Methoden und Anwendungen der Riemannschen Differentialgeometrie in

Yang-Mills-Theorien

Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Thomas Heck aus Waiblingen

Hauptberichter: Mitberichter: Tag der mündlichen Prüfung: Prof. Dr. Dr. h.c. W. WeidlichProf. Dr. H.-R. Trebin22. Dezember 1993

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Stuttgart 1993

Inhaltsverzeichnis

\mathbf{Sy}	mbo	lverzei	chnis	4
Ei	nleit	ung		7
1	Eicł	ntheori	en und allgemeine Relativitätstheorie	10
2	Yan	g-Mills	s-Theorie und Bündelabbildungen	19
	2.1	Vom 7	Cangentialbündel zur Yang-Mills-Theorie	19
		2.1.1	Einführung der Tensorbündel	20
		2.1.2	Die Entkopplungsabbildung	26
	2.2 Yang-Mills-Gleichungen			31
		2.2.1	Produkträume - das dimensionale Superpositions prinzip $\ .$.	35
		2.2.2	Zusammenhang zwischen Einstein- und Yang-Mills-Gleichungen	40
	2.3 Allgemeine Reskalierung			42
		2.3.1	Einführung der neuen Metrik g	42
		2.3.2	Projektion auf Unteralgebren	44
		2.3.3	Die Reskalierungsbedingung $\overset{(g)(G)}{\star} \Omega = \operatorname{sign}(g)\Omega \dots \dots$	48
		2.3.4	Einige Theoreme und Spezialfälle	52
	2.4	Konsti	ruktion von Yang-Mills-Lösungen (Übersicht) \ldots	58
3	Lösı	ungen	euklidischer Yang-Mills-Gleichungen	59
	3.1	Lösung	gen im flachen Raum	59
	3.2	Konfo	rme Reskalierung	62

		3.2.1	Produkte aus Räumen konstanter Krümmung $\ .\ .\ .\ .$	62
		3.2.2	Grenzfälle	77
		3.2.3	Selbstduale Lösungen	79
	3.3 Nichtkonforme Reskalierung		85	
		3.3.1	Meronartige Lösungen in E^5	85
		3.3.2	Geometrie der 1-Meron-Lösungen in E^4 und E^5	95
		3.3.3	Multimeronlösungen	103
	3.4	Zusam	nmenhang mit der Trivialisierbarkeit	112
		3.4.1	SO(4)-Trivialisierbarkeit	114
		3.4.2	SO(5)-Trivialisierbarkeit	115
	3.5	Zusam	nmenfassung der Yang-Mills-Lösungen	115
4	Materiefelder		117	
	4.1	Ankop	pplung von $SU(2) \times U(1)$ -Eichtermen	117
	4.2	Veralls Konfig	gemeinerung der Julia-Zee Correspondence auf nichtstatische gurationen	120
\mathbf{Z}	usan	nmenfa	assung und weitere Möglichkeiten	123
A	Kor	ventio	onen und Bezeichnungen	127
в	Ber	echnur	ng der Konnexionskoeffizienten aus der Kobasis $ heta^lpha$	133
\mathbf{C}	Kor	ıforme	Reskalierung	135
D	D Einbettung der SU(2) in SO(4)			139
Li	terat	urverz	zeichnis	144

Abbildungsverzeichnis

3.1	Instanton-Lösung	74
3.2	Dimeron-Lösung	75
3.3	1-Meron-Lösung in E^4	96
3.4	1-Meron-Lösung in E^5	97
3.5	Repräsentative Distribution 1	100
3.6	Repräsentative Distribution 2	100

Symbol verzeichnis

$\overset{(G)}{\star},\overset{(g)}{\star}$	Hodge-Star zur Metrik \boldsymbol{G} , zur Metrik \boldsymbol{g}
\wedge	äußeres Produkt für Formen
∂_{μ}	partielle Ableitung, natürliche Basis
∇	kovariante Ableitung zu $\boldsymbol{\Gamma}$
$\hat{oldsymbol{ abla}}$	kovariante Ableitung zu $\hat{\Gamma}$
$oldsymbol{ abla}(oldsymbol{G})$	kovariante Ableitung zur Levi-Civita-Konnexion von ${m G}$
$oldsymbol{ abla}(oldsymbol{g})$	kovariante Ableitung zur Levi-Civita-Konnexion von \boldsymbol{g}
${f abla} \wedge, \hat{f abla} \wedge$	äußere kovariante Ableitungen
Α	Yang-Mills-Konnexion (Eichfeld)
$\overset{+}{\mathbf{A}}, \overset{-}{\mathbf{A}}$	Unterkonnexionen von $\boldsymbol{\omega}$
В	elektroschwaches Eichboson
B^i	orthonormale Kobasis zu trivialisierbaren Eichfeldern
c, C	Integrationskonstanten
С	Weyl-Tensor
$\mathcal{C}, \mathcal{C}^{-1}$	${ m Kopplungsabbildung}, { m Entkopplungsabbildung}$
d	äußere Ableitung
D	eichkovariante Ableitung
${\cal D}$	allgemein-kovariante Ableitung
E^N	N-dimensionaler euklidischer Raum
$oldsymbol{e}_a$	orthonormale Basisfelder zur Metrik $old G$
$\hat{oldsymbol{e}}_a$	orthonormale Basisfelder zur Metrik \boldsymbol{g}
\mathbb{E}^a	orthonormale Kobasisfelder zur Metrik ${m G}$
$\hat{\mathbb{E}}^a$	orthonormale Kobasisfelder zur Metrik \boldsymbol{g}
$e^a{}_\mu, \hat{e}^a{}_\mu$	Übergangsmatrizen
\mathbf{F}	Yang-Mills-Krümmung (zu ${\bf A})$

G	Metrik
g	Zielmetrik
${\mathcal G}$	Lie-Algebra
$GL^+(N,R)$	Gruppe der reellen, invertierbaren $N\times N\text{-}\mathrm{Matrizen}$ mit positiver Determinante
$g_K, g_{\mathrm{ew}}, g'_{\mathrm{ew}}, g_{\mathrm{s}}$	Kopplungskonstanten
H^N	N-dimensionaler hyperbolischer Raum
i_v	innere Ableitung
K	Krümmungskonstante
\mathcal{L}	Lagrangian
ℓ_a, \mathcal{L}^a	Basis in V, duale Basis
$N, \overset{+}{n}, \bar{n}$	Raumdimensionen
\mathbb{R}	Krümmung zu Γ
\mathcal{R}	Ricci-Tensor
R	Krümmungsskalar
r	Radialkoordinate
S	Wirkung
S^N	<i>N</i> -Sphäre
SO(N)	spezielle orthogonale Gruppe (Determinante $+1$)
SO(q, N-q)	spezielle pseudo-orthogonale Gruppe (Det. $+1$)
SU(N)	spezielle unitäre Gruppe (Det. $+1$)
T,T^*	lokaler Tangentialraum, Kotangentialraum
t	Zeitvariable oder Radialkoordinate
tr	Spur
V, V^*	Darstellungs-Vektorraum für Materiefelder, Dualraum
W^k	elektroschwache Eichbosonen
X^N	N-dimensionale Mannigfaltigkeit
$\overset{+}{X}\overset{+}{n},\overset{-}{X}\overset{-}{n}$	$\stackrel{+}{n}\!$
$\overset{+}{Y}, \overset{-}{Y}, \overset{+}{\mathcal{Y}}, \overset{-}{\mathcal{Y}}, \overset{-}{\mathcal{Y}}$	SU(2)-Generatoren in $SO(4)$
Z^i	Lie-Algebra-Generatoren
z	komplexe Variable
х	Reskalierungsabbildung
Γ	Riemann-Cartan-Konnexion zu \boldsymbol{G}

$\hat{\Gamma}$	Riemann-Cartan-Konnexion zu \boldsymbol{g}
$\Gamma(oldsymbol{G})$	Levi-Civita-Konnexion zu \boldsymbol{G}
$m{\Gamma}(m{g})$	Levi-Civita-Konnexion zu \boldsymbol{g}
$\gamma_a, \gamma_\mu(x)$	Dirac-Matrizen
δ	Koableitung
δ_{ab}	Kronecker-Delta
ϵ	Permutationssymbol
ζ	komplexe Variable
η_{ab}	Orthonormalkomponenten der Metriken
ϑ_{lpha}	Basis im Tangentialraum
$ heta^{lpha}$	Basis im Kotangentialraum
Θ	Torsions-2-Form
κ_g	Gravitations-Kopplungskonstante
κ	Winkelvariable
Λ	Raum der inhomogenen Differentialformen
Λ^p	Raum der p -Formen
Λ_c	kosmologische Konstante
ξ	Variable
σ	konforme Reskalierungsfunktion
σ_{lpha}	Reskalierungsfunktionen
$ au_k$	Pauli-Matrizen
φ	Winkelvariable
ϕ	bosonisches Materiefeld (Higgs-Feld)
ψ	Dirac-Spinor
Ψ	inhomogene Differential form (Kähler-Fermion) $% \left(\left({\rm K}_{i}^{2}\right) \right) =\left({\rm K}_{i}^{2}\right) \left({\rm K}_$
ω	SO(q, N-q)-Konnexion
Ω	Krümmung zu $\boldsymbol{\omega}$

Einleitung

Die auf Yang und Mills [55] zurückgehenden Eichtheorien wurden in den vergangenen Jahrzehnten zu einem festen Bestandteil der Elementarteilchentheorie. Nach dem Vorbild der Elektrodynamik liegen heute eichtheoretische Standardmodelle sowohl zur schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung (Glashow-Salam-Weinberg-Modell) als auch zur starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik) vor. Mit der Entdeckung der W- und Z-Bosonen im Jahre 1983 wurde eine wesentliche Voraussage des Glashow-Salam-Weinberg-Modells experimentell bestätigt. Präzisionsmessungen in der jüngsten Vergangenheit z. B. bei CERN haben das elektroschwache Standardmodell weiter gestärkt.

Gleichzeitig mit der Entwicklung der Eichtheorien - jedoch weitgehend unabhängig davon - erlebte Einsteins allgemeine Relativitätstheorie eine Renaissance. Die allgemeine Relativitätstheorie galt lange Zeit als ausschließliche Domäne der Theoretiker. War der Nachweis der kosmischen Hintergrundstrahlung durch Penzias und Wilson 1965 noch eine Zufallsentdeckung, so begann man sich etwa zu dieser Zeit verstärkt für die experimentell nachprüfbaren Konsequenzen der Einsteinschen Theorie zu interessieren. Die allgemeine Relativitätstheorie wurde einer Reihe experimenteller Tests unterzogen (siehe etwa [54]), zum Beispiel der präzisen Messung der Lichtablenkung an der Sonne, und gegenüber konkurrierenden Theorien bestätigt.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie gilt daher heute nicht nur als theoretisch attraktive, sondern auch als experimentell gut verifizierte Theorie.

Beide Fundamentaltheorien - die Gravitationstheorie und das auf Yang-Millschen Eichtheorien beruhende Standardmodell der Elementarteilchenphysik - haben ihre eigenen Vorzüge und Schwächen:

Die allgemeine Relativitätstheorie ist vor allem als klassische Feldtheorie erfolgreich. Die Eleganz der Theorie mit der Einstein-Hilbert-Wirkung (siehe erstes Kapitel), einer einheitlichen Gravitations-Kopplungskonstanten und der direkten Beziehung zur Geometrie der Raum-Zeit ist wohl unumstritten. Dagegen ist eine befriedigende Quantisierung der Gravitation immer noch nicht gelungen.

Beim Standardmodell der Elementarteilchentheorie ist es in gewissem Sinn umgekehrt: Hier ist die Quantenfeldtheorie - zumindest im störungstheoretischen Bereich - weit entwickelt. Dagegen wird die Willkür, mit der Eichgruppen, Darstellungen, Kopplungskonstanten und Massenparameter in der zugrundeliegenden klassischen Wirkung festgelegt werden, gelegentlich als Mangel der Theorie empfunden.

Aber auch bei der Quantisierung der Yang-Mills-Theorien treten Probleme auf: Zwar sind störungstheoretische Berechnungen mit Hilfe von Feynman-Graphen inzwischen Standardverfahren und experimentell gut überprüft. Einige fundamentale Erscheinungen wie zum Beispiel das Quark-Confinement sind dagegen nichtstörungstheoretischer Natur und erheblich schwieriger zu behandeln. Eine Methode der nicht-störungstheoretischen Auswertung von Pfadintegralen besteht in der Gaußapproximation um Lösungen der klassischen Feldgleichungen herum. Dazu werden Lösungen der nichtlinearen klassischen Yang-Mills-Gleichungen und Kenntnisse über ihre Eigenschaften benötigt.

Ein großer Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich daher mit der Konstruktion und Klassifikation von Lösungen der homogenen Yang-Mills-Gleichungen.

Die Methoden, die hierzu entwickelt und angewandt werden, entstammen der modernen Riemannschen Differentialgeometrie, deren Grundelemente das Tangentialbündel und die Cartanschen Differentialformen einer Mannigfaltigkeit sind. Auf einer Mannigfaltigkeit definiert man eine Riemannsche Metrik g, die physikalisch mit dem Gravitationsfeld identifiziert wird. Daneben kann eine Konnexion zur kovarianten Ableitung von Tangentialvektorfeldern und Tensorfeldern eingeführt werden. Im Gegensatz zur traditionellen Riemannschen Geometrie muß diese Konnexion nicht unbedingt die aus der Metrik abgeleitete Levi-Civita-Konnexion sein. (Dies bleibt jedoch ein wichtiger Spezialfall.) Vielmehr kann eine lineare Konnexion unabhängig von der Metrik durch die Forderung einer Produktregel und anderer Verträglichkeitsbedingungen (Abschnitt 2.1.1, vgl. [16, 46]) definiert werden. Wird zusätzlich die Forderung der kovarianten Konstanz einer Metrik gestellt, dann bezeichnen wir die Konnexion als "metrisch" oder als Riemann-Cartan-Konnexion.

Im Gegensatz zum in Yang-Mills-Theorien üblichen Vorgehen , bei dem man Faserbündel unabhängig vom Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit betrachtet, werden in dieser Arbeit Riemann-Cartan-Konnexionen auf Yang-Mills-Konnexionen abgebildet, d. h. es wird ein formaler Zusammenhang zwischen den "inneren Freiheitsgraden" der Yang-Mills-Theorie und der Tangentialraum-Geometrie des Raumes hergestellt. Der früheste Ansatz, bei dem Yang-Mills-Lösungen aus einer Levi-Civita-Geometrie abgeleitet wurden, scheint von F. Wilczek [53] zu stammen. Die Idee, Yang-Mills-Felder auf allgemeinere Riemann-Cartan-Konnexionen abzubilden, wurde von M. Mattes und M. Sorg in [43] für SO(4)-trivialisierbare Felder formuliert und später von C. Mokler [44] auf SO(N)-Trivialisierbarkeit erweitert. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Verfahren weiter verallgemeinert, es sind nun beliebige Riemann-Cartan-Konnexionen und beliebige Metriken zugelassen. Wichtige Vorarbeiten stammen auch von R. Dick [19] (Lösungen aus konform-flachen Räumen), R. Brucker [13] und H. P. Thienel [50] (Meron-Geometrie).

Die Beschreibung von Yang-Mills-Theorien mit geeigneten Eichgruppen im Rahmen

der Differentialgeometrie soll neben der Konstruktion von Lösungen auch einem etwas einheitlicheren geometrischen Verständnis von Eichtheorien und allgemeiner Relativitätstheorie dienen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Das erste Kapitel bringt einen Überblick über klassische Yang-Mills-Theorien mit beliebiger Hintergrundmetrik. Es werden auch kurz die Terme eines "Gesamtmodells" (Yang-Mills-Standardmodell + Gravitation) vorgestellt. Interessant ist hierbei, daß eine Riemann-Cartan-Konnexion zur Ankopplung der Gravitation an Materieund Eichfelder nur in der kovarianten Ableitung eines Dirac-Feldes vorkommt. In der Kähler-Theorie, einer möglichen Alternative zur üblichen allgemein-relativistischen Verallgemeinerung der Dirac-Theorie, ist die Gravitationsankopplung ohne Konnexion möglich.

Im zweiten Kapitel werden die allgemeinen Methoden erarbeitet. Zunächst werden im Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit Riemann-Cartan-Konnexionen zu einer Metrik **G** betrachtet und durch die "Entkopplungsabbildung" als Yang-Mills-Konnexionen interpretiert. Die Definitionen werden so allgemein gehalten, daß später (Kapitel 4) weitergehende Schlußfolgerungen zu gekoppelten Materie-Eichfeld-Systemen möglich sind. Anschließend werden die homogenen Yang-Mills-Gleichungen ins Tangentialbündel übersetzt. Mit dem "dimensionalen Superpositionsprinzip" (Abschnitt 2.2.1) wird eine Grundlage für die Konstruktion von Yang-Mills-Lösungen geschaffen. Im Unterkapitel 2.3 "Allgemeine Reskalierung" wird der Übergang zu einer neuen Metrik diskutiert. Bei dem Reskalierungsschritt ist darauf zu achten, daß das Eichfeld seinen Lösungscharakter beibehält. Besonders nützlich ist hierzu die in Abschnitt 2.3.3 aufgestellte Reskalierungsbedingung.

Im dritten Kapitel werden nun die zuvor allgemein definierten Methoden zur Konstruktion konkreter Yang-Mills-Lösungen angewandt. Neben der Rekonstruktion der bekannten Instanton- und Meron-Lösungen durch konforme Reskalierung, können durch allgemeinere Reskalierungen weitere Lösungen erzeugt werden.

Im letzten Kapitel kommen wir auf die Frage zurück, ob Riemann-Cartan-Konnexionen auch außerhalb der homogenen Yang-Mills-Gleichungen zur Beschreibung von Yang-Mills-Konnexionen eingesetzt werden könnten. Es wird gezeigt, daß ein gekoppeltes Yang-Mills-Higgs-System in der Wick-rotierten $SU(2) \times U(1)$ -Theorie als Riemann-Cartan-Struktur aufgefaßt werden kann.

Die Arbeit schließt ab mit einer Verallgemeinerung der Julia-Zee-Correspondence, bei der ein bosonisches Materiefeld in die Yang-Mills-Konnexion absorbiert werden kann.

Kapitel 1

Eichtheorien und allgemeine Relativitätstheorie

Zur Einführung wird ein kurzer Überblick über Yang-Mills-Eichtheorien auf dem Hintergrund der allgemeinen Relativitätstheorie gegeben.

Wir betrachten ein komplexes skalares Materiefeld ϕ im flachen Minkowski-Raum mit Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, +1)$. Die Wirkung des freien Feldes sei

$$S_{(\phi)} = \int \mathcal{L}_{(\phi)} \mathrm{d}^4 x \tag{1.1}$$

mit der Lagrangedichte¹

$$\mathcal{L}_{(\phi)} = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi^{\dagger} \partial_{\nu} \phi - m^2 \phi^{\dagger} \phi.$$
 (1.2)

Durch Variation der Wirkung $S_{(\phi)}$ nach dem konjugiert komplexen Feld $\phi^{\dagger} = \phi^*$ erhält man als Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(\phi)}}{\partial \phi^{\dagger}} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{(\phi)}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^{\dagger})} = 0$$
(1.3)

die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2\right)\phi = 0. \tag{1.4}$$

In dieser Form gilt die Gleichung (1.4) nur in der flachen Raum-Zeit und dort nur in kartesischen Koordinaten.

Um diesen Mangel zu beheben gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Man ersetzt die Ableitungen ∂_{μ} mit Hilfe einer Konnexion $\hat{\Gamma}$ (vgl. Abschnitt 2.1.1) durch kovariante Ableitungen $\hat{\nabla}_{\mu}$. Gleichzeitig werden die flachen Metrikkomponenten $\eta_{\mu\nu}$ durch Komponenten einer Riemannschen Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ ersetzt.

¹Es wird das natürliche Einheitensystem $\hbar = 1$, Lichtgeschwindigkeit = 1 benutzt.

2. Die elegantere Möglichkeit besteht in der Verwendung des Formenkalküls. Hierbei wird das Materiefeld ϕ als 0-Form aufgefaßt. Mit dem Hodge-Star-Operator $\stackrel{(g)}{\star}$ (A.13) und der flachen Metrik

$$\boldsymbol{g} = \eta_{\mu\nu} \mathbf{d} x^{\mu} \otimes \mathbf{d} x^{\nu} \tag{1.5}$$

wird die Wirkung (1.1)

$$S_{(\phi)} = \int_{\star}^{(g)} \mathcal{L}_{(\phi)}$$

$$\stackrel{(g)}{\star} \mathcal{L}_{(\phi)} = (\mathbf{d}\phi)^{\dagger} \wedge \stackrel{(g)}{\star} \mathbf{d}\phi - m^{2} \stackrel{(g)}{\star} \phi^{\dagger}\phi.$$

$$(1.6)$$

Der Klein-Gordon-Gleichung (1.4) entspricht die Gleichung

$$\left(-\overset{(g)}{\star}\mathbf{d}\overset{(g)}{\star}\mathbf{d} + m^2\right)\phi = 0.$$
(1.7)

Der Übergang zu beliebigen Koordinaten oder zu einem Riemannschen Raum geschieht hier formal sehr einfach durch Ersetzen der flachen Metrik (1.5) durch die allgemeinere Metrik

$$\boldsymbol{g}(x) = g_{\mu\nu}(x) \mathbf{d}x^{\mu} \otimes \mathbf{d}x^{\nu}. \tag{1.8}$$

Die Einführung einer Konnexion zur kovarianten Ableitung ist hier nicht nötig, da die Metrik im Hodge-Star in geeignet antisymmetrisierter Weise auftritt. Solange man aber mit Formen (= total antisymmetrischen kovarianten Tensorfeldern) arbeitet, steht mit der äußeren Ableitung **d** ein sinnvoller, d. h. koordinatenunabhängig definierter Differentialoperator zur Verfügung.

Schreibt man Formen in Tensorkomponenten um, dann läßt sich die Wirkung des äußeren Differentialoperators **d** auf die im Hodge-Star $\stackrel{(g)}{\star}$ verborgene Metrik mit (A.18,A.19) durch die Levi-Civita-Konnexion (A.20) ausdrücken. In diesem Sinn ist die Hodge-Formulierung konsistent mit der 1. Möglichkeit, wenn dort die Levi-Civita-Konnexion verwendet wird.

In jedem Fall führt die koordinatenunabhängige Formulierung nahezu automatisch zu einer geometrischen Gravitationstheorie auf einer gekrümmten Raum-Zeit, sobald die Metrik mit dem Gravitationsfeld identifiziert wird. Das rechtfertigt die Bezeichnung "allgemeine Relativitätstheorie".

Einen dynamischen Term für das Metrikfeld \boldsymbol{g} erhält man durch Hinzunahme der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{\rm EH} = -\frac{1}{\kappa_g} \int {}^{(g)} \hat{R}$$
(1.9)

mit dem Krümmungsskalar \hat{R} und einer Kopplungskonstanten κ_g . Durch Variation nach der Metrik entstehen daraus die Einstein-Gleichungen.

Während mit den genannten Methoden die Gravitationswechselwirkung beschrieben werden konnte, bieten die Eichtheorien die Möglichkeit, alle übrigen bekannten Wechselwirkungen in die Feldtheorie einzubeziehen.

Dazu werden im allgemeinen Materiefelder mit mehreren Komponenten benötigt:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \qquad \phi^{\dagger} = (\phi_1^*, \dots, \phi_n^*). \tag{1.10}$$

Als Ansatz für Wirkung und Lagrangian kann wieder (1.6) dienen. Die Wirkung $S_{(\phi)}$ (1.6) ist invariant unter globalen Eichtransformationen, d. h. ersetzt man ϕ durch $\phi' = U\phi$ mit einer konstanten unitären $n \times n$ -Matrix U, dann bleibt $S_{(\phi)}$ (1.6) wegen $U^{\dagger} = U^{-1}$ unverändert.

Die auf Yang und Mills [55] zurückgehende Idee der Eichtheorien besteht darin, anstelle der globalen Invarianz eine lokale Eichinvarianz zu fordern, die Wirkung S soll also unter ortsabhängigen Eichtransformationen

$$\phi'(x) = U(x)\phi(x) \tag{1.11}$$

unverändert bleiben.

Dazu wird die äußere Ableitung $\mathbf{d}\phi$ in (1.6) ersetzt durch eine eichkovariante Ableitung

$$\mathbf{D}\phi = \mathbf{d}\phi + \mathbf{A} \wedge \phi. \tag{1.12}$$

Die Eichfelder (Konnexionen) **A** nehmen Werte in einer *n*-dimensionalen Darstellung der zur Eichgruppe gehörenden Liealgebra an. Mit einer Basis Z^i in der Liealgebra \mathcal{G} und der 1-Formen-Basis $\mathbf{d}x^{\mu}$ kann man **A** zerlegen in

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\dim(\mathcal{G})} \mathbf{A}_i Z^i = \sum_{i=1}^{\dim(\mathcal{G})} A_{i\mu} Z^i \mathbf{d} x^\mu = A_\mu \mathbf{d} x^\mu.$$
(1.13)

Das Transformationsverhalten der Eichfelder \mathbf{A} unter lokalen Eichtransformationen (1.11) wird folgendermaßen gewählt:

$$\mathbf{A}'(x) = U(x)\mathbf{A}(x)U^{-1}(x) + U(x)\mathbf{d}U^{-1}(x).$$
(1.14)

Die modifizierte Wirkung

$$S_{(\phi)} = \int \left((\mathbf{D}\phi)^{\dagger} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{D}\phi - m^2 \overset{(g)}{\star} \phi^{\dagger}\phi \right)$$
(1.15)

bleibt wie gefordert invariant, da für die Ableitungen nun gilt:

$$\mathbf{D}'\phi'(x) = U(x)\left(\mathbf{D}\phi(x)\right). \tag{1.16}$$

Die Wirkung für die Eichfelder A selbst hat typischerweise die Gestalt

$$S_{(A)} = \frac{1}{g_K^2} \int \operatorname{tr} \mathbf{F} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{F}$$
(1.17)

mit der Krümmung

$$\mathbf{F} = \mathbf{dA} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \tag{1.18}$$

und einer für die jeweilige Wechselwirkung charakteristischen Kopplungskonstanten g_K . Das Transformationsverhalten der Krümmung lautet:

$$\mathbf{F}'(x) = U(x)\mathbf{F}(x)U^{-1}(x).$$
(1.19)

Variation des reinen Eichterms $S_{(A)}$ (1.17) nach **A** führt zu den Yang-Mills-Gleichungen ohne Materiefelder (homogene Yang-Mills-Gleichungen)

$$\mathbf{D}_{\star}^{(g)}\mathbf{F} = 0. \tag{1.20}$$

Eichtheorien sind nach dem Vorbild der Elektrodynamik konstruiert. Die Elektrodynamik ist hier als Spezialfall mit der abelschen Eichgruppe U(1) oder SO(2)enthalten, in diesem Fall sind (1.20) Maxwell-Gleichungen im ladungsfreien Raum.

Bei einem Gesamtsystem $S_{(\phi)} + S_{(A)}$ aus Materie- und Eichfeldern tritt in den Yang-Mills-Gleichungen (1.20) ein Stromterm j aus der Variation von $S_{(\phi)}$ nach **A** hinzu.

Auf die geometrische Bedeutung der Yang-Mills-Gleichungen werden wir im Hauptteil dieser Arbeit zurückkommen. Zuvor wollen wir der Vollständigkeit halber noch auf die feldtheoretische Behandlung von Fermionen eingehen.

Nach einer heuristischen Idee von Dirac [21, 22] erfolgt der Übergang von der Klein-Gordon-Gleichung zu einer Spinorgleichung durch "Wurzelziehen" aus dem d'Alembert-Operator $\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$, d. h. es wird ein Differentialoperator erster Ordnung gesucht, der sicherstellt, daß das Feld zugleich weiterhin die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt.

Im flachen Minkowski-Raum erhält man die Dirac-Gleichung [21, 22, 9]

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0. \tag{1.21}$$

Mit der Forderung

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \tag{1.22}$$

an die Dirac-Matrizen γ^a folgt aus (1.21) die Klein-Gordon-Gleichung (1.4)

$$(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi = (\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^{2})\psi = 0.$$
(1.23)

Auch diese Idee ist zunächst auf den flachen Raum beschränkt. Es gibt folgende Möglichkeiten, eine Spinorgleichung im Einklang mit der allgemeinen Relativitätstheorie aufzustellen: 1. In der Dirac-Gleichung wird die Ableitung ∂_{μ} wieder durch eine kovariante Ableitung $\hat{\nabla}^{\text{Spin}}_{\mu}$ ersetzt. Das erfordert die Einführung einer Konnexion $\hat{\Gamma}^{\text{Spin}}$, einer Spinordarstellung der Konnexion des Tangentialraums [25, 41]. Die Dirac-Matrizen können mit einer Orthonormalbasis $\hat{\mathbb{E}}^{a}(x)$ (Anhang A.2) zur Metrik \boldsymbol{g} in den gekrümmten Raum transportiert werden:

$$\gamma(x) = \gamma_a \hat{\mathbb{E}}^a(x). \tag{1.24}$$

Mit Übergangsfunktionen $\hat{e}^a_{\ \mu}$ zur Koordinatenbasis $\mathbf{d}x^{\mu}$

$$\hat{\mathbb{E}}^{a}(x) = \hat{e}^{a}_{\ \mu}(x)\mathbf{d}x^{\mu} \ , \ \eta_{ab}\hat{e}^{a}_{\ \mu}\hat{e}^{b}_{\ \nu} = g_{\mu\nu} \ , \ g^{\mu\nu}\hat{e}^{a}_{\ \mu}\hat{e}^{b}_{\ \nu} = \eta^{ab}$$
(1.25)

zerlegen die ortsabhängigen γ -Matrizen

$$\gamma_{\mu}(x) = \gamma_a \hat{e}^a{}_{\mu}(x) \tag{1.26}$$

die Riemannsche Metrik in Analogie zu (1.22)

$$\{\gamma_{\mu}(x), \gamma_{\nu}(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x). \tag{1.27}$$

Mit der so(3, 1)-Darstellung der Levi-Civita-Konnexion $\omega(g)_{ab}$ (2.33 mit $\hat{e}^a_{\ \mu}$ statt $e^a_{\ \mu}$) erhält man

$$\hat{\Gamma}^{\text{Spin}} = \frac{1}{8} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{g})_{ab} [\gamma^a, \gamma^b].$$
(1.28)

Die Dirac-Gleichung im Riemannschen Raum lautet dann

$$\left(i\gamma^{\mu}(x)(\partial_{\mu}+\hat{\Gamma}^{\rm Spin}_{\mu})-m\right)\psi=0 \qquad (1.29)$$

oder

$$\left(i\gamma \wedge \overset{(g)}{\star} (\mathbf{d} + \hat{\Gamma}^{\text{Spin}}) - \overset{(g)}{\star} m\right)\psi = 0.$$
(1.30)

Bei dieser Verallgemeinerung der Dirac-Gleichung geht allerdings die ursprüngliche Idee, die Klein-Gordon-Gleichung zu erfüllen, verloren. Nach "Quadrieren" des Dirac-Operators wie in (1.23) erhält man einen Zusatzterm proportional zum Krümmungsskalar \hat{R} der Mannigfaltigkeit

$$\left(-i\gamma^{\mu}(x)(\partial_{\mu}+\hat{\Gamma}^{\rm Spin}_{\mu})-m\right)\left(i\gamma^{\nu}(x)(\partial_{\nu}+\hat{\Gamma}^{\rm Spin}_{\nu})-m\right)\psi$$
$$=(\hat{\nabla}^{\mu}\hat{\nabla}_{\mu}-\frac{1}{4}\hat{R}+m^{2})\psi=0.$$

2. Unabhängig von der Dirac-Gleichung leitete Kähler [38] eine Fermionengleichung aus der auf Formen verallgemeinerten Klein-Gordon-Gleichung ab. Mit der Koableitung δ (A.18) und wegen $\delta \phi = 0$ auf die 0-Form ϕ ist (1.7) äquivalent zu

$$(-\delta \mathbf{d} - \mathbf{d}\delta + m^2)\phi = 0. \tag{1.31}$$

Der hier autretende verallgemeinerte d'Alembert-(oder Laplace-) Operator $(\delta \mathbf{d} + \mathbf{d}\delta)$ ist für beliebige Formen sinnvoll. Wegen $\mathbf{d}\mathbf{d} = \delta\delta = 0$ kann (1.31) umgeschrieben werden in

$$(-\mathbf{d} - \delta - m)(\mathbf{d} + \delta - m)\phi = 0.$$

Kählers Gleichung erster $Ordnung^2$

$$(\mathbf{d} + \delta - m)\Psi = 0 \tag{1.32}$$

liefert daher bei beliebiger Metrik die verallgemeinerte Klein-Gordon-Gleichung (1.31) zurück. Ψ ist hierbei eine inhomogene Differentialform, d. h. eine formale Summe aus Formen unterschiedlichen Grades:

$$\Psi \in \Lambda = \bigoplus_{p=0}^{N} \Lambda^{p}, \quad (\Lambda^{p} = \text{Raum der } p \text{-Formen}).$$

Die beiden Methoden sind im allgemeinen nicht äquivalent! Zwar ist die Kähler-Gleichung im flachen Raum äquivalent zu einer vierfach entarteten Dirac-Gleichung [38, 5, 8, 10, 25, 26]. Diese Aufspaltung in vier Spinoranteile (für N = 4 Dimensionen des Basisraums) läßt sich auf bestimmte Riemannsche Mannigfaltigkeiten ausdehnen [26, 47], ist jedoch nicht auf beliebigen Mannigfaltigkeiten möglich. Während die Kähler-Gleichung auf beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert ist, erlauben nicht alle Mannigfaltigkeiten Diracsche Spinstrukturen [46].

Interessant im Zusammenhang mit den folgenden Kapiteln ist, daß mit der Kähler-Gleichung eine Fermionengleichung möglich ist, ohne daß eine Konnexion für den Gravitationsanteil eingeführt werden mußte. Konnexionen als Elemente der Riemann-Cartan-Geometrie könnten dann naheliegenderweise für die Yang-Mills-Freiheitsgrade benutzt werden.

Auch scheint die Kähler-Gleichung besser als die Dirac-Gleichung mit der Idee der allgemeinen Relativitätstheorie verträglich zu sein. Während die Kähler-Gleichung unter beliebigen Basistransformationen invariant ist, verlangt die Dirac-Gleichung den Übergang zu einer Orthonormalbasis und damit die Reduktion auf die Lorentz-Gruppe. Lorentz-Transformationen sind aber eher der speziellen als der allgemeinen Relativitätstheorie zuzuordnen.

Trotz der theoretischen Vorzüge der Kähler-Gleichung ist ihre physikalische Relevanz noch umstritten.

Schwierigkeiten bereitet die Interpretation der zusätzlichen Freiheitsgrade im Vergleich zur Dirac-Theorie ("Kähler = $4 \times$ Dirac"). Verschiedentlich wurde die Identifikation dieser Vielfachheit mit Flavour-Freiheitsgraden vorgeschlagen einschließlich der Vorhersage einer vierten Teilchengeneration [7, 3]. In der Reihe der Leptonen

 $^{^2 \}mathrm{Vorzeichen}$ hängen von der Definition von δ und der Metriksignatur ab.

zum Beispiel würde zu Elektron, μ und τ ein neues Teilchen τ' hinzukommen. Eine Aufspaltung des Massenspektrums wie in [7] setzt aber die Projektion auf vier Ideale der Clifford-Algebra voraus und kann nicht auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden. Teilweise werden die zusätzlichen Freiheitsgrade der Kähler-Gleichung als Eichfreiheitsgrade interpretiert [32].

Die einfachste Gesamtwirkung, die alle heutigen Standardmodelle umfaßt, hat die Gestalt (mit Dirac-Term):

 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\phi &= \left(\mathbf{d} + g_{\mathrm{ew}}W^{k}\frac{i}{2}\tau_{k} + g'_{\mathrm{ew}}B\frac{i}{2}\underline{1} \right) \phi \\ \mathcal{D}\psi_{f}^{r} &= \left(\mathbf{d} + \hat{\Gamma}^{\mathrm{Spin}} + y_{f}^{r}g'_{\mathrm{ew}}Bi + g_{\mathrm{s}}G^{k}\frac{i}{2}\lambda_{k}\delta^{f\mathrm{Quark}} \right)\psi_{f}^{r} \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}\psi_{f}^{l} = \left(\mathbf{d} + \underbrace{\widehat{\Gamma}^{\mathrm{Spin}}}_{\mathrm{Gravi-tation}} + \underbrace{g_{\mathrm{ew}}W^{k}\frac{i}{2}\tau_{k}}_{\mathrm{elektroschwache}} + y_{f}^{l}\underbrace{g_{\mathrm{ew}}'Bi\underline{1}}_{\mathbf{A}_{U(1)}} + \underbrace{g_{\mathrm{s}}G^{k}\frac{i}{2}\lambda_{k}}_{\mathrm{SU(3)}}\delta^{f\mathrm{Quark}}\right)\psi_{f}^{l}$$

$$f =$$
 Fermion \in { Leptonen, Quarks } , $r =$ rechtshändig, $l =$ linkshändig $\tau_k =$ Pauli-Matrizen $(k = 1, 2, 3)(D.1), \underline{1}$ siehe (D.4)

- $\lambda_k = \text{Gell-Mann-Matrizen} (k = 1, \dots, 8)[45]$
- $y_f^{r,l} = {\rm schwache}$ Hyperladung (von Fermionfund Händigkeit abhängige Konstante)
- C_k^f = Yukawa-Kopplungs-Matrix [45] zur fermionischen Masseerzeugung

(1.34)

Die Wirkung (1.33) ist Grundlage sowohl für die klassische als auch für die quantisierte Feldtheorie:

• Die klassischen Feldgleichungen gehen aus S durch Variation nach allen vorkommenden Feldern $\mathbf{A}, \psi, \phi, \mathbf{g}$ (oder \mathbb{E}^a) hervor. (Eine explizite Ableitung aller auftretenden Gleichungstypen findet man in [41].) In Gravitationstheorien, die Torsion zulassen, ist unabhängig von der Metrik auch nach der Gravitations-Konnexion $\hat{\Gamma}$ zu variieren [25].

• Die eigentliche Quantisierung erfolgt durch den Pfadintegralansatz nach Wick-Rotation ($x^4 = t \rightarrow i\tau$) und Übergang zu euklidischer Signatur. In der Praxis war hauptsächlich die störungstheoretische Behandlung über Feynman-Regeln für Materie- und Eichfelder ohne Gravitation erfolgreich.

Eine detaillierte Darstellung der Einzelterme in (1.33) im flachen Minkowski-Raum einschließlich einem Verzeichnis der Feynman-Regeln findet man z. B. in [45]. Hier muß eine kurze Beschreibung genügen:

Die erste Zeile der Wirkung S (1.33) enthält die (1.17) entsprechenden Yang-Mills-Eichterme zur elektroschwachen ($\mathbf{A}_{SU(2)}$ und $\mathbf{A}_{U(1)}$) und zur starken Wechselwirkung ($\mathbf{A}_{SU(3)}$). Die Eichfelder werden minimal an die Materiefelder angekoppelt, die gesamte kovariante Ableitung $\mathcal{D}\psi_f$ eines Spinors hat die Form

$$\mathcal{D}\psi_f = \left(\mathbf{d} + \hat{\Gamma}^{\text{Spin}} + \mathbf{A}\right)\psi_f. \tag{1.35}$$

Jedoch werden links- und rechtshändige Fermionen in der Wirkung (1.33) unterschiedlich behandelt. Die auftretenden Kopplungskonstanten und Hyperladungen sind nicht theoretisch begründet, sondern der Phänomenologie angepaßt. Die Gluonenfelder G^k bzw. $\mathbf{A}_{SU(3)}$ der starken Wechselwirkung wirken nur auf Quarks (Kronecker-Delta δ^{fQuark}).

 $\mathbf{A}_{U(1)}$ ist nicht direkt mit dem U(1)-Eichfeld $\mathbf{A}_{\text{photon}}$ der Elektrodynamik zu identifizieren, erst Linearkombinationen aus $W^k(k = 1, 2, 3)$ und *B* führen zu einem masselosen Photonfeld $\mathbf{A}_{\text{photon}}$ sowie drei massiven Vektorbosonen W^+, W^- und Z^0 . Die Massen werden durch spontane Symmetriebrechung mit Hilfe eines zweikomponentigen komplexen Higgs-Feldes ϕ erzeugt. Das Potential des Higgs-Feldes in der dritten Zeile von (1.33) ist so konstruiert, daß ϕ bei niedrigen Energien ein konstanter nicht verschwindender Isospinvektor wird. Mit geeigneten Gewichtungsfaktoren C_k^f erzeugt diese Konstante auch die Massenterme zu allen Fermionen ψ_f .

Betrachtet man die gesamte kovariante Ableitung $\mathcal{D}\psi_f$ (1.35) eines Spinors, so scheint die Gravitation ganz analog zu den Eichfeldern **A** angekoppelt zu sein. Tatsächlich aber erfolgt die Ankopplung des Gravitationsfeldes an die Materie- und Eichfelder in S (1.33) hauptsächlich durch den Hodge-Star $\overset{(g)}{\star}$. Nur im Dirac-Spinor-Anteil wird eine zur Gravitation gehörende Konnexion zu den übrigen Konnexionen **A** addiert.

Sollte die Kählersche Verallgemeinerung der Dirac-Theorie richtig sein, dann müßten die Dirac-Felder ψ in (1.33) durch entsprechende Kähler-Felder Ψ ersetzt werden. Insbesondere entspricht dann der Ableitung (1.35) eines Dirac-Feldes ein Kähler-Term

$$\mathcal{D}\Psi = \left[(\mathbf{d} + \mathbf{A}) + \overset{(g)}{\star} (\mathbf{d} + \mathbf{A}) \overset{(g)}{\star} \right] \Psi.$$
(1.36)

Man sieht, daß hier keine Riemann-Cartan-Konnexion $\hat{\Gamma}$ vorkommt. Die Ankopplung der Gravitation erfolgt nun generell durch den Hodge-Star, in der Gesamtwirkung würde a priori gar keine Konnexion für die Gravitation benötigt. (Zur Kähler-Wirkung siehe [7, 36].) Der Krümmungsskalar \hat{R} ist bei dieser Interpretation nicht als Term der Metrik und einer unabhängig davon zu variierenden Konnexion aufzufassen, sondern als dynamischer Term der Metrik allein.

Es stellt sich dann die Frage, ob in einer Theorie mit minimalen mathematischen Annahmen die geometrisch fundamentalen Riemann-Cartan-Konnexionen nicht besser mit den Yang-Mills-Konnexionen identifiziert werden sollten.

Dieser Gedanke soll in den folgenden Kapiteln - unter etwas allgemeineren Annahmen - einerseits präzisiert und andererseits zur Konstruktion von Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen (1.20) mit nichtabelschen Eichgruppen angewandt werden.

Kapitel 2

Yang-Mills-Theorie und Bündelabbildungen

Ausgehend von den begrifflich einfachsten Bündeln, den Tangential-Bündeln der Riemannschen Geometrie mit Riemann-Cartan-Konnexion, werden durch Reduktion auf orthogonale oder pseudoorthogonale Gruppen Yang-Mills-Felder auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstruiert.

2.1 Vom Tangentialbündel zur Yang-Mills-Theorie

Ein Zusammenhang zwischen Riemannscher Geometrie und Lösungen von Yang-Mills-Gleichungen einschließlich einer Konstruktion der 1-Instanton-Lösung wurde bereits von Wilczek [53] angegeben. In verschiedenen Arbeiten wurden weitere Spezialfälle unter ähnlichen Annahmen diskutiert [42, 19, 13].

Die Idee, den Zusammenhang zwischen Riemann-Cartan-Geometrie und Yang-Mills-Eichfeldern durch Bündelisomorphismen zu präzisieren, wurde von M. Mattes und M. Sorg [43] für SO(4)-trivialisierbare Eichfelder im flachen Raum entwickelt, von C. Mokler [44] auf SO(N)-Trivialisierbarkeit erweitert.

Es wird sich zeigen, daß Isomorphismen zwischen Riemann-Cartan- und Yang-Mills-Bündeln unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen möglich sind: Es werden beliebige Riemann-Cartan-Konnexionen und beliebige Metriken zugelassen.

2.1.1 Einführung der Tensorbündel

Wir gehen aus vom Tangentialbündel $T(X^N)$ einer reellen N-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit X^N , die zwei Riemannsche Metriken G und g erlaubt. Die Metrik G ist im allgemeinen gleichberechtigt zu der Metrik g des ersten Kapitels (man kann formal zunächst G = g setzen). Jedoch wird später bei der konkreten Konstruktion von Yang-Mills-Lösungen die Yang-Mills-Konnexion aus der Levi-Civita-Konnexion zu G abgeleitet. Daher betrachten wir zuerst die Metrik G, die "Zielmetrik" g wird durch einen Reskalierungsschritt in Abschnitt 2.3 eingeführt.

In einer Karte (einem Koordinatensystem) kann an jedem Punkt x der Mannigfaltigkeit eine Basis $\vartheta_{\alpha} \in T = T_x(X^N)$ ($\alpha = 1...N$) für die Tangentialvektoren eingeführt werden mit dem Skalarprodukt

$$(\vartheta_{\alpha},\vartheta_{\beta})_G = G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}.$$
 (2.1)

Die dazu duale Basis des Kotangentialraums $T^* = T^*_x(X^N)$ wird mit θ^{α} bezeichnet:

$$\theta^{\alpha}(\vartheta_{\beta}) = i_{\vartheta_{\beta}}\theta^{\alpha} = \langle \theta^{\alpha}, \vartheta_{\beta} \rangle = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$
(2.2)

Damit kann der Metriktensor geschrieben werden als

$$\boldsymbol{G} = G_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}\otimes\theta^{\beta} \tag{2.3}$$

und seine "Inverse" als

$$\boldsymbol{G}^{-1} := \boldsymbol{G}^{\#} = G^{\alpha\beta} \vartheta_{\alpha} \otimes \vartheta_{\beta}.$$
(2.4)

Die kovariante Ableitung ∇ kann durch die Wirkung auf die Basis definiert werden:

$$\boldsymbol{\nabla}\vartheta_{\boldsymbol{\beta}} = \vartheta_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}.$$
(2.5)

Durch Anwenden der Konnexions-1-Formen $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta}$ in (2.5) auf einen Basisvektor erhält man die kovariante Richtungsableitung und damit die vollständige Basiszerlegung von (2.5)

$$\boldsymbol{\nabla}_{\vartheta_{\gamma}}\vartheta_{\beta} = \vartheta_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{2.6}$$

(2.7)

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma}. \tag{2.8}$$

Die Forderung von Verträglichkeitsbedingungen definiert die kovariante Ableitung eines beliebigen Tensorfelds

$$t = t^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} \bigotimes_{i=1}^r \vartheta_{\alpha_i} \bigotimes_{j=1}^s \theta^{\beta_j} \in T^r_{*s} := \bigotimes_{i=1}^r T \bigotimes_{j=1}^s T^*$$
(2.9)

in Richtung eines beliebigen Vektorfelds

$$v = v^{\alpha} \vartheta_{\alpha}. \tag{2.10}$$

Gefordert wird (mit $t \in T^r_{*s} \cup C^1(X^N)$, $t^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} \in C^1(X^N)$, $t' \in T^{r'}_{*s'}$):

$$\nabla_{v}t = \nabla_{v^{\alpha}\vartheta_{\alpha}}t = v^{\alpha}\nabla_{\vartheta_{\alpha}}t$$

$$\nabla_{v}t^{\alpha_{1}\dots\alpha_{r}}{}_{\beta_{1}\dots\beta_{s}} = \langle \mathbf{d}t^{\alpha_{1}\dots\alpha_{r}}{}_{\beta_{1}\dots\beta_{s}}, v \rangle$$

$$\nabla_{v}(t+t') = \nabla_{v}t + \nabla_{v}t'$$

$$\nabla_{v}(t\otimes t') = (\nabla_{v}t)\otimes t' + t\otimes (\nabla_{v}t')$$
(2.11)

 ∇_v kommutiert mit Kontraktionen.

Insbesondere erhält man so für den dualen Basisvektor θ^{α} die Ableitung

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}^{\alpha} = -\boldsymbol{\theta}^{\beta} \otimes \boldsymbol{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta} \tag{2.12}$$

oder in Komponenten

$$\boldsymbol{\nabla}_{\vartheta_{\gamma}} \theta^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \theta^{\beta}. \tag{2.13}$$

Damit ist auch die kovariante Ableitung des Metriktensors G definiert. Für eine metrische Konnexion (Riemann-Cartan-Konnexion) wird gefordert:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\vartheta_{\lambda}}\boldsymbol{G} = 0. \tag{2.14}$$

Im Raum der total antisymmetrischen kovarianten Tensorfelder $\Lambda^p \in T^0_{*p}$ kann man schon mit dem äußeren Differentialoperator **d** in koordinatenunabhängiger Weise ableiten [16].

Eine tensorwertige p-Form

$$t \in T^r_{**} \otimes \Lambda^p$$

kann man durch die Basiszerlegung

$$t = \bigotimes_{i=1}^{r} \vartheta_{\alpha_{i}} \bigotimes_{j=1}^{s} \theta^{\beta_{j}} \frac{1}{p!} t^{\alpha_{1} \dots \alpha_{r}}{}_{\beta_{1} \dots \beta_{s} \gamma_{1} \dots \gamma_{p}} \bigwedge_{k=1}^{p} \theta^{\gamma_{k}}$$
(2.15)

in Tensor- und Formenkomponenten aufspalten, d.h. in Linearkombinationen der Form

$$t = t' \otimes \boldsymbol{\alpha} \qquad t' \in T^r_{*s}, \ \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p.$$

Für solche Tensoren definiert man die äußere kovariante Ableitung $\nabla \wedge$ durch die Produktregel

$$\nabla \wedge : T^{r}_{*s} \otimes \Lambda^{p} \to T^{r}_{*s} \otimes \Lambda^{p+1}$$

$$\nabla \wedge (t' \otimes \boldsymbol{\alpha}) = (\nabla_{\vartheta_{\lambda}} t') \otimes \theta^{\lambda} \wedge \boldsymbol{\alpha} + t' \otimes \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha},$$
(2.16)

oder ausgeschrieben für (2.15)

$$\nabla \wedge t = \left(\nabla_{\vartheta_{\lambda}} \left(\bigotimes_{i=1}^{r} \vartheta_{\alpha_{i}} \bigotimes_{j=1}^{s} \theta^{\beta_{j}} \right) \right) \otimes \frac{1}{p!} t^{\alpha_{1} \dots \alpha_{r}} \beta_{1} \dots \beta_{s} \gamma_{1} \dots \gamma_{p}} \theta^{\lambda} \wedge \bigwedge_{k=1}^{p} \theta^{\gamma_{k}} + \left(\bigotimes_{i=1}^{r} \vartheta_{\alpha_{i}} \bigotimes_{j=1}^{s} \theta^{\beta_{j}} \right) \otimes \mathbf{d} \left(\frac{1}{p!} t^{\alpha_{1} \dots \alpha_{r}} \beta_{1} \dots \beta_{s} \gamma_{1} \dots \gamma_{p}} \bigwedge_{k=1}^{p} \theta^{\gamma_{k}} \right).$$

$$(2.17)$$

Die Aufspaltung in Tensor- und Formenanteil (2.15) ist nicht in jedem Fall eindeutig. Zum Beispiel kann $\theta^{\alpha} \in T^*$ wegen der Isomorphie $T^* \sim \Lambda^1$ auch als 1-Form gedeutet werden. Hier wird für $\nabla \wedge$ die Konvention verwendet, von rechts ausgehend den maximal antisymmetrischen kovarianten Teil eines Tensors als Form zu interpretieren, falls die Aufspaltung nicht ohnehin klar ist. (Zur Mehrdeutigkeit der Aufspaltung siehe auch [49].)

Durch zweifaches Anwenden der äußeren kovarianten Ableitung auf einen Basisvektor erhält man die Krümmungs-2-Formen $\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta}$:

$$oldsymbol{
abla} oldsymbol{
abla} oldsymbol{
abla} = oldsymbol{
abla} oldsymb$$

also

$$\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta} = \mathbf{d}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \Gamma^{\gamma}{}_{\beta} \tag{2.18}$$

Es gibt vor allem zwei für praktische Rechnungen wichtige Basissysteme, das aus den Koordinatenrichtungen gebildete natürliche (holonome) Basissystem $\{\partial_{\mu}, \mathbf{d}x^{\mu}\}$ und das (bezüglich \mathbf{G}) orthonormierte Basissystem $\{\mathbf{e}_{a}, \mathbb{E}^{a}\}$.

Allgemeine Basis	$\vartheta_\alpha \in T$	$\theta^{\alpha} \in T^{*}$
	\downarrow	\downarrow
Natürliche Basis	∂_{μ}	$\mathbf{d}x^{\mu}$
G-orthonormale Basis	$oldsymbol{e}_a$	\mathbb{E}^{a}

Die Komponenten der natürlichen Basis entsprechen dem traditionellen Indexformalismus der allgemeinen Relativitätstheorie ("Einstein-Eichung").

G-orthonormal bedeutet hier, daß gilt:

$$(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)_G = \eta_{ab} \tag{2.19}$$

$$(\mathbb{E}^a, \mathbb{E}^b)_{G^{-1}} = \eta^{ab} \tag{2.20}$$

$$(\eta_{ab}) = (\eta^{ab}) = \operatorname{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{q-\operatorname{fach}}, \underbrace{+1, \dots, +1}_{(N-q)-\operatorname{fach}}).$$
(2.21)

Die Signatur von G (= Signatur von η_{ab}) lassen wir vorläufig offen. In der euklidischen Feldtheorie wird $\eta_{ab} = \delta_{ab}, q = 0$.

Der Übergang zu einer orthonormalen Basis ist nicht eindeutig, eine beliebige SO(q,N-q)-Transformation liefert eine weitere Orthonormalbasis. Die Reduktion auf eine orthonormale Basis ist mit globalen topologischen Verhältnissen verträglich: Das Frame-Bündel einer orientierbaren Mannigfaltigkeit kann immer auf ein SO(q,N-q)-Bündel reduziert werden [25, 16].

Der Basiswechsel von einer natürlichen zu einer orthonormalen Basis gleicher Orientierung wird durch $GL^+(N, R)$ -Übergangsmatrizen $e^a{}_{\mu}$ beschrieben:

$$e_{a} = e_{a}^{\mu}\partial_{\mu}$$

$$\mathbb{E}^{a} = e^{a}_{\mu}\mathbf{d}x^{\mu},$$

$$(2.22)$$

mit den Relationen

$$e_{a}^{\mu} = \eta_{ab} e_{\nu}^{o} G^{\mu\nu}$$

$$e_{\mu}^{a} e_{b}^{\mu} = \eta_{b}^{a} = \delta_{b}^{a}$$

$$e_{\mu}^{a} e_{a}^{\nu} = G_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

$$e_{\mu}^{a} e_{a\nu} = G_{\mu\nu}.$$
(2.23)

Eine beliebige tensorwertige p-Form (2.15) kann zum Beispiel wie folgt in unterschiedlicher Weise in Basiskomponenten zerlegt werden:

$$t = \frac{1}{p!} t^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s \lambda_1 \dots \lambda_p} \bigotimes_{i=1}^r \partial_{\mu_i} \bigotimes_{j=1}^s \mathbf{d} x^{\nu_j} \bigwedge_{k=1}^p \mathbf{d} x^{\lambda_k}$$
$$= \frac{1}{p!} t^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s c_1 \dots c_p} \bigotimes_{i=1}^r \mathbf{e}_{a_i} \bigotimes_{j=1}^s \mathbb{E}^{b_j} \bigwedge_{k=1}^p \mathbb{E}^{c_k}$$
$$= \frac{1}{p!} t^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s \lambda_1 \dots \lambda_p} \bigotimes_{i=1}^r \mathbf{e}_{a_i} \bigotimes_{j=1}^s \mathbb{E}^{b_j} \bigwedge_{k=1}^p \mathbf{d} x^{\lambda_k}$$

In der letzten Zeile wurden die total antisymmetrischen Formenkomponenten in die natürliche, die übrigen Komponenten in die orthonormale Basis zerlegt. Diese "gemischte Basis" ist besonders praktisch um später in die übliche Komponentenformulierung der Yang-Mills-Theorien zu gelangen.

Die Transformation der Tensorkomponenten erhält man mit (2.22) und (2.23) zu

$$t^{a_1\dots a_r}{}_{b_1\dots b_s\lambda_1\dots\lambda_p} = e^{a_1}{}_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e^{a_r}{}_{\mu_r} e_{b_1}{}^{\nu_1} \cdot \dots \cdot e_{b_s}{}^{\nu_s} t^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\nu_1\dots\nu_s\lambda_1\dots\lambda_p}.$$
 (2.25)

(Die Buchstabenwahl der Indizes deutet die Zugehörigkeit zur jeweiligen Basis an. Indizes a, b... beziehen sich auf die orthonormale, $\lambda, \mu, \nu...$ auf die natürliche Basis.)

Die Konnexions-1-Formen $\boldsymbol{\omega}^{a}_{b}$ der orthonormalen Basis

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{e}_{b} = \boldsymbol{e}_{a} \otimes \boldsymbol{\omega}^{a}{}_{b} \tag{2.26}$$

erhält man aus den Konnexions-1-Formen der natürlichen Basis durch eine $GL^+(N, R)$ -Eichtransformation

$$\boldsymbol{\omega}^{a}{}_{b} = e^{a}{}_{\mu} \mathbf{d} e_{b}{}^{\mu} + e^{a}{}_{\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\nu} e_{b}{}^{\nu}, \qquad (2.27)$$

oder ausgedrückt in Komponenten einer gemischten Basis:

$$\omega^a{}_{b\lambda} = e^a{}_{\mu}\partial_{\lambda}e_b{}^{\mu} + e^a{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}e_b{}^{\nu}.$$
(2.28)

Durch die Metrizitätsbedingung (2.14) werden die Konnexionsformen der Orthonormalbasis Objekte der Liealgebra so(q,N-q), d.h.

$$\boldsymbol{\omega}_{ab} = \eta_{ac} \boldsymbol{\omega}^c{}_b \tag{2.29}$$

ist antisymmetrisch:

$$\boldsymbol{\omega}_{ab} = -\boldsymbol{\omega}_{ba}.\tag{2.30}$$

Andererseits ist für jedes antisymmetrische ω_{ab} die Metrizitätsbedingung (2.14) zu einer Orthonormalbasis erfüllt, d.h. (2.30) und (2.14) sind äquivalent.

Im Sinne einer Eichtheorie ist in der Riemann-Cartan-Geometrie (mit metrischer Konnexion) eine beliebige SO(q,N-q)-Konnexion zugelassen, während Einstein in der allgemeinen Relativitätstheorie den folgenden Spezialfall der Geometrie mit Levi-Civita-Konnexion annahm.

Spezialfall Levi-Civita-Konnexion

Die Levi-Civita-Konnexion ist die einzige bezüglich G metrische Konnexion mit verschwindender Torsion (B.1), d.h. für die neben (2.14) auch

$$\Theta^{\alpha} = \mathbf{d}\theta^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \theta^{\beta} = 0 \tag{2.31}$$

gilt. Aus physikalischer Sicht entscheidend ist, daß hierbei $\frac{N^2(N-1)}{2}$ Freiheitsgrade verschwinden, die Levi-Civita-Konnexion kann eindeutig aus der Metrik berechnet werden.

In natürlicher Basis gilt zur Metrik G (siehe Anhang B)

$$\Gamma(\boldsymbol{G})^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} G^{\mu\rho} \left(\partial_{\nu} G_{\rho\lambda} + \partial_{\lambda} G_{\nu\rho} - \partial_{\rho} G_{\nu\lambda} \right), \qquad (2.32)$$

für die $\omega_{ab\mu}$ erhält man mit (2.28) und (2.23)

$$\omega(\mathbf{G})_{ab\mu} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\lambda} e_{a\mu} - \partial_{\mu} e_{a\lambda} \right) e_{b}^{\lambda} - \frac{1}{2} e_{a}^{\lambda} \left(\partial_{\lambda} e_{b\mu} - \partial_{\mu} e_{b\lambda} \right)
+ \frac{1}{2} e_{a}^{\lambda} e_{b}^{\rho} e^{c}_{\mu} \left(\partial_{\rho} e_{c\lambda} - \partial_{\lambda} e_{c\rho} \right)$$

$$\omega(\mathbf{G})_{ab} = \omega(\mathbf{G})_{ab\mu} \mathbf{d} x^{\mu}.$$
(2.33)

2.1.2 Die Entkopplungsabbildung

Einigen Erweiterungen der allgemeinen Relativitätstheorie [25, 31] liegt die Riemann-Cartan-Geometrie mit beliebiger metrischer Konnexion zugrunde, d.h. die $\frac{N^2(N-1)}{2}$ zusätzlichen Freiheitsgrade, die eine metrische Konnexion im Unterschied zur Levi-Civita-Konnexion zuläßt, werden der Gravitationswechselwirkung zugeschlagen. Zu den Einstein-Gleichungen für die Metrik treten dann Gleichungen hinzu, die die Torsion (B.1) der metrischen Konnexion bestimmen.

In dieser Arbeit dagegen werden die zusätzlichen Freiheitsgrade der Konnexion zur Beschreibung von Yang-Mills-Eichfeldern, wie sie in den übrigen Wechselwirkungen auftreten, ausgenutzt. Da die inneren Freiheitsgrade eines Yang-Mills-Materiefeldes zunächst nichts mit dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit zu tun haben, wird in diesem Abschnitt die "Entkopplungsabbildung" vom Tangentialbündel auf ein Materievektorbündel definiert.

Um zur Yang-Mills-Theorie zu gelangen, wird nun ein neues Vektorbündel isomorph zum Tangentialbündel des vorigen Abschnitts konstruiert.

Dazu sei ein reeller Vektorraum Vgegeben mit gleicher Dimension wie der Tangentialraum

$$\dim V = \dim T = N.$$

In einer Yang-Mills-Eichtheorie ist V der Darstellungsraum der Materiefelder mit inneren Freiheitsgraden. Bei dieser physikalischen Interpretation wird vorausgesetzt, daß die Eichgruppe entweder SO(q,N-q) oder eine Untergruppe davon ist (siehe später).

Durch Angabe einer Orthonormalbasis ℓ_a wird in V ein Skalarprodukt definiert:

Orthonormalbasis	$\ell_a \in V$	$(\ell_a,\ell_b)=\eta_{ab}$	(2.34)
Duale Basis	$\mathcal{L}^a \in V^*$	$\langle \mathcal{L}^a, \ell_b angle = \eta^a{}_b$	

Der Isomorphismus wird nun realisiert, indem am Punkt $x \in X^N$ jedem orthonormalen Basisvektor des Tangentialraums ein Basisvektor der neuen Faser V zugeordnet wird.

Basisraum:
$$X^N \ni x \xrightarrow{\text{id}} x \in X^N$$
 (2.35)
Faser: $T = T_x(X^N) \ni e_a(x) \xrightarrow{\mathcal{C}^{-1}} \ell_a(x) \in V_x$

Durch die Linearität der Vektorräume sind damit die Fasern isomorph aufeinander abgebildet.

Sei nun $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von X^N , die mit einer Kartenüberdeckung identifiziert werden kann, und seien weiter zu $x \in U_i \cap U_j$ SO(q,N-q)-Übergangsfunktionen $\mathcal{Q}_{ij}(x)$ gegeben, durch die die Orthonormalbasisvektoren im Überlappungsbereich $U_i \cap U_j$ verbunden werden:

$$\boldsymbol{e}_{a}^{(i)}(x) = \mathcal{Q}_{ija}{}^{b}(x)\boldsymbol{e}_{b}^{(j)}(x) \qquad x \in U_{i} \cap U_{j}.$$

Dann können Übergangsfunktionen für V_x ganz entsprechend erklärt werden durch

$$\ell_a^{(i)}(x) = \mathcal{Q}_{ija}{}^b(x)\ell_b^{(j)}(x) \qquad x \in U_i \cap U_j.$$

Damit ist ein Vektorbündel definiert [46], das nach Konstruktion isomorph zum ursprünglichen Tangentialbündel ist. Diesen Isomorphismus bezeichnen wir als Entkopplungsabbildung und verwenden dieselbe Notation C^{-1} wie für die Faserabbildung in (2.35).

Eine eichkovariante Ableitung **D** zu einer linearen Konnexion in diesem "entkoppelten" Bündel definiert man durch ihre der Gleichung (2.26) entsprechende Wirkung auf die Basis $\ell_a \in V$:

$$\nabla \boldsymbol{e}_{b} = \boldsymbol{e}_{a} \otimes \boldsymbol{\omega}^{a}_{b} \xrightarrow{\mathcal{C}^{-1}} \mathbf{D} \ell_{b} = \ell_{a} \otimes \boldsymbol{\omega}^{a}_{b}$$

$$\nabla_{\partial_{\mu}} \boldsymbol{e}_{b} = \boldsymbol{e}_{a} \omega^{a}_{b\mu} \xrightarrow{\mathcal{C}^{-1}} \mathbf{D}_{\partial_{\mu}} \ell_{b} = \ell_{a} \omega^{a}_{b\mu}$$

$$(2.36)$$

D wirkt in V wie ∇ im Tangentialbündel, wir haben also einen Isomorphismus, der die kovariante Ableitung einschließt. Die Schreibweise \mathcal{C}^{-1} deutet an, daß auch der umgekehrte Weg, die "Kopplungsabbildung" \mathcal{C} ins Tangentialbündel sinnvoll ist. Man erhält dann aus einem Eichfeld eine metrische Konnexion in T.

Das Kotangentialbündel wird abgebildet auf das duale Bündel mit Faser V_x^* :

$$T^{*} = T^{*}_{x}(X^{N}) \quad \ni \quad \mathbb{E}^{a}(x) \qquad \stackrel{\mathcal{C}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \mathcal{L}^{a}(x) \quad \in \quad V^{*}_{x}$$

$$\nabla \mathbb{E}^{a} \qquad = \quad -\mathbb{E}^{b} \otimes \boldsymbol{\omega}^{a}_{b} \qquad \stackrel{\mathcal{C}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \mathbf{D}\mathcal{L}^{a} \qquad = \quad -\mathcal{L}^{b} \otimes \boldsymbol{\omega}^{a}_{b} \qquad (2.37)$$

$$\nabla_{\partial_{\mu}} \mathbb{E}^{a} \qquad = \quad -\mathbb{E}^{b} \omega^{a}_{b\mu} \qquad \stackrel{\mathcal{C}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \mathbf{D}_{\partial_{\mu}} \mathcal{L}^{a} \qquad = \quad -\mathcal{L}^{b} \omega^{a}_{b\mu}$$

Für die Abbildung wurde die gleiche Bezeichnung C^{-1} wie in (2.35) gewählt, da die duale Abbildung in kanonischer Weise festliegt, wenn man die Übertragung der Dualitätsbeziehungen (2.2) nach (2.34) fordert.

In den assoziierten Tensorproduktbündeln mit Faser

$$V_{*s}^r = \bigotimes_{i=1}^r V \bigotimes_{j=1}^s V^*$$

erhält man beliebige Richtungsableitungen in Richtung eines Tangentialvektorfelds $v\in T$ im wesentlichen durch Forderung der Produktregel

$$\mathbf{D}_{v}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}') = (\mathbf{D}_{v}\mathcal{V}) \otimes \mathcal{V}' + \mathcal{V} \otimes (\mathbf{D}_{v}\mathcal{V}')$$

$$(\mathcal{V} \in V_{*s}^{r} , \mathcal{V}' \in V_{*s'}^{r'} , v \in T),$$

$$(2.38)$$

sowie den üblichen Verträglichkeitsbedingungen analog zu (2.11). Die Entkopplung der kovarianten Richtungsableitung können wir daher symbolisch darstellen in der Form:

$$\nabla_v : T^r_{*s} \to T^r_{*s} \longrightarrow D_v : V^r_{*s} \to V^r_{*s}.$$

Die Entkopplung der tensorwertigen Form t (2.24) definieren wir als

$$t \qquad \xrightarrow{\mathcal{C}^{-1}} \qquad \mathcal{C}^{-1}(t) = \frac{1}{p!} t^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s \lambda_1 \dots \lambda_p} \bigotimes_{i=1}^r \ell_{a_i} \bigotimes_{j=1}^s \mathcal{L}^{b_j} \bigwedge_{k=1}^p \mathbf{d} x^{\lambda_k}. \tag{2.39}$$

Die äußere kovariante Ableitung **D** solcher V^r_{*s} -wertigen p-Formen wird definiert durch die Produktregel auf $\mathcal{V} \otimes \boldsymbol{\alpha} \in V^r_{*s} \otimes \Lambda^p$

$$\mathbf{D}(\mathcal{V}\otimes\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{D}_{\vartheta_{\lambda}}\mathcal{V})\otimes\mathbf{d}x^{\lambda}\wedge\boldsymbol{\alpha}+\mathcal{V}\otimes\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}$$
(2.40)

$$(\mathcal{V} \in V_{*s}^r , \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p),$$
 (2.41)

(2.42)

also mit (2.39)

$$\mathbf{D} \ \mathcal{C}^{-1}(t) = \left(\mathbf{D}_{\partial_{\lambda}} \left(\bigotimes_{i=1}^{r} \ell_{a_{i}} \bigotimes_{j=1}^{s} \mathcal{L}^{b_{j}} \right) \right) \otimes \frac{1}{p!} t^{a_{1} \dots a_{r}}{}_{b_{1} \dots b_{s} \mu_{1} \dots \mu_{p}} \mathbf{d} x^{\lambda} \wedge \bigwedge_{k=1}^{p} \mathbf{d} x^{\mu_{k}} + \left(\bigotimes_{i=1}^{r} \ell_{a_{i}} \bigotimes_{j=1}^{s} \mathcal{L}^{b_{j}} \right) \otimes \frac{1}{p!} \mathbf{d} t^{a_{1} \dots a_{r}}{}_{b_{1} \dots b_{s} \mu_{1} \dots \mu_{p}} \wedge \bigwedge_{k=1}^{p} \mathbf{d} x^{\mu_{k}}$$

$$(2.43)$$

und ist somit die Entkopplung der äußeren kovarianten Ableitung $\nabla \wedge$ (2.17):

$$\nabla \wedge : T^{r}_{*s} \otimes \Lambda^{p} \rightarrow T^{r}_{*s} \otimes \Lambda^{p+1}$$

$$\downarrow \quad \mathcal{C}^{-1} \qquad \downarrow \qquad (2.44)$$

$$\mathbf{D} : V^{r}_{*s} \otimes \Lambda^{p} \rightarrow V^{r}_{*s} \otimes \Lambda^{p+1}.$$

Die Entkopplung der Ableitung kommutiert mit (2.39), d.h.

$$\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{\nabla} \wedge t) = \mathbf{D} \ \mathcal{C}^{-1}(t) \qquad t \in T^r_{*s} \otimes \Lambda^p.$$
(2.45)

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens auf weitere Produkte aus V_{*s}^r und T_{*s}^r und Definition der Produkt-Ableitungen kann man Tensorproduktbündel konstruieren, die allesamt in natürlicher Weise isomorph zu den ursprünglichen Tangentialtensorbündeln sind:

$$V_{*s}^r \otimes T_{*s'}^{r'} \otimes \Lambda^p \sim T_{*(s+s')}^{r+r'} \otimes \Lambda^p.$$

Allerdings sind Kontraktionen, bei denen ja die Tensorstufe reduziert wird, zwischen V-Indizes und T- bzw. Λ -Indizes nicht mehr sinnvoll.

Die Bedeutung der Entkopplungsabbildung wird später bei der Reskalierung klar, wenn in den Tangentialanteilen eine neue Metrik und eine neue Konnexion eingeführt wird.

Das Bild des Krümmungstensors (vgl. 2.18)

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta}\vartheta_{\alpha} \otimes \theta^{\beta} \tag{2.46}$$

bezeichen wir mit $\boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{\Omega} = \mathcal{C}^{-1}(\mathbb{R}). \tag{2.47}$$

Die Krümmungs-2-Formen in natürlicher Basis

$$\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu} = \mathbf{d}\Gamma^{\mu}{}_{\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho} \wedge \Gamma^{\rho}{}_{\nu} \tag{2.48}$$

transformieren sich mit (2.23) in die **G**-orthonormale Basis

$$\Omega^{a}{}_{b} = \mathbf{d}\omega^{a}{}_{b} + \omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{c}{}_{b}$$

$$= e^{a}{}_{\mu}e_{b}{}^{\nu}\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu}.$$
(2.49)

Die Entkopplung des Krümmungstensors lautet daher

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu}\partial_{\mu} \otimes \mathbf{d}x^{\nu}$$

$$= \frac{1}{2}R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\partial_{\mu} \otimes \mathbf{d}x^{\nu} \otimes \mathbf{d}x^{\lambda} \wedge \mathbf{d}x^{\rho}$$

$$= \frac{1}{2}\Omega^{a}{}_{b\lambda\rho}\boldsymbol{e}_{a} \otimes \mathbb{E}^{b} \otimes \mathbf{d}x^{\lambda} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} \quad \in \ T^{1}_{*1} \otimes \Lambda^{2} \qquad (2.50)$$

$$\downarrow \mathcal{C}^{-1} \qquad \downarrow \mathcal{C}^{-1}$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \Omega^a{}_{b\lambda\rho} \ell_a \otimes \mathcal{L}^b \otimes \mathbf{d} x^\lambda \wedge \mathbf{d} x^\rho \qquad \in \quad V^1_{*1} \otimes \Lambda^2$$

 mit

$$\Omega^a{}_{b\lambda\rho} = e^a{}_{\mu}e^{\nu}R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} \tag{2.51}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}$$
(2.52)

Die Konnexion $\boldsymbol{\omega}$ und die Krümmung $\boldsymbol{\Omega}$ können auch als matrixwertige Formen mit den Matrixindizes a, b in (2.49) oder in (2.50) aufgefaßt werden.

Aus \mathbbm{R} lassen sich die Ricci-1-Formen

$$\mathcal{R}_{\nu} = i_{\partial_{\mu}} \mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.53}$$

mit den Komponenten

$$\mathcal{R}_{\nu\lambda} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\lambda} \tag{2.54}$$

und der Krümmungsskalar

$$R = i_{\partial_{\nu}} \mathcal{R}^{\nu} = \langle \mathcal{R}^{\nu}, \partial_{\nu} \rangle = G^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$$
(2.55)

bilden, entsprechende Kontraktionen in Ω wären nicht sinnvoll.

 $\boldsymbol{\omega}$ ist ein Yang-Mills-Eichfeld zur Eichgruppe SO(q, N-q) bzw. zur Lie-Algebra so(q, N-q). Normalerweise wird man es jedoch mit Unterkonnexionen **A** zu tun haben, die Werte in einer Unteralgebra von so(q, N-q) annehmen.

Bevor wir uns den Unteralgebren zuwenden (Abschnitt 2.3.2), werden wir dynamische Forderungen an die Konnexion $\boldsymbol{\omega}$ in Form der homogenen Yang-Mills-Gleichungen stellen und anschließend den Übergang zu einer neuen Metrik \boldsymbol{g} ("Reskalierung") diskutieren. Es ist nämlich zu zeigen, daß die Projektion auf Unterkonnexionen mit dem Reskalierungsschritt verträglich ist.

2.2 Yang-Mills-Gleichungen

Metrik und Konnexion des Raums sollen nun folgende Gleichung erfüllen:

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \overset{(G)}{\star} \mathbb{R} = 0. \tag{2.56}$$

Der Hodge-Star $\stackrel{(G)}{\star}$ zur Metrik G wirkt hier nur auf den 2-Form-Anteil der Krümmung $\mathbb{R} \in T^1_{*1} \otimes \Lambda^2$, die Riemann-Cartan-Konnexion Γ steckt sowohl in der äußeren kovarianten Ableitung $\nabla \wedge$ als auch im Krümmungstensor \mathbb{R} . Konnexion und Metrik sind im allgemeinen bis auf die Metrizitätsbedingung (2.14) unabhängig voneinander.

Durch die im vorigen Abschnitt definierten Entkopplungsabbildungen (2.50) und (2.44) folgt aus (2.56) unmittelbar die Gleichung

$$\mathbf{D}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} = 0, \qquad (2.57)$$

das heißt (2.56) ist nichts anderes als die mit der Kopplungsabbildung C ins Tangentialbündel transportierte Yang-Mills-Gleichung (2.57) für ω

$$\mathbf{\nabla} \wedge \overset{(G)}{\star} \mathbb{R} = \mathcal{C}(\mathbf{D}\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega}) = 0.$$

Um die Struktur der Gleichungen besser zu erkennen ist es sinnvoll, verschiedene Darstellungen zu diskutieren. Dazu wird zunächst die eichkovariante Ableitung in Gleichung (2.57) berechnet.

Zerlegt man die (N-2)-Form $\stackrel{(G)}{\star} \! \Omega$ in die Komponentendarstellung

$$\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega} = \ell_a \otimes \mathcal{L}^b \otimes \frac{1}{(N-2)!} (\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega})^a{}_{b\mu_3\dots\mu_N} \bigwedge_{i=3}^N \mathbf{d} x^{\mu_i}, \qquad (2.58)$$

dann folgt durch Anwendung der Produktregeln (2.40, 2.38) und der Basisregeln

(2.36, 2.37) aus(2.57)

$$\mathbf{D}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} = \left(\mathbf{D}_{\partial_{\lambda}} \left(\ell_{a} \otimes \mathcal{L}^{b} \right) \right) \otimes \mathbf{d}x^{\lambda} \wedge \frac{1}{(N-2)!} \begin{pmatrix} {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}^{a}{}_{b\mu_{3}...\mu_{N}} \bigwedge_{i=3}^{N} \mathbf{d}x^{\mu_{i}} \\ + \ell_{a} \otimes \mathcal{L}^{b} \otimes \mathbf{d} \left(\frac{1}{(N-2)!} \begin{pmatrix} {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}^{a}{}_{b\mu_{3}...\mu_{N}} \bigwedge_{i=3}^{N} \mathbf{d}x^{\mu_{i}} \right) \\ = \ell_{a} \otimes \mathcal{L}^{b} \otimes \frac{1}{(N-2)!} \left[\boldsymbol{\omega}^{a}{}_{c} \wedge \begin{pmatrix} {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}^{c}{}_{b\mu_{3}...\mu_{N}} \bigwedge_{i=3}^{N} \mathbf{d}x^{\mu_{i}} \\ - \boldsymbol{\omega}^{c}{}_{b} \wedge \begin{pmatrix} {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}^{a}{}_{c\mu_{3}...\mu_{N}} \bigwedge_{i=3}^{N} \mathbf{d}x^{\mu_{i}} \\ + \mathbf{d} \begin{pmatrix} {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}^{a}{}_{b\mu_{3}...\mu_{N}} \wedge \bigwedge_{i=3}^{N} \mathbf{d}x^{\mu_{i}} \right].$$

$$(2.59)$$

Nach Durchtauschen der 1-Form $\boldsymbol{\omega}^{c}{}_{b}$ in der vorletzten Zeile wird daraus

$$\mathbf{D}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} = \ell_a \otimes \mathcal{L}^b \otimes \frac{1}{(N-2)!} \left[\boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge (\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega})^c{}_{b\mu_3 \dots \mu_N} \bigwedge_{i=3}^N \mathbf{d} x^{\mu_i} - (-1)^N (\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega})^a{}_{c\mu_3 \dots \mu_N} \bigwedge_{i=3}^N \mathbf{d} x^{\mu_i} \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b + \mathbf{d} (\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega})^a{}_{b\mu_3 \dots \mu_N} \wedge \bigwedge_{i=3}^N \mathbf{d} x^{\mu_i} \right]$$

$$= 0.$$
(2.60)

Die Gleichung wird übersichtlicher, wenn die Indizes a, b, c zur Basis $\ell_a \otimes \mathcal{L}^b$ als Matrixindizes aufgefaßt werden. Als Matrixgleichung geschrieben lautet (2.60)

$$\mathbf{d}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} - (-1)^{N} {}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} = 0.$$
(2.61)

Die Yang-Mills-Gleichung (2.57,2.61) ist äquivalent zu

$$\overset{(G)}{\star} \mathbf{D} \overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega} = 0. \tag{2.62}$$

Die Komponenten dieser Gleichung findet man durch Anwenden des Hodge-Star-Operators $\overset{(G)}{\star}$ auf (2.59):

$$\partial_{\mu}\Omega^{a}{}_{b}^{\mu\nu} + \omega^{a}{}_{c\mu}\Omega^{c}{}_{b}^{\mu\nu} - \omega^{c}{}_{b\mu}\Omega^{a}{}_{c}^{\mu\nu} + \Gamma(\boldsymbol{G})^{\mu}{}_{\lambda\mu}\Omega^{a}{}_{b}^{\lambda\nu} + \Gamma(\boldsymbol{G})^{\nu}{}_{\lambda\mu}\Omega^{a}{}_{b}^{\mu\lambda} = 0.$$

$$(2.63)$$

Die in $D^{(G)}_{\star}$ auftretenden Ableitungen der Metrik G wurden hierbei mit Hilfe der Levi-Civita-Konnexion $\Gamma(G)$ (Christoffel-Symbole) (2.32) ausgedrückt. Die $\Gamma(G)$ -Terme können mit der partiellen Ableitung ∂_{μ} zur kovarianten Ableitung $\nabla(G)_{\mu}$ zusammengefaßt werden, so daß (2.63) übergeht in

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{G})_{\mu}\Omega^{a}{}_{b}{}^{\mu\nu} + \omega^{a}{}_{c\mu}\Omega^{c}{}_{b}{}^{\mu\nu} - \Omega^{a}{}_{c}{}^{\mu\nu}\omega^{c}{}_{b\mu} = 0, \qquad (2.64)$$

wobei $\nabla(\mathbf{G})_{\mu}$ nur auf die Formenindizes μ, ν wirkt.

Unterdrückt man wieder die Matrix
indizes a,b,c, dann erhält man die traditionelle Gestalt der homogen
en Yang-Mills-Gleichungen in einem Raum mit Metrik ${\pmb G}$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{G})_{\mu}\Omega^{\mu\nu} + [\omega_{\mu}, \Omega^{\mu\nu}] = 0.$$
(2.65)

Durch die Forderung (2.56) sind also die Yang-Mills-Gleichungen (2.57) bzw. (2.65) zum SO(q, N-q)-Eichfeld $\omega^a{}_{b\mu}$ identisch erfüllt.

Da die Entkopplungsabbildungen invertierbar sind, kann man auch umgekehrt argumentieren:

Die Yang-Mills-Gleichungen können immer isomorph ins Tangentialbündel abgebildet werden, wenn die Eichgruppe die SO(q, N - q) oder eine Untergruppe davon ist.

So kann zum Beispiel ein SO(3)-Eichfeld über eine Einbettung in die SO(4) oder in die Lorentzgruppe SO(1,3) sowohl bei euklidischer als auch bei Minkowskischer Signatur als eine metrische Unterkonnexion des Tangentialraums aufgefaßt werden. (Generell wird natürlich die Existenz der Metrik \boldsymbol{G} vorausgesetzt.) Bei Materiefeldern (siehe 4.1) ist zusätzlich die Darstellung zu berücksichtigen. (Zu Unterkonnexionen siehe auch Abschnitt 2.3.2.)

Gleichung (2.56) ist äquivalent zu

$$\overset{(G)}{\star} \nabla \wedge \overset{(G)}{\star} \mathbb{R} = 0 \tag{2.66}$$

oder in Komponenten einer natürlichen Basis (die Indizes α, β, γ können auch auf eine beliebige Basis bezogen werden)

$$\partial_{\mu}R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu}R^{\gamma}{}_{\beta}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu}R^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\mu\nu} + \Gamma(\boldsymbol{G})^{\mu}{}_{\lambda\mu}R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\lambda\nu} + \Gamma(\boldsymbol{G})^{\nu}{}_{\lambda\mu}R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu\lambda} = 0.$$

$$(2.67)$$

Man beachte, daß Γ und $\Gamma(\mathbf{G})$ im allgemeinen nicht übereinstimmen müssen. Die Levi-Civita-Konnexionskoeffizienten $\Gamma(\mathbf{G})$ kommen hier durch die Wirkung von $\mathbf{d}^{(G)}_{\star}$

(in der Ableitung $\nabla \wedge \overset{(G)}{\star} (2.56)$) im Raum der Formen ins Spiel, unabhängig von der metrischen Konnexion Γ des Tangentialraums.

Jedoch ist der Spezialfall der Riemannschen Geometrie mit Levi-Civita-Konnexion im Tangentialraum besonders einfach und daher besonders gut für geometrische Untersuchungen von Eichfeldern geeignet. In diesem Fall wird $\Gamma = \Gamma(\mathbf{G})$ in (2.67) und in (2.48) und (2.56) nimmt somit die einfache Gestalt

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{G})^{\mu} R(\boldsymbol{G})^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} = 0$$
(2.68)

an, wobei nun alle Indizes von $R({\pmb G})^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$ gleich behandelt werden.

Diese Gleichung wird in späteren Kapiteln der Ausgangspunkt zur Konstruktion expliziter Yang-Mills-Lösungen werden.
2.2.1 Produkträume - das dimensionale Superpositionsprinzip

Wie in diesem Abschnitt gezeigt wird, haben die in den Tangentialraum abgebildeten Yang-Mills-Gleichungen eine interessante Eigenschaft:

Bildet man die Produktmannigfaltigkeit aus zwei Räumen, dann ist die direkte Summe zweier Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen eine Lösung auf der Produktmannigfaltigkeit.

Dadurch unterscheiden sich die Yang-Mills-Gleichungen fundamental von den Einstein-Gleichungen. Außerdem ist dieses "dimensionale Superpositionsprinzip" hilfreich für die Konstruktion und die geometrische Untersuchung von Yang-Mills-Lösungen.

Für das praktische Rechnen definieren wir zunächst Komponentenregeln für ein Produkt $X^N = \overline{X}^{\overline{n}} \times \overline{X}^{+\overline{n}}$ zweier Mannigfaltigkeiten $\overline{X}^{\overline{n}}$ und $\overset{+}{X}^{+\overline{n}}$ der Dimensionen \overline{n} und $\overset{+}{n}$ (Gesamtdimension $N = \overline{n} + \overset{+}{n}$).

Sei in den Tangentialräumen von $X^{\pm n} \bar{n}^{\pm}$ jeweils eine Basis $\bar{\vartheta}'_i (i = 1 \dots \bar{n})$ und $\bar{\vartheta}'_I (I = \bar{n} + 1 \dots \bar{n} + n)$ gegeben. Die Indexbereiche wurden bereits so gewählt, daß die Zuordnung der Indizes zu den Unterräumen eindeutig ist.

Im Produktraum definieren wir für den gesamten Bereich $1 \dots N$:

$$\bar{\vartheta}_{\alpha} = \begin{cases} \bar{\vartheta}_{\alpha}' & \text{für } \alpha = 1 \dots \bar{n} \\ 0 & \text{für } \alpha = (\bar{n}+1) \dots N \end{cases}$$

$$\stackrel{+}{\vartheta}_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = 1 \dots \bar{n} \\ \frac{+'}{\vartheta_{\alpha}}' & \text{für } \alpha = (\bar{n}+1) \dots N \end{cases}$$
(2.69)

Zusammen bilden $\bar{\vartheta}_{\alpha}$ und $\overset{+}{\vartheta}_{\alpha}$ eine Gesamtbasis ϑ_{α} für den Tangentialraum von X^N :

$$\vartheta_{\alpha} = \bar{\vartheta}_{\alpha} \oplus \overset{+}{\vartheta}_{\alpha} = \begin{cases} \bar{\vartheta}_{\alpha} & \text{für } \alpha = 1 \dots \bar{n} \\ \\ \\ \\ \\ \vartheta_{\alpha} & \text{für } \alpha = (\bar{n} + 1) \dots N \end{cases}$$
(2.70)

Für die Kobasisfelder $\overset{\pm}{\theta}{}^{\alpha}$ gilt entsprechendes. Auch für Tensorkomponenten bezüglich dieser Basissysteme wird im folgenden diesselbe Notation verwendet, d.h. die Indizes werden auf den Bereich $1 \dots N$ ausgedehnt, indem überflüssige Komponenten gleich Null gesetzt werden.

Die Metrik des Gesamtraums

$$\boldsymbol{G} = \bar{\boldsymbol{G}} \oplus \bar{\boldsymbol{G}}$$
 (2.71)

hat in dieser Notation am Punkt $x = (\bar{x}, \bar{x})$ die Komponenten

$$G_{\mu\nu}(x) = \bar{G}_{\mu\nu} (\bar{x}) \oplus \overset{+}{G}_{\mu\nu} (\overset{+}{x})$$

$$(2.72)$$

zu einer natürlichen Gesamtbasis $\bar{\partial}_{\mu} \oplus \overset{+}{\partial}_{\mu}$. In Matrix
notation bedeutet das

$$oldsymbol{G} = egin{pmatrix} ar{oldsymbol{G}} & 0 \ 0 & 0 \end{pmatrix} + egin{pmatrix} 0 & 0 \ + \ 0 & oldsymbol{G} \end{pmatrix}$$

Die Inverse ist

$$G^{\mu\nu}(x) = \bar{G}^{\mu\nu}(\bar{x}) \oplus \bar{G}^{\mu\nu}(\bar{x}).$$

Man überlegt sich nun, daß folgende Regeln für die direkten Summen gelten:

$$\frac{(\bar{t} \oplus \bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}}{(\bar{t} \oplus \bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}} + (\bar{s} \oplus \bar{s})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}}{\beta_{1}...\beta_{s}} = (\bar{t} + \bar{s})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}}{(\bar{t} \oplus \bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}} \oplus (\bar{t} + \bar{s})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}}{\beta_{1}...\beta_{s}} \oplus (\bar{t} + \bar{s})^{\alpha_{1}...\beta_{s}}}{\beta_{1}...\beta_{s}} \oplus (\bar{t} + \bar{s})^{\alpha_{1}...\beta_{s}}}{\beta_{1}...\beta_{s}}}{\beta_{1}...\beta_{s}} \oplus (\bar{t} + \bar{s})^{\alpha_{1}...\beta_$$

$$(\bar{\partial}_{\mu} \oplus \bar{\partial}_{\mu}) \left((\bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}{}_{\beta_{1}...\beta_{s}}(\bar{x}) \oplus (\bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}{}_{\beta_{1}...\beta_{s}}(\bar{x}) \right)$$

$$= \bar{\partial}_{\mu} (\bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}{}_{\beta_{1}...\beta_{s}}(\bar{x})$$

$$\oplus \bar{\partial}_{\mu} (\bar{t})^{\alpha_{1}...\alpha_{r}}{}_{\beta_{1}...\beta_{s}}(\bar{x}).$$

$$(2.73)$$

Bei der letzten Regel ist wesentlich, daß die Teilkomponenten \pm nur von den jeweiligen Unterraum-Koordinaten abhängen. Die beiden ersten Regeln könnten zum Beispiel auf Terme der Form $\overline{\sigma}(\bar{x}, \dot{x}) \ \bar{t} \ (x) + \dot{\sigma}(\bar{x}, \dot{x}) \ \dot{t} \ (x)$ ausgedehnt werden. Das Zeichen \oplus für die direkte Summe wird in den Komponentenformeln nur zur Verdeutlichung beibehalten und könnte etwa auf der rechten Seite von (2.73) durch + ersetzt werden. Die Gesamtkonnexion definieren wir durch die Komponenten

In Formenschreibweise:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda} = \bar{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\lambda} \oplus \bar{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\lambda}.$$
(2.74)

Man überzeugt sich mit Hilfe der Regeln (2.73), daß dies für die Levi-Civita-Konnexion (2.32) bereits aus der Definition der Gesamtmetrik (2.72) folgt, d.h.

$$\Gamma(\boldsymbol{G})^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \Gamma(\bar{\boldsymbol{G}})^{\mu}{}_{\nu\lambda} \oplus \Gamma(\bar{\boldsymbol{G}})^{\mu}{}_{\nu\lambda}.$$
(2.75)

Daraus folgt weiter, daß auch Krümmungstensor, Riccitensor und Krümmungsskalar Summen sind:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \oplus \dot{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$$

$$\mathcal{R}_{\beta\nu} = \bar{\mathcal{R}}_{\beta\nu} \oplus \dot{\mathcal{R}}_{\beta\nu}$$

$$R = \bar{R} + \dot{\bar{R}} .$$

$$\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta} = \bar{\mathbb{R}}^{\alpha}{}_{\beta} \oplus \ddot{\mathbb{R}}^{\alpha}{}_{\beta}$$

$$\mathcal{R}_{\beta} = \bar{\mathcal{R}}_{\beta} \oplus \dot{\mathcal{R}}_{\beta}$$

$$(2.76)$$

$$(2.77)$$

$$R = \bar{R} + \bar{R}^+.$$

Wir nehmen nun an, daß in den Teilräumen $\overset{\pm}{X}\overset{\pm}{\overset{n}{n}}$ die Yang-Mills-Gleichungen

$$\mathbf{D}^{(\overset{\pm}{n})} \stackrel{(\pm)}{\star} \stackrel{\pm}{\mathbf{\Omega}} = 0 \tag{2.78}$$

mit $\overset{\pm}{n}$ -dimensionalen eichkovarianten Ableitungen $\mathbf{D}^{(\overset{\pm}{n})}$, Unterraum-Hodge-Stars $\overset{(\pm)}{\star}$ zu $\overset{\pm}{\mathbf{G}}$ und mit passenden Eichgruppen $\subset SO(\overset{\pm}{q}, \overset{\pm}{n} - \overset{\pm}{q})$ erfüllt sind, so daß Abbildungen in die Tangentialbündel nach Abschnitt 2.2 möglich sind.

Dann gelten in jedem der beiden Teilräume die Gleichungen (2.67), d.h.

$$\begin{aligned} \stackrel{\pm}{\partial}_{\mu} \stackrel{\pm}{R}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu\nu} &+ \stackrel{\pm}{\Gamma}^{\alpha}{}_{\gamma\mu} \stackrel{\pm}{R}^{\gamma}{}_{\beta}{}^{\mu\nu} - \stackrel{\pm}{\Gamma}^{\gamma}{}_{\beta\mu} \stackrel{\pm}{R}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\mu\nu} \\ &+ \Gamma(\stackrel{\pm}{\boldsymbol{G}})^{\mu}{}_{\lambda\mu} \stackrel{\pm}{R}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\lambda\nu} + \Gamma(\stackrel{\pm}{\boldsymbol{G}})^{\nu}{}_{\lambda\mu} \stackrel{\pm}{R}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

$$(2.79)$$

Durch Addition der Gleichungen (2.79) für oberes und unteres Vorzeichen und Anwenden der Summenregeln (2.73) sieht man, daß die Gesamtkonnexion (2.74) ebenfalls die Gleichung (2.67), jedoch auf der Produktmannigfaltigkeit, erfüllt. Durch Entkopplung der mit $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ verbundenen kovarianten Ableitung $\boldsymbol{\nabla}$ im Gesamtraum erhält man wieder eine eichkovariante Ableitung \boldsymbol{D} beziehungsweise Yang-Mills-Konnexionsformen $\boldsymbol{\omega}$, so daß die N-dimensionalen Yang-Mills-Gleichungen (2.57) erfüllt sind. Die Eichgruppe ist nun $SO(\bar{q},\bar{n}-\bar{q})\times SO(\overset{+}{q},\overset{+}{n}-\overset{+}{q})$. Die Orthonormalbasen können dabei so gewählt werden, daß auch die Yang-Mills-Eichfelder $\boldsymbol{\omega}$ addiert werden dürfen:

$$\omega^a{}_{b\mu} = \stackrel{-}{\omega}{}^a{}_{b\mu} \oplus \stackrel{+}{\omega}{}^a{}_{b\mu}, \qquad (2.80)$$

konsistent mit (2.63).

Damit haben wir gezeigt:

Sind zwei Lösungen der homogenen Yang-Mills-Gleichungen in $\overline{X}^{\overline{n}}$ und $\overline{X}^{\overline{n}}$ gegeben und sind diese durch Kopplungsabbildungen isomorph in die Tangentialbündel der Teilräume abbildbar, dann erhält man durch Summenbildung eine neue Lösung der

homogenen Yang-Mills-Gleichungen auf dem Gesamtraum $X^N = \overline{X}^{\overline{n}} \times X^{+\overline{n}}$.

Es gilt also trotz Nichtlinearität der Yang-Mills-Gleichungen eine Art Superpositionsprinzip !

Daß dieses "dimensionale Superpositionsprinzip" für physikalische Gleichungen keinesfalls selbstverständlich ist, soll hier am Beispiel der materiefreien Einstein-Gleichungen mit beliebigem kosmologischen Glied Λ_c demonstriert werden. Für die Einstein-Gleichungen nehmen wir die Levi-Civita-Konnexion an.

Seien die niederdimensionalen Einstein-Gleichungen $(\stackrel{\pm}{n} \ge 1)$

$${}^{\pm}_{\mathcal{R}\mu\nu} + ({}^{\pm}_{\Lambda_c} - \frac{1}{2} \, {}^{\pm}_{R}) \, {}^{\pm}_{G_{\mu\nu}} = 0 \tag{2.81}$$

erfüllt, dann erhält man durch Einsetzen der bekannten Summen (2.76) in die Einstein-Gleichungen des Gesamtraums

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} + (\Lambda_c - \frac{1}{2}R)G_{\mu\nu} = 0$$
(2.82)

die Zerlegung

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \oplus \overset{+}{\mathcal{R}}_{\mu\nu} + (\Lambda_c - \frac{1}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \overset{+}{R})(\bar{G}_{\mu\nu} \oplus \overset{+}{G}_{\mu\nu}) \\ = \underbrace{\bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} + (\bar{\Lambda}_c - \frac{1}{2} \bar{R}) \bar{G}_{\mu\nu}}_{0} \oplus \underbrace{\overset{+}{\mathcal{R}}_{\mu\nu} + (\overset{+}{\Lambda}_c - \frac{1}{2} \overset{+}{R}) \overset{+}{G}_{\mu\nu}}_{0} \\ + (\Lambda_c - \overset{+}{\Lambda}_c - \frac{1}{2} \bar{R}) \overset{+}{G}_{\mu\nu} + (\Lambda_c - \bar{\Lambda}_c - \frac{1}{2} \overset{+}{R}) \bar{G}_{\mu\nu} \\ = 0. \end{aligned}$$

Da die $\overset{\pm}{G}_{\mu\nu}$ nicht verschwinden, sind die Einstein-Gleichungen im Gesamtraum nur dann erfüllt, wenn

$$\Lambda_c = \stackrel{+}{\Lambda_c} + \frac{1}{2} \bar{R} = \bar{\Lambda}_c + \frac{1}{2} \stackrel{+}{R} = \text{const.}$$
(2.83)

Das ist im allgemeinen nicht erfüllt. Gegenbeispiele sind die Räume $S^{\overline{n}}(\rho) \times R^1$ mit der üblichen Kugelmetrik für $S^{\overline{n}}(\rho)$ und dem flachen eindimensionalen Raum R^1 der reellen Zahlen ("Zeitrichtung").

Die $\bar{n}\text{-dimensionale}$ Sphäre mit Radius ρ erfüllt die Einstein-Gleichungen mit kosmologischem Glied

$$\bar{\Lambda}_c = \frac{1}{\rho^2} (\frac{\bar{n}}{2} - 1)(\bar{n} - 1)$$

und

$$\bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \frac{1}{\rho^2}(\bar{n}-1) \, \bar{G}_{\mu\nu}$$
$$\bar{R} = \frac{1}{\rho^2}\bar{n}(\bar{n}-1).$$

Für den R^1 -Anteil verschwindet die Krümmung formal $(\stackrel{+}{R}=0,\stackrel{+}{\Lambda}_c=0)$, also ist das Produkt $S^{n}(\rho) \times R^1$ keine Lösung der materiefreien Einstein-Gleichungen.

Mit geeignetem Energie-Impuls-Tensor gibt es jedoch Einstein-Lösungen für $S^3 \times R^1$ [28]. Dieser Raum mit R^1 als Zeitrichtung wird als "Einsteins statisches Universum" bezeichnet .

2.2.2 Zusammenhang zwischen Einstein- und Yang-Mills-Gleichungen

Die Tatsache, daß für die Yang-Mills-Gleichungen das dimensionale Superpositionsprinzip gilt, für die Einstein-Gleichungen im allgemeinen jedoch nicht, ist umso interessanter, als folgender Zusammenhang zwischen diesen Gleichungen besteht:

Aus jeder Lösung der materiefreien Einstein-Gleichungen der Dimension $N \neq 2$ mit einer beliebigen kosmologischen Konstanten Λ_c erhält man durch die Entkopplungsabbildung eine Lösung der homogenen Yang-Mills-Gleichungen.

Beweis: Durch Kontraktion folgt aus (2.82)

$$R \left(1 - \frac{N}{2}\right) + \Lambda_c N = 0 \tag{2.84}$$

und damit die Konstanz des Krümmungsskalars R für $N \neq 2$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\lambda} R = \partial_{\lambda} R = 0. \tag{2.85}$$

Dann folgt aus den Einstein-Gleichungen (2.82) auch

$$\boldsymbol{\nabla}_{\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.86}$$

Da wir für die Einstein-Gleichungen den torsionsfreien Fall vorausgesetzt hatten, lauten die Bianchi-Identitäten [16]

$$\boldsymbol{\nabla}_{\lambda}R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \boldsymbol{\nabla}_{\mu}R^{\rho}{}_{\sigma\nu\lambda} + \boldsymbol{\nabla}_{\nu}R^{\rho}{}_{\sigma\lambda\mu} = 0.$$
(2.87)

Durch Kontraktion über ρ,λ und mit der Konstanz des Riccitensors (2.86) erhält man

$$\boldsymbol{\nabla}_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = 0, \qquad (2.88)$$

was wegen $\nabla_{\lambda} = \nabla(G)_{\lambda}$ und aufgrund der Symmetrie

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

mit (2.68) übereinstimmt, also Yang-Mills-Lösungen liefert.

Im eindimensionalen Fall N = 1 sind Yang-Mills- und Einstein-Gleichungen (mit $\Lambda_c = 0$) trivialerweise erfüllt, da dann sämtliche Krümmungen verschwinden. Bei N = 2 Dimensionen gilt die Folgerung nicht, denn in diesem Fall werden die Krümmungs-2-Formen

$$\mathbb{R}^{\mu\nu} = K(x)\mathbf{d}x^{\mu}\wedge\mathbf{d}x^{\nu}$$

mit einer Funktion K(x), in Tensorkomponenten

$$R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho} = K(x)(G^{\mu}_{\lambda}G^{\nu}_{\rho} - G^{\mu}_{\rho}G^{\nu}_{\lambda}).$$

Damit ist (2.82) mit $\Lambda_c = 0$ immer erfüllt, während (2.68) genau für K(x) = K = const. gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zusammen mit den Überlegungen zur Produktraumbildung wurde damit folgender bemerkenswerte Zusammenhang gezeigt:

Aus zwei Lösungen der materiefreien Einstein-Gleichungen mit einer beliebigen kosmologischen Konstanten erhält man im allgemeinen <u>keine</u> Einstein-Lösung im Produktraum, wohl aber (außer für 2-dimensionale Faktoren) eine neue Lösung der Yang-Mills-Gleichungen !

Symbolisch kann man das etwa folgendermaßen darstellen:

Aus der obigen Argumentation geht auch hervor, daß die Konstanz des Riccitensors (2.86) hinreichend ist für (2.68).

2.3 Allgemeine Reskalierung

Wir werden nun eine zweite Metrik g einführen und die Auswirkungen auf die Yang-Mills-Gleichungen untersuchen.

2.3.1 Einführung der neuen Metrik g

Der Übergang zu einer neuen Metrik ist insbesondere dann notwendig, wenn in den vorigen Abschnitten der einfachere Spezialfall der Levi-Civita-Konnexion zur Konstruktion von Yang-Mills-Lösungen verwendet werden soll.

In diesem Fall ist die Metrik G fest mit den Eichfeldern verbunden und kann nicht unabhängig zur Beschreibung der Gravitation verwendet werden. Die "Zielmetrik" g dagegen soll entweder durch die allgemeine Relativitätstheorie bestimmt oder anderweitig vorgebbar sein und den eigentlichen Hintergrund für die Yang-Mills-Gleichungen bilden. Im einfachsten Fall wird g die Metrik des flachen Raums.

Falls zusätzlich eine kovariante Ableitung ∇ im Tangentialraum zur Gravitationswechselwirkung benötigt wird, sollte auch diese unabhängig von den Eichfeldern der Yang-Mills-Theorie wählbar sein.

Wir führen daher in den Tangentialraumanteilen $T_{*s'}^{r'} \otimes \Lambda^p$ die neue Metrik \boldsymbol{g} und eine neue \boldsymbol{g} -metrische Konnexion zur kovarianten Ableitung $\hat{\boldsymbol{\nabla}}$ ein, während in den V-Anteilen die alte Struktur beibehalten wird. Diese Zuordnung bezeichnen wir als Reskalierung:

Reskalierung

Für g und G setzen wir gleiche Signatur voraus.

Für die homogenen Yang-Mills-Gleichungen ist es ausreichend, nur den Levi-Civita-Fall $\hat{\nabla} = \nabla(g)$ (= Levi-Civita-Konnexion zur Metrik g) zu betrachten, so daß durch Angabe der Metrik g auch die neue kovariante Ableitung definiert ist. Die Reskalierung \aleph kann als weitere Bündelabbildung von einer Mannigfaltigkeit mit Metrik ${\pmb G}$ auf eine Mannigfaltigkeit mit Metrik ${\pmb g}$ aufgefaßt werden, wobei Basisraum und Fasern identisch abgebildet werden.

Für die Abbildung der Metrik am Punkt x schreiben wir vereinfacht

$$\boldsymbol{g}(x) = \aleph_x(\boldsymbol{G}(x)). \tag{2.89}$$

Ein Spezialfall ist die konforme Reskalierung oder Weyl-Reskalierung $\boldsymbol{g} = \sigma^2 \boldsymbol{G}$ (siehe Abschnitt 2.3.4).

Die Abbildung \aleph ist, was kovariante Ableitung und Metrik betrifft, im allgemeinen kein Isomorphismus mehr. Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen (2.57) zur Metrik \boldsymbol{G} lassen sich nicht ohne weiteres auf die neue Metrik \boldsymbol{g} übertragen.

Stellt man jedoch zusätzlich die Forderung

$$\mathbf{D}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} = \mathbf{D}^{(g)}_{\star} \mathbf{\Omega}, \qquad (2.90)$$

dann gewinnt man aus (2.57) eine Lösung auf dem Raum mit neuer Metrik g:

$$\mathbf{D}^{(g)}_{\star} \mathbf{\Omega} = 0. \tag{2.91}$$

Eine einfachere, hinreichende Bedingung für (2.90) wird in Abschnitt 2.3.3 gegeben.

2.3.2 Projektion auf Unteralgebren

Führt man die bisher beschriebenen Schritte der Entkopplung und Reskalierung zum Beispiel für einen vierdimensionalen Riemannschen Raum mit positiver Signatur durch, dann erhält man ein SO(4)-Eichfeld der Yang-Mills-Theorie. Aus physikalischen Gründen ist man jedoch eher an SU(2)-Feldern interessiert, da die SU(2) als Untergruppe der $U(1) \times SU(2)$ in der elektroschwachen Wechselwirkung und als Untergruppe der SU(3) in der starken Wechselwirkung auftritt.

Tatsächlich lassen sich aus SO(4)-Lösungen immer SU(2)-Lösungen erzeugen, denn etwas allgemeiner gilt:

Falls sich die Lie-Algebra der Yang-Mills-Konnexion in eine direkte Summe von Unteralgebren zerlegen läßt, erhält man zwei weitere Lösungen durch Projektion auf diese Anteile.

Sei die Lie-Algebra \mathcal{G} aufteilbar in

$$\mathcal{G}=\stackrel{-}{\mathcal{G}}\oplus\stackrel{+}{\mathcal{G}}$$

mit einer Matrixdarstellung der Generatoren

$$\bar{Z}^i \in \bar{\mathcal{G}} \quad (i = 1...\dim(\bar{\mathcal{G}})) \qquad , \qquad \bar{Z}^I \in \bar{\mathcal{G}} \quad (I = 1...\dim(\bar{\mathcal{G}}))$$

und den Kommutatorrelationen

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}^i & \bar{Z}^I \end{bmatrix} = 0.$$
 (2.92)

(Die Indizes i, j, I, J haben in diesem Abschnitt eine andere Bedeutung als im Abschnitt 2.2.1.)

Zerlegt man die Konnexion $\boldsymbol{\omega}$ als matrixwertige 1-Form in die Unterkonnexionen

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}$$

$$= \underbrace{\lim_{i=1}^{\dim(\bar{\mathcal{G}})} \bar{\mathbf{A}}_i \bar{Z}^i}_{\in \bar{\mathcal{G}}} + \underbrace{\lim_{I=1}^{\dim(\mathcal{G})} \bar{\mathbf{A}}_I \bar{Z}^I}_{\in \bar{\mathcal{G}}} + \underbrace{\sum_{I=1}^{\dim(\mathcal{G})} \bar{\mathbf{A}}_I \bar{Z}^I}_{\in \bar{\mathcal{G}}}$$

$$(2.93)$$

dann folgt daraus für die Krümmungsmatrix mit Hilfe von (2.92)

$$\begin{split} \Omega &= \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \\ &= \underbrace{(\mathbf{d} \ \bar{\mathbf{A}}_i) \ \bar{Z}^i + \bar{\mathbf{A}}_i \wedge \bar{\mathbf{A}}_j \ \frac{1}{2} [\bar{Z}^i, \bar{Z}^j]}_{\bar{\mathbf{F}} \in \bar{\mathcal{G}}} + \underbrace{(\mathbf{d} \ \bar{\mathbf{A}}_I) \ \bar{Z}^I + \bar{\mathbf{A}}_I \wedge \bar{\mathbf{A}}_J \ \frac{1}{2} [\bar{Z}^I, \bar{Z}^J]}_{\bar{\mathbf{F}} \in \bar{\mathcal{G}}} \\ &+ \bar{\mathbf{A}}_i \wedge \bar{\mathbf{A}}_I \ \underbrace{[\bar{Z}^i, \bar{Z}^I]}_{0} \end{split}$$

Die Projektion der Krümmung in die $\overset{\pm}{\Bar{\mathcal{G}}}\mbox{-}Unterräume$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\bar{F}} + \mathbf{\bar{F}} \tag{2.94}$$

stimmt also mit den Krümmungen zu $\overset{\pm}{\mathbf{A}}$ überein:

$$\stackrel{\pm}{\mathbf{F}} = \mathbf{d} \stackrel{\pm}{\mathbf{A}} + \stackrel{\pm}{\mathbf{A}} \wedge \stackrel{\pm}{\mathbf{A}} . \tag{2.95}$$

Der Hodge-Star wirkt nur auf den Formenanteil, nicht auf die Liealgebrageneratoren, so daß sich die duale Krümmungsform ebenfalls zerlegen läßt in

$$\overset{(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \overset{(g)}{\star} \bar{\mathbf{F}}_i \end{pmatrix} \bar{Z}^i + \begin{pmatrix} \overset{(g)}{\star} \bar{\mathbf{F}}_I \end{pmatrix} \bar{Z}^I$$

$$= \overset{(g)}{\star} \bar{\mathbf{F}} + \overset{(g)}{\star} \bar{\mathbf{F}} .$$

$$(2.96)$$

Aus den Yang-Mills-Gleichungen (2.91) folgt mit der Zerlegung (2.96) und mit den Kommutatorrelationen (2.92)

$$\mathbf{D}^{(g)}_{\star} \mathbf{\Omega} = \mathbf{d}^{(g)}_{\star} \mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega} - (-1)^{N} \overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$$

$$= \underbrace{\mathbf{d}^{(g)}_{\star} \mathbf{F} + \mathbf{A} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{F} - (-1)^{N} \overset{(g)}{\star} \mathbf{F} \wedge \mathbf{A}}_{\in \mathbf{G}} + \underbrace{\mathbf{d}^{(g)}_{\star} \mathbf{F} + \mathbf{A} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{F} - (-1)^{N} \overset{(g)}{\star} \mathbf{F} \wedge \mathbf{A}}_{\in \mathbf{G}}$$

$$= 0.$$

Diese Summe kann nur dann verschwinden, wenn die beiden linear unabhängigen Faktoren in den Unteralgebren je für sich verschwinden. Daraus folgt die Gültigkeit der Yang-Mills-Gleichungen in den Unteralgebren $\overset{\pm}{\mathcal{G}}$:

$$\overset{\pm}{\mathbf{D}} \overset{(g)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}} = \mathbf{d}^{(g)}_{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}} + \overset{\pm}{\mathbf{A}} \wedge \overset{(g)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}} - (-1)^{N} \overset{(g)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}} \wedge \overset{\pm}{\mathbf{A}} = 0.$$
(2.97)

Man erhält damit für $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{+}$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-}$ Lösungen der homogenen Yang-Mills-Gleichungen (1.20). Im Gegensatz zur Produktraumbildung in Abschnitt 2.2.1 bleibt hier die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit unangetastet, projiziert wird nur in der Liealgebra. Die projizierten Lösungen von (2.97) leben also wie (2.91) im N-dimensionalen Raum.

Der Unterschied wird besonders deutlich, wenn man die Projektion einer Yang-Mills-Lösung betrachtet, die ursprünglich aus einem Produktansatz nach Abschnitt 2.2.1 stammt.

Spezialfall 1: $\mathcal{G} = so(\bar{q}, \bar{n} - \bar{q}) \oplus so(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$

Für den Produktansatz aus Abschnitt 2.2.1 erhielten wir eine Konnexion zur Summenalgebra $so(\bar{q}, \bar{n} - \bar{q}) \oplus so(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$, entsprechend der Produktgruppe $SO(\bar{q}, \bar{n} - \bar{q}) \times SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$. Generatoren der eingebetteten Unteralgebren sind zum Beispiel

$$(\overline{Z}^{i})^{a}{}_{b} = (\overline{L}^{kl})^{a}{}_{b} = \frac{1}{2}(\eta^{ka}\eta^{l}{}_{b} - \eta^{k}{}_{b}\eta^{la})$$

$$(\overline{Z}^{I})^{a}{}_{b} = (\overline{L}^{KL})^{a}{}_{b} = \frac{1}{2}(\eta^{Ka}\eta^{L}{}_{b} - \eta^{K}{}_{b}\eta^{La})$$

$$(2.98)$$

mit $\eta = \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}^+$, $a, b = 1 \dots N$ und den Doppelindizes $i = (k, l), k < l = 1 \dots \bar{n}, I = (K, L), K < L = \bar{n} + 1 \dots \bar{n} + \bar{n}$.

Die Zerlegung (2.93) entspricht zwar (2.80), die eichkovariante Ableitung $\overset{+}{\mathbf{D}}$ in (2.97, oberes Vorzeichen) enthält im Gegensatz zu $\mathbf{D}^{(\stackrel{+}{n})}$ in (2.78) Ableitungen **d** zum Ndimensionalen Produktraum. Diese Ableitung wirkt auch auf die neue Metrik \boldsymbol{g} , die im Gegensatz zu \boldsymbol{G} (2.71) im allgemeinen nicht in eine direkte Summe zerfallen muß.

Auch der Hodge-Star $\stackrel{(g)}{\star}$ in (2.97) wirkt völlig anders als die beiden Hodge-Stars in (2.78). Während $\stackrel{(g)}{\star}$ eine (N-2)-Form ist, erzeugt zum Beispiel $\stackrel{(+)}{\star}$ zu $\stackrel{+}{G}$ aus $\stackrel{+}{\Omega}$ in (2.78) eine $(\stackrel{+}{n}-2)$ -Form.

Insgesamt werden so aus zwei niederdimensionalen Lösungen folgende Lösungen im Produktraum erzeugt:

$$SO(\overline{q}, \overline{n} - \overline{q})$$
-Yang-Mills zu \boldsymbol{G} (\overline{n} -dimensional)

$$SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$$
-Yang-Mills zu $\overset{+}{\boldsymbol{G}}$ ($\overset{+}{n}$ -dimensional)
Produktbildung

$$\downarrow$$

$$SO(\overline{q}, \overline{n} - \overline{q}) \times SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$$
-Yang-Mills zu $\overline{\boldsymbol{G}} \oplus \overset{+}{\boldsymbol{G}}$ (N -dimensional)
Reskalierung

$$\downarrow$$

$$SO(\overline{q}, \overline{n} - \overline{q}) \times SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$$
-Yang-Mills zu \boldsymbol{g} (N -dimensional)
Projektion der Liealgebra

$$\downarrow$$

$$SO(\overline{q}, \overline{n} - \overline{q})$$
-Yang-Mills zu \boldsymbol{g} (N -dimensional)

$$SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$$
-Yang-Mills zu \boldsymbol{g} (N -dimensional)

$$SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$$
-Yang-Mills zu \boldsymbol{g} (N -dimensional)

$$SO(\overset{+}{q}, \overset{+}{n} - \overset{+}{q})$$
-Yang-Mills zu \boldsymbol{g} (N -dimensional)

Spezialfall 2: $\mathcal{G} = so(4) = su(2) \oplus su(2)$

Ein wichtiger Spezialfall ist die Projektion von SO(4)-Lösungen auf SU(2)-Anteile mit den in Anhang D angegebenen Generatoren

$$\bar{Z}^{i} = \bar{Y}^{i} , \quad \bar{Z}^{i} = \bar{Y}^{i} \quad (i = 1, 2, 3).$$
(2.99)

Da die sechs Generatoren $\stackrel{\pm}{Y^i}$ die Liealgebra so(4) vollständig aufspannen, kann jede SO(4)-Lösung auf zwei SU(2)-Anteile projiziert werden, ein Produktraumansatz ist hierfür nicht notwendig.

Zum Beispiel werden wir später in Abschnitt 3.2.1 aus der Sphäre S^4 mit irreduzibler Metrik \boldsymbol{G} die SU(2)-Instanton-Lösung auf dem E^4 erhalten.

Sowohl für $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$ als auch für $\mathbf{A} = \mathbf{A}^-$ erhält man damit SU(2)-Eichfelder und - falls $\boldsymbol{\omega}$ Lösung der SO(4)-Yang-Mills-Gleichungen war - Lösungen der homogenen SU(2)-Yang-Mills-Gleichungen

$$\mathbf{D}^{(g)}_{\star}\mathbf{F} = 0 \qquad (\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}).$$

Damit sind wir zu Yang-Mills-Feldern gelangt, wie sie in den Gleichungen der Elementarteilchentheorien tatsächlich auftreten.

Das Projektionsverfahren $so(4) \rightarrow su(2) \oplus su(2)$ ist im Anhang D explizit beschrieben.

2.3.3 Die Reskalierungsbedingung $\overset{(g)(G)}{\star} \Omega = \operatorname{sign}(g)\Omega$

Um die Yang-Mills-Gleichungen von der Mannigfaltigkeit mit Metrik G auf die mit Metrik g ausgestattete Mannigfaltigkeit zu transportieren, hatten wir im vorletzten Abschnitt die Bedingung (2.90)

$$\mathbf{D}^{(G)}_{\star} \mathbf{\Omega} = \mathbf{D}^{(g)}_{\star} \mathbf{\Omega}$$

aufgestellt.

Offensichtlich ist diese Bedingung erfüllt, wenn man einschränkend fordert:

$$\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega} = \overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}. \tag{2.100}$$

Wendet man auf diese Gleichung nochmals den Hodge-Star $\stackrel{(g)}{\star}$ zur Metrik \boldsymbol{g} an, dann erhält man auf der rechten Seite wegen der Identität (A.16) bis auf das Vorzeichen sign(g) die Krümmungs-2-Form $\boldsymbol{\Omega}$ zurück:

$$\overset{(g)(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{sign}(g) \boldsymbol{\Omega}.$$

Die Gleichung (2.100) ist daher äquivalent zu

$$\overset{(g)(G)}{\star} \stackrel{(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{sign}(g) \boldsymbol{\Omega}.$$
 (2.101)

Diese Gleichung ist in Komponentenrechnungen vorteilhafter als (2.100), da sich für höhere Dimensionen (N > 4) 2-Formen leichter handhaben lassen als (N - 2)-Formen. Durch diese algebraische Bedingung lassen sich die Yang-Mills-Gleichungen in besonders einfacher Weise von einer Metrik auf die andere übertragen.

Da man ebensogut den Hodge-Star $\overset{(G)}{\star}$ der andern Metrik ${\pmb G}$ auf (2.100) anwenden kann, ist

$$\overset{(G)(g)}{\star} \overset{\Omega}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{sign}(G) \boldsymbol{\Omega}$$

eine weitere äquivalente Umformung. Vorausgesetzt war gleiche Signatur, also sign(G) = sign(g), daher können auf der linken Seite der Gleichung (2.101) die beiden Metriken g und G vertauscht werden.

Durch die Kopplungsabbildung C ins Tangentialbündel (2.50) erhält man aus (2.101) eine Bedingung für den ursprünglichen Krümmungstensor \mathbb{R} des Riemann-Cartan-Raums (mit ∇):

$$\overset{(g)(G)}{\star} \overset{\mathcal{R}}{\star} \mathbb{R} = \operatorname{sign}(g)\mathbb{R}.$$
(2.102)

Es ist nützlich, die Komponentenrechnung in einer beliebigen Basis ϑ_α bzw. θ^α durchzuführen mit den Zerlegungen

$$\mathbb{R} = \frac{1}{2} R^{\gamma}{}_{\delta\alpha\beta} \vartheta_{\gamma} \otimes \theta^{\delta} \otimes \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$$

$$\stackrel{(g)(G)}{\star} \mathbb{R} = \frac{1}{2} (\stackrel{(g)(G)}{\star} R)^{\gamma}{}_{\delta\alpha\beta} \vartheta_{\gamma} \otimes \theta^{\delta} \otimes \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}.$$

Die Komponentenversion der Bedingung (2.102) ist daher

$${\binom{(g)(G)}{\star}} R^{\gamma}{}_{\delta\alpha\beta} = \operatorname{sign}(g) R^{\gamma}{}_{\delta\alpha\beta}.$$
 (2.103)

Zur Berechnung der Komponenten auf der linken Seite von (2.103) betrachten wir zunächst die (N-2)-Form $\overset{(G)}{\star} \mathbb{R}$. Deren Komponenten lassen sich nach (A.13) (Anhang) durch die Krümmungs-2-Formen \mathbb{R} folgendermaßen ausdrücken:

$$(\stackrel{(G)}{\star}R)^{\gamma}{}_{\delta\alpha_3\dots\alpha_N} = \frac{1}{2}\sqrt{|G|}\epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_N}G^{\alpha_1\beta_1}G^{\alpha_2\beta_2}R^{\gamma}{}_{\delta\beta_1\beta_2}.$$
(2.104)

Die Komponenten der 2-Form $\overset{(g)(G)}{\star} \mathbb{R}$ können mit Hilfe der Volumen-N-Form $\varepsilon(g)$ (A.11) zur zweiten Metrik g berechnet werden:

$$\binom{(g)(G)}{\star} R^{\gamma}{}_{\delta\beta_1\beta_2} = \frac{1}{(N-2)!} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g})^{\alpha_3\dots\alpha_N}{}_{\beta_1\beta_2} \binom{(G)}{\star} R^{\gamma}{}_{\delta\alpha_3\dots\alpha_N}.$$
(2.105)

Da $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g})$ ein aus der Metrik \boldsymbol{g} gebildetes Objekt ist, wurden die Indizes α_i hierbei mit den Komponenten $g^{\alpha\beta}$ der inversen Metrik nach oben gezogen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g})^{\alpha_3\dots\alpha_N}{}_{\beta_1\beta_2} = \sqrt{|g|}g^{\alpha_3\beta_3}\cdot\ldots\cdot g^{\alpha_N\beta_N}\epsilon_{\beta_3\dots\beta_N\beta_1\beta_2}$$
$$= \sqrt{|g|}g^{\alpha_3\beta_3}\cdot\ldots\cdot g^{\alpha_N\beta_N}\epsilon_{\beta_1\dots\beta_N}.$$

Durch Hochziehen der beiden übrigen Indizes β_1,β_2 kann dieser Term durch die Determinante von $g^{\alpha\beta}$

$$\det(g^{\alpha\beta}) = g^{1\beta_1} \cdot \ldots \cdot g^{N\beta_N} \epsilon_{\beta_1 \ldots \beta_N}$$

und mit

$$\det(g^{\alpha\beta}) = \frac{1}{\det(g_{\alpha\beta})} = \frac{\operatorname{sign}(g)}{|g|}$$

vereinfacht werden zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g})^{\alpha_3\dots\alpha_N\beta_1\beta_2} = \frac{\operatorname{sign}(g)}{|g|} \epsilon^{\beta_1\beta_2\alpha_3\dots\alpha_N} = \frac{\operatorname{sign}(g)}{|g|} \epsilon_{\beta_1\beta_2\alpha_3\dots\alpha_N}.$$
 (2.106)

(Da ϵ kein Tensor sondern das Permutationssymbol ist, hat in $\epsilon^{\beta_1\beta_2\alpha_3...\alpha_N}$ die Indexverschiebung keine Bedeutung, die Indizes wurden hier nur der Übersichtlichkeit halber nach oben geschrieben.)

Einsetzen von (2.104) in (2.105) und Verwendung von (2.106) ergibt

$$g^{\alpha_{1}\beta_{1}}g^{\alpha_{2}\beta_{2}} \begin{pmatrix} g^{(g)}(G) \\ \star & \star \end{pmatrix}^{\gamma}{}_{\delta\beta_{1}\beta_{2}}$$

$$= \frac{1}{(N-2)!2} \operatorname{sign}(g) \frac{\sqrt{|G|}}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\alpha_{1}\alpha_{2}\gamma_{3}...\gamma_{N}} \epsilon_{\gamma_{1}...\gamma_{N}} G^{\gamma_{1}\beta_{1}} G^{\gamma_{2}\beta_{2}} R^{\gamma}{}_{\delta\beta_{1}\beta_{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sign}(g) \frac{\sqrt{|G|}}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\alpha_{1}\alpha_{2}} G^{\gamma_{1}\beta_{1}} G^{\gamma_{2}\beta_{2}} R^{\gamma}{}_{\delta\beta_{1}\beta_{2}}$$

$$= \operatorname{sign}(g) \frac{\sqrt{|G|}}{\sqrt{|g|}} G^{\alpha_{1}\beta_{1}} G^{\alpha_{2}\beta_{2}} R^{\gamma}{}_{\delta\beta_{1}\beta_{2}}$$

$$(2.107)$$

Dabei wurden die Hilfsformeln (A.8) und

$$\epsilon_{\gamma_1\gamma_2}^{\alpha_1\alpha_2} = \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1}\delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} - \delta_{\gamma_2}^{\alpha_1}\delta_{\gamma_1}^{\alpha_2}$$

zusammen mit der Antisymmetrie

$$G^{\gamma_1\beta_1}G^{\gamma_2\beta_2}R^{\gamma}{}_{\delta\beta_1\beta_2} = -G^{\gamma_2\beta_2}G^{\gamma_1\beta_1}R^{\gamma}{}_{\delta\beta_2\beta_1}$$

benutzt.

Zusammen mit (2.107) erhält man somit aus (2.103) die Gleichung

$$\sqrt{|g|}g^{\alpha_1\beta_1}g^{\alpha_2\beta_2}R^{\gamma}{}_{\delta\beta_1\beta_2} = \sqrt{|G|}G^{\alpha_1\beta_1}G^{\alpha_2\beta_2}R^{\gamma}{}_{\delta\beta_1\beta_2}.$$
(2.108)

Damit haben wir die Yang-Mills-Bedingung (2.101) in eine äquivalente Bedingung an den Riemann-Cartan-Krümmungstensor übersetzt.

Im Riemannschen Fall läßt sich das noch etwas prägnanter formulieren. Mit

$$R(\boldsymbol{G})_{\gamma\delta\alpha\beta} = R(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

können in diesem Fall die Riemannschen Krümmungs-2-Formen geschrieben werden als

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta\gamma\delta} \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\delta} = \frac{1}{2} R(\boldsymbol{G})_{\gamma\delta\alpha\beta} \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\delta}.$$
(2.109)

Dabei ist zu beachten, daß der linke Index des **G**-Objekts $R(\mathbf{G})^{\gamma}_{\delta\alpha\beta}$ mit der Metrik $G_{\alpha\beta}$ nach unten gezogen wurde.

Die Bedingung (2.108) bzw. (2.101) geht im Riemannschen Fall über in die Formengleichung

$$\sqrt{|g|}g^{\gamma\alpha}g^{\delta\beta}\mathbb{R}(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta} = \sqrt{|G|}G^{\gamma\alpha}G^{\delta\beta}\mathbb{R}(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta}.$$
(2.110)

Die Formenschreibweise unterdrückt hier gerade zwei uninteressante Indizes.

In der durch (2.18) definierten Indexstellung heißt das

$$\sqrt{|g|}g^{\delta\beta}G_{\gamma\alpha}\mathbb{R}(G)^{\alpha}{}_{\beta} = \sqrt{|G|}G^{\delta\beta}g_{\gamma\alpha}\mathbb{R}(G)^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Die Riemannsche Krümmung $\mathbb{R}(\mathbf{G})$ ist über die Levi-Civita-Konnexion (2.32) und (2.18) eine Funktion der Metrik und ihrer Ableitungen bis zweiter Ordnung. Bei vorgegebenem \mathbf{g} ist (2.110) daher ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für \mathbf{G} .

Dagegen kommen in (2.110) keine Ableitungen in g vor, für diese zweite Metrik stellt (2.110) bzw. (2.101) also eine rein algebraische Bedingung dar.

Stellen wir also bei vorgegebenem G die Frage, für welche Zielmetriken g die Yang-Mills-Gleichungen weiterhin erfüllt bleiben, dann liefert (2.110) oder (2.108) dafür ein hinreichendes, rein algebraisches Kriterium.

Eine praktische Schwierigkeit besteht jedoch darin, beide Metriken explizit in einem Koordinatensystem anzugeben. Dieses Problem werden wir später noch an einigen Beispielen diskutieren.

2.3.4 Einige Theoreme und Spezialfälle

Bevor wir im nächsten Kapitel einige konkrete Yang-Mills-Lösungen diskutieren, sollen hier noch einige nützliche allgemeine Theoreme abgeleitet werden.

Die allgemeinste Reskalierung (2.89) kann am Punkt x angesetzt werden als

$$g_{\alpha\beta}(x) = \aleph_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}(x)G_{\gamma\delta}(x) \tag{2.111}$$

 mit

$$\aleph_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \aleph_{\beta\alpha}{}^{\gamma\delta}.$$

Der einfachste Spezialfall ist die konforme Reskalierung, auch Weyl-Reskalierung genannt:

$$\aleph_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}(x) = \sigma^2(x)\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\delta}_{\beta}.$$
 (2.112)

Der oben angenommene Ansatz (2.111) kann daher als Verallgemeinerung der Weyl-Reskalierung aufgefaßt werden, bei der die Metrikkoeffizienten in verschiedene Richtungen unterschiedlich umskaliert werden können.

Im euklidischen Fall läßt sich (2.111) auf N Funktionen σ_{α} reduzieren:

Theorem:

Bei euklidischer Signatur (Eichgruppe SO(N)) kann die lokale Basis ϑ_{α} immer so gewählt werden, daß beide Metriken gleichzeitig diagonal werden. Insbesondere ist eine **G**-orthonormale Basis e_{α} so wählbar, daß

$$G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

und

$$g_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha}^2 G_{\alpha\beta}$$
 (nicht summiert) (2.113)

gilt (mit $\sigma_{\alpha}^2 > 0$, da **g** positiv definit).

Beweis: Durch Wahl einer beliebigen G-orthonormalen Basis \tilde{e}_{α} wird

$$G_{\alpha\beta} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\beta})_G = \delta_{\alpha\beta}.$$

Damit reduziert sich (2.111) auf

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = (\tilde{\boldsymbol{e}}_{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\beta})_g = \aleph_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}(x)\delta_{\gamma\delta} =: \aleph_{\alpha\beta}(x) = \aleph_{\beta\alpha}(x).$$

Da die Funktionen $\aleph_{\alpha\beta}(x)$ eine symmetrische reelle Matrix bilden, existiert eine Orthogonalmatrix $M(x) \in SO(N)$, die $(\aleph_{\alpha\beta}(x))$ diagonalisiert:

$$M^{\alpha}{}_{\lambda} \aleph_{\alpha\beta} M^{\beta}{}_{\rho} = \sigma_{\lambda}^2 \delta_{\lambda\rho} \qquad (\text{"uber } \lambda \text{ nicht summiert"}).$$

Die zugehörige Basistransformation

 $\boldsymbol{e}_{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda} M^{\lambda}{}_{\alpha}$

läßt die Metrikkomponenten $\delta_{\alpha\beta}$ von **G** nach Definition der orthogonalen Gruppe invariant:

$$G_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta})_{G} = M^{\lambda}{}_{\alpha} (\tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\rho})_{G} M^{\rho}{}_{\beta} = M^{\lambda}{}_{\alpha} \delta_{\lambda\rho} M^{\rho}{}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

d.h. e_{α} ist eine **G**-orthonormale Basis, in der auch die Metrik **g** die gewünschte Diagonalgestalt annimmt:

$$g_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta})_{g}$$
$$= M^{\lambda}{}_{\alpha}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\rho})_{g}M^{\rho}{}_{\beta}$$
$$= M^{\lambda}{}_{\alpha}\aleph_{\lambda\rho}M^{\rho}{}_{\beta}$$
$$= \sigma_{\alpha}^{2}\delta_{\alpha\beta} \quad \text{(nicht summiert)}.$$

(q.e.d.)

Ist auch bei Minkowskischer Signatur die gleichzeitige Diagonalisierung beider Metriken und die (2.113) entsprechende Wahl

$$G_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{2.114}$$

$$g_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha}^2 \eta_{\alpha\beta}$$
 (nicht summiert) (2.115)

möglich ?

Obwohl sich die verschiedenen Signaturen oft analog behandeln lassen, lautet die Antwort in diesem Fall: nein.

Ein Gegenbeispiel in zwei Dimensionen sind die beiden Metriken

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta$$
$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Versuchen wir zunächst G in der angegebenen Diagonalgestalt η zu halten und ganalog zum euklidischen Fall (2.113) zu diagonalisieren. Definitionsgemäß ist die Gruppe, die η invariant läßt, die volle zweidimensionale Lorentzgruppe O(1, 1) mit den Darstellungsmatrizen M [48]:

$$M^{\lambda}{}_{\alpha}\eta_{\lambda\rho}M^{\rho}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{2.116}$$

Aus dieser Definitionsgleichung folgt, daß sich jede solche Matrix darstellen läßt als

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \varepsilon_2 \sinh \varphi & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cosh \varphi \end{pmatrix}$$
(2.117)

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$$

und reellem φ . Soll nun die zweite Metrik durch eine Lorentzdrehung diagonalisiert werden, dann müßten nach der Transformation mit (2.117) die Nichtdiagonalelemente verschwinden, also

$$M^{\lambda}{}_{1}g_{\lambda\rho}M^{\rho}{}_{2} = \varepsilon_{2}(1 + \cosh^{2}\varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

gelten, was offensichtlich unmöglich ist. Fast ebenso einfach zeigt man, daß auch keine andere invertierbare 2×2 -Matrix existiert, die beide Metriken zugleich diagonalisiert. (Zum simultanen Diagonalisierungsproblem siehe auch [27].)

Als nächstes wird die algebraische Yang-Mills-Bedingung (2.101) näher untersucht. Dabei beschränken wir uns ab sofort auf euklidische Signaturen

$$\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$
 , $\operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(G) = 1$

mit Levi-Civita-Konnexion, so daß die Formengleichung (2.110)

$$\sqrt{|g|}g^{\gamma\alpha}g^{\delta\beta}\mathbb{R}(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta} = \sqrt{|G|}G^{\gamma\alpha}G^{\delta\beta}\mathbb{R}(\boldsymbol{G})_{\alpha\beta}$$
(2.118)

verwendet werden kann, die unter den gegebenen Annahmen äquivalent ist zu

$$\overset{(g)(G)}{\star} \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}. \tag{2.119}$$

Gewählt wird nun eine G-orthonormale Basis $\{e_a, \mathbb{E}^a\}$, für die nach (2.113) g ebenfalls diagonal wird:

$$g_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha}^{2} \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{(nicht summirt)}$$

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma_{\alpha}^{2}} \delta^{\alpha\beta} \qquad \text{(nicht summirt)}.$$
(2.120)

Da die Reskalierungsfunktionen σ_{α} aus Stetigkeitsgründen das Vorzeichen nicht wechseln dürfen, kann man

$$\sigma_{\alpha} > 0$$

wählen (ebenso wäre $\sigma_{\alpha} < 0$ möglich), so daß folgt:

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} = \prod_{\alpha=1}^{N} \sigma_{\alpha}.$$
(2.121)

Da wegen $G_{ab} = \delta_{ab}$

 $\sqrt{|G|} = 1$

wird, folgt in dieser Basis durch Einsetzen in (2.118) die Bedingung

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{N} \sigma_{\alpha}\right) \frac{1}{\sigma_{a}^{2} \sigma_{b}^{2}} \mathbb{R}(\boldsymbol{G})^{ab} = \mathbb{R}(\boldsymbol{G})^{ab} \qquad \text{(nicht summiert)}.$$
(2.122)

Ist hierin für ein Paar (a, b) die 2-Form $\mathbb{R}(G)^{ab}$ von Null verschieden, dann ist mindestens eine Komponente

$$R(\boldsymbol{G})^{cdab} \neq 0,$$

so daß die Komponentengleichung zu (2.122)

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{N} \sigma_{\alpha}\right) \frac{1}{\sigma_{a}^{2} \sigma_{b}^{2}} R(\boldsymbol{G})^{cdab} = R(\boldsymbol{G})^{cdab} \qquad \text{(nicht summiert)}$$

durch die Zahl $R(\boldsymbol{G})^{cdab}$ dividiert werden kann.

Damit erhält man folgendes

Theorem:

Sei die G-orthonormale Basis so gewählt, daß auch die Zielmetrik g diagonalisiert wird,

$$g_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta} \qquad (\text{nicht summiert}),$$

dann ist die Yang-Mills-Bedingung (2.119) erfüllt, wenn gilt:

$$\sigma_a^2 \ \sigma_b^2 = \prod_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha \tag{2.123}$$

für jedes Indexpaar (a, b), für das $\mathbb{R}(\mathbf{G})^{ab} \neq 0$ ist.

Für die konforme Reskalierung (Weyl-Reskalierung)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \qquad (\alpha = 1 \dots N)$$

liefert (2.123) die Bedingung

$$\sigma^4 = \sigma^N. \tag{2.124}$$

Die Weyl-Reskalierung erfüllt die Yang-Mills-Bedingung (2.119) daher nur in N = 4Dimensionen nichttrivial (d.h. mit $\sigma \neq 1$). In diesem Spezialfall übertragen sich die Yang-Mills-Gleichungen unabhängig von der Krümmung Ω auf die neue Metrik g, d.h. die Yang-Mills-Gleichungen sind in vier Dimensionen konform invariant. Bei der allgemeinen Reskalierung hängt die Bedingung (2.119) dagegen von der gewählten Konfiguration Ω ab!

Interessant sind die Räume konstanter Krümmung

$$R(\boldsymbol{G})^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = K(G^{\alpha}{}_{\gamma}G^{\beta}{}_{\delta} - G^{\alpha}{}_{\delta}G^{\beta}{}_{\gamma})$$
(2.125)

(K = const.), denn diese erfüllen wegen der kovarianten Konstanz der Metrik (2.14) automatisch die in den Tangentialraum transportierten Yang-Mills-Gleichungen (2.68).

Die Krümmungs-2-Formen bezüglich einer G-orthonormalen Basis lauten dann

$$\mathbb{R}^{ab} = \frac{1}{2} R^{ab}{}_{cd} \mathbb{E}^c \wedge \mathbb{E}^d = K \ \mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b.$$
(2.126)

Für einen Raum nichtverschwindender konstanter Krümmung $K \neq 0$ ist daher $\mathbb{R}^{ab} \neq 0$ für jedes Indexpaar $a \neq b$. (2.123) ergibt somit

$$\prod_{\alpha=1}^{N} \sigma_{\alpha} = \sqrt{|g|} = \sigma_{1}^{2} \sigma_{2}^{2} = \sigma_{1}^{2} \sigma_{3}^{2} = \sigma_{2}^{2} \sigma_{3}^{2} = \sigma_{1}^{2} \sigma_{4}^{2} = \dots$$

usw. für jedes Indexpaar $a \neq b$. Für $N \geq 3$ folgt daraus die konforme Reskalierung

 $\sigma_{\alpha} = \sigma,$

von der wir aus (2.124) bereits wissen, daß nur der vierdimensionale Fall sinnvoll ist.

Für N = 2 Dimensionen folgt aus (2.123)

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2,$$

d.h. die Bedingung

$$\sigma_1 \sigma_2 = 1.$$

Für Räume konstanter Krümmung ist (2.119) folglich überhaupt nur in 2 und 4 Dimensionen nichttrivial erfüllbar, wobei im Vierdimensionalen wieder die Weyl-Reskalierung herauskommt.

Bei Produkten aus Räumen konstanter Krümmung gelten diese Einschränkungen nicht, wie in Abschnitt 3.3.1 gezeigt wird.

Für den Spezialfall N = 4 zeigen wir folgendes

Theorem:

Ist für N = 4 Dimensionen SO(3) eine Untergruppe der Holonomiegruppe des Tangentialbündels von $(X^4, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{G}))$, dann ist die Bedingung (2.119)

$$\overset{(g)(G)}{\star} {\boldsymbol{\Omega}} = {\boldsymbol{\Omega}}$$

äquivalent zur konformen Reskalierung

 $\boldsymbol{g} = \sigma^2 \boldsymbol{G}.$

Beweis: Nach dem Ambrose-Singer-Theorem [16] und den Voraussetzungen des Theorems muß die Krümmung mindestens die so(3)-Algebra aufspannen. Da so(3)dreidimensional ist, gibt es mindestens 3 Indexpaare $a \neq b$, für die

 $\mathbb{R}^{ab} \neq 0$

ist. Durch eventuelle Umbenennung bezeichnen wir diese Indexpaare mit (1,2), (1,3), (2,3).

(2.123) liefert dann die Gleichungen

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sigma_3^2 = \sigma_2^2 \sigma_3^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$$

und daraus folgt wiederum die konforme Reskalierung

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \qquad (\alpha = 1 \dots 4)$$

(q.e.d.).

Für einen Produktraum $X^4 = \stackrel{-}{X^2} \times \stackrel{+}{X^2}$ mit

$$\mathbb{R}^{ab} = \stackrel{-}{\mathbb{R}}^{ab} \oplus \stackrel{+}{\mathbb{R}}^{ab}$$

gilt dieses Theorem nicht:

Die Indizes seien so benannt, daß $\rightarrow (1, 2)$ und $\rightarrow (3, 4)$ gilt, dann sind höchsten die beiden 2-Formen

$$\mathbb{R}^{12}$$
 und \mathbb{R}^{34}

von Null verschieden. Wenn die Reskalierung in derselben Basis diagonal wird, dann liefert (2.123)

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \sigma_2^2 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 & \text{für } \mathbb{R}^{12} \neq 0, \\ \sigma_3^2 \sigma_4^2 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 & \text{für } \mathbb{R}^{34} \neq 0, \end{aligned}$$

nur eine einzige Bedingung

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \sigma_4^2.$$

Noch allgemeiner muß auch die Basis, in der g diagonal wird, nicht mit einer Basis übereinstimmen, in der \mathbb{R}^{ab} in die angenommene Summe zerfällt.

Wenn sich die Metrik G in zweidimensionale Faktoren zerlegen läßt, dann hat man also bei der Wahl von g einige Freiheit. Ist das nicht mehr der Fall, etwa bei $S^3 \times R^1$ oder dem irreduziblen Raum S^4 , dann ist die Bedingung (2.119) für N = 4 nur erfüllt, wenn die konforme Reskalierung gewählt wird.



2.4 Konstruktion von (Übersicht)

Kapitel 3

Lösungen euklidischer Yang-Mills-Gleichungen

In diesem Kapitel werden die zuvor allgemein erarbeiteten Konzepte zur Konstruktion und zur geometrischen Untersuchung von Lösungen der euklidischen Yang-Mills-Gleichungen angewandt.

3.1 Lösungen im flachen Raum

Im Verhältnis zu den übrigen Wechselwirkungen ist die Gravitation im Elementarteilchenmaßstab meist vernachlässigbar klein. Man ist daher hauptsächlich an Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen im flachen Raum interessiert. Für Pfadintegralrechnungen ist die wickrotierte Theorie mit euklidischer Signatur aus mathematischen Gründen vorzuziehen.

Zur Konstruktion von Lösungen im flachen Raum bietet sich folgende Vorgehensweise an:

Man konstruiert zunächst Lösungen aus der Levi-Civita-Konnexion eines Riemannschen Raums mit nichttrivialer Metrik \boldsymbol{G} und bildet diese mit Hilfe der im vorigen Kapitel definierten Reskalierung auf den flachen Raum mit Metrik \boldsymbol{g} ab. Gesucht wird dabei im Gegensatz zu üblichen Ansätzen nicht das Eichfeld, sondern die flache Zielmetrik \boldsymbol{g} .

Um diese zu erhalten liegen zwei Wege nahe:

1. Man bleibt in den ursprünglichen Koordinaten und fordert zur Metrik \boldsymbol{g} verschwindende Krümmung:

$$\hat{\mathbb{R}} (= \mathbb{R}(\boldsymbol{g})) = 0.$$

2. "Methode der Koordinatentransformation":

Man stellt g in einem geschickten Koordinatensystem des flachen Raums dar (z.B. kartesische Koordinaten) und sucht eine Koordinatentransformation zu den ursprünglichen G-angepaßten Koordinaten. Wenn das gelingt, erhält man eine Yang-Mills-Lösung im flachen Raum in der üblichen Formulierung.

Um die Reskalierung nach der zweiten Methode durchzuführen, wird die Zielmetrik g in Koordinaten x^{μ} ausgedrückt, in denen die Metrikkomponenten $\tilde{g}_{\mu\nu}$ besonders einfach werden:

$$\boldsymbol{g} = \tilde{g}_{\mu\nu}(x^{\lambda}) \mathbf{d} x^{\mu} \otimes \mathbf{d} x^{\nu}. \tag{3.1}$$

Die Ausgangsmetrik \boldsymbol{G} ist normalerweise in einem dem Raum (X^N, \boldsymbol{G}) angepaßten Koordinatensystem ξ^{μ} gegeben:

$$\boldsymbol{G} = G_{\mu\nu}(\xi^{\lambda}) \mathbf{d}\xi^{\mu} \otimes \mathbf{d}\xi^{\nu}.$$
(3.2)

Mit dem allgemeinen Reskalierungs-Ansatz (2.111) bezieht man \boldsymbol{g} auf dasselbe Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}(\xi^{\lambda}) \mathbf{d}\xi^{\alpha} \otimes \mathbf{d}\xi^{\beta} = \aleph_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(\xi^{\lambda}) G_{\mu\nu}(\xi^{\lambda}) \mathbf{d}\xi^{\alpha} \otimes \mathbf{d}\xi^{\beta}.$$
(3.3)

Durch einen Koordinatenwechsel

$$\mathbf{d}x^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \mathbf{d}\xi^{\alpha} \tag{3.4}$$

lassen sich die unbekannten Funktionen $\aleph_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ berechnen:

$$g = \tilde{g}_{\mu\nu}(x^{\lambda})\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$$
$$= \tilde{g}_{\mu\nu}(x^{\lambda})\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}\mathbf{d}\xi^{\alpha}\otimes\mathbf{d}\xi^{\beta}$$
$$= \aleph_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(\xi^{\lambda})G_{\mu\nu}(\xi^{\lambda})\mathbf{d}\xi^{\alpha}\otimes\mathbf{d}\xi^{\beta}.$$

Durch Vergleich folgen daraus Bestimmungsgleichungen für die Koordinatentransformation

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x^{\lambda})\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} = \aleph_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(\xi^{\lambda})G_{\mu\nu}(\xi^{\lambda}).$$
(3.5)

Hierin sind $\tilde{g}_{\mu\nu}(x^{\lambda})$ und $G_{\mu\nu}(\xi^{\lambda})$ bekannt, gesucht sind die Koordinatenfunktionen $x^{\mu}(\xi^{\lambda})$ (oder deren Umkehrung) und die $\aleph_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ als Funktionen von ξ^{μ} oder x^{μ} .

Für die Funktionen $\aleph_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ sind zusätzlich Restriktionen durch die Invarianzforderung der Yang-Mills-Gleichungen (2.101) oder (2.90) zu erfüllen.

Im Fall der konformen Reskalierung, die in vier Dimensionen die Yang-Mills-Gleichungen invariant läßt, lauten die Transformationsgleichungen mit (2.112)

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x^{\lambda})\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} = \sigma^{2}(\xi^{\lambda})G_{\alpha\beta}(\xi^{\lambda}).$$
(3.6)

In diesem Kapitel wird von einem eigentlich-Riemannschen Raum mit euklidischer Signatur und Levi-Civita-Konnexion $\nabla = \nabla(G)$ ausgegangen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden aus G abgeleitete Größen nicht mehr extra mit dem Zusatz (G) gekennzeichnet.

3.2 Konforme Reskalierung

Wir behandeln zuerst den Spezialfall der konformen Reskalierung

$$\boldsymbol{g} = \sigma^2 \boldsymbol{G} \tag{3.7}$$

in vier Dimensionen. Dann ist die algebraische Reskalierungsbedingung (2.101) mit sign(g) = 1

$$\overset{(g)(G)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \tag{3.8}$$

erfüllt.

3.2.1 Produkte aus Räumen konstanter Krümmung

In diesem Abschnitt werden unter anderem die bekannten Instanton-[6] und Meron-Lösungen[18] der euklidischen Yang-Mills-Theorie konstruiert. Wir erhalten eine Lösungsserie, die bereits in [19, 20] durch einen lokal symmetrischen Ansatz hergeleitet wurde. Die hier verwendete Methode klärt den geometrischen Hintergrund auf, außerdem wird die Berechnung wesentlich vereinfacht.

Für einen Raum konstanter Krümmung gilt in einer beliebigen Kobasis θ^{α} definitionsgemäß

$$\mathbb{R}^{\alpha\beta} = K \ \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} \tag{3.9}$$

(K = const.) oder

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = K(G^{\alpha}{}_{\gamma}G^{\beta}{}_{\delta} - G^{\alpha}{}_{\delta}G^{\beta}{}_{\gamma}).$$
(3.10)

Wegen der kovarianten Konstanz der Metrik

$$\boldsymbol{\nabla}_{\lambda} \ G^{\alpha}{}_{\gamma} = 0$$

ist die Yang-Mills-Bedingung (2.68) für Räume konstanter Krümmung erfüllt.

Nach dem dimensionalen Superpositionsprinzip aus Abschnitt 2.2.1 gilt (2.68) auch für beliebige Produkte aus Räumen konstanter Krümmung.

Da Produkte mit mehreren eindimensionalen Faktoren uninteressant sind (zumindest vom Standpunkt der lokalen Riemannschen Geometrie aus), genügt es für die Gesamtdimension N = 4 Produkte aus maximal zwei Faktoren zu betrachten.

Wir gehen daher von zwei Räumen $\overline{X}^{\overline{n}}(\overline{K})$ und $\overline{X}^{\overline{n}}(\overline{K})$ konstanter Krümmung aus, deren Dimensionen sich zu $\overline{n} + \overline{n} = N = 4$ addieren $(\frac{\pm}{n} \ge 0)$:

$$\overset{\pm}{\mathbb{R}}{}^{\alpha\beta} = \overset{\pm}{K}\overset{\pm}{\theta}{}^{\alpha} \wedge \overset{\pm}{\theta}{}^{\beta} \tag{3.11}$$

 $(\overset{\pm}{K} = \text{const.}).$

Dabei wurde der Indexbereich beider Räume bereits auf $\alpha, \beta = 1...4$ ausgedehnt wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben. Die zugehörigen Ricci-Formen und Krümmungsskalare sind

$$\overset{\pm}{\mathcal{R}}^{\beta} = i_{\pm} \overset{\pm}{\underset{\vartheta_{\alpha}}{\mathbb{R}}} \overset{\pm}{\mathbb{R}}^{\alpha\beta} = \overset{\pm}{K} (\overset{\pm}{n} - 1) \overset{\pm}{\theta}^{\beta}$$
(3.12)

$$\stackrel{\pm}{R} = i_{\pm}_{\vartheta_{\beta}} \stackrel{\pm}{\mathcal{R}}^{\beta} = \stackrel{\pm}{K} \stackrel{\pm}{n} (\stackrel{\pm}{n} - 1).$$
(3.13)

Die irreduziblen Fälle $\bar{n} = 0$ oder $\bar{n} = 0$, bei denen in Wirklichkeit nur ein Faktor auftritt, wurden formal durch Nullsetzen aller entsprechenden Größen, d.h.

$\overline{\theta}{}^{\alpha}$	≡	0	für $\bar{n} = 0$
\overline{K}	≡	0	für $\bar{n} = 0$
$\stackrel{+}{ heta}{}^{lpha}$	≡	0	für $\overset{+}{n} = 0$
$\overset{+}{K}$	≡	0	für $\overset{+}{n} = 0$

usw. einbezogen.

Da letztenendes durch konforme Reskalierung auf den flachen Raum abgebildet wird, muß der Produktraum

$$\bar{X}^{\bar{n}}(\bar{K}) \times \overset{+}{X}^{\bar{n}}(\overset{+}{K})$$

konform flach sein. Notwendig und hinreichend dafür ist das Verschwinden der Weylformen (C.16)

$$\mathbf{C}^{\alpha\beta} = \mathbb{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{N-2} (\mathcal{R}^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} - \mathcal{R}^{\beta} \wedge \theta^{\alpha}) + \frac{R}{(N-1)(N-2)} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}.$$

= 0. (3.14)

Durch Einsetzen von (3.11,3.12,3.13) in die Summenformeln (2.77) erhält man für die Krümmungs-2-Formen, die Ricciformen und den Krümmungsskalar des Gesamtraums:

$$\mathbb{R}^{\alpha\beta} = \bar{K}\bar{\theta}^{\alpha}\wedge\bar{\theta}^{\beta} + \bar{K}\bar{\theta}^{\alpha}\wedge\bar{\theta}^{\beta}$$

$$\mathcal{R}^{\alpha} = \bar{K}(\bar{n}-1)\bar{\theta}^{\alpha} + \bar{K}(\bar{n}-1)\bar{\theta}^{\alpha}$$

$$R = \bar{K}\bar{n}(\bar{n}-1) + \bar{K}\bar{n}(\bar{n}-1).$$
(3.15)

Daraus folgt für die Weylformen (3.14)

$$\mathbf{C}^{\alpha\beta} = \frac{(\bar{K} + \bar{K})\bar{n}(\bar{n} - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \overset{+}{\theta}{}^{\alpha} \wedge \overset{+}{\theta}{}^{\beta}$$

$$+ \frac{(\bar{K} + \bar{K})\bar{n}(\bar{n} - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \bar{\theta}{}^{\alpha} \wedge \bar{\theta}{}^{\beta}$$

$$- \frac{(\bar{K} + \bar{K})(\bar{n} - 1)(\bar{n} - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \left(\overset{+}{\theta}{}^{\alpha} \wedge \bar{\theta}{}^{\beta} + \bar{\theta}{}^{\alpha} \wedge \overset{+}{\theta}{}^{\beta}\right)$$

$$= 0.$$
(3.16)

Damit der Gesamtausdruck verschwindet, muß jede Zeile für sich verschwinden. Zu beachten ist, daß zum Beispiel

für
$$\overset{+}{n} \leq 1$$
 $\overset{+}{\theta}{}^{\alpha} \wedge \overset{+}{\theta}{}^{\beta} = 0,$

da dann in $\overset{+}{X}\overset{+}{n}\overset{+}{(K)}$ jede 2-Form automatisch verschwindet.

Für die Vorfaktoren folgt daher

$$\begin{split} & (\bar{K} + \overset{+}{K}) \; \bar{n} \; (\bar{n} - 1) = 0 & \text{für } \overset{+}{n} \ge 2 \\ & (\bar{K} + \overset{+}{K}) \; \overset{+}{n} \; (\overset{+}{n} - 1) = 0 & \text{für } \; \bar{n} \ge 2 \\ & (\bar{K} + \overset{+}{K}) (\overset{+}{n} - 1) (\bar{n} - 1) = 0 & \text{für } \; \overset{+}{n}, \bar{n} \ge 1. \end{split}$$

Da die Zuordung der ±-Zeichen willkürlich ist, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overset{+}{n}\geq\bar{n}$ angenommen werden.

Daher ist die Bedingung der konformen Flachheit im wesentlichen schon durch die Gleichung

$$(\bar{K} + \bar{K}) \bar{n} (\bar{n} - 1) = 0 \qquad \text{für } \bar{n} \ge \bar{n}$$

$$(3.17)$$

charakterisiert.

Es sind daher nur folgende drei Typen von Produkten aus zwei Räumen konstanter

Krümmung konform flach:

$\overline{n} = 0$	$X^N(K)$	irreduzibler Raum konstanter Krümmung		
$\bar{n} = 1$	$X^1 \times X^{N-1}(\overset{+}{K})$	Produkt mit eindimensionalem Faktor		
$\ddot{K} = -\bar{K}$	$\bar{X}^{\bar{n}}(\bar{K}) \times \bar{X}^{\bar{n}}(-\bar{K})$	Räume mit entgegengesetzten Krümmungskonstanten.		
$(1, \dots, 1, 1)$ and $(1, \dots, 1)$				

(+ und - können vertauscht werden)

Bisher wurde nur die Voraussetzung $N \geq 4$ an die Weylformen verwendet, d.h. solche Produkte sind auch für N>4 konform flach.

Nebenbei sieht man, daß sich auch die Eigenschaft "konforme Flachheit" im allgemeinen <u>nicht</u> auf Produkträume vererbt, ebensowenig wie die Einstein-Gleichungen in 2.2.1.

Zum Beispiel ist die Metrik zu S^2 konform flach, zu $S^2 \times S^2$ dagegen nicht.

Im Fall N = 4 und nur in diesem Fall erhält man durch die konforme Reskalierung automatisch Yang-Mills-Lösungen im flachen Raum.

Aus der Differentialgeometrie ist folgender Satz bekannt [52]:

Ein n-dimensionaler Raum konstanter Krümmung K ist

für K = 0 lokal isometrisch zum flachen euklidischen Raum E^n

für K > 0 lokal isometrisch zu einer Sphäre S^n

für K < 0 lokal isometrisch zu einem hyperbolischen Raum H^n .

Produkte aus zwei euklidischen Räumen $E^{\overline{n}} \times E^{\overline{n}}$ sind uninteressant, da dort die Krümmung verschwindet.

Für vier Dimensionen sind die in Frage kommenden Produkträume daher lokal isometrisch zu einer der folgenden fünf Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

$$S^4, S^3 \times H^1, S^2 \times H^2, S^1 \times H^3, H^4.$$
 (3.18)

Vom mathematischen Standpunkt aus ist damit das Problem fast ohne Rechenaufwand bereits weitgehend gelöst:

Wir wissen, daß die Räume (3.18) konform flach sind und die Yang-Mills-Bedingung (2.68) erfüllen. Daher erzeugt jeder dieser Räume eine Lösung der Yang-Mills-Gleichungen im vierdimensionalen ebenen euklidischen Raum. Die Lösungen können explizit durch eine Koordinatentransformation nach der auf Seite 60 beschriebenen Methode konstruiert werden.

Die Metriken der fünf Räume (3.18) können wieder formal in einem Ausdruck zusammengefaßt und die Reskalierung kann gemeinsam berechnet werden.

Dazu werden in den Unterräumen sphärische oder hyperbolische Koordinaten mit Winkelvariablen $\overset{\pm}{\varphi}_i$ eingeführt.



 $(\bar{n}$ kann nun wieder von $0\ldots 4$ variieren, die irreduziblen Fälle werden formal einbezogen.)

Damit wird die Gesamtmetrik:

$$G = \overline{G} \oplus \overline{G}$$

$$= \rho^{2} \left(\mathbf{d}\kappa^{2} + \sin^{2}\kappa \mathbf{d} \,\overline{s^{2}}_{(\bar{n}-1)} \oplus \mathbf{d}\xi^{2} + \sinh^{2}\xi \mathbf{d} \,\overline{s^{2}}_{(\bar{n}-1)}^{+} \right)$$
(3.19)

mit $\rho = \text{const.}$ und

$$\kappa := \bar{\varphi}_{\bar{n}} . \tag{3.20}$$

Die Metrikfaktoren für positive und negative konstante Krümmung sind aus Friedmann-Robertson-Walker-Modellen der Kosmologie (dort 3-dimensional) bekannt [49].

Dabei steht $\mathbf{d} \overset{\pm}{s^2}_{(k)}$ für die Metrik der *k*-dimensionalen Einheitssphäre, die rekursiv auf niederdimensionale Einheitssphären zurückgeführt werden kann:

$$\mathbf{d} \, \overset{\pm}{s^{2}}_{(k)} = \mathbf{d} \, \overset{\pm}{\varphi^{2}}_{k} + \sin^{2} \, \overset{\pm}{\varphi}_{k} \, \mathbf{d} \, \overset{\pm}{s^{2}}_{(k-1)} \, . \tag{3.21}$$

Durch die formalen Definitionen

$$\overset{\pm}{\varphi}_{0} = 0$$

$$\mathbf{d} \overset{\pm}{s^{2}}_{(0)} = 0$$
(3.22)

wird die Rekursion gestoppt und die kompakte Schreibweise (3.19) möglich.

Durch die Ersetzung $\kappa \to i\kappa, \xi \to i\xi, \rho \to i\rho$ können sphärische und hyperbolische Anteile in (3.19) formal vertauscht werden.

Variablenbereiche:

$$\begin{split} \stackrel{\pm}{\varphi}_{1} &= 0 \dots 2\pi & \text{für } \stackrel{\pm}{n} \geq 2 \\ \stackrel{\pm}{\varphi}_{k} &= 0 \dots \pi & \text{für } 2 \leq k \leq \stackrel{\pm}{n} \\ \kappa &= \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 0 \dots 2\pi & \text{für } n = 1 \\ 0 \dots \pi & \text{für } n \geq 2 \end{cases} \\ \xi &= \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ -\infty \dots +\infty & \text{für } n = 1 \\ -\infty \dots 0 & \text{für } n = 1 \\ \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

Die Krümmungsskalare sind

$$\bar{K} = \frac{1}{\rho^2} \quad \text{für } \bar{n} \ge 2$$
$$\bar{K} = -\frac{1}{\rho^2} \quad \text{für } \bar{n} \ge 2.$$

 ρ ist der Radius der Sphäre $S^{\overline{n}}$ eingebettet in $E^{\overline{n+1}}$.

Der Übergang zur flachen Metrik ${\boldsymbol{g}}$ kann erfolgen, indem man dieselbe Aufspaltung des flachen vierdimensionalen Raums vornimmt,

$$E^4 = E^{\overline{n}} \times E^{\overline{n}},$$

und in jedem Faktor \bar{n} - oder \dot{n} -dimensionale Polarkoordinaten benutzt:

$$\boldsymbol{g} = \underbrace{\mathbf{d}r^{2} + r^{2}\mathbf{d} \,\bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)}}_{\text{in } E^{\bar{n}}} \oplus \underbrace{\mathbf{d}t^{2} + t^{2}\mathbf{d} \,\bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)}}_{\text{in } E^{\bar{n}}}.$$
(3.23)

Wie vorher hängt die Interpretation der Koordinaten von der gewählten Aufspal-

tung $(\bar{n}, \overset{+}{n})$ ab.

$$r = \begin{cases} 0 & \text{für } \bar{n} = 0 \\ -\infty \dots + \infty & \text{für } \bar{n} = 1 \\ 0 \dots + \infty & \text{für } \bar{n} \ge 2 \end{cases}$$
$$t = \begin{cases} 0 & \text{für } \bar{n} \ge 2 \\ -\infty \dots + \infty & \text{für } \bar{n} = 1 \\ 0 \dots + \infty & \text{für } \bar{n} \ge 2 \end{cases}$$

Dabei wurden wieder rein formal $r \equiv 0$ für $\bar{n}=0$ und $t \equiv 0$ für $\bar{n}=0$ definiert. Aus der Weyl-Reskalierung (3.7) folgt mit den Metriken **G** (3.19) und **g** (3.23)

$$g = dr^{2} + dt^{2} + r^{2} d \bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)} + t^{2} d \bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \kappa} \right)^{2} + \left(\frac{\partial t}{\partial \kappa} \right)^{2} \right] d\kappa^{2} + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{2} + \left(\frac{\partial t}{\partial \xi} \right)^{2} \right] d\xi^{2}$$

$$+ 2 \left[\frac{\partial r}{\partial \kappa} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \kappa} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right] d\kappa \otimes d\xi$$

$$+ r^{2} d \bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)} + t^{2} d \bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)}$$

$$= \sigma^{2} G$$

$$= \sigma^{2} \rho^{2} \left(d\kappa^{2} + d\xi^{2} + \sin^{2} \kappa d \bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)} + \sinh^{2} \xi d \bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)} \right)$$

Durch Koeffizientenvergleich liest man daraus folgende Gleichungen für die Koordinatentransformation

$$\{\bar{\varphi}_i, \kappa, \varphi_I, \xi\} \rightarrow \{\bar{\varphi}_i, r, \varphi_I, t\} \quad (i = 1 \dots \bar{n} - 1, I = 1 \dots \bar{n} - 1)$$

ab:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \kappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \kappa}\right)^2 = \rho^2 \sigma^2 \qquad (\bar{n} \ge 1) \qquad (3.24)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 = \rho^2 \sigma^2 \qquad (\stackrel{+}{n}\geq 1) \qquad (3.25)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \kappa} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \kappa} \frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 \qquad (\bar{n}, \bar{n} \ge 1) \qquad (3.26)$$

$$r^2 = \rho^2 \sigma^2 \sin^2 \kappa \qquad (\bar{n} \ge 2) \qquad (3.27)$$

$$t^2 = \rho^2 \sigma^2 \sinh^2 \xi$$
 $(\stackrel{+}{n} \ge 2)$ (3.28)

Die übrigen Winkelkoordinaten $\overline{\varphi}_i, \overline{\varphi}_I$ werden in \boldsymbol{G} und \boldsymbol{g} jeweils miteinander identifiziert. Das Problem wird so im wesentlichen entweder 1-dimensional ($\overline{n}=0, \overline{n}=0$) oder 2-dimensional (übrige Fälle).

Subtraktion der Gleichung (3.24) von (3.25) eliminiert die konforme Reskalierungsfunktion σ , anschließende Addition von

$$\mp 2i \left(\frac{\partial r}{\partial \kappa} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \kappa} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) \stackrel{(3.26)}{=} 0$$

liefert:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \mp 2i\frac{\partial r}{\partial \kappa}\frac{\partial r}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial r}{\partial \kappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 \mp 2i\frac{\partial t}{\partial \kappa}\frac{\partial t}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial t}{\partial \kappa}\right)^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \mp i \frac{\partial r}{\partial \kappa}\right)^2 = i^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \xi} \mp i \frac{\partial t}{\partial \kappa}\right)^2.$$

Durch Wurzelziehen und anschließenden Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt daraus mit einer Vorzeichenkonstanten $\lambda_{\pm} \in \{-1, 1\}$:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \pm \lambda_{\pm} \frac{\partial t}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \kappa} = \mp \lambda_{\pm} \frac{\partial t}{\partial \xi}.$$
(3.29)

Das sind Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, die Koordinaten können daher zu komplexen Funktionen zusammengefaßt werden. Wir wählen:

$$z := r + it \tag{3.30}$$

$$\zeta := \xi + i\kappa. \tag{3.31}$$

Durch die unbestimmten Vorzeichen in (3.29) ist die Zuordnung von Real- und Imaginärteil nicht eindeutig bestimmt, eine andere Wahl liefert jedoch dieselben Endergebnisse.

Die vierdimensionale konforme Reskalierung (3.7) wird damit auf eine konforme Abbildung in der komplexen Ebene

$$\zeta \to z$$

zurückgeführt. In den irreduziblen Fällen läßt sich das auf eine reelle Abbildung reduzieren.

Mit

$$\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}\zeta} = \frac{\partial r}{\partial \xi} + i\frac{\partial t}{\partial \xi}$$
$$\left|\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}\zeta}\right|^2 = \rho^2 \sigma^2. \tag{3.32}$$

und (3.25) folgt

Durch Addition von (3.27) und (3.28) oder durch analytische Fortsetzung erhält man

$$|z|^2 = \rho^2 \sigma^2 |\sinh^2 \zeta|. \tag{3.33}$$

Mit (3.32) folgt daraus die komplexe Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\left|z\right|^{2} = \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\sinh\zeta\right|^{2}.$$
(3.34)

Der unbestimmte Phasenfaktor in (3.34) ist so zu wählen, daß die Gleichungen (3.24) bis (3.28) je für sich erfüllt sind.

Die Lösung von (3.34) und von (3.24) bis (3.28) lautet:

$$z = \frac{c}{i} \tanh \frac{\zeta}{2} \tag{3.35}$$

mit einer reellen Integrationskonstanten c > 0.

Um zur üblichen Darstellung der Eichfelder zu gelangen, muß lediglich z in (3.32) eingesetzt und für die einzelnen Fälle interpretiert werden.

In ein kartesisches Koordinatensystem x^{μ} des E^4 transformiert man mit

$$r^{2} = \sum_{\mu=1}^{n} (x^{\mu})^{2}$$

$$t^{2} = \sum_{\mu=\bar{n}+1}^{4} (x^{\mu})^{2}.$$
(3.36)

Der konformale Faktor σ , der aus (3.32) direkt berechnet werden kann, enthält die gesamte Information über das Eichfeld.

Das sieht man folgendermaßen: In kartesischen Koordinaten ist

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\sigma^2} \delta_{\mu\nu}.$$
 (3.37)

Die zugehörigen Levi-Civita-Konnexionskoeffizienten (2.32) sind

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \hat{u}_{\mu}\delta^{\lambda}{}_{\nu} + \hat{u}_{\nu}\delta^{\lambda}{}_{\mu} - \hat{u}^{\lambda}\delta_{\mu\nu}$$
(3.38)
mit

$$\hat{u}_{\mu} := \sigma \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{1}{\sigma}.$$
(3.39)

Der Übergang zu einem G-orthonormierten Vierbein erfolgt durch (2.23)

$$e^{a}{}_{\mu} = \frac{1}{\sigma} \delta^{a}{}_{\mu}$$

$$e_{a}{}^{\mu} = \sigma \delta_{a}{}^{\mu}.$$
(3.40)

Die Eichtransformation (2.27) ergibt dann die SO(4)-Konnexion

$$\omega^{ab}{}_{\mu} = -\hat{u}^a \delta^b{}_{\mu} + \hat{u}^b \delta^a{}_{\mu}. \tag{3.41}$$

Durch Vergleich mit (3.38) sieht man, daß $\omega^{ab}{}_{\mu}$ in diesem Spezialfall der antisymmetrische Anteil der holonomen GL(4)-wertigen Levi-Civita-Konnexion $\Gamma^{a}{}_{b\mu}$ ist:

$$\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^a{}_{b\mu} - \Gamma^b{}_{a\mu} \right).$$

Dieser in [19] angenommene Ansatz für die SO(4)-Version der Levi-Civita-Konnexion setzt also die konform flache Reskalierung (3.37) voraus. Im allgemeinen ist die Eichtransformation (2.27) zu verwenden.

Lösungen der euklidischen SU(2)-Yang-Mills-Gleichungen erhält man aus der SO(4)-Konnexion (3.41) durch Projektion auf die SU(2)-Unteralgebren mit Hilfe der Generatoren

$$\tilde{Y}_i$$

(D.12, siehe Anhang) in der Form

$$\overset{\pm}{A}_{i\mu} = -\operatorname{tr}\left(\overset{\pm}{Y}_{i} \omega_{\mu}\right)$$

$$= \overset{\pm}{Y}_{iab} \omega^{ab}{}_{\mu}$$

$$= -2 \overset{\pm}{Y}_{ia\mu} \hat{u}^{a}$$

oder mit (3.39)

$${}^{\pm}_{A_{i\mu}} = 2 Y_{i}^{\lambda}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln \sigma \qquad (i = 1, 2, 3 \ ; \ \mu = 1 \dots 4).$$
(3.42)

Mit beliebigen SU(2)-Generatoren Z^i sind die Konnexionen bzw. die Eichfelder

$$\overset{\pm}{\mathbf{A}} = \overset{\pm}{A}_{i\mu} Z^i \mathbf{d} x^{\mu}$$

die gesuchten SU(2)-Lösungen.

Der einfachste Fall ist $\overset{+}{n} = 0$, also

$$\zeta = i\kappa$$

$$z = r = \sqrt{x_{\mu}x^{\mu}} = c\tan\frac{\kappa}{2}$$

Aus (3.32) folgt für den konformen Reskalierungsfaktor σ :

$$\sigma = \frac{c}{2\rho} \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \right).$$

Das ist die bekannte 1-Instanton (bzw. Anti-Instanton-) Lösung [6].

Der konstante Vorfaktor $\frac{c}{2\rho}$ ist unwichtig, da er bei der Berechnung des Eichfeldes nach (3.42) herausfällt. Man kann daher c und ρ immer so wählen, daß

$$\frac{c}{2\rho} = 1. \tag{3.43}$$

Die Instanton-Lösung entsteht im wesentlichen aus der Kugel $S^4 \setminus \{1 \text{ Punkt} \}$ durch stereographische Projektion auf den ebenen Raum E^4 (Figur 3.1). Um eine homöomorphe Abbildung auf den ebenen Raum zu erhalten, mußte ein Punkt aus der 4-Sphäre entfernt werden. Die mit der Kugelmetrik \boldsymbol{G}

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right)^2} \delta_{\mu\nu}$$

versehene Mannigfaltigkeit $X^4 = R^4$ ist daher nur lokal isometrisch zur 4-Sphäre S^4 .

Während die Instantonlösung auf ganz E^4 regulär ist, entstehen in den übrigen Fällen $\overset{+}{n}\geq 1$ Singularitäten.

Der konformale Faktor σ folgt wieder aus (3.32) und (3.35):

$$\sigma^{2} = \frac{c^{2}}{4\rho^{2}} \left| \cosh \frac{\zeta}{2} \right|^{4}$$

$$= \frac{c^{2}}{4\rho^{2}} \left| 1 + \frac{z^{2}}{c^{2}} \right|^{2}.$$
(3.44)

Mit z = r + it wird daraus

$$\sigma^{2} = \frac{c^{2}}{4\rho^{2}} \left(1 + \frac{2(r^{2} - t^{2})}{c^{2}} + \left(\frac{r^{2} + t^{2}}{c^{2}}\right)^{2} \right).$$
(3.45)

Die Metrik (3.37) und der Lagrangian zum Eichfeld (3.42) divergieren an den Nullstellen von σ , also bei

$$r = 0 , t^2 = c^2.$$
 (3.46)

Im Fall $\overset{+}{n} = 1$ sind das zwei singuläre Punkte auf der t-Achse ("Zeitachse"). Die Lösung ist unter dem Namen Dimeron-Lösung bekannt [18].

Die Abbildung des Zylinders $S^3 \times R^1$ auf den ebenen Raum, die die Dimeron-Lösung erzeugt, ist schematisch in der Figur 3.2 dargestellt.

An der geometrischen Abbildung ist gut zu erkennen, wie die beiden Singularitäten des Dimerons zustande kommen. Die beiden unendlich entfernten Zylinderenden $(\xi \to \pm \infty)$ werden auf zwei Punkte des euklidischen Raums abgebildet. Die Wirkung des Eichfelds ist proportional zum 4-Volumen des Zylinders, daher divergiert die Wirkung in einer beliebig kleinen Umgebung der Dimeronpunkte im ebenen Bildraum.

Weitere Untersuchungen zur Riemannschen Geometrie der Dimeron-Lösung findet man z.B. in [50, 30].

In den übrigen Fällen $\stackrel{+}{n} \geq 2$ beschreibt (3.46) eine Sphäre $S^{\stackrel{+}{n-1}}$ mit Radius |c|, auf der die Lösungen singulär werden. Die Koordinate t ist in diesen Fällen als Radialkoordinate aufzufassen. Die höherdimensionalen hyperbolischen Räume und die Abbildungen, aus denen diese Lösungen hervorgehen, sind nicht mehr so einfach zu veranschaulichen wie im Fall des Instantons und des Dimerons. Jedoch entstehen hier die Singularitäten aus einem ähnlichen Grund wie bei der Dimeronlösung: Der nichtkompakte Parameterbereich um $\xi \to -\infty$ wird in einen endlichen Bereich um die singulären Sphären abgebildet und läßt die Wirkung der Feldkonfiguration divergieren.

Die Eichfelder zum Parameter $4 - \frac{1}{n}$ gehen aus dem Fall $\frac{1}{n}$ durch die Substitution

$$c^2 \rightarrow -c^2$$

und Uminterpretation von r und t hervor. Die aus H^4 konstruierte Lösung kann also durch eine einfache Ausdehnung des Parameterbereichs aus der Instantonlösung erzeugt werden und wird hier als H^4 -Instanton bezeichnet. Ebenso hängt die $S^1 \times H^3$ -Lösung mit dem Dimeron zusammen.

Die Lösungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. (Es wird $c = 2\rho$ gesetzt. Die Zeile "**G** lokal" in der Tabelle ist so zu verstehen, daß **G** in lokalen Koordinaten die Summenmetrik (3.19) zu den angegebenen Produkträumen ist.)





Fig. 3.1: Die Instanton-Lösung im flachen Raum E^4 . Die Metrik, aus der das Eichfeld über die Levi-Civita-Konnexion berechnet wird, entsteht durch stereographische Projektion der 4-dimensionalen Sphäre S^4 auf den flachen Raum E^4 . Die Lösung ist im gesamten Raum E^4 regulär.



Fig. 3.2: Die Dimeron-Lösung entsteht aus dem vierdimensionalen Zylinder $S^3 \times R^1$ durch eine konforme Abbildung auf den flachen Raum E^4 . Die Abbildung ist hier schematisch dargestellt. Die beiden unendlich fernen Enden des Zylinders werden auf zwei Punkte abgebildet und erzeugen so die Dimeronsingularitäten. Die 3-Sphären $S^3 \subset S^3 \times R^1$ (dargestellt durch Kreise senkrecht zur Zylinderachse) werden abgebildet auf 3-Sphären in E^4 , die um die beiden Meronsingularitäten gelagert sind. Nur in der Symmetrieebene der Konfiguration im flachen Raum wird die Metrik wie beim Instanton durch stereographische Projektion erzeugt, die abgebildete 3-Sphäre entartet hierbei in eine Hyperebene in E^4 .

Тур	Instanton	Dimeron	$S^2 \times H^2 -$	$S^1 \times H^3 -$	H^4-	
			Lösung	Meron	Instanton	
$\overset{+}{n}$	0	1	2	3	4	
X^4	R^4	$R^4 \backslash S^0$	$R^4 \backslash S^1$	$R^4 \backslash S^2$	$R^4 \backslash S^3$	
G =	$\frac{1}{\sigma^2} g$					
G lokal	S^4	$S^3 \times R$	$S^2 imes H^2$	$S^1 \times H^3$	H^4	
$\sigma^2(x^\mu) =$	$\left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right)^2$	$1 + \frac{2(r^2 - t^2)}{c^2} + \left(\frac{r^2 + t^2}{c^2}\right)^2$			$\left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right)^2$	
$\sigma^2(\xi,\kappa) =$	$(1+\cos\kappa)^{-2}$	$(\cosh\xi + \cos\kappa)^{-2}$		$(1+\cosh\xi)^{-2}$		
$\begin{array}{c} \text{Singularit}\\ \text{in}E^4 \end{array}$	_	bei $r = 0, t^2 = c^2$				
Koordinatentransformation $z = r + it = \frac{c}{i} \tanh(\frac{\zeta}{2})$						
r =	$c \tan(\frac{\kappa}{2})$	$c\frac{\sin\kappa}{\cosh\xi + \cos\kappa}$		-		
t =	_	$-c\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi+\cos\kappa}$		$-c \tanh(\frac{\xi}{2})$		
Rücktransformation $\zeta = \xi + i\kappa = 2i \arctan(\frac{z}{c})$						
$\cot \kappa =$	$\frac{c^2 - r^2}{2cr}$	$\frac{c^2 - r^2 - t^2}{2cr}$		_		
$\operatorname{coth} \xi =$	_	$-\frac{c^2+r^2+t^2}{2cr}$		$-\frac{c^2+t^2}{2ct}$		

Konform-flache Produkte aus Räumen konstanter Krümmung.

3.2.2 Grenzfälle

Für die singulären Lösungen $\stackrel{+}{n} \geq 1$ bzw. $\overline{n} \leq 3$ werden die Koordinaten so verschoben, daß der neue Ursprung auf der Singularitätenmannigfaltigkeit zu liegen kommt:

$$x'^{\mu} = x^{\mu}$$
 für $\mu \neq \bar{n} + 1$
 $x'^{\bar{n}+1} = x^{\bar{n}+1} - c.$ (3.47)

Dann wird

$$t^{2} = \left(x'^{\bar{n}+1} + c\right)^{2} + \sum_{I=\bar{n}+2}^{4} \left(x^{I}\right)^{2}.$$
 (3.48)

Setzt man das in den konformalen Faktor σ (3.45) ein und führt den Grenzübergang $c \to \infty$ durch, dann wandert der gegenüberliegende Punkt

$$x^{\overline{n}+1} = -c$$
, $x^{\mu} = 0$ $(\mu \neq \overline{n} + 1)$

der Singularitätensphäre ins Unendliche. Man erhält (ρ wird nun unabhängig von c konstant gehalten):

$$\sigma_{\infty}^{2} = \lim_{c \to \infty} \sigma^{2}$$
$$= \frac{1}{\rho^{2}} \left(r^{2} + \left(x'^{\bar{n}+1} \right)^{2} \right),$$

also mit

$$r^{2} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} (x^{i})^{2} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} (x^{\prime i})^{2}$$

in den neuen Koordinaten:

$$\sigma_{\infty}^{2} = \frac{1}{\rho^{2}} \sum_{i=1}^{n+1} \left(x^{\prime i} \right)^{2}.$$
(3.49)

Im Dimeron-Fall ist $\bar{n} + 1 = 4$, also

$$\sigma_{\infty}^2 = \frac{1}{\rho^2} x'_{\mu} x'^{\mu}.$$

Die konforme Abbildung in (ξ, κ) -Koordinaten lautet

$$\kappa = \arctan \frac{r}{t} \tag{3.50}$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\ln\left(t'^2 + r^2\right), \qquad (3.51)$$

die Umkehrung

mit

$$r = e^{-\xi} \sin \kappa$$

$$t' = e^{-\xi} \cos \kappa$$

$$r^{2} = \sum_{i=1}^{3} (x'^{i})^{2}$$

$$t' = \hat{x}^{4}.$$
(3.52)

Die konforme Reskalierungsfunktion wird

$$\sigma_{\infty}^{2} = \frac{1}{\rho^{2}} \left(t^{\prime 2} + r^{2} \right) = \frac{1}{\rho^{2}} e^{-2\xi}.$$
 (3.53)

Dieser kugelsymmetrisch um den Ursprung zentrierte Grenzfall ist die bekannte 1-Meron-Lösung, bei der eine der beiden Meronsigularitäten ins Unendliche geschoben wurde.

Bei den übrigen singulären Lösungen entartet im Grenzfall (3.49) die Singularitätensphäre

 $S^{3-\overline{n}}$

zu einer Geraden (Fall $\bar{n}=2$) bzw. zu einer $(3-\bar{n})$ -dimensionalen Ebene

 $E^{3-\overline{n}}$.

Die Lösungen (3.49) können als Verallgemeinerungen des 1-Meron-Grenzfalls mit höherdimensionalen Singularitäten-Ebenen betrachtet werden.

3.2.3 Selbstduale Lösungen

Einer der bekanntesten Ansätze zur Konstruktion von euklidischen Yang-Mills-Lösungen besteht darin, für die Krümmung Selbstdualität zu fordern:

$$\mathbf{F} = \pm \stackrel{(g)}{\star} \mathbf{F}. \tag{3.54}$$

(Man unterscheidet je nach Vorzeichen Selbstdualität (+) und Antiselbstdualität (-). Da der Unterschied für die vorliegende Arbeit uninteressant ist, werden wir beide Fälle unter dem Begriff Selbstdualität subsumieren und nur bei Bedarf unterscheiden.)

Dann sind wegen der Bianchi-Identität

$$\mathbf{DF} = 0 \tag{3.55}$$

die Yang-Mills-Gleichungen

$$\mathbf{D}_{\star}^{(g)}\mathbf{F} = 0 \tag{3.56}$$

automatisch erfüllt.

Der selbstduale Ansatz ist nur für sign(g) = 1 sinnvoll. Bei Minkowski-Signatur dagegen ist der Ansatz unbrauchbar, da dort wegen (A.16)

$$\overset{(g)(g)}{\star} \overset{(g)}{\star} \mathbf{F} = \operatorname{sign}(g)\mathbf{F} = -\mathbf{F}$$

ist, aus der Selbstdualität also $\mathbf{F} = 0$ folgt.

Fordert man die Reskalierungsbedingung (2.100) für eine SO(4)-Krümmung Ω , dann wirken die beiden Hodge-Stars auch in den SU(2)-Unteralgebren gleich:

$$\overset{(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \overset{(g)}{\star} \bar{\mathbf{F}}_{i} \overset{-}{Y^{i}} + \overset{(g)}{\star} \bar{\mathbf{F}}_{i} \overset{+}{Y^{i}}$$
$$= \overset{(G)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \overset{(G)}{\star} \bar{\mathbf{F}}_{i} \overset{-}{Y^{i}} + \overset{(G)}{\star} \overset{+}{\mathbf{F}}_{i} \overset{+}{Y^{i}},$$

also folgt

 $\overset{(g)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}} = \overset{(G)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}}$ (3.57)

 mit

$$\overset{\pm}{\mathbf{F}} = \overset{\pm}{\mathbf{F}}_{i} \overset{\pm}{Y^{i}}$$
 .

Durch Anwenden von $\stackrel{(g)}{\star}$ erhält man auch in den Unteralgebren die Bedingung (2.101):

$$\overset{(G)(g)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}} = \operatorname{sign}(g) \overset{\pm}{\mathbf{F}} .$$
 (3.58)

Die Reskalierungsbedingung in der Form (3.58) sieht auf den ersten Blick ähnlich aus wie der Selbstdualitätsansatz (3.54). Tatsächlich besteht eine Gemeinsamkeit der beiden Ansätze darin, die Yang-Mills-Gleichungen (3.56) durch eine hinreichende algebraische Bedingung zu ersetzen. Dadurch reduziert sich die Ordnung der auftretenden Differentialgleichungen um 1. Es gibt jedoch wesentliche Unterschiede

1. Der selbstduale Ansatz (3.54) ist nur in vier Dimensionen möglich, denn der Hogde-Star-Operator erzeugt aus der 2-Form F eine (N-2)-Form. Diese kann nur für N = 4 mit $\pm F$ gleichgesetzt werden. Dagegen ist der Reskalierungsansatz (3.58) bzw. (2.101) in beliebigen Dimensionen N möglich. Die Anwendung des zweiten Hogde-Star führt von der (N-2)-Form auf eine 2-Form zurück:

$$\begin{array}{cccc} \stackrel{\pm}{\mathbf{F}} & \stackrel{(g)}{\xrightarrow{\star}} & \stackrel{(g)}{\star} \stackrel{\pm}{\mathbf{F}} & \stackrel{(G)}{\xrightarrow{\star}} & \stackrel{(G)(g)}{\star} \stackrel{\pm}{\mathbf{F}} \\ \in \Lambda^2 & & \in \Lambda^{N-2} & & \in \Lambda^2 \\ \text{2-Form} & (N-2)\text{-Form} & \text{2-Form} \end{array}$$

2. Der Reskalierungsansatz (3.58) ist im Gegensatz zur Selbstdualität für beliebige Signaturen möglich.

Es wäre naheliegend, die Selbstdualität mit den bisherigen Methoden zu kombinieren, indem ähnlich wie in Abschnit 3.2.1 ein konform flacher Raum angesetzt wird mit der Forderung

$$\overset{(G)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \overset{(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \pm \boldsymbol{\Omega} \tag{3.59}$$

an die SO(4)-Krümmungs-2-Formen Ω . Wir werden jedoch zeigen , daß dieser Ansatz nur triviale Lösungen liefert. Um selbstduale Lösungen in das geometrische Konzept einzubeziehen ist eine leichte Modifikation des Ansatzes (3.59) nötig.

Für einen konform flachen Raum verschwinden die Weylformen (C.15)

$$\mathbf{C}^{ab} = \mathbf{\Omega}^{ab} - \frac{1}{N-2} (\mathcal{R}^a \wedge \mathbb{E}^b - \mathcal{R}^b \wedge \mathbb{E}^a) + \frac{R}{(N-1)(N-2)} \mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b = 0, \quad (3.60)$$

die Krümmungsformen sind also durch Ricciformen und Krümmungsskalar bestimmt. Für ${\cal N}=4$ gilt daher

$$\mathbf{\Omega}^{ab} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}^a \wedge \mathbb{E}^b - \mathcal{R}^b \wedge \mathbb{E}^a) - \frac{R}{6} \mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b.$$
(3.61)

Andererseits kann bei konform flacher Reskalierung der Zusammenhang der geometrischen Größen aus Anhang C benutzt werden. Die Krümmung des flachen Raums $\hat{\Omega}^{ab}$ verschwindet, so daß aus (C.9) für die Krümmung des konform flachen Raums folgt:

$$\Omega^{ab} = -\mathcal{J}^a \wedge \mathbb{E}^b + \mathcal{J}^b \wedge \mathbb{E}^a.$$
(3.62)

Die 1-Formen \mathcal{J}^a lassen sich folgendermaßen berechnen: Wegen

$$e_a{}^{\mu} = \sigma \delta_a{}^{\mu}$$

wird (C.5)

$$u_a = \frac{1}{\sigma} e_a{}^{\mu} \partial_{\mu} \sigma = \partial_a \sigma. \tag{3.63}$$

Die Konnexion des flachen Raums $\hat{\omega}_{ab}$ (C.8) verschwindet, da das kartesische Koordinatensystem als **g**-Orthonormalbasis verwendet wird:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_a = \partial_a, \hat{\mathbb{E}}^a = \mathbf{d}x^a.$$

Dann folgt aus (C.8)

$$\omega_{ab} = u_a \mathbb{E}_b - u_b \mathbb{E}_a. \tag{3.64}$$

Mit der Definition (C.10) folgt daraus für die 1-Formen \mathcal{J}^a :

$$\mathcal{J}^a = -du^a + \frac{1}{2}u^c u_c \mathbb{E}^a. \tag{3.65}$$

Durch Projektion auf die G-Orthonormalbasis e_a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{a}{}_{b} &= \langle \mathcal{J}^{a}, \boldsymbol{e}_{b} \rangle \\ &= (-\partial_{\mu}u^{a}) \langle \mathbf{d}x^{\mu}, e_{b}{}^{\nu}\partial_{\nu} \rangle + \frac{1}{2}u^{c}u_{c} \langle \mathbb{E}^{a}, \boldsymbol{e}_{b} \rangle \\ &= (-\partial_{\mu}u^{a})e_{b}{}^{\nu}\delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}u^{c}u_{c}\delta^{a}{}_{b} \end{aligned}$$

erhält man die Komponenten

$$\mathcal{J}_{ab} = -\sigma \partial_a \partial_b \sigma + \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} (\partial_\mu \sigma) (\partial_\nu \sigma) \delta_{ab} = \mathcal{J}_{ba}$$
(3.66)

zu

$$\mathcal{J}^a = \mathcal{J}^a{}_b \mathbb{E}^b. \tag{3.67}$$

Setzen wir nun die SO(4)-Selbstdualität in der Gestalt (3.59) an:

$$\mathbf{\Omega}^{ab} = \pm \stackrel{(G)}{\star} \mathbf{\Omega}^{ab}. \tag{3.68}$$

Wegen

$$\overset{(G)}{\star} \mathbb{E}^{a} \wedge \mathbb{E}^{b} = \frac{1}{2} \delta^{ac} \delta^{bd} \epsilon_{cd\alpha\beta} \mathbb{E}^{\alpha} \wedge \mathbb{E}^{\beta}$$
(3.69)

folgt aus (3.62)

$$\overset{(G)}{\star} \boldsymbol{\Omega}^{ab} = -\frac{1}{2} (\mathcal{J}^{ac} \delta^{bd} - \mathcal{J}^{bc} \delta^{ad}) \epsilon_{cd\alpha\beta} \mathbb{E}^{\alpha} \wedge \mathbb{E}^{\beta}.$$
(3.70)

Daraus folgen mit (3.59) die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors bezüglich des **G**-orthonormalen Basissystems $\{e_a, \mathbb{E}^a\}$:

$$\Omega^{ab}{}_{\alpha\beta} = \pm^{(G)} \Omega^{ab}{}_{\alpha\beta}$$
$$= \mp (\mathcal{J}^{ac} \delta^{bd} - \mathcal{J}^{bc} \delta^{ad}) \epsilon_{cd\alpha\beta}.$$

Durch Kontraktion erhält man den Ricci-Tensor in derselben Basis:

$$\mathcal{R}^{b}{}_{\beta} = \Omega^{ab}{}_{a\beta}$$
$$= \mp (\mathcal{J}^{ac}\delta^{bd} - \mathcal{J}^{bc}\delta^{ad})\epsilon_{cda\beta}.$$

Wegen der Symmetrien

$$\mathcal{J}^{ab} = \mathcal{J}^{ba}$$
 und $\delta^{ab} = \delta^{ba}$

verschwindet dieser Ausdruck. Mit den Ricci-Formen

$$\mathcal{R}^a = 0 \tag{3.71}$$

verschwinden dann wegen (3.61) auch die Krümmungsformen

$$\mathbf{\Omega}^{ab} = 0. \tag{3.72}$$

Aus dem Riemannschen Krümmungstensor eines konform flachen Raums können daher mit dem SO(4)-selbstdualen Ansatz (3.59) keine nichttrivialen Yang-Mills-Lösungen erzeugt werden.

Ein Ausweg besteht darin, mit der Definition (D.18) Dualität gleichzeitig auch in der Faser anzunehmen (vgl. [42]):

$$\overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}^* = \pm \mathbf{\Omega} \tag{3.73}$$

oder gleichbedeutend

$$\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega}^* = \pm \mathbf{\Omega}. \tag{3.74}$$

Mit der Zerlegung

$$\mathbf{\Omega} = \stackrel{+}{\mathbf{F}}_{i} \stackrel{+}{Y}^{i} + \stackrel{-}{\mathbf{F}}_{i} \stackrel{-}{Y}^{i} \tag{3.75}$$

folgt zusammen mit den Faser-(Anti-)Selbstdualitätsrelationen für die SU(2)-Generatoren

$$\begin{array}{rcl} \stackrel{+}{Y}{}^{i*} & = & + \stackrel{+}{Y}{}^{i} \\ \\ \bar{Y}{}^{i*} & = & - \stackrel{-}{Y}{}^{i*} \end{array}$$

die Zerlegung

$$\begin{array}{rcl} \overset{(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega}^{*} &=& \begin{pmatrix} \overset{(g)}{\star} & \overset{+}{\mathbf{F}}_{i} \end{pmatrix} \overset{+}{Y}^{i*} + \begin{pmatrix} \overset{(g)}{\star} & \overset{-}{\mathbf{F}}_{i} \end{pmatrix} \overset{-}{Y}^{i*} \\ &=& \begin{pmatrix} \overset{(g)}{\star} & \overset{+}{\mathbf{F}}_{i} \end{pmatrix} \overset{+}{Y}^{i} - \begin{pmatrix} \overset{(g)}{\star} & \overset{-}{\mathbf{F}}_{i} \end{pmatrix} \overset{-}{Y}^{i} \, . \end{array}$$

Gleichsetzen mit + Ω (3.73, oberes Vorzeichen) und Vergleich mit (3.75) liefert ein (eigentlich) selbstduales Feld \mathbf{F} und ein antiselbstduales Feld \mathbf{F} :

$${}^{(g)}_{\star} \boldsymbol{\Omega}^{*} = \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \begin{cases} {}^{(g)}_{\star} \stackrel{+}{\mathbf{F}} = \stackrel{+}{\mathbf{F}} \\ {}^{(g)}_{\star} \stackrel{-}{\mathbf{F}} = -\stackrel{-}{\mathbf{F}} . \end{cases}$$
(3.76)

Ein Minuszeichen im doppelt selbstdualen Ansatz (3.73) vertauscht Selbstdualität mit Antiselbstdualität in den $su^{\pm}(2)$ -Komponenten:

$${}^{(g)}_{\star} \boldsymbol{\Omega}^{*} = -\boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \begin{cases} {}^{(g)}_{\star} \stackrel{+}{\mathbf{F}} = -\stackrel{+}{\mathbf{F}} \\ {}^{(g)}_{\star} \stackrel{-}{\mathbf{F}} = \stackrel{-}{\mathbf{F}} \\ {}^{(g)}_{\star} \stackrel{-}{\mathbf{F}} = \stackrel{-}{\mathbf{F}} . \end{cases}$$
(3.77)

Die faserdualen Krümmungs-2-Formen sind mit (D.18) und (3.62)

$$\Omega^{*cd} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} \Omega_{ab}$$

$$= -\epsilon^{abcd} \mathcal{J}_a{}^f \mathbb{E}_f \wedge \mathbb{E}_b.$$
(3.78)

Anwenden des Hodge-Stars ergibt mit (3.69)

$$\overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}^{*cd} = \overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega}^{*cd} = -\frac{1}{2} \mathcal{J}_a^{\ f} \epsilon_{fb\alpha\beta} \epsilon^{abcd} \mathbb{E}^{\alpha} \wedge \mathbb{E}^{\beta}.$$
(3.79)

Die antisymmetrisierte Komponentenzerlegung von (3.62) ist

$$\mathbf{\Omega}^{cd} = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{J}^{c}{}_{\alpha} \delta^{d}{}_{\beta} - \mathcal{J}^{c}{}_{\beta} \delta^{d}{}_{\alpha} - \mathcal{J}^{d}{}_{\alpha} \delta^{c}{}_{\beta} + \mathcal{J}^{d}{}_{\beta} \delta^{c}{}_{\alpha} \right) \mathbb{E}^{\alpha} \wedge \mathbb{E}^{\beta}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt aus

$$\overset{(G)}{\star} \mathbf{\Omega}^* \mp \mathbf{\Omega} = 0$$

die Gleichung

$$\mathcal{J}_{a}{}^{f}\epsilon_{fb\alpha\beta}\epsilon^{abcd} \mp \left(\mathcal{J}^{c}{}_{\alpha}\delta^{d}{}_{\beta} - \mathcal{J}^{c}{}_{\beta}\delta^{d}{}_{\alpha} - \mathcal{J}^{d}{}_{\alpha}\delta^{c}{}_{\beta} + \mathcal{J}^{d}{}_{\beta}\delta^{c}{}_{\alpha}\right) = 0.$$

Kontraktion über (c, α) ergibt

$$(2\mp 1)\mathcal{J}^{\alpha}{}_{\alpha}\delta^{d}{}_{\beta} - (2\pm 2)\mathcal{J}^{d}{}_{\beta} = 0.$$
(3.80)

Für das obere Vorzeichen heißt das

$$\mathcal{J}^b = \frac{1}{4} \mathcal{J}^{\alpha}{}_{\alpha} \mathbb{E}^b.$$

Daraus folgt für die Krümmung

$$\mathbf{\Omega}^{ab} = -rac{1}{2} \mathcal{J}^{lpha}{}_{lpha} \mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b.$$

In vier Dimensionen muß der Vorfaktor $-\frac{1}{2}\mathcal{J}^{\alpha}{}_{\alpha}$ eine Konstante sein [49], d.h. man erhält aus

$$\overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}^* = \mathbf{\Omega}$$

einen Raum konstanter Krümmung. Diese Räume vom Typ S^4 oder H^4 wurden bereits in Abschnit 3.2.1 diskutiert und lieferten die 1-Instanton-Lösung. Aus (3.76) folgt außerdem, daß die Projektion auf den $SU^+(2)$ -Anteil die selbstduale (Instanton), die Projektion auf den $SU^-(2)$ -Anteil die antiselbstduale (Antiinstanton) Lösung ergibt.

Das <u>untere Vorzeichen</u> in (3.80) ergibt

$$\mathcal{J}^{\alpha}{}_{\alpha}=0$$

oder mit (3.66)

$$\delta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\frac{1}{\sigma} = 0. \tag{3.81}$$

Die Lösung

$$\frac{1}{\sigma} = \sum_{s=1}^{k+1} \frac{\lambda_s}{(x-y_s)} \tag{3.82}$$

liefert mit (3.42) und (3.77) die k-Instanton-Lösung nach [34, 23]

$$\bar{A}_{i\mu} = -2\bar{Y}_{i\ \mu}^{\rho}\partial_{\rho}\ln\frac{1}{\sigma}$$
(3.83)

sowie die k-Antiinstanton-Lösung

$${}^{+}_{A_{i\mu}} = -2 Y^{+}_{i}{}^{\rho}_{\mu} \partial_{\rho} \ln \frac{1}{\sigma} . \qquad (3.84)$$

Damit wurde gezeigt, daß auch die Multi-Instanton-Lösungen sehr gut in die allgemeinen Konzepte der geometrischen Theorie passen.

Im übrigen sind selbstduale Yang-Mills-Felder in der Literatur gut untersucht (siehe zum Beispiel [23]), so daß hier nicht weiter darauf eingegangen werden muß.

3.3 Nichtkonforme Reskalierung

Die konforme Reskalierung, mit deren Hilfe wir bereits Instanton, Dimeron und verwandte Lösungen konstruiert haben, ist nur ein Spezialfall der allgemeinen Reskalierung (2.111).

Selbst wenn der ursprüngliche Raum, aus dessen Levi-Civita-Konnexion die Eichfelder abgeleitet werden, konform flach ist, muß die Abbildung in den flachen Raum keineswegs eine konforme Reskalierung sein. Das läßt sich besonders gut in fünf Dimensionen demonstrieren. Die im nächsten Abschnitt hergeleiteten Lösungen, die als Verallgemeinerung der 1-Meron-Lösung im fünfdimensionalen Raum betrachtet werden können, lassen sich explizit angeben.

3.3.1 Meronartige Lösungen in E^5

Nach den Bemerkungen in Abschnitt 2.3.4 ist die Reskalierungsbedingung (2.101) für N = 5 durch die konforme Reskalierung nicht erfüllbar. Geht man von einem fünfdimensionalen Riemannschen Raum aus, dann muß für den Übergang zur flachen Metrik ein anderer Ansatz gefunden werden.

Betrachten wir hierzu einen Produktraum beliebiger Dimension N

$$X^N = \bar{X}^{\bar{n}} \times \bar{X}^{\bar{n}}$$

mit Gesamtmetrik

$$G=\stackrel{-}{G}\oplus \stackrel{+}{G}$$

und Gesamtkrümmung

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{G}) = \bar{\mathbb{R}}(\bar{\boldsymbol{G}}) \oplus \bar{\mathbb{R}}(\bar{\boldsymbol{G}}).$$
(3.85)

Eine Alternative zur konformen Reskalierung der Gesamtmetrik besteht darin, in den beiden Unterräumen mit verschiedenen Reskalierungsfunktionen umzuskalieren:

$$\aleph: \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{g} = (\bar{\sigma})^2 \; \bar{\boldsymbol{G}} \oplus (\bar{\sigma})^2 \; \boldsymbol{G}^{\dagger} \; . \tag{3.86}$$

Die Reskalierungsfunktionen $\bar{\sigma}$ und $\overset{+}{\sigma}$ sind dabei nicht eingeschränkt auf die jeweiligen Unterraumkoordinaten, sondern können von allen Koordinaten

$$x = (\bar{x}, \bar{x}), \ \bar{x} = (\bar{x}_i)(i = 1 \dots \bar{n}), \ \bar{x} = (\bar{x}_I), (I = \bar{n} + 1 \dots N)$$

abhängen:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{x}) \quad , \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{x}).$$

Die Gesamtkrümmung $\mathbb{R}(\boldsymbol{g})$ der Zielmetrik \boldsymbol{g} (3.86) kann daher im Gegensatz zu $\mathbb{R}(\boldsymbol{G})$ (3.85) im allgemeinen nicht mehr in eine Summe aus $\mathbb{R}(\bar{\boldsymbol{g}})$ und $\mathbb{R}(\bar{\boldsymbol{g}})$ zerlegt

werden. Ohne dieses "Mischen" der Unterraumkoordinaten in den Reskalierungsfunktionen wären auch im Fall der konformen Reskalierung von Produkträumen in 3.2.1 nur triviale (d.h. konstante) Umskalierungen möglich gewesen.

In Komponenten einer Produktbasis ausgedrückt ist (3.86)

$$g_{\alpha\beta}(x) = \bar{\sigma}^2 (x) \delta^i_{\alpha} \delta^j_{\beta} \bar{G}_{ij} (\bar{x}) + \bar{\sigma}^2 (x) \delta^I_{\alpha} \delta^J_{\beta} \bar{G}_{IJ} (\bar{x}).$$
(3.87)

Mit den Projektoren auf die Unterraumanteile

$$\begin{split} \bar{\delta}^{\beta}_{\alpha} &= \begin{cases} \delta^{\beta}_{\alpha} & \text{für } \beta \leq \bar{n} \\ 0 & \text{für } \beta > \bar{n} \\ 0 & \text{für } \beta \leq \bar{n} \\ \delta^{\beta}_{\alpha} & \text{für } \beta \leq \bar{n} \\ \delta^{\beta}_{\alpha} & \text{für } \beta > \bar{n} \end{cases}$$

$$\end{split}$$

werden die allgemeinen Reskalierungsfunktionen (2.111) in diesem Fall

$$g_{\alpha\beta}(x) = \aleph_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}(x)G_{\gamma\delta}(x)$$
$$\aleph_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}(x) = \bar{\sigma}^{2}(x)\bar{\delta}_{\alpha}{}^{\gamma}\bar{\delta}_{\beta}{}^{\delta} + \bar{\sigma}^{2}(x)\bar{\delta}_{\alpha}{}^{\gamma}\bar{\delta}_{\beta}{}^{\delta}$$

Die inverse Metrik \boldsymbol{g}^{-1} ist

$$g^{\alpha\beta}(x) = \bar{\sigma}^{-2}(x)\delta_i^{\alpha}\delta_j^{\beta}\bar{G}^{ij}(\bar{x}) + \bar{\sigma}^{-2}(x)\delta_I^{\alpha}\delta_J^{\beta}\bar{G}^{IJ}(\bar{x})$$
$$= \left(\bar{\sigma}^{-2}(x)\bar{\delta}_{\gamma}^{\alpha}\bar{\delta}_{\delta}^{\beta} + \bar{\sigma}^{-2}(x)\bar{\delta}_{\gamma}^{\alpha}\delta_{\delta}^{\beta}\right)G^{\gamma\delta}(x).$$

Setzt man das in die linke Seite der algebraischen Reskalierungsbedingung (2.110) ein und beachtet die Summenzerlegung (3.85) oder (2.77), dann wird

$$\sqrt{|g|}g^{\gamma\alpha}g^{\delta\beta}\mathbb{R}_{\alpha\beta} = \sqrt{|g|} \left(\bar{\sigma}^{-4}\bar{G}^{\gamma\alpha}\bar{G}^{\delta\beta}\bar{\mathbb{R}}_{\alpha\beta} + \bar{\sigma}^{-4}\bar{G}^{\gamma\alpha}\bar{G}^{\delta\beta}\bar{\mathbb{R}}_{\alpha\beta} \right).$$

Für die Determinante gilt

$$\begin{aligned} |g| &= (\bar{\sigma})^{2\bar{n}} (\overset{+}{\sigma})^{2\bar{n}} |G| \\ |G| &= |\bar{G}|_{(\bar{n})} |\overset{+}{G}|_{(\overset{+}{n})}, \end{aligned}$$

wobei | \bar{G} |_(\bar{n}) (| $\overset{+}{G}$ |_(n)) die Determinante im \bar{n} -($\overset{+}{n}$ -)dimensionalen Unterraum bedeutet.

Die Bedingung (2.110) lautet nun

$$\sqrt{|G|} \left[\left(\left(\stackrel{+}{\sigma}\right)^{n} \left(\bar{\sigma}\right)^{\bar{n}-4} - 1 \right) \bar{G}^{\gamma \alpha} \bar{G}^{\delta \beta} \bar{\mathbb{R}}_{\alpha \beta} + \left(\left(\stackrel{+}{\sigma}\right)^{\bar{n}-4} \left(\bar{\sigma}\right)^{\bar{n}} - 1 \right) \bar{G}^{\gamma \alpha} \bar{G}^{\delta \beta} \bar{\mathbb{R}}_{\alpha \beta} \right] = 0.$$

Wenn wir annehmen, daß einer der Teilräume flach ist

$$\overset{+}{\mathbb{R}}_{\alpha\beta} = 0, \qquad (3.89)$$

dann überträgt sich eine Yang-Mills-Lösung auf die Zielmetrik \boldsymbol{g} unter der Bedingung

$$(\overset{+}{\sigma})^{\overset{+}{n}}(\bar{\sigma})^{\overset{-}{n}-4} = 1.$$
 (3.90)

Als Beispiel gehen wir aus von den fünfdimensionalen Räumen

$$S^4 \times R^1$$
 und $H^4 \times R^1$.

Zunächst betrachten wir $S^4 \times R^1.$ Mit derselben Notation wie in 3.2.1 ist die Gesamtmetrik

$$G = \overline{G} \oplus \overline{G}$$

$$= \mathbf{d}\kappa^{2} + \sin^{2}\kappa \ \mathbf{d} \ \overline{s^{2}}_{(3)} \oplus \mathbf{d}\xi^{2}.$$
(3.91)

Die beiden Unterräume S^4 und R^1 mit $\overline{\boldsymbol{G}}$ und $\overline{\boldsymbol{G}}$ erfüllen als Räume konstanter Krümmung die Yang-Mills-Gleichungen (2.79) beziehungsweise (2.68). Nach dem dimensionalen Superpositionsprinzip gilt dies auch für die Levi-Civita-Konnexion (2.32) der Gesamtmetrik \boldsymbol{G} .

Soweit stimmt die Argumentation mit den vierdimensionalen Fällen aus Abschnitt 3.2.1 überein.

Im vorliegenden Beispiel $\bar{n}{=}4, \dot{\bar{n}}{=}1$ folgt jedoch aus (3.90) die Reskalierungsbedingung

$$\overset{+}{\sigma}=1. \tag{3.92}$$

Um eine Lösung im flachen Raum zu erhalten, muß die zweite Reskalierungsfunktion $\bar{\sigma}$ so gewählt werden, daß die Zielmetrik \boldsymbol{g} (3.86) flach wird. Das Problem läßt sich mit der Methode der Koordinatentransformation (Seite 60) explizit lösen.

Für die Metrik des flachen Raums wählen wir (mit Bezeichnungen wie in 3.2.1 mit der Wahl $\rho = 1$) fünfdimensionale Zylinderkoordinaten mit der "Zeitkoordinate" t und vierdimensionaler Radialkoordinate r:

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}r^2 + r^2 \mathbf{d} \,\bar{\boldsymbol{s}^2}_{(3)} \oplus \mathbf{d}t^2. \tag{3.93}$$

Gleichsetzen mit (3.86)

$$\mathbf{d}r^{2} + r^{2}\mathbf{d} \,\bar{s}^{2}{}_{(3)} + \mathbf{d}t^{2} = \bar{\sigma}^{2} \left(\mathbf{d}\kappa^{2} + \sin^{2}\kappa\mathbf{d} \,\bar{s}^{2}{}_{(3)}\right) + \bar{\sigma}^{2} \,\mathbf{d}\xi^{2}$$
(3.94)

und Identifikation der Unterraumkoordinaten in $\mathbf{d} \ s^2{}_{(3)}$ ergibt analog zu Seite 68 für die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} (\xi,\kappa) &\to (r,t) \\ \mathbf{d}r &= \frac{\partial r}{\partial \xi} \mathbf{d}\xi + \frac{\partial r}{\partial \kappa} \mathbf{d}\kappa \\ \mathbf{d}t &= \frac{\partial t}{\partial \xi} \mathbf{d}\xi + \frac{\partial t}{\partial \kappa} \mathbf{d}\kappa \end{aligned}$$

die Bestimmungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 = \overset{+}{\sigma^2} \tag{3.95}$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \kappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \kappa}\right)^2 = \bar{\sigma}^2 \tag{3.96}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \kappa} + \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \kappa} = 0$$
(3.97)

$$r^2 = \bar{\sigma}^2 \sin^2 \kappa. \tag{3.98}$$

(3.99)

Man sieht hier nochmals deutlich den Unterschied zu (3.24) bis (3.27). Auf der rechten Seite von (3.95) und (3.96) treten jetzt die beiden verschiedenen Funktionen $\bar{\sigma}, \overset{+}{\sigma}$ auf, daher kann die Koordinatentransformation nicht mehr auf eine komplexe konforme Abbildung zurückgeführt werden.

Jedoch ist ein ähnlicher Umformungstrick wie bei der konformen Abbildung (Seite 69) möglich. Dazu betrachten wir die Umkehrtransformation

 $\begin{array}{rcl} (r,t) & \rightarrow & (\xi,\kappa) \\ \\ \mathbf{d}\xi & = & \frac{\partial\xi}{\partial r}\mathbf{d}r + \frac{\partial\xi}{\partial t}\mathbf{d}t \\ \\ \\ \mathbf{d}\kappa & = & \frac{\partial\kappa}{\partial r}\mathbf{d}r + \frac{\partial\kappa}{\partial t}\mathbf{d}t \end{array}$

mit den aus (3.94) folgenden Gleichungen

$${}^{+}_{\sigma^{2}} \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^{2} + {}^{-}_{\sigma^{2}} \left(\frac{\partial\kappa}{\partial r}\right)^{2} = 1 \qquad (3.100)$$

$$\overset{+}{\sigma^2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \overset{-}{\sigma^2} \left(\frac{\partial\kappa}{\partial t}\right)^2 = 1 \qquad (3.101)$$

$${}^{+}_{\sigma^{2}}\frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\partial\xi}{\partial t} + {}^{-}_{\sigma^{2}}\frac{\partial\kappa}{\partial r}\frac{\partial\kappa}{\partial t} = 0 \qquad (3.102)$$

$$\sigma^2 \sin^2 \kappa = r^2. \tag{3.103}$$

Hin- und Rücktransformation sind verknüpft durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial t}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \kappa} \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \kappa}{\partial r} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa}{\partial t} & -\frac{\partial \xi}{\partial t} \\ -\frac{\partial \kappa}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial r} \end{pmatrix}.$$
 (3.104)

Die ersten drei Bestimmungsgleichungen (3.100) bis (3.102) werden nun folgendermaßen addiert:

$$(3.101) - (3.100) \pm 2i(3.102).$$

Das ergibt

$$\overset{+}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \pm i \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 = i^2 \, \overline{\sigma^2} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \pm i \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right)^2,$$

also

$$\overset{+}{\sigma} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \pm i \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = i \lambda_{\pm} \ \bar{\sigma} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \pm i \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right)$$

mit einer Vorzeichenkonstanten $\lambda_{\pm} \in \{-1, 1\}$. Da $\overline{\sigma}$ und $\overline{\sigma}$ nach Voraussetzung reell sind, erhält man aus Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \pm \lambda_{\pm} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{\partial \kappa}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp \lambda_{\pm} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{\partial \kappa}{\partial r}.$$

Das Vorzeichen ist wählbar, da man durch die Ersetzung $\xi \to -\xi$ (oder $\kappa \to -\kappa$ oder $\bar{\sigma} \to -\bar{\sigma}$ usw.) das jeweils andere Vorzeichen in den Gleichungen erreichen kann. Wir wählen

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tag{3.105}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\bar{\sigma}}{\frac{\sigma}{\tau}} \frac{\partial \kappa}{\partial r}.$$
(3.106)

Durch Einsetzen von (3.106) in (3.100) ergänzt man dieses Gleichungssystem durch eine weitere unabhängige Gleichung für ξ :

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}}.$$
(3.107)

Das Gleichungssystem (3.105,3.106,3.107) ist (bis auf die fixierte Vozeichenwahl) äquivalent zu den ersten drei Bestimmungsgleichungen (3.100,3.101,3.102). Anstelle von (3.107) hätte man ebenso gut eine Gleichung für κ wählen können:

$$\left(\frac{\partial\kappa}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}}.$$
(3.108)

In unserem fünfdimensionalen Beispiel ist jedoch (3.107) wegen $\overset{+}{\sigma}=1$ einfacher zu lösen. Einsetzen von (3.103)

$$\bar{\sigma} = \frac{r}{\sin \kappa} \tag{3.109}$$

in (3.105, 3.106) und Substitution

$$u := \int \frac{1}{\sin \kappa} \mathbf{d}\kappa = \ln \tan \frac{\kappa}{2} \tag{3.110}$$

ergibt das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = r \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.111}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -r \frac{\partial u}{\partial r} \tag{3.112}$$

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = 1.$$
(3.113)

Die letzte Gleichung wird identisch erfüllt durch die Einführung einer Winkelvariablen $\alpha(r, t)$ mit

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \cos \alpha.$$
(3.114)

Durch Ableiten der Gleichung (3.111) nach r und der Gleichung (3.112) nach t folgt als Integrabilitätsbedingung die Gleichung

$$r\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t} - r\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \sin\alpha = 0.$$
(3.115)

Das ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in α .Die Gleichung kann entweder nach weiterem Ableiten von (3.114) und Elimination von $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ oder nach dem Charakteristikenverfahren [56, 2] gelöst werden.

Wir betrachten die Charakteristikenmethode:

Fall 1 : $\sin \alpha \not\equiv 0$.

Gleichung (3.115) kann in den Bereichen sin $\alpha \neq 0$ umgeformt werden zu

$$-r\frac{\partial\alpha}{\partial t} + r\cot\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial r} = 1.$$
(3.116)

Mit einem Parameter s lauten die zugehörigen charakteristischen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -r$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = r \cot \alpha \qquad (3.117)$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = 1,$$

die leicht gelöst werden können:

$$\alpha = s + c_1
r = c_2 \sin(s + c_1)
t = c_2 \cos(s + c_1) + t_0.$$
(3.118)

 c_1, c_2 und t_0 sind Integrationskonstanten in s $(\frac{dc_i}{ds} = \frac{dt_0}{ds} = 0)$, aber nicht unbedingt Konstante bezüglich (r, t).

Für die Charakteristikenmethode müßten nun eigentlich Anfangsbedingungen für die charakteristischen Linien vorgegeben werden. Im vorliegenden Fall folgt jedoch aus den beiden unteren Gleichungen von (3.118) unabhängig von den Anfangsbedingungen:

$$(c_2)^2 = r^2 + (t - t_0)^2.$$

Löst man (3.118) nach sin α und $\cos \alpha$ auf, so erhält man mit (3.114) unmittelbar

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}} = r \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \cos \alpha = \frac{t - t_0}{\sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}} = -r \frac{\partial u}{\partial r}.$$
(3.119)

Durch Ableiten der Integrabilitätsbedingungen für die Funktionen ξ und u folgt, daß t_0 eine Konstante sein muß.

Das Gleichungssystem (3.119) läßt sich sofort aufintegrieren. Mit der Rücksubstitution von (3.110) findet man

$$\tan\frac{\kappa}{2} = C\frac{t - t_0 + \sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}}{r}$$
(3.120)

(C = Integrationskonstante),

$$\xi = \sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}.$$
(3.121)

und

$$\bar{\sigma} = \frac{r^2 + C^2(t - t_0 + \sqrt{r^2 + (t - t_0)^2})^2}{2C(t - t_0 + \sqrt{r^2 + (t - t_0)^2})}$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}(1 + C^2) - (t - t_0)(1 - C^2)}{2C}.$$
(3.122)

Fall 2 : $\sin \alpha \equiv 0$.

Wenn $\sin \alpha$ identisch verschwindet, dann folgt aus (3.114)

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm 1,$$

also

 $\xi = \pm t + c_3.$

Aus (3.105,3.106,3.109) folgt für $r \neq 0$ weiter:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial \kappa}{\partial r} = \mp \frac{\sin \kappa}{r}.$$

Mit einer Konstanten c lautet die Lösung für beide Vorzeichen

$$\cot \kappa = \frac{c^2 - r^2}{2cr},\tag{3.123}$$

wobei die beiden Vorzeichenmöglichkeiten durch die Substitution $c \to -c$ auseinander hervorgehen.

Interpretiert man t als Zeitvariable in E^5 , dann stellt (3.123) eine "statische" Lösung dar. Die durch ξ beschriebene Zylinderachse wird dabei direkt auf die Zeitachse abgebildet.

Das Auftreten dieser "statischen" Lösung ist nicht verwunderlich. Es handelt sich um die aus S^4 gewonnene Instanton-Lösung (siehe Tabelle 3.2.1), die durch Hinzufügen einer weiteren Dimension in E^5 eingebettet wurde.

Dagegen liefert der erste Fall eine neue, nicht-statische Klasse von Lösungen, die nach Konstruktion Ähnlichkeiten mit der Meronlösung aus den Abschnitten 3.2.1/3.2.2 aufweisen müssen. Diese fünfdimensionalen Lösungen werden hier als 5D-Meronen

bezeichnet. Im nächsten Abschnitt werden die geometrischen Eigenschaften dieser Lösungen mit den alten Meronlösungen verglichen.

Weitere Lösungen findet man, indem der Raum positiver konstanter Krümmung durch einen Raum negativer konstanter Krümmung ersetzt wird. Dazu ist lediglich in (3.91) $\sin \kappa$ durch $\sinh \kappa$ zu ersetzen. Wählt man anstelle von (3.110) die Substitution

$$u := \int \frac{1}{\sinh \kappa} \mathbf{d}\kappa = \ln \tanh \frac{\kappa}{2}, \qquad (3.124)$$

dann bleiben die Gleichungen (3.111,3.112,3.113) formal gleich.

Man findet so neben der trivialen H^4 -Einbettung die Lösungen

$$\tanh\frac{\kappa}{2} = C\frac{t - t_0 + \sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}}{r}$$
(3.125)

 mit

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{r^2 + (t - t_0)^2}(1 - C^2) - (t - t_0)(1 + C^2)}{2C}.$$
(3.126)

Diese Lösungen werden singulär auf dem 4-Kegel

$$t - t_0 = \operatorname{sign}(1 - C^2) \left[\left(\frac{1 + C^2}{1 - C^2} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} r.$$
 (3.127)

Wie schon im vierdimensionalen Fall (Abschnitt 3.2.1) erzeugt der Übergang zu einem hyperbolischen Unterraum höherdimensionale Singularitäten.

Die aus $S^4 \times R^1$ und $H^4 \times R^1$ abgeleiteten Lösungen sind in der folgenden Tabelle nochmals zusammengefaßt. Dabei wurde im Fall der 5*D*-Meronen der Übersichtlichkeit halber die Singularität in den Ursprung gelegt ($t_0 = 0$), im Fall der eingebetteten Instantonlösung die Zeitachse mit ξ identifiziert, so daß in der Tabelle nur noch die relevanten Konstanten auftreten.

Тур	Eingebettetes Instanton	5 <i>D</i> -Meronen	Eingebettetes H^4 -Instanton	$H^4 \times R^1$ -Lösung
X^5	R^5	$R^5 \setminus \{ 1 \text{ Punkt} \}$	$R^5 \backslash (S^3 \times R)$	$R^5 \setminus 4$ -Kegel
$oldsymbol{G}$ lokal	$S^4 \times R^1$	$S^4 \times R^1$	$H^4 \times R^1$	$H^4 \times R^1$
$\kappa =$	$\operatorname{arccot} \frac{r^2 - c^2}{2cr}$	$2 \arctan C \frac{t + \sqrt{r^2 + t^2}}{r}$	$\operatorname{arcoth} \frac{r^2 + c^2}{2cr}$	$2 \operatorname{artanh} C \frac{t + \sqrt{r^2 + t^2}}{r}$
$\xi =$	t	$\sqrt{r^2 + t^2}$	t	$\sqrt{r^2 + t^2}$
$\bar{\sigma}=$	$\frac{c}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{c}\right)^2\right)$	$\frac{\sqrt{r^2 + t^2}(1 + C^2) - (1 - C^2)t}{2C}$	$\frac{c}{2}\left(1-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right)$	$\frac{\sqrt{r^2 + t^2}(1 - C^2) - (1 + C^2)t}{2C}$
$\overset{+}{\sigma}=$	1	1	1	1

Meron- und Instantonartige Lösungen in E^5 .

3.3.2 Geometrie der 1-Meron-Lösungen in E^4 und E^5

Die 5*D*-Meron-Lösungen (3.3.1) werden für beliebige $C \neq 0$ am Ursprung singulär, d.h. der Reskalierungsfaktor $\overline{\sigma}$ in der Metrik (3.86) verschwindet dort. Die Lösung lebt daher auf der Mannigfaltigkeit $R^5 \setminus \{1Punkt\}$.

Die Ursache für das Auftreten dieser Singularität ist qualitativ dieselbe wie bei der vierdimensionalen 1-Meron-Lösung aus Abschnitt 3.2.2. In beiden Fällen werden die \bar{n} -Sphären $\xi = \text{const.}$ auf konzentrisch um den Ursprung gelagerte \bar{n} -Sphären im flachen Raum abgebildet,

 $\xi = \text{const.} \rightarrow r^2 + t^2 = \text{const.'}.$

In den beiden folgenden Figuren sind die Abbildung für die beiden Fälle $\bar{n} + 1 = 4$ und $\bar{n} + 1 = 5$ direkt gegenübergestellt. Bei der alten 1-Meron-Lösung wächst der Radius der ineinandergeschachtelten 3-Sphären mit (3.52) exponentiell, wenn ξ von $+\infty$ nach $-\infty$ geht (siehe Figur 3.3). Dabei wird an jedem Punkt isotrop mit dem Faktor σ_{∞}^2 umskaliert.

Dagegen wächst bei den fünfdimensionalen meronartigen Lösungen der Radius der 4-Sphären in E^5 linear mit der Variablen ξ , die die Zylinderachse parametrisiert (Figur 3.4).

Das folgt unmittelbar aus

 $\stackrel{+}{\sigma}\equiv 1,$

das heißt in ξ -Richtung (zu $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{d}\xi^2$) bleibt die Metrik (3.86) bei der Reskalierungsabbildung unverändert, während orthogonal dazu mit $\bar{\sigma} \neq 1$ umskaliert wird.

Man hat mit den 5D-Meronen daher ein explizites Beispiel einer nichtkonformen Reskalierung.

Die Reskalierung der Meronkonfigurationen wurde im wesentlichen durch die Abbildung

$$(\xi,\kappa) \to (r,t)$$

beschrieben, das Problem reduzierte sich damit auf zwei Dimensionen. Im Fall der 1-Meron- oder Dimeronkonfiguration in E^4 entsprach der vierdimensionalen konformen Reskalierung aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3.29) eine zweidimensionale komplexe konforme Abbildung

$$\zeta = \xi + i\kappa \to z = r + it. \tag{3.128}$$

Im Fall der 5*D*-Meron-Lösungen dagegen folgen aus (3.105, 3.106) und (3.104) die Gleichungen

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\frac{b}{\sigma}}{\sigma} \frac{\partial t}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \kappa} = -\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{\partial t}{\partial \xi}.$$
(3.129)



Fig. 3.3: Die 1-Meron-Lösung im flachen Raum E^4 . Die Metrik entsteht durch konforme Reskalierung aus $S^3 \times R^1$.



Fig. 3.4: Die 5*D* -Meron-Lösung im flachen Raum E^5 . Im Gegensatz zur vierdimensionalen 1-Meron-Lösung liegt hier <u>keine</u> konforme Reskalierung vor, sondern ein Beispiel für eine nichtkonforme Reskalierung ausgehend von einem konform flachen Raum $S^4 \times R^1$. Daß die Abbildung nicht konform ist erkennt man daran, daß der Radius der konzentrisch um den Ursprung gelagerten 4-Sphären im flachen Raum (unten) linear mit dem Abstand entlang der Zylinderachse (oben) wächst.

Diese unterscheiden sich von den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3.29) nur um das Verhältnis der Reskalierungsfunktionen $\overset{+}{\sigma}$ / $\overline{\sigma}$. Die zugehörige Abbildung (3.128) ist quasikonform:

Für eine quasikonforme Abbildung $\zeta \to z$ gilt anstelle der Cauchy- Riemann-Gleichungen die Beltrami-Differentialgleichung [33, 17, 40]

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta^*} = \mu \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} \tag{3.130}$$

 mit

 $|\mu| < 1.$

Im Spezialfall der konformen Abbildung wird $\mu \equiv 0$. Die Beltrami-Gleichung (3.130) ist äquivalent zum Gleichungssystem (3.129), wenn für die Funktion μ gewählt wird:

$$\mu = \frac{\overset{+}{\sigma} - \bar{\sigma}}{\overset{+}{\sigma} + \bar{\sigma}}.$$
(3.131)

Mit $\overset{+}{\sigma}=1$ ist die Bedingung $|\mu| < 1$ in jedem beschränkten Regularitätsgebiet $0 < \bar{\sigma} < \infty$ erfüllt. (Für $\bar{\sigma} < 0$ kann $\zeta \to \zeta^*$ ersetzt werden.)

Die 5D-Meronen werden daher durch quasikonforme Abbildungen repräsentiert. Bei konformen Abbildungen werden infinitesimal kleine Kreise auf Kreise abgebildet, bei quasikonformen Abbildungen werden diese zu Ellipsen deformiert.

Die Dimeronlösung und die 5*D*-Meron-Lösung enthalten -außer der Möglichkeit, die Meronorte zu verschieben- beide einen freien Parameter *c* bzw. *C*. Im Fall der alten Dimeronlösung war die Interpretation der Konstanten *c* klar: im flachen Raum war 2|c| gerade der Abstand zwischen den beiden Meronsingularitäten. Die 1-Meron-Lösung entstand aus dem Dimeron, indem eine Meronsingularität ins Unendliche geschoben wurde. Die vierdimensionale 1-Meron-Lösung entspricht also - nach einer Koordinatenverschiebung (3.48) - dem Abstandsparameter $c \to \infty$ und enthält keine wesentlichen freien Parameter mehr. Anschaulich ist dieser Fall $c \to \infty$ in Figur 3.3 dargestellt. Ein endlicher Wert für *c* erzeugt zwei Singularitäten (siehe Figur 3.2).

Dagegen tritt bei den 5*D*-Meronen für jeden Parameterwert $C \neq 0$ nur eine Singularität in E^5 auf, im Gegensatz zur vierdimensionalen 1-Meron-Lösung hat man hier also eine ganze Klasse von 1-Meron-Lösungen vorliegen. Die einzelnen Lösungen können in Figur 3.4 nicht unterschieden werden.

Die Lösungen besitzen jedoch unterschiedliche repräsentative Distributionen [13, 29], d.h. durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\cot\kappa$$

definierte Integralflächen.

Der Normalenvektor auf diesen Integralflächen beschreibt den Verlauf des Winkels κ . Die Kenntnis der funktionalen Abhängigkeit $\kappa(r,t)$ genügt wegen (3.109) zur Beschreibung der Lösung ebenso gut wie die Kenntnis der Reskalierungsfunktion $\bar{\sigma}$. In den Figuren 3.5 und 3.6 ist die repräsentative Distribution für verschiedene Parameterwerte dargestellt.



Fig. 3.5: Repräsentative Distribution der 5D-Meron-Lösung im flachen Raum E^5 zum Parameter C = -1.



Fig. 3.6: Repräsentative Distribution der 5D-Meron-Lösung zum Parameter C=-2.

Lagrangian und Wirkung

Für einen Produktraum aus einem \overline{n} -dimensionalen Raum $\overline{X}^{\overline{n}}$ konstanter Krümmung und einem eindimensionalen Raum ist die Gesamtkrümmung allein durch den \overline{n} -dimensionalen Faktor gegeben als

$$\mathbf{\Omega}^{ab} = \bar{K} \bar{\mathbb{E}}^a \wedge \bar{\mathbb{E}}^b \tag{3.132}$$

mit der orthonormalen Kobasis $\overline{\mathbb{E}}^a$ im Unterraum \overline{X}^n .

Zur Berechnung des Lagrangian der Konfiguration im flachen Raum

$$\overset{(g)}{\star}\mathcal{L}_{so(\bar{n}+1)} = \overset{(g)}{\star}\mathcal{L}_{so(\bar{n})} = -\mathrm{tr}\mathbf{\Omega}\wedge\overset{(g)}{\star}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{ab}\wedge\overset{(g)}{\star}\mathbf{\Omega}^{ab}$$

ist der Hodge-Star zur flachen Metrik \boldsymbol{g} anzuwenden. Wegen der Reskalierungsbedingung (2.100), die durch (3.90) erfüllt ist, können wir $\overset{(g)}{\star}$ durch $\overset{(G)}{\star}$ ersetzen.

Ergänzt man $\{\overline{\mathbb{E}}^a\}$ durch einen dazu orthogonalen Kobasisvektor zu einer vollständigen **G**-othonormalen Gesamtbasis $\{\mathbb{E}^a\}$, dann wird mit den Projektoren (3.88)

$$\mathbf{\Omega}^{ab} = \stackrel{-a_{-b}}{K} \stackrel{b}{\delta_c} \stackrel{b}{\delta_d} \mathbb{E}^c \wedge \mathbb{E}^d.$$

Die **G**-duale (N-2)-Form der 2-Form-Basis $\mathbb{E}^c \wedge \mathbb{E}^d$ ist

$$\overset{(G)}{\star} \mathbb{E}^c \wedge \mathbb{E}^d = \frac{1}{(N-2)!} \epsilon_{cda_3...a_N} \mathbb{E}^{a_3} \wedge \ldots \wedge \mathbb{E}^{a_N}.$$

Mit den Bezeichungen des Anhangs berechnet man daraus folgenden Zusammenhang zwischen Lagrangian und Geometrie:

$$\overset{(g)}{\star}\mathcal{L}_{so(\bar{n})} = \bar{K}^2 \bar{n} \ (\bar{n} \ -1) \overset{(G)}{\star} 1. \tag{3.133}$$

Der Lagrangian ist also proportional zum Volumenelement $\overset{(G)}{\star}1$ des ursprünglichen Riemannschen Raums.

Die eichinvarianten Singularitäten der Lagrangedichte sind somit tatsächlich durch die Singularitäten der nach E^N abgebildeten Metrik G gegeben, d.h. durch die Nullstellen der Reskalierungsfunktion $\overline{\sigma}$.

Berechnen wir im Fall der 5*D*-Meron-Lösungen die Wirkung innerhalb einer 5-Sphäre mit Radius ξ_0 um die Meronsingularität. Wegen (3.121) wird der fünfdimensionale Abstand vom Meronzentrum durch die Variable ξ des ursprünglichen Raums beschrieben. Eine Integration über das eingeschlossene Volumen liefert daher die endliche Wirkung (mit $\overline{K} = \frac{1}{\rho^2} = 1$)

$$S(\xi_0) = 12 \int_{S^4 \times [0,\xi_0]} {}^{(G)}_{\star} 1 = 12 \int_0^{\xi_0} \mathbf{d}\xi \cdot \text{Volumen}(S^4) = \xi_0 32\pi^2.$$
(3.134)

Da der Parameterbereich von ξ (3.121) nach unten durch $\xi = 0$ beschränkt ist, bleibt bei den 5*D*-Meronen das in die Meronumgebung abgebildete Zylindervolumen und damit auch die Wirkung endlich. Dagegen war beim vierdimensionalen 1-Meron (oder Dimeron) der Parameterbereich von ξ unbeschränkt, die Wirkung dieser Lösungen divergiert in der Umgebung eines Merons. Die Gesamtwirkung, d.h. das Integral über den Gesamtraum, divergiert in beiden Fällen.

3.3.3 Multimeronlösungen

Mit den Mulitmeronlösungen wird in diesem Abschnitt eine weitere interessante Klasse von Lösungen in das geometrische Klassifikationsschema eingeordnet. Dabei handelt es sich um Verallgemeinerungen der Dimeronlösung (Abschnitt 3.2.1) mit mehr als zwei Meronsingularitäten auf einer Geraden (t-Achse).

Es stellt sich heraus, daß auch hier - ähnlich wie bei den 5D-Meronen - der Übergang von einem lokal konform flachen Raum zur Metrik \boldsymbol{g} des flachen Raums durch eine nichtkonforme Reskalierungsabbildung vollzogen werden muß.

Dazu gehen wir wieder von einem lokalen Produkt $S^3 \times R^1$ aus. Im Unterschied zu Abschnitt 3.2.1 werden zwei Verallgemeinerungen vorgenommen.

- 1. Die konforme Reskalierung wird ersetzt durch den allgemeineren diagonalen Ansatz (2.113).
- 2. Die Zielmetrik \boldsymbol{g} wird nicht von vornherein als flach angenommen. Vielmehr verallgemeinern wir die Problemstellung zu der Frage: Welche Zielmetriken \boldsymbol{g} sind erlaubt, so daß die Yang-Mills-Gleichungen weiterhin gelten und die S^3 -Unterraum-Symmetrie erhalten bleibt ?

Da die Rechnung in einer dem Riemannschen Raum angepaßten Orthonormalbasis am einfachsten ist, wählen wir zur Metrik

$$\boldsymbol{G} = \underbrace{\mathbf{d}\kappa^2 \sin^2 \kappa \mathbf{d} \, \varphi_2^2 + \sin^2 \kappa \sin^2 \bar{\varphi}_2 \, \mathbf{d} \, \varphi_1^2}_{S^3} \times \underbrace{\mathbf{d}\xi^2}_{R^1} \qquad (3.135)$$

die G-orthonormale Tetrade

$$\mathbb{E}^{1} = \sin \kappa \sin \bar{\varphi}_{2} \mathbf{d} \bar{\varphi}_{1}$$

$$\mathbb{E}^{2} = \sin \kappa \mathbf{d} \bar{\varphi}_{2}$$

$$\mathbb{E}^{3} = \mathbf{d} \kappa$$

$$\mathbb{E}^{4} = \mathbf{d} \xi.$$
(3.136)

Für die Zielmetrik \boldsymbol{g} gelte die diagonale Reskalierung (2.113) bezüglich dieser Basis $(\sigma_4 = \overset{+}{\sigma})$:

$$\boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{i}^{2} \mathbb{E}^{i} \otimes \mathbb{E}^{i} + \stackrel{+}{\sigma^{2}} \mathbb{E}^{4} \otimes \mathbb{E}^{4}$$

$$= \sigma_{1}^{2} \sin^{2} \kappa \sin^{2} \bar{\varphi}_{2} \mathbf{d} \stackrel{-}{\varphi^{2}}_{1} + \sigma_{2}^{2} \sin^{2} \kappa \mathbf{d} \stackrel{-}{\varphi^{2}}_{2} + \sigma_{3}^{2} \mathbf{d} \kappa^{2} + \stackrel{+}{\sigma^{2}} \mathbf{d} \xi^{2}.$$
(3.137)

Das ist zwar nicht die allgemeinst mögliche Reskalierung, da das Diagonalisierungstheorem auf Seite 52 die Orthonormalbasis nicht fixiert, jedoch ist der Ansatz durch die Symmetrie des Riemannschen Raums naheliegend. Außerdem nehmen wir an, daß die $\sigma_i, \dot{\sigma}$ nur von ξ, κ abhängen, damit die S³-Unterraumsymmetrie erhalten bleibt. Die Gesamtkrümmung des Raums zur Metrik **G** stammt vom Unterraum S³, aus den Krümmungs-2-Formen bezüglich der Basis \mathbb{E}^a

$$\mathbf{\Omega}^{a}{}_{b} = \delta^{a}{}_{i} \delta_{bi} \mathbb{E}^{i} \wedge \mathbb{E}^{j}$$

erhält man die entkoppelte Krümmung

$$oldsymbol{\Omega} = \ell_a \otimes \mathcal{L}^b \otimes oldsymbol{\Omega}^a{}_b = \sum_{i,j=1}^3 \ell_i \otimes \mathcal{L}^j \otimes \mathbb{E}^i \wedge \mathbb{E}_j.$$

Mit den Abkürzungen

$$S_{i} = \frac{\sqrt{|g|}}{\prod_{j=1}^{3} \sigma_{j}^{2}} \sigma_{i}^{2} = \frac{+\sigma}{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} \sigma_{i}^{2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$
(3.138)

findet man für die g-dualen Krümmungsformen

$$\overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}^a{}_b = S_i \epsilon^a{}_{bi4} \mathbb{E}^i \wedge \mathbb{E}^4. \tag{3.139}$$

(Auch hier Summation über mehrfach vorkommende Indizes i, j = 1, 2, 3.)

Da der Ausgangsraum $S^3 \times R^1$ die Holonomiegruppe SO(3) aufweist, liefert das Gleichsetzen mit den **G**-dualen Krümmungsformen nach (2.100) aufgrund des Theorems auf Seite 56 die konforme Reskalierung (3.7). Setzt man für den flachen Raum den Riemannschen Krümmungsskalar der konform reskalierten Zielmetrik **g** gleich Null, so findet man eine Bernoullische Differentialgleichung für u_3 (C.5) als Funktion von κ . Das führt zur Dimeronlösung, die wir in Abschnitt 3.2.1 bereits mit der Methode der Koordinatentransformation konstruiert hatten. Statt dessen berechnen wir allgemein die Yang-Mills-Gleichungen nach Übergang zur Metrik **g** (2.91).

Die nichtverschwindenden Konnexions-1-Formen zur Orthonormalbasis (3.136) sind

$$\omega_{2}^{1} = \frac{\cot \overline{\varphi}_{2}}{\sin \kappa} \mathbb{E}^{1}$$

$$\omega_{3}^{1} = \cot \kappa \mathbb{E}^{1}$$

$$\omega_{3}^{2} = \cot \kappa \mathbb{E}^{2}$$

$$\omega_{j}^{i} = -\omega_{i}^{j}$$
(3.140)

Die äußere kovariante Ableitung
 ${\bf D}$ von (3.139) zu den Konnexionsforme
n $\pmb{\omega}^i{}_j$ liefert

$$(\mathbf{D}^{(g)}_{\star} \mathbf{\Omega})^{1}_{2} = \mathbf{d} S_{3} \wedge \mathbb{E}^{3} \wedge \mathbb{E}^{4} \qquad = 0$$

$$\left(\mathbf{D}^{(g)}_{\star}\mathbf{\Omega}\right)^{1}_{3} = \left[\left(S_{3}-S_{2}\right)\cot\kappa\mathbb{E}^{3}-\mathbf{d}S_{2}\right]\wedge\mathbb{E}^{2}\wedge\mathbb{E}^{4} = 0$$

$$\left(\mathbf{D}^{(g)}_{\star}\mathbf{\Omega}\right)^{2}_{3} = \left[(S_{1} - S_{2}) \frac{\cot \bar{\varphi}_{2}}{\sin \kappa} \mathbb{E}^{2} + (S_{1} - S_{3}) \cot \kappa \mathbb{E}^{3} + \mathbf{d}S_{1} \right] \wedge \mathbb{E}^{1} \wedge \mathbb{E}^{4} = 0.$$

$$(3.141)$$

Wegen $S_i = S_i(\xi, \kappa)$ folgen daraus die Bedingungen

$$S_1 = S_2$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \kappa} = (S_3 - S_1) \cot \kappa.$$
(3.142)

Man kann $\sigma_i, \overset{+}{\sigma} > 0$ wählen und daher setzen

$$e^Z := S_1 = S_2 = \frac{\overset{+}{\sigma}}{\sigma_3}.$$
 (3.143)

Damit wird (3.142) zu

 $\frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial \kappa}{\partial t}$

$$\frac{\partial Z}{\partial \kappa} = \left(\left(\frac{S_3}{S_1} \right)^2 - 1 \right) \cot \kappa = \left(\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)^2 - 1 \right) \cot \kappa \tag{3.144}$$

Was bedeutet die Reskalierungsbedingung (3.144) im Spezialfall einer flachen Metrik ${\boldsymbol g}$?

Setzt man (3.137) nach der inzwischen gewohnten Methode gleich der flachen Metrik

$$\boldsymbol{g} = r^2 \left(\sin^2 \bar{\varphi}_2 \mathbf{d} \, \boldsymbol{\varphi}_1^2 + \mathbf{d} \, \boldsymbol{\varphi}_2^2 \right) + \mathbf{d}r^2 + \mathbf{d}t^2$$

und transformiert man (3.141) in Koordinaten (r, t), dann erhält man für die Koordinatentransformation das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = e^{-Z} \frac{\partial \kappa}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -e^{-Z} \frac{\partial \kappa}{\partial r}$$

$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right)^2$$

$$\sigma_1^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \kappa}$$

$$+ \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial \kappa}{\partial r} = \left(\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)^2 - 1\right) \cot \kappa \left(\left(\frac{\partial \kappa}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right)^2\right).$$
(3.145)

Durch wechselseitiges Ableiten der beiden ersten Gleichungen nach t und r und Einsetzen der übrigen findet man als Integrabilitätsbedingung des Gleichungssystems:

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial r^2} + \cot \kappa \left(\left(\frac{\partial \kappa}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)^2 \right) - \frac{\sin \kappa \cos \kappa}{r^2} = 0.$$
(3.146)

Mit der Substitution

$$\psi = \cos \kappa \tag{3.147}$$

geht das über in die einfachere Gestalt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\psi \left(1 - \psi^2\right)}{r^2} = 0.$$
(3.148)

Das ist die von Glimm und Jaffe [24] angegebene Multimerongleichung.

Die Existenz von Multimeronlösungen dieser Gleichung mit MMeronpaaren entlang der $t\text{-}\mathrm{Achse}$

$$\lim_{r \to 0} \psi(r, t) = (-1)^l, \quad t_l < t < t_{l+1}, \quad l = 0 \dots 2M$$

$$\lim_{(r,t) \to \infty} \psi(r, t) = 1 \qquad (t_0 = -\infty, t_{2M+1} = +\infty)$$
(3.149)

und mit $|\psi| \leq 1$ wurde mit funktionalanalytischen Methoden mehrfach gezeigt [35, 14]. Eine explizite geschlossene Form scheint jedoch nicht angebbar zu sein. In [14] wurde gezeigt, daß Multimeronlösungen von (3.148) nur in Form von Meronpaaren auftreten, d.h. eine ungerade Anzahl von Meronsingularitäten ist nicht möglich.

Eine grobe Approximation, die um die Meronsingularitäten herum näherungsweise gilt und den Randbedingungen (3.149) genügt, erhält man durch Überlagerung von 1-Meron-Winkeln:

$$\kappa = \sum_{l=1}^{2M} (-1)^l \arctan \frac{t - t_l}{r}.$$
(3.150)

Über die rotationssymmetrischen Konfigurationen von (3.148) hinausgehend wurden in [13] zu beliebig im Raum verteilten Singularitäten Approximationen angegeben, die die Yang-Mills-Gleichungen (1.20) in der Umgebung der Meronorte erfüllen. Der Meron-Paarungseffekt scheint demnach nur bei einigen symmetrischen Konfigurationen aufzutreten.

Nach den vorangegangenen Überlegungen ist es nicht notwendig, ausschließlich Lösungen im flachen Raum zu suchen. Durch Einsetzen von (3.144) in (3.137) findet man die erlaubten Zielmetriken

$$\boldsymbol{g} = \sigma_3^2 \left[\frac{\sin^2 \kappa}{\tan \kappa \frac{\partial Z}{\partial \kappa} + 1} \left(\sin^2 \bar{\varphi}_2 \, \mathbf{d} \, \bar{\varphi}_1^2 + \mathbf{d} \, \bar{\varphi}_2^2 \right) + \mathbf{d}\kappa^2 + e^{2Z} \mathbf{d}\xi^2 \right].$$
(3.151)

Zu jeder dieser Metriken stellt (3.140) eine Yang-Mills-Lösung in der so(4)-Unteralgebra $so(3) \sim su(2)$ dar. Nach Abschnitt 2.3.2 kann auch unabhängig von der Metrik
auf die su(2)-Anteile projiziert werden. **g** läßt sich durch Übergang zur Variablen $\psi = \cos \kappa$ und Einführung der Funktion

$$U := Z + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \psi^2 \right)$$
 (3.152)

vereinfachen. Daraus erhält man schließlich die

Folgerung:

Aus der Reskalierung von $S^3 \times R^1$ mit Metrik **G** (3.135) erhält man Lösungen der SU(2)-Yang-Mills-Gleichungen auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Metrik

$$\boldsymbol{g} = \sigma_3^2 \left[\frac{\mathbf{d}\psi^2}{1 - \psi^2} + \frac{\psi}{-\frac{\partial U}{\partial \psi}} \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{s}}^2{}_{(2)} + \frac{e^{2U}}{1 - \psi^2} \mathbf{d}\xi^2 \right].$$
(3.153)

Die Funktionen $\sigma_3(\xi, \psi), U(\xi, \psi)$ müssen die Bedingungen

$$\sigma_3^2 > 0$$
 (3.154)

$$\frac{\psi}{-\frac{\partial U}{\partial \psi}} > 0 \tag{3.155}$$

erfüllen, sind ansonsten beliebig.

Im Spezialfall

$$U = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \psi^2 \right) \quad \Leftrightarrow \quad Z = 0$$

erhält man Lösungen auf allen Mannigfaltigkeiten, die durch konforme Reskalierung aus $S^3 \times R^1$ hervorgehen. Beim Übergang zur flachen Metrik liefert das die Dimeronlösung.

Die Bestimmung aller flachen Metriken der Form (3.153) würde auch Multimeronkonfigurationen enthalten, wobei lediglich die Metrik in ungewöhnlichen Koordinaten auftritt. Die Forderung verschwindender Riemannscher Krümmung

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{g}) = 0 \tag{3.156}$$

zur Metrik g(3.153) führt zu einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen bis 3. Ordnung in U.

Gleichzeitig muß der Übergang zu Koordinaten des flachen Raums nach (3.145) möglich sein. Das kann im folgenden zur Rechtfertigung eines Separationsansatzes ausgenutzt werden.

Die beiden ersten Gleichungen in (3.145) haben dieselbe Form wie die Gleichungen (3.105,3.106) der 5*D*-Meron-Lösungen. Nach (3.143) nimmt hierbei σ_3 die Rolle von $\bar{\sigma}$ ein. Wie schon bei den 5*D*-Meronen muß die konforme Abbildung der Dimeronlösung durch eine quasikonforme Abbildung ersetzt werden. Zusätzlich wird der Unterraum S^3 durch zwei verschiedene Reskalierungsfunktionen σ_3 und σ_1 aufgespalten.

Folgerung:

Die Reskalierungsabbildungen auf den flachen Raum, die zu Multimeronlösungen führen, sind gegeben durch quasikonforme Abbildungen $(\xi, \kappa) \to (r, t)$.

Die Umkehrtransformation zu (3.145) ergibt mit der Variable
n $\psi = \cos \kappa$ das Gleichungssystem

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = -e^{U} \frac{\partial t}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = e^{U} \frac{\partial r}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = -\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \psi}\right)^{2} + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^{2}\right] \frac{\psi \left(1 - \psi^{2}\right)}{r^{2}}.$$
(3.157)

Eliminiert man daraus t, dann erhält man folgende Gleichung 1. Ordnung für $r(\xi, \psi)$ allein:

$$e^{-2U} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \kappa}\right)^2 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \psi}}{\psi \left(1 - \psi^2\right)} r^2.$$
(3.158)

Zur Integrabilität der Funktion $t(\xi, \psi)$ folgt zusätzlich die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{\partial r}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - \frac{\partial U}{\partial \xi} e^{-2U} \frac{\partial r}{\partial \xi} + e^{-2U} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} = 0.$$
(3.159)

Wäre also U als Funktion von ξ und ψ bekannt, würde sich das Problem auf die Lösung einer Gleichung 1. Ordnung (3.158), die sich mit dem Charakterisikenverfahren behandeln läßt, und einer linearen Gleichung 2. Ordnung (3.159) reduzieren.

Zur Bestimmung von U kann aber (3.153) ohne Kenntnis der Koordinatentransformation benutzt werden. Wenn die Metrik g (3.153) flach sein soll, dann muß die konform reskalierte Metrik

$$\boldsymbol{g}_{\text{konf}} = \frac{1}{\sigma_3^2} \boldsymbol{g} = \frac{\mathbf{d}\psi^2}{1 - \psi^2} + \frac{\psi}{-\frac{\partial U}{\psi}} \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{s}}^2{}_{(2)} + \frac{e^{2U}}{1 - \psi^2} \mathbf{d}\boldsymbol{\xi}^2 \tag{3.160}$$

konform flach sein, das heißt die Weylformen (C.16) zu dieser reduzierten Metrik müssen verschwinden:

Weyl
$$(\boldsymbol{g}_{konf}) = \mathbf{C}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{g}_{konf}) = 0.$$
 (3.161)

 $\boldsymbol{g}_{\text{konf}}$ ist aber gerade der Teil von \boldsymbol{g} , der allein die gesuchte Funktion U enthält, (3.161) liefert daher Bestimmungsgleichungen für U.

Behauptung: Auf jedem Flächenstück $\psi = \psi_0 = \text{const.}$, auf dem U nicht divergiert, kann die ξ -Abhängigkeit von $U(\xi, \psi)$ wegtransformiert werden, d.h. man kann U so wählen, daß gilt

$$U(\xi,\psi_0) = U_0 = \text{const.}.$$

Beweis: Sei $\psi = \psi_0$ festgelegt und $U(\xi, \psi)$ eine Lösung von (3.157). Dann wähle man die neue Funktion

$$U(\xi, \psi) = U(\xi, \psi) - U(\xi, \psi_0) + U_0$$

mit der vorgegebenen Konstanten U_0 . Man wähle ein neues $\tilde{\xi}$ mit der Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tilde{\xi}} = e^{-U(\xi,\psi_0)+U_0}.\tag{3.162}$$

Im Regularitätsgebiet von U, d.h. $|U| < \infty$, verschwindet die Ableitung $\frac{d\xi}{d\xi}$ nirgends, also definiert (3.162) eine umkehrbare Koordinatentransformation $\xi \to \tilde{\xi}$. In der neuen Koordinate geht (3.157) über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\xi}} &= -e^{\tilde{U}(\tilde{\xi},\psi)} \frac{\partial t}{\partial \psi} \\ \frac{\partial t}{\partial \tilde{\xi}} &= e^{\tilde{U}(\tilde{\xi},\psi)} \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \psi} &= -\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2 \right] \frac{\psi \left(1 - \psi^2 \right)}{r^2}. \end{aligned}$$

Man hat also eine Lösung des Gleichungssystems mit der gewünschten Eigenschaft

$$\tilde{U}(\tilde{\xi},\psi_0) = U_0.$$

(q.e.d.)

Daraus folgt insbesondere, daß bei einem Separationsansatz

$$U(\xi, \psi) = U_1(\xi) + U_2(\psi)$$

zu (3.157) der von ξ abhängige Teil vollständig wegtransformiert werden kann.

Ein Separationsansatz ist also gleichbedeutend mit dem Ansatz

$$U(\xi,\psi) = U(\psi).$$

Berechnet man damit die Weylformen in (3.161), dann findet man

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\alpha\beta} &= \\ A^{\alpha\beta} \left[\psi^2 (1-\psi^2)^2 \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} \frac{\mathrm{d}^3 U}{\mathrm{d}\psi^3} - \psi^2 (1-\psi^2)^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\psi^2} \right)^2 + 3\psi^2 (1-\psi^2)^2 \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} \right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\psi^2} \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} \right)^2 \left(1 + 3\psi^4 + \psi (1+3\psi^2) (1-\psi^2) \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} + 2\psi^2 (1-\psi^2)^2 \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} \right)^2 \right) \right] \end{aligned}$$
(3.163)

mit einem nicht verschwindenen Formenanteil $A^{\alpha\beta}$.

Der Weyltensor verschwindet daher genau dann, wenn die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\psi^{2}(1-\psi^{2})^{2}v\frac{\mathrm{d}^{2}v}{\mathrm{d}\psi^{2}} - \psi^{2}(1-\psi^{2})^{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\psi}\right)^{2} + 3\psi^{2}(1-\psi^{2})^{2}v^{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\psi}$$

$$+v^{2}\left(1+3\psi^{4}+\psi(1+3\psi^{2})(1-\psi^{2})v+2\psi^{2}(1-\psi^{2})^{2}v^{2}\right) = 0$$

$$(3.164)$$

 mit

$$v := \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} \tag{3.165}$$

erfüllt ist.

Da man die ξ -Abhängigkeit der Funktion $U(\xi, \psi)$ allgemein auf einer Fläche $\psi =$ const. wegtransformieren kann, gilt das - Stetigkeit vorausgesetzt - näherungsweise auch in einer gewissen Umgebung dieser Fläche. In dieser Näherung muß jede Lösung nach geeigneter Transformation die gewöhnliche Differentialgleichung (3.164) erfüllen.

Zu (3.164) sind nur die exakten Lösungen v = 0 und $v = -\frac{\psi}{1-\psi^2}$ bekannt. Die Lösung v = 0 (U = const.) erfüllt nicht die Nebenbedingung (3.155), die andere Lösung ist die Dimeronkonfiguration.

Da ψ im Intervall [-1, 1] liegt, ist eine Reihenentwicklung als Lösungsansatz zu (3.164) naheliegend.

Eine direkte Reihenentwicklung um eine Fläche $\psi = \psi_0 \neq 0, \pm 1$ herum liefert mit der Anfangsbedingung $U(\psi_0) = 0$ als erste Glieder die Näherung

$$U(\psi) \approx a(\psi - \psi_0) + \frac{b}{2}(\psi - \psi_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{a^2 + a^3\psi_0 + H\psi_0^2 + 2a^3\psi_0^3 + (3a^2 - 2H)\psi_0^4 - 3a^3\psi_0^5 + H\psi_0^6}{a\psi_0(1 - \psi_0^2)}(\psi - \psi_0)^3 + O\left((\psi - \psi_0)^4\right) H = 3a^2b - b^2 + 2a^4.$$
(3.166)

Mit der Substitution

$$v(\psi) = -y(\psi)\frac{\psi}{1-\psi^2}$$

geht (3.164) über in

$$(1-\psi^2)^2 y \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\psi^2} - (1-\psi^2)^2 \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 - 3\psi(1-\psi^2)y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\psi} +2y^4\psi^2 - 4y^3 - 6y^3\psi^2 + 4y^2(1+\psi^2) = 0.$$
(3.167)

Ein Reihenansatz um "Baglines" $\psi_0=0$ herum liefert

$$y(\psi) = y_0 + B\psi + \frac{1}{2} \frac{B^2 - 4y_0^2 + 4y_0^3}{y_0} \psi^2 + O\left(\psi^3\right).$$
(3.168)

Eine Lösung der Transformationsgleichungen (3.157) in die (r, t)-Koordinaten bei bekanntem $U(\psi)$ ist

$$r = B_0 e^{c_0 \xi} \exp\left(\int \mathbf{d}\psi \sqrt{\mathcal{Q} - c_0^2 e^{-2U}}\right)$$
$$t = \int \mathbf{d}\xi e^U \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}$$
$$c_0^2 = \text{const.} = e^{2U} \left[\mathcal{Q} - \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{2\mathcal{Q}}\right)^2\right]$$
$$\mathcal{Q} = -\frac{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi}}{\psi(1-\psi^2)}.$$

Vom Standpunkt der Gleichung (3.148) erhält man so implizite Lösungen.

Ein Vorteil dieses Approximationsansatzes besteht darin, daß die Näherung nicht auf die Umgebung der Meronorte beschränkt ist, sondern um die Flächen $\psi = \text{const.}$ herum. Auf diesen Flächen verlaufen die Flußlinien des Gauß-Stroms [13], die (in gewisser Analogie zu den Feldlinien elektrischer Ladungen) von den topologischen Punktladungen an den Meronsingularitäten ausgehen.

Diese Flußlinien können sich aber beliebig weit von den auf der t-Achse liegenden Meronsingularitäten entfernen. Man erhält also im Unterschied zu (3.150) Fernfeld-approximationen.

Sofern Meronen bei der Auswertung von Pfadintegralen berücksichtigt werden müssen, scheint aber gerade der Fernfeldbereich interessant zu sein [15].

3.4 Zusammenhang mit der Trivialisierbarkeit

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Fälle $S^{\overline{n}} \times R^1$ unmittelbar mit $SO(\overline{n}+1)$ -trivialisierbaren Eichfeldern [11, 12] zusammenhängen.

In Abschnitt 3.2.1 wurde die Metrik der Einheitssphäre $S^{\bar{n}}$ ($\rho = 1$) zu Winkelvariablen $\{\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_{\bar{n}}\}$ rekursiv aus niederdimensionalen Einheitssphären erzeugt:

$$\bar{\boldsymbol{G}} = \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{s}^2}_{(\bar{n})} = \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{\varphi}^2}_{\bar{n}} + \sin^2 \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\bar{n}} \, \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{s}^2}_{(\bar{n}-1)} \,. \tag{3.169}$$

Orthonormierte \bar{n} -Bein-Felder erhält man rekursiv durch

$$\mathbb{E}_{(\bar{n})}^{\bar{n}} = \mathbf{d} \,\overline{\varphi}_{\bar{n}}$$

$$\mathbb{E}_{(\bar{n})}^{i} = \sin \overline{\varphi}_{\bar{n}} \,\mathbb{E}_{(\bar{n}-1)}^{i} \qquad (i = 1 \dots \bar{n} - 1).$$
(3.170)

Aus

$$\mathbf{d}\mathbb{E}^i_{(ar{n})} = -oldsymbol{\omega}_{(ar{n})}{}^i{}_\mu$$

berechnet man die Konnexons-1-Formen ebenfalls rekursiv:

$$\boldsymbol{\omega}_{(\bar{n})}^{i}{}_{\bar{n}}^{i} = -\boldsymbol{\omega}_{(\bar{n})}^{\bar{n}}{}_{i}^{i} = \cot \bar{\varphi}_{\bar{n}} \mathbb{E}_{(\bar{n})}^{i} \quad (i = 1 \dots \bar{n} - 1)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{(\bar{n})}^{i}{}_{k}^{i} = \boldsymbol{\omega}_{(\bar{n} - 1)}^{i}{}_{k}^{i} \quad (i, k = 1 \dots \bar{n} - 1).$$

$$(3.171)$$

Mit

$$\kappa:=\stackrel{-}{\varphi}_{\stackrel{-}{n}}$$

erhält man ein neues orthonormales \bar{n} -Bein

$$B^{i} := \bar{\nu}^{i} \mathbf{d}\kappa + \sin \kappa \mathbf{d} \,\bar{\nu}^{i} \qquad (i = 1 \dots \bar{n}), \qquad (3.172)$$

wenn gilt:

$$\nu^i \bar{\nu}_i = 1 \tag{3.173}$$

$$\mathbf{d} \,\overline{\nu^{i}} \otimes \mathbf{d} \,\overline{\nu_{i}} = \mathbf{d} \,\overline{s^{2}}_{(\bar{n}-1)} \,. \tag{3.174}$$

Deutet man $\bar{\nu^i}$ als kartesische Koordinaten in $E^{\bar{n}}$, dann definiert die Gleichung

 $\bar{\nu}^i \bar{\nu}_i = 1$

die Einheitssphäre $S^{\overline{n}-1}$ eingebettet in $E^{\overline{n}}$ mit induzierter Metrik (3.174). Aus (3.173) folgt

$$\nu^i \mathbf{d} \ \bar{\nu}_i = 0, \tag{3.175}$$

so daß zusammen mit (3.174) gilt:

$$B^{i} \otimes B_{i} = \mathbf{d}\kappa^{2} + \sin^{2}\kappa \mathbf{d} \,\bar{s}^{2}_{(\bar{n}-1)} = \bar{\boldsymbol{G}} \,. \tag{3.176}$$

Die B^i bilden also tatsächlich ein neues \overline{G} -orthonormales \overline{n} -Bein.

Die $SO(\bar{n})$ -Konnexionsformen $\tilde{\omega}_k^i$ zu dieser neuen Kobasis findet man wieder durch die Cartanschen Strukturgleichungen zu verschwindender Torsion

$$\mathbf{d}B^i = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i_k \wedge B^k. \tag{3.177}$$

Durch Ableiten von (3.172) folgt

$$\mathbf{d}B^{i} = \mathbf{d} \,\overline{\nu^{i}} \wedge \mathbf{d}\kappa + \cos \mathbf{d}\kappa \wedge \mathbf{d} \,\overline{\nu^{i}}$$

$$= (1 - \cos \kappa) \mathbf{d} \,\overline{\nu^{i}} \wedge \mathbf{d}\kappa.$$
(3.178)

Durch Projektion von (3.172) auf ν^i und Berücksichtigung von (3.173,3.175) läßt sich **d** κ darstellen als

$$\mathbf{d}\kappa = \bar{\nu}_k \ B^k. \tag{3.179}$$

Da weiter gilt

$$\bar{\nu}^{i} \mathbf{d} \,\bar{\nu}_{k} \wedge B^{k} = \bar{\nu}^{i} \left(\bar{\nu}^{k} \mathbf{d} \,\bar{\nu}_{k} \wedge \mathbf{d}\kappa + \sin\kappa \mathbf{d} \,\bar{\nu}_{k} \wedge \mathbf{d} \,\bar{\nu}^{k} \right) = 0,$$

kann $\mathbf{d}B^i$ in (3.178) geschrieben werden als

$$\mathbf{d}B^{i} = (1 - \cos \kappa) \left(\mathbf{d} \ \bar{\nu^{i}} \bar{\nu}_{k} - \bar{\nu^{i}} \ \mathbf{d} \ \bar{\nu}_{k} \right) \wedge B^{k},$$

woraus die antisymmetrischen Konnexionsformen (3.177) zu

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{i} = (1 - \cos \kappa) \left(\bar{\boldsymbol{\nu}}^{i} \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{\nu}}_{k} - \bar{\boldsymbol{\nu}}_{k} \mathbf{d} \, \bar{\boldsymbol{\nu}}^{i} \right)$$
(3.180)

abgelesen werden.

Für einen rotationssymmetrischen Ansatz

$$\overline{\nu}^{i} = \frac{x^{i}}{r}$$

$$r^{2} = x_{i}x^{i}$$
(3.181)

findet man

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{ik} = \frac{(1 - \cos \kappa)}{r^2} \left(x^i \mathbf{d} x^k - x^k \mathbf{d} x^i \right)$$
(3.182)

oder in Formenkomponenten

$$\tilde{\omega}_{\mu}^{ik} = \frac{(1 - \cos \kappa)}{r^2} \left(x^i \delta^k{}_{\mu} - x^k \delta^i{}_{\mu} \right) \qquad (i = 1 \dots \bar{n} \ , \ \mu = 1 \dots \bar{n} + 1). \tag{3.183}$$

3.4.1 SO(4)-Trivialisierbarkeit

Für $\bar{n}{=}$ 3 ist die Komponentenzerlegung von (3.180) bezüglich der $SO(3){-}{\rm Generatoren}$ $-\epsilon^{jik}$

$$ilde{oldsymbol{\omega}}^{ik} = - ilde{f A}_j \epsilon^{jik}$$

gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{A}}_{j} = (1 - \cos \kappa) \epsilon_{jml} \ \nu^{l} \ \mathbf{d} \ \bar{\nu}^{m} \ . \tag{3.184}$$

Das ist aber nichts anderes als die Darstellung eines SO(4)-trivialisierbaren Eichfeldes in neutraler Eichung [13].

Für den rotationssymmetrischen Ansatz (3.181) folgt aus (3.183)

$$\tilde{A}_{j\mu} = \frac{1 - \cos\kappa}{r^2} \epsilon_{jik} x^k g_{\mu}{}^i.$$
(3.185)

Eine Einbettung der S^2 -Unterraumkoordinaten ist

$$\bar{\nu}^{1} = \frac{x^{1}}{r} = \cos \bar{\varphi}_{2}$$

$$\bar{\nu}^{2} = \frac{x^{2}}{r} = \sin \bar{\varphi}_{1} \cos \bar{\varphi}_{2}$$

$$\bar{\nu}^{3} = \frac{x^{3}}{r} = \sin \bar{\varphi}_{1} \sin \bar{\varphi}_{2}.$$
(3.186)

Zusammen mit dem 3-Bein (3.170) zu $\bar{n}=3$

$$\mathbb{E}^{1} = \sin \kappa \sin \bar{\varphi}_{2} \mathbf{d} \bar{\varphi}_{1}$$
$$\mathbb{E}^{2} = \sin \kappa \mathbf{d} \bar{\varphi}_{2}$$
$$\mathbb{E}^{3} = \mathbf{d} \kappa$$

folgt aus (3.172) und (3.186)

$$\begin{pmatrix} B^1\\ B^2\\ B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\bar{\varphi}_2 & \cos\bar{\varphi}_2\\ -\sin\bar{\varphi}_1 & \cos\bar{\varphi}_1\cos\bar{\varphi}_2 & \cos\bar{\varphi}_1\sin\bar{\varphi}_2\\ \cos\bar{\varphi}_1 & \sin\bar{\varphi}_1\cos\bar{\varphi}_2 & \sin\bar{\varphi}_1\sin\bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}^1\\ \mathbb{E}^2\\ \mathbb{E}^3 \end{pmatrix}$$

Die B^i entstehen also durch eine orthogonale Drehung aus den alten Kobasisformen \mathbb{E}^i .

3.4.2 SO(5)-Trivialisierbarkeit

In diesem Fall ($\bar{n}=4$) stellen (3.180) und (3.183) SO(4)-Konnexionen in E^5 dar.

Mit Hilfe der Generatoren $\overset{\pm}{Y}_i$ (D.12) kann auf die $SU^{\pm}(2)$ -Anteile projiziert werden. Für den rotationssymmetrischen Fall (3.183) findet man

$$\overset{\pm}{A}_{i\mu} = -\left(\epsilon_{ia\mu45}x^a \pm x_i\delta_{4\mu} \mp \delta_{i\mu}x_4\right)\frac{1-\cos\kappa}{r^2}.$$
(3.187)

Damit ist gezeigt, daß die 5D-Meron-Lösung SO(5)-trivialisierbar ist.

3.5 Zusammenfassung der Yang-Mills-Lösungen

In der folgenden Tabelle sind die in dieser Arbeit abgeleiteten und diskutierten Yang-Mills-Lösungen zusammen mit ihren wichtigsten Eigenschaften im Überblick dargestellt.

Die unterstrichenen Lösungstypen sind unter diesem Namen in der Literatur bekannt. Die übrigen Bezeichnungen wurden in Übereinstimmung mit dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten geometrischen Konstruktionsverfahren gewählt.

Geometrische Klassifikation der Lösungen.

Тур	G konform flach	konforme Reska- lierung	$\stackrel{(G)(g)}{*} \stackrel{\Omega}{*} \Omega = \Omega$	Kenn- zeichen von G	Singu- larität in E^N	selbst- dual
Instanton	+	+	+	lokal S^4	_	+
<u>Multi-</u> Instanton	+	+	+	$\overset{(G)}{*}\Omega^* = -\Omega$	_	+
H^4 - Instanton	+	+	+	lokal H^4	S^3	+
<u>Dimeron</u>	+	+	+	lokal $S^3 \times R$	S^0 (2 Punkte)	_
$\frac{\text{Multi-}}{\text{Meron}} (2M > 2)$	+	-	-	lokal $S^3 \times R$	2MPunkte	-
$H^3 \times R$ -Meron	+	+	+	lokal $H^3 \times R$	S^2	-
$S^2 \times H^2$ - Lösung	+	+	+	lokal $S^2 \times H^2$	S^1	+
5 <i>D</i> -Meron	+	-	+	lokal $S^4 \times R$	1 Punkt	-
$H^4 \times R$ -Lösung	+	_	+	lokal $H^4 \times R$	4-Kegel	-

Kapitel 4

Materiefelder

4.1 Ankopplung von $SU(2) \times U(1)$ -Eichtermen

Im vorigen Kapitel haben wir uns mit der Technik der Bündelabbildungen zur Konstruktion von Lösungen der homogenen Yang-Mills-Gleichungen beschäftigt. Bei der Konstruktion der Entkopplungsabbildung in Abschnitt 2.1.2 sind wir von vornherein von Vektorbündeln ausgegangen, dabei war die Abbildung von Materiefeldern (also von Schnitten im Materie-Vektorbündel) von Anfang an mitberücksichtigt. In diesem Abschnitt wird speziell die Abbildung des Higgs-Feldes in den Tangentialraum einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit behandelt. Wir setzen wie im letzten Kapitel euklidische Signatur voraus.

Das im Standardmodell (1.33) auftretende Higgs-Feld ϕ besteht als Isospindublett aus zwei komplexen Komponenten. Da wir reelle Mannigfaltigkeiten vorausgesetzt haben, betrachten wir ϕ als reelles vierdimensionales Vektorfeld. Formal läßt sich die Abbildung auf reelle Vektoren mit Hilfe von Basisvektoren

$$b_{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_I = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$$

$$(4.1)$$

und dem Matrixtensorprodukt \otimes (D.6) realisieren:

$$\phi_{\Re} := \operatorname{Re}\phi \otimes b_{\underline{1}} + \operatorname{Im}\phi \otimes b_{I} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\phi^{1} \\ \operatorname{Im}\phi^{1} \\ \operatorname{Re}\phi^{2} \\ \operatorname{Im}\phi^{2} \end{pmatrix} \in R^{4}.$$

$$(4.2)$$

Komplex adjungierte Größen sind durch transponierte zu ersetzen:

$$|\phi|^2 = \phi^{\dagger}\phi = \phi_{\Re}^{\top}\phi_{\Re}.$$

Ein komplexer Operator Op auf ϕ kann mit Hilfe der im Anhang (D.4) definierten Matrizen <u>1</u> und *I* durch rechtsseitiges Produkt in einen reellen Operator auf ϕ_{\Re} übersetzt werden:

$$Op_{\Re} = \operatorname{Re}(Op) \otimes \underline{1} + \operatorname{Im}(Op) \otimes I.$$
 (4.3)

Bei Matrizen bedeutet \otimes wieder das Matrixtensorprodukt. Eine Operatoralgebra wird dabei isomorph übertragen, bei dimensionsabhängigen Matrixoperationen wie der Spurbildung sind eventuell Normierungsfaktoren zu ändern.

Im Anhang (D.7) werden so die aus den Pauli-Matrizen gebildeten SU(2)-Generatoren in reelle Generatoren \overline{y}_k der $SU^-(2) \subset SO(4)$ umgeschrieben. Von den übrigen drei SO(4)-Generatoren $\overset{+}{y}_k$ (D.10) kann genau einer ebenfalls in ein rechtsseitiges Produkt mit <u>1</u> oder *I* zerlegt werden:

$$\overset{+}{\mathcal{Y}}_{2} = \underline{1} \otimes \operatorname{Re}\Sigma_{2} = \frac{1}{2} \underline{1} \otimes I.$$
(4.4)

Unter dem Kriterium der Zerlegbarkeit (4.3) erhält man also mit $\{\overline{y}_k, \overline{y}_2\}$ aus SO(4) gerade die vier für die elektroschwache Wechselwirkung benötigten Generatoren der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$.

Da nun nur noch reelle Größen vorliegen, kann mit der in Abschnitt 2.1.2 definierten Abbildung C ins Tangentialbündel (N = 4) übergegangen werden¹

$$\phi \longrightarrow \phi^a_{\Re} \ell_a \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}(\phi^a_{\Re} \ell_a) = \phi^a_{\Re} e_a \in T.$$
(4.5)

Wenn man in der Matrixschreibweise bleibt, dann sind die Komponenten von ϕ_{\Re} lediglich als Tangentialvektorkomponenten umzuinterpretieren. Die eichkovariante Ableitung **D** (1.34) des Higgs-Feldes geht dann über in eine kovariante Ableitung ∇

$$\mathbf{D}\phi \longrightarrow \boldsymbol{\nabla}\mathcal{C}(\phi_{\Re}^{a}\ell_{a}) \tag{4.6}$$

mit der Matrixdarstellung

$$\nabla \phi_{\Re} = (\mathbf{d} + \Gamma) \phi_{\Re} \tag{4.7}$$

und der antisymmetrischen Konnexionsmatrix

$$\Gamma = -g_{\rm ew} W^k \, \bar{\mathcal{Y}}_k + g'_{\rm ew} B \, \bar{\mathcal{Y}}_2 \,. \tag{4.8}$$

Bei euklidischer Signatur kann diese Konnexion als Riemann-Cartan-Konnexion, dargestellt bezüglich einer orthonormalen Basis, interpretiert werden. Der elektroschwache Anteil ist daher auf sehr fundamentale Weise geometrisierbar.

Betrachten wir die Abbildung noch einmal umgekehrt: Gehen wir zunächst von einem Schnitt im Tangentialbündel aus, also einem Vektorfeld $\in T$, dann legt die Dimension der Mannigfaltigkeit bereits die Darstellung des Higgs-Feldes fest. Solange man in der euklidischen Signatur bleibt, kann eine Riemann-Cartan-Konnexion auf eine SO(4)-Konnexion reduziert werden. Möchte man diese mit den Eichfeldern

¹allgemeiner Riemann-Cartan-Fall mit $G=g, e_a=\hat{e}_a, \Gamma=\hat{\Gamma}$

der elektroschwachen Theorie in Zusammenhang bringen, dann muß eine weitere Reduktion auf die Untergruppe $SU(2) \times U(1)$ von SO(4) erfolgen. Man muß daher zusätzlich fordern, daß Γ die Gestalt (4.8) annimmt, sich also auf eine Unterkonnexion in SO(4) beschränken. Diese Symmetriebrechung von der vollen SO(4) auf die Untergruppe $SU(2) \times U(1)$ ist ein willkürlicher Schritt und in diesem einfachen geometrischen Modell nicht ohne Zusatzannahmen ableitbar. Ein gewisses Kriterium erhält man durch die Forderung, ϕ durch die Zuordnung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ in ein komplexes Dublett zerlegen zu können.

Die Entkopplungsabbildung wurde in Abschnitt 2.1.2 so allgemein definiert, daß prinzipiell auch Tensorfelder oder Dirac-Spinoren mit Isospinfreiheitsgraden auf diese Weise geometrisiert werden können. In diesem Fall müßten im Tangentialraum zwei unabhängige Konnexionen eingeführt werden, was mit einem Produktansatz denkbar wäre, aber etwas künstlich erscheint.

Das Problem wird vermieden, wenn für den Gravitationsanteil keine Konnexion benötigt wird. Das spricht dafür, bei der Beschreibung von Fermionen die Kählersche Formengleichung (1.32) anstelle einer Dirac-Gleichung zu verwenden.

Auch bei Kähler-Fermionen werden die Yang-Mills-Wechselwirkungen durch Minimalsubstitution $\mathbf{d} \to \mathbf{D}$ (auch in δ) angekoppelt [5]. Ein $SU(2) \times U(1)$ -Anteil kann wieder eingebettet in SO(4) als Riemann-Cartan-Ableitung $\nabla \wedge$ interpretiert werden, die auf vektorwertige inhomogene Differentialformen

$$\Psi \in T \otimes \Lambda$$

wirkt.

Damit ist auch eine Geometrisierung der Fermionen erreichbar.

Allerdings müßten die Kopplungskonstanten und die Links-Rechts-Asymmetrie der Fermionen wie im Standardmodell gesondert eingebaut oder durch einen geeigneten Symmetriebrechungsmechanismus erzeugt werden. Für den SU(3)-Anteil könnte man von höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten ausgehen.

Die geometrische Interpretation der Wechselwirkungen hat vor allem folgende Vorteile:

- 1. Die in Frage kommenden Eichgruppen werden eingeschränkt. Dennoch ist die vierdimensionale orthogonale Gruppe umfassend genug, um die elektroschwache $SU(2) \times U(1)$ zu beinhalten.
- 2. Für die elektroschwache Wechselwirkung wird automatisch die richtige Darstellung erzeugt.
- 3. Die Anzahl unabhängiger mathematischer Elemente in der Theorie wird reduziert.

4.2 Verallgemeinerung der Julia-Zee Correspondence auf nichtstatische Konfigurationen

Festzustellen ist, daß auch zwischen Vektorfeldern und Eichfeldern unter Umständen formale Beziehungen bestehen, die zu einer Reduktion der in der Theorie benötigten mathematischen Objekte führen können. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß eine von Julia und Zee [37] gefundene Beziehung zwischen statischen SO(3)-Higgs-Feldern und Eichfeldern verallgemeinert werden kann. Solche Überlegungen sind insofern interessant, als das Higgs-Feld in die Theorie nicht aufgrund eines experimentell beobachteten Teilchens eingeführt wurde, sondern nur zur eichinvarianten Erzeugung der Masse bestimmter Eichfelder, also aus rein technischen Gründen.

Auf einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Metrik g sei ein System aus reellem Vektorfeld ϕ und Eichfeld A gegeben mit Lagrangian

$$\overset{(g)}{\star} \mathcal{L} = (\mathbf{D}\phi)^{\top} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{D}\phi + \frac{1}{g_K^2} \text{tr} \mathbf{F} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{F}.$$
(4.9)

Wir arbeiten in der adjungierten Darstellung einer Lie-Algebra $\mathcal{G} \subseteq so(n'), \phi$ sei ein Komponentenvektor bezüglich einer Basis im Darstellungsraum V

$$\phi = (\phi^k) \qquad \phi^k \in R^1, \ k = 1 \dots \dim \mathcal{G}.$$

 ϕ muß nicht notwendig in den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit abbildbar sein.

Die Generatoren der adjungierten Darstellung, die aus den total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{ijk} gebildet werden

$$(Z_i)_{jk} = -f_{ijk} \qquad i, j, k = 1 \dots \dim \mathcal{G},$$

$$(4.10)$$

erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[Z_i, Z_j] = f_{ijk} Z^k. (4.11)$$

Die Generatoren seien normiert auf eine Konstante ν :

$$\operatorname{tr}(Z_i Z_k) = \nu \delta_{ik}.\tag{4.12}$$

Nun definieren wir eine Abbildung vom Vektorraum V in die Lie-Algebra \mathcal{G} durch

$$\Phi_{\rm ad} := \phi^k Z_k \ \in \mathcal{G} \otimes \Lambda^0. \tag{4.13}$$

Von der metrischen Struktur der Mannigfaltigkeit nehmen wir an, daß ein aus einem Potential ξ ableitbares normiertes Kobasisvektorfeld $\hat{\mathbb{E}}^N = \mathbf{d}\xi$ existiert, so daß folgt

$$\mathbf{d}\hat{\mathbb{E}}^{N} = 0. \tag{4.14}$$

An eine Lösung \mathbf{A} , ϕ des gekoppelten Systems (4.9) stellen wir zusätzliche Forderungen. Die Konnexionsform \mathbf{A} des Vektorbündels sei orthogonal auf der ausgezeichneten Richtung $\hat{\mathbb{E}}^{N}(x)$ bzw. $\hat{\boldsymbol{e}}_{N}(x)$, ebenso sollen äußere Ableitungen der Felder in diese Richtung verschwinden:

$$\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{e}}_N) = (\hat{\mathbb{E}}^N, \mathbf{A})_g = 0 \tag{4.15}$$

$$\mathbf{dA}(\hat{\boldsymbol{e}}_N,\,\cdot\,) = 0 \tag{4.16}$$

$$\mathbf{d}\phi(\hat{\boldsymbol{e}}_N) = 0. \tag{4.17}$$

In Komponenten einer Koordinatenbasis lauten diese Voraussetzungen

$$\hat{e}^{N}_{\ \mu}A_{\nu}g^{\mu\nu} = 0 \tag{4.18}$$

$$\hat{e}_N^{\ \mu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0 \tag{4.19}$$

$$\hat{e}_N^{\ \mu}\partial_\mu\phi = 0. \tag{4.20}$$

Wir werden zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen das System \mathbf{A}, ϕ äquivalent zu einer Lösung $\tilde{\mathbf{A}}$ der homogenen Yang-Mills-Gleichungen ist.

Dazu definieren wir die neue Konnexion

$$\tilde{\mathbf{A}} := \beta \Phi_{\mathrm{ad}} \hat{\mathbb{E}}^N + \mathbf{A}. \tag{4.21}$$

Mit der Konstanten
 β können Kopplungskonstanten kompensiert werden.

Für die neue Krümmung

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{d}\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}} \wedge \tilde{\mathbf{A}}$$
(4.22)

findet man mit (4.21, 4.14)

$$\tilde{\mathbf{F}} = \beta \left(\mathbf{d}\Phi_{\rm ad} + \mathbf{A}\Phi_{\rm ad} - \Phi_{\rm ad} \mathbf{A} \right) \wedge \hat{\mathbb{E}}^N + \mathbf{F}.$$
(4.23)

Für den Term in Klammern gilt mit den Generatoren (4.10, 4.11) und mit der Definition (4.13)

$$\mathbf{d}\Phi_{\mathrm{ad}} + \mathbf{A}\Phi_{\mathrm{ad}} - \Phi_{\mathrm{ad}}\mathbf{A} = (\mathbf{d}\phi^k)Z_k + \mathbf{A}^i Z_i \phi^j Z_j - \phi^j Z_j \mathbf{A}^i Z_i$$

$$= \left(\mathbf{d}\phi^k - \mathbf{A}_i f^{ijk} \phi_j\right) Z_k.$$
(4.24)

In der adjungierten Darstellung stimmen die Komponenten dieses Terms mit der eichkovarianten Ableitung (1.12) des ursprünglichen Vektorfeldes ϕ überein,

$$(\mathbf{D}\phi)^k = (\mathbf{D}\phi + A \wedge \phi)^k = \mathbf{d}\phi^k - \mathbf{A}_i f^{ijk}\phi_j.$$
(4.25)

Mit

$$\mathbf{D}\Phi_{\mathrm{ad}} := (\mathbf{D}\phi)^k Z_k \tag{4.26}$$

folgt daher

$$\tilde{\mathbf{F}} = \beta(\mathbf{D}\Phi_{\mathrm{ad}}) \wedge \hat{\mathbb{E}}^{N} + \mathbf{F}.$$
(4.27)

Aufgrund der Voraussetzungen (4.15,4.16) liegt auch ${\bf F}$ orthogonal zur Richtung $\hat{\mathbb{E}}^N,$ daher gilt

$$\hat{\mathbb{E}}^N \wedge \stackrel{(g)}{\star} \mathbf{F} = 0 \tag{4.28}$$

und mit einer beliebigen 1-Form h

$$\mathbf{F} \wedge \overset{(g)}{\star} (h \wedge \hat{\mathbb{E}}^N) = 0. \tag{4.29}$$

Ein reiner Yang-Mills-Lagrangian zum Eichfeld ${f A}$

$$\overset{(g)}{\star} \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{g_K^2} \text{tr} \tilde{\mathbf{F}} \wedge \overset{(g)}{\star} \tilde{\mathbf{F}}$$
(4.30)

geht daher mit (4.27) über in

$$\overset{(g)}{\star} \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{g_K^2} \operatorname{tr} \left[\beta^2 \mathbf{D} \Phi_{\mathrm{ad}} \wedge \hat{\mathbb{E}}^N \wedge \overset{(g)}{\star} (\mathbf{D} \Phi_{\mathrm{ad}} \wedge \hat{\mathbb{E}}^N) + \mathbf{F} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{F} \right].$$
(4.31)

Durch Einsetzen von (4.26) folgt mit der Spurrelation (4.12) und mit (4.17, 4.15)

$$\overset{(g)}{\star} \tilde{\mathcal{L}} = \frac{\beta^2 \eta^{NN} \nu}{g_K^2} (\mathbf{D}\phi)^k \wedge \overset{(g)}{\star} (\mathbf{D}\phi)^k + \frac{1}{g_K^2} \mathrm{tr} \mathbf{F} \wedge \overset{(g)}{\star} \mathbf{F}.$$
(4.32)

Wählt man den Parameter β so, daß gilt

$$\frac{\beta^2 \eta^{NN} \nu}{g_K^2} = 1, \tag{4.33}$$

dann stimmt (4.32) mit dem anfangs angenommenen Lagrangian (4.9) des kombinierten Yang-Mills-Higgs-Systems überein:

$$\overset{(g)}{\star}\tilde{\mathcal{L}} = \overset{(g)}{\star}\mathcal{L}. \tag{4.34}$$

Das heißt, wenn **A** und ϕ die aus $\stackrel{(g)}{\star} \mathcal{L}$ (4.9) abgeleiteten Feldgleichungen erfüllen, die zugehörige Wirkung also stationär ist, dann erfüllt **A** die homogenen Yang-Mills-Gleichungen zu (4.30). Der Spezialfall der ursprünglichen Julia-Zee Correspondence für statische Felder[37, 1] ist hier mit ($\hat{\boldsymbol{e}}_N = \partial_t, \hat{\mathbb{E}}^N = \mathbf{d}t$) enthalten, für $\mathcal{G} = so(3)$ ist $f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ zu nehmen.

Das vorgegebene Vektorfeld $\hat{\boldsymbol{e}}_N(x)$ und sein Dual $\hat{\mathbb{E}}^N(x)$ müssen jedoch im allgemeinen nicht als konstant vorausgesetzt werden. Die Julia-Zee Correspondence ist daher nicht grundsätzlich auf statische Konfigurationen beschränkt.

Zusammenfassung und weitere Möglichkeiten

Mit Hilfe von Bündelabbildungen wurden formale Beziehungen zwischen Riemannscher Differentialgeometrie und Yang-Mills-Theorien hergestellt und zur Konstruktion und geometrischen Klassifikation von Yang-Mills-Lösungen verwendet. Riemann-Cartan-Konnexionen wurden den Eichfeldern, Tangentialvektoren den Materiefeldern zugeordnet.

Die Beziehung wurde mit der Entkopplungsabbildung konkretisiert, anschließend wurde die Anwendung auf Yang-Mills-Gleichungen allgemein diskutiert.

Eine Konsequenz ist, daß Yang-Mills-Terme an die Geometrie des Basisraums gebunden werden, ein Produkt von Mannigfaltigkeiten induziert dann in eindeutiger Weise eine Summe der Yang-Mills-Konnexionen. Im Gegensatz zu Einstein-Gleichungen sind Yang-Mills-Gleichungen bei dieser Produktbildung "dimensional superponierbar". Daraus ergaben sich Produktraumansätze zur Gewinnung von Lösungen.

Um zu Lösungen auf Mannigfaltigkeiten mit vorgegebener Metrik zu gelangen, wurde das Verhalten von Yang-Mills-Lösungen beim Übergang zu einer neuen Metrik ("allgemeine Reskalierung") untersucht. Eine geeignete hinreichende Bedingung für die Erhaltung des Lösungscharakters erhält man in Form einer algebraischen Forderung an die neue Metrik ("Reskalierungsbedingung" Abschnitt 2.3.3).

Im Kapitel 3 wurden konkrete Lösungen der euklidischen Yang-Mills-Gleichungen in flachen Räumen konstruiert. Es ergab sich ein einheitliches geometrisches Klassifikationsschema, in das die bekanntesten SU(2)-Lösungen eingeordnet wurden.

Die intrinsischen Eigenschaften der ursprünglichen Riemannschen Metrik sind hierbei von den Eigenschaften der Reskalierungsabbildung zu unterscheiden. Ein konform flacher Raum kann auch durch nichtkonforme Abbildung in den flachen Raum Lösungen erzeugen.

In fünf Dimensionen konnte so eine Reihe exakter Lösungen gefunden werden. Auch vierdimensionale Multimeronkonfigurationen wurden auf lokale quasikonforme Abbildungen zurückgeführt, ein Approximationsansatz wurde entwickelt. Eine Zusammenfassung der behandelten Lösungen gibt die Tabelle auf Seite 116.

Nach dem angegebenen Schema könnten weitere Produkträume untersucht werden, etwa mit mehr als zwei Faktoren.

Die algebraische Bedingung (2.101) könnte auch als Ansatz dienen für Yang-Mills-Lösungen mit nicht-flachen Hintergrund-Metriken, die zum Beispiel aus einem kosmologischen Modell stammen.

Unter dem Gesichtspunkt einer Geometrisierung ist die Frage interessant, inwieweit Riemann-Cartan-Konnexionen die Yang-Mills-Konnexionen des Standardmodells ersetzen könnten.

Es wurde gezeigt, wie das Wick-rotierte Higgs-Feld einschließlich elektroschwacher Yang-Mills-Felder und Gravitationsankopplung im Rahmen der vierdimensionalen Riemann-Cartan-Geometrie darstellbar ist.

Unter folgenden einschränkenden Bedingungen könnten Riemann-Cartan-Konnexionen in vier Dimensionen generell zur Beschreibung der elektroschwachen Eichfelder dienen:

- 1. In der Gesamtwirkung darf keine Riemann-Cartan-Konnexion für die Gravitationswechselwirkung vorkommen, die Kopplung der Gravitation an Metrikund Eichfelder muß ausschließlich durch den Hodge-Star erfolgen. Mit der Kähler-Theorie für Fermionen kann diese Bedingung auf äußerst elegante Weise erfüllt werden.
- 2. Vorausgesetzt wird die euklidische Signatur, d. h. die Wick-rotierte Theorie, da $SU(2) \times U(1)$ nicht in die Lorentzgruppe, sondern in die SO(4) eingebettet werden kann. (Ein Isospinvektor kann also nicht als klassischer Raum-Zeit-Vektor interpretiert werden.) Die Abbildung von Riemann-Cartan-Konnexionen auf Yang-Mills-Eichfelder bleibt daher formal. Jedoch ist der Übergang zur euklidischen Feldtheorie bereits für die mathematische Konsistenz der Pfadintegralquantisierung wesentlich, so daß man hierin keinen Mangel der angegebenen Geometrisierung sehen muß.
- 3. Die gravierendste Einschränkung besteht wohl darin, daß bei der vorgeschlagenen Geometrisierung Symmetriebrechungen auf Untergruppen und Kopplungskonstanten recht willkürlich angenommen werden müssen. Dieses Problem tritt jedoch bereits im Standardmodell selbst auf, die Riemann-Cartan-Geometrisierung führt hier beim momentanen Stand der Dinge zu keiner befriedigenderen Erklärung.

Nach der hier vertretenen Auffassung hängt eine Riemannsche Geometrisierung des fermionischen Sektors der Eichtheorien stark von weiteren Untersuchungen der Kähler-Theorie ab. Immerhin hat die Kähler-Gleichung bereits gezeigt, daß Differentialgeometrie und Formenkalkül nicht nur Neuformulierungen des altbewährten Tensorformalismus sind, sondern durchaus eigene physikalische Effekte hervorbringen können (Vorhersage einer vierten Teilchengeneration, Unterschiede zur Dirac-Theorie bei starken Gravitationsfeldern).

Hilfreich wäre hier eine eingehendere Untersuchung von Kähler-Systemen mit angekoppelten Riemann-Cartan-Konnexionen oder von Kähler-Lösungen auf nichttrivialen Metriken, zum Beispiel im Rahmen kosmologischer Modelle.

Zum Schluß seien noch einige eher spekulative Gedanken gestattet:

Eine Motivation für die vorliegende Arbeit war unter anderem die Idee, die Zahl der für die Fundamentalphysik notwendigen mathematischen Strukturen möglichst klein zu halten.

Eine "Vereinheitlichung" muß nicht unbedingt dadurch zustande kommen, daß alle Wechselwirkungen gewaltsam in ein einziges Feld gepackt werden, das anschließend durch eine geeignete Symmetriebrechung wieder in die tatsächlich beobachteten Felder zerlegt werden muß. Möglicherweise ist es besser, von einer einheitlichen Idee auszugehen (z. B. der Differentialgeometrie), deren Elemente durchaus verschieden sein können und mit den verschiedenen Erscheinungen der Natur identifiziert werden.

Vom differentialgeometrischen Standpunkt aus bietet sich die generelle Einteilung

 Γ Riemann-Cartan-Konnexionen für Eichfelder

- $\stackrel{(g)}{\star}$ Hodge für Gravitationsankopplung
- $T\otimes\Lambda$ Vektorwertige Formen für Materie

an. Im Rahmen der klassischen Feldtheorie läßt sich das rechtfertigen.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach einer geeigneten Quantenfeldtheorie. Das Problem einer Quantisierung der Gravitation war ja einer der Hauptgründe für den Versuch, die Gravitation möglichst gleich wie die erfolgreich quantisierten Eichtheorien zu formulieren.

Die Unverträglichkeit von allgemeiner Relativitätstheorie und Quantentheorie könnte jedoch daher kommen, daß in der Quantentheorie von Anfang an die geometrischen Grundlagen der Feldtheorie zu wenig berücksichtigt werden.

Interessanterweise bietet die Differentialgeometrie auch hier einen möglichen Ansatz. Es fällt nämlich auf, daß das Prinzip der totalen Antisymmetrisierung sowohl bei Formen als auch bei den fermionischen Zuständen der Quantentheorie auftritt. (Überlegungen zu diesem Zusammenhang findet man z. B. in [39, 51].) Für eine Formenbasis gilt

$$egin{array}{rcl} & heta^lpha \wedge heta^eta + heta^eta \wedge heta^lpha & = & 0 \ & i_{artheta_lpha} i_{artheta_eta} + i_{artheta_eta} i_{artheta_lpha} & = & 0 \ & i_{artheta_lpha} heta^eta + heta^eta i_{artheta_lpha} & = & \delta^eta_lpha. \end{array}$$

Das sind aber gerade die aus der Quantenfeldtheorie bekannten Vertauschungsrelationen für fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Während aber in der Quantentheorie solche Vertauschungsrelationen mehr oder weniger willkürlich angenommen werden, haben differentialgeometrische Formen einen tieferen Sinn, der unmittelbar mit der Grundidee der allgemeinen Relativitätstheorie verbunden ist, nämlich die Koordinatenunabhängigkeit der Differentiation und Integration.

Man könnte nun "von Hand" alle auf den obigen Vertauschungsrelationen aufbauenden Strukturen der Quantenfeldtheorie durch Zusatzannahmen in die Geometrie einbauen und eins zu eins übertragen. Interessanter wäre es, den Grundgedanken der Geometrie nicht sofort zu verlassen. Da Formen durch Einführung eines koordinatenunabhängigen Differentialoperators auf Mannigfaltigkeiten entstehen, sollten die grundlegenden Objekte Felder auf einer Mannigfaltigkeit sein. Die Dynamik sollte nach dem Vorbild der Feldtheorie aus möglichst naheliegenden Gleichungen oder statistischen Prinzipien gebildet werden.

Im einfachsten Fall müßte man von einer Mannigfaltigkeit sehr großer Dimension (eventuell $N \to \infty$) ausgehen. Soll darüberhinaus noch ein Zusammenhang zur vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit bestehen, dann stellt sich - wie immer, wenn man zunächst in höherdimensionalen Räumen arbeitet (auch etwa bei Superstrings) - das Problem, wie man auf die üblichen Raumdimensionen gelangt.

Hier könnte das dimensionale Superpositionsprinzip eine entscheidende Rolle spielen. Fordert man Gleichungen, die sich dimensional superponieren lassen, dann gibt es umgekehrt Lösungen, die den Gesamtraum in niederdimensionale Unterräume zerfallen lassen. Ein dimensionaler Reduktionsmechanismus ist dann von Anfang an eingebaut.

Anhang A

Konventionen und Bezeichnungen

Zu X^N	Basis	Kobasis	Indexbereich	
allgemeine Basis	ϑ_{lpha}	$ heta^{lpha}$	$\alpha, \beta, ho, \sigma$	$\in \{1N\}$
natürliche Basis (holonome Basis, Koordinatenbasis)	∂_{μ}	$\mathbf{d}x^{\mu}$	$\lambda, \mu, \nu \in \{1N\}$	
G-orthonormal	$oldsymbol{e}_a$	\mathbb{E}^{a}	a, b, c	$\in \{1N\}$
$\boldsymbol{g} ext{-} \operatorname{orthonormal}$	$\hat{oldsymbol{e}}_a$	$\hat{\mathbb{E}}^{a}$	a, b, c	$\in \{1N\}$
Produkträume		$N=\bar{n}+\overset{+}{n}$		
zu $X^{\overline{n}}$	$ar{artheta}_i$	$\overline{ heta}^i$	i, j, k	$\in \{1\bar{n}\}$
$zu X^{\stackrel{+}{n}}$	$\overset{+}{\vartheta}_{I}$	$\stackrel{+}{ heta}_{I}$	I, J, K	$\in \{\bar{n}+1N\}$

Indexbereiche für i,j,k...,I,J,K...werden in Einzelabschnitten zum Teil anders definiert.

Metrik-Signatur

$$(\eta_{ab}) = \operatorname{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{q\text{-fach}}, \underbrace{+1, \dots, +1}_{(N-q)\text{-fach}}).$$
(A.1)

Metrik-Tensoren

Normierung

$$(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)_G = \eta_{ab} = (\hat{\boldsymbol{e}}_a, \hat{\boldsymbol{e}}_b)_g \tag{A.3}$$

Mit $\hat{}$ gekennzeichneten Größen beziehen sich auf die Metrik g. Indizes werden mit den zum Objekt gehörenden Metrikkomponenten verschoben, soweit im Text nichts anderes vereinbart wird. Zum Beispiel ist die Krümmung \mathbb{R} (2.18) aus einer bezüglich G metrischen Konnexion abgeleitet, die zugehörige Metrik ist also G, daher gilt

$$\mathbb{R}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\gamma} \mathbb{R}^{\gamma}{}_{\beta}.$$

Die Metrikkomponenten beziehen sich auf dieselbe Basis wie die Indizes des betreffenden Objekts.

Permutations symbol

$$\epsilon_{\beta_1\dots\beta_p}^{\alpha_1\dots\alpha_p} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (\beta_1\dots\beta_p) \text{ gerade Permutation von } (\alpha_1\dots\alpha_p) \\ -1 & \text{wenn } (\beta_1\dots\beta_p) \text{ ungerade Permutation von } (\alpha_1\dots\alpha_p) \\ 0 & \text{wenn keine Permutation oder } \alpha_i = \alpha_j \text{ für } i \neq j \end{cases}$$
(A.4)

N-dimensionales Permutationssymbol

$$\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_N} = \epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_N} = \epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_N}_{1\dots N} \tag{A.5}$$

Einige ϵ -Regeln

$$\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_p}\epsilon^{\beta_1\dots\beta_p}_{\gamma_1\dots\gamma_p} = p!\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\gamma_1\dots\gamma_p} \tag{A.6}$$

$$\epsilon^{\alpha_1...\alpha_N} \epsilon_{\alpha_1...\alpha_N} = N! \tag{A.7}$$

$$\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p\beta_{p+1}\dots\beta_N}\epsilon_{\gamma_1\dots\gamma_p\beta_{p+1}\dots\beta_N} = (N-p)!\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\gamma_1\dots\gamma_p} \tag{A.8}$$

Formenbasis

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \theta^{\alpha_{i}} = \theta^{\alpha_{1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_{p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\alpha_{1} \ldots \alpha_{p}}_{\gamma_{1} \ldots \gamma_{p}} \theta^{\gamma_{1}} \otimes \ldots \otimes \theta^{\gamma_{p}}$$
(A.9)

Volumenelement zur Metrik \boldsymbol{g} , Basis θ^{α}

Im Gegensatz zu \boldsymbol{g} ist $|\boldsymbol{g}|$ basisabhängig.

Komponenten

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g})_{\alpha_{1}...\alpha_{N}} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\alpha_{1}...\alpha_{N}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g})^{\alpha_{1}...\alpha_{N}} = \frac{\operatorname{sign}(g)}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\alpha_{1}...\alpha_{N}} \\ \operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(\operatorname{det}(g_{\alpha\beta}))$$
(A.11)

Hodge-Star (Dualitätsoperator) zur Metrik \boldsymbol{g}

Für eine *p*-Form $\beta \in \Lambda^p$ und ihre Komponenten gilt:

$$\beta = \frac{1}{p!} \beta_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \bigwedge_{i=1}^p \theta^{\alpha_i}$$
$$\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_p} \beta_{\gamma_1 \dots \gamma_p}.$$

Die Hodge-duale $(N-p)\text{-}\mathrm{Form} \stackrel{(g)}{\star}\beta$ ist definiert durch

$$\binom{(g)}{\star}\beta_{\alpha_{p+1}\dots\alpha_N} = \frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_N}g^{\alpha_1\gamma_1}\cdot\ldots\cdot g^{\alpha_p\gamma_p}\beta_{\gamma_1\dots\gamma_p}$$
(A.12)

$$\overset{(g)}{\star}\beta = \frac{1}{(N-p)!p!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_N}g^{\alpha_1\gamma_1}\cdot\ldots\cdot g^{\alpha_p\gamma_p}\beta_{\gamma_1\dots\gamma_p}\bigwedge_{i=p+1}^N\theta^{\alpha_i}$$
(A.13)

Der Hodge-Star ist also eine Abbildung

$$\stackrel{(g)}{\star}:\Lambda^p\to\Lambda^{N-p}.$$

Die Volumenform (A.10) ist mit (A.13):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{g}) = \overset{(g)}{\star} 1. \tag{A.14}$$

Für $\alpha, \beta \in \Lambda^p$ gilt:

$$\alpha \wedge \overset{(g)}{\star} \beta = \beta \wedge \overset{(g)}{\star} \alpha = (-1)^{p(N-p)} (\overset{(g)}{\star} \alpha) \wedge \beta = \frac{1}{p!} \alpha_{\gamma_1 \dots \gamma_p} \beta^{\gamma_1 \dots \gamma_p} \overset{(g)}{\star} 1.$$
(A.15)

Zweimaliges Anwenden des Hodge-Stars ergibt bis auf ein Vorzeichen die Identität. Auf eine p-Form angewandt:

$$\overset{(g)(g)}{\star} \overset{(g)}{\star} \beta = \operatorname{sign}(g)(-1)^{p(N-p)}\beta \tag{A.16}$$

Integration[25, 16, 46]. Sei f eine reellwertige Funktion f = f(x):

$$\int \overset{(g)}{\star} f = \int f \sqrt{|g|} \mathbf{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^N = \int f \sqrt{|g|} \mathbf{d}^N x$$
(A.17)

Koableitung

$$\delta\beta = (-1)^p (\overset{(g)}{\star})^{-1} \mathbf{d} \overset{(g)}{\star} \beta = -(-1)^{N(p+1)} \operatorname{sign}(g) \overset{(g)}{\star} \mathbf{d} \overset{(g)}{\star} \beta$$
(A.18)

(Für das Vorzeichen gibt es in der Literatur unterschiedliche Konventionen.) Zusammenhang zum Tensorformalismus in natürlicher Basis:

$$\delta\beta = -\frac{1}{(p-1)!} (\nabla(\boldsymbol{g})^{\lambda} \beta_{\lambda\mu_{2}...\mu_{p}}) \mathbf{d}x^{\mu_{2}} \wedge ... \wedge \mathbf{d}x^{\mu_{p}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|(p-1)!}} g_{\nu_{2}\mu_{2}} \cdot ... \cdot g_{\nu_{p}\mu_{p}} (\partial_{\lambda} \sqrt{|\boldsymbol{g}|} \beta^{\lambda\mu_{2}...\mu_{p}}) \mathbf{d}x^{\nu_{2}} \wedge ... \wedge \mathbf{d}x^{\nu_{p}}$$
(A.19)

mit der kovarianten Ableitung $\nabla(\boldsymbol{g})^{\lambda}$ zur Levi-Civita-Konnexion der Metrik \boldsymbol{g}

$$\Gamma(\boldsymbol{g})^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\partial_{\nu} g_{\rho\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\nu\lambda} \right).$$
(A.20)

Innere Ableitung (inneres Produkt)

$$i_{\nu}\beta = \frac{1}{(p-1)!} v^{\gamma}\beta_{\gamma\alpha_{2}...\alpha_{p}} \bigwedge_{i=2}^{p} \theta^{\alpha_{i}}$$
(A.21)

(mit $v = v^{\alpha} \vartheta_{\alpha}$).

Bemerkung zur Komponentendarstellung

Da in der Physik häufig Tensoren mit Tensorkomponenten identifiziert werden, sollen hier am Beispiel der Weyl-Reskalierung verschiedene Möglichkeiten der Basisund Komponentenwahl zusammengestellt werden. Es wird der Spezialfall einer flachen Zielmetrik \boldsymbol{g} zusammen mit einer konform flachen Metrik

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{g} \tag{A.22}$$

angenommen. Dieser Ansatz für G ist wichtig zur Konstruktion von Yang-Mills-Lösungen im flachen Raum.

1. Für die flache Metrik \boldsymbol{g} ist zunächst die Wahl eines kartesischen Koordinatensystems $\{x^{\mu}\}$ naheliegend. Die zugehörige natürliche (=holonome) Basis $\{\partial_{\mu}\}$ ist zugleich \boldsymbol{g} -orthonormiert: $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mu} = \partial_{\mu}$. In der Kobasis $\{\mathbf{d}x^{\mu}\}$ ist

$$\boldsymbol{g} = \eta_{\mu\nu} \mathbf{d} x^{\mu} \otimes \mathbf{d} x^{\nu} \tag{A.23}$$

mit den konstanten Komponenten

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$$

Für G liest man aus (A.22) und (A.23)

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{\sigma^2(x)} \eta_{\mu\nu} \mathbf{d} x^\mu \otimes \mathbf{d} x^\nu \tag{A.24}$$

die Komponenten

$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \eta_{\mu\nu}$$

bezüglich der natürlichen Kobasis $\{\mathbf{d}x^{\mu}\}$ ab.

2. Eine **G**-orthonormale Kobasis $\{\mathbb{E}^a\}$ kann im konform flachen Fall leicht angegeben werden. Mit

$$\mathbb{E}^{a} = \frac{1}{\sigma(x)}\hat{\mathbb{E}}^{a} = \frac{1}{\sigma(x)}\mathbf{d}x^{a}$$
(A.25)

wird aus (A.24)

$$oldsymbol{G} = \eta_{ab} \mathbb{E}^a \otimes \mathbb{E}^b$$

also

$$G_{ab} = \eta_{ab}$$

In der gleichen Basis ist \boldsymbol{g} gegeben als

$$\boldsymbol{g} = \sigma^2(\boldsymbol{x})\eta_{\alpha\beta}\mathbb{E}^\alpha\otimes\mathbb{E}^\beta.$$

Somit hat die flache Metrik \boldsymbol{g} jetzt die ortsabhängigen Komponenten

$$g_{\alpha\beta}(x) = \sigma^2(x)\eta_{\alpha\beta}.$$

Das kann man auch aus den Skalarprodukten im Tangentialraum ableiten. Die Dualität

$$\langle \mathbf{d}x^a, \partial_b \rangle = \langle \mathbb{E}^a, \boldsymbol{e}_b \rangle = \delta^a_b$$

ergibt mit (A.25)

$$\boldsymbol{e}_a(x) = \sigma(x)\partial_a.$$

Definitionsgemäß ist

$$(\partial_a, \partial_b)_g = \eta_{ab},$$

so daß für die e^{α} -Komponenten von g folgt

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x), \boldsymbol{e}_{\beta}(x)\right)_{g} = \sigma^{2}(x) \left(\partial_{\alpha}, \partial_{\beta}\right)_{g} = \sigma^{2}(x)\eta_{\alpha\beta}.$$

3. Eine weitere nützliche Möglichkeit (die zum Beispiel in Anhang C für beliebige konforme Reskalierung benutzt wird) besteht darin, beide orthonormalen Basissysteme gleichzeitig zu verwenden und die Metrikkomponenten konstant zu halten

$$g_{ab} = G_{ab} = \eta_{ab}.$$

 g_{ab} bezieht sich auf die **g**-orthonormale Basis { $\hat{\boldsymbol{e}}_a = \partial_a$, $\hat{\mathbb{E}}^a = \mathbf{d}x^a$ }, G_{ab} auf die **G**-orthonormale Basis { $\boldsymbol{e}_a, \mathbb{E}^a$ }. Diese Wahl hat den Vorteil, daß das Heraufund Herunterziehen von Tensorindizes für beide Metriken übereinstimmt und mit der Ableitung **d** vertauscht.

Die verschiedenen Möglichkeiten zeigen, daß Tensorkomponenten ohne Angabe der Basis keinerlei Bedeutung haben.

Anhang B

Berechnung der Konnexionskoeffizienten aus der Kobasis θ^{α}

Nach den Cartanschen Strukturgleichungen [16] ist die Torsion gegeben durch

$$\Theta^{\alpha} = \mathbf{d}\theta^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \theta^{\beta}. \tag{B.1}$$

Zunächst betrachten wir die torsionsfreie Geometrie $\Theta^{\alpha} = 0$ und suchen die Komponenten der Levi-Civita-Konnexion zum Basissystem $\{\vartheta_{\alpha}, \theta^{\alpha}\}$ mit beliebiger Metrik \boldsymbol{G} . Für die Levi-Civita-Konnexionsformen $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta}$ gilt dann nach (B.1)

$$\mathbf{d}\theta^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \theta^{\beta}. \tag{B.2}$$

Sei

$$(\mathbf{d}\theta)_{\alpha} := G_{\alpha\beta} \mathbf{d}\theta^{\beta} \stackrel{\text{im allg.}}{\neq} \mathbf{d}\theta_{\alpha}$$
(B.3)

$$\Gamma_{\alpha\beta} := G_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta}, \tag{B.4}$$

dann wird (B.2) zu

$$(\mathbf{d}\theta)_{\alpha} = -\mathbf{\Gamma}_{\alpha\beta} \wedge \theta^{\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma}.$$
(B.5)

Mit Hilfe der Dualitätsrelationen (i = inneres Produkt = innere Ableitung)

$$i_{\vartheta_{\alpha}}\theta^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{B.6}$$

$$i_{\vartheta_{\beta}} \circ i_{\vartheta_{\gamma}}(\theta^{\rho} \wedge \theta^{\sigma}) = \delta^{\rho}_{\gamma} \delta^{\sigma}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\beta} \delta^{\sigma}_{\gamma} \tag{B.7}$$

kann der in $\beta\gamma$ antisymmetrische Teil von $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ aus (B.5) herausprojiziert werden:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = -i_{\vartheta\beta} \circ i_{\vartheta\gamma} (\mathbf{d}\theta)_{\alpha} \tag{B.8}$$

Wegen der Metrizitätsbedingung (2.14)

$$(\boldsymbol{\nabla}_{\vartheta_{\beta}}\boldsymbol{G})_{\alpha\gamma} = \vartheta_{\beta}(G_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}G_{\rho\gamma} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\beta}G_{\alpha\rho}) = 0$$
(B.9)

gilt

$$\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = -\Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \vartheta_{\beta}(G_{\alpha\gamma}). \tag{B.10}$$

Einsetzen in (B.8) und zyklisches Vertauschen der Indizes ergibt

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \vartheta_{\beta}(G_{\alpha\gamma}) - i_{\vartheta_{\beta}} \circ i_{\vartheta_{\gamma}}(\mathbf{d}\theta)_{\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = -\vartheta_{\alpha}(G_{\gamma\beta}) + i_{\vartheta_{\alpha}} \circ i_{\vartheta_{\beta}}(\mathbf{d}\theta)_{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_{\gamma}(G_{\beta\alpha}) - i_{\vartheta_{\gamma}} \circ i_{\vartheta_{\alpha}}(\mathbf{d}\theta)_{\beta}.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man die Levi-Civita-Konnexion bezüglich einer beliebigen Basis:

$$2\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_{\beta}(G_{\alpha\gamma}) + \vartheta_{\gamma}(G_{\beta\alpha}) - \vartheta_{\alpha}(G_{\gamma\beta}) + i_{\vartheta_{\gamma}} \circ i_{\vartheta_{\beta}}(\mathbf{d}\theta)_{\alpha} - i_{\vartheta_{\gamma}} \circ i_{\vartheta_{\alpha}}(\mathbf{d}\theta)_{\beta} + i_{\vartheta_{\alpha}} \circ i_{\vartheta_{\beta}}(\mathbf{d}\theta)_{\gamma}.$$
(B.11)

Hierbei wurde noch die Beziehung

$$i_{\vartheta_{\gamma}} \circ i_{\vartheta_{\beta}}$$
 auf Form $= -i_{\vartheta_{\beta}} \circ i_{\vartheta_{\gamma}}$ auf Form (B.12)

benutzt. Für eine natürliche Basis $\{\vartheta_{\mu} = \partial_{\mu}, \theta^{\mu} = \mathbf{d}x^{\mu}\}$ ist $\mathbf{d}\theta^{\mu} = \mathbf{d}\mathbf{d}x^{\mu} = 0$ und man erhält aus (B.11) die bekannte Gleichung

$$\Gamma(\boldsymbol{G})_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_{\nu} G_{\mu\lambda} + \partial_{\lambda} G_{\mu\nu} - \partial_{\mu} G_{\nu\lambda}).$$
(B.13)

Für eine rein orthonormale Basis $\{\vartheta_a = e_a, \theta^a = \mathbb{E}^a\}$ wird $G_{ab} = \eta_{ab}$ konstant, also

$$\boldsymbol{e}_c(G_{ab}) = \boldsymbol{e}_c(\eta_{ab}) = e_c{}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{ab} = 0$$

und außerdem

$$(\mathbf{d}\mathbb{E})_a = \mathbf{d}\mathbb{E}_a$$

Somit bleibt von (B.11) nur die zweite Zeile übrig:

$$\omega_{abc} := \Gamma_{abc} = \frac{1}{2} (i_{\boldsymbol{e}_c} \circ i_{\boldsymbol{e}_b} \mathbf{d} \mathbb{E}_a - i_{\boldsymbol{e}_c} \circ i_{\boldsymbol{e}_a} \mathbf{d} \mathbb{E}_b + i_{\boldsymbol{e}_a} \circ i_{\boldsymbol{e}_b} \mathbf{d} \mathbb{E}_c).$$
(B.14)

Den allgemeineren Fall mit Torsion (B.1) erhält man durch die Ersetzung

$$(\mathbf{d}\theta)_{\alpha} \to (\mathbf{d}\theta)_{\alpha} - \Theta_{\alpha}$$

in allen Gleichungen. Anstelle von (B.11) kann man die Riemann-Cartan-Konnexion aus der Kobasis θ^{α} und vorgegebener Torsion Θ^{α} berechnen:

$$2\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_{\beta}(G_{\alpha\gamma}) + \vartheta_{\gamma}(G_{\beta\alpha}) - \vartheta_{\alpha}(G_{\gamma\beta}) + i_{\vartheta_{\gamma}} \circ i_{\vartheta_{\beta}}((\mathbf{d}\theta)_{\alpha} - \Theta_{\alpha}) - i_{\vartheta_{\gamma}} \circ i_{\vartheta_{\alpha}}((\mathbf{d}\theta)_{\beta} - \Theta_{\beta}) + i_{\vartheta_{\alpha}} \circ i_{\vartheta_{\beta}}((\mathbf{d}\theta)_{\gamma} - \Theta_{\gamma})$$
(B.15)

Anhang C

Konforme Reskalierung

Wie ändern sich Konnexion und Krümmung beim Übergang von einer Metrik G zu einer konform reskalierten Metrik

$$\boldsymbol{g} = \sigma^2 \boldsymbol{G} \quad ? \tag{C.1}$$

(Allgemeiner Fall, keine der beiden Metriken muß flach sein.) Wir führen die Rechnung der Einfachheit halber in zwei orthonormierten Basissystemen durch. (Alle mit $\hat{}$ gekennzeichneten Größen beziehen sich auf die zweite Metrik g.)

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{a} = \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{e}_{a}$$

$$\hat{\mathbb{E}}^{a} = \sigma \mathbb{E}^{a}$$

$$g_{ab} = G_{ab} = \eta_{ab}.$$
(C.2)

Die neue Levi-Civita-Konnexion zur Metrik \boldsymbol{g} und zur \boldsymbol{g} -orthonormalen Basis $\{\hat{\boldsymbol{e}}_a, \hat{\mathbb{E}}^a\}$ ist nach (B.14) gegeben durch:

$$2\hat{\omega}_{abc} = i_{\hat{\boldsymbol{e}}_c} \circ i_{\hat{\boldsymbol{e}}_b} \mathbf{d}\hat{\mathbb{E}}_a - i_{\hat{\boldsymbol{e}}_c} \circ i_{\hat{\boldsymbol{e}}_a} \mathbf{d}\hat{\mathbb{E}}_b + i_{\hat{\boldsymbol{e}}_a} \circ i_{\hat{\boldsymbol{e}}_b} \mathbf{d}\hat{\mathbb{E}}_c.$$
(C.3)

Aus (C.2) folgt

$$\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}_a = \mathrm{d}(\sigma\mathbb{E}_a) = \mathrm{d}\sigma\wedge\mathbb{E}_a + \sigma\mathrm{d}\mathbb{E}_a.$$

Die innere Ableitung ist linear auch bezüglich des Richtungsvektors (neben der Linearität als Operator):

$$i_{\hat{\boldsymbol{e}}_a} = i_{\frac{1}{\sigma}} \boldsymbol{e}_a = \frac{1}{\sigma} i \boldsymbol{e}_a.$$

Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in (C.3) ergibt

$$2\hat{\omega}_{abc} = \frac{1}{\sigma} (i\boldsymbol{e}_{c} \circ i\boldsymbol{e}_{b} \mathbf{d}\mathbb{E}_{a} - i\boldsymbol{e}_{c} \circ i\boldsymbol{e}_{a} \mathbf{d}\mathbb{E}_{b} + i\boldsymbol{e}_{a} \circ i\boldsymbol{e}_{b} \mathbf{d}\mathbb{E}_{c}) + \frac{1}{\sigma^{2}} (i\boldsymbol{e}_{c} \circ i\boldsymbol{e}_{b} \mathbf{d}\sigma \wedge \mathbb{E}_{a} - i\boldsymbol{e}_{c} \circ i\boldsymbol{e}_{a} \mathbf{d}\sigma \wedge \mathbb{E}_{b} + i\boldsymbol{e}_{a} \circ i\boldsymbol{e}_{b} \mathbf{d}\sigma \wedge \mathbb{E}_{c}).$$
(C.4)

In der Klammer der ersten Zeile erkennt man ω_{abc} aus (B.14) wieder. Mit der Abkürzung

$$u_a := \frac{1}{\sigma} \mathbf{d}\sigma(\boldsymbol{e}_a)$$

$$= \frac{1}{\sigma} e_a{}^{\mu} \partial_{\mu}\sigma,$$
(C.5)

 oder

$$\frac{1}{\sigma}\mathbf{d}\sigma = u_a \mathbb{E}^a \tag{C.6}$$

wird unter Ausnutzung der Linearität der inneren Ableitung und mit (B.7)

$$\frac{1}{\sigma} i_{\boldsymbol{e}_c} \circ i_{\boldsymbol{e}_b} \mathbf{d}\sigma \wedge \mathbb{E}_a = i_{\boldsymbol{e}_c} \circ i_{\boldsymbol{e}_b} u^f \mathbb{E}_f \wedge \mathbb{E}_a$$
$$= u_b G_{ac} - u_c G_{ab}.$$

Das kann in die Zweite Zeile von (C.4) eingesetzt werden und man erhält insgesamt

$$\hat{\omega}_{abc} = \frac{1}{\sigma} (\omega_{abc} + u_b G_{ac} - u_a G_{bc}). \tag{C.7}$$

Die Indizes von $\hat{\omega}_{abc}$ beziehen sich auf die Kobasis $\hat{\mathbb{E}}^a$, die Indizes auf der rechten Seite dagegen auf \mathbb{E}^a . Beim Übergang zu Konnexions-1-Formen ist (C.2) zu beachten: $\boldsymbol{\omega}_{ab} = \boldsymbol{\omega}_{abc} \mathbb{E}^c$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ab} = \hat{\omega}_{abc} \hat{\mathbb{E}}^c = \sigma \hat{\boldsymbol{\omega}}_{abc} \mathbb{E}^a$$

Für die Konnexions-1-Formen folgt dann aus (C.7) der Zusammenhang

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ab} = \boldsymbol{\omega}_{ab} + u_b \mathbb{E}_a - u_a \mathbb{E}_b. \tag{C.8}$$

Die neuen Krümmungs-2-Formen

$$\hat{oldsymbol{\Omega}}^a_{b}=\mathbf{d}\hat{oldsymbol{\omega}}^a_{b}+\hat{oldsymbol{\omega}}^a_{c}\wedge\hat{oldsymbol{\omega}}^c_{b}$$

berechnet man mit Hilfe von (C.8) unter Berücksichtigung von

$$egin{array}{rcl} oldsymbol{\omega}^a{}_c&=&-oldsymbol{\omega}{}_c^a\ \mathbb{E}^c\wedge\mathbb{E}_c&=&0\ \mathbf{d}\mathbb{E}_a&=&-\mathbb{E}_c\wedgeoldsymbol{\omega}^c{}_a. \end{array}$$

(Die letzte Gleichung folgt aus dem Verschwinden der Torsion nach (B.2), Indizes hinter der Differentiation **d** dürfen wegen $G_{ab} = \eta_{ab}$ gezogen werden.)

Man erhält

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{ab} = \boldsymbol{\Omega}^{ab} + \mathcal{J}^a \wedge \mathbb{E}^b - \mathcal{J}^b \wedge \mathbb{E}^a \tag{C.9}$$

mit den 1-Formen

$$\mathcal{J}^a := -\mathbf{d}u^a + u^c (\omega_c{}^a + u^a \mathbb{E}_c - \frac{1}{2} u_c \mathbb{E}^a).$$
(C.10)

Für die Ricci-1-Formen gilt

$$\hat{\mathcal{R}}^{b} = i_{\hat{\boldsymbol{e}}_{a}} \hat{\Omega}^{ab}$$

$$= \frac{1}{\sigma} i_{\boldsymbol{e}_{a}} (\Omega^{ab} + \mathcal{J}^{a} \wedge \mathbb{E}^{b} - \mathcal{J}^{b} \wedge \mathbb{E}^{a}).$$
(C.11)

Hierin liefert

$$\mathcal{J}^{b}{}_{a} = i \boldsymbol{e}_{a} \mathcal{J}^{b} \tag{C.12}$$

die Komponenten der 1-Formen \mathcal{J}^b bezüglich \mathbb{E}^a , $\mathcal{J}^b = \mathcal{J}^b{}_a\mathbb{E}^a$.

Die Ricci-1-Formen der beiden Metriken hängen dann über

$$\hat{\mathcal{R}}^{b} = \frac{1}{\sigma} (\mathcal{R}^{b} + \mathcal{J}^{a}{}_{a} \mathbb{E}^{b} + (N-2)\mathcal{J}^{b})$$
(C.13)

zusammen.

Für den Krümmungsskalar findet man ebenso

$$\hat{R} := i_{\hat{\boldsymbol{e}}_{b}} \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}^{b}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\sigma^{2}} (R + 2(N - 1)\mathcal{J}^{a}_{a}).$$
(C.14)

Aus (C.9),(C.13),(C.14) und (C.2) erhält man für $N \geq 3$ durch Addition folgender Zeilen

$$\hat{\Omega}^{ab} = \Omega^{ab} + \mathcal{J}^a \wedge \mathbb{E}^b - \mathcal{J}^b \wedge \mathbb{E}^a$$

$$-\frac{1}{N-2}\hat{\mathcal{R}}^a \wedge \hat{\mathbb{E}}^b = -\frac{1}{N-2}\mathcal{R}^a \wedge \mathbb{E}^b - \mathcal{J}^a \wedge \mathbb{E}^b - \frac{1}{N-2}\mathcal{J}^c{}_c\mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b$$

$$\frac{1}{N-2}\hat{\mathcal{R}}^b \wedge \hat{\mathbb{E}}^a = \frac{1}{N-2}\mathcal{R}^b \wedge \mathbb{E}^a + \mathcal{J}^b \wedge \mathbb{E}^a + \frac{1}{N-2}\mathcal{J}^c{}_c\mathbb{E}^b \wedge \mathbb{E}^a$$

$$\frac{\hat{R}}{(N-1)(N-2)}\hat{\mathbb{E}}^a \wedge \hat{\mathbb{E}}^b = \frac{R}{(N-1)(N-2)}\mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b + \frac{2}{N-2}\mathcal{J}^c{}_c\mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b$$

die Weyl-Formen

$$\mathbf{C}^{ab} = \hat{\mathbf{C}}^{ab}
= \mathbf{\Omega}^{ab} - \frac{1}{N-2} (\mathcal{R}^a \wedge \mathbb{E}^b - \mathcal{R}^b \wedge \mathbb{E}^a) + \frac{R}{(N-1)(N-2)} \mathbb{E}^a \wedge \mathbb{E}^b,$$
(C.15)

die offensichtlich unter konformer Reskalierung invariant sind. Da die hierin auftretenden Formen sich tensoriell transformieren, kann (C.15) in eine beliebige Basis umgeschrieben werden:

$$\mathbf{C}^{\alpha\beta} = \mathbb{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{N-2} (\mathcal{R}^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} - \mathcal{R}^{\beta} \wedge \theta^{\alpha}) + \frac{R}{(N-1)(N-2)} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}.$$
(C.16)

In Komponenten lauten die Weylformen (Weyltensor)

$$\begin{split} C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} &= R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - \frac{1}{N-2} \left(\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\gamma}G^{\beta}{}_{\delta} - \mathcal{R}^{\alpha}{}_{\delta}G^{\beta}{}_{\gamma} + \mathcal{R}^{\beta}{}_{\delta}G^{\alpha}{}_{\gamma} - \mathcal{R}^{\beta}{}_{\gamma}G^{\alpha}{}_{\delta} \right) \\ &+ \frac{R}{(N-1)(N-2)} \left(G^{\alpha}{}_{\gamma}G^{\beta}{}_{\delta} - G^{\alpha}{}_{\delta}G^{\beta}{}_{\gamma} \right). \end{split}$$

Für $N \ge 4$ ist das Verschwinden des Weyltensors bzw. der Weylformen auch hinreichend für konforme Flachheit [49].

Anhang D

Einbettung der SU(2) in SO(4)

Man kann in SO(4) eingebettete Lie-Generatoren der Gruppe SU(2) ausgehend von den Paulimatrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(D.1)

konstruieren. Die Matrizen

$$\Sigma_k := \frac{-i}{2} \tau_k \tag{D.2}$$

sind antihermitesche Lie-Generatoren der SU(2)-Fundamentaldarstellung, die die Kommutatorrelationen

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = \epsilon_{ijk} \Sigma_k \tag{D.3}$$

erfüllen. (In Elementarteilchen-Lehrbüchern werden meist die hermiteschen τ_k als Generatoren bezeichnet [45, 4])

Mit den Matrizen

$$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(D.4)

kann der Körper der komplexen Zahlen a + ib isomorph auf 2x2-Matrizen der Form $a \cdot \underline{1} + b \cdot I$ abgebildet werden. Ersetzt man in den Σ_k jede 1 durch $\underline{1}$ und jedes i durch I, dann entstehen drei antisymmetrische 4x4-Matrizen, die eine su(2)-Unteralgebra von so(4) aufspannen:

$$\bar{\mathcal{Y}}_{1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} -I \\ -I \end{array} \right) = \operatorname{Im}\Sigma_{1} \otimes I,$$

$$\bar{\mathcal{Y}}_{2} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} -I \\ +1 \end{array} \right) = \operatorname{Re}\Sigma_{2} \otimes \underline{1},$$

$$\bar{\mathcal{Y}}_{3} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} -I \\ +I \end{array} \right) = \operatorname{Im}\Sigma_{3} \otimes I,$$
(D.5)

Dabei wurde das Matrixtensorprodukt

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B & \dots & A_{1n} \cdot B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} \cdot B & \dots & A_{mn} \cdot B \end{pmatrix} \qquad (m \times n \text{-Matrix A, bel. Matrix } B) \quad (D.6)$$

benutzt. Zusammenfassend lassen sich die in so(4) eingebetteten Generatormatrizen der su(2) schreiben als:

$$\mathcal{Y}_k = \operatorname{Re}\Sigma_k \otimes \underline{1} + \operatorname{Im}\Sigma_k \otimes I. \tag{D.7}$$

Die $\overline{\mathcal{Y}}_k$ generieren mit $\exp(\alpha^k \overline{\mathcal{Y}}_k)(\alpha^k \text{ reell})$ eine 4-dimensionale reelle Darstellung der SU(2), die aufgrund des oben genannten Körperisomorphismus zu SU(2) isomorph ist (treue Darstellung). Die Kommutatorrelationen

$$[\mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_j] = \epsilon_{ijk} \mathcal{Y}_k \tag{D.8}$$

können mit der Beziehung

$$[A \otimes B, C \otimes D] = \frac{1}{2}([A, C] \otimes \{B, D\} + \{A, C\} \otimes [B, D])$$
(D.9)

aus (D.3) abgeleitet werden.

Die Umkehrung der Reihenfolge der Matrixtensorprodukte in (D.7) führt auf drei andere SU(2)-Einbettungsgeneratoren

$$\overset{+}{\mathcal{Y}}_{k} = \underline{1} \otimes \operatorname{Re}\Sigma_{k} + I \otimes \operatorname{Im}\Sigma_{k}, \qquad (D.10)$$

die mit den $\overline{\mathcal{Y}}_k$ kommutieren:

$$[\bar{\mathcal{Y}}_j, \bar{\mathcal{Y}}_k] = 0. \tag{D.11}$$

Die $\dot{\mathcal{Y}}_k$, $\bar{\mathcal{Y}}_k$ spannen zusammen die so(4)-Algebra aller antisymmetrischen 4x4-Matrizen auf. D.h. die Gruppe SO(4) ist lokal ein Produkt SU(2)xSU(2). Dagegen ist SO(3,1) nicht lokal isomorph zu einem Produkt [48, 49].

Für Komponentenrechnungen praktischer ist die Definition

$$(\overset{\pm}{Y_i})_{ab} = -\frac{1}{2}(\epsilon_{iab4} \pm \delta_{ia}\delta_{b4} \mp \delta_{ib}\delta_{a4}). \tag{D.12}$$

 $(a, b = 1 \dots 4, i = 1, 2, 3;$ Indizes werden mit δ_{ab} gezogen.)

Der neue Satz von $SU^{\pm}(2)$ -Generatoren $\overset{\pm}{Y_i}$ ist zu den vorher definierten $\overset{\pm}{\mathcal{Y}_i}$ gleichwertig.

Zusammenhang:

Relationen:

$$(\overset{\pm}{Y_{i}})_{ab} = -(\overset{\pm}{Y_{i}})_{ba}$$
 (D.13)

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_i, \dot{Y}_j \end{bmatrix} = \epsilon_{ijk} \dot{Y}_k \tag{D.14}$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{Y}_{i}, \mathbf{Y}_{k} \end{array} \right] = 0 \tag{D.15}$$

$$\operatorname{tr}(\bar{Y}_{i}\bar{Y}_{k}) = \operatorname{tr}(\bar{Y}_{i}\bar{Y}_{k}) = -\delta_{ik} \tag{D.16}$$

$$\operatorname{tr}(\bar{Y}_i \bar{Y}_k) = 0 \tag{D.17}$$

Faserdualitäten:

Definition

$$(\overset{\pm^*}{Y_i})_{cd} := \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} (\overset{\pm^*}{Y_i})^{ab}$$
(D.18)

Die $\stackrel{+}{Y_i}$ sind selbst
dual, die $\stackrel{-}{Y_i}$ antiselbst
dual:

$${\stackrel{+}{Y}}_{i}^{*} = {\stackrel{+}{Y}}_{i}^{*}$$
 (D.19)

$$\bar{Y}_i^* = -\bar{Y}_i \tag{D.20}$$

Da die Generatoren $\stackrel{\pm}{Y_i}$ eine Basis in der Algebra so(4) bilden, kann jede so(4)-wertige Konnexion ω zerlegt werden in:

$$\boldsymbol{\omega} = \underbrace{\mathbf{A}_{i}}_{\in su^{+}(2)}^{+} + \underbrace{\mathbf{A}_{i}}_{\in su^{+}(2)}^{-}.$$
 (D.21)

Die 1-Formen ${\overset{\pm}{\mathbf{A}}}_i$ lassen sich mit Hilfe der Spurrelationen (D.16,
D.17) aus $\boldsymbol{\omega}$ herausprojizieren:

$$\overset{+}{\mathbf{A}}_{i} = -\mathrm{tr}(\overset{+}{Y}_{i}\boldsymbol{\omega}) = (\overset{+}{Y}_{i})_{ab}\boldsymbol{\omega}^{ab}$$
(D.22)

$$\bar{\mathbf{A}}_i = -\mathrm{tr}(\bar{Y}_i \,\boldsymbol{\omega}) = (\bar{Y}_i)_{ab} \boldsymbol{\omega}^{ab}$$
 (D.23)

Für die Krümmungen

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \tag{D.24}$$

$$\overset{\pm}{\mathbf{F}} = \mathbf{d} \overset{\pm}{\mathbf{A}} + \overset{\pm}{\mathbf{A}} \wedge \overset{\pm}{\mathbf{A}}$$
(D.25)

folgt wegen

$$\overset{+}{\mathbf{A}}\wedge \bar{\mathbf{A}} = \overset{+}{\mathbf{A}}_i\wedge \bar{\mathbf{A}}_k \frac{1}{2}[\overset{+}{Y^i},\overset{-}{Y^k}] = 0$$

die Zerlegung

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{F} + \mathbf{F} = \mathbf{F}_i^+ \mathbf{F}_i^+ + \mathbf{F}_i^- \mathbf{F}_i^- \mathbf{V}_i^- .$$
(D.26)

Projektionen:

$$\overset{\pm}{\mathbf{F}}_{i} = -\mathrm{tr}(\overset{\pm}{Y}_{i} \mathbf{\Omega}) = (\overset{\pm}{Y}_{i})_{ab} \mathbf{\Omega}^{ab}$$
(D.27)

Der Hodge-Star wirkt nicht auf die $\stackrel{\pm}{Y}_i$, daher gilt auch

$$\overset{(g)}{\star} \boldsymbol{\Omega} = \overset{(g)}{\star} \overset{+}{\mathbf{F}} + \overset{(g)}{\star} \overset{-}{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} g & + \\ \star & \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \overset{+}{Y^i} + \begin{pmatrix} g & - \\ \star & \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \overset{-}{Y^i}$$
(D.28)

und

$$\overset{(g)}{\star} \overset{\pm}{\mathbf{F}}_{i} = -\operatorname{tr}(\overset{\pm}{Y}_{i} \overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}) = (\overset{\pm}{Y}_{i})_{ab} \overset{(g)}{\star} \mathbf{\Omega}^{ab}.$$
(D.29)

Die Projektion auf die Unteralgebren $su^{\pm}(2)$ ist mit der Entkopplungsabbildung verträglich. Bei SO(4)-Umeichungen werden die projizierten Konnexionen $\stackrel{+}{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{A}}$ durch $SU^{+}(2)$ - bzw. durch $SU^{-}(2)$ -Transformationen richtig umgeeicht. Das sieht man folgendermaßen:

Eine SO(4)-Matrix Mkann wegen der Kommutator
relation (D.15) zerlegt werden in

$$M(x) = \exp(\bar{Y} + \bar{Y}) = \exp(\bar{Y}) \exp(\bar{Y}) = \bar{M}(x) \bar{M}(x), \qquad (D.30)$$

wobei

$$\stackrel{\pm}{Y} = \stackrel{\pm}{Y}(x) = \stackrel{\pm}{\alpha^{i}}(x) \stackrel{\pm}{Y}_{i}$$

geeignete Linearkombinationen der Generatoren sind und

$$\stackrel{\pm}{M}(x) = \exp(\stackrel{\pm}{Y}) \in SU^{\pm}(2).$$

Die SO(4)-Umeichung einer SO(4)-Konnexion $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\dot{A}} + \mathbf{\ddot{A}}$ lautet

$$\boldsymbol{\omega}' = M^{-1}\boldsymbol{\omega}M + M^{-1}\mathbf{d}M. \tag{D.31}$$

Mit (D.30) und

$$[\stackrel{+}{M}, \bar{M}] = [\stackrel{+}{M}^{-1} \mathbf{d} \stackrel{+}{M}, \ \bar{M}] = [\stackrel{+}{\mathbf{A}}, \bar{M}] = 0$$

 $(\pm \text{ vertauschbar})$ zerfällt das in

$$\boldsymbol{\omega}' = \underbrace{\overset{+}{\underline{M}^{-1}}\overset{+}{\mathbf{A}}\overset{+}{\underline{M}} + \overset{+}{\underline{M}^{-1}} \mathbf{d}\overset{+}{\underline{M}}}_{\in su^+(2)} + \underbrace{\overset{-}{\underline{M}^{-1}}\overset{-}{\mathbf{A}}\overset{-}{\underline{M}} + \overset{-}{\underline{M}^{-1}} \mathbf{d}\overset{-}{\underline{M}}}_{\in su^-(2)}.$$
(D.32)
Die ±-Anteile liegen in den Unteralgebren $su^{\pm}(2),$ also liefert die Projektion

$$- \overset{+}{Y}_{i} \operatorname{tr}(\overset{+}{Y}^{i} \boldsymbol{\omega}') = \overset{+}{M}^{-1} \overset{+}{\mathbf{A}} \overset{+}{M} + \overset{+}{M}^{-1} \mathbf{d} \overset{+}{M} = \overset{+}{\mathbf{A}}'$$
(D.33)

die $SU^+(2)$ -Umeichung von $\stackrel{+}{\mathbf{A}}$ (analog für $\overline{\mathbf{A}}$).

(Alle Relationen (D.13) bis (D.33) gelten ebenso für $\overset{\pm}{\mathcal{Y}}_{i}$.)

Literaturverzeichnis

- A. Actor. Classical solutions of SU(2) Yang-Mills theories. Rev. Mod. Phys., 51:461–525, 1979.
- [2] W.F. Ames. Nonlinear Differential Equations in Engineering, volume I/II. Academic Press, New York, London, 1965.
- [3] T. Banks, Y. Dotan, and D. Horn. Geometric fermions. *Phys. Lett.*, 117B:413–417, 1982.
- [4] P. Becher, M. Böhm, and H. Joos. Eichtheorien der starken und der schwachen Wechselwirkung. Teubner, Stuttgart, 1983.
- [5] P. Becher and H. Joos. The Dirac-Kaehler equation and fermions on the lattice. Z. Phys. C, 15:343–365, 1982.
- [6] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett.*, 59B:85–87, 1975.
- [7] I.M. Benn and R.W. Tucker. A generation model based on Kähler fermions. *Phys. Lett.*, 119B:348–350, 1982.
- [8] I.M. Benn and R.W. Tucker. Fermions without spinors. Comm. Math. Phys., 89:341–362, 1983.
- [9] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistische Quantenmechanik*. BI, Mannheim, 1966.
- [10] M. Blau. Connections on Clifford bundles and the Dirac operator. Lett. Math. Phys., 13:83–92, 1987.
- [11] R. Brucker and M. Sorg. Geometry of su(2) di-meron solution. Z. Naturforsch., 41a:571–584, 1986.
- [12] R. Brucker and M. Sorg. Geometry and topology of so(4) trivializable gauge fields. Z. Naturforsch., 42a:521–537, 1987.
- [13] R. A. Brucker. Dissertation, Universität Stuttgart, 1988.
- [14] L. Caffarelli, B. Gidas, and J. Spruck. On multimeron solutions of the Yang-Mills equations. *Commun. Math. Phys.*, 87:485–495, 1983.
- [15] C. G. Callan, R. Dashen, and D. J. Gross. Toward a theory of the strong interactions. *Phys. Rev.*, D17:2717–2763, 1978.

- [16] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. Analysis, manifolds and physics. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [17] R. Courant and D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics, volume II. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [18] V. de Alfaro, S. Fubini, and G. Furlan. A new classical solution of the Yang-Mills field equations. *Phys. Lett.*, 65B:163–166, 1976.
- [19] R. Dick. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1987.
- [20] R. Dick. Locally symmetric riemannian spaces and solutions of Yang-Mills equations. Lett. Math. Phys., 14:63–67, 1987.
- [21] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Royal. Soc. London*, A117:610, 1928.
- [22] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron II. Proc. Royal. Soc. London, A118:351, 1928.
- [23] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Phys. Rep.*, 66:213–393, 1980.
- [24] J. Glimm and A. Jaffe. Multiple meron solutions of the classical Yang-Mills equation. *Phys. Lett.*, 73B:167–170, 1978.
- [25] M. Göckeler and T. Schücker. Differential Geometry, Gauge Fields and Gravity. Cambride University Press, Cambridge, 1987.
- [26] W. Graf. Differential forms as spinors. Ann. Inst. Henri Poincaré, XXIX:85– 109, 1978.
- [27] W. H. Greub. *Linear Algebra*. Springer, Berlin, 2. edition, 1963.
- [28] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [29] T. Heck. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1989.
- [30] T. Heck and M. Sorg. Geodesic motion in trivializable gauge fields. Z. Naturforsch., 46a:655–668, 1991.
- [31] F. H. Hehl. On the energy tensor of spinning massive matter in classical field theory and general relativity. *Rep. Math. Phys.*, 9:55, 1976.
- [32] B. Holdom. Gauged fermions from tensor fields. Nucl. Phys., B233:413–432, 1984.
- [33] K. Itô, editor. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, volume III. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2 edition, 1987.
- [34] R. Jackiw, C. Nohl, and C. Rebbi. Conformal properties of pseudoparticle configurations. *Phys. Rev.*, D15:1642–1646, 1977.
- [35] T. Jonsson, O. McBryan, F. Zirilli, and J. Hubbard. An existence theorem for multimeron solutions to classical Yang-Mills field equations. *Commun. Math. Phys.*, 68:259–273, 1979.

- [36] A. N. Jourjine. Space-time Dirac-Kahler spinors. Phys. Rev., D 35:757–758, 1987.
- [37] B. Julia and A. Zee. Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory. *Phys. Rev.*, D 11:2227–2232, 1975.
- [38] E. Kähler. Der innere Differentialkalkül. Rend. Mat., 21:425–523, 1962.
- [39] J. Kupsch. A probabilistic formulation of bosonic and fermionic integration. *Rev. Math. Phys.*, 2:457–477, 1990.
- [40] E. Lanckau and W. Tutschke, editors. Complex Analysis. Akademie-Verlag, Berlin, 1983.
- [41] J. L. Lopes. *Gauge Field Theories*. Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [42] J. Madore. Geometric methods in classical field theory. Phys. Rep., 75:125– 204, 1981.
- [43] M. Mattes and M. Sorg. Riemann-Cartan geometry of trivializable gauge fields. Z. Naturforsch., 44a:222–238, 1989.
- [44] C. Mokler. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1991.
- [45] O. Nachtmann. *Elementarteilchenphysik*. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [46] M. Nakahara. Geometry, Topology and Physics. Hilger, Bristol, 1990.
- [47] A. Al Saad and I.M. Benn. Ideal-preserving Lorentzian connections. J. Math. Phys., 28:1883–1885, 1987.
- [48] R. U. Sexl and H.K. Urbantke. *Relativität, Gruppen, Teilchen. Springer, Wien*, 1982.
- [49] R. U. Sexl and H.K. Urbantke. Gravitation und Kosmologie. BI, Mannheim, 2. edition, 1983.
- [50] H.P. Thienel. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1990.
- [51] H.P. Thienel. The SUSY oscillator from local geometry. Preprint, Universität Siegen, 1993.
- [52] R. Walter. *Differentialgeometrie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1978.
- [53] F. Wilczek. Geometry and interactions of instantons. In D. Stump and D. Weingarten, editors, *Quark Confinement and Quantum Field Theory*. Wiley, New York, 1977.
- [54] C. M. Will. Was Einstein right ? Basic Books, New York, 1986.
- [55] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, D96:191–195, 1954.
- [56] D. Zwillinger. Handbook of Differential Equations. Academic Press, 1989.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Personen bedanken, die besonders zur Vollendung dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein Dank gilt

- Herrn Dr. M. Sorg für die Anregung zu dieser Arbeit, für Diskussionen und für die genaue Durchsicht des Manuskripts,
- Herrn Prof. W. Weidlich für die freundliche Aufnahme am Institut und für die Übernahme des Hauptberichts,
- Herrn Prof. H.-R. Trebin für seine Bemühungen als Mitberichter,
- Klaus Teichmann, Martin Munz, Anja Mohr, Jürgen Stockburger, Martin Hilliges und Péter Molnár für ihre Mitarbeit oder Unterstützung bei der Betreuung der Institutsrechner,
- Hans-Peter Thienel, Matthias Keller und Ewald Lehmann für fachliche Gespräche,
- Stephan Appelt für die Fehlersuche im Manuskript,
- allen Institutsmitgliedern für die angenehme Arbeitsatmosphäre,
- meiner Familie.

Lebenslauf

Thomas Heck, geboren am 3. Oktober 1960 in Waiblingen

Eltern: Herbert Heck und Hildegard Heck geb. Wagner

1967 -	1971	Grundschule in Waiblingen
1971 -	1980	Staufer-Gymnasium in Waiblingen
Okt.	1980	Bundeswehr bis Okt. 1981
Okt.	1981	Beginn des Physikstudiums an der Universität Stuttgart
Sep.	1983	Vordiplom Physik
Apr.	1984	Immatrikulation im Studiengang Mathematik
Apr.	1985	Vordiplom Mathematik
Nov.	1987	Hauptdiplomprüfungen Physik
Feb.	1989	Abschluß der Diplomarbeit am II. Institut für Theoretische Physik bei Prof. Dr. Dr. h. c. W. Weidlich mit dem Thema: Die charakteristische Distribution bei trivialisierbaren Eichfeldern
Sep.	1989	Herbstschule für Hochenergiephysik Maria Laach
seit	1989	Promotion und Tätigkeit als Systemmanager am II. Institut für Theoretische Physik