstanten $C > 0$, so daß

$$\|\zeta^\varepsilon_3\|_{k+4,\omega} \leq C\Big(\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{k+3,\omega} + \|\mathcal{F}^3\|_{k,\omega}\Big) \tag{4.21}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ gilt. Nach Ausnutzung von $H^m(\omega) \hookrightarrow H^{m'}(\omega)$ für $m \geq m'$ und mit eventueller Verkleinerung von ε_0 bekommt man durch Kombination von (4.19) und (4.21) schließlich die Abschätzung (4.14) mit einer übersichtlichen Abhängigkeit von ε. ■

Für spätere Anwendungen werden zwei Spezialfälle der obigen Abschätzung (4.14) benötigt. Der erste Fall behandelt den Fall kleiner Lasten bezüglich ε. Die Schranke ε_0 für ε ist im folgenden stets diejenige aus dem eben bewiesenen Satz.

Korollar 4.2.3 *Es sei* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ f^\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ *in* $H^1(\omega)$, $f^3 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ *in* $L^2(\omega)$ *für* $\varepsilon \to 0$. *Die Lösung* $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = \zeta^\varepsilon_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha + \zeta^\varepsilon_3 \boldsymbol{a}^3$ *von* (4.10) *genügt dann den Abschätzungen:*

$$\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\|_{1,1,2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|_{0,\omega}) \leq C\varepsilon\,, \tag{4.22a}$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{3,\omega} \leq C\,, \tag{4.22b}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\zeta^\varepsilon_3\|_{3,\omega} + \varepsilon\|\zeta^\varepsilon_3\|_{4,\omega} \leq C \tag{4.22c}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *. Die Konstanten* C *sind linear in* $\|\boldsymbol{f}\|_{1,1,0,\omega}$ *.*

Beweis. Mit C_q, $q = 0, \ldots, 4$ werden positive, von ε unabhängige Konstanten bezeichnet. Die Gültigkeit von (4.5) zusammen mit (4.16) zieht nach sich, daß das zu (4.10) zugehörige Variationsproblem genau eine Lösung in $\boldsymbol{V}^K(\omega)$ besitzt. Es gilt die Variationsabschätzung

$$\varepsilon^2 \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\|^2_{1,1,2,\omega} \leq C_0(\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^2 \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|^2_{0,\omega}) \leq C_1 \|\boldsymbol{f}\|_{1,1,0,\omega} \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\|_{1,1,2,\omega} \ .$$

Mit der Voraussetzung an $\boldsymbol{f}$ folgt also (4.22a). Die Anwendung von (4.14a) für $k = 0$ liefert dann $\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{3,\omega} \leq C_2$, also erst recht $\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*\|_{2,\omega} \leq C_2$. Das beweist die Ungleichung (4.22b). Mit diesem Ergebnis kann (4.14b) für $k = 0$ angewandt werden, was dann $\|\zeta^\varepsilon_3\|_{4,\omega} \leq C_3/\varepsilon$ liefert. Da aber $\|\zeta^\varepsilon_3\|_{2,\omega} \leq C$ gilt, folgt durch Interpolation

$$\|\zeta^\varepsilon_3\|_{3,\omega} \leq C_4 \sqrt{\|\zeta^\varepsilon_3\|_{2,\omega}} \sqrt{\|\zeta^\varepsilon_3\|_{4,\omega}} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \ .$$

Das beendet den Beweis. ■

Bemerkung

Der obige Beweis zeigt auch, daß die Abschätzung (4.14) sogar für $k \geq -2$ korrekt ist.

Der Fall großer Lasten wird im Zusammenhang mit elliptischen Schalen abgehandelt.

4.3 Regularität für den Fall langsamer Dynamik

In diesem Abschnitt wird die Regularität des zeitabhängigen Problems (4.6) auf der *langsamen Zeitskala* $\tau := \varepsilon t$ diskutiert.

Im Gegensatz zu holomorphen Halbgruppen, agieren die $\mathcal{C}^0$–(Halb–)Gruppen nicht glättend. Vielmehr muß die gewünschte Glattheit schon in den Anfangsdaten enthalten sein. Die Hilfsmittel zu Regularitätsaussagen für das hier vorliegende Problem sind im nächsten Lemma und Korollar aufgeführt.

Lemma 4.3.1 *Der lineare Operator* L *mit dem Definitionsbereich* $D(L)$ *erzeuge im Banachraum* $\mathcal{X}$ *eine* $\mathcal{C}^0$*–Gruppe* $G(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *. Ist* $\boldsymbol{u} \in D(L)$ *, dann gilt*

$$G(t)\boldsymbol{u} \in D(L) \quad \textit{und} \quad LG(t)\boldsymbol{u} = G(t)L\boldsymbol{u}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ *.*

Beweis. Siehe z. B. A. FRIEDMAN, [20], Lemma 1.1, Seite 93. ■

Korollar 4.3.2 *Es sollen die Voraussetzungen und Bezeichnungen des obigen Lemmas gelten. Für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *ist die folgende Aussage wahr. Ist* $\boldsymbol{u} \in D(L^m)$ *, dann gilt*

$$G(t)\boldsymbol{u} \in D(L^m) \quad \textit{und} \quad L^m G(t)\boldsymbol{u} = G(t)L^m\boldsymbol{u}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ *.*

Beweis. Durch Induktion nach m unter konsequenter Anwendung des Lemmas 4.3.1. ■

Im Fall des Problems (4.6) ist die Gruppe $G^{K,\varepsilon}(t)$ von

$$\mathcal{L}^{K,\varepsilon} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L^{K,\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathcal{X}^K$ mit $D(\mathcal{L}^{K,\varepsilon}) = D(L^{K,\varepsilon}) \times \boldsymbol{V}^K(\omega)$ erzeugt. Im folgenden bedeutet für ein $m \in \mathbb{N}$, daß

$$(\boldsymbol{\eta},\, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in D\big((\mathcal{L}^{K,\varepsilon})^m\big) \qquad :\Leftrightarrow (\mathcal{L}^{K,\varepsilon})^m(\boldsymbol{\eta},\, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathcal{X}^K$$

gilt. Konkret für $m = 4$ hat man somit

$$(\boldsymbol{\eta},\, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in D\big((\mathcal{L}^{K,\varepsilon})^4\big) \qquad \Leftrightarrow (\boldsymbol{\eta},\, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in D\big((L^{K,\varepsilon})^{5/2}\big) \times D\big((L^{K,\varepsilon})^2\big)\,.$$

Die Wohldefiniertheit von $(L^{K,\varepsilon})^{1/2}$ folgt aus (4.5) und (4.4). Der Satz 4.2.2 klärt die Struktur von $D(L^{K,\varepsilon})$.

Hinsichtlich der späteren Anwendung wird hier nur der benötigte Fall ausführlich beschrieben.

Definition 4.3.3 *Es seien $\boldsymbol{p}_0^\varepsilon$ resp. $\boldsymbol{p}_1^\varepsilon$ Elemente aus $D\big((L^{K,\varepsilon})^{3/2}\big)$ resp. $D\big(L^{K,\varepsilon}\big)$, die für $\varepsilon \to 0$ das Landau-Symbol $\mathcal{O}(1)$ in $H^4(\omega) \times H^4(\omega) \times H^6(\omega)$ resp. $H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega)$ besitzen. Dann werden die Lösungen $\boldsymbol{\zeta}_k^\varepsilon,\ (k = 0,\, 1)$ zu*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}_k = -\varepsilon^2 \boldsymbol{p}_k^\varepsilon \qquad \textit{in } L^2(\omega)^3 \tag{4.23}$$

unter Randbedingungen (4.11) reduzierte Anfangsbedingungen der langsamen Schalendynamik zu $\boldsymbol{p}_k^\varepsilon$ *genannt.*

Die obige Definition sieht an dieser Stelle künstlich aus. Später wird dem Leser gezeigt, daß $\boldsymbol{p}_k^\varepsilon$ die Mittelwerte (über die Schalendicke) der Anfangsbeschleunigungen des dreidimensionalen Problems sind. Die Gleichung (4.23) wird dann die Konstruktionsvorschrift für die Anfangsbedingungen des zugehörigen dimensionsreduzierten Problems sein. Das Auftreten des Faktors ε^2 in (4.23) ist auf die Einführung der langsamen Zeitskala $\tau = \varepsilon t$ zurückzuführen. Es gilt der folgende Regularitätssatz für die langsame Koiter–Dynamik.

Satz 4.3.4 *Die Annahmen **(H1)** und **(H2)** der Hypothese 4.0.1 sollen gelten. Es seien $(\boldsymbol{\zeta}_0^\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}_1^\varepsilon)$ laut obiger Definition 4.3.3 gegeben. Für $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ sei mit $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ die Lösung zu*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon \qquad \textit{in} \quad L^2(\omega)^3\,, \tag{4.24}$$

mit

$$\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\zeta}_0^\varepsilon\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\zeta}_1^\varepsilon$$

unter Randbedingungen (4.11) *bezeichnet. Dann existiert eine Konstante* $C > 0$ *, so daß*

$$\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\|_{1,1,2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega}) \;\leq\; C\varepsilon\,, \tag{4.25a}$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*(\tau)\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_*(\tau)\|_{3,\omega} \;\leq\; C\,, \tag{4.25b}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\zeta^\varepsilon_3(\tau)\|_{3,\omega} + \varepsilon\|\zeta^\varepsilon_3(\tau)\|_{4,\omega} \;\leq\; C \tag{4.25c}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *und alle* $\tau \in \mathbb{R}$ *gilt. Für*

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$$

gilt die gleiche Aussage mit Abschätzungen

$$\|\boldsymbol{\gamma}\big(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\|_{1,1,2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega}) \;\leq\; C\,, \tag{4.26a}$$

$$\|\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon_*(\tau)\|_{2,\omega} + \|\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon_*(\tau)\|_{3,\omega} \;\leq\; C/\varepsilon\,, \tag{4.26b}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\ddot{\zeta}^\varepsilon_3(\tau)\|_{3,\omega} + \varepsilon\|\ddot{\zeta}^\varepsilon_3(\tau)\|_{4,\omega} \;\leq\; C/\varepsilon\,. \tag{4.26c}$$

In (4.25) *kann* $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ *durch* $\dot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)$ *, und in* (4.26) *kann* $\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)$ *durch* $\dddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)$ *ersetzt werden. Darüber hinaus ist jede der obigen Konstanten* C *durch ein positives Vielfaches von*

$$\|\boldsymbol{p}^\varepsilon_0\|_{4,4,6,\omega} + \|\boldsymbol{p}^\varepsilon_1\|_{3,3,4,\omega}$$

nach oben beschränkt.

Beweis. Die Existenz von $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ ist durch den Satz 4.1.1 geklärt. Es bleibt die Abschätzungen zu beweisen. Es sei

$$H^{K,\varepsilon}_{\text{slow}}(\boldsymbol{\zeta},\, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) := B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon^2(\dot{\boldsymbol{\zeta}},\, \dot{\boldsymbol{\zeta}})_\omega$$

mit

$$B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\zeta}) := B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\zeta}) + \frac{1}{3}\varepsilon^2 B^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\zeta})$$

die Energie der langsamen Koiter–Dynamik bezeichnet. In der Definition der Größen $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_k$, $(k = 0,\, 1)$ und der Forderung an die zugehörigen Erzeuger $\boldsymbol{p}^\varepsilon_k$, siehe Definition 4.23, ist enthalten, daß $\boldsymbol{p}^\varepsilon_k$ mindestens zu $H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ gehört. Damit kann der Satz 4.2.2 angewandt werden. Es folgt

$$(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_1) \in D\big((L^{K,\varepsilon})^{5/2}\big) \times D\big((L^{K,\varepsilon})^2\big) \tag{4.27}$$

und aus (4.14) die Abschätzung

$$\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_k)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_k\|_{1,1,2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_k)\|_{0,\omega}) \;\leq\; C\varepsilon\|\boldsymbol{p}^\varepsilon_k\|_{1,1,2,\omega}\,, \tag{4.28a}$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_{k,*}\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_{k,*}\|_{3,\omega} \;\leq\; C\|\boldsymbol{p}^\varepsilon_k\|_{1,1,2,\omega}\,, \tag{4.28b}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\zeta^\varepsilon_{k,3}\|_{3,\omega} + \varepsilon\|\zeta^\varepsilon_{k,3}\|_{4,\omega} \;\leq\; C\|\boldsymbol{p}^\varepsilon_k\|_{1,1,2,\omega} \tag{4.28c}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Aus (4.27) und dem Korollar 4.3.2 folgt also

$$\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) \in D\big((\mathcal{L}^{K,\varepsilon})^4\big)\,.$$

Damit kann $\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)$ mindestens viermal nach τ differenziert werden, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\tau^\ell}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) \end{pmatrix} = (\mathcal{L}^{K,\varepsilon})^\ell \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) \end{pmatrix} \quad \in \mathcal{X}^K \tag{4.29}$$

für $\ell = 1, \ldots, 4$. Darüber hinaus ist jede der Gleichungen (4.29) Hamiltonisch (bezüglich der kanonischen symplektischen Form auf $\mathcal{X}^K$) mit der Energieerhaltung

$$H^{K,\varepsilon}_{\text{slow}}\Big(\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\tau^\ell}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\ \frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}\tau^{\ell+1}}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\Big) = H^{K,\varepsilon}_{\text{slow}}\Big(\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\tau^\ell}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\ \frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}\tau^{\ell+1}}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0)\Big) \tag{4.30}$$

für $\ell = 0, \ldots, 4$. Insbesondere erhält man für $\ell = 0$

$$\begin{aligned} H^{K,\varepsilon}_{\text{slow}}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) &= H^{K,\varepsilon}_{\text{slow}}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_1\big) \\ &\le C\Big(\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0\big)\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^2\|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0\big)\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^2(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_1,\ \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_1)_\omega\Big)\,. \end{aligned}$$

Mit (4.28a) ist der letzte Term durch $C\varepsilon^2(\|\boldsymbol{p}^\varepsilon_0\|^2_{1,1,2,\omega} + \|\boldsymbol{p}^\varepsilon_1\|^2_{1,1,2,\omega})$ beschränkt. Beachtet man noch, daß aus (4.23) die Gültigkeit von

$$B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0,\ \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0) = -\varepsilon^2(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0,\ \boldsymbol{p}^\varepsilon_0)_\omega$$

folgt, so hat man damit die Abschätzung (4.25a) gezeigt.

Die Beziehung (4.30) liefert für $\ell = 1$

$$\varepsilon^2\|\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\|^2_{0,\omega} \le H^{K,\varepsilon}_{\text{slow}}\big(\dot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon_1(0),\ \ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0)\big)\,.$$

Da aber $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ die Gleichung (4.24) löst, folgt aus der Stetigkeit von $\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)$ und aus (4.23)

$$-\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0) = L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_0 = -\varepsilon^2\boldsymbol{p}^\varepsilon_0 \qquad \text{in} \quad D\big((L^{K,\varepsilon})^{3/2}\big)\,.$$

Somit ergibt sich insbesondere

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\|\ddot{\zeta}^\varepsilon_3(\tau)\|^2_{0,\omega} &\le B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_1,\ \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon_1) + \varepsilon^2\big(\boldsymbol{p}^\varepsilon_0,\ \boldsymbol{p}^\varepsilon_0\big)_\omega \\ &\le C\varepsilon^2(\|\boldsymbol{p}^\varepsilon_0\|^2_{1,1,2,\omega} + \|\boldsymbol{p}^\varepsilon_1\|^2_{1,1,2,\omega})\,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Für $\ell = 2$ liefert (4.30) unter anderem auch

$$\begin{aligned} C_0\varepsilon^2\|\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\|^2_{1,1,2,\omega} &\le C_1(\|\boldsymbol{\gamma}\big(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\big)\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^2\|\boldsymbol{\varrho}\big(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)\big)\|^2_{0,\omega}) \\ &\le B^{K,\varepsilon}\big(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0),\ \ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0)\big) + \varepsilon^2\big(\dddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0),\ \dddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0)\big)_\omega \\ &= \|\boldsymbol{p}^\varepsilon_0\|^2_{1,1,2,\omega} + \varepsilon^2(\boldsymbol{p}^\varepsilon_1,\ \boldsymbol{p}^\varepsilon_1)_\omega\,. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung beweist die Abschätzung (4.26a). Zusammen mit (4.31) kann (4.14) mit

$$\boldsymbol{f} := -\varepsilon^2 \ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)$$

herangezogen werden. Das liefert die Richtigkeit der Abschätzungen (4.25).

Um die höheren Sobolevnormen für $\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau)$ abzuschätzen, wird der Satz 4.2.2 auf

$$L^{K,\varepsilon}\ddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(\tau) = -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\tau^4}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) \tag{4.32}$$

angewandt. Für $\ell = 3$ erhält man aus (4.30)

$$\begin{aligned} C_0\varepsilon^2 \Big\|\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\tau^4}\zeta_3^\varepsilon(\tau)\Big\|_{0,\omega}^2 &\leq B^{K,\varepsilon}\big(\ddddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0),\, \dddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0)\big) + \varepsilon^2\big(\ddddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0),\, \dddot{\boldsymbol{\zeta}}^\varepsilon(0)\big)_\omega \\ &= B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1^\varepsilon,\, \boldsymbol{p}_1^\varepsilon) + \varepsilon^2\Big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{p}_0^\varepsilon,\, L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{p}_0^\varepsilon\Big)_\omega \\ &\leq C_1\big(\|\boldsymbol{p}_1^\varepsilon\|_{1,1,2,\omega}^2 + \varepsilon^2\|\boldsymbol{p}_0^\varepsilon\|_{3,3,4,\omega}^2\big)\,. \end{aligned}$$

Schließlich liefert (4.30) für $\ell = 4$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} C_0\varepsilon^2 \Big\|\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\tau^4}\boldsymbol{\zeta}_*^\varepsilon(\tau)\Big\|_{1,\omega}^2 &\leq B^{K,\varepsilon}\big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{p}_0^\varepsilon,\, L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{p}_0^\varepsilon\big) + \varepsilon^2\Big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{p}_1^\varepsilon,\, L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{p}_1^\varepsilon\Big)_\omega \\ &\leq C_1\big(\|(L^{K,\varepsilon})^{3/2}\boldsymbol{p}_0\|_{0,\omega}^2 + \varepsilon^2\|\boldsymbol{p}_1^\varepsilon\|_{3,3,4,\omega}^2\big)\,. \end{aligned}$$

Mit den letzten beiden Ungleichungen, sowie mit der bereits bewiesenen Abschätzung (4.26a), kann auf (4.32) der Satz 4.2.2 angewandt werden. Da jetzt die rechte Seite eine ε–Potenz weniger besitzt als im Korollar 4.2.3 vorausgesetzt wurde, ergeben sich also die Abschätzungen (4.26). ■

4.4 Koiterscher Fluß bei elliptischen Schalen

Von besonderem Interesse in der Theorie der Schalen sind diejenigen mit elliptischer Mittelfläche. Im Konstruktionswesen werden solche Schalen häufig als perfekte Tragwerke bezeichnet. Diese vermögen aufgrund ihrer Geometrie bei richtiger Einspannung große Lasten bei hoher Schlankheit zu tragen.

Definition 4.4.1 *Ein Flächenstück $S = \boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ heißt (gleichmäßig)* elliptisch *genau dann, wenn sein Krümmungstensor $\big(b_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})\big)$ definit (positiv oder negativ) ist, d.h. , es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß*

$$\sum_\alpha |\eta^\alpha|^2 \leq C|b_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})\eta^\alpha\eta^\beta| \qquad \forall\, \boldsymbol{y} \in \overline{\omega},\, \forall\,(\eta^\alpha) \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Eine Schale $\mathcal{S}^\varepsilon = \Phi^\varepsilon(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ laut Definition 3.2.2, (i), heißt elliptisch *genau dann, wenn ihre Mittelfläche $S = \boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ elliptisch ist.*

Bemerkung

Elliptische Schalen besitzen in jedem Punkt ihrer Mittelfläche eine positive Gaußkrümmung. Insbesondere ist ein Vorzeichenwechsel der Hauptkrümmungen ausgeschlossen.

Die folgende Ungleichung Kornschen Typs ist in [14], Theorem 2.7-3, Seite 108, bewiesen.

Lemma 4.4.2 *Es gelte die Annahme **(H2)** der Hypothese 4.0.1. Das Flächenstück $\boldsymbol{\varphi}(\overline{\omega})$ sei elliptisch. Dann existiert eine Konstante $C = C(\omega,\, \boldsymbol{\varphi}) > 0$, so daß*

$$\begin{gathered} \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta})\|_{0,\omega} \geq C\big(\|\boldsymbol{\eta}_*\|_{1,\omega} + \|\eta_3\|_{0,\omega}\big) \\ \forall \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}^M(\omega) := H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega) \end{gathered} \tag{4.33}$$

besteht.

Bemerkung

a) Die Ungleichung (4.33) garantiert also, daß die Seminorm

$$\boldsymbol{V}^M(\omega) \ni \boldsymbol{\eta} \mapsto \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta})\|_{0,\omega}$$

tatsächlich eine Norm ist, die zur gewöhnlichen Norm des Raumes $H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ äquivalent ist.

b) Schalen, bei welchen $\|\boldsymbol{\gamma}(\,\cdot\,)\|_{0,\omega}$ eine Norm über dem Raum zulässiger Verschiebungen ist, nennt man auch *Membranschalen*. Ist $\|\boldsymbol{\gamma}(\,\cdot\,)\|_{0,\omega}$ dagegen eine echte Seminorm, so spricht man auch von *verallgemeinerten Membranschalen*, siehe hierzu [7] für mehr Details.

c) Der Raum $\boldsymbol{V}^M(\omega)$ wird gelegentlich auch als *Membranraum der Schale* bezeichnet.

d) In SLICARU [56, 57] ist gezeigt, daß die hinreichenden Bedingungen im Lemma 4.4.2 für die Gültigkeit von (4.33) tatsächlich auch notwendig sind. Die Fläche S muß notwendigerweise elliptisch und die zulässigen Vektorfelder $\boldsymbol{\eta}$ müssen zu $\boldsymbol{V}^M(\omega)$ gehören, wenn eine Ungleichung wie in (4.33) bestehen soll.

Die obige Ungleichung (4.33) zieht zusammen mit dem Lemma A.1.4 die Existenz eines „Membranflusses“ auf $\boldsymbol{V}^M(\omega) \times L^2(\omega)^3$ nach sich. Dieser wird von der Energie

$$H^M(\boldsymbol{\eta},\, \dot{\boldsymbol{\eta}}) := B^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) + (\dot{\boldsymbol{\eta}},\, \dot{\boldsymbol{\eta}})_\omega$$

unter der kanonischen symplektischen Form auf $L^2(\omega)^3$ erzeugt. Im Gegensatz zum Koiterschen Modell ist das hier vorliegende nicht singulär gestört. Grundsätzlich ist es möglich, den von H^M erzeugten Fluß als Ausgangspunkt für eine Approximation der Schalendynamik im Dreidimensionalen zu verwenden. In dieser Arbeit wird auf diesen Zugang verzichtet. Der Grund dafür ist, daß beim Erzwingen von $\eta_3 \in H_0^1(\omega)$ schon im führenden Term ein Grenzschichtprofil auftritt. Vielmehr wird hier auch die Rechtfertigung der Approximation für Membranschalen mit Hilfe des Koiterschen Modells bevorzugt.

Zur Vorbereitung der Membrananalyse sollen in den nächsten Unterabschnitten Abschätzungen für den Fall großer Lasten und schneller Dynamik bereitgestellt werden.

4.4.1 Regularität im zeitunabhängigen Fall

Es gilt das zum Korollar 4.2.3 analoge

Korollar 4.4.3 *Es sollen* ***(H1)*** *und* ***(H2)*** *der Hypothese 4.0.1 für ein elliptisches Flächenstück gelten. Für* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *sei* $\boldsymbol{f}$ *mit* $f^\alpha = \mathcal{O}(1)$ *in* $H^1(\omega)$ *und* $f^3 = \mathcal{O}(1)$ *in* $L^2(\omega)$ *für* $\varepsilon \to 0$ *vorgelegt. Dann existiert ein* $C > 0$*, so daß die Lösung* $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon = \eta^\varepsilon_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha + \eta^\varepsilon_3 \boldsymbol{a}^3$ *von* (4.9) *den Abschätzungen*

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon\|_{1,1,0,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\eta^\varepsilon_3\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{0,\omega}) \leq C\,, \tag{4.34a}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon\|_{2,2,1,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{1,\omega} + \varepsilon(\|\eta^\varepsilon_3\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{1,\omega}) \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \tag{4.34b}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon_*\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{2,\omega} + \varepsilon(\|\eta^\varepsilon_3\|_{4,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{2,\omega}) \leq \frac{C}{\varepsilon} \tag{4.34c}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *genügt.*

Beweis. Es gelten die Voraussetzungen des Korollars. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon$ ist klar. Aus der Ungleichung (4.33) bekommt man eine bessere Variationsabschätzung als bei Schalen beliebiger Mittelfläche. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon\|^2_{1,1,0,\omega} \leq C_0(\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^2\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|^2_{0,\omega}) &\leq C_1\|\boldsymbol{f}\|_{1,1,0,\omega}\,\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon\|_{1,1,0,\omega} \\ &\leq C_2\|\boldsymbol{f}\|_{1,1,0,\omega}\,\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{0,\omega} \end{aligned}$$

sowie

$$\varepsilon^2\|\eta^\varepsilon_3\|^2_{2,\omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{1,1,0,\omega}\,.$$

Das beweist die Ungleichung (4.34a) sogar für $\varepsilon \in (0,\,1)$.

Die Voraussetzung des Satzes 4.2.2 sind für $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0]$ erfüllt. Das erlaubt die Anwendung von (4.14) für $k = 0$. Zusammen mit (4.34a) ergibt sich

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon_*\|_{3,\omega} \leq \frac{C}{\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad \|\eta^\varepsilon_3\|_{4,\omega} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\,.$$

Wegen

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon_*\|_{1,\omega} \leq C \qquad \text{und} \qquad \|\eta^\varepsilon_3\|_{2,\omega} \leq \frac{C}{\varepsilon}$$

folgt durch Interpolation

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon_*\|_{2,\omega} \leq \frac{C}{\varepsilon^{1/2}} \qquad \text{und} \qquad \|\eta^\varepsilon_3\|_{4,\omega} \leq \frac{C}{\varepsilon^{3/2}}\,.$$

Die Benutzung dieser Ergebnisse zusammen mit

$$\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{s,\omega} + \varepsilon\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{s,\omega} \leq C\big(\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon\|_{s+1,s+1,s,\omega} + \varepsilon\|\eta^\varepsilon_3\|_{s+2,\omega}\big)$$

für $s = 1$ und $s = 2$ liefert die Abschätzungen (4.34b) –(4.34c) und beendet den Beweis.

■

Bemerkung
Die zentrale Rolle der Ungleichung Kornschen Typs (4.33) ist wiederholt hervorzuheben. Ohne deren Gültigkeit hätte man für $\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{0,\omega}$ bestenfalls eine Abschätzung der Gestalt

$$\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon)\|_{0,\omega} \leq \frac{C}{\varepsilon}\,.$$

Damit würde eine Rechtfertigung der Membrandynamik scheitern.

4.4.2 Regularität im zeitabhängigen Fall

Für Membranschalen läßt sich mit Hilfe des Koiterschen Modells auch eine schnelle Dynamik, d. h. diejenige auf der unskalierten Zeitskala, rechtfertigen. Die Grundlagen hierfür werden in diesem Abschnitt bereitgestellt.

Definition 4.4.4 *Es seien* $\boldsymbol{q}_0^\varepsilon$ *resp.* $\boldsymbol{q}_1^\varepsilon$ *Elemente aus* $D\big((L^{K,\varepsilon})^{3/2}\big)$ *resp.* $D\big(L^{K,\varepsilon}\big)$*, die für* $\varepsilon \to 0$ *das Landau-Symbol* $\mathcal{O}(1)$ *in* $H^4(\omega) \times H^4(\omega) \times H^6(\omega)$ *resp.* $H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega)$ *besitzen. Dann werden die Lösungen* $\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon,\ (k = 0,\ 1)$ *zu*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\eta}_k = -\boldsymbol{q}_k^\varepsilon \qquad \text{in } L^2(\omega)^3 \tag{4.35}$$

unter Randbedingungen (4.11) reduzierte Anfangsbedingungen der schnellen Schalendynamik zu $\boldsymbol{q}_k^\varepsilon$ *genannt.*

Diese Definition ist das Analogon zur Definition 4.3.3. Es gilt der folgende Satz für die schnelle Koiter–Dynamik im Falle elliptischer Mittelflächen.

Satz 4.4.5 *Es sollen die Annahmen* ***(H1)*** *und* ***(H2)*** *der Hypothese 4.0.1 für ein elliptisches Flächenstück gelten. Es seien* $(\boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon,\ \boldsymbol{\eta}_1^\varepsilon)$ *laut Definition 4.4.4 gegeben. Für* $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$ *mit dem* ε_0 *aus dem Satz 4.2.2 bezeichnet* $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *die Lösung zu*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon \qquad \text{in} \quad L^2(\omega)^3\,, \tag{4.36}$$

mit

$$\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\eta}_1^\varepsilon$$

unter Randbedingungen (4.11). *Dann existiert eine Konstante* $C > 0$*, so daß*

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\|_{1,1,0,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\eta_3^\varepsilon(t)\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega}) \;\leq\; C\,, \tag{4.37a}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\|_{2,2,1,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega} + \varepsilon(\|\eta_3^\varepsilon(t)\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega}) \;\leq\; \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \tag{4.37b}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}_*^\varepsilon(t)\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{2,\omega} + \varepsilon(\|\eta_3^\varepsilon(t)\|_{4,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{2,\omega}) \;\leq\; \frac{C}{\varepsilon} \tag{4.37c}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *und alle* $t \in \mathbb{R}$ *genügt. Für*

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$$

ist die gleiche Aussage mit Abschätzungen

$$\|\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\|_{1,1,0,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\ddot{\eta}_3^\varepsilon(t)\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega}) \;\leq\; C\,, \tag{4.38a}$$

$$\|\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\|_{2,2,1,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega} + \varepsilon(\|\ddot{\eta}_3^\varepsilon(t)\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega}) \;\leq\; \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \tag{4.38b}$$

$$\|\ddot{\boldsymbol{\eta}}_*^\varepsilon(t)\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{2,\omega} + \varepsilon(\|\ddot{\eta}_3^\varepsilon(t)\|_{4,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{2,\omega}) \;\leq\; \frac{C}{\varepsilon} \tag{4.38c}$$

wahr. Die gleichen Abschätzungen gelten für $\dot{\eta}^\varepsilon(t)$ *und* $\dddot{\eta}^\varepsilon(t)$ *. Die Konstanten* C *können durch ein positives Vielfaches von* $\|\boldsymbol{q}_0^\varepsilon\|_{4,4,6,\omega} + \|\boldsymbol{q}_1^\varepsilon\|_{3,3,4,\omega}$ *nach oben beschränkt werden.*

Beweis. Mit

$$H_{\text{fast}}^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\eta},\, \dot{\boldsymbol{\eta}}) := B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{\eta}) + (\dot{\boldsymbol{\eta}},\, \dot{\boldsymbol{\eta}})_\omega$$

sei die Energie der schnellen Koiter–Dynamik bezeichnet. Aus der Definition der reduzierten Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon$, $(k = 0,\, 1)$ folgt, daß die zugehörigen Erzeuger $\boldsymbol{q}_k^\varepsilon$ mindestens zu $H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ gehören. Damit kann also das Korollar 4.4.3 angewandt werden. Es folgt

$$\|\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon\|_{1,1,0,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon)\|_{0,\omega} + \varepsilon(\|\eta_{k,3}^\varepsilon\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon)\|_{0,\omega}) \;\leq\; C\,, \tag{4.39a}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon\|_{2,2,1,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon)\|_{1,\omega} + \varepsilon(\|\eta_{k,3}^\varepsilon\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon)\|_{1,\omega}) \;\leq\; \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \tag{4.39b}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}_{k,*}^\varepsilon\|_{3,\omega} + \|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon)\|_{2,\omega} + \varepsilon(\|\eta_{k,3}^\varepsilon\|_{4,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\eta}_k^\varepsilon)\|_{2,\omega}) \;\leq\; \frac{C}{\varepsilon} \tag{4.39c}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Darüber hinaus ist C proportional zu $C_1\big(\|\boldsymbol{q}_0\|_{4,4,6,\omega} + \|\boldsymbol{q}_1^\varepsilon\|_{3,3,4,\omega}\big)$. Wie im Beweis des Satzes 4.3.4 gezeigt, folgert man auch hier die Energieerhaltung

$$H_{\text{fast}}^{K,\varepsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, \frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}t^{\ell+1}}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\Big) = H_{\text{fast}}^{K,\varepsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0),\, \frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}t^{\ell+1}}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0)\Big) \tag{4.40}$$

für $\ell = 0,\, \ldots\,,\, 4$. Aus der Definition von $\boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon$ folgt

$$B^{K,\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon,\, \boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon) = -(\boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon,\, \boldsymbol{q}_0^\varepsilon)_\omega\,.$$

Zusammen mit der Energieerhaltung (4.40) für $\ell = 0$ erhält man wie im Beweis des Korollars 4.4.3 die Gültigkeit der Abschätzung (4.37a). Für $\ell = 2$ erhält man aus (4.40) unter Beachtung der Kornschen Ungleichung (4.33) noch

$$\begin{aligned}\|\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\|_{1,1,0,\omega}^2 + \varepsilon^2\|\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\|_{1,1,2,\omega}^2 &\leq C(\|\boldsymbol{\gamma}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega}^2 + \varepsilon^2\|\boldsymbol{\varrho}\big(\ddot{\boldsymbol{\eta}}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega}^2)\\ &\leq C_1(\|\boldsymbol{q}_0^\varepsilon\|_{1,1,2,\omega}^2 + \|\boldsymbol{q}_1^\varepsilon\|_{0,\omega}^2)\,.\end{aligned}$$

Das beweist die Ungleichung (4.38a). Damit kann die Abschätzung (4.34) mit

$$\boldsymbol{f} := -\ddot{\boldsymbol{\eta}}^{\varepsilon}(t)$$

angewandt werden. Das liefert die Abschätzungen (4.37).

Für $\ell = 4$ erhält man aus (4.40) mit Hilfe von (4.33) die Ungleichung

$$\begin{aligned} C_0 \|\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\boldsymbol{\eta}^{\varepsilon}(t)\|^2_{1,1,0,\omega} &\leq B^{K,\varepsilon}\big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{q}_0^{\varepsilon},\, L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{q}_0^{\varepsilon}\big) + \Big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{q}_1^{\varepsilon},\, L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{q}_1^{\varepsilon}\Big)_{\omega} \\ &\leq C_1\big(\|(L^{K,\varepsilon})^{3/2}\boldsymbol{q}_0\|^2_{0,\omega} + \|\boldsymbol{q}_1^{\varepsilon}\|^2_{3,3,4,\omega}\big) \\ &\leq C\big(\|\boldsymbol{q}_0\|^2_{4,4,6,\omega} + \|\boldsymbol{q}_1^{\varepsilon}\|^2_{3,3,4,\omega}\big)\,. \end{aligned}$$

Mit der letzten Ungleichung und mit Abschätzung (4.38a) kann auf

$$L^{K,\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta}^{\varepsilon}(t) = -\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\boldsymbol{\eta}^{\varepsilon}(t)$$

das Korollar 4.4.3 angewandt werden. Das beweist schließlich (4.38b)–(4.38c). ■

Bemerkung

Es ist bemerkenswert, daß im Gegensatz zum Fall der langsamen Dynamik, die Schranke für die Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{\eta}}^{\varepsilon}(t)$ dieselbe Größenordnung wie diejenige von $\boldsymbol{\eta}^{\varepsilon}(t)$ selbst besitzt. Auch dieses geht wieder auf die Elliptizität der Mittelfläche und die Kornsche Ungleichung (4.33) zurück.

Kapitel 5

Zum dreidimensionalen Schalenmodell

Die Formulierung des dreidimensionalen Schalenmodells wird in krummlinigen Koordinaten gegeben. Ein Umschreiben der Modelldaten von kartesischen in die krummlinigen Koordinaten ist in [14], Kapitel 1, ausführlich beschrieben. Es sei daran erinnert, daß die Geometrienotationen im Kapitel 3 eingeführt sind. Die Geometriedaten im folgenden beziehen sich auf die im Kapitel 4 gewählte Schale, deren Parametrisierung laut (3.10) gegeben ist. Für den Parameter $\varepsilon > 0$ gilt die Abmachung 4.0.2.

Notation 5.0.1 *Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, sind mit kleinen, fettgedruckten lateinischen Buchstaben, die ein ε im Exponenten besitzen, stets Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ über Ω^ε bezeichnet. Ihre ko– resp. kontravarianten Komponenten sind bezüglich der lokalen Basen $(\boldsymbol{g}^{i,\varepsilon})$ resp. $(\boldsymbol{g}_j^\varepsilon)$ zu verstehen. So gilt*

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon = u_i^\varepsilon \boldsymbol{g}^{i,\,\varepsilon} = u^{i,\varepsilon} \boldsymbol{g}_i^\varepsilon \,.$$

Mit $H^1(\Omega^\varepsilon)$ und $L^2(\Omega^\varepsilon)$ seien die Funktionenräume wie auf Seite vi *bezeichnet. Die Vereinbarung $H^0(\Omega^\varepsilon) := L^2(\Omega^\varepsilon)$ gilt. Es sei $k = 0,\,1$. Für ein Vektorfeld $\boldsymbol{u}$ schreibt man*

$$\|u_i^\varepsilon\|_{k,\Omega^\varepsilon} := \|u_i^\varepsilon\|_{H^k(\Omega^\varepsilon)} \,, \qquad \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{k,\Omega^\varepsilon} := \Big(\textstyle\sum_{i=1}^3 \|u_i^\varepsilon\|^2_{H^k(\Omega^\varepsilon)}\Big)^{\frac{1}{2}} \,,$$
$$\|\boldsymbol{e}^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{k,\,\Omega^\varepsilon} := \Big(\textstyle\sum_{i,\,j} \|e^\varepsilon_{i\|j}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^2_{H^k(\Omega^\varepsilon)}\Big)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Im folgenden wird eine Schale $\mathcal{S}^\varepsilon := \Phi^\varepsilon(\overline{\Omega}^\varepsilon)$, wie in der Definition 3.2.2 gegeben, betrachtet. Von dieser ist angenommen, daß sie aus einem homogenen, isotropen Material mit konstanten Materialparametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ aufgebaut ist. Darüber hinaus ist ihr seitlicher Rand $\Phi^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$ verschiebungsfrei eingespannt. Es wird der linear elastische Fall untersucht. Somit wird die linearisierte Dehnungs–Verschiebungsbeziehung

$$e^\varepsilon_{i\|j}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) := \frac{1}{2}(u^\varepsilon_{i\|j} + u^\varepsilon_{i\|j}) \,, \tag{5.1}$$

sowie das Hookesche Gesetz

$$\sigma^{ij,\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) := A^{ijk\ell,\varepsilon} e^\varepsilon_{k\|\ell}(\boldsymbol{u}) \tag{5.2}$$

zugrundegelegt. Dabei gilt für den *Elastizitätstensor* die Definition

$$A^{ijk\ell,\varepsilon} := \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{k\ell,\varepsilon} + \mu(g^{ik,\varepsilon} g^{j\ell,\varepsilon} + g^{i\ell,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})\,.$$

Mit $e^\varepsilon_{i\|j}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ resp. $\sigma^{ij,\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ sind die ko– resp. kontravarianten Komponenten des *Verzerrungs– resp. Spannungstensors* bezeichnet. Es seien

$$\boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon) = \{(u^\varepsilon_i) \mid u^\varepsilon_i \in H^1(\Omega^\varepsilon)\,, u^\varepsilon_i = 0 \text{ auf } \partial\omega \times (-\varepsilon,\, \varepsilon)\}$$

und

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\Omega^\varepsilon) = \{(\dot{u}^\varepsilon_i) \mid \dot{u}^\varepsilon_i \in L^2(\Omega^\varepsilon)\}$$

gegeben. Setze

$$\mathcal{X}^\varepsilon_2 := \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon) \times \dot{\boldsymbol{V}}(\Omega^\varepsilon)\,.$$

Der Index 2 soll in Anlehnung auf Kapitel 2 darauf hinweisen, daß die Dynamik auf $\mathcal{X}^\varepsilon_2$ zu approximieren ist. Die Hamiltonstruktur der Schale wird mit der kanonischen symplektischen Form auf $\mathcal{X}^\varepsilon_2$, nämlich

$$\Theta^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon,\, \boldsymbol{v}^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{v}}^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \dot{v}^\varepsilon_i\, g^{ij,\varepsilon}\, u^\varepsilon_j \sqrt{g^\varepsilon}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^\varepsilon - \int_{\Omega^\varepsilon} \dot{u}^\varepsilon_i\, g^{ij,\varepsilon}\, v^\varepsilon_j \sqrt{g^\varepsilon}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^\varepsilon\,,$$

und der Energie

$$H^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + \frac{1}{2} B^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon,\, \boldsymbol{u}^\varepsilon) \tag{5.3}$$

mit den Bilinearformen

$$B^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon,\, \boldsymbol{v}^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell,\varepsilon} e^\varepsilon_{i\|j}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) e^\varepsilon_{k\|\ell}(\boldsymbol{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^\varepsilon\,; \tag{5.4a}$$

$$(\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \int_{\Omega^\varepsilon} \dot{u}^\varepsilon_i\, g^{ij,\varepsilon}\, \dot{v}^\varepsilon_j \sqrt{g^\varepsilon}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^\varepsilon \tag{5.4b}$$

aufgebaut. Die dimensionslose Massendichte ist hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf 1 gesetzt. Durch eine passende Gewichtung der Norm in $\dot{\boldsymbol{V}}(\Omega^\varepsilon)$ und entsprechende Anpassung der symplektischen Form läßt sich der allgemeine Fall auf den vorliegenden zurückführen. Das Schalenproblem läßt sich nun wie folgt formulieren.

Problem 5.0.2 *Es sei $\varepsilon > 0$ ausreichend klein. Erzeugt das in* (5.3) *gegebene Hamilton–Funktional H^ε in $\mathcal{X}^\varepsilon_2$ bezüglich Θ^ε einen Hamiltonschen Fluß? Wenn dieses zutrifft, dann stellt sich als nächstes das sogenannte* Dimensionsreduktionsproblem. *Wie verhält sich für eine gegebene Anfangsbedingung die Zeitentwicklung des Verschiebungs– und Geschwindigkeitsfeldes $\big(\boldsymbol{u}^\varepsilon(t),\, \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t)\big)$, das von H^ε getrieben wird, wenn $\varepsilon \to 0$ gilt? Läßt sich ein dimensionsreduziertes Modell zur Beschreibung von $\big(\boldsymbol{u}^\varepsilon(t),\, \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t)\big)$ für kleine ε rechtfertigen? Wenn ja, für welche Größenordnungen der Zeit ist das dimensionsreduzierte Modell adäquat?*

Bemerkung

a) Obwohl im oben gestellten Problem die Größen $\big(\boldsymbol{u}^\varepsilon(t),\, \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t)\big)$ nur intrinsisch auftreten, geht es in dieser Arbeit darum, die Komponenten der Felder bezüglich einer geeigneten lokalen Basis zu finden.

b) Beachte, daß sowohl Θ^ε als auch H^ε differentalgeometrische Invarianten sind, obwohl beide extrinsisch definiert sind.

Hinsichtlich eines von H^ε erzeugten Hamiltonschen Flusses gilt der

Satz 5.0.3 *Das zu H^ε bezüglich Θ^ε zugehörige Vektorfeld $\boldsymbol{X}_{H^\varepsilon} : \mathcal{X}_2^\varepsilon \to \mathcal{X}_2^\varepsilon$ mit dem Definitionsbereich $D(\boldsymbol{X}_{H^\varepsilon})$ erzeugt in $\mathcal{X}_2^\varepsilon$ eine Gruppe $G_2^\varepsilon(t)$ von Isometrien bezüglich der Energienorm, d. h. , für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0^\varepsilon) \in D(\boldsymbol{X}_{H^\varepsilon})$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_2^\varepsilon(t)(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0^\varepsilon) = \boldsymbol{X}_H^\varepsilon\big(G_2^\varepsilon(t)(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0^\varepsilon)\big)$$

und

$$\frac{1}{2}\big(\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t), \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t)\big)_{\Omega^\varepsilon} + \frac{1}{2} B^\varepsilon\big(\boldsymbol{u}^\varepsilon(t), \boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\big) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}_0^\varepsilon, \dot{\boldsymbol{u}}_0^\varepsilon) + \frac{1}{2} B^\varepsilon(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon, \boldsymbol{u}_0^\varepsilon)\,, \tag{5.5}$$

wenn $G_2^\varepsilon(t)(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0^\varepsilon) =: \big(\boldsymbol{u}^\varepsilon(t), \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t)\big)$ gesetzt wird. Darüber hinaus hat man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}^\varepsilon(t) &= \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t) && \textit{in} \quad \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon)\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(t) &= -\big(L^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\big)^i \boldsymbol{g}_i^\varepsilon && \textit{in} \quad \dot{\boldsymbol{V}}(\Omega^\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei für das Lamé–System

$$(L^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon)^i = -\boldsymbol{g}^{i,\varepsilon} \cdot \{(\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mu\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mu\Delta\boldsymbol{u}^\varepsilon\} \tag{5.7}$$

gilt.

Beweis. Die Existenz der Gruppe $G_2^\varepsilon(t)$ folgt schon aus der Tatsache, daß dies in kartesischen Koordinaten der Fall ist. Alternativ können die folgende Ungleichung vom Kornschen Typ und positiv Definitheit des Elastizitätstensors angewandt werden.

Lemma 5.0.4 *Es sollen die Annahmen **(H1)** und **(H2)** der Hypothese 4.0.1 gelten. Die Parametrisierung der Schale sei durch* (3.10) *gegeben und ε sei beliebig aus $(0,\, \varepsilon_0)$.*

(i) Dann existiert eine Konstante $C^\varepsilon = C^\varepsilon(\Omega^\varepsilon,\, \Gamma_0^\varepsilon,\, \Phi^\varepsilon) > 0$, so daß

$$\|\boldsymbol{v}^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon} \le C^\varepsilon \|\boldsymbol{e}^\varepsilon(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \tag{5.8}$$

für alle $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon)$ besteht.

(ii) Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$*, so daß*

$$A^{ijk\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{x}^\varepsilon)t_{ij}t_{k\ell} \geq C_1 \sum_{i,j}(t_{ij})^2 \tag{5.9}$$

für alle symmetrischen Matrizen (t_{ij}) *und alle* $\boldsymbol{x}^\varepsilon \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ *gilt.*

Die Beweise hierzu befinden sich in [14], Theorem 1.7-4, Seite 44 beziehungsweise Theorem 1.8-1, Seite 46. Zusammen mit dem Lemma A.1.4 folgt also die Existenz, Eindeutigkeit und Energieerhaltung in $\mathcal{X}_2^\varepsilon$. Es bleibt nur die Darstellung (5.7) zu klären. Folgend den Ausführungen im Beweis des Lemma A.1.4, Seite 102 muß $L^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon$ der Beziehung

$$(L^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon,\, \boldsymbol{v}^\varepsilon)^\varepsilon = B^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon,\, \boldsymbol{v}^\varepsilon) \qquad \forall\, \boldsymbol{u}^\varepsilon \in D(L^\varepsilon),\, \boldsymbol{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon) \tag{5.10}$$

genügen. Dazu wird die Greensche Formel

$$\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\, g^{ks,\varepsilon} v^\varepsilon_{s\|k}\, \mathrm{d}V^\varepsilon = -\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_{\|k}\, g^{ks,\varepsilon} v^\varepsilon_s\, \mathrm{d}V^\varepsilon + \int_{\partial\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}^\varepsilon\, \mathrm{d}\Gamma^\varepsilon$$

benutzt, die in Ω^ε für ausreichend glatte Vektorfelder $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ und skalare Felder f^ε gilt. Hierbei sind mit $\mathrm{d}V^\varepsilon$ und $\mathrm{d}\Gamma^\varepsilon$ relevante Volumen– und Flächenelemente. Mit $\boldsymbol{n}^\varepsilon$ wird die Normale an $\partial\Omega^\varepsilon$ bezeichnet. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(L^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon)^i &= -\, A^{ijk\ell,\varepsilon} e_{k\|\ell j}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \\
&= -\,\frac{1}{2}\left\{\lambda g^{ij,\varepsilon} g^{k\ell,\varepsilon}(u^\varepsilon_{k\|\ell j} + u^\varepsilon_{\ell\|kj}) + \mu(g^{ik,\varepsilon} g^{j\ell,\varepsilon} + g^{i\ell,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})(u^\varepsilon_{k\|\ell j} + u^\varepsilon_{\ell\|kj})\right\} \qquad (5.11)\\
&= -\,\boldsymbol{g}^{i,\varepsilon} \cdot \{\lambda \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mu \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mu \Delta \boldsymbol{u}^\varepsilon\}
\end{aligned}$$

und

$$D(L^\varepsilon) = \{\boldsymbol{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon) \mid L^\varepsilon \boldsymbol{v}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3\}\,.$$

■

Bemerkung

a) Die Gültigkeit von (5.10) erfordert auch

$$\int_{\partial\Omega^\varepsilon} v^\varepsilon_i\, A^{ijk\ell,\varepsilon} e^\varepsilon_{k\|\ell}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\, n^\varepsilon_j\, \mathrm{d}\Gamma^\varepsilon = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{u}^\varepsilon \in D(L^\varepsilon),\, \boldsymbol{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon)\,.$$

Wegen der Definition des Raumes $\boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon)$ ist klar, daß sich die obige Integration nur noch über die *Boden- und Deckfläche* $\Gamma^\varepsilon_\pm$ der Schale erstreckt. Da aber dort der Normalenvektor mit $\boldsymbol{g}^{3,\varepsilon} = \boldsymbol{g}^\varepsilon_3$ übereinstimmt, lautet die natürliche Randbedingung

$$A^{i3k\ell,\varepsilon} e^\varepsilon_{k\|\ell}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = \sigma^{i3,\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0 \quad \text{für} \quad x^\varepsilon_3 = \pm\varepsilon\,. \tag{5.12}$$

Diese besagt hier, daß an der Boden- und Deckfläche für $t \geq 0$ der *Spannungsvektor* $\sigma^{i3,\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = \sigma^{ij,\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) n^\varepsilon_j$ verschwindet.

b) Wegen $\sigma^{ij,\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = A^{ijk\ell,\varepsilon} e^\varepsilon_{k\|\ell}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ erlaubt das Lamé–System alternativ zu (5.11) die Darstellung

$$(L^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon)^i = -\sigma^{ij,\varepsilon}{}_{\|j}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,. \tag{5.13}$$

5.1 Die dicke Schale – Skalierungen

Damit die spätere Konvergenzaussage bezüglich einer von ε–unabhängigen Norm möglich ist, wird die übliche Skalierung

$$\Pi^\varepsilon : \omega \times (-1,\,1) \to \Omega^\varepsilon \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{x} := (\boldsymbol{y},\,x_3) \mapsto \boldsymbol{x}^\varepsilon := \Pi^\varepsilon(\boldsymbol{y},\,x_3) \tag{5.14}$$

und der Abbildungsvorschrift

$$x^\varepsilon_\alpha = x_\alpha = y_\alpha \quad \text{und} \quad x^\varepsilon_3 = \varepsilon x_3 \quad \text{mit} \quad x_3 \in [-1,1]\,,$$

eingeführt. Vergleiche hierzu auch die Abbildung 3.2 auf Seite 38. Damit hat man

$$\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \partial^\varepsilon_\alpha\,, \qquad\qquad \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 := \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_3} = \partial^\varepsilon_3\,.$$

Fortan sei stets

$$\Omega := \omega \times (-1,1)\,.$$

Die in (3.10) eingeführte Parametrisierung Φ^ε der Schale $\mathcal{S}^\varepsilon$ kann auf Ω zurückgezogen werden und lautet jetzt

$$\begin{aligned} &\Phi(\varepsilon) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \text{ mit} \\ &\Phi(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\,x_3) := \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) + \varepsilon x_3 \boldsymbol{a}^3(\boldsymbol{y})\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Obwohl $\mathcal{S} := \Phi(\varepsilon)(\overline{\Omega}) = \Phi^\varepsilon(\overline{\Omega^\varepsilon}) = \mathcal{S}^\varepsilon$ gilt, spricht man nun von einer *dicken Schale*. Dabei sind aber nur die krummlinigen Koordinaten aus einem „dicken“ Gebiet. Durch die Skalierung entsteht aus der kovarianten Basis $\{\boldsymbol{g}^\varepsilon_1(\boldsymbol{x}^\varepsilon),\,\boldsymbol{g}^\varepsilon_2(\boldsymbol{x}^\varepsilon),\,\boldsymbol{g}^\varepsilon_3(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\}$ eine *skalierte kovariante Basis* $\{\boldsymbol{g}_1(\varepsilon)(\boldsymbol{x})),\,\boldsymbol{g}_2(\varepsilon)(\boldsymbol{x}),\,\boldsymbol{g}_3(\varepsilon)(\boldsymbol{x})\}$ mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_\alpha(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\,x_3) &= \partial_\alpha \Phi(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\,x_3) = \partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) + \varepsilon x_3 \partial_\alpha \boldsymbol{a}_3(\boldsymbol{y})\,, \\ &= \boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{y}) - \varepsilon x_3 b^\varrho_\alpha(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{a}_\varrho(\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{5.16a}$$

und

$$\boldsymbol{g}_3(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\,x_3) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 \Phi(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\,x_3) = \boldsymbol{a}_3(\boldsymbol{y})\,. \tag{5.16b}$$

Die zugehörige *skalierte kontravariante Basis* ist durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^1(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\, x_3) &= \frac{1-\varepsilon x_3 b_2^2(\boldsymbol{y})}{\mathfrak{C}(\boldsymbol{y},\, x_3)}\boldsymbol{a}^1(\boldsymbol{y}) + \frac{\varepsilon x_3 b_2^1(\boldsymbol{y})}{\mathfrak{C}(\boldsymbol{y},\, x_3)}\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{y})\,,\\
\boldsymbol{g}^2(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\, x_3) &= \frac{\varepsilon x_3 b_1^2(\boldsymbol{y})}{\mathfrak{C}(\boldsymbol{y},\, x_3)}\boldsymbol{a}^1(\boldsymbol{y}) + \frac{1-\varepsilon x_3 b_1^1(\boldsymbol{y})}{\mathfrak{C}(\boldsymbol{y},\, x_3)}\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{y})\,,\\
\boldsymbol{g}^3(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\, x_3) &= \boldsymbol{g}_3(\boldsymbol{y},\, x_3)
\end{aligned}$$

mit $\mathfrak{C}(\boldsymbol{y},\, x_3) := 1 - 2\varepsilon x_3 h(\boldsymbol{y}) + (\varepsilon x_3)^2 k(\boldsymbol{y})$ gegeben. Der Beweis hierzu erfolgt durch Nachprüfen von $\boldsymbol{g}_i(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\, x_3)\cdot\boldsymbol{g}^j(\varepsilon)(\boldsymbol{y},\, x_3) = \delta_i^j$.

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird die explizite $(\boldsymbol{y},\, x_3)$ -Abhängigkeit in den oben eingeführten Ausdrücken ausgelassen. Das gleiche soll für Größen gelten, die aus den obigen abgeleitet werden.

Definition 5.1.1 *Es sei* Π^ε *die in* (5.14) *eingeführte Abbildung. Die skalierten Größen der Schalengeometrie sind dann wie folgt definiert:*

$$g_{ij}(\varepsilon) := \boldsymbol{g}_i(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{g}_j(\varepsilon)\,, \qquad g^{ij}(\varepsilon) := \boldsymbol{g}^i(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{g}^j(\varepsilon) \qquad g(\varepsilon) := \boldsymbol{g}^\varepsilon\circ\Pi^\varepsilon\,,$$

$$\Gamma_{ij}^k(\varepsilon) := \Gamma_{ij}^{k,\,\varepsilon}\circ\Pi^\varepsilon\,, \qquad A^{ijk\ell}(\varepsilon) := A^{ijk\ell,\varepsilon}\circ\Pi^\varepsilon\,.$$

Das Skalierungsverhalten der Skalarprodukte $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\Omega^\varepsilon}$ und $B^\varepsilon(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ist in der nächsten Proposition zusammengefaßt.

Proposition 5.1.2 *Es sei* Π^ε *die in* (5.14) *eingeführte Abbildung. Es seien* $\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{g}^i(\varepsilon)$ *und* $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{g}^i(\varepsilon)$ *zwei Vektorfelder über* Ω *. Dann induziert* Π^ε *aus den Bilinearformen* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\Omega^\varepsilon}$ *resp.* $B^\varepsilon(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *die Bilinearformen* $\varepsilon\,(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$ *resp.* $\varepsilon\,B(\varepsilon)(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *mit*

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v})_\Omega &:= \int_\Omega u_i\, g^{ij}(\varepsilon) v_i\, \sqrt{g(\varepsilon)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,,\\
B(\varepsilon)(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) &:= \int_\Omega A^{ijk\ell}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}) e_{k\|\ell}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\sqrt{g(\varepsilon)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.
\end{aligned}$$

Für die kovarianten Komponenten des skalierten Verzerrungstensors *gilt dabei*

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p\,, \tag{5.17a}$$

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3 + \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 u_\alpha) - \Gamma_{\alpha 3}^p(\varepsilon) u_p\,, \tag{5.17b}$$

$$e_{3\|3}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 u_3\,. \tag{5.17c}$$

Es gilt die zur Notation 5.0.1 analoge Vereinbarung.

Notation 5.1.3 *Mit kleinen, fettgedruckten lateinischen Buchstaben sind stets Vektorfelder im* $\mathbb{R}^3$ *über* Ω *bezeichnet. Ihre ko– resp. kontravarianten Komponenten sind bezüglich der lokalen Basen* $\boldsymbol{g}^i(\varepsilon)$ *resp.* $\boldsymbol{g}_j(\varepsilon)$ *zu verstehen. Es gilt zum Beispiel*

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{g}^i(\varepsilon) = u^i \boldsymbol{g}_i(\varepsilon)\,.$$

Mit $H^1(\Omega)$ *und* $L^2(\Omega)$ *seien die Funktionenräume bezeichnet, wie auf Seite* vi *eingeführt. Die Vereinbarung* $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$ *gelte. Es sei* $k = 0,\, 1$ *. Für ein Vektorfeld* $\boldsymbol{u}$ *schreibt man*

$$\|u_i\|_{k,\Omega} := \|u_i\|_{H^k(\Omega)}\,, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_{k,\Omega} := \Big(\textstyle\sum_{i=1}^3 \|u_i\|^2_{H^k(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\,,$$
$$\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u})\|_{k,\,\Omega} := \Big(\textstyle\sum_{i,\,j} \|e_{i\|j}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u})\|^2_{H^k(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird auch die kovariante Differentiation bezüglich $\Gamma^k_{ij}(\varepsilon)$ *mit* $\|$ *im Index gekennzeichnet.*

Aus (5.16b) folgt $\partial_3 \boldsymbol{g}_3(\varepsilon) \equiv 0$ und damit auch $\Gamma^p_{33}(\varepsilon) \equiv 0$. Folglich gilt für die Komponenten des *skalierten Verzerrungstensors* die Darstellung

$$e_{i\|j}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(u_{i\|j} + u_{j\|i})\,. \tag{5.18}$$

Mit $A^{ijk\ell}(\varepsilon)$ wie in der Definition 5.1.1 und mit (5.18) definiert man durch

$$\sigma^{ij}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}) := A^{ijk\ell}(\varepsilon) e_{k\|\ell}(\varepsilon,\, \boldsymbol{u})$$

den *skalierten Spannungstensor*. Die relevanten Funktionenräume auf der dicken Schale sind mit

$$\boldsymbol{V}(\Omega) = \{(u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\,, u_i = 0 \text{ auf } \partial\omega \times (-1,\, 1)\}$$

und $\dot{\boldsymbol{V}}(\Omega) = \{(\dot{u}_i) \mid \dot{u}_i \in L^2(\Omega)\}$ gegeben. Der Phasenraum lautet

$$\mathcal{X}_2 := \boldsymbol{V}(\Omega) \times \dot{\boldsymbol{V}}(\Omega)\,.$$

Bemerkung

Aus $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{g}^i(\varepsilon) = \eta_j \boldsymbol{a}^j$ folgt durch Multiplikation mit $\boldsymbol{g}_s(\varepsilon)$ das Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} u_\tau &= \eta_\tau - \varepsilon x_3 b^\varrho_\tau \eta_\varrho\,, \\ u_3 &= \eta_3\,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Für $(b^\varrho_\tau) \in L^\infty(\omega)$ ist die Transformation für ausreichend kleine ε sicher umkehrbar. Daher ist es irrelevant, ob die Dreitupel in $\boldsymbol{V}(\Omega)$ kovariante Komponenten bezüglich $\big(\boldsymbol{g}^i(\varepsilon)\big)$ oder

$(\boldsymbol{a}^i)$ bezeichnen. Die obige Transformation läßt $\boldsymbol{V}(\Omega)$ sowohl algebraisch als auch topologisch invariant. Das gleiche gilt für den Phasenraum.

Die Hamiltonstruktur der dicken Schale ergibt sich mit der symplektischen Form $\Theta(\varepsilon)$ und der Energie $H(\varepsilon)$ auf $\mathcal{X}_2$ durch

$$\Theta(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}\,\Theta^\varepsilon \circ \Pi^\varepsilon\,, \qquad H(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}\,H^\varepsilon \circ \Pi^\varepsilon\,.$$

Die Division durch ε eliminiert die ε–Potenz, die in der Funktionaldeterminante der Skalierung auftritt und hat daher keine weitere Bedeutung. Auf der dicken Schale gilt die folgende Ungleichung vom Kornschen Typ und positive Definitheit des skalierten Elastizitätstensors.

Lemma 5.1.4 *Es sollen die Annahmen **(H1)** und **(H2)** der Hypothese 4.0.1 gelten. Die Parametrisierung der Schale sei durch* (5.15) *gegeben und $\varepsilon > 0$ sei ausreichend klein.*

(i) Dann existiert ein ε_0 und eine Konstante $C = C(\Omega\,, \boldsymbol{\varphi}) > 0$, so daß

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \le \frac{C}{\varepsilon}\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\,\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{5.20}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ besteht.

(ii) Dann existiert ein ε_0 und eine Konstante $C_1 > 0$, so daß

$$A^{ijk\ell}(\varepsilon,\,\boldsymbol{x})t_{ij}t_{k\ell} \ge C_1 \sum_{i,j}(t_{ij})^2 \tag{5.21}$$

für alle symmetrischen Matrizen (t_{ij}), alle $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ gilt.

Der Beweis der Ungleichung (5.20) ist in [9], Theorem 4.1, erbracht. Die positive Definitheit ist in [8], Lemma 3.1 nachgewiesen.

Mit diesem Lemma folgt der zum Satz (5.0.3) analoge Existenz– und Eindeutigkeitssatz.

Satz 5.1.5 *Es sei $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Das zu $H(\varepsilon)$ bezüglich $\Theta(\varepsilon)$ zugehörige Vektorfeld $\boldsymbol{X}_{H(\varepsilon)}$: $\mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2$ mit dem Definitionsbereich $D(\boldsymbol{X}_{H(\varepsilon)})$ erzeugt in $\mathcal{X}_2$ eine Gruppe $G_2(\varepsilon,\,t)$, $t \in \mathbb{R}$ von Isometrien bezüglich der durch $\sqrt{H(\varepsilon)(\,\cdot,\,\cdot\,)}$ definierten Norm. Außerdem existiert eine Konstante $C > 0$, so daß*

$$\|\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t)\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t)\|_{1,\Omega}^2 \le C\Big(\|\dot{\boldsymbol{u}}_0(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}B\big(\boldsymbol{u}_0(\varepsilon), \boldsymbol{u}_0(\varepsilon)\big)\Big) \tag{5.22}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und $\big(\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\,\dot{\boldsymbol{u}}_0(\varepsilon)\big) \in D(\boldsymbol{X}_{H(\varepsilon)})$ gilt. Hierbei wurde die Schreibweise $\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t), \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t)\big) := G_2(\varepsilon,\,t)\big(\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\,\dot{\boldsymbol{u}}_0(\varepsilon)\big)$ benützt. Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t) &= \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t) && \text{in} \quad \boldsymbol{V}(\Omega)\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,t) &= -\big(L(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t)\big)^i\boldsymbol{g}_i(\varepsilon) && \text{in} \quad \dot{\boldsymbol{V}}(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{5.23}$$

mit

$$\big(L(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t)\big)^i = -\sigma^{ij}{}_{\|j}\big(\varepsilon, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\,t)\big)\,. \tag{5.24}$$

Beweis. Man benütze die Argumente wie im Beweis von Satz 5.0.3, hier allerdings mit der Ungleichung (5.20) und positiven Definitheit auf der dicken Schale. Die Abschätzung (5.22) ist eine direkte Folgerung aus (5.20) – (5.21) kombiniert mit der Energieerhaltung. ■

Damit ist die Existenzfrage im Problem 5.0.2 vollständig geklärt. Der Rest der Arbeit behandelt die Rechtfertigung einer Dimensionsreduktion.

Kapitel 6

Konstruktion einer Approximation

Der Erfolg der formalen asymptotischen Entwicklungen für Platten, siehe DAUGE, GRUAIS & RÖSSLE, [17, 18], legt es nahe, auch eine Approximation für die Verschiebungsfelder einer schwingenden Schale in der Form

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) \approx \boldsymbol{u}^0 + \varepsilon \boldsymbol{u}^1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}^2 + \cdots$$

zu suchen. Hierbei ist vorauszusetzen, daß $\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots$ selbst nicht von ε abhängen. Andererseits, in [14], Abschnitt 3.4, wird gezeigt, daß formale asymptotische Entwicklungen schon für das Statikproblem der Schale nur für Membranschalen oder für Schalen im dehnungslosen Zustand zum Erfolg führen. Das Scheitern einer solchen Entwicklung für Schalen beliebiger Mittelfläche im allgemeinen wird ebenfalls erläutert. Daher wird ein anderer Zugang zur Konstruktion einer Approximation für $\boldsymbol{u}(\varepsilon, t)$ erforderlich. Darin muß akzeptiert werden, daß die resultierenden dimensionsreduzierten Modelle selbst singulär gestört sind. In der vorliegenden Arbeit wird eine Approximation für $\boldsymbol{u}(\varepsilon, t)$ mittels eines Dreidirektoransatzes gewonnen.

Notation 6.0.1 *Mit $\boldsymbol{\zeta}$ und $\boldsymbol{\eta}$ werden ausschließlich Vektorfelder über ω bezeichnet. Die zugehörigen Komponenten sind bezüglich $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^3$ resp. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ zu verstehen. Das gilt auch dann, wenn $\boldsymbol{\zeta}$ und $\boldsymbol{\eta}$ mit Superskripts versehen sind.*

Der Ansatz

Für ausreichend kleine ε bildet $\boldsymbol{A}^\varepsilon$, der Kandidat für eine Approximation, Vektorfelder über ω in Vektorfelder über Ω ab. Es wird für $\boldsymbol{A}^\varepsilon$ im wesentlichen der sogenannte *Direktoransatz* herangezogen, nämlich

$$\big(\boldsymbol{A}^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}\big)(\varepsilon, \boldsymbol{x}, t) = \big(j\boldsymbol{\zeta}\big)(\varepsilon, \boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{U}(\varepsilon, \boldsymbol{x}, t)$$

mit

$$j\boldsymbol{\zeta}\big(\varepsilon, \boldsymbol{x}, t\big) := \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y}, t) + \varepsilon x_3 \boldsymbol{\zeta}^1(\boldsymbol{y}, t) + (\varepsilon x_3)^2 \boldsymbol{\zeta}^2(\boldsymbol{y}, t) + (\varepsilon x_3)^3 \boldsymbol{\zeta}^3(\boldsymbol{y}, t)\,.$$

Die Felder $\boldsymbol{\zeta}^1$, $\boldsymbol{\zeta}^2$ und $\boldsymbol{\zeta}^3$ werden in diesem Zusammenhang als *Schalendirektoren* bezeichnet. Diese hängen explizit von $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y},\, t)$ und dessen Ortsableitungen ab. Die Schalendirektoren sind also für jedes gegebene $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y},\, t)$ bekannt. Mit $\boldsymbol{U}$ ist hier ein *Randkorrektor* bezeichnet. Dieser ist so zu wählen, daß

$$\Big(j\boldsymbol{\zeta}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{x},\, t) + \boldsymbol{U}(\varepsilon,\, \boldsymbol{x},\, t)\Big)\big|_{\partial\omega\times(-1,\,1)} \equiv 0$$

gilt, und daß zur Herstellung der Verschiebung $\boldsymbol{U}$ in der Schale ausreichend wenig Energie verbraucht wird. Mit ausreichend wenig ist hier das Verhalten

$$\|\boldsymbol{e}(\varepsilon, \boldsymbol{U})\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa})$$

für $\varepsilon \to 0$ mit einem geeignetem $\kappa > 0$ gemeint. Es sei betont, daß es sich bei den Randkorrektoren $\boldsymbol{U}$ *nicht* um die analogen Grenzschichtprofile aus dem Plattenproblem, siehe RÖSSLE, [53], §3.2, handelt. Vielmehr wird $\boldsymbol{U}$ ein Randkorrektor sein, wie er in LIONS, [35], Kapitel II, Abschnitte 5–8 und Kapitel 4, Abschnitt 8 eingeführt ist. Die Direktoren $\boldsymbol{\zeta}^2$, $\boldsymbol{\zeta}^3$ und der Randkorrektor $\boldsymbol{U}$ sind in der vorliegenden Arbeit allesamt nur aus technischen Gründen erforderlich. Keines dieser Felder wird in den Hauptsätzen auftreten, zumal der Korrektor nicht explizit beschrieben wird.

Organisation des Kapitels

Der erste Abschnitt enthält technische Vorbereitungen. Dabei werden einfache Entwicklungen der Geometriegrößen, sowie die Umschreibung der Verzerrungskomponenten bezüglich der lokalen Basis der Fläche behandelt. Dies erleichtert deren explizit zu kontrollierende ε–Abhängigkeit.

Der zweite Abschnitt ist der Wahl der Schalendirektoren gewidmet. Für spätere Zwecke werden dort Abschätzungen für die von $j\boldsymbol{\zeta}$ hervorgerufenen Spannungen in der Schale bereitgestellt.

Im dritten Abschnitt wird eine Verwandtschaft zwischen dem Lamé–System (5.7) und dem Koiter–Operator $L^{K,\varepsilon}$ bewiesen. Diese Beziehung ist der „Eckstein“ der Rechtfertigung der Dimensionreduktion.

Der letzte Abschnitt behandelt die wichtigsten Eigenschaften der Korrektoren.

6.1 Technisches I

Mit $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ sei die übliche Norm des $L^{\infty}(\Omega)$ bezeichnet. Durch den gesamten Unterabschnitt gelten für die Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi}$ der Mittelfläche S und das Parametergebiet ω die Annahmen der Hypothese 4.0.1. Die dicke Schale sei über Ω laut (5.15) parametrisiert. Die maximale Dicke ε sei stets kleiner als ein ε_0 laut der Abmachung 4.0.2. Die Bezeichnungen der Geometriegrößen sind diejenigen aus den Kapiteln 3 und 5.

Lemma 6.1.1 *Es existiert ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß die folgenden Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
\|g^{\alpha\beta}(\varepsilon) - \big(a^{\alpha\beta} + 2\varepsilon x_3 b^{\alpha\beta} + 3(\varepsilon x_3)^2 c^{\alpha\beta}\big)\|_{\infty,\Omega} &\le C\varepsilon^3\,,\\
\|\Gamma^\alpha_{\beta\tau}(\varepsilon) - (\Gamma^\alpha_{\beta\tau} - \varepsilon x_3 b^\alpha_{\tau|\beta})\|_{\infty,\Omega} &\le C\varepsilon^2\,,\\
\|\Gamma^\alpha_{\beta 3}(\varepsilon) - (-b^\alpha_\beta - \varepsilon x_3 b^\alpha_\sigma b^\sigma_\beta)\|_{\infty,\Omega} &\le C\varepsilon^2
\end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ *wahr sind. Für alle* $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ *gilt*

$$\Gamma^3_{\alpha\beta}(\varepsilon) = b_{\alpha\beta} - \varepsilon x_3 c_{\alpha\beta}\,.$$

Beweis. Die letzte Aussage folgt aus

$$\Gamma^3_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \boldsymbol{g}^3 \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{g}_\beta = \boldsymbol{a}^3 \cdot \{\partial_\alpha \boldsymbol{a}_\beta - \varepsilon x_3 \partial_\alpha (b^\sigma_\beta \boldsymbol{a}_\sigma)\}$$

unter Beachtung der Ableitungsgleichungen von Gauß (3.4a). Der Beweis der Ungleichungen beruht auf der Darstellung $\boldsymbol{g}^\alpha(\varepsilon) = r^\alpha_\tau(\varepsilon)\boldsymbol{a}^\tau$ mit

$$r^\alpha_\tau(\varepsilon) := \boldsymbol{g}^\alpha(\varepsilon) \cdot \boldsymbol{a}_\tau = \delta^\alpha_\tau + \varepsilon x_3 b^\alpha_\tau + (\varepsilon x_3)^2 b^\sigma_\tau b^\alpha_\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\,, \tag{6.1}$$

wobei das Landausymbol in $L^\infty(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$ zu verstehen ist. Die Darstellung folgt aus der Taylorentwicklung der skalierten kontravarianten Basis um $x_3 = 0$. Die gleichmäßige Beschränktheit des Restglieds ist durch die Differenzierbarkeitsannahme der Parametrisierungen gewährleistet. Die Abschätzung für $\Gamma^\alpha_{\beta\tau}(\varepsilon)$ folgt aus

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\beta\tau}(\varepsilon) = \boldsymbol{g}^\alpha(\varepsilon) \cdot \partial_\beta \boldsymbol{g}_\tau(\varepsilon) &= r^\alpha_\varrho(\varepsilon)\boldsymbol{a}^\varrho \cdot \partial_\beta\{\boldsymbol{a}_\tau - \varepsilon x_3 b^\sigma_\tau \boldsymbol{a}_\sigma\}\\
&= r^\alpha_\varrho(\varepsilon)\left(\Gamma^\varrho_{\beta\tau} - \varepsilon x_3 (b^\varrho_{\tau|\beta} + \Gamma^\sigma_{\tau\beta} b^\varrho_\sigma)\right)\,.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit wurden die Ableitungsgleichungen von Gauß und die Beziehung (3.7b) benutzt. Die restlichen Abschätzungen folgen mit den gleichen Argumenten. ■

Korollar 6.1.2 *Es existiert ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß für alle* $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ *der skalierte Elastizitätstensor den folgenden Ungleichungen genügt:*

$$\begin{aligned}
\|A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) - \big(\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})\big)\|_{\infty,\Omega} &\le C\varepsilon\,,\\
\|A^{\alpha 3\beta 3}(\varepsilon) - \mu\big(a^{\alpha\beta} + 2\varepsilon x_3 b^{\alpha\beta} + 3(\varepsilon x_3)^2 c^{\alpha\beta}\big)\|_{\infty,\Omega} &\le C\varepsilon^3\,,\\
\|A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) - \lambda\big(a^{\alpha\beta} + 2\varepsilon x_3 b^{\alpha\beta} + 3(\varepsilon x_3)^2 c^{\alpha\beta}\big)\|_{\infty,\Omega} &\le C\varepsilon^3\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Abschätzung folgt aus der Definition von $A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon)$ und der Gültigkeit der ersten Ungleichung im Lemma 6.1.1. Durch eventuelle Verkleinerung des dortigen ε_0 folgt die Aussage.

Proposition 6.1.3 *Ist in* $A^{ijk\ell}(\varepsilon)$ *ein Index gleich 3, so gilt*

- $A^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0\,,$
- $A^{3\alpha 3\beta}(\varepsilon) = \mu g^{\alpha\beta}(\varepsilon)\,,$
- $A^{33\alpha\beta}(\varepsilon) = \lambda g^{\alpha\beta}(\varepsilon)\,,$
- $A^{3\alpha\gamma\delta}(\varepsilon) = 0\,,$
- $A^{3333}(\varepsilon) = \lambda + 2\mu\,.$

Beweis von Proposition 6.1.3 . Alle Aussagen folgen aus der Orthogonalität

$$\boldsymbol{g}^\alpha(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{g}^3(\varepsilon) = g^{\alpha 3}(\varepsilon) \equiv 0$$

und der Normierung $g^{33}(\varepsilon) = \boldsymbol{g}^3(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{g}^3(\varepsilon) = 1$. ■

Die restlichen Abschätzungen im Korollar 6.1.2 folgen nun aus der Proposition und den Ungleichungen im Lemma 6.1.1. ■

6.1.1 Transformation der Verzerrungen

Die explizit zu kontrollierende ε –Abhängigkeit der Schalendirektoren legt nahe, diese bezüglich der lokalen Basen der Mittelfläche anzugeben. Um spätere Rechnungen zu vereinfachen, werden die Komponenten des Verzerrungstensors in die geeignete Form gebracht. Es müssen die kovarianten Ableitungen bezüglich $\big(g_{ij}(\varepsilon)\big)$ durch diejenigen bezüglich $(a_{\alpha\beta})$ ausgedrückt werden.

Notation 6.1.4 *Für ein* $\boldsymbol{v} = (v_i) \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *schreibt man*

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3\,,$$

$$\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}\big(b^\gamma_\alpha(\partial_\beta v_\gamma - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma) + b^\gamma_\beta(\partial_\alpha v_\gamma - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma)\big) - c_{\alpha\beta} v_3\,.$$

Bemerkung

Beachte, daß in der obigen Definition die Abbildung $\boldsymbol{v} \mapsto \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})$ eine natürliche Fortsetzung der Abbildung $\boldsymbol{\zeta} \mapsto \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})$ in (4.1) darstellt. Das rechtfertigt die Verwendung desselben Symbols für beide. Ist $(v_i) = (\zeta_i)$, so gilt

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) := \frac{1}{2}(\zeta_{\alpha|\beta} + \zeta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\zeta_3\,,$$

$$\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) := \frac{1}{2}(b^\gamma_\alpha \zeta_{\gamma|\beta} + b^\gamma_\beta \zeta_{\gamma|\alpha}) - c_{\alpha\beta}\zeta_3\,.$$

Lemma 6.1.5 *Für ein Vektorfeld* $\boldsymbol{v} = v_i\,\boldsymbol{g}^i(\varepsilon) = \tilde{v}_j\,\boldsymbol{a}^j$ *über* Ω *gilt:*

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\,\boldsymbol{v}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) - \varepsilon x_3 \pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})\,, \tag{6.2a}$$

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\,\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\tilde{v}_{3|\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_3\tilde{v}_\alpha) + \frac{1}{2}b^\beta_\alpha(\tilde{v}_\beta - x_3\partial_3\tilde{v}_\beta)\,, \tag{6.2b}$$

$$e_{3\|3}(\varepsilon,\,\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3\tilde{v}_3\,. \tag{6.2c}$$

Beweis. Jede der obigen Behauptungen ergibt sich durch konsequente Anwendung der Beziehung

$$v_{i\|j} = \partial_j \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_i(\varepsilon) = \partial_j \{\tilde{v}_p\, \boldsymbol{a}^p\} \cdot \boldsymbol{g}_i(\varepsilon).$$

Damit gilt die intrinsische Darstellung

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\big(\partial_\alpha \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}_\alpha(\varepsilon)\big)\,.$$

Mit $\boldsymbol{g}_\beta(\varepsilon) = \boldsymbol{a}_\beta - \varepsilon x_3 b^\sigma_\beta \boldsymbol{a}_\sigma$ und der Notation 6.1.4 folgt (6.2a). Insbesondere gilt in lokaler Darstellung bezüglich $(\boldsymbol{a}^j)$

$$\begin{aligned} v_{\alpha\|\beta} = \partial_\beta(\tilde{v}_i \boldsymbol{a}^i) \cdot \boldsymbol{g}_\alpha &= \big[(\tilde{v}_{\gamma|\beta} - \tilde{v}_3 b_{\beta\gamma})\boldsymbol{a}^\gamma + (\tilde{v}_{3|\beta} + b^\gamma_\beta \tilde{v}_\gamma)\boldsymbol{a}^3\big] \cdot [\boldsymbol{a}_\alpha - \varepsilon x_3 b^\sigma_\alpha \boldsymbol{a}_\sigma] \\ &= (\tilde{v}_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta}\tilde{v}_3) - \varepsilon x_3 b^\gamma_\alpha (\tilde{v}_{\gamma|\beta} - b_{\gamma\beta}\tilde{v}_3)\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{1}{2}(v_{\alpha\|\beta} + v_{\beta\|\alpha}) = \frac{1}{2}(\tilde{v}_{\alpha|\beta} + \tilde{v}_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\tilde{v}_3 - \varepsilon x_3 \frac{1}{2}(b^\gamma_\alpha \tilde{v}_{\gamma|\beta} + b^\gamma_\beta \tilde{v}_{\gamma|\alpha}) + \varepsilon x_3 c_{\alpha\beta}\tilde{v}_3\,,$$

also die Behauptung (6.2a) in lokaler Darstellung. Die anderen beiden Beziehungen ergeben sich analog. ■

6.2 Wahl der Schalendirektoren

Zur Konstruktion der Direktoren in $j\boldsymbol{\zeta}$ werden die formalen Forderungen

$$\sigma^{\alpha 3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\big|_{x_3=\pm 1} = \mathcal{O}(\varepsilon^3)\,, \qquad \sigma^{33}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\big|_{x_3=\pm 1} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \tag{6.3}$$

gestellt. Die Strategie besteht darin, bei Vorgabe eines Vektors $\boldsymbol{\zeta}$, die Direktoren $\boldsymbol{\zeta}^1,\, \boldsymbol{\zeta}^2,\, \boldsymbol{\zeta}^3$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\zeta}$ (und dessen Ortsableitungen) so zu wählen, daß die beiden Forderungen in jeder *Faser* $\boldsymbol{y} \times (-1,\, 1)$ der Schale gelten. D. h. , die Direktoren in (6.6) werden so bestimmt, daß $j\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{x})$ die natürliche Randbedingung an der Boden- und Deckfläche bis auf die oben angegebenen Ordnungen (formal) erfüllt. Es sei daran erinnert, daß für einen beliebigen, zweifach kovarianten Tensor $t_{\alpha\beta}$ der Mittelfläche, die differentialgeometrische Invariante t^σ_σ seine vollständige Kontraktion mit $a^{\alpha\beta}$ bezeichnet. So gilt zum Beispiel

$$\gamma^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta}) = a^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\,.$$

Es sei $\lambda_2 := \lambda + 2\mu$. Es sei $\varepsilon > 0$ ausreichend klein.

Durch die folgende Definition der Schalendirektoren sind die Beziehungen in (6.3) sichergestellt.

Definition 6.2.1 *Es sei $\boldsymbol{\zeta}$ ein Feld mit Komponenten in $H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega)$. Der zweifach kovariante Tensor $\boldsymbol{\zeta} \mapsto \vartheta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})$ auf der Fläche sei durch*

$$\vartheta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) := \big(\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - b^\sigma_\alpha \zeta_{\sigma|\beta} - b^\sigma_\beta \zeta_{\sigma|\alpha} + 2c_{\alpha\beta}\zeta_3 - \frac{\lambda}{2\lambda_2} b_{\alpha\beta}\gamma^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta}) + c_{\alpha\beta}\zeta_3\big)$$

gegeben. Der Tensor $\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})$ *ist aus* (4.2) *bekannt. Die Schalendirektoren sind durch die folgenden Vorschriften definiert:*

$$\begin{aligned} \zeta^1_\alpha &:= -\zeta_{3|\alpha} - b^\beta_\alpha \zeta_\beta\,, & \zeta^1_3 &:= -\frac{\lambda}{\lambda_2}\gamma^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta})\,, \\ \zeta^2_\alpha &:= \frac{\lambda}{2\lambda_2}\gamma^\sigma_{\sigma|\alpha}(\boldsymbol{\zeta})\,, & \zeta^2_3 &:= \frac{\lambda}{2\lambda_2}\vartheta^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

sowie

$$\begin{aligned} \zeta^3_\alpha &:= \frac{\lambda}{6\lambda_2}\Big(b^\beta_\alpha\gamma^\sigma_{\sigma|\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \vartheta^\sigma_{\sigma|\alpha}(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,, \\ \zeta^3_3 &:= 0\,. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Bemerkung

Durch eine geeignete (von 0 verschiedene) Wahl von ζ^3_3 könnte man sogar $\sigma^{33}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\big|_{x_3=\pm 1} = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, wenigstens formal, gewinnen. Es stellt sich aber heraus, daß hierdurch die Approximation (bezüglich der $H^1(\Omega)$–Norm) nicht verbessert wird. Die Definition $\zeta^3_3 = 0$ erscheint aus rechentechnischen Gründen vernünftig.

Für $x_3 \in (-1,\, 1)$ und $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ wird die Abbildung

$$\boldsymbol{\zeta} \mapsto j\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{x}) := \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{y}) + \varepsilon x_3 \boldsymbol{\zeta}^1(\boldsymbol{y}) + (\varepsilon x_3)^2\boldsymbol{\zeta}^2(\boldsymbol{y}) + (\varepsilon x_3)^3\boldsymbol{\zeta}^3(\boldsymbol{y}) \tag{6.6}$$

als eine *Direktorapproximation* bezeichnet. Das gleiche trifft auch dann zu, wenn für ein $T > 0$ das Feld $\boldsymbol{\zeta}$ zu $\mathcal{C}^0\big([0,\, T]; H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega)\big)$ gehört.

Der Rest des Unterabschnitts ist der Berechnung von $\sigma^{ij}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})$ gewidmet. Zunächst werden die Einträge des skalierten Verzerrungstensors $e_{i\|j}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})$ angegeben.

Lemma 6.2.2 *Es existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$ *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß*

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\|e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} + \|e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) - \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon x_3 \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}) \tag{6.7}$$

mit

$$\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}) := \varepsilon\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\omega} + \varepsilon^2(\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta})\|_{2,\omega} + \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{1,\omega}) + \varepsilon^3\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{2,\omega}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$, $\boldsymbol{\zeta} \in H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ *besteht.*

Beweis. Es sei ε kleiner als die kleinste der bisher eingeführten Schranken dafür. Sei $\boldsymbol{\zeta}$ beliebig aus $H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$. Nach (6.2a) und Definition der Direktorapproximation gilt

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon x_3\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^1) - \pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\big) + \varepsilon^2 x_3^2 e^{(2)}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})$$

mit

$$e^{(2)}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^2) - \pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^1) + \varepsilon x_3\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^3) - \pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^2)\big) - \varepsilon^2 x_3^2 \pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^3)\,.$$

Durch explizites Nachrechnen findet man

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^1) - \pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) = -\vartheta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\,,$$

sowie

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^2) &= \frac{\lambda}{4\lambda_2}\Big(\gamma^\sigma_{\sigma|\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - b_{\alpha\beta}\vartheta^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,,\\
\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^1) &= -\frac{1}{2}\Big(b^\sigma_\alpha(\zeta_{3|\sigma} + b^\varrho_\sigma\zeta_\varrho)_{|\beta} + b^\sigma_\beta(\zeta_{3|\sigma} + b^\varrho_\sigma\zeta_\varrho)_{|\alpha}\Big) + \frac{\lambda}{\lambda_2}c_{\alpha\beta}\gamma^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^3) &= \frac{\lambda}{12\lambda_2}\Big(\big(b^\varrho_\alpha\gamma^\sigma_{\sigma|\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\big)_{|\beta} + \big(b^\varrho_\beta\gamma^\sigma_{\sigma|\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\big)_{|\alpha} - \vartheta^\sigma_{\sigma|\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \vartheta^\sigma_{\sigma|\beta\alpha}(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,,\\
\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^2) &= \frac{\lambda}{4\lambda_2}\Big(b^\varrho_\alpha\gamma^\sigma_{\sigma|\varrho\alpha}(\boldsymbol{\zeta}) + b^\varrho_\beta\gamma^\sigma_{\sigma|\varrho\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - 2c_{\alpha\beta}\vartheta^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,,\\
\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^3) &= \frac{\lambda}{12\lambda_2}\Big(b^\tau_\alpha\big(b^\varrho_\tau\gamma^\sigma_{\sigma|\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\big)_{|\beta} + b^\tau_\beta\big(b^\varrho_\tau\gamma^\sigma_{\sigma|\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\big)_{|\alpha} - b^\varrho_\alpha\tau^\sigma_{\sigma|\varrho\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - b^\varrho_\beta\vartheta^\sigma_{\sigma|\varrho\alpha}(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,.
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy–Schwarz– und der Dreiecksungleichung folgt also

$$\begin{aligned}
\|e^{(2)}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} \le C\Big(&\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta})\|_{2,\omega} + \|\vartheta^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\omega} + \|\boldsymbol{\zeta}\|_{1,1,2,\omega} +\\
&+ (\varepsilon+\varepsilon^2)(\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta})\|_{2,\omega} + \|\vartheta^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta})\|_{2,\omega})\Big)\,.
\end{aligned}$$

Mit $a^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$ und aus der Definition von $\vartheta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})$ ist klar, daß

$$\vartheta^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta}) = \varrho^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta}) - 2b^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{\lambda_2}b^\alpha_\alpha\gamma^\sigma_\sigma(\boldsymbol{\zeta}) \tag{6.8}$$

gilt. Unter Beachtung der in $\boldsymbol{V}^K(\omega)$ gültigen Ungleichung (4.5) folgt also

$$\|e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) - \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon x_3\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})\,.$$

Mit Hilfe der Formel (6.2b) berechnet man explizit

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) = -\varepsilon^3 x^3 b^\tau_\alpha\zeta^3_\tau = -\frac{\lambda}{6\lambda_2}b^\tau_\alpha\Big(b^\beta_\tau\gamma^\sigma_{\sigma|\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \vartheta^\sigma_{\sigma|\tau}(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,. \tag{6.9}$$

Benützt man wieder (6.8), so folgt die Behauptung. ■

Damit lassen sich die von $j\boldsymbol{\zeta}$ hervorgerufenen Spannungen abschätzen.

Lemma 6.2.3 *Es existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$ *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß*

$$\|\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) - a^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) - \varepsilon x_3\varrho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta})\big)\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})\,, \tag{6.10a}$$

$$\|\sigma^{\alpha 3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} + \varepsilon\|\sigma^{33}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} \le C\varepsilon\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}) \tag{6.10b}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$, $\boldsymbol{\zeta} \in H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ *gilt. Die Schranke* $\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})$ *ist diejenige aus dem Lemma 6.2.2.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) &= A^{\alpha\beta ij}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) \\
&= A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) + 2\,\underbrace{A^{\alpha\beta 3\tau}(\varepsilon)}_{=\,0} e_{3\|\tau}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) + \underbrace{A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon)}_{=\,\lambda g^{\alpha\beta}(\varepsilon)} e_{3\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) &= \Big(A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) - \big(\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})\big)\Big) e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) + \\
&\quad + \big(\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})\big)\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \varepsilon x_3 \vartheta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\big) + \\
&\quad + \varepsilon^2 x_3^2 e^{(2)}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\big(\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})\big) + \\
&\quad + \lambda\big(g^{\alpha\beta}(\varepsilon) - a^{\alpha\beta}\big) e_{3\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) + \lambda a^{\alpha\beta} e_{3\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\,.
\end{aligned}$$

Die Formel (6.2c) liefert

$$e_{3\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) = -\frac{\lambda}{\lambda_2} a^{\sigma\tau}\big(\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) - \varepsilon x_3 \vartheta_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta})\big)\,.$$

Mit den Abschätzungen im Lemma 6.1.1, Korollar 6.1.2, der Beziehung (6.8) und

$$\|e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} \le C\left(\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\omega} + \varepsilon\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\omega} + \mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})\right),$$

folgt die Abschätzung (6.10a). Mit den Ergebnissen der Proposition 6.1.3 erhält man

$$\sigma^{\alpha 3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) = 2\mu g^{\alpha\beta}(\varepsilon) e_{3\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\,.$$

Mit Hilfe von 6.2.2 folgt also

$$\|\sigma^{\alpha 3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\Omega} \le C\varepsilon\, \mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})\,.$$

Schließlich ergeben die Beziehungen in der Proposition 6.1.3 die Darstellung

$$\begin{aligned}
\sigma^{33}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) &= \lambda g^{\alpha\beta}(\varepsilon) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) + \lambda_2 e_{3\|3}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) \\
&= \lambda\big(a^{\alpha\beta} + 2\varepsilon x_3 b^{\alpha\beta} + 3\varepsilon^2 x_3^2 c^{\alpha\beta}\big)\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \varepsilon x_3 \vartheta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon^2 x_3^2 e^{(2)}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\big) \\
&\quad + \lambda\Big(g^{\alpha\beta}(\varepsilon) - (a^{\alpha\beta} + 2\varepsilon x_3 b^{\alpha\beta} - 3\varepsilon^2 x_3^2 c^{\alpha\beta})\Big) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) + \\
&\quad - \lambda a^{\sigma\tau}\big(\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) - \varepsilon x_3 \vartheta_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta})\big)\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung im Lemma 6.1.1 ergibt sich also

$$\sigma^{33}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) = \varepsilon^2 x_3^2\big(3c^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) + a^{\alpha\beta} e^{(2)}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta})\big) + \mathcal{O}\big(\varepsilon\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})\big)\,. \tag{6.11}$$

Das auftretende Landausymbol ist in $L^2(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$ zu verstehen. Nachdem der erste Term

in (6.11) selbst durch $\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})$ beschränkt ist, ist der Beweis abgeschlossen. ■

6.3 Die Verwandtschaft zum Koiter–Operator

In diesem Unterabschnitt wird die Verbindung zwischen der dreidimensionalen Elastizität und dem Koiterschen Modell hergestellt. Das Ziel ist, die Kleinheit von

$$\Big| B(\varepsilon)(j\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{v}) - 2\Big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}, [\boldsymbol{v}]\Big)_\omega \Big| \tag{6.12}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$, $\boldsymbol{\zeta} \in H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ und alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ nachzuweisen. Mit $[\boldsymbol{v}]$ ist die Mittelung eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ über der Schalendicke bezeichnet. Es gilt die

Definition 6.3.1 *Es sei v eine Funktion in $L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{v}$ ein Vektorfeld mit Komponenten in $L^2(\Omega)$. Dann definiert*

$$[v] := \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} v(\boldsymbol{y},\, x_3)\,\mathrm{d}x_3\,, \qquad [\boldsymbol{v}] := \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},\, x_3)\,\mathrm{d}x_3$$

die zugehörigen Mittelwerte über der Schalendicke,.

Im ersten Teil werden benötigte Hilfsabschätzungen gesammelt. In einem zweiten Teil werden diese zusammen mit den Ergebnissen des vorhergehenden Unterabschnitts zur Abschätzung von (6.12) angewandt.

Von nun an gelte die folgende Vereinbarung über die Benutzung der Landausymbole:

Notation 6.3.2 *Für reelle Zahlen $s > 0$ bezeichnet $\mathcal{O}(s)$ ein Element aus $L^2(\Omega)$, für das die folgende Aussage zutrifft. Es existiert eine nur von der gewählten Schale (d. h. von ω und $\boldsymbol{\varphi}$) abhängige Konstante $C > 0$, so daß*

$$\|\mathcal{O}(s)\|_{0,\Omega} \le Cs$$

gilt.

6.3.1 Technisches II

Die Differenz zwischen einer Funktion und ihrem Mittelwert über der Schalendicke läßt sich mit der Ableitung in die Dickenrichtung kontrollieren.

Lemma 6.3.3 *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß die Abschätzung*

$$\|v - [v]\|_{0,\Omega} \le C\|\partial_3 v\|_{0,\Omega} \tag{6.13}$$

für alle $v \in L^2(\Omega)$ mit $\partial_3 v \in L^2(\Omega)$ gilt.

Beweis. Es sei v eine beliebige Funktion aus $L^2(\Omega)$, so daß ihre Distributionsableitung $\partial_3 v$ auch zu $L^2(\Omega)$ gehört. Nach [19], Seite 9, gilt für fast alle $(\boldsymbol{y},\, s) \in \omega \times (-1,\, 1)$ die Darstellung

$$v(\boldsymbol{y},\, s) = v(\boldsymbol{y},\, -1) + \int_{-1}^{s} \partial_3 v(\boldsymbol{y},\, x_3)\, \mathrm{d}x_3\,.$$

Damit ergibt sich

$$v(\boldsymbol{y},\, s) - [v](\boldsymbol{y}) = \int_{-1}^{s} \partial_3 v(\boldsymbol{y},\, x_3)\, \mathrm{d}x_3 \; - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\tilde{s}} \partial_3 v(\boldsymbol{y},\, x_3)\, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}\tilde{s}\,.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz– und der Dreiecksungleichung folgt die Aussage zum Beispiel mit $C = 2\sqrt{2}$. ■

Lemma 6.3.4 *Es sei eine Schale gegeben, deren Mittelfläche den Annahmen der Hypothese 4.0.1 genügt. Dann existiert ein ε_0 und eine Konstante $C > 0$, so daß*

$$\varepsilon \|\tilde{v}_\alpha - [\tilde{v}_\alpha]\|_{0,\Omega} + \|\tilde{v}_3 - [\tilde{v}_3]\|_{0,\Omega} \;\leq\; C\varepsilon \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\,, \tag{6.14a}$$

$$\varepsilon \|[x_3^2 \tilde{v}_\alpha] - \frac{1}{3}[\tilde{v}_\alpha]\|_{0,\omega} + \|[x_3^2 \tilde{v}_3] - \frac{1}{3}[\tilde{v}_3]\|_{0,\omega} \;\leq\; C\varepsilon \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\,, \tag{6.14b}$$

$$\|[x_3 \tilde{v}_3]\|_{0,\omega} \;\leq\; C\varepsilon \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{6.14c}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ und alle $\boldsymbol{v} = v_i\, \boldsymbol{g}^i(\varepsilon) = \tilde{v}_j\, \boldsymbol{a}^j \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ gilt.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aus einer ausreichend kleinen Umgebung der 0. Für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{v} = \tilde{v}_j\, \boldsymbol{a}^j$ folgt aus (6.2b) – (6.2c) die Gültigkeit von

$$(\delta_\alpha^\varrho - \varepsilon x_3 b_\alpha^\varrho)\partial_3 \tilde{v}_\alpha \;=\; 2\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) - \varepsilon \tilde{v}_{3|\alpha}\,, \tag{6.15a}$$

$$\partial_3 \tilde{v}_3 \;=\; \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\,. \tag{6.15b}$$

Wegen $\|(b_\alpha^\varrho)\|_{\infty,\omega} \leq \tilde{C}$ existiert ein ε_0, so daß das lineare Gleichungssystem (6.15a) nach $\partial_3 \tilde{v}_\alpha$ aufgelöst werden kann. Mit Hilfe der Ungleichung Kornschen Typs (5.20) folgt also

$$\|\partial_3 \tilde{v}_\alpha\|_{0,\Omega} \leq C \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\,. \tag{6.16}$$

Mit (6.13) folgt die Abschätzung (6.14a). Die zweite Abschätzung folgt mit ähnlichen Argumenten aus

$$[x_3^2 \tilde{v}_i] - \frac{1}{3}[\tilde{v}_i] = \frac{1}{6} \int_{-1}^{+1} \partial_3 (x_3^3 - x_3) \tilde{v}_i \mathrm{d}x_3 = -\frac{1}{6} \int_{-1}^{+1} (x_3^3 - x_3) \partial_3 \tilde{v}_i \mathrm{d}x_3\,.$$

Schließlich folgt (6.14c) aus

$$[x_3 \tilde{v}_3] = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \partial_3 (x_3^2 - 1) \tilde{v}_3 \mathrm{d}x_3 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} (x_3^2 - 1) \partial_3 \tilde{v}_3 \mathrm{d}x_3\,,$$

und mit (6.15b) ist der Beweis abgeschlossen. ■

Lemma 6.3.5 *Es sollen die Voraussetzungen des Lemmas 6.3.4 gelten. Dann existiert ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$ *, so daß*

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} + \|[x_3\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})]\|_{0,\omega} \leq C\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{6.17}$$

für alle $\boldsymbol{v} = v_j\boldsymbol{g}^j(\varepsilon) = \tilde{v}_i\boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *und alle* $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ *gilt.*

Beweis. Aus (6.2a) folgt

$$-x_3\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\varepsilon}\big(e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) - \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})\big)\,.$$

Andererseits findet man mit Hilfe des Transformationsgesetzes (5.19) die Beziehung

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) = e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) + \big(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\big)v_\sigma - \varepsilon x_3 c_{\alpha\beta}v_3\,. \tag{6.18}$$

Mit dem Lemma 6.1.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}-x_3\pi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) =& x_3 b^\sigma_{\alpha|\beta}v_\sigma + x_3 c_{\alpha\beta}v_3 + \mathcal{O}(\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega})\\ =& x_3 b^\sigma_{\alpha|\beta}[v_\sigma] + x_3 b^\sigma_{\alpha|\beta}\big(v_\sigma - [v_\sigma]\big) + x_3 c_{\alpha\beta}[v_3] + x_3 c_{\alpha\beta}\big(v_3 - [v_3]\big) + \mathcal{O}(\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega})\,.\end{aligned}$$

Integration über die Schalendicke und Anwendung der Ungleichung (5.20) beweisen die Aussage. ■

6.3.2 Beziehung zum Koiter–Operator

Es gilt der

Satz 6.3.6 *Es sei eine Schale gegeben, deren Mittelfläche den Annahmen der Hypothese 4.0.1 genügt. Für ein* $\boldsymbol{\zeta}$ *sei* $j\boldsymbol{\zeta}$ *die Direktorapproximation mit den Direktoren laut* (6.4) – (6.5)*. Dann existiert ein* ε_0 *und ein* $C > 0$ *, so daß*

$$\Big|B(\varepsilon)(j\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{v}) - 2\Big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}, [\boldsymbol{v}]\Big)_\omega\Big| \leq C\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{6.19}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$, $\boldsymbol{\zeta} \in H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ *und alle* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *besteht. Die Schranke* $\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})$ *ist diejenige aus dem Lemma 6.2.2.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aus einer ausreichend kleinen Umgebung der 0. Es seien $\boldsymbol{\zeta} \in H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ gegeben. Mit der Darstellung des Volumenelements

$$\sqrt{g(\varepsilon)} = \sqrt{a}\big(1 - \varepsilon x_3 h(\boldsymbol{y}) + \varepsilon^2 x_3^2 k(\boldsymbol{y})\big)$$

und den Abschätzungen (6.10) für die Spannungen von $j\boldsymbol{\zeta}$ entsteht

$$B(\varepsilon)(j\boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega A^{ijk\ell}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) e_{k\|\ell}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) \sqrt{g(\varepsilon)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \sigma^{ij}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) e_{i\|j}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \int\limits_\omega \int\limits_{-1}^{+1} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon,\, j\boldsymbol{\zeta}) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) \sqrt{a}\, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}\boldsymbol{y} + \mathcal{O}(\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}) \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega})\,.$$

Insbesondere erhält man aus (6.10a) und (6.2a)

$$\int\limits_\omega \int\limits_{-1}^{+1} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon, j\boldsymbol{\zeta}) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) \sqrt{a}\, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$= \int\limits_\omega \int\limits_{-1}^{+1} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \varepsilon x_3 \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\big) \big(\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) - \varepsilon x_3 \pi_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})\big) \sqrt{a}\, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

$$= I_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) + I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) + I_3(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v})$$

mit

$$I_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) \;:=\; 2 \int\limits_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) [\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})] \sqrt{a} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\,,$$

$$I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) \;:=\; -2\varepsilon \int\limits_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) [x_3 \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})] \sqrt{a} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \;+ 2\varepsilon^2 \int\limits_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) [x_3^2 \pi_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})] \sqrt{a} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\,,$$

$$I_3(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) \;:=\; -2\varepsilon \int\limits_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) [x_3 \pi_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})] \sqrt{a} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\,.$$

Im folgenden werden die Integrale einzeln abgeschätzt. Aus (6.17) folgt

$$\big|I_3(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v})\big| \le C \mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}) \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|\,.$$

Da die Christoffelschen Symbole der Fläche von x_3 unabhängig sind, vertauscht die Mittelwertbildung $[\,\cdot\,]$ mit der kovarianten Differentiation $|$. Darüber hinaus geht bei den nächsten Rechnungen die Wahl der Dirichlet–Randbedingungen in $\boldsymbol{V}^K(\omega)$ wesentlich ein. Bei der nachfolgenden partiellen Integration verschwinden die Randterme, denn es gilt einerseits $\boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{V}^K(\Omega)$ und andererseits

$$[\boldsymbol{v}]\big|_{\partial\omega} = [x_3 \boldsymbol{v}]\big|_{\partial\omega} = [x_3^2 \boldsymbol{v}]\big|_{\partial\omega} \equiv 0\,.$$

Aus $a^{\alpha\beta\sigma\tau} = a^{\alpha\beta\tau\sigma}$ erhält man $a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) [\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})] = a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) \big([\tilde{v}_\sigma]_{|\tau} - b_{\sigma\tau} [\tilde{v}_3]\big)$. Mit dem Lemma von Ricci gilt somit nach partieller Integration

$$I_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) = -2 \int\limits_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \big(\gamma_{\alpha\beta|\tau}(\boldsymbol{\zeta}) [\tilde{v}_\sigma] + \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) b_{\sigma\tau} [\tilde{v}_3]\big) \sqrt{a} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\,.$$

Wegen den obigen Symmetrien von $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ erhält man für $I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v})$ explizit

$$I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) = -2\varepsilon \int\limits_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) \Big([x_3 \tilde{v}_\sigma]_{|\tau} - b_{\sigma\tau}[x_3\tilde{v}_3] - \varepsilon\big(b^\varrho_\sigma [x_3^2 \tilde{v}_\varrho]_{|\tau} - c_{\sigma\tau}[x_3^2\tilde{v}_3]\big)\Big) \sqrt{a}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,.$$

Mit $\|[x_3\tilde{v}_3]\|_{0,\omega} \le C\varepsilon \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}$ und Riccis Lemma folgt wieder mit partieller Integration

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) = 2\varepsilon \int\limits_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Big(\varrho_{\alpha\beta|\tau}(\boldsymbol{\zeta})[x_3\tilde{v}_\sigma] - \varepsilon\big(b^\varrho_\sigma \varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\big)_{|\tau}[x_3^2\tilde{v}_\varrho] - \varepsilon c_{\sigma\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})[x_3^2\tilde{v}_3]\Big)\sqrt{a}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,\omega} \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega})\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

An dieser Stelle kommt die entscheidende Beobachtung. Für das *erste Moment* von $\tilde{v}_\sigma$ gilt einerseits

$$[x_3\tilde{v}_\sigma] = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{+1} \partial_3(x_3^2-1)\tilde{v}_\sigma \mathrm{d}x_3 = -\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{+1}(x_3^2-1)\partial_3\tilde{v}_\sigma \mathrm{d}x_3 = \frac{1}{2}\big([\partial_3\tilde{v}_\sigma] - [x_3^2\partial_3\tilde{v}_\sigma]\big)$$

und andererseits wegen (6.2b)

$$\partial_3\tilde{v}_\sigma = 2\varepsilon e_{\sigma\|3}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v}) - \varepsilon(\tilde{v}_{3|\sigma} + b^\varrho_\sigma \tilde{v}_\varrho) + \varepsilon x_3 b^\varrho_\sigma \partial_3 \tilde{v}_\varrho\,.$$

Mit (6.16) erhält man also

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\big([\partial_3\tilde{v}_\sigma] - [x_3^2\partial_3\tilde{v}_\sigma]\big) &= -\tfrac{\varepsilon}{2}\Big([\tilde{v}_3]_{|\sigma} - [x_3^2\tilde{v}_3]_{|\sigma} + b^\varrho_\sigma\big([\tilde{v}_\varrho] - [x_3^2\tilde{v}_\varrho]\big)\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}) \\ &= -\tfrac{\varepsilon}{2}\Big(\tfrac{1}{3}[\tilde{v}_3]_{|\sigma} - \big([x_3^2\tilde{v}_3] - \tfrac{1}{3}[\tilde{v}_3]\big)_{|\sigma} \\ &\qquad + b^\varrho_\sigma\Big(\tfrac{1}{3}[\tilde{v}_\varrho] - \big([x_3^2\tilde{v}_\varrho] - \tfrac{1}{3}[\tilde{v}_3]\big)\Big)\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}) \\ &= -\varepsilon\Big(\tfrac{1}{3}[\tilde{v}_3]_{|\sigma} - \tfrac{1}{2}\big([x_3^2\tilde{v}_3] - \tfrac{1}{3}[\tilde{v}_3]\big)_{|\sigma} + \tfrac{1}{3}b^\varrho_\sigma[\tilde{v}_\varrho]\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega})\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der letzten Gleichung die Abschätzung (6.14b) verwendet. Setzt man die letzte Beziehung in (6.20) ein und benutzt man dort $[x_3^2\tilde{v}_i] = \frac{1}{3}[\tilde{v}_i] + \big([x_3^2\tilde{v}_i] - \frac{1}{3}[\tilde{v}_i]\big)$, so liefert die partielle Integration zusammen mit (6.14b) die Beziehung

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) = \frac{2\varepsilon^2}{3}\int\limits_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau}\Big(-b^\varrho_\sigma\varrho_{\alpha\beta|\tau}(\boldsymbol{\zeta}) - \big(b^\varrho_\sigma\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\big)_{|\tau}\Big)[\tilde{v}_\varrho] + \\ + a^{\alpha\beta\sigma\tau}\Big(\varrho_{\alpha\beta|\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) - c_{\sigma\tau}\varrho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\Big)[\tilde{v}_3]\sqrt{a}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ + \mathcal{O}\Big(\big(\varepsilon^2\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{1,\omega} + \varepsilon^3\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{\zeta})\|_{2,\omega}\big)\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\Big)\,. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Der Vergleich mit dem auf Seite 43 in (4.3) definierten Koiter–Operator liefert schließlich

$$I_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) + I_2(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) + I_3(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}) = 2 \int\limits_{\omega} \big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}\big)^j [\tilde{v}_j] \sqrt{a} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\,.$$

■

6.4 Eigenschaften der Randkorrektoren

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Eigenschaften der Korrektorfunktionen beschrieben. Die Wahl geeigneter Korrektorfunktionen hängt von der betrachteten Zeitskala ab. Die Grundlagen hierzu sind in [35], insbesondere Kapitel 2, Abschnitte 4 und 5, zu finden. Das folgende Lemma ist eine von C. MARDARE bewiesene Verallgemeinerung des Lemmas 5.1 in [35].

Lemma 6.4.1 (MARDARE, [39]) *Es seien* $n,\, m \in \mathbb{N}$. *Es sei* G *ein Gebiet im* $\mathbb{R}^n$, *dessen Berandung* ∂G *von der Klasse* $\mathcal{C}^m$ *ist. Dann gibt es eine Konstante* $C > 0$, *die nur von* G *abhängt, so daß zu jedem* $u \in H^m(G)$, *jedem* $\kappa > 0$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Funktion* $u(\varepsilon) \in H^m(G)$ *existiert, so daß*

$$\begin{aligned} &u - u(\varepsilon) \in H_0^m(G)\,, \\ &\|u(\varepsilon)\|_{0,G} \le C\varepsilon^{\kappa}\|u\|_{0,G}\,, \\ &\|u(\varepsilon)\|_{\ell,G} \le C\varepsilon^{-\kappa\ell^2}\|u\|_{\ell,G}\,, \qquad \ell = 1,\, \ldots\,,\, m \end{aligned}$$

gilt.

Der konstruktive Beweis in [39] und [35], Seite 129–130, erlaubt das folgende Korollar.

Korollar 6.4.2 *Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen des Lemmas 6.4.1. Es sei* $T > 0$ *gegeben. Dann gibt es eine Konstante* $C > 0$, *die nur von* G *und* T *abhängt, so daß zu jedem* $u \in \mathcal{C}^2\big([0,\, T];\, H^m(G)\big)$, *jedem* $\kappa > 0$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Funktion* $u(\varepsilon) \in \mathcal{C}^2\big([0,\, T];\, H^m(G)\big)$ *existiert, so daß*

$$\begin{aligned} &u(t) - u(\varepsilon,\, t) \in H_0^m(G)\,, \\ &\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}u(\varepsilon,\, t)\|_{0,G} \le C\varepsilon^{\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}u(t)\|_{0,G}\,, \\ &\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}u(\varepsilon,\, t)\|_{\ell,G} \le C\varepsilon^{-\kappa\ell^2}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}u(t)\|_{\ell,G} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,\, T]$, $\ell = 1,\, \ldots\,,\, m$, $p = 0,\, 1,\, 2$ *gilt.*

Beweis. Durch eine Partition der Eins reicht es, den Fall $G = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ mit lokalen Koordinaten $(z_1,\, z_2,\, \ldots\,,\, z_{n-1},\, z_n)$ zu betrachten. Nach dem Beweis des Lemma von Mardare, [39], und [35], Lemma 5.1, kann $u(\varepsilon,\, t)$ für jedes $t \in [0,\, T]$ in der Form

$$u(\varepsilon,\, t,\, z_1,\, z_2,\, \ldots\,,\, z_{n-1},\, z_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k(\varepsilon) u(t,\, z_1,\, z_2,\, \ldots\,,\, z_{n-1},\, \frac{z_n}{\varepsilon^k})$$

mit

$$c_s(\varepsilon) = (-1)^{s-1} \varepsilon^{\frac{s(s-1)}{2}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\,, \qquad s = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, m$$

gewählt werden. Da die Koeffizienten $c_k(\varepsilon)$ unabhängig von der Zeit sind, ist klar, daß hinsichtlich der t–Abhängigkeit die Funktionen $u(\varepsilon)$ genau die Eigenschaften von u erben. Die Aussage folgt aus dem Lemma 6.4.1. ■

Bemerkung

a) Im Zusammenhang mit der Statik der linear elastischen Schale konnten in den Arbeiten [40, 37, 39, 38] und [36] auf der Grundlage des Lemmas 6.4.1 Randkorrektoren konstruiert werden. Damit konnte in jedem der betrachteten Probleme eine Konvergenzaussage mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

b) Es ist zu bemerken, daß Randkorrektoren, die nach Lemma 6.4.1 gewählt werden können, nicht notwendigerweise Lösungen einer Gleichung sind, die im relevanten Problem auftritt. Gerade dieser Punkt ist bei rechenintensiven Aufgaben, wie zum Beispiel bei der vorliegenden, von größter Bedeutung. Der Nachteil dieses Zugangs ist, daß die Optimalität der resultierenden Fehlerabschätzung nicht garantiert werden kann.

Kapitel 7

Fehlerabschätzungen

7.1 Langsame Dynamik der Schale

Das Ausgangsproblem auf der dicken Schale (5.23) werde in diesem Abschnitt auf der langsamen Zeitskala $\tau = \varepsilon t$ betrachtet. Die zugehörige Energie ist somit durch

$$H_{\text{slow}}(\varepsilon)\big((\boldsymbol{u}(\varepsilon), \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon)\big) := \frac{1}{2} B\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon), \boldsymbol{u}(\varepsilon)\big) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon)\Big)_\Omega$$

gegeben. Die Bewegungsgleichung in starker Form lautet

$$L(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, \tau) = -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, \tau)\,.$$

Um hierfür eine erfolgreiche Dimensionsreduktion durchzuführen, muß die folgende Asymptotik an die Anfangsbedingungen gestellt werden.

Hypothese 7.1.1
Es sei $\varepsilon > 0$. Zu gegebenen Vektorfeldern $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ in $D\big(L(\varepsilon)^{5/2}\big) \times D\big(L(\varepsilon)^2\big)$ existieren Felder $\boldsymbol{a}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{a}_1(\varepsilon)$ derart, daß

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}_0(\varepsilon)] &= \mathcal{O}(1) \quad \text{in } H^4(\omega) \times H^4(\omega) \times H^6(\omega) \quad \text{für } \varepsilon \to 0\,,\\
[\boldsymbol{a}_1(\varepsilon)] &= \mathcal{O}(1) \quad \text{in } H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \quad \text{für } \varepsilon \to 0\,,\\
L(\varepsilon)\boldsymbol{u}_p(\varepsilon) &= -\varepsilon^2 \boldsymbol{a}_p(\varepsilon)\,, \qquad p = 0,\, 1
\end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung

a) Es existieren Anfangsbedingungen $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ in $\mathcal{X}_2$, welche die Annahmen der Hypothese 7.1.1 erfüllen.

b) Im folgenden soll eine Interpretation der Hypothese 7.1.1 beschrieben werden. Wenn mit $\boldsymbol{u}(\varepsilon,\tau)$ die Lösung zu

$$L(\varepsilon)\boldsymbol{u} = -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{u}$$

mit $\boldsymbol{u}(\varepsilon,0) = \boldsymbol{u}_0(\varepsilon)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{u}(\varepsilon,0) = \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ bezeichnet ist, dann ist diese wegen der geforderten Regularität an die Anfangsbedingungen mindestens dreimal stetig differenzierbar nach τ. Insbesondere gilt für $\tau = 0$

$$L(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,0) = L(\varepsilon)\boldsymbol{u}_0(\varepsilon) \;=\; -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,0)\,, \tag{7.1a}$$

$$L(\varepsilon)\boldsymbol{u}_1(\varepsilon) \;=\; -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,0) \tag{7.1b}$$

jeweils in $L^2(\Omega)^3$. Aus Stetigkeitsgründen ist es natürlich zu fordern, daß die Anfangsbedingungen dieselben Entwicklungen (Direktordarstellungen) erlauben wie $\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,\tau)$ selbst. Nun sind (7.1) aber statische Schalenprobleme, wenn man $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon)$ resp. $\boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ als Unbekannte auffaßt und $-\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,0)$ resp. $-\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,0)$ als angebrachte Lasten betrachtet. Aus den Arbeiten von CIARLET & LODS, [8, 9, 10], ist bekannt, daß die Lasten geeignete Asymptotik aufweisen müssen damit die Antwort der Schale der Größenordnung 1 (für $\varepsilon \to 0$) ist. Die Forderungen in der Hypothese 7.1.1 ist aus dieser Sicht das Analogon zu den Forderungen an die Lasten in den o. g. Arbeiten.

Der erste Unterabschnitt behandelt die Wahl der Randkorrektoren und die später benötigten Abschätzungen. Im zweiten Abschnitt werden die Anfangsbedingungen für das dimensionsreduzierte Modell konstruiert. Dabei wird das Reduktionsproblem in der Statik der Schale gelöst. Der letzte Unterabschnitt beweist die asymptotische Korrektheit der dimensionsreduzierten langsamen Dynamik.

7.1.1 Randkorrektoren der langsamen Dynamik

Definition 7.1.2 *Es sei $T > 0$ gegeben. Für alle $\tau \in [0,\,T]$ und für alle $\varepsilon > 0$ gehören die τ–stetigen Felder $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ resp. $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ zu $H^3(\omega)\times H^3(\omega)\times H^4(\omega)\cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ resp. $H^2(\omega)\times H^2(\omega)\times H^3(\omega)$. Dann wird mit $\gamma_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)$ eine Funktion wie im Korollar 6.4.2 bezeichnet, die*

$$\gamma_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) - \gamma_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big) \in H_0^2(\omega)$$

leistet. Mit $\vartheta_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)$ sei eine Funktion wie im Korollar 6.4.2 bezeichnet, welche

$$\vartheta_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) - \vartheta_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big) \in H_0^2(\omega)$$

leistet.

Die Funktionen $\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)$ und $\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)$ sind wohldefiniert, denn aus der Voraussetzung an $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ folgt

$$\gamma_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\,,\ \vartheta_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) \in H^2(\omega)\,.$$

Mit den beiden Funktionen $\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)$ und $\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)$ kann die Direktorapproximation aus (6.6) auf $\partial\omega\times(-1,\,1)$ so korrigiert werden, daß

$$\Big(j\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon,\,\tau)+\boldsymbol{U}(\varepsilon,\,\tau)\Big)\big|_{\partial\omega\times(-1,\,1)} \equiv 0$$

für alle betrachteten ε und alle $\tau\in[0,\,T]$ gilt.

Definition 7.1.3 *Es seien $\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)$ und $\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)$ die Funktionen laut obiger Definition 7.1.2. Dann wird für $\varepsilon,\,\tau$ wie in der Definition 7.1.2 und $x_3\in(-1,\,1)$ mit*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) := \varepsilon x_3\frac{\lambda}{\lambda_2}\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\boldsymbol{a}^3 - \varepsilon^2 x_3^2\frac{\lambda}{2\lambda_2}\Big(\gamma_{\sigma|\alpha}^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\boldsymbol{a}^\alpha+\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\boldsymbol{a}^3\Big)\\ -\varepsilon^3 x_3^3\frac{\lambda}{6\lambda_2}\Big(b_\alpha^\beta\gamma_{\sigma|\beta}^\sigma(\varepsilon,\,\tau)-\vartheta_{\sigma|\alpha}^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\Big)\boldsymbol{a}^\alpha\end{aligned} \tag{7.2}$$

der Korrektor der langsamen Schalendynamik *bezeichnet.*

Die nächste Proposition schätzt den Energieverbrauch ab, welcher zur Herstellung des Verschiebungfeldes $\boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ in der dicken Schale benötigt wird.

Proposition 7.1.4 *Es sei $\boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ laut der Definition 7.1.3 gegeben. Dann gehört das Feld $j\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon,\,\tau)+\boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ zu $\boldsymbol{V}(\Omega)$ für alle $\tau\in[0,\,T]$ und alle $\varepsilon>0$. Es existiert ein $\varepsilon_0>0$ und eine Konstante $C>0$, so daß*

$$\|\boldsymbol{e}\big(\varepsilon,\boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) \tag{7.3}$$

für alle $\tau\in[0,\,T]$, alle $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0]$ und alle $\kappa\in(0,\,1)$ gilt. Dabei ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) := \varepsilon^\kappa\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega}+\varepsilon^{1+\kappa}\|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega}\\ +\varepsilon^{2-4\kappa}\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{2,\omega}+\varepsilon^{3-4\kappa}\|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{2,\omega}\,.\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Behauptung ist klar nach Konstruktion des Korrektors. Aus dem Korollar 6.4.2 folgt zunächst

$$\begin{aligned}&\|\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\|_{0,\omega}\le C\varepsilon^\kappa\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega}\,, && \|\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\|_{0,\omega}\le C\varepsilon^\kappa\|\vartheta_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\omega}\,,\\ &\|\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\|_{1,\omega}\le C\varepsilon^{-\kappa}\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{1,\omega}\,, && \|\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\|_{1,\omega}\le C\varepsilon^{-\kappa}\|\vartheta_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{1,\omega}\,,\\ &\|\gamma_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\|_{2,\omega}\le C\varepsilon^{-4\kappa}\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{2,\omega}\,, && \|\vartheta_\sigma^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\|_{2,\omega}\le C\varepsilon^{-4\kappa}\|\vartheta_\sigma^\sigma\big(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{2,\omega}\,.\end{aligned}$$

Aus (6.2a) folgt

$$\begin{aligned}\|e_{\alpha\|\beta}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{0,\Omega} &\le C\|\boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\|_{1,1,0,\Omega}\\ &\le C\Big(\varepsilon\|\gamma_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon^2(\|\gamma_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)\|_{2,\omega} + \|\vartheta_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)\|_{0,\omega})\\ &\qquad + \varepsilon^3\|\vartheta_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)\|_{1,\omega}\Big)\,.\end{aligned}$$

Benutzt man die erstgenannten Ungleichungen und die Beziehung (6.8), so erreicht man

$$\|e_{\alpha\|\beta}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\,.$$

Die Normaldehnung lautet explizit

$$e_{3\|3}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big) = \frac{\lambda}{\lambda_2}\Big(\gamma_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big) - \varepsilon x_3\vartheta_\sigma^\sigma\big(\varepsilon,\,\tau\big)\Big)\,.$$

Somit folgt wie oben $\|e_{3\|3}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)$. Schließlich berechnet man wie im Beweis des Lemmas 6.2.2 die Schubverzerrungen $e_{\alpha\|3}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)$. Es gilt

$$e_{\alpha\|3}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big) = \frac{1}{3}\varepsilon^3 x^3 b_\alpha^\beta\big(b_\beta^\varrho\gamma_{\sigma|\varrho}^\sigma(\varepsilon,\,\tau) - \vartheta_{\sigma|\beta}^\sigma(\varepsilon,\,\tau)\big)\,.$$

Unter Beachtung der ersten Ungleichung im Beweis ergibt sich sogar

$$\|e_{\alpha\|3}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{0,\Omega} \le C\varepsilon\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\,. \tag{7.4}$$

Damit ist (7.3) bewiesen. ■

In der nächsten Proposition wird eine Schranke für die durch $\boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)$ hervorgerufenen Beschleunigungen bereitgestellt.

Proposition 7.1.5 *Es sei $\boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)$ wie in der Proposition 7.1.4 gegeben. $\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)$ gehöre für $p = 2,\,3$ zu $H^2(\omega)\times H^2(\omega)\times H^3(\omega)$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Konstante $C > 0$, so daß für $p = 2,\,3$*

$$\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\|_{0,\Omega} \le C\mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\,\kappa,\,p,\,\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big) \tag{7.5}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\,\kappa,\,p,\,\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big) := \varepsilon^{1+\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon^{2-\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{1,\omega}\\ + \varepsilon^{2+\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon^{3-\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\zeta}^{\varepsilon}(\tau)\big)\|_{1,\omega}\,.\end{aligned}$$

für alle $\tau\in[0,\,T]$, alle $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0]$ und alle $\kappa\in(0,\,1)$ gilt.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Definition des Korrektors, (7.2) und den Abschätzungen im Korollar 6.4.2. ■

7.1.2 Konstruktion der reduzierten Anfangsbedingungen

Für $\kappa \in (0,\, 1)$ und ausreichend kleine ε gelte fortan

$$\mathfrak{R}_4(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\zeta}) := \mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}) + \mathfrak{R}_2(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\zeta})\,.$$

Die Schranken $\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta})$ resp. $\mathfrak{R}_2(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\zeta})$ sind im Lemma 6.2.2, Seite 76, resp. in der Proposition 7.1.4, Seite 89, definiert. Für den Parameter ε gilt stets die Abmachung 4.0.2.

Definition 7.1.6 *Es seien $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ gegeben, welche den Annahmen der Hypothese 7.1.1 genügen. Mit $\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon,\, (p = 0,\, 1)$ ist die Lösung zu*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon = -\varepsilon^2[\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)\tfrac{\sqrt{g(\varepsilon)}}{\sqrt{a}}]$$

unter Dirichletrandbedingungen bezeichnet. Es sei $\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ die Lösung des Problems

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon = -\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon \qquad \textit{in} \quad L^2(\omega)^3\,,$$

mit

$$\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\zeta}_0^\varepsilon\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\zeta}_1^\varepsilon$$

unter Randbedingungen (4.11). *Mit $\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\tau),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\tau)\big)$ sei die Lösung des Ausgangsproblems* (5.23) *zu Anfangsbedingungen $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ bezeichnet. Der Ausdruck*

$$\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\, \tau),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, \tau)\big) := \big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, \tau),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, \tau)\big) - \big(A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)$$

mit $A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) := j\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\varepsilon,\, \tau) + \boldsymbol{U}_{slow}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ heißt der Gesamtfehler der langsamen Schalendynamik. *Schließlich sei*

$$\boldsymbol{R}_0(\varepsilon) := \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0), \qquad \boldsymbol{R}_1(\varepsilon) := \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, 0)\,.$$

Es gilt der

Satz 7.1.7 *Es seien $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ gegeben, welche den Annahmen der Hypothese 7.1.1 genügen. Es werden die Bezeichnungen aus der Definition 7.1.6 verwendet. Es sei $p = 0,\, 1$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ ein $C > 0$, so daß die Ungleichung*

$$B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}_p(\varepsilon),\, \boldsymbol{R}_p(\varepsilon)\big) \le C\big(\varepsilon^2\|\boldsymbol{a}_p(\varepsilon) - [\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)]\|_{0,\Omega} + \mathfrak{R}_4(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon)\big)^2 \tag{7.6}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ und alle $\kappa \in (0,\, 1)$ gilt.

Beweis. Es sei ε_0 die kleinste aller bisher gewählten Schranken für ε. Es seien $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ und $\kappa \in (0,\, 1)$ beliebig. Aus der Gültigkeit der Hypothese 7.1.1 folgt

$$B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u}_p(\varepsilon),\, \boldsymbol{v}\big) = -\varepsilon^2\big(\boldsymbol{a}_p(\varepsilon),\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$. Andererseits folgt nach Satz 6.3.6 für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} B(\varepsilon)\big(j\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon,\, \boldsymbol{v}\big) &= 2\varepsilon^2\big(L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon,\, [\boldsymbol{v}]\big)_\omega + \mathcal{O}(\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \\ &= -2\varepsilon^2\big([\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)\tfrac{\sqrt{g(\varepsilon)}}{\sqrt{a}}],\, [\boldsymbol{v}]\big)_\omega + \mathcal{O}(\mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega})\,. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\big(\boldsymbol{a}_p(\varepsilon),\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega - 2\big([\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)\tfrac{\sqrt{g(\varepsilon)}}{\sqrt{a}}],\, [\boldsymbol{v}]\big)_\omega = \big(\boldsymbol{a}_p(\varepsilon) - [\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)],\, \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}]\big)_\Omega\,.$$

Unter Beachtung von $\|\boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}]\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega})$ folgt durch Differenzbildung

$$B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u}_p(\varepsilon) - j\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon,\, \boldsymbol{v}\big) \le C\big(\varepsilon^2\|\boldsymbol{a}_p(\varepsilon) - [\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)]\|_{0,\Omega} + \mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon)\big)\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$.

Da $\boldsymbol{R}_p(\varepsilon) = \boldsymbol{u}_p(\varepsilon) - j\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon - \boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon$ mit $\boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon := \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{U}_{\text{slow}}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0)$ zu $\boldsymbol{V}(\Omega)$ gehört, erhält man mit (7.3)

$$B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}_p(\varepsilon),\, \boldsymbol{v}\big) \le C\big(\varepsilon^2\|\boldsymbol{a}_p(\varepsilon) - [\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)]\|_{0,\Omega} + \mathfrak{R}_4(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon)\big)\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\,.$$

Die Wahl $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{R}_p(\varepsilon)$ und positive Definitheit von $B(\varepsilon)(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ liefern

$$\|\boldsymbol{e}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{R}_p(\varepsilon)\big)\|_{0,\Omega} \le C\big(\varepsilon^2\|\boldsymbol{a}_p(\varepsilon) - [\boldsymbol{a}_p(\varepsilon)]\|_{0,\Omega} + \mathfrak{R}_4(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon)\big)\,.$$

Einsetzen in die vorletzte Ungleichung beweist die Behauptung. ∎

7.1.3 Der Hauptsatz

Zur Abschätzung von $\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\, \tau),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, \tau)\big)$ wird die Identität (2.35) im wesentlichen mit dem Satz 6.3.6 kombiniert. Hinzu kommt die Abschätzung aus dem folgenden Lemma.

Lemma 7.1.8 *Es sei $T > 0$ gegeben. Für die Approximation $A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)$ aus der Definition 7.1.6 existiert ein ε_0 und eine Konstante $C > 0$, so daß $(p = 2,\, 3)$*

$$|\big(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega - 2\big(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, [v]\big)_\omega| \le C\mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{7.7}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\kappa \in (0,\, 1)$, $\tau \in [0,\, T]$ und alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ gilt. Die Schranke $\mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)$ ist in (7.5) *definiert.*

Beweis. Benutze die Definition der Approximation und die Zerlegung $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}] + (\boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}])$. Die Abschätzung (6.14) zusammen mit der Ungleichung Kornschen Typs (5.20) liefern die Aussage. ∎

Korollar 7.1.9 *Es sollen die Voraussetzungen und Schreibweisen wie im Lemma 7.1.8 gelten. Dann existiert ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß* $(p = 0,\, 1)$

$$\Big| B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, \boldsymbol{v}\big) + \varepsilon^2 \big(\frac{\mathrm{d}^{p+2}}{\mathrm{d}\tau^{p+2}} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega \Big| \le C\Big(\mathfrak{R}_1\big(\varepsilon,\, \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)$$
$$+ \mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\, \kappa,\, \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\tau^p}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) + \varepsilon^2 \mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p+2,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\Big) \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{7.8}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\kappa \in (0,\, 1)$, $\tau \in [0,\, T]$ *und alle* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *gilt.*

Beweis. Für beliebige $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\kappa \in (0,\, 1)$, $\tau \in [0,\, T]$ und alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ folgt die Behauptung aus (6.19), (7.3) und (7.7). ■

Im folgenden ist für alle betrachteten $\varepsilon,\, \tau$ und $x_3 \in (-1,\, 1)$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big) := \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau) - \varepsilon x_3 \big(\zeta^\varepsilon_{3|\alpha}(\tau) + b^\beta_\alpha \zeta^\varepsilon_\beta(\tau)\big)\boldsymbol{a}^\alpha$$

gesetzt. Der Index KL soll an Kirchhoff–Love erinnern, da $e_{j\|3}\Big(\varepsilon,\, \boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\Big) \equiv 0$ gilt. Es folgt der Hauptsatz für die langsame Schalendynamik.

Satz 7.1.10 *Die Mittelfläche der gewählten Schale genüge den Annahmen der Hypothese 4.0.1. Betrachte* $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon)$, $\boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$*, welche den Annahmen der Hypothese 7.1.1 genügen. Die Lösung des Ausgangsproblems* (5.23) *zu obigen Anfangsbedingungen sei mit* $\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\tau),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\tau)\big)$ *bezeichnet. Dann existiert zu jedem* $T > 0$ *ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß*

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon,\tau) - \boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{1,\Omega} + \|\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\tau) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\Omega} \le C\varepsilon^{1/5} \tag{7.9}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ *und alle* $\tau \in [0,\, T]$ *gilt.*

Beweis. Es sei $\tau \in [0,\, T]$ beliebig. Es sei $\varepsilon > 0$ ausreichend klein und beliebig. Es sollen die Bezeichnungen aus der Definition 7.1.6 gelten. Aus (2.35) folgt die Identität

$$H_{\text{slow}}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\tau),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, \tau)\big) = H_{\text{slow}}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0),\, \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\, 0)\big)$$
$$- B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, \tau)\big) - \varepsilon^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, \tau)\Big)_\Omega$$
$$+ B(\varepsilon)\big(A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0)\big) + \varepsilon^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(0),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, 0)\Big)_\Omega$$
$$+ \int_0^\tau \Big(B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, s)\big) + \varepsilon^2\big(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3} A^\varepsilon \boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(s),\, \boldsymbol{R}(\varepsilon,\, s)\big)_\Omega\Big)\mathrm{d}s\,.$$

Es ist alles getan, um die Kleinheit jeder Zeile auf der rechten Seite der obigen Identität zu zeigen. Ein Randterm wie in (2.35) tritt nicht auf. Am seitlichen Rand verschwindet die Approximation.

An der Boden– und Deckefläche verschwindet die Spannung $T(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,\tau)$, da $\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,\tau)$ zum Definitionsbereich des skalierten Lamé–Operators $L(\varepsilon)$ gehört.

Aus (4.25) und (4.26) folgt die Existenz einer Konstanten $C>0$, so daß

$$\mathfrak{R}_1\big(\varepsilon,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)+\mathfrak{R}_1\big(\varepsilon,\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\le C\varepsilon^{3/2}\,,$$

$$\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)+\mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\,\kappa,\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\le C(\varepsilon^{1+\kappa}+\varepsilon^{2-4\kappa})\,,$$

$$\mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\,\kappa,\,2,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)+\mathfrak{R}_3\big(\varepsilon,\,\kappa,\,3,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\le C\,.$$

Die Schranke für $\mathfrak{R}_4(\varepsilon,\,\boldsymbol{\zeta}_p^\varepsilon)$, $p=0,\,1$ ist die Summe der Schranken für $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. Da der Gesamtfehler $\boldsymbol{R}(\varepsilon,\,\tau)$ zu $\boldsymbol{V}(\Omega)$ gehört, kann der Satz 7.1.7 und das Korollar 7.1.9 herangezogen werden. Mit Hilfe der elementaren Ungleichung $2ab\le ca^2+(1/c)b^2$ für positive $a,\,b,\,c$ und nach Anwendung des Gronwallschen Lemmas in der obigen Identität folgt

$$\begin{aligned}&B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,\tau)-A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\,\boldsymbol{u}(\varepsilon,\,\tau)-A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\\&\qquad+\varepsilon^2\Big(\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,\tau)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau),\,\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\,\tau)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\Big)_\Omega\le C(\varepsilon^3+\varepsilon^{2+2\kappa}+\varepsilon^{4-8\kappa})\,.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\kappa=1/5$ optimal. Mit der positiven Definitheit von $B(\varepsilon)(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ und mit Hilfe der Kornschen Ungleichung (5.20) ergibt sich also

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon,\tau)-A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{1,\Omega}\le C\varepsilon^{1/5}\,.$$

Aus (4.25) folgt aber

$$\|A^\varepsilon\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)-\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{1,\Omega}\le C\varepsilon^{1/5}\,.$$

Dreiecksungleichung in $H^1(\Omega)^3$ liefert den ersten Teil der Behauptung. Die Abschätzung für die Geschwindigkeitsfelder funktioniert mit ähnlichen Argumenten. ■

Bemerkung

a) Für die Statik der Schale ist in [36] die gleiche Konvergenzrate gefunden.

b) Das Resultat ist nichttrivial. In der Tat, betrachtet man den Spezialfall der Platte, so hängt die Lösung des Koiterschen Problems überhaupt nicht von ε ab. Für sogenannte Biegeplatten gilt $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\equiv 0$. In obiger Abschätzung treten sowohl $\varepsilon^{2+2\kappa}$ als auch $\varepsilon^{4-8\kappa}$ als Koeffizienten von $\|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon)\|_{0,\omega}$ auf. Das bedeutet, daß für Biegeplatten das obige Resultat zu

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon,\tau)-\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{1,\Omega}+\|\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\tau)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\,\boldsymbol{\zeta}^\varepsilon(\tau)\big)\|_{0,\Omega}\le C\varepsilon^{1/2}$$

verbessert werden kann. Wenigstens in der Statik ist es bekannt, daß $\varepsilon^{1/2}$–Konvergenzrate optimal ist, siehe [53].

c) Es sei $\gamma_0\subset\partial\omega$ mit $|\gamma_0|>0$. Dann wird

$$\boldsymbol{V}^F(\omega):=\Big\{\boldsymbol{\eta}=(\eta_\alpha,\,\eta_3)\in H^1(\omega)^2\times H^2(\omega)\;:\;\boldsymbol{\eta}\big|_{\gamma_0}=\partial_n\eta_3\big|_{\gamma_0}=0\,,\;\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})=0\;\text{in}\;\omega\Big\}$$

als der Raum der *dehnungslosen Verschiebungen* bezeichnet. Dieser Raum ist abgeschlossen in $\boldsymbol{V}(\Omega)$, kann aber nur die Null enthalten. Er ist genau dann nichttrivial, wenn die betrachtete Mittelfläche S abwickelbar oder flach ist, siehe [7]. Für den hier gerechneten Fall $\gamma_0 = \partial\omega$ ist $\boldsymbol{V}^F(\omega)$ nur dann nichttrivial, wenn die gewählte Schale sogar eine Platte ist. Meine Vermutung ist, daß für dehnungslose Schwingungen eine Fehlerabschätzung wie im Plattenfall zutrifft.

7.2 Schnelle Dynamik für elliptische Schalen

Für elliptische Schalen, die am seitlichen Rand eingespannt sind, ist die obige Konvergenzaussage zwar korrekt, jedoch trivial. Wie in [7] gezeigt, antworten solche Schalen auf Lasten der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ mit Verschiebungen derselben Größenordnung. Ein entsprechendes Verhalten ist auch für die Dynamik zu erwarten. Daher ist es sinnvoll, diesen Fall getrennt zu diskutieren. In CIARLET & LODS [10] ist für den statischen Fall gezeigt, daß mit Hilfe des Koiterschen Modells sowohl sogenannte Biegeschalen als auch Membranschalen beschrieben werden können. Die letzteren allerdings nur dann, wenn die Schale elliptisch ist. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß auch in der Dynamik das Koitersche Modell zur Beschreibung der Membranschwingungen geeignet ist. Zusammen mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschitt trifft also auch hier für das Koitersche Modell eine zum statischen Fall analoge Aussage zu. Es soll also für elliptische Schalen mit Hilfe des Koiterschen Modells ein dimensionsreduziertes Modell auf der unskalierten Zeitskala gerechtfertigt werden. In diesem Fall ist die Energie der dicken Schale durch

$$H(\varepsilon)(\boldsymbol{u},\, \dot{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}B(\varepsilon)(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\big(\dot{\boldsymbol{u}},\, \dot{\boldsymbol{u}}\big)_\Omega$$

gegeben. Die Bewegungsgleichung lautet

$$L(\varepsilon)\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t)\,.$$

Die zur Hypothese 7.1.1 analoge Forderung an die Asymptotik der Anfangsdaten ist im folgenden zusammengefaßt.

Hypothese 7.2.1
Es sei $\varepsilon > 0$. Zu gegebenen Vektorfeldern $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ in $D\big(L(\varepsilon)^{5/2}\big) \times D\big(L(\varepsilon)^2\big)$ existieren von ε und x_3 unabhängige Felder $\boldsymbol{b}_0,\, \boldsymbol{b}_1$ in $D\big((L^{K,\varepsilon})^{3/2}\big) \times D\big(L^{K,\varepsilon}\big)$ und Felder $\boldsymbol{c}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{c}_1(\varepsilon)$ derart, daß

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{c}_0(\varepsilon)] &= \mathcal{O}(1) \quad \text{in } H^4(\omega) \times H^4(\omega) \times H^6(\omega) \quad \text{für } \varepsilon \to 0\,,\\
[\boldsymbol{c}_1(\varepsilon)] &= \mathcal{O}(1) \quad \text{in } H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \quad \text{für } \varepsilon \to 0\,,\\
L(\varepsilon)\boldsymbol{u}_p(\varepsilon) &= -\boldsymbol{b}_p - \varepsilon\boldsymbol{c}_p(\varepsilon)\,, \qquad p = 0,\, 1
\end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung

Die Existenz solcher Anfangsbedingungen ist klar. Eine Interpretation der Forderungen läßt sich wie im Fall der Hypothese 7.1.1 angeben.

Im Vergleich zur Approximation in der langsamen Schalendynamik werden nur die Korrektoren geändert. Das wird im ersten Unterabschnitt beschrieben. Im zweiten Unterabschnitt ist die Konstruktion der reduzierten Anfangsbedingungen behandelt. Im dritten Unterabschnitt ist der Hauptsatz angegeben. Die benutzten Methoden sind diejenigen aus dem vorherigen Abschnitt. Daher werden die Beweise kurzgehalten.

7.2.1 Randkorrektoren der Membrandynamik

Definition 7.2.2 *Es sei* $T > 0$ *gegeben. Für alle* $t \in [0, T]$ *und für alle* $\varepsilon > 0$ *gehören die* t*–stetigen Felder* $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *resp.* $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *zu* $H^3(\omega) \times H^3(\omega) \times H^4(\omega) \cap \boldsymbol{V}^K(\omega)$ *resp.* $H^2(\omega) \times H^2(\omega) \times H^3(\omega)$*. Dann wird mit* $\gamma^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)$ *eine Funktion wie im Korollar 6.4.2 bezeichnet, die*

$$\gamma^\sigma_\sigma\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) - \gamma^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big) \in H^1_0(\omega)$$

leistet. $\vartheta^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)$ *bezeichnet eine Funktion wie im Korollar 6.4.2, welche*

$$\vartheta^\sigma_\sigma\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) - \vartheta^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big) \in H^1_0(\omega)$$

leistet.

Die Wohldefiniertheit der beiden Korrektorfunktionen $\gamma^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)$ und $\vartheta^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)$ ist klar.

Definition 7.2.3 *Es seien* $\gamma^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)$ *und* $\vartheta^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)$ *die Funktionen laut obiger Definition 7.2.2. Dann wird für* $\varepsilon,\, t$ *wie in der Definition 7.2.2 und* $x_3 \in (-1,\, 1)$ *mit*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{\textit{fast}}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t) := \varepsilon x_3 \frac{\lambda}{\lambda_2}\gamma^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)\boldsymbol{a}^3 - \varepsilon^2 x_3^2 \frac{\lambda}{2\lambda_2}\Big(\gamma^\sigma_{\sigma|\alpha}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\boldsymbol{a}^\alpha + \vartheta^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)\boldsymbol{a}^3\Big)\\ - \varepsilon^3 x_3^3 \frac{\lambda}{6\lambda_2}\Big(b^\beta_\alpha \gamma^\sigma_{\sigma|\beta}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) - \vartheta^\sigma_{\sigma|\alpha}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\Big)\boldsymbol{a}^\alpha\end{aligned} \tag{7.10}$$

der Korrektor der Membrandynamik *bezeichnet.*

Bemerkung

Beachte, daß mit obiger Wahl des Korrektors die Gesamtapproximation nur noch aus

$$\begin{aligned}j\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t) + \boldsymbol{U}_{\text{fast}}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t) =& \boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\\ &+ \frac{\lambda}{\lambda_2}\Big(\varepsilon x_3\big(\gamma^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big) - \gamma^\sigma_\sigma\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\big) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_3^2\big(\vartheta^\sigma_\sigma\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) - \vartheta^\sigma_\sigma\big(\varepsilon,\, t\big)\big)\Big)\boldsymbol{a}^3\end{aligned}$$

besteht. Diese Idee ist bereits im statischen Fall, dort mit anderen Direktoren, in [36] verwendet worden.

Die einzig neuen Abschätzungen für die schnelle Dynamik sind in den nächsten beiden Propositionen zusammengefaßt. Es sind die Analoga zu den Propositionen 7.1.4 und 7.1.5.

Proposition 7.2.4 *Es sei* $\boldsymbol{U}_{fast}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *wie in der Definition 7.2.3 gegeben. Es existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$ *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß*

$$\|\boldsymbol{e}\big(\varepsilon, \boldsymbol{U}_{fast}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\Omega} \leq C\mathfrak{R}_5\big(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) \tag{7.11}$$

für alle $t \in [0,\, T]$*, alle* $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ *und alle* $\kappa \in (0,\, 1)$ *gilt. Dabei ist*

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_5\big(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) := \varepsilon^\kappa\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon^{1-\kappa}\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega} + \varepsilon^{1+\kappa}\|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega} \\ + \varepsilon^2\|\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{2,\omega} + \varepsilon^3\|\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{2,\omega}\,.\end{aligned}$$

Beweis. Mit gleichen Argumenten wie der Beweis der Proposition 7.1.4. ■

Proposition 7.2.5 *Es sei* $\boldsymbol{U}_{fast}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *wie in der Proposition 7.2.4 gegeben. Dabei gehöre* $\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *für* $p = 2,\, 3$ *zu* $H^2(\omega)\times H^2(\omega)\times H^3(\omega)$*. Dann existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$ *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß für* $p = 2,\, 3$

$$\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\boldsymbol{U}_{fast}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega} \leq C\mathfrak{R}_6\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) \tag{7.12}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_6\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) := \varepsilon^{1+\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega} + \varepsilon^{1+\kappa}\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\omega} \\ + \varepsilon^2\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega} + \varepsilon^3\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\boldsymbol{\varrho}\big(\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,\omega}\,.\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,\, T]$*, alle* $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0]$ *und alle* $\kappa \in (0,\, 1)$ *gilt.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Definition des Korrektors und den Abschätzungen im Korollar 6.4.2. ■

7.2.2 Konstruktion der reduzierten Anfangsbedingungen

Wie im Abschnitt §7.1.2 setzt man für $\kappa \in (0,\, 1)$ und ausreichend kleine ε

$$\mathfrak{R}_7(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\eta}) := \mathfrak{R}_1(\varepsilon,\, \boldsymbol{\eta}) + \mathfrak{R}_5(\varepsilon,\, \kappa,\, \boldsymbol{\eta})\,.$$

Folgende Begriffe sollen festgehalten werden. Der Parameter ε ist stets kleiner als die kleinste unter bisher gewählten Schranken.

Definition 7.2.6 *Es seien* $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\ \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ *gegeben, welche den Annahmen der Hypothese 7.2.1 genügen. Mit* $\boldsymbol{\eta}_p^\varepsilon,\ (p=0,\ 1)$ *ist die Lösung zu*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\eta}_p^\varepsilon = -[\big(\boldsymbol{b}_p + \boldsymbol{c}_p(\varepsilon)\big)\tfrac{\sqrt{g(\varepsilon)}}{\sqrt{a}}]$$

unter Randbedingungen (4.11) *bezeichnet. Für ein gegebenes* $T>0$ *ist* $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *die Lösung des Problems*

$$L^{K,\varepsilon}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon \qquad \textit{in} \quad L^2(\omega)^3\,,$$

mit

$$\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\eta}_0^\varepsilon\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(0) = \boldsymbol{\eta}_1^\varepsilon$$

unter Randbedingungen wie oben. Mit $\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,t),\ \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,t)\big)$ *ist die Lösung des Ausgangsproblems* (5.23) *zu Anfangsbedingungen* $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\ \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ *bezeichnet. Der Ausdruck*

$$\big(\boldsymbol{R}(\varepsilon,\ t),\ \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\ t)\big) := \big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\ t),\ \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\ t)\big) - \big(A^\varepsilon\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\varepsilon\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)$$

mit $A^\varepsilon\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t) := j\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(\varepsilon,\ t) + \boldsymbol{U}_{fast}\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *heißt der* Gesamtfehler der Membrandynamik. *Schließlich sei*

$$\boldsymbol{R}_0(\varepsilon) := \boldsymbol{R}(\varepsilon,\ 0), \qquad \boldsymbol{R}_1(\varepsilon) := \dot{\boldsymbol{R}}(\varepsilon,\ 0)\,.$$

Es gilt der

Satz 7.2.7 *Es seien* $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\ \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ *gegeben, welche den Annahmen der Hypothese 7.2.1 genügen. Es werden die Bezeichnungen aus der Definition 7.2.6 verwendet. Es sei* $p=0,\ 1$ *. Dann existiert ein* $\varepsilon_0>0$ *ein* $C>0$ *, so daß die Ungleichung*

$$B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{R}_p(\varepsilon),\ \boldsymbol{R}_p(\varepsilon)\big) \le C\big(\varepsilon\|\boldsymbol{c}_p(\varepsilon) - [\boldsymbol{c}_p(\varepsilon)]\|_{0,\Omega} + \mathfrak{R}_7(\varepsilon,\ \kappa,\ \boldsymbol{\eta}_p^\varepsilon)\big)^2 \tag{7.13}$$

für alle $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$ *und alle* $\kappa\in(0,\ 1)$ *gilt.*

Beweis. Es werden die gleichen Argumente herangezogen wie im Beweis des Satzes 7.1.7. Hinzu kommt die Abschätzung

$$\big(\boldsymbol{b}_p,\ \boldsymbol{v}\big)_\Omega - 2\big([\boldsymbol{b}_p\tfrac{\sqrt{g(\varepsilon)}}{\sqrt{a}}],\ [\boldsymbol{v}]\big)_\omega \le C\varepsilon\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\ \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\ .$$

Hierbei geht wesentlich ein, daß die Felder $\boldsymbol{b}_p$ von ε und x_3 unabhängig sind. ∎

7.2.3 Der Hauptsatz

Das zum Lemma 7.1.8 analoge ist das

Lemma 7.2.8 *Es sei* $T > 0$ *gegeben. Für die Approximation* $A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)$ *aus der Definition 7.2.6 existiert ein* $\varepsilon 0$ *und eine Konstante* $C > 0$ *, so daß* $(p = 2,\, 3)$

$$|\big(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega - 2\big(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, [v]\big)_\omega| \le C\mathfrak{R}_6\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{7.14}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\, \kappa \in (0,\, 1),\, t \in [0,\, T]$ *und alle* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *gilt.*

Beweis. Siehe den Beweis zum Lemma 7.1.8. ■

Korollar 7.2.9 *Es sollen die Voraussetzungen und Schreibweisen wie im Lemma 7.2.8 gelten. Dann existiert ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$ *, so daß* $(p = 0,\, 1)$

$$\begin{aligned} \Big| B(\varepsilon)\big(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{v}\big) + \big(\frac{\mathrm{d}^{p+2}}{\mathrm{d}t^{p+2}} A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{v}\big)_\Omega \Big| &\le C\Big(\mathfrak{R}_1\big(\varepsilon,\, \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) \\ &+ \mathfrak{R}_2\big(\varepsilon,\, \kappa,\, \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) + \mathfrak{R}_6\big(\varepsilon,\, \kappa,\, p+2,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\Big) \|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{7.15}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\, \kappa \in (0,\, 1),\, t \in [0,\, T]$ *und alle* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *gilt.*

Beweis. Siehe den Beweis des Korollars 7.1.9. ■

Für elliptische Schalen gilt eine Ungleichung Kornschen Typs, bei welcher im Gegensatz zu (5.20) keine ε–Potenz verloren geht. Allerdings muß die Topologie für die Vertikalkomponente vergröbert werden. Das ist der Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 7.2.10 *Es sollen die Annahmen* ***(H1)*** *und* ***(H2)*** *der Hypothese 4.0.1 gelten. Die betrachtete Schale sei elliptisch und ihre Parametrisierung sei durch* (5.15) *gegeben. Dann existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$ *und eine Konstante* $C = C(\Omega\,, \boldsymbol{\varphi}) > 0$ *, so daß*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,1,0,\Omega} \le C\|\boldsymbol{e}(\varepsilon,\, \boldsymbol{v})\|_{0,\Omega} \tag{7.16}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *und alle* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *besteht.*

Beweis. Siehe CIARLET [15]. (Genau Seitenzahl noch nicht bekannt.) ■

Satz 7.2.11 *Die Mittelfläche der gewählten Schale genüge den Annahmen der Hypothese 4.0.1 und sei elliptisch. Betrachte* $\boldsymbol{u}_0(\varepsilon),\, \boldsymbol{u}_1(\varepsilon)$ *, welche den Annahmen der Hypothese 7.2.1 genügen. Es gelten die Bezeichnungen der Definition 7.2.6. Dann existiert zu jedem* $T > 0$ *ein* ε_0 *und eine Konstante* $C > 0$ *, so daß*

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon, t) - \boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{1,1,0,\Omega} + \|\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}\big(\varepsilon,\, \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big)\|_{0,\Omega} \le C\varepsilon^{1/4} \tag{7.17}$$

für alle $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ *und alle* $t \in [0,\, T]$ *gilt.*

Beweis. Es seien $t \in [0,\, T]$, $\kappa \in (0,\, 1)$ und ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ beliebig. Es wird die Identität (2.35), Seite 29, herangezogen. Angesichts der Abschätzungen (7.15), (7.14) und (7.13) findet man mit (4.37) und (4.38) wie im Beweis des Satzes 7.1.10

$$\begin{aligned} &B(\varepsilon)\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t) - A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, \boldsymbol{u}(\varepsilon,\, t) - A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\big) \\ &\qquad + \Big(\dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t),\, \dot{\boldsymbol{u}}(\varepsilon,\, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A^\varepsilon \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(t)\Big)_\Omega \le C(\varepsilon + \varepsilon^{2\kappa} + \varepsilon^{1-2\kappa})\,. \end{aligned}$$

Für $\kappa = 1/4$ trifft man die optimale Wahl. Mit der positiven Definitheit von $B(\varepsilon)(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ sowie mit Hilfe der Ungleichung Kornschen Typs für elliptische Schalen (7.2.10) ergibt sich also die Behauptung. ∎

Anhang A

Lineare Beziehungen

Dieser Anhang besteht aus einer Sammlung häufig benutzter Lemmata für die lineare Theorie. Für einen linearen Operator $\boldsymbol{X}$ ist sein Definitionsbereich mit $D(\boldsymbol{X})$ bezeichnet. Ein Hamiltonsystem $\mathfrak{H} = (\mathcal{X}, \Theta, \boldsymbol{X}_H)$, siehe Definition (2.1.10), heißt ein lineares Hamiltonsystem, wenn der relevante Hamiltonsche Operator $\boldsymbol{X}_H$ ein linearer ist.

A.1 Ein Existenzsatz

Die Existenztheorie der linearen Hamiltonsysteme stützt sich auf der reellen Version von einem der Sätze von STONE. Der hier zitierte ist in [16], ab Seite 327, sowie in [63], ab Seite 345, zu finden.

Lemma A.1.1 (STONE**)** *Es sei $\boldsymbol{X}$ ein schiefadjungierter linearer Operator in einem reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann erzeugt $\boldsymbol{X}$ eine Gruppe $G(t)$ (mit $t \in \mathbb{R}$) von Isometrien, d. h. , es gilt für jedes $\boldsymbol{u}_0 \in D(\boldsymbol{X})$ und jedes $t \in \mathbb{R}$:*

$$G(t)(\boldsymbol{u}_0) \in D(\boldsymbol{X}) \text{ und } \frac{d}{dt}\, G(t)(\boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{X} G(t)(\boldsymbol{u}_0)$$

mit

$$\|G(t)(\boldsymbol{u}_0)\|_{\mathcal{H}} = \|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad G(-t) = \big(G(t)\big)^{-1}.$$

Genügend Hinweise, wie man das Lemma A.1.1 auf Hamiltonsche Systeme anwendet, findet man in [41], insbesondere in § 6.2.

Definition A.1.2 *Es sei $(\mathcal{X}, \Theta, \boldsymbol{X}_H)$ ein lineares Hamiltonsystem. Einen linearen Operator $\boldsymbol{X}_H^{\Theta}$ in $\mathcal{X}$ nennt man die Θ–*adjungierte *von $\boldsymbol{X}_H$, wenn sein Definitionsbereich durch*

$$D(\boldsymbol{X}_H^{\Theta}) = \{\boldsymbol{w} \in \mathcal{X} \mid \exists\, \boldsymbol{u} \in \mathcal{X} \text{ mit } \Theta(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = \Theta(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{X}_H \boldsymbol{v}) \ \forall\, \boldsymbol{v} \in D(\boldsymbol{X}_H)\}$$

*und seine Abbildungsvorschrift durch $\boldsymbol{X}_H^{\Theta} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ gegeben ist. Ein Hamiltonscher Operator $\boldsymbol{X}_H$ heißt Θ–*schiefadjungiert, *wenn $\boldsymbol{X}_H = -\boldsymbol{X}_H^{\Theta}$ gilt.*

Bemerkung

a) $\boldsymbol{X}_H^\Theta \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ ist wohldefiniert, da $\Theta(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = 0$ für jedes $\boldsymbol{v} \in D(\boldsymbol{X}_H)$ die Gültigkeit von $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ in $\mathcal{X}$ impliziert.

b) Es sei daran erinnert, daß $\boldsymbol{X}_H = -\boldsymbol{X}_H^\Theta$ äquivalent zu

$$D(\boldsymbol{X}_H) = D(\boldsymbol{X}_H^\Theta) \qquad \text{und} \qquad \Theta(\boldsymbol{X}_H^\Theta \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = -\Theta(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{X}_H \boldsymbol{v}) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in D(\boldsymbol{X}_H)$$

ist.

Das Interesse einer solchen Definition wird im folgenden Satz klar.

Satz A.1.3 (CHERNOFF & MARSDEN, 1974) *Es sei $(\mathcal{X}, \Theta)$ ein symplektischer Banachraum. Der lineare Operator $\big(\widetilde{\boldsymbol{X}_H}, D(\widetilde{\boldsymbol{X}_H})\big)$ sei dicht definiert und Θ–schiefadjungiert in $\mathcal{X}$. Die Bilinearform*

$$[\![\, \cdot\,,\, \cdot \,]\!] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad [\![\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}]\!] := \Theta(\widetilde{\boldsymbol{X}_H}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

sei $\mathcal{X}$–koerzitiv. Es sei $\mathcal{H}$ die Abschließung von $D(\widetilde{\boldsymbol{X}_H})$ in $[\![\, \cdot\,,\, \cdot \,]\!]^{\frac{1}{2}}$. Definiere den Operator $\boldsymbol{X}_H$ mit

$$D(\boldsymbol{X}_H) = \{\boldsymbol{u} \in D(\widetilde{\boldsymbol{X}_H}) \mid \widetilde{\boldsymbol{X}_H}\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}\}$$

und

$$\boldsymbol{X}_H \boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{X}_H}\boldsymbol{u} \text{ für } \boldsymbol{u} \in D(\boldsymbol{X}_H)\,.$$

Dann erzeugt $\boldsymbol{X}_H$ eine Gruppe von Isometrien in $\mathcal{H}$.

Bemerkung

a) Einen Beweis findet man in [6] und eine verkürzte Version in [41], Seite 353.

b) Beachte, daß in der Voraussetzung $\mathcal{X}$ ein Banachraum ist. Es ist nichts darüber ausgesagt, ob in $\mathcal{X}$ ein Fluß erzeugt wird. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist.

Folgendes Lemma klärt für kanonische System, wann $\widetilde{\boldsymbol{X}_H}$ tatsächlich Θ–schiefadjungiert ist.

Lemma A.1.4 *Es seien $\dot{\boldsymbol{V}}$ resp. $\boldsymbol{V}$ zwei reelle Hilberträume mit den Skalarprodukten $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ resp. $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ und es sei $\boldsymbol{V}$ dicht und stetig in $\dot{\boldsymbol{V}}$ eingebettet. Setze $\mathcal{X} := \boldsymbol{V} \times \dot{\boldsymbol{V}}$. Eine symplektische Form Θ auf $\mathcal{X}$ sei durch*

$$\Theta(\boldsymbol{u},\, \dot{\boldsymbol{u}},\, \boldsymbol{v},\, \dot{\boldsymbol{v}}) := (\dot{\boldsymbol{v}},\, \boldsymbol{u}) - (\dot{\boldsymbol{u}},\, \boldsymbol{v}) \tag{A.1}$$

und ein Energiefunktional $H : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$H(\boldsymbol{u},\, \dot{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{u}},\, \dot{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u}] \tag{A.2}$$

gegeben.

Dann ist der zu $(H,\, \Theta)$–zugehörige Hamiltonsche Operator $\boldsymbol{X}_H$ bezüglich Θ schiefadjungiert in $\mathcal{X}$.

Beweis. Nach dem Satz von Riesz existiert ein Isomorphismus $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$, so daß

$$\langle \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0),\, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}} = [\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}] \quad \forall\, \boldsymbol{u}_0,\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

gilt. Identifiziert man nun $\dot{\boldsymbol{V}}$ mit seinem Dual $\dot{\boldsymbol{V}}'$, so folgt aus der Dichtheit und Stetigkeit der Einbettung $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \dot{\boldsymbol{V}}$ durch Transposition (Hahn–Banach, [3]) die Dichtheit und Stetigkeit der Einbettung $\dot{\boldsymbol{V}} = \dot{\boldsymbol{V}}' \hookrightarrow \boldsymbol{V}'$. Damit ist aber klar, daß das Dualitätsprodukt $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\, \rangle_{\boldsymbol{V}}$ als die (eindeutige) Fortsetzung des Skalarprodukts $(\, \cdot\,,\, \cdot\,)$ auf $\dot{\boldsymbol{V}}$ betrachtet werden kann. Setzt man nun

$$D\Big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}\Big) := \Big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}\Big)^{-1}\Big|_{\dot{\boldsymbol{V}}}\,,$$

so gilt

$$\Big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0),\, \boldsymbol{v}\Big) = [\boldsymbol{u}_0,\, \boldsymbol{v}] \quad \forall \boldsymbol{u}_0 \in D\Big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}\Big)\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,,$$

und $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}$ ist als unbeschränkter Operator in $\dot{\boldsymbol{V}}$ wohldefiniert. Definiere

$$\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta \dot{u}}} : \dot{\boldsymbol{V}} \to \dot{\boldsymbol{V}} \ \text{ mit } \ D(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta \dot{u}}}) = \boldsymbol{V} \ \text{ und } \ \frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta \dot{u}}}(\dot{\boldsymbol{u}}_0) := \dot{\boldsymbol{u}}_0\,.$$

Dann ist $\boldsymbol{X}_H : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ mit

$$\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0) := \big(\dot{\boldsymbol{u}}_0,\, -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0)\big)\,, \quad D(\boldsymbol{X}_H) := D(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}) \times \boldsymbol{V}$$

das zu H assoziierte Hamiltonsche Vektorfeld bezüglich Θ. In der Tat gilt für ein beliebiges $(\boldsymbol{h},\, \dot{\boldsymbol{h}}) \in D(\boldsymbol{X}_H)$:

$$\begin{aligned}
\Theta\big(\dot{\boldsymbol{u}}_0,\, -\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0),\, \boldsymbol{h},\, \dot{\boldsymbol{h}}\big) &= (\dot{\boldsymbol{h}},\, \dot{\boldsymbol{u}}_0) - \big(-\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0),\, \boldsymbol{h}\big) \\
&= (\dot{\boldsymbol{h}},\, \dot{\boldsymbol{u}}_0) + [\boldsymbol{u}_0,\, \boldsymbol{h}] \\
&= D_{\dot{\boldsymbol{u}}} H(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0)[\dot{\boldsymbol{h}}] + D_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0)[\boldsymbol{h}] \\
&= \Theta\big(\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0),\, \boldsymbol{h},\, \dot{\boldsymbol{h}}\big)\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\boldsymbol{X}_H(\boldsymbol{u}_0,\, \dot{\boldsymbol{u}}_0) = J \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}(\boldsymbol{u}_0) \\ \dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta \dot{u}}}(\dot{\boldsymbol{u}}_0) \end{pmatrix}\,.$$

Somit ist $\boldsymbol{X}_H$ genau dann Θ–schiefadjungiert in $\mathcal{X}$, wenn $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}$ selbstadjungiert in $\dot{\boldsymbol{V}}$ ist. Die Selbstadjungiertheit von $\dfrac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}$ in $\dot{\boldsymbol{V}}$ folgt sofort, da

$$D\big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}\big) = D\big(\frac{\boldsymbol{\delta} H}{\boldsymbol{\delta u}}^*\big)$$

wegen der Symmetrie von $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ gelten muß. ■

Literaturverzeichnis

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions I . *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959) 623–727.

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions II . *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964) 35–92.

[3] H. ALT. *Lineare Funktionalanalysis*. Hochschultext. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1985.

[4] P. BOLLERMANN. On the theory of validity of amplitude equations. Phd thesis, Utrecht University 1996.

[5] M. P. D. CARMO. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin 1991.

[6] P. CHERNOFF, J. MARSDEN. *Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian Systems*. Springer Lecture Notes in Math 425. Springer-Verlag, Heidelberg 1974.

[7] P. CIARLET, V. LODS. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: Generalized membrane shells. *J. Elasticity* **43** (1996) 147–188.

[8] P. CIARLET, V. LODS. Asymptotic analysis of linearly elastic shells I. Justification of membrane shell equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **136** (1996) 119–161.

[9] P. CIARLET, V. LODS. Asymptotic analysis of linearly elastic shells II. Justification of flexural shell equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **136** (1996) 163–190.

[10] P. CIARLET, V. LODS. Asymptotic analysis of linearly elastic shells III. Justification of Koiter's shell equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **136** (1996) 191–200.

[11] P. CIARLET, B. MIARA. On the ellipticity of linear shell models. *ZAMP* **43** (1992) 243–253.

[12] P. CIARLET, J. PAUMIER. A justification of the Marguerre–von Kármán equations. *Computational Mechanics* **1** (1986) 177–202.

[13] P. G. CIARLET. *Mathematical Elasticity. Vol. I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam 1988.

[14] P. G. CIARLET. *Introduction to Linear Shell Theory*. Preprint 98–8. Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A, Stuttgart 1998.

[15] P. G. CIARLET. *Mathematical Elasticity. Vol. III, Theory of Shells*. North-Holland, Amsterdam to be pressed.

[16] J. B. CONWAY. *A Course in Functional Analysis*. Springer–Verlag, New York 1989.

[17] M. DAUGE, I. GRUAIS, A. RÖSSLE. The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates I. *Prépublications, IRMAR, Rennes* **97-28** (1997).

[18] M. DAUGE, I. GRUAIS, A. RÖSSLE. The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates II. *Prépublications, IRMAR, Rennes* **97-29** (1997).

[19] H. L. DRET. *Problèmes Variationnels dans les Multi–Domaines: Modélisation des Jonctions et Applications*. Recherches mathématiques appliquées. Masson, Paris 1991.

[20] A. FRIEDMANN. *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, New York 1969.

[21] Z. GE, H. P. KRUSE, J. E. MARSDEN. The limits of hamiltonian structures in three–dimensional elasticity, shells and rods . *J. Nonlinear Sci.* **6** (1996) 19–57.

[22] Z. GE, C. SCOVEL. A hamiltonian truncation of the shallow water equation. *Lett. Math. Phys.* **31** (1994) 1–13.

[23] A. E. GREEN, W. ZERNA. *Theoretical Elasticity*. Dover Publications Inc., New York 1954.

[24] G. HAMEL. *Theoretische Mechanik*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen LVII. Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949.

[25] F. JOHN. Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1966) 235–267.

[26] F. JOHN. Refined interior equations for elastic shells. *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) 584–675.

[27] P. KIRRMANN, G. SCHNEIDER, A. MIELKE. The validity of modulation equations for extended systems with cubic nonlinearities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* **122** (1992) 85–91.

[28] W. T. KOITER. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **B69** (1966) 1–54.

[29] W. T. KOITER. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **B73** (1970) 169–195.

[30] P. K. KRASCHEWSKI. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*. VEB, Berlin 1959.

[31] S. B. KUKSIN. *Nearly Integrable Infinite–Dimensional Hamiltonian Systems*. Lecture Notes in Mathematics 1556. Springer–Verlag, Heidelberg 1993.

[32] L. LANDAU, E. LIFSCHITZ. *Lehrbuch der Theoretischen Physik II*. Akademie Verlag, Berlin 1984.

[33] S. LANG. *Differential Manifolds*. Addison Wesley, Ontario 1972.

[34] LAUGWITZ. *Differentialgeometrie*. Hochschultext. Teubner, Stuttgart 1985.

[35] J.-L. LIONS. *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Controle Optimal*. Springer–Verlag, Berlin 1973.

[36] V. LODS, C. MARDARE. Asymptotic Justification of the Kirchhoff–Love Assumptions for a Linearly Elastic Clamped Shell. *To appear in J. Elasticity* (1999).

[37] V. LODS, C. MARDARE. Une justification du modèle de coques de Naghdi. *C.R. Acad. Sci. Paris* **328** (1999) 951–954.

[38] C. MARDARE. Estimations d'erreur dans l'analyse asymptotique des coques linearement elastique. *C.R. Acad. Sci. Paris* **322** (1996) 895–898.

[39] C. MARDARE. Modèles bi–dimensionnels de coques linearement elastiques: estimations de l'ecart entre leurs solutions. *C.R. Acad. Sci. Paris* **322** (1996) 793–796.

[40] C. MARDARE. Asymptotic anylysis of linearly elastic shells: error estimates in the membrane case. *Asymptotic Analysis* **17** (1998) 31–51.

[41] J. MARSDEN, T. HUGHES. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, New Jersey 1983.

[42] J. MARSDEN, T. RATIU. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1994.

[43] J. MARSDEN, T. RATIU. *Introduction to Mechanics and Symmetry II*. To be published by Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1999.

[44] J. E. MARSDEN. *Lectures on Mechanics*. Lecture Notes on Mechanics. Cambridge Univeristy Press, Cambridge 1992.

[45] A. MIELKE. *Hamiltonsche und Lagrangesche Flüsse auf Zentrumsmannigfaltigkeiten mit Anwendungen auf elliptische Variationsprobleme*. Habilitationsschrift, Stuttgart 1991.

[46] A. MIELKE. The Ginzburg–Landau Equation in its Role as a Modulation Equation. Preprint, Schwerpunktprogramm Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie 20/99 1999.

[47] A. MIELKE, G. SCHNEIDER. Derivation and Justification of the Complex Ginzburg–Landau Equation as a Modulation Equation. *Lectures in Applied Mathematics* **31** (1996) 191–216.

[48] P. M. NAGHDI. The theory of shells and plates. In S. FLÜGGE, C. TRUESDELL, editors, *Festkörpermechanik II.*, Handbuch der Physik VIa-2, pages 425–640. Springer–Verlag, Berlin–New York 1972.

[49] S. A. NAZAROV, I. S. ZORIN. Edge effect in the bending of a thin three-dimensional plate. *Prikl. Matem. Mekhan.* **53 (4)** (1989) 642–650. English translation *J. Appl. Maths. Mechs.* (1989) 500–507.

[50] J. PÖSCHEL, E. TRUBOWITZ. *Inverse Spectral Theory*. Mathematics 130. Academic–Press, Orlando 1987.

[51] A. RAOULT. Construction d'un modèle d'évolution de plaques avec termes d'inerte de rotation . *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **139** (1985) 361–400.

[52] M. RENARDY, R. ROBERTS. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics 13. Springer–Verlag, New York 1992.

[53] A. RÖSSLE. Asymptotische Entwicklungen für dünne Platten im Rahmen der linearen Elastostatik. Dissertation, Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A 1999.

[54] G. SCHNEIDER. The long wave limit for a Boussinesq equation. *SIAM J. Appl. Math.* **58** (1998) 1237–1245.

[55] J. C. SIMO, J. E. MARSDEN, P. S. KRISHNAPRASAD. The Hamiltonian Structure of Nonlinear Elasticity: The Material and Convective Representations of Solids, Rods, and Plates. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **104** (1988) 125–183.

[56] S. SLICARU. On the ellipticity of the middle surface of a shell and its application to the asymptotic analysis of membrane shells. *J. of Elasticity.* **46** (1997) 33–42.

[57] S. SLICARU. *Quelques Résultats dans la Théorie des Coques Linéairement Elastiques à Surface Moyenne Uniformément Elliptique ou Compacte sans Bord*. Université Pierre et Marie Curie, Paris 1998. Doctoral Dissertation.

[58] M. SPIVAK. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry III*. Publish or Perish, Inc., Berkeley 1979.

[59] J. J. STOKER. *Differential Geometry*. Pure and Applied Mathematics XX. John Wiley, New York 1969.

[60] L. M. XIAO. Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells. – Justification of equations for dynamic membrane shells. *Asymptotic Analysis* **17** (1998) 121–134.

[61] L. M. XIAO. Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells. – Justification of the dynamic flexural shells equations. *To appear in SIAM J. Math. Anal.* (1999).

[62] L. M. XIAO. Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells. – Justification of the dynamic Koiter shell equations. *Submitted to Arch. Rat. Mech. Anal.* (1999).

[63] K. YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer–Verlag, Berlin 1971.

[64] E. ZEIDLER. *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*. Applied Mathematical Sciences 109. Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg 1996.