

2-Teilchen Systeme in der Relativistischen Schrödingertheorie

Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Stefan Rupp

geboren in Ruit auf den Fildern

Hauptberichter: Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Weidlich

Mitberichter: Prof. Dr. Hans-Rainer Trebin

Tag der mündlichen Prüfung: 30. November 2001

II. Institut für Theoretische Physik

Universität Stuttgart

Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung	i
1 Eichtheorien und Faserbündel	1
1.1 Eichtheorien	1
1.2 Faserbündel	4
1.2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	4
1.2.2 Felder auf Mannigfaltigkeiten	6
1.2.3 Der Faserbündelformalismus	11
1.2.4 Prinzipalbündel, Konnexion und Krümmung	13
1.2.5 Assoziierte Vektorbündel und Paralleltransport	16
2 Die Relativistische Schrödingertheorie	19
2.1 Mehrteilchen-Zustände in der RST	19
2.2 Die Intensitätsmatrix \mathcal{I}	21
2.3 Der Hamiltonian \mathcal{H}_μ	23
2.4 Die RST-Dynamik	24
2.5 Erhaltungssätze in der RST	26
2.6 Äquivalenz von RST und konventioneller Quantentheorie auf dem 1-Teilchen Sektor	28
2.7 Selbst-Wechselwirkung in der RST	31

3	2-Teilchen Systeme in der RST	33
3.1	Operatorbasis und Eichgruppe	34
3.2	Rotierende Basis und Polarisationsströme	38
3.3	Die Integrabilitätsbedingung	41
3.4	Die Erhaltungsgleichung	44
3.5	Die Dichte-Dynamik	46
4	Die Mischungsentartung	55
4.1	Der Mischungsparameter C_*	56
4.2	Störungstheoretische Entwicklung um die reinen Zustände	59
4.3	Asymptotische Mischungsentartung und die Dalgarno-Lewis Methode	68
4.4	Die Mischungsgruppe	82
4.5	Exakte Lösungen	88
5	Die Austauschentartung	97
5.1	Die Einzelteilchen-Dynamik als abgeschlossenes System	98
5.2	Austauschdynamik und Austauschvakua	104
6	Mischungs- und Austauscheffekte	115
6.1	Effektive Einzelteilchenfelder	116
6.2	Zerlegung in zwei Teilsysteme	124
7	Energieeigenwerte des skalaren He-Atoms	129
7.1	He-Niveaus in der konventionellen Quantenmechanik	130
7.2	Die Austausch-Dynamik	134
7.3	Verschränkte Zustände in der RST	139
7.4	Statische Lösungen	140

7.5	Ununterscheidbarkeit von Teilchen in der RST	144
7.6	Störungsrechnung erster Ordnung	148
7.7	Positive Gemische ($\sigma_* = +1$)	152
7.8	Negative Gemische ($\sigma_* = -1$)	155
7.9	Numerische Berechnung der Ortho- und Para-Helium-Zustände . .	156
7.10	Das Einteilchen-Spektrum	157
7.11	Zweiteilchen-Korrekturen	158
7.12	Vergleich mit der konventionellen Quantentheorie	159
8	Ausblick und Danksagung	165
	Symbolverzeichnis	169
	Literaturverzeichnis	175

Einleitung und Zusammenfassung

Die relativistische Schrödingertheorie (RST) stellt einen neuen Zugang zur relativistischen Quantentheorie dar. Sie verwendet den Faserbündelformalismus zur Beschreibung der Materie und ihrer Wechselwirkungen. Die RST lehnt sich hierbei eng an die in der Standardquantentheorie verwendeten Konzepte an. Die beiden wesentlichen Größen in der RST sind die Intensitätsmatrix \mathcal{I} , welche die Materieverteilung über der Raumzeit beschreibt, sowie die Hamilton'sche 1-Form \mathcal{H}_μ , welche deren Dynamik bestimmt. Man kann diese Größen als formal äquivalent zu Dichtematrix und Hamiltonian in der Standardquantentheorie ansehen.

Das theoretische Gerüst der RST ist sehr allgemein gehalten, so daß sich Vielteilchensysteme mit ganz- oder halbzahligem Spin unter Einwirkung von beliebigen Eichwechselwirkungen behandeln lassen (wird insbesondere die allgemeine Relativitätstheorie als Eichtheorie aufgefaßt, läßt sich die RST auch auf einem gekrümmten Raumzeit-Hintergrund anwenden). Da die Behandlung von Vielteilchensystemen jedoch nicht nur im Rahmen der konventionellen Quantenmechanik, sondern auch in der RST recht aufwendig ist, wurden in der Vergangenheit hauptsächlich Einteilchen-Systeme betrachtet. Hierbei hat sich gezeigt, daß die relativistischen Schrödingergleichungen im 1-Teilchen Fall mit den relativistischen 1-Teilchen Wellengleichungen (Klein-Gordon und Dirac-Gleichung) übereinstimmen.

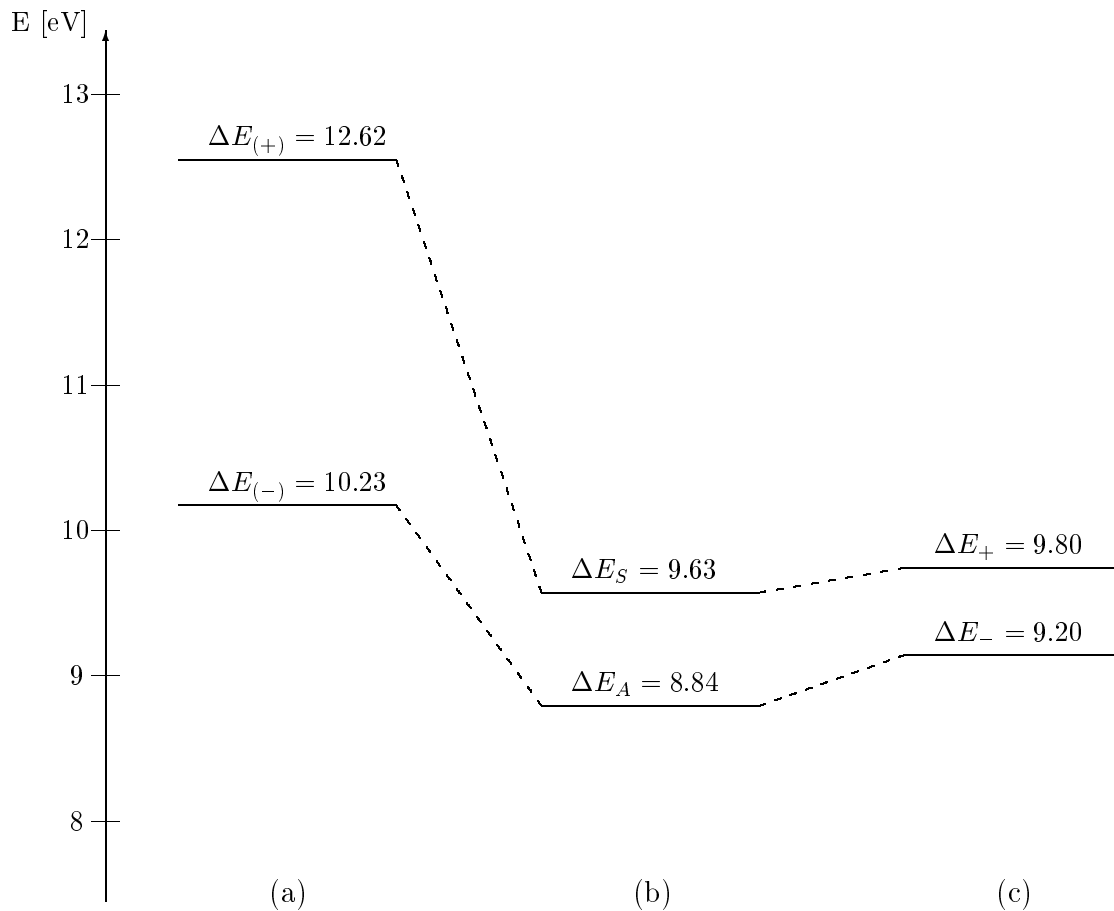
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun mit der Beschreibung eines Systems von zwei skalaren Teilchen, die über die elektromagnetische Wechselwirkung gekoppelt sind. Dieses Mehrteilchensystem ist zwar nicht besonders komplex, aber dennoch von besonderem Interesse, da bereits bei dessen Behandlung alle für die Beschreibung von Mehrteilchen-Systemen in der RST relevanten Effekte auftreten müssen (vergleichbar mit der Bedeutung von 2-Teilchen Systemen für das Verständnis von Mehrteilchen-Systemen in der konventionellen Quantenmechanik).

Die Beschreibung von Mehrteilchen-Systemen findet bisher entweder im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik oder der Quantenfeldtheorie statt. Es fehlt aber ein Bindeglied zwischen diesen beiden Beschreibungen, nämlich eine relativistische (nicht zweitquantisierte) Mehrteilchen-Quantenmechanik, welche formal auf derselben Ebene steht wie die Klein-Gordon bzw. Dirac-Gleichung bei der Beschreibung von 1-Teilchen-Systemen. Die RST ist der Versuch, eine solche Theorie aufzustellen. Da die RST in der hier vorliegenden Form noch keine Erzeugung bzw. Vernichtung von Teilchen beschreibt, aber relativistische Effekte berücksichtigt, stellt sie in der Tat eine Art Zwischenstufe zwischen der nichtrelativistischen Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie dar.

Es kann in dieser Arbeit gezeigt werden, daß die RST in der Lage ist, auf natürliche Weise einige der Resultate der nicht-relativistischen Mehrteilchen-Quantentheorie auf den relativistischen Fall zu verallgemeinern. So findet sich die Einteilung der Materie in zwei Arten (Fermionen/Bosonen), sowie die Aufspaltung der Energieeigenwerte gebundener Zustände in Ortho- und Para-Niveaus auch in der RST wieder, sowie die Ununterscheidbarkeit der Teilchen in gebundenen Zuständen. Anders als in der konventionellen Quantentheorie ist diese Aufteilung in zwei Materiearten jedoch nicht das Resultat eines abstrakten (Anti)-Symmetrisierungspostulats, sondern eine direkte Folge der RST-Dynamik. Die Einführung eines solchen (Anti)-Symmetrisierungs-Postulats erweist sich somit in der RST als überflüssig.

Darüberhinaus läßt sich der nicht-relativistische Grenzfall der RST dazu verwenden, Vergleiche mit der nicht-relativistischen Mehrteilchen-Quantenmechanik anzustellen. Der Vergleich von RST und konventioneller Theorie für die Energieniveaus des skalaren He-Atoms in 1. Störungsordnung zeigt, daß die RST deutlich näher bei den experimentellen Daten liegt als die konventionelle Theorie. Insbesondere die Energiedifferenz zwischen Ortho- und Parazuständen wird von der RST wesentlich besser erfaßt (um mehr als einen Faktor 10) als von der konventionellen Quantentheorie.

Als ein Beispiel für den Vergleich zwischen RST und konventioneller Quantentheorie sind in der folgenden Abbildung die Energieniveaus der $(1s, 2s)$ -Zustände des He-Atoms aufgetragen, und zwar in Teil (a) die Voraussagen der konventionellen Theorie, in Teil (b) die experimentellen Werte und in Teil (c) die Werte der RST, die wesentlich näher an den experimentellen Daten liegen.



Die vorliegende Arbeit gliedert sich nun wie folgt:

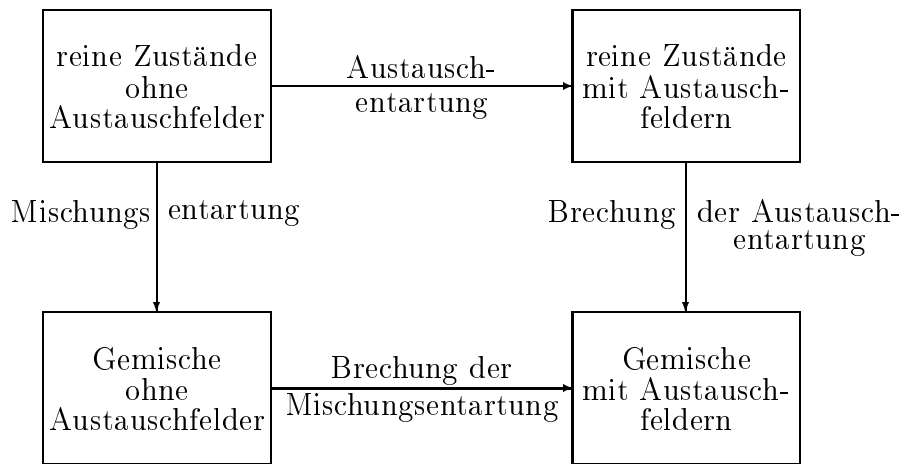
In Kapitel 1 werden die Konzepte behandelt, welche der RST zugrundeliegen, also Eichtheorien und Faserbündel. Die dynamischen Gleichungen der RST werden in Kapitel 2 vorgestellt. Diese Grundgleichungen werden dann in Kapitel 3 auf das zu untersuchende 2-Teilchen System (mit Eichgruppe $U(1) \times U(1)$) spezialisiert. Das hierbei entstandene System nichtlinearer Differentialgleichungen ist nur sehr schwer in exakter Form zu lösen. Da in der RST allgemein zwei Effekte eine wichtige Rolle spielen, nämlich Mischungs- und Austauscheffekte, bietet es sich an, diese zunächst getrennt voneinander zu untersuchen.

In Kapitel 4 wird nur der Mischungseffekt betrachtet, der Austauscheffekt hingegen vernachlässigt. Dies bedeutet, daß diejenigen Komponenten des Hamiltonians \mathcal{H}_μ , welche sich nicht eindeutig einem Teilchen zuordnen lassen (die sog. Austauschfelder) Null gesetzt werden. Die Materieverteilung wird dabei durch die Intensitätsmatrix \mathcal{I} beschrieben, d.h. es liegen Zustandsgemische vor. Man kann nun zeigen, daß dieser Spezialfall äquivalent ist zur Beschreibung der Materie durch zwei nur über die elektromagnetische Wechselwirkung gekoppelte Klein-

Gordon Gleichungen, so daß keine neuen physikalischen Effekte auftreten (*Mischungsentartung*).

In Kapitel 5 wird nur der Austauscheffekt untersucht, d.h. die Austauschfelder werden zum Gleichungssystem hinzugenommen. In diesem Spezialfall liegt aber keine Mischung von Zuständen vor, d.h. die Intensitätsmatrix kann durch einen reinen Zustand dargestellt werden $\mathcal{I} \Rightarrow \psi \otimes \bar{\psi}$. Auch dieser Fall ist äquivalent zu zwei Klein-Gordon Gleichungen, welche nur über die Eichfelder wechselwirken (*Austauschentartung*).

Dieser Sachverhalt wird durch folgendes Schema nochmals verdeutlicht:



In Kapitel 6 werden nun die Erkenntnisse aus den beiden vorigen Kapiteln dazu verwendet, um Gemische mit Austauschfeldern in adäquater Form beschreiben zu können. Durch die Verwendung einer neuen Parametrisierung kann man zeigen, warum physikalisch relevante Effekte nur auftreten können, wenn sowohl Gemische als auch Austauschfelder vorliegen.

In Kapitel 7 wird diese Parametrisierung eingesetzt, um die Energieniveaus des skalaren He-Atoms zu berechnen. Damit wird zum ersten Mal die RST in einer konkreten Anwendung eingesetzt, so daß deren Vorhersagen mit dem Experiment verglichen werden können. Es zeigt sich (s.o.), daß die RST diesem Test ausgezeichnet besteht, da sie wesentlich dichter an den Beobachtungsdaten liegt als die konventionelle Quantenmechanik. Die Behandlung weiterer Anwendungsbeispiele muß zeigen, ob dies eine Besonderheit des hier betrachteten Systems ist, oder ob diese Eigenschaft der RST von universeller Natur ist (vgl. Kapitel 8).

Kapitel 1

Eichtheorien und Faserbündel

Die relativistische Schrödingertheorie beruht auf der Faserbündeltheorie. Um die RST zu verstehen, sollte man mit diesem Formalismus vertraut sein. Will man jedoch nur Berechnungen im Rahmen der RST durchführen, so ist die Kenntnis der Faserbündeltheorie nicht unbedingt notwendig. Man muß also die Prinzipien, auf denen die Grundgleichungen der RST beruhen, nicht unbedingt kennen, um die RST anzuwenden. Diese Situation ist analog zur Verwendung der Maxwell'schen Gleichungen, die zwar jeder Physiker gebraucht, aber nicht unbedingt Kenntnis davon besitzt, daß diese eine geometrische Deutung (im Rahmen der Faserbündeltheorie) zulassen.

Diesem Umstand trägt auch die Einteilung dieses Kapitels Rechnung: In Kapitel 1.1 werden die Eichtheorien und die kovariante Ableitung als bloße Rechenmethoden vorgestellt. In Kapitel 1.2 folgt die geometrische Begründung dieser Methoden mit einer kurzen Einführung in die zu ihrem Verständnis notwendigen Konzepte. Es sei aber darauf hingewiesen, daß die Kenntnis von Kapitel 1.1 völlig ausreicht, um die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen nachvollziehen zu können.

1.1 Eichtheorien

Ein physikalisches System wird beschrieben durch Materiefelder, die über Eichfelder miteinander wechselwirken. Beide zusammen unterliegen der Gravitation, die ihren natürlichen Platz in der RST hat, jedoch soll deren Einfluß in der vorliegenden Arbeit vernachlässigt werden. Das Materiefeld für ein freies, skala-

res Teilchen wird in der konventionellen Quantentheorie durch die Klein-Gordon Gleichung beschrieben

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi + \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \psi = 0 . \quad (1.1)$$

Das Materiefeld stellt ein komplexes Skalarfeld über der Raumzeit dar, d.h. jedem Raum-Zeitpunkt wird eindeutig eine komplexe Zahl zugewiesen. Will man den Einfluß eines elektromagnetischen Feldes auf dieses Feld beschreiben, so greift man auf das Prinzip der Minimalkopplung zurück: Man ersetzt die partielle Ableitung ∂_μ durch

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \doteq \partial_\mu - ieA_\mu , \quad (1.2)$$

wobei e die Ladung des Teilchens beschreibt und $A_\mu = \{A_0, \vec{A}\}$ das Vektorpotential darstellt. Dessen 0-Komponente entspricht dem elektrostatischen Potential $\phi = eA_0$; aus dem Raumanteil läßt sich das magnetische Feld gemäß $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ bestimmen. Die Ableitung \mathcal{D}_μ (1.2) wird als eichkovariante Ableitung bezeichnet.

Durch diese einfache Ersetzung wird also der Einfluß des Elektromagnetismus auf die Materie beschrieben, und die Klein-Gordon Gleichung in einem elektromagnetischen (Eich-)Feld nimmt folgende Form an:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \psi + \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \psi = 0 . \quad (1.3)$$

Nun gehorcht selbstverständlich auch das Eichfeld A_μ Bewegungsgleichungen, nämlich den Maxwell-Gleichungen

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi\alpha_* j_\nu , \quad (1.4)$$

wobei α_* die Feinstrukturkonstante bezeichnet und ∇^μ die koordinatenkovariante Ableitung, welche in dieser Arbeit mit der partiellen Ableitung ∂^μ übereinstimmt, da hier ausschließlich der Fall einer flachen Raumzeit betrachtet wird. Der elektromagnetische Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ läßt sich aus dem Vektorpotential A_μ gemäß

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (1.5)$$

berechnen.

Da in die Feldgleichung des Eichfeldes (1.4) aber nicht das Vektorpotential, sondern der Feldstärketensor eingeht, ist diese Gleichung auch dann erfüllt, wenn man zu A_μ ein beliebiges Gradientenfeld hinzufügt, d.h. auch

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta(x) \quad (1.6)$$

erfüllt die Maxwell-Gleichungen. Diese sogenannte Umeichung des Eichpotentials A_μ führt aber nicht zu einer veränderten physikalischen Situation, da das Eichpotential A_μ keine Observable ist, und die Umeichung die (beobachtbare) Feldstärke $F_{\mu\nu}$ invariant läßt. Die Umeichung darf aber auch keinen Einfluß auf die Physik des Materiefeldes ausüben. In die Materiegleichung (1.3) geht allerdings nicht die Feldstärke, sondern das Eichpotential A_μ selbst ein. Daher verändert sich diese Gleichung unter einer Eichtransformation.

Nun ist die beobachtbare Größe im Falle des Materiefeldes nicht die Wellenfunktion $\psi(x)$ selbst, sondern deren Quadrat $|\psi(x)|^2$. Die Wellenfunktion kann also an jedem Raum-Zeitpunkt mit einem komplexen Phasenfaktor multipliziert werden

$$\psi'(x) = \exp[i\alpha(x)]\psi(x) , \quad (1.7)$$

ohne daß sich die Beobachtungsgröße $|\psi(x)|^2$ verändert. Diese Tatsache kann man verwenden, um die durch die Umeichung veränderte Materiegleichung (1.3) forminvariant zu erhalten: Macht man beide Ersetzungen (1.6) und (1.7) gemeinsam, so behält die Klein-Gordon Gleichung ihre Form:

$$\mathcal{D}_\mu' \mathcal{D}^{\mu'} \psi' + \left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^2 \psi' = 0 . \quad (1.8)$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man als $U(1)$ -Eichinvarianz der Klein-Gordon Gleichung, da die elektromagnetische Wechselwirkung mathematisch durch eine $U(1)$ -Eichgruppe beschrieben wird. Wie kann man nun diesen Formalismus auf andere Wechselwirkungen, z.B. die schwache Wechselwirkung, welche durch die Eichgruppe $SU(2)$ beschrieben wird, verallgemeinern ?

Man ersetzt hierzu das Eichfeld A_μ durch einen Eichoperator \mathcal{A}_μ . Die Wirkung der eichkovarianten Ableitung auf ein Vektorfeld Ψ definiert man dann als

$$\mathcal{D}_\mu \Psi \doteq \partial_\mu \Psi + \mathcal{A}_\mu \cdot \Psi . \quad (1.9)$$

Auf eine Matrix \mathcal{I} wirkt die eichkovariante Ableitung folgendermaßen:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{I} \doteq \partial_\mu \mathcal{I} + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{I}] . \quad (1.10)$$

Der Feldstärkeoperator wird aus dem Eichpotential durch

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \mathcal{A}_\nu - \nabla_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad (1.11)$$

gebildet. Der Kommutator $[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$ tritt selbstverständlich nur für nichtabelsche Eichgruppen auf. Da die in dieser Arbeit verwendete Eichgruppe $U(1) \times U(1)$

abelsch ist, verschwindet der Kommutator und muß bei den folgenden Berechnungen nicht berücksichtigt werden.

Diese allgemeinen Definitionen hängen nun mit dem Spezialfall des Elektromagnetismus folgendermaßen zusammen: Der Eichoperator \mathcal{A}_μ wird nach den Generatoren τ_a der Lie-Gruppe zerlegt, welche die Wechselwirkung beschreibt, d.h. $\mathcal{A}_\mu = A_{a\mu}\tau^a$. Man erhält nun den Spezialfall der elektromagnetischen Wechselwirkung zurück, wenn man sich klar macht, daß die $U(1)$ -Eichgruppe nur einen einzigen Generator $\tau = -i$ besitzt. Der Eichoperator \mathcal{A}_μ und das Eichfeld A_μ hängen demnach folgendermaßen zusammen: $\mathcal{A}_\mu = A_\mu\tau = -iA_\mu$. Setzt man dies in (1.9) ein, so erhält man genau (1.2).

Das Eichpotential \mathcal{A}_μ , die Feldstärke $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sowie die Eichtransformationen und die kovariante Ableitung \mathcal{D}_μ besitzen nun auch eine geometrische Bedeutung, welche erst im Rahmen des Faserbündelformalismus deutlich wird.

1.2 Faserbündel

Dieses Unterkapitel bietet eine Einführung in die Faserbündeltheorie, welche die mathematische Grundlage für die Eichtheorien bildet. Es wurde hierbei versucht, die grundlegenden Konzepte auch einem mit diesem Formalismus nicht vertrauten Leser nahezubringen. Deshalb ist dieses Teilkapitel auch etwas umfangreicher, als man es in einer Doktorarbeit vielleicht erwarten würde. Gute Zusammenfassungen für Leser, die mit dieser Materie schon vertraut sind, finden sich z. B. in [1, 2]. Darüberhinaus gibt es zu diesem Thema zahlreiche mathematische [4, 5, 6, 7, 8] sowie speziell für Physiker geschriebene [3, 9, 10, 11] Lehrbücher. Die hier gegebene Darstellung orientiert sich an [3].

Bevor wir uns aber dem Faserbündelformalismus zuwenden, ist es notwendig, zuerst in einige Konzepte aus der Differentialgeometrie einzuführen.

1.2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume, die sich lokal homöomorph auf den \mathbb{R}^n abbilden lassen, was durch die Einführung von Koordinatensystemen geschieht. *Lokal* deshalb, weil sich im allgemeinen nicht die *gesamte* Mannigfaltigkeit durch *ein* Koordinatensystem homöomorph auf den \mathbb{R}^n abbilden läßt. Sollte

dies doch der Fall sein, so spricht man von einer *trivialisierbaren* Mannigfaltigkeit. Obwohl man annehmen könnte, daß die Entscheidung, ob ein Koordinatensystem zur Überdeckung einer Mannigfaltigkeit ausreicht oder nicht, leicht zu treffen ist, ist der Nachweis, ob eine Mannigfaltigkeit trivialisierbar ist oder nicht, selbst für Mannigfaltigkeiten mit einfacher Struktur nicht leicht zu führen.

Betrachten wir nun einmal als ein einfaches Beispiel für eine nicht trivialisierbare Mannigfaltigkeit die Einheitskugel S^2 im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\}. \quad (1.12)$$

Man parametrisiert diese Kugel(oberfläche) durch ein Koordinatensystem, z.B. durch

$$y^1 = \sin \theta \cos \phi \quad (1.13a)$$

$$y^2 = \sin \theta \sin \phi \quad (1.13b)$$

$$y^3 = \cos \theta \quad (1.13c)$$

mit $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Als *Koordinatenfunktion* oder *Koordinatensystem* $\varphi(p)$, $p \in S^2$ wird die Menge $\{y^1(p), y^2(p), y^3(p)\}$ bezeichnet, $\varphi(p)$ bildet also in diesem Fall Punkte auf der Kugeloberfläche auf Punkte im \mathbb{R}^3 ab. Betrachtet man das hier angegebene Koordinatensystem genauer, so stellt man fest, daß

- (i) benachbarte Punkte nicht immer durch benachbarte Koordinaten parametrisiert werden; beispielsweise werden zwei Punkte, die in unmittelbarer Nachbarschaft von $\phi = 0$ auf der Kugel liegen, durch $\phi_1 = 2\pi - \epsilon$ und $\phi_2 = 2\pi + \epsilon = \epsilon$ parametrisiert.
- (ii) nicht jeder Punkt eindeutige Koordinaten hat; an den Polen ist der Wert von ϕ nicht eindeutig festgelegt.

Man könnte nun annehmen, daß das verwendete Koordinatensystem die Ursache für dieses Problem ist, aber man kann zeigen, daß es keine Möglichkeit gibt, mit einem einzigen Koordinatensystem die Kugel S^2 so zu parametrisieren, daß die oben beschriebenen Schwierigkeiten vermieden werden, was natürlich an der Nicht-Trivialisierbarkeit der Kugel S^2 liegt. Man kann diese Probleme dadurch umgehen, daß man zwei oder mehr Koordinatensysteme oder *Karten* (U_i, φ_i) , $U_i \subset S^2$ auf der Kugel einführt, die jeweils nur einen Teilbereich der Kugel parametrisieren, und die sich gegenseitig so überdecken, daß die gesamte Kugel parametrisiert wird. Dann kann man fordern, daß

- (i) Benachbarte Punkte benachbarte Koordinaten in wenigstens einem Koordinatensystem besitzen.

(ii) jeder Punkt eindeutige Koordinaten in jedem Koordinatensystem besitzt, in dem er enthalten ist.

(iii) dort, wo sich zwei Koordinatensysteme überschneiden, sie in einer hinreichend glatten Weise miteinander in Beziehung stehen.

Diese Bedingungen werden in der folgenden Definition zum Ausdruck gebracht:

M heißt m -dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn

(i) M ein topologischer Raum ist.

(ii) M mit einer Familie von Karten $\{U_i, \varphi_i\}$ versehen ist, wobei $\{U_i\}$ eine Familie von offenen Mengen ist, die M bedecken, also $\cup_i U_i = M$. φ_i ist ein Homöomorphismus von U_i auf eine offene Untermenge U'_i des \mathbb{R}^m .

(iv) Seien U_i und U_j gegeben, so daß $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so muß die Abbildung $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ von $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ nach $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ unendlich oft differenzierbar sein, d.h. $\psi_{ij} \in C^\infty$.

Eine Menge $\{U_i, \varphi_i\}$ von Karten, die M vollständig überdeckt, bezeichnet man als *Atlas*. Die Abbildung $\psi_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ bildet einen Punkt im Koordinatensystem j zunächst durch φ_j^{-1} auf die Mannigfaltigkeit ab, um ihn von dort durch φ_i auf das Koordinatensystem i abzubilden. Durch die Forderung, daß $\psi_{ij} \in C^\infty$ sein soll, wird also sichergestellt, daß beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen benachbarte Punkte weiterhin benachbarte Koordinaten haben.

1.2.2 Felder auf Mannigfaltigkeiten

Über einer Mannigfaltigkeit lassen sich geometrische Objekte (Vektorfelder, Tensorfelder etc.) einführen. Diese stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit der Mannigfaltigkeit selbst. Ein Vektor an einem Punkt p auf der Mannigfaltigkeit M wird als Tangentialvektor an eine Kurve auf der Mannigfaltigkeit im Punkt p definiert. Eine *Kurve* auf einer Mannigfaltigkeit M ist die Abbildung $p : U \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eines offenen Intervalls aus \mathbb{R} , das per Konvention die Null enthält ($0 \in U$), auf die Mannigfaltigkeit M mit Abbildungsvorschrift $t \mapsto p(t)$, $t \in U$; in lokalen Koordinaten (auf der Mannigfaltigkeit) gilt $t \mapsto x^i(p(t))$, so daß für $t = 0$ der Punkt p angenommen wird: $p(0) = p$. Eine Funktion $f(p(t))$, die über einer Kurve auf M definiert ist, ändert sich entlang der Kurve gemäß $\frac{d}{dt} f(p(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i(p(t))}{dt}$. Definiert man einen Differentialoperator $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $a^i \doteq \frac{dx^i(p(t))}{dt}$, so läßt sich

die Änderung von f entlang einer Kurve kompakt schreiben als

$$\frac{d}{dt}f(p(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i(p(t))}{dt} = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X[f] \quad (1.14)$$

Ein Tangentialvektor kann also als ein Differentialoperator der Form $X[f] = a^i \partial_i [f] \doteq a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ aufgefaßt werden. Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt p bildet den Tangentialraum $T_p M$ in p . Die Vereinigung $TM \doteq \cup T_p M, p \in M$ der Tangentialräume in allen Punkten p der Mannigfaltigkeit M heißt *Tangentenbündel* von M .

Ausgehend von dieser abstrakten Definition eines Tangentialvektors als Differentialoperator gelangt man zu einer intuitiveren Beschreibung, wenn man für f die Koordinatenfunktionen $\varphi(p) = \{y^i(p)\}$ einsetzt, wie folgendes Beispiel zeigt:

Für die Kugel S^2 ist der Tangentialraum an einem Punkt p die Tangentialebene an die Kugel in p . Um Vektoren in der Tangentialebene zu beschreiben, ist es notwendig, eine Basis \mathbf{e}_i auf dem Tangentialraum zu definieren. Dies geschieht, indem man den Vektor $\mathbf{r} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe der Transformationsformeln (1.12) nach den Koordinaten $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ auf der Mannigfaltigkeit differenziert:

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0) \quad (1.15b)$$

Man kann also einen Vektor im Tangentialraum von p durch $V^i \mathbf{e}_i = V^\theta \mathbf{e}_\theta + V^\phi \mathbf{e}_\phi$ beschreiben, wobei die Basisvektoren offensichtlich von den Koordinaten θ, ϕ auf der Mannigfaltigkeit abhängen.

Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung $M \rightarrow TM$ mit Abbildungsvorschrift $p \mapsto V_p \in T_p M$. Wie jedes Element des Tangentialraumes kann auch ein Vektorfeld nach den Basisvektoren ∂_μ zerlegt werden: $V(p) = V^\mu(p) \partial_\mu(p)$. Wird nun ein Koordinatenwechsel von einem Koordinatensystem mit Koordinaten $x^\mu(p)$ in ein anderes mit den Koordinaten $x^{\mu'}(p)$ durchgeführt, so hängen die neuen Koordinaten von den Koordinaten im alten System ab: $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, x^2, \dots) = x^{\mu'}(x^\nu)$. Aufgrund der Beziehung $\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ erhält man die Transformationsvorschrift für die Basisvektoren im Tangentialraum: $\partial'_\mu \doteq \partial / \partial x^{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^\nu \partial_\nu$ mit der Transformationsmatrix $\Lambda_{\mu'}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}$.

Bei einer Koordinatentransformation muß der Wert des Vektorfeldes am Punkt p erhalten bleiben, es muß also gelten: $V(p) = V'(p)$, d.h. in Komponenten geschrieben $V^{\mu'} \partial'_\mu = V^\mu \partial_\mu$. Aus diesem Grund müssen sich die Komponen-

ten des Vektorfelds mit der Inversen der Transformationsmatrix $\Lambda_{\mu'}^{\nu}$ transformieren: $V^{\mu'} = (\Lambda_{\mu'}^{\nu})^{-1} V^{\nu}$, wobei $(\Lambda_{\mu'}^{\nu})^{-1} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$ ist, da offensichtlich $\Lambda_{\lambda'}^{\nu} (\Lambda_{\lambda'}^{\mu})^{-1} = \Lambda_{\lambda'}^{\nu} \Lambda_{\mu}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\nu}$ gilt. Größen, die sich bei einer Basistransformation wie die Komponenten eines Vektorfeldes transformieren, heißen *kontravariant* und werden mit oberen Indizes bezeichnet.

Der Tangentialraum $T_p M$ einer Mannigfaltigkeit M im Punkt p ist ein linearer Vektorraum. Man kann nun zeigen, daß die Menge aller linearen Funktionale auf einem Vektorraum wieder einen Vektorraum bildet, den *Dualraum*. Der Dualraum des Tangentialraums im Punkt p wird als *Kotangentialraum*, kurz $T_p^* M$, bezeichnet. Elemente des Kotangentialraums bilden also Elemente des Tangentialraums $V \in T_p M$ auf die reellen Zahlen ab: $f[V] : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, damit ist $f \in T_p^* M$. Die Basisvektoren des Kotangentialraumes sind die Koordinatendifferentiale dx^{μ} . Diese sind definiert als Abbildungen $dx^{\mu} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ der Basis des Tangentialraums in die reellen Zahlen, welche der Bedingung $dx^{\mu}[\partial_{\nu}] = \delta^{\mu}_{\nu}$ genügen. Das Kotangentialbündel über M ist die Vereinigung der Kotangentialräume an jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit: $T^* M = \cup_p T_p^* M$. Die Elemente des Kotangentialraums werden auch *1-Formen* genannt. Ein Kovektorfeld $U(p)$ läßt sich nach den Basisvektoren des Kotangentialraumes dx^{μ} zerlegen: $U(p) = U_{\mu}(p) dx^{\mu}(p)$.

Wie transformieren sich nun die Komponenten eines Kovektorfeldes beim Übergang von einer Koordinatenbasis x^{μ} zu einer Basis $x^{\mu'}$? Aus der Beziehung $dx^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\nu}} dx^{\nu}$ für Koordinatendifferentiale folgt, daß die Koordinatenbasis dx^{μ} sich folgendermaßen transformiert: $dx^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\nu}} dx^{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} dx^{\nu} = (\Lambda_{\mu'}^{\nu})^{-1} dx^{\nu}$. Aus der Invarianzforderung unter Koordinatentransformationen folgt (s.o.), daß sich die Komponenten eines Kotangentialvektors nach folgender Vorschrift transformieren müssen: $U_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} U_{\nu} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} U_{\nu}$. Größen, die sich beim Koordinatenwechsel nach dieser Vorschrift transformieren, heißen *kovariant* und werden mit unteren Indizes bezeichnet.

Betrachtet man nun eine kontinuierliche Abbildung $f : M \rightarrow N$ von einer Mannigfaltigkeit M auf eine Mannigfaltigkeit N , in lokalen Koordinaten $y^{\alpha} = f^{\alpha}(x^1, \dots, x^n)$, so stellt sich die Frage, wie sich die Tangential- bzw. Kotangentialvektoren unter einer solchen Abbildung transformieren. Ist g eine Funktion auf N , so ist $g \circ f$ eine Funktion auf M . Ein Vektor $V \in T_p M$ bildet somit $g \circ f$ auf eine reelle Zahl ab. Die *Differentialabbildung* $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist nun durch

$$(f_* V)[g] \doteq V[g \circ f] \quad (1.16)$$

mit $f_* V \in T_{f(p)} N$ gegeben. Setzt man in lokalen Koordinaten $V = V^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, $f_* V =$

$W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ und für g die Koordinatenfunktionen auf N ein: $g = y^\beta$, so ergibt sich zwischen den Komponenten von V und W folgender Zusammenhang:

$$W^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (1.17)$$

Die Transformation von Kovektoren unter einer Abbildung $f : M \rightarrow N$ bildet Kovektoren auf N nach Kovektoren auf M ab: $f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ und wird *Pull-back* genannt, da diese Abbildung in entgegengesetzter Richtung von f verläuft. Sie ist definiert durch

$$\langle f^* \omega, V \rangle = \langle \omega, f_* V \rangle . \quad (1.18)$$

Bezeichnet $\omega = \omega_\alpha dy^\alpha \in T_{f(p)}^* N$ eine 1-Form auf N und $f^* \omega = \theta_\mu dx^\mu \in T_p^* M$ die durch f auf M induzierte 1-Form, so gilt für die Komponenten:

$$\theta^\mu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} . \quad (1.19)$$

Also transformieren sich die Komponenten einer 1-Form auch unter allgemeinen Abbildungen $f : M \rightarrow N$ kovariant, wohingegen sich Vektorkomponenten unter einer solchen Abbildung kontravariant transformieren. Eine Untermenge der Abbildungen $f : M \rightarrow N$ bildet der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen; hier wird von der Mannigfaltigkeit M in die Mannigfaltigkeit M abgebildet (was man als *Automorphismus* bezeichnet), und darüberhinaus ist diese Abbildung ein Diffeomorphismus.

Die Abbildung eines Vektorfeldes durch ein Kovektorfeld $U[V] : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ kann als ein Skalarprodukt aufgefaßt werden:

$$U[V](p) = U_\mu V^\nu dx^\mu [\partial_\nu] |_p = U_\mu(p) V^\nu(p) \delta_\nu^\mu = U_\mu(p) V^\mu(p) \in \mathbb{R} . \quad (1.20)$$

Aufgrund der Dualität zwischen Kotangential- und Tangentialraum kann man (1.20) aber auch als eine lineare Abbildung eines Kovektors durch einen Vektor in den Raum der reellen Zahlen $V[U] : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ deuten:

$$V[U](p) = U_\mu V^\nu \partial_\nu [dx^\mu] |_p = U_\mu(p) V^\nu(p) \delta_\nu^\mu = U_\mu(p) V^\mu(p) \in \mathbb{R} . \quad (1.21)$$

Vektor- und Kovektorfelder werden durch Einführung des Tensorprodukts \otimes auf *Tensorfelder* verallgemeinert. Wie oben gezeigt wurde, bilden Elemente des Kotangentialraumes Elemente des Tangentialraumes auf die reellen Zahlen ab: $f[U] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine bilineare Abbildung von zwei Vektoren auf den Raum \mathbb{R} : $g[U, W] =$

$f \otimes h[U, W] \doteq f[U]h[W] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *kovarianter* Tensor 2. Stufe. Wird dieser Tensor nach einer Basis im Kotangentialraum zerlegt, erhält man

$$g[U, W] = f_\mu h_\nu dx^\mu \otimes dx^\nu [U, W] = f_\mu h_\nu dx^\mu [U] dx^\nu [W] = g_{\mu\nu} dx^\mu [U] dx^\nu [W] \quad (1.22)$$

mit $g_{\mu\nu} \doteq f_\mu h_\nu = g[\partial_\mu, \partial_\nu]$. Werden nun zwei Elemente des Tangentialraumes für U und W eingesetzt ($U = U^\alpha \partial_\alpha, W = W^\beta \partial_\beta$), so ergibt sich aufgrund der Bilinearität:

$$g[U^\alpha \partial_\alpha, W^\beta \partial_\beta] = g_{\mu\nu} U^\alpha W^\beta dx^\mu [\partial_\alpha] dx^\nu [\partial_\beta] = g_{\mu\nu} U^\alpha W^\beta \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu = g_{\mu\nu} U^\mu W^\nu. \quad (1.23)$$

Ein symmetrischer Tensor 2. Stufe ($g[A, B] = g[B, A] \rightsquigarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) wird als *Metrik* bezeichnet. Eine Metrik erlaubt es, Elemente des Kotangentialraumes auf Elemente des Tangentialraumes abzubilden und umgekehrt, indem man in den metrischen Tensor nur einen Vektor einsetzt, den zweiten hingegen frei läßt:

$$g[U] = g[U^\alpha \partial_\alpha] = g_{\mu\nu} U^\alpha dx^\mu [\partial_\alpha] dx^\nu = g_{\mu\nu} U^\alpha \delta_\alpha^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} U^\mu dx^\nu \quad (1.24)$$

Man bildet durch die Metrik $g \in T_p^* M \otimes T_p^* M$ also ein Element des Tangentialraums $U^\mu \partial_\mu$ auf ein Element des Kotangentialraums $g_{\mu\nu} U^\mu dx^\nu = U_\nu dx^\nu$ ab, wobei $U_\nu \doteq g_{\mu\nu} U^\mu$ gilt. Aufgrund der Dualität läßt sich nun auch ein *kontravarianter* Tensor 2. Stufe $g \in T_p M \otimes T_p M$, in Komponenten $g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$, einführen, der Elemente des Kotangentialraumes auf Elemente des Tangentialraums abbildet, wobei gilt $V^\nu = g^{\mu\nu} V_\mu$.

Ein *gemischter* Tensor T_m^n ist als multilineare Abbildung von m Elementen des Tangential- sowie n Elementen des Kotangentialraumes in den Raum der reellen Zahlen \mathbb{R} definiert:

$$T : \otimes^n T_p^* M \otimes^m T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.25a)$$

$$T[\omega_1, \dots, \omega_n, V_1, \dots, V_m] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.25b)$$

mit $\omega \in T_p^* M, V \in T_p M$. Die Multilinearität ermöglicht es, die Vektor- und Kovektorkomponenten aus dem Tensor herauszuziehen

$$T[\omega_1, \dots, \omega_n, V_1, \dots, V_m] = \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} V^{j_1} \dots V^{j_m} T[dx^{i_1}, \dots, dx^{i_n}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_m}] \quad (1.26)$$

und somit als Komponenten des Tensors zu definieren:

$$T^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} \doteq T[dx^{i_1}, \dots, dx^{i_n}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_m}]. \quad (1.27)$$

Bei einer Basistransformation $\partial'_l = \partial_s \frac{\partial x^s}{\partial x'^l}$ und $dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^c} dx^c$ gilt somit für die Komponenten eines gemischten Tensors:

$$T'^{k_1, \dots, k_n}_{l_1, \dots, l_m} = \left(\frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \right) \cdots \left(\frac{\partial x'^{k_n}}{\partial x^{i_n}} \right) \left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{l_1}} \right) \cdots \left(\frac{\partial x^{j_m}}{\partial x'^{l_m}} \right) T^{i_1, \dots, i_n}_{j_1, \dots, j_m} \quad (1.28a)$$

$$= \Lambda_{i_1}^{k_1} \cdots \Lambda_{i_n}^{k_n} \Lambda_{l_1}^{j_1} \cdots \Lambda_{l_m}^{j_m} T^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} \quad (1.28b)$$

Ein gemischter Tensor T_m^n transformiert sich also n -mal kontravariant und m -mal kovariant.

Damit sind alle Begriffe eingeführt, um die Konstruktion eines Faserbündels nachvollziehen zu können.

1.2.3 Der Faserbündelformalismus

Das folgende Beispiel illustriert die wesentlichen Begriffe der Faserbündeltheorie:

Die Bahn eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit läßt sich durch eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreiben, wobei jedem Punkt t im Definitionsbereich \mathbb{R} (der Zeitachse) ein Wertepaar (x, t) im Wertebereich \mathbb{R}^2 zugeordnet wird. Diese Abbildung ist injektiv, selbst wenn die Zuordnungsvorschrift nicht eindeutig umkehrbar ist (z.B. $x = f(t) = t^2$), weil der Punkt in \mathbb{R}^2 die Information über den Punkt in \mathbb{R} , von dem aus er abgebildet wurde, als zusätzliche Komponente enthält.

In der Terminologie der Faserbündel würde man die Zeitachse \mathbb{R} als *Basisraum* bezeichnen, über dem ein *Bündel* definiert ist (alle Wertepaare $(x, t) \in \mathbb{R}^2$). Ein Bündel wird oft auch als *Totalraum* bezeichnet, weil es sich in den Basisraum und die Faser (s.u.) zerlegen läßt. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bildet natürlich den Definitionsbereich \mathbb{R} nur auf einen eindimensionalen Unterraum des Bündels (also des \mathbb{R}^2) ab, da jedem Zeitpunkt t genau ein Ort x zugeordnet wird. Diesen eindimensionalen Unterraum bezeichnet man als *Schnitt* im Bündel \mathbb{R}^2 ; der Schnitt beschreibt also *eine* mögliche Teilchenbahn. Mit dem Bündel \mathbb{R}^2 lassen sich hingegen *alle* möglichen Teilchenbahnen beschreiben.

Eine *Projektion* $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Wertepaar (x, t) einen Punkt t im Basisraum zu, was hier trivialerweise dadurch geschieht, daß man die erste Komponente des Wertepaares (x, t) einfach wegläßt. Die Umkehrabbildung der Projektion $\pi^{-1}(t_0)$ an einem fest vorgegebenen Ort t_0 wird als *Faser* über t_0 bezeichnet. Die Faser besteht aus allen Orten x , an denen sich das Teilchen zum diesem Zeit-

punkt t_0 theoretisch befinden kann (also aus allen Wertepaaren $(x \in \mathbb{R}, t = t_0)$). Es ist also *nicht* so, daß man ein Zahlenpaar (x, t) erst durch $\pi : (x, t) \mapsto t$ auf den Basisraum abbildet und dann mit der Umkehrung der Projektion π^{-1} den ursprünglichen Punkt zurückerhält; vielmehr erhält man durch $\pi^{-1} : t \mapsto (x \in \mathbb{R}, t)$ den eindimensionalen Unterraum des Bündels über t (also die Faser, s.o.). π^{-1} definiert also keine Abbildung, da jedem Element t des Definitionsbereichs mehr als ein Element des Wertebereichs zugeordnet wird.

Das hier vorgestellte Beispiel basiert auf der Möglichkeit, das Bündel \mathbb{R}^2 in ein direktes Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu zerlegen. Dies ist für ein \mathbb{R}^2 -Bündel global möglich, weil der \mathbb{R}^2 eine trivialisierbare Mannigfaltigkeit ist. Ist das Bündel eine trivialisierbare Mannigfaltigkeit, besteht jedoch keine Notwendigkeit, den Faserbündelformalismus überhaupt zu verwenden.

Wir haben nun alle Begriffe eingeführt, um die Definition eines Faserbündels in Angriff zu nehmen:

Ein (differenzierbares) Faserbündel (E, π, M, F, G) besteht aus folgenden Elementen:

- (i) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit E , dem Totalraum
- (ii) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , dem Basisraum
- (iii) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F , der (typischen) Faser
- (iv) einer Surjektion $\pi : E \rightarrow M$, die Projektion genannt wird. Die Umkehrung der Projektion $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$ bezeichnet man als Faser am Punkt p .
- (v) einer Lie-Gruppe G , Strukturgruppe genannt, die auf F von links wirkt
- (vi) einer Menge von offenen Überdeckungen $\{U_i\}$ von M mit einem Diffeomorphismus $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, so daß $\pi\phi_i(p, f) = p$. Die Abbildung ϕ_i heißt lokale Trivialisierung, da ϕ_i^{-1} die Faser $\pi^{-1}(U_i)$ surjektiv auf das direkte Produkt $U_i \times F$ abbildet.
- (vii) Schreibt man $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, so ist die Abbildung $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ ein Diffeomorphismus. Auf $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ muß man fordern, daß die Übergangsfunktionen $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \rightarrow F$ ein Element von G sind. Dann sind ϕ_i und ϕ_j durch eine glatte Abbildung $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ folgendermaßen verknüpft:

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f) . \quad (1.29)$$

Als Fasern kommen in der Physik häufig Vektorräume vor, z.B. wird der Tangentialraum an die Raumzeit-Mannigfaltigkeit M in der allgemeinen Relativitätstheorie dazu verwendet, um lokale Lorentz-Koordinatensysteme (Vierbeine) zu

definieren, auf die als Strukturgruppe die Lorentz-Gruppe wirkt. Wir benötigen aber für die Definition von Feldern auf der Raumzeit die sog. Prinzipalbündel:

1.2.4 Prinzipalbündel, Konnexion und Krümmung

Bei einem *Prinzipalbündel* sind Strukturgruppe und Faser identisch $F \equiv G$. Ein Prinzipalbündel über einer Mannigfaltigkeit M (im folgenden bezeichnet M immer die Raumzeit) wird mit $P(M, G)$ bezeichnet. G beschreibt dabei die Symmetriegruppe der Wechselwirkung, der die Felder über der Raumzeit unterworfen sind. In einem Prinzipalfaserbündel definiert man eine lokale Trivialisierung (s.o.) durch die Abbildung $\sigma_i : U_i \rightarrow P, p \mapsto \sigma_i(p) = \phi_i(p, g_i(p)) \in \pi^{-1}(U_i)$. Die *kanonische* lokale Trivialisierung ist durch $\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$ gegeben.

Definiert man die Rechtsmultiplikation eines Elementes der Faser $u \in \pi^{-1}(U_i)$ mit einem Element h der Gruppe G durch

$$u \circ h \doteq \phi_i(p, g \circ h) \quad (1.30)$$

so lautet die Bedingung (1.29)

$$\sigma_j(p) = \sigma_i(p) \circ t_{ij}(p) . \quad (1.31)$$

Die Rechtsmultiplikation ist somit unabhängig von der gewählten Überdeckung U_i .

Die lokale Trivialisierung teilt den Totalraum in zwei Komponenten auf, den Punkt $p \in M$ und das Gruppenelement $g \in G$. In der lokalen Trivialisierung gibt es also zwei Tangentialräume: einen, der tangential zur Basismannigfaltigkeit M verläuft ($T_p M$) und einen, der tangential zur Lie-Gruppe G ist: $T_g G$. Diese Aufteilung soll nun auf den Tangentialraum des Prinzipalbündels $T_u P$ übertragen werden. Hierzu definiert man den *vertikalen Unterraum* $V_u P$ als den Unterraum, der tangential zu G_p im Punkt u ist. Diesen Raum konstruiert man, indem man mit der Rechtsmultiplikation

$$R_{\exp(tA)} u = u \exp(tA) \quad (1.32)$$

eine Kurve durch u in P definiert ($A \in \mathfrak{g}$). Wegen $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$ liegt diese Kurve in G_p . Definiert man nun einen Vektor $A^\# \in T_u P$ durch

$$A^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))|_{t=0} \quad (1.33)$$

mit einer glatten Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, so liegt dieser tangential zu G_p in u , weshalb $A^\# \in V_u P$ gilt. Indem man auf diese Weise einen Vektor an jedem Punkt von P definiert, erhält man ein Vektorfeld $A^\#$ auf P , das von A erzeugtes *fundamentales Vektorfeld* genannt wird. Die Abbildung $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_u P, A \mapsto A^\#$ ist ein Vektorraumisomorphismus. Der *horizontale Unterraum* ist das Komplement von $V_u P$ in $T_u P$; er wird erst durch eine Konnexion eindeutig festgelegt.

Zur Definition einer Konnexion benötigt man den Begriff einer *direkten Summe*: Eine linearer Vektorraum V wird als die direkte Summe $V = V_1 \oplus V_2$ zweier linearer Vektorräume bezeichnet, wenn jeder Vektor $v \in V$ *eindeutig* als Summe $v = v_1 + v_2$ eines Vektors v_1 aus V_1 und eines Vektors v_2 aus V_2 geschrieben werden kann. Als Konsequenz der Eindeutigkeit der Zerlegung $v = v_1 + v_2$ besitzen die linearen Vektorräume V_1 und V_2 nur ein einziges gemeinsames Element, nämlich den Nullvektor 0: $V_1 \cap V_2 = 0$.

Eine *Konnexion* spaltet den Tangentialraum $T_u P$ des Prinzipalfaserbündels am Punkt $u \in P$ eindeutig in einen horizontalen und vertikalen Unterraum auf, so daß

$$(i) T_u P = V_u P \oplus H_u P$$

$$(ii) H_{ug} P = R_{g*} H_u P$$

für $u \in P$ und $g \in G$ gilt. Die Bedingung (ii) legt fest, daß die horizontalen Unterräume $H_u P$ und $H_{ug} P$, die tangential an derselben Faser liegen, über eine Differentialabbildung R_{g*} verknüpft sind, welche durch die Rechtsmultiplikation (1.32) induziert wird. Die so eingeführte Konnexion ermöglicht diese eindeutige Zerlegung nur abstrakt, es wird aber nicht klar, wie diese Konnexion konstruiert werden soll. Hierfür ist die Definition einer *Konnexions-Eins-Form* $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^* P$ nötig:

Eine Konnexions-Eins-Form $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^* P$ ist eine Projektion von $T_u P$ auf den Vertikalraum $V_u P$ (isomorph zur Lie-Algebra \mathfrak{g} , s.o.), so daß gilt:

$$(i) \omega(A^\#) = A, \quad A \in \mathfrak{g}$$

$$(ii) R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$$

wobei für $X \in T_u P$ gilt:

$$R_g^* \omega_u(X) = \omega_{ug}(R_{g*} X) = g^{-1} \omega_u(X) g. \quad (1.34)$$

Der horizontale Unterraum $H_u P$ wird definiert als

$$H_u P \equiv \{X \in T_u P \mid \omega(X) = 0\}. \quad (1.35)$$

Man kann nun zeigen, daß die hierdurch definierten horizontalen Unterräume die Bedingung (ii) $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$ der ersten Definition erfüllen.

Die Konnexion-1-Form ω ist nun erstens eine globale Größe und zweitens auf dem Kotangentenraum des Prinzipalbündels T^*P definiert. Um jedoch konkrete Berechnungen durchführen zu können, muß man diese Größe in einer Karte U_i der Basismannigfaltigkeit M auf den Kotangentenraum T^*M der Basismannigfaltigkeit abbilden. Sei nun $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt in P , so erreicht man dies durch die Pullbackabbildung

$$\sigma_i^* \omega : T^*P \rightarrow T^*M . \quad (1.36)$$

Die lokale Konnexion ist dann gegeben durch

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*M . \quad (1.37)$$

Für den Fall, daß die Basismannigfaltigkeit M die Raumzeit ist, kann die Konnexion \mathcal{A}_i geschrieben werden als

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = A_{ia\mu} \tau^a dx^\mu , \quad (1.38)$$

wobei die τ_a ($a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$) die Generatoren der Lie-Algebra \mathfrak{g} bezeichnen.

Die lokale Konnexion \mathcal{A}_i ist aber nicht eindeutig festgelegt, da sie von der Wahl eines lokalen Schnittes σ_i am Punkt $u \in P$ abhängt. Ändert man den lokalen Schnitt, indem man vom selben Punkt p auf der Basismannigfaltigkeit ausgeht, aber einen anderen Repräsentanten $g \in G$ der Eichgruppe wählt, d.h. $\sigma_j(p) = \sigma_i(p) \circ g(p)$, so muß die globale Konnexion ω von dieser Wahl unbeeinflusst bleiben. Damit dies der Fall ist, müssen die beiden lokalen Konnexionen \mathcal{A}_i und \mathcal{A}_j die folgende Bedingung erfüllen:

$$\mathcal{A}_j = g^{-1} \mathcal{A}_i g + g^{-1} dg . \quad (1.39)$$

Damit haben wir eine Größe, die uns schon aus den Eichtheorien bekannt war, nämlich das Vektorpotential \mathcal{A}_μ im Rahmen des Faserbündelformalismus als lokale Konnexionsform identifiziert. Die Gleichung (1.39) beschreibt nun eine *Eichtransformation*. Wie hängt diese mit der Eichtransformation (1.6) im Teilkapitel über die Eichtheorien zusammen? Im Falle der $U(1)$ -Eichgruppe ist ein Gruppenelement $g \in G$ gegeben durch $g = \exp[i\alpha]$. Setzt man dies in (1.39) ein, so erhält man gerade (1.6). Die Gleichung (1.39) ist also die Verallgemeinerung von (1.6) auf beliebige Eichgruppen.

Wie das Eichpotential \mathcal{A} mit der Konnexion ω in Beziehung gesetzt werden konnte, kann man auch die Feldstärke \mathcal{F} mit der Krümmung Ω des Prinzipalbündels in Beziehung setzen. Diese Krümmung ist definiert als

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega \quad (1.40)$$

und ist eine \mathfrak{g} -wertige 2-Form über P . Die lokale Krümmung ist definiert als

$$\mathcal{F}_i = \sigma_i^* \Omega = d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i . \quad (1.41)$$

Diese transformiert sich nun bei der Wahl eines Schnittes $\sigma_j(p) = \sigma_i(p) \circ g(p)$ folgendermaßen:

$$\mathcal{F}_j = g^{-1} \mathcal{F}_i g . \quad (1.42)$$

Die Krümmung transformiert sich somit *homogen*, d.h. ohne den bei der Konnexion (1.39) auftretenden Zusatzterm.

1.2.5 Assoziierte Vektorbündel und Paralleltransport

Ein Prinzipalfaserbündel ist nicht geeignet, um Materiefelder über der Raumzeit zu beschreiben, da eine Strukturgruppe G wegen ihrer Gruppeneigenschaft (die Inversenbildung muss definiert sein) kein Nullelement besitzt. Andererseits können Materiefelder über der Raumzeit in manchen Raumbereichen bzw. an bestimmten Punkten durchaus verschwinden. Man ist daher genötigt, zur Beschreibung von Materiefeldern über der Raumzeit ein sogenanntes *assoziertes Vektorbündel* einzuführen: Sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und V ein n -dimensionaler Vektorraum. Die Wirkung eines Elementes $g \in G$ auf $P \times V$ ist gegeben durch

$$(u, v) \mapsto (u \circ g, g^{-1} \circ v) \quad \text{mit } u \in P, v \in V . \quad (1.43)$$

Ein assoziiertes Vektorbündel ist definiert als eine Äquivalenzklasse $P \times V/G$ mit

$$[(u, v)] \doteq \{(u \circ g, g^{-1} \circ v) | g \in G\} \quad \text{mit } u \in P, v \in V , \quad (1.44)$$

d.h. zwei Elemente (u, v) und $(u \circ g, g^{-1} \circ v)$ werden miteinander identifiziert. Legt man sich auf ein Element g fest, so bezeichnet man dies als Festlegung einer *Eichung*. Ein Element $[(u, v)] \in P \times V/G$, d.h. ein Feld über der Raumzeit, ist jedoch unabhängig von der Festlegung von g , also unabhängig von der Eichung. Es sei noch erwähnt, daß in dieser Arbeit das assoziierte Vektorbündel ein zweidimensionaler, komplexer Vektorraum ist.

Will man nun mit den Materiefeldern, d.h. den assoziierten Vektorräumen, Berechnungen durchführen, so muß man die Vektoren in diesen Vektorräumen differenzieren können. Um einen Vektor in Richtung x^ν zu differenzieren, verschiebt

man ihn parallel um eine infinitesimale Strecke Δx^ν in diese Richtung und bildet den Differenzenquotienten aus dem unverschobenen und dem verschobenen Vektor:

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}. \quad (1.45)$$

Man setzt dabei stillschweigend voraus, daß der Vektor V^μ vom Punkt x^ν zum Punkt $x^\nu + \Delta x^\nu$ parallel verschoben wird, d.h. ohne dabei seine Richtung zu verändern. Diese Verschiebung ist im euklidischen Raum problemlos möglich, aber über Mannigfaltigkeiten muß man vorschreiben, *wie* man einen Vektor verschieben muß, damit er bei der Verschiebung invariant bleibt. Eine solche Parallelverschiebung eines Vektors, bei der dieser seine Richtung beibehält, bezeichnet man als *Paralleltransport*.

Die Parallelverschiebung auf einem Prinzipalbündel ist nun auf folgende Weise definiert: Sei eine Kurve $\gamma(t)$ auf der Basismannigfaltigkeit gegeben, so gibt es eine Menge von Kurven $\tilde{\gamma}(t)$ im Prinzipalbündel, welche alle die Eigenschaft besitzen, daß ihre Projektion $\pi(\tilde{\gamma}(t))$ mit $\gamma(t)$ übereinstimmt. Bei vorgegebenem Startpunkt $u_0 \in P$ gibt es aber nur eine einzige solche Kurve, die vollständig im jeweiligen horizontalen Unterraum $H_u P$ über der Basismannigfaltigkeit liegt. Diese Kurve bezeichnet man als *horizontale Hebung* von $\gamma(t)$. Um nun eine Faser von einem Punkt p zu einem Punkt p' entlang der Kurve $\gamma(t)$ parallel zu verschieben, nimmt man jeden Punkt der Faser $u \in \pi^{-1}(p)$, konstruiert die (eindeutige) horizontale Hebung $\tilde{\gamma}(t)$ mit dem Anfangspunkt u und verschiebt somit u nach $u' \in \pi^{-1}(p')$, wobei u' den Punkt auf der Kurve $\tilde{\gamma}(t)$ bezeichnet, der über p' liegt.

Definiert man nun ein Vektorfeld $s(p)$ mit Werten in der typischen Vektorfaser V als einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $s(p)$ ($p \in M$) durch

$$s(p) = [\sigma_i(p), \xi(p)] \quad (1.46)$$

so würde man den Paralleltransport entlang einer Kurve $\gamma(t)$ naiverweise durch die Forderung definieren, daß $\xi(\gamma(t))$ entlang γ konstant ist. Dies ist jedoch nicht möglich, da diese Definition von der Wahl des Schnittes σ_i abhängen würde. Folgende Definition ist hingegen korrekt: Ein Vektor ξ wird längs $\gamma(t)$ parallelverschoben, wenn er in Bezug auf die horizontale Hebung $\tilde{\gamma}(t)$ von $\gamma(t)$ in P konstant ist. Dies bedeutet, daß ein Schnitt

$$s(\gamma(t)) = [\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t))] \quad (1.47)$$

parallel verschoben wird, wenn η konstant ist entlang $\gamma(t)$.

Zerlegt man den Vektor $\xi(p)$ in ein lokales Koordinatensystem $\xi(p) = \xi^\alpha e_\alpha$, so folgt aus obiger Forderung, daß die Basisvektoren dieser Zerlegung entlang der Koordinatenkurven x^μ folgender Bedingung gehorchen:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} e_\alpha = A^\beta_{\alpha\mu} e_\beta . \quad (1.48)$$

Damit kann man die Ableitung des Vektors $\xi(p)$ ausschließlich auf seine Komponenten ξ^α beziehen und schreiben

$$D_\mu \xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + A^\alpha_{\beta\mu} \xi^\beta , \quad (1.49)$$

was mit der Definition der kovarianten Ableitung (1.9) übereinstimmt, wenn man sich klarmacht, daß $A^\alpha_{\beta\mu}$ ein Matrixelement einer Lie-Algebra darstellt. Die aus dem Unterkapitel über die Eichtheorien bekannte eichkovariante Ableitung findet also ebenso im Faserbündelformalismus ihre Begründung. Die Äquivalenzklasse $s(p)$ wird in allen praktischen Anwendungen durch das Vektorfeld ξ ersetzt, welches gemäß (1.49) differenziert wird.

Kapitel 2

Die Relativistische Schrödingertheorie

Die Grundgleichungen der RST wurden im Jahr 1990 von Herrn Dr. Sorg aufgestellt. Seither wurden über dreißig Arbeiten zu dieser Theorie publiziert. Das folgende Kapitel bildet eine kurze Einführung in den RST-Formalismus; zur Herleitung einiger der hier angegebenen Resultate sei aber auf die vorhandene Literatur verwiesen.

Ein wichtiges Ergebnis der Forschung der vergangenen Jahre ist die Äquivalenz der RST zur konventionellen relativistischen Quantenmechanik auf dem Ein-Teilchen-Sektor. In der vorliegenden Arbeit wird nun das Verhalten der Theorie im Mehrteilchen-Sektor untersucht. Daher ist es notwendig, zunächst die mathematische Struktur von Mehrteilchen-Zuständen zu beschreiben.

2.1 Mehrteilchen-Zustände in der RST

Um die Unterschiede zwischen der RST und der konventionellen Quantentheorie bei der Konstruktion von Mehrteilchen-Zuständen aus 1-Teilchen Zuständen zu verstehen, soll zunächst die Bildung dieser Zustände in der konventionellen Quantentheorie kurz rekapituliert werden:

In der nichtrelativistischen Quantentheorie ist der Hilbertraum eines N-Teilchen-Zustandes das Tensor-Produkt aus den Hilberträumen der 1-Teilchen Zustände:

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1^{(1)} \otimes \mathcal{H}_1^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1^{(N)} . \quad (2.1)$$

Daher wird ein Mehrteilchen-Zustand $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)$ durch Tensorproduktbildung von Einteilchen-Zuständen $\psi_i(\vec{x}_i, t)$ beschrieben. Produktzustände von der Form

$$\Psi(x_1, \dots, x_N, t) = \psi_1(\vec{x}_1, t) \cdot \psi_2(\vec{x}_2, t) \cdot \dots \cdot \psi_N(\vec{x}_N, t) \quad (2.2)$$

bilden daher eine Basis im \mathcal{H}_N . Stellt man sich nun die Frage, warum die Quantenmechanik Produktzustände aus den Einteilchen-Zuständen bildet, statt diese auf irgendeine andere Weise zu verknüpfen, so liegt der Grund hierfür in der probabilistischen Natur der Quantenmechanik. Bildet man die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)|^2$, so zerfällt diese in ein Produkt aus den Wahrscheinlichkeitsdichten für die Einteilchen-Zustände:

$$|\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)|^2 = |\psi_1(\vec{x}_1, t)|^2 |\psi_2(\vec{x}_2, t)|^2 \dots |\psi_N(\vec{x}_N, t)|^2. \quad (2.3)$$

Diese Konstruktion geht also auf den aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten Satz zurück, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Ereignis gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist:

$$p_N = p_1^{(1)} \cdot p_1^{(2)} \cdot \dots \cdot p_1^{(N)}. \quad (2.4)$$

Diese einfache Konstruktion ist allerdings nicht ohne weiteres auf den relativistischen Fall übertragbar, da hier nicht mehr von einer gemeinsamen Zeit t ausgegangen werden kann, sondern jeder Einzelzustand mit einer eigenen Zeitkoordinate ausgestattet ist. Im Gegensatz zu (2.2) wäre ein relativistischer N-Teilchen Zustand eine Linearkombination aus Zuständen der Form

$$\psi_1(\vec{x}_1, t_1) \cdot \psi_2(\vec{x}_2, t_2) \cdot \dots \cdot \psi_N(\vec{x}_N, t_N). \quad (2.5)$$

Auch die Wahrscheinlichkeitsamplituden

$$|\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t_1, t_2, \dots, t_N)|^2 = |\psi_1(\vec{x}_1, t_1)|^2 |\psi_2(\vec{x}_2, t_2)|^2 \dots |\psi_N(\vec{x}_N, t_N)|^2 \quad (2.6)$$

würden jetzt von N Zeitkoordinaten t_1, t_2, \dots, t_N abhängen, was eine vernünftige Interpretation einer so gebildeten Wahrscheinlichkeitsamplitude unmöglich macht. Zur Auswertung einer solchen relativistischen Mehrteilchen-Wellenfunktion muß man die individuellen Teilchenzeiten auf eine einzige Bezugsgröße, die gemeinsame Zeit t umrechnen. Einer solchen Umrechnung stehen große formale Schwierigkeiten entgegen (vielleicht ist diese sogar unmöglich [12, 13]), weshalb es bis heute nicht gelungen ist, eine funktionierende relativistische Mehrteilchen-Theorie in erstquantisierter Form aufzubauen.

Hier setzt nun die RST als fluid-dynamische Theorie an: Die Konstruktion eines Mehrteilchen-Zustandes als Produktzustand (2.2) ist hier nicht zwingend, da es sich nicht um eine probabilistische Theorie handelt. Daher kann man in der RST einen Mehrteilchen-Zustand als direkte Summe von Einteilchen-Zuständen, die am *selben* Raum-Zeitpunkt koexistieren, bilden:

$$\Psi(x_\mu) = \psi_1(x_\mu) \oplus \psi_2(x_\mu) \oplus \dots \oplus \psi_N(x_\mu) = \begin{pmatrix} \psi_1(x_\mu) \\ \psi_2(x_\mu) \\ \dots \\ \psi_N(x_\mu) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Damit ist eine Mehrteilchen-Wellenfunktion in der RST ein Schnitt in einem vektoriellen \mathbb{C}^N -Bündel über der Raumzeit. Diese Konstruktion hat gegenüber der Tensorproduktbildung den Vorteil, daß sich hierdurch das Problem, aus individuellen Teilchenzeiten eine einheitliche Bezugszeit herzustellen, erübrigt. Allerdings unterscheidet sich diese Methode zur Erzeugung von Mehrteilchen-Zuständen stark von der in der Quantenmechanik verwendeten. In Kapitel 7 wird jedoch gezeigt, daß diese Konstruktion zur gewöhnlichen Quantenmechanik vergleichbare Ergebnisse liefert.

Ähnlich wie in der konventionellen Theorie läßt sich auch in der RST nicht jeder Materiezustand durch eine Wellenfunktion Ψ beschreiben. In der konventionellen Quantentheorie wird ein solcher Materiezustand (ein Gemisch) durch die Dichtematrix ρ beschrieben, wohingegen die RST ein anderes Objekt verwendet:

2.2 Die Intensitätsmatrix \mathcal{I}

In der RST wird die Materieverteilung über der Raumzeit im allgemeinen Fall durch einen hermiteschen Intensitätsoperator beschrieben, die sogenannte *Intensitätsmatrix* $\mathcal{I}(x)(= \overline{\mathcal{I}}(x))$. Diese stellt einen matrixwertigen Schnitt eines entsprechenden Faserbündels über der Raumzeit dar. Die Intensitätsmatrix \mathcal{I} beschreibt im allgemeinen eine Mischung von Zuständen, aber in speziellen Fällen kann diese Matrix durch eine Wellenfunktion $\Psi(x)$, also einen Schnitt in einem reellen oder komplexen Vektorbündel, ausgedrückt werden. In diesen Fällen kann die Intensitätsmatrix durch ein Tensorprodukt der Wellenfunktion Ψ (2.7) und ihrem hermitesch konjugierten $\overline{\Psi}$ dargestellt werden:

$$\mathcal{I} \rightarrow \Psi \otimes \overline{\Psi} . \quad (2.8)$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für diesen Spezialfall ist die *Fierz-Identität*

$$\mathcal{I}^2 - \mathcal{I} \cdot \text{tr} \mathcal{I} = 0 , \quad (2.9)$$

welche ursprünglich für ein 4-komponentiges ($N = 4$) Dirac'sches Spinorfeld eingeführt wurde [14, 15, 16], aber für jede Faserdimension N anwendbar ist. Immer wenn \mathcal{I} diese Identität erfüllt, spricht man davon, daß die Materieverteilung in einem reinen Zustand Ψ (2.7) vorliegt. Um ein Maß für die Abweichung eines Zustandes von einem reinen Zustand zu haben, definiert man den *Fierz-Deviator* \mathcal{D}_F durch

$$\mathcal{D}_F := \mathcal{I} \cdot \text{tr} \mathcal{I} - \mathcal{I}^2 . \quad (2.10)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein reiner Zustand vorliegt, ist somit das Verschwinden der Fierz-Abweichung

$$\Delta_F := \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{D}_F . \quad (2.11)$$

Was die Relation zwischen reinen Zuständen und Mischungen betrifft, so existiert in der RST keine so scharfe Trennung zwischen beiden Konzepten wie in der konventionellen Quantenmechanik, wo man sich beispielsweise in der Atomphysik traditionell hauptsächlich mit reinen Zuständen beschäftigt. Der Grund hierfür ist, daß die dynamischen Gleichungen der RST einen (zumindest asymptotischen) Übergang zwischen reinen Zuständen und Gemischen erlaubt, während ein solcher Übergang in der konventionellen Quantentheorie mit ungelösten Problemen des Meßprozesses zusammenhängt [18].

Aus der RST-Dynamik (s.u.) folgt, daß der Konfigurationsraum der Materieverteilung (also der Raum der Hermite'schen $(N \times N)$ -Matrizen) in zwei getrennte Unterräume aufgespalten wird, und zwar unabhängig davon, wie groß die Teilchenzahl N ist. Diese Dichotomie der Materieverteilung erinnert natürlich stark an die Einteilung der Materie in Fermionen und Bosonen in der konventionellen Quantenmechanik. Im Unterschied zur konventionellen Mehrteilchen-Quantenmechanik muß diese Unterteilung in der RST aber nicht postuliert werden, sondern ist eine direkte Folge der Dynamik. In der Tat zeigen die beiden Gemischsorten, die als positive und negative Gemische bezeichnet werden, starke Ähnlichkeiten mit den aus der Mehrteilchen-Quantenmechanik bekannten (anti-)symmetrisierten Zuständen. Der Unterteilung des Konfigurationsraumes der Materie wird in den später folgenden Bewegungsgleichungen dadurch Rechnung ge-

tragen, daß eine von der Gemischsorte abhängige Konstante σ_* eingeführt wird:

$$\Delta_F = \det \mathcal{I} \text{ ist } \begin{cases} > 0 : \text{ positive Gemische } (\sigma_* = +1) \\ = 0 : \text{ reine Zustände } (\sigma_* = 0) \\ < 0 : \text{ negative Gemische } (\sigma_* = -1) . \end{cases} \quad (2.12)$$

Im Gegensatz zur konventionellen Quantentheorie können die Zustände in der RST ihre Mischungsstärke von einem Raumpunkt zum nächsten verändern, also zum Beispiel in bestimmten Punkten asymptotisch einen reinen Zustand annehmen. Zustände, die auf einem Raumbereich ein positives Gemisch und auf einem anderen Raumbereich ein negatives Gemisch bilden, kommen aber in der RST nicht vor.

Nachdem die Beschreibung der Materieverteilung über der Raumzeit durch die Intensitätsmatrix \mathcal{I} erklärt wurde, soll an dieser Stelle ein weiteres wichtiges Element der RST eingeführt werden:

2.3 Der Hamiltonian \mathcal{H}_μ

Der Hamiltonian \mathcal{H}_μ ist eine $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ -wertige, nicht-hermitesche ($\mathcal{H}_\mu \neq \overline{\mathcal{H}_\mu}$) 1-Form über der Raumzeit. Sie beschreibt die dynamische Entwicklung der Materieverteilung \mathcal{I} (bzw. Wellenfunktion Ψ). Anders als der Hamiltonian in der konventionellen Quantenmechanik wird diese 1-Form allerdings aus den dynamischen Gleichungen der Theorie bestimmt und nicht von außen vorgegeben. Die Nicht-Hermitizität von \mathcal{H}_μ hat weitreichende Konsequenzen:

In der konventionellen Quantenmechanik muß die Reduktion eines Gemischzustands in einen reinen Zustand *postuliert* werden, da die dort auftretende unitäre Zeitentwicklung einen solchen Übergang nicht zuläßt (vgl. die GRW-Theorie, welche in [18] behandelt wird). In jüngerer Zeit wurde von R. Penrose daher vorgeschlagen, daß der Kollaps der Wellenfunktion durch einen gravitativen Effekt hervorgerufen wird [19]. Die RST weist hier eine andere Dynamik auf: Ein Gemisch kann in der RST in einen reinen Zustand übergehen und umgekehrt. Dies liegt daran, daß die Zeitentwicklung eines RST-Zustandes durch die Nicht-Hermitizität von \mathcal{H}_μ nicht unitär ist. Dadurch wird der Übergang von Gemischen zu reinen Zuständen im Gegensatz zur konventionellen Quantentheorie ermöglicht.

Die Komponenten der Intensitätsmatrix (bzw. der Wellenfunktion) werden

durch die sogenannten Austauschfelder (so werden die Nicht-Diagonalelemente von \mathcal{H}_μ bezeichnet) verknüpft. Die entsprechende Verknüpfung der 1-Teilchen Unterräume gemeinsam mit dem Mischungseffekt liefert physikalische Effekte, die den in der gewöhnlichen Quantentheorie auftretenden eng verwandt sind (z.B. Ununterscheidbarkeit von Teilchen, Verschränkung von Zuständen und Ortho-Para Aufspaltung von Energiezuständen).

Um diese Effekte zu studieren, ist es aber zunächst nötig, die dynamischen Grundgleichungen der RST zu betrachten:

2.4 Die RST-Dynamik

Die Grundgleichung der RST stellt die sogenannte relativistische Schrödinger-Gleichung dar:

$$i\hbar c \mathcal{D}_\mu \Psi = \mathcal{H}_\mu \Psi \quad (2.13)$$

Im Unterschied zur Schrödinger-Gleichung ist diese Gleichung aber relativistisch kovariant, berücksichtigt Eichwechselwirkungen (durch die eich-kovariante Ableitung \mathcal{D}_μ) und besitzt eine nicht-unitäre Zeitentwicklung (durch die Nicht-Hermitizität von \mathcal{H}_μ). Dieser partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung liegt nur die Annahme zugrunde, daß sich die (kovariante) Ableitung der Wellenfunktion als die Wirkung eines (nicht-hermite'schen) matrixwertigen Operators auf die Ausgangswellenfunktion schreiben läßt.

Hierbei wird auch sofort klar, warum die 1-Form \mathcal{H}_μ Element einer Lie-Algebra und nicht einer Lie-Gruppe sein muß: Die kovariante Ableitung der Wellenfunktion an einem Punkt der Raumzeit kann verschwinden, also muß der Operator auf der rechten Seite von (2.13) Null werden können, was nur möglich ist, wenn der Operator \mathcal{H}_μ Element einer Lie-Algebra ist, da diese (im Gegensatz zu einer Lie-Gruppe) ein Nullelement enthält.

Betrachtet man zwei spinlose Teilchen, die der elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegen, so ist diese Gleichung zwei ungekoppelten Klein-Gordon Gleichungen (für jeweils ein Teilchen) äquivalent, und zwar unabhängig davon, ob die Komponenten von Ψ durch die Austauschfelder aneinander koppeln oder nicht (siehe Kapitel 5). Daher kommt dieser Gleichung für den in dieser Arbeit betrachteten Fall eine eher untergeordnete Bedeutung zu. Wie schon erwähnt treten physikalisch relevante Effekte erst in Kombination mit Gemischen auf,

weshalb die relativistische Von-Neumann-Gleichung für die Intensitätsmatrix \mathcal{I} als die relevante Gleichung anzusehen ist:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{I} = \frac{i}{\hbar c} (\mathcal{I} \cdot \overline{\mathcal{H}}_\mu - \mathcal{H}_\mu \cdot \mathcal{I}) . \quad (2.14)$$

Nur für den Spezialfall eines reinen Zustandes ($\mathcal{I} = \Psi \otimes \overline{\Psi}$) ist die RNE (2.14) zur RSE (2.13) äquivalent. Offensichtlich muß zur Lösung von (2.13) bzw. (2.14) der Operator \mathcal{H}_μ bekannt sein. Anders als in der konventionellen Theorie, wo der Hamiltonian ein für alle Mal durch Analogien mit der klassischen Mechanik festgelegt wird (Heisenberg'sche Quantisierungspostulate), wird der Hamiltonian \mathcal{H}_μ in der RST durch zwei Gleichungen bestimmt: Die Rotation von \mathcal{H}_μ durch die *Integrabilitätsbedingung*

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{H}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{H}_\mu + \frac{i}{\hbar c} [\mathcal{H}_\mu, \mathcal{H}_\nu] = i\hbar c \mathcal{F}_{\mu\nu} , \quad (2.15)$$

sowie die Divergenz von \mathcal{H}_μ durch die *Erhaltungsgleichung*

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{H}_\mu - \frac{i}{\hbar c} \mathcal{H}^\mu \mathcal{H}_\mu = -i\hbar c \left(\frac{\mathcal{M}c}{\hbar} \right)^2 . \quad (2.16)$$

Die Erhaltungsgleichung gilt in dieser Form jedoch nur für Teilchen ohne Spin. Für Teilchen mit Spin muß diese Gleichung um einen Spin-Polarisationsterm ($\Sigma_{\mu\nu}$) erweitert werden:

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{H}_\mu - \frac{i}{\hbar c} \mathcal{H}^\mu \mathcal{H}_\mu = -i\hbar c \left(\frac{\mathcal{M}c}{\hbar} \right)^2 - i\hbar c \Sigma^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} . \quad (2.17)$$

Da in dieser Arbeit aber nur skalare Teilchen behandelt werden, ist die Erhaltungsgleichung für uns nur in der Form (2.16) relevant. Der Massenoperator wird im folgenden immer proportional zur Einheitsmatrix angenommen, d.h. $\mathcal{M} = M\mathbf{1}$, da wir uns auf die Beschreibung von Teilchen mit gleicher Masse beschränken werden.

Wir haben gesehen, daß die relativistische Schrödingergleichung auf der Annahme beruht, daß die Ableitung der Wellenfunktion proportional zur mit einem Operator \mathcal{H}_μ multiplizierten Wellenfunktion ist. Auf welchen Annahmen basieren aber die Gleichungen (2.15) und (2.16) für diese Hamilton'sche 1-Form \mathcal{H}_μ ?

Die Integrabilitätsbedingung (2.15) basiert auf der Forderung, daß die relativistische Schrödingergleichung bzw. die relativistische Von-Neumann Gleichung Lösungen besitzen soll. Dies ist dann der Fall, wenn die Wellenfunktion Ψ bzw. die Intensitätsmatrix \mathcal{I} der Bündelidentität

$$[\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu] \Psi = \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi \quad (2.18)$$

bzw.

$$[\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu] \mathcal{I} = [\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{I}] \quad (2.19)$$

genügt. Die Forderung (2.15) an \mathcal{H}_μ stellt sicher, daß diese Bündelidentitäten von Ψ bzw. \mathcal{I} automatisch erfüllt werden. Die Erhaltungsgleichung für \mathcal{H}_μ (2.16) sorgt hingegen dafür, daß einige physikalische Größen *automatisch* erhalten bleiben:

2.5 Erhaltungssätze in der RST

Wie schon eingangs erwähnt, stellt die RST einen sehr allgemeinen Rahmen für die Beschreibung relativistischer Felder dar und läßt einen weiten Spielraum von Feldkonfigurationen zu. Einige Eigenschaften der Bewegung der Materie müssen aber festgelegt werden. Diese betreffen die Erhaltungssätze, von denen die wichtigsten die folgenden sind:

1.) Die Stromerhaltung:

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{J}_\mu = 0 . \quad (2.20)$$

Diese Erhaltungsgleichung ergibt sich direkt aus den Maxwell-Gleichungen

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 4\pi\alpha_* \mathcal{J}_\nu , \quad (2.21)$$

$$(\alpha_* = \frac{e^2}{\hbar c})$$

die einen Teil der RST-Dynamik bilden. (Im Falle einer nicht-abelschen Eichtheorie stellen diese Gleichungen die Yang-Mills Gleichungen dar). Durch die kovariante Ableitung von (2.21) erhält man direkt den Erhaltungssatz (2.20), da $\mathcal{D}^\nu \mathcal{D}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv 0$ gilt. Der Strom-Operator \mathcal{J}_μ wird nach den Generatoren τ^a der Eichgruppe zerlegt, welche die Wechselwirkung beschreibt:

$$\mathcal{J}_\mu = j_{a\mu} \tau^a . \quad (2.22)$$

Dann gilt die Erhaltungsgleichung (2.20) für jede einzelne Komponente des so zerlegten Strom-Operators:

$$\nabla^\mu j_{a\mu} = 0 , \quad (2.23)$$

wenn die Eichgruppe abelsch ist. Diese Komponenten $j_{a\mu}$ des Stromes \mathcal{J}_μ stehen mit den Geschwindigkeitskomponenten $v_{a\mu}$ in folgender Verbindung:

$$j_{a\mu} = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot v_{a\mu}) \quad (2.24)$$

Für skalare Teilchen macht man für Beziehung zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und der Hamilton'schen 1-Form \mathcal{H}_μ folgenden Ansatz:

$$v_{a\mu} = \frac{i}{2Mc^2} \left(\tau_a \mathcal{H}_\mu + \overline{\mathcal{H}}_\mu \tau_a \right). \quad (2.25)$$

Damit die Stromerhaltung (2.23) mit dem Ansatz (2.25) automatisch gewährleistet ist, muß für den Hamiltonian die Erhaltungsgleichung (2.16) gelten.

Obwohl in dieser Arbeit nur skalare Teilchen betrachtet werden, soll kurz auf den Spinor-Fall (Dirac-Gleichung) eingegangen werden: Die Geschwindigkeitsoperatoren v_μ fallen hier mit den Dirac-Matrizen zusammen: $v_\mu = \gamma_\mu$. Die Erhaltungsgleichung erhält einen zusätzlichen Spin-Polarisationsterm (siehe (2.17)). Man kann nun zeigen [16], daß die Bedingung (2.17) sich wesentlich vereinfachen läßt, da sie sich in die Beziehung

$$\gamma_\mu \mathcal{H}^\mu = Mc^2 \mathbf{1} \quad (2.26)$$

umformen läßt.

2.) Die Energie-Impulserhaltung

Für ein abgeschlossenes System gilt die Erhaltung des Energie-Impulstensors

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.27)$$

Der Energie-Impuls-Tensor setzt sich dabei aus einem von der Materie sowie aus einem durch das Eichfeld erzeugten Anteil zusammen (siehe z.B. [17]). In unserem Fall kommt der Eichfeldanteil durch die elektromagnetische Wechselwirkung zustande:

$$T_{\mu\nu} = {}^{(\text{mat})}T_{\mu\nu} + {}^{(\text{el})}T_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

Der materielle Anteil des Energie-Impuls-Tensors wird aus dem Energie-Impuls-Operator folgendermaßen gebildet

$${}^{(\text{mat})}T_{\mu\nu} = \text{tr}(\mathcal{I} \mathcal{T}_{\mu\nu}). \quad (2.29)$$

Der Energie-Impuls-Operator für skalare Teilchen wird hierbei durch folgende Beziehung aus der Hamilton'schen 1-Form abgeleitet:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2Mc^2} \left\{ \overline{\mathcal{H}}_\mu \mathcal{H}_\nu + \overline{\mathcal{H}}_\nu \mathcal{H}_\mu - g_{\mu\nu} \left(\overline{\mathcal{H}}^\lambda \mathcal{H}_\lambda - (Mc^2)^2 \right) \right\}. \quad (2.30)$$

Zur Form des Energie-Impuls Tensors für Dirac-Teilchen sei auf Ref. [20] verwiesen.

Die Erhaltungsgleichung (2.27) gilt für den materiellen Teil des Energie-Impuls-Tensors allein nur dann, wenn keine Eichfelder vorhanden sind. Sind Eichfelder vorhanden, so wirkt auf die Materie eine äußere Kraftdichte

$$\nabla^{\mu(\text{mat})}T_{\mu\nu} = f_\nu , \quad (2.31)$$

welche durch die Eichfelder erzeugt wird. Damit die Erhaltungsgleichung (2.27) weiterhin gültig ist, muß also

$$\nabla^{\mu(\text{el})}T_{\mu\nu} = -f_\nu \quad (2.32)$$

gelten. In der RST wird diese Kraftdichte f_ν durch folgende Beziehung aus dem Kraftoperator \mathfrak{f}_ν abgeleitet

$$\mathfrak{f}_\nu = \text{tr}(\mathcal{I} \mathfrak{f}_\nu) = \hbar c F_{a\mu\nu} j^{a\mu} , \quad (2.33)$$

wobei die Feldstärkekomponenten $F_{a\mu\nu}$ sich aus dem Feldstärkeoperator $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ durch Zerlegung nach den Generatoren τ_a der Lie-Gruppe ergeben:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{a\mu\nu} \tau^a . \quad (2.34)$$

Der Kraftoperator setzt sich aus der Hamilton'schen 1-Form und dem Eichfeld folgendermaßen zusammen:

$$\mathfrak{f}_\nu = i \frac{\hbar}{2M} \left(\overline{\mathcal{H}}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{H}^\mu \right) . \quad (2.35)$$

Wird die Gravitation als Wechselwirkung hinzugenommen, so werden die Gleichungen der RST um die Einstein-Gleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi \frac{L^2}{\hbar c} T_{\mu\nu} \quad (2.36)$$

ergänzt. Diese erzwingen die Energie-Impuls Erhaltung (2.27) als eine Konsistenzbedingung. Daher muß bei der Beschreibung der Gravitationswechselwirkung immer der Energie-Impuls-Anteil des Eichfelds mit berücksichtigt werden, während man sich ohne Berücksichtigung der Gravitation auf das materielle Subsystem mit der Bedingung (2.31) beschränken kann.

2.6 Äquivalenz von RST und konventioneller Quantentheorie auf dem 1-Teilchen Sektor

In diesem Abschnitt wird nachgewiesen, daß der RST-Formalismus im skalaren 1-Teilchen-Fall auf die Klein-Gordon bzw. im Spin 1/2-Fall auf die Dirac-Gleichung führt.

1.) Ein Skalares Teilchen

Bei allen folgenden Berechnungen wird der Hamiltonian $\mathcal{H}_\mu \neq \overline{\mathcal{H}}_\mu$ zerlegt in zwei hermitesche Anteile, und zwar auf folgende Weise:

$$\mathcal{H}_\mu = \hbar c \left(\mathcal{K}_\mu + i\mathcal{L}_\mu \right) \quad (2.37)$$

Der Anteil $\mathcal{K}_\mu (= \overline{\mathcal{K}}_\mu)$ heißt *kinetisches Feld*, während der $\mathcal{L}_\mu (= \overline{\mathcal{L}}_\mu)$ -Anteil als *Lokalisationsfeld* bezeichnet wird. Diese Bezeichnungen wurden eingeführt, weil die Spur des kinetischen Feldes $K_\mu = \text{tr}(\mathcal{K}_\mu)$ im 1-Teilchen Fall proportional zum Vierer-Impuls p_μ ist: $p_\mu = \frac{\hbar}{Mc} K_\mu$. Dagegen folgt aus der Integrabilitätsbedingung (2.15) sofort, daß das Feld $L_\mu = \text{tr}(\mathcal{L}_\mu)$ ein Gradientenfeld ist, da

$$\nabla_\mu L_\nu - \nabla_\nu L_\mu = 0 \quad (2.38)$$

gilt. Das zu diesem Gradientenfeld gehörige Potentialfeld $L(x)$, *Amplitudenfeld* genannt, wird über die Beziehung

$$L_\mu = \frac{\partial_\mu L(x)}{L(x)} \quad (2.39)$$

definiert. Sollte man sich über die logarithmische Definition dieses Feldes wundern, so wird gleich im Anschluß gezeigt, daß diese Definition es erlaubt, eine zur Form der Klein-Gordon Gleichung äquivalente Wellengleichung aufzustellen (würde $L_\mu = \partial_\mu L(x)$ verwendet, so müßte die entstehende Gleichung erst umparametrisiert werden, um die Ähnlichkeit zur Klein-Gordon Gleichung zu erkennen). Die Bezeichnung ‘‘Amplitudenfeld’’ rührt nun daher, daß dieses Feld im Einteilchen-Fall der Amplitude der Wellenfunktion ψ in der konventionellen Quantentheorie entspricht. Damit ist auch die Wahrscheinlichkeitsamplitude $|\psi|^2$ gegeben als das Quadrat von $L(x)$: $|\psi|^2 = L^2$. Das Quadrat des Amplitudenfeldes wird daher in der RST als Teilchen-Dichte im fluid-dynamischen Sinne interpretiert. Dies wird anhand folgender Herleitung illustriert:

Wir gehen von der relativistischen Schrödingergleichung (2.13) aus und betrachten eine eindimensionale, komplexe Realisierung (\mathbb{C}^1 -Realisierung) mit elektromagnetischer Eichgruppe $U(1)$. Das bedeutet, daß die Eichgruppe nur einen einzigen Generator $\tau = -i$ besitzt. Also werden alle Eichfelder nach diesem Generator zerlegt, z.B. $\mathcal{A}_\mu = A_\mu \tau = -iA_\mu$. Die (reellen) Hamiltonschen Felder sind hier proportional zur Einheitsmatrix in einer Dimension: $\mathcal{K}_\mu = K_\mu \mathbf{1} = K_\mu$, $\mathcal{L}_\mu = L_\mu \mathbf{1} = \partial_\mu L/L \mathbf{1} = \partial_\mu L/L$. Die relativistische Schrödingergleichung

$$i\hbar c \mathcal{D}_\mu \psi = \mathcal{H}_\mu \psi \quad (2.40)$$

schreibt sich mit diesen Ersetzungen folgendermaßen

$$i\hbar c(\partial_\mu - iA_\mu)\psi = \hbar c(K_\mu + iL_\mu)\psi . \quad (2.41)$$

und kann sehr einfach integriert werden,

$$\psi = L(x) \cdot \exp\left(-i \int^x \underbrace{(K_\mu - A_\mu)}_{\partial_\mu \alpha} dx^\mu\right) \quad (2.42)$$

$$\psi = L(x) \cdot e^{-i\alpha(x)} \quad (2.43)$$

wobei hier ausgenützt wurde, daß die Integrabilitätsbedingung für das kinetische Feld K_μ folgende Bedingung liefert:

$$\nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu = F_{\mu\nu} . \quad (2.44)$$

Da $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ ist, unterscheiden sich die beiden Felder K_μ und A_μ tatsächlich nur durch einen Gradienten:

$$K_\mu = \partial_\mu \alpha + A_\mu . \quad (2.45)$$

Aus (2.43) ist die Interpretation des Amplitudenfeldes als Amplitude der Wellenfunktion sofort ersichtlich. Die Lösung der relativistischen Schrödingergleichung hat nun zwar die Bedeutung von Amplitudenfeld und kinetischem Feld klargemacht, aber sie hat keine Wellengleichung für das Amplitudenfeld ergeben. Diese wird durch die Erhaltungsgleichung von \mathcal{H}_μ (2.16) geliefert:

$$\square L + \left(\left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^2 - K_\mu K^\mu\right)L = 0 . \quad (2.46)$$

Zusätzlich liefert die Erhaltungsgleichung auch einen erhaltenen Strom j_μ , für den sich in dieser Realisation mit (2.24) und (2.25) $j_\mu = \frac{\hbar}{Mc} L^2 K_\mu$ ergibt:

$$\nabla^\mu (L^2 K_\mu) = 0 \rightsquigarrow \nabla^\mu j_\mu = 0 . \quad (2.47)$$

Die letzte Gleichung illustriert sehr schön den fluid-dynamischen Charakter der RST. Der erhaltene Strom ist bis auf einen Proportionalitätsfaktor das Produkt aus Dichte $\rho = L^2$ und Viererimpuls $p_\mu = \hbar K_\mu$, läßt sich also wesentlich einfacher schreiben als die herkömmliche Darstellung des erhaltenen Viererstroms in der Klein-Gordon Theorie.

2.) Ein Dirac-Teilchen

Die Äquivalenz zwischen Dirac-Gleichung und der komplexen, vierdimensionalen Darstellung der RST unter Berücksichtigung des Spins ist besonders einfach: Die Dirac-Bedingung (2.26) wird in die relativistische Schrödingergleichung (2.13) eingesetzt, woraus sich direkt die Dirac-Gleichung ergibt:

$$i\hbar \gamma_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi = Mc \Psi . \quad (2.48)$$

2.7 Selbst-Wechselwirkung in der RST

Interpretiert man das Quadrat der Wellenfunktion in der konventionellen Quantentheorie als elektrische Ladungsdichte, setzt man also $\rho_{\text{el}} = e\bar{\psi}\psi$, so tritt ein großes Problem auf, das zum ersten Mal von E. Schrödinger erkannt wurde: Eine kontinuierliche, ausgedehnte Ladungsdichte ρ_{el} würde, wie man in jedem Lehrbuch über klassische Elektrodynamik nachlesen kann, eine elektrostatische Selbstenergie vom Betrag

$$E_S = \iint \frac{\rho_{\text{el}}(\vec{r}) \cdot \rho_{\text{el}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \quad (2.49)$$

erzeugen. Aber wenn dieser klassische Selbstenergie-Beitrag für die Lösung des Eigenwertproblems eines Elektrons im Coulomb-Potential ($V = -Z\frac{e^2}{r}$) verwendet wird, so weicht das so erhaltene Spektrum des Wasserstoffatoms auf drastische Weise von den experimentellen Befunden ab. Offensichtlich interagiert das Wasserstoffatom nicht auf diese Weise mit sich selbst. Andererseits scheint Schrödingers Annahme der Existenz einer elektrischen Ladungswolke um den Kern herum nicht falsch zu sein, da das Wasserstoffatom als Ganzes als ein neutrales Objekt mit festgelegter Symmetrie erscheint (z.B. sphärischer Symmetrie im Grundzustand). Warum interagiert die 1-Teilchen Ladungswolke um das Proton herum also nicht mit sich selbst gemäß (2.49) ?

Eine Lösung für dieses Problem bietet auch die RST nicht, wohl aber die Möglichkeit, dieses auf elegante Art zu umgehen. In den Eichtheorien treten Ströme nämlich an zwei verschiedenen Stellen auf:

- (i) Die Ladungsdichte \mathcal{J}_μ ist die Quelle des Feldstärketensors (2.21) und gehorcht deshalb der Kontinuitätsgleichung (2.20)
- (ii) Die Ladungsdichte \mathcal{J}_μ erzeugt gemeinsam mit der Feldstärke die Kraftdichte f_ν (vgl. (2.33))

Für einen Strom, der im zweiten Kontext auftritt, muß keine Erhaltungsgleichung gelten, und daher ist es nicht zwingend erforderlich, die Ströme aus Kontext (i) und (ii) miteinander zu identifizieren. Dennoch wäre es natürlich sehr verlockend dies zu tun, aber dabei würde man direkt auf die oben genannten Schwierigkeiten mit der Selbst-Energie stoßen. Betrachtet man nochmals die Gleichung für die Kraftdichte

$$f_\nu = \hbar c F_{a\mu\nu} j^{a\mu} \quad (2.50)$$

so folgt aus der RST-Dynamik, daß die hier auftretenden Ströme $j^{a\mu}$ durch (2.24) und (2.25) festgelegt sind. Aber es ist nicht klar, daß der Strom, der die Feldstärke $F_{a\mu\nu}$ erzeugt, mit dem Strom $j^{a\mu}$ identisch ist, der in der Kraftdichte f_ν auftritt. Im Gegenteil, würde die Feldstärke auf diese Weise erzeugt, so wäre die Folge, daß die Kraftdichte f_ν sich ausschließlich aus der Selbst-Wechselwirkung durch jenen Teil der Materieverteilung, welche den Strom $j^{a\mu}$ erzeugt, aufbauen würde. Da es vernünftiger ist, davon auszugehen, daß Wechselwirkungen *zwischen* verschiedenen Teilchen stattfinden, kommt man zu dem Schluß, daß die Kraftdichte (2.50) *nicht* vom Strom $j^{a\mu}$ erzeugt werden sollte. Wir verwenden deshalb folgende modifizierte Form der Maxwell-Gleichungen:

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 4\pi\alpha \mathcal{J}'_\nu \quad (2.51)$$

wobei der hier als Quelle auftretende Strom folgende Gestalt besitzt:

$$\mathcal{J}'_\nu = \text{tr}(\mathcal{J}_\nu)\mathbf{1} - \mathcal{J}_\nu \quad (2.52)$$

und \mathcal{J}_ν aus Gleichung (2.22) verwendet wurde. Durch diese Konstruktion ist die Quelle der Feldstärke für das Teilchen a die Summe aus den Strömen von allen Teilchen des Systems bis auf den vom Teilchen a selbst erzeugten Strom. Dadurch kann auch die Feldstärke selbst als die Summe der Feldstärken aller *anderen* im System vorhandenen Teilchen angesehen werden:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu})\mathbf{1} - \mathcal{F}_{\mu\nu} . \quad (2.53)$$

Mit der Einführung dieser Größe lassen sich die Maxwell-Gleichungen auch folgendermaßen schreiben

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{F}'_{\mu\nu} = 4\pi\alpha_* \mathcal{J}_\nu , \quad (2.54)$$

wobei \mathcal{J}_ν aus (2.22) verwendet wird. Für eine eingehendere Betrachtung dieser Konstruktion, z.B. die Resultate für den Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes, sei auf [21] verwiesen.

Damit ist die Betrachtung der allgemeinen Grundlagen der RST abgeschlossen und wir können uns dem eigentlichen Thema dieser Doktorarbeit, der Behandlung von 2-Teilchen Systemen im Rahmen der RST zuwenden.

Kapitel 3

2-Teilchen Systeme in der RST

Ein skalares 2-Teilchen System, das der elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegt, im Formalismus der RST zu behandeln ist Gegenstand dieser Doktorarbeit. Ein solches System muß natürlich durch geeignete Feldgrößen parametrisiert werden. In diesem Kapitel wird eine mögliche Parametrisierung vorgestellt, welche zu Beginn der Doktorarbeit schon vorhanden war [22]. Ein wesentlicher Teil dieser Doktorarbeit bestand nun darin, eine neue Parametrisierung zu finden, sodaß die von der RST erzeugten Effekte klarer zum Ausdruck gebracht und somit die Lösung der RST-Dynamik für gebundene Zustände ermöglicht wurden. Die neueste Parametrisierung, die in Kapitel 6 vorgestellt wird, vereinfacht die Beschreibung des 2-Teilchen Systems wesentlich. Ein wichtiger Punkt im Formalismus der RST, nämlich die Aufteilung des Konfigurationsraumes der Intensitätsmatrix \mathcal{I} in zwei durch die Dynamik getrennte Bereiche, wird aber auch schon in der alten Parametrisierung deutlich.

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels wird die Kinematik des 2-Teilchen Systems behandelt, indem die zur Beschreibung dieses Systems benötigten Operatoren nach einer geeigneten Basis zerlegt werden. Die Komponenten dieser Zerlegung unterliegen der RST-Dynamik, welche durch die Integrabilitätsbedingung (Abschnitt 3), die Erhaltungsgleichung (Abschnitt 4) und die von Neumann-Gleichung (Abschnitt 5) gegeben ist. Das aus dieser Dynamik entstandene System gekoppelter, nichtlinearer Differentialgleichungen für die Komponentenfelder ist der Untersuchungsgegenstand dieser Doktorarbeit.

3.1 Operatorbasis und Eichgruppe

Die Parametrisierung eines 2-Teilchen Systems in der RST findet in der \mathbb{C}^2 -Realisation statt. Dies bedeutet, daß die Wellenfunktion $\Psi(x)$ ein Schnitt eines komplexen Vektorbündels mit Faserdimension $N = 2$ ist. Somit läßt sich die Wellenfunktion folgendermaßen schreiben:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 e^{-i\alpha_1} \\ L_2 e^{-i\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Entsprechend sind die Operatoren (z.B. die Intensitätsmatrix \mathcal{I}), die auf diesem komplexen Raum \mathbb{C}^2 wirken, $\mathcal{GL}(2, \mathbb{C})$ -wertige Operatoren. Im folgenden stellen wir zunächst die Kinematik dieser Realisierung vor. Das bedeutet, daß wir eine geeignete (hermitesche) Basis für diese Operatoren aufsuchen müssen. Diese ist gegeben durch zwei Projektoren $\mathcal{P}_a = (\overline{\mathcal{P}}_a)$

$$\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 = 0 \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbf{1} \quad (3.2b)$$

$$\text{tr } \mathcal{P}_1 = \text{tr } \mathcal{P}_2 = 1, \quad (3.2c)$$

welche durch zwei Kommutatoren $\Pi_a = \overline{\Pi}_a$ ($a = 1, 2$) ergänzt werden, so daß die folgenden algebraischen Relationen gelten:

$$\{\Pi_a, \mathcal{P}_b\} = \Pi_a \quad (3.3a)$$

$$[\mathcal{P}_1, \Pi^a] = -[\mathcal{P}_2, \Pi^a] = i\varepsilon^a_b \Pi^b \quad (3.3b)$$

$$\{\Pi_a, \Pi_b\} = 2\delta_{ab} \cdot \mathbf{1} \quad (3.3c)$$

$$[\Pi_a, \Pi_b] = 2i\varepsilon_{ab} (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) . \quad (3.3d)$$

Eine geeignete Darstellung dieser Algebra kann zum Beispiel durch die Pauli-Matrizen $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ erfolgen, d.h.

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_z) \quad (3.4a)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_z) \quad (3.4b)$$

$$\Pi_1 = \sigma_x \quad (3.4c)$$

$$\Pi_2 = \sigma_y . \quad (3.4d)$$

Diese Operatorbasis $\{\mathcal{P}_a, \Pi_b\}$ wird die Einzelteilchen-Basis (ETB) genannt, da die Projektoren \mathcal{P}_a auf die Einzelteilchen-Unterräume der Gesamtvektorfaser $\mathbb{C}^2 =$

$\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$ projizieren, so daß das entsprechende Vektorbündel der 2-Teilchen Wellenfunktionen als die Whitney-Summe der zwei Einteilchen-Bündel aufgefaßt werden kann.

In der klassischen Physik kann ein System von zwei Punktteilchen aber auch als ein Teilchen mit internen Freiheitsgraden angesehen werden (indem man in das Schwerpunktsystem übergeht). Analog zu diesem Vorgehen wird die *Erweiterte Teilchenbasis* $\{\mathbf{1}, \mathcal{Q}, \Pi_a\}$ (WTB) aus der ETB durch

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbf{1} \quad (3.5a)$$

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 \doteq \mathcal{Q} \quad (3.5b)$$

gebildet. Jeder Operator kann nun in eines der beiden Basissysteme zerlegt werden, und die Komponenten in der einen Basis können auf die Komponenten der anderen Basis umgerechnet werden. So läßt sich die Intensitätsmatrix \mathcal{I} in der ETB schreiben als

$$\mathcal{I} = \rho_a \mathcal{P}^a + \frac{1}{2} s_a \Pi^a \quad (3.6)$$

(wobei über doppelt auftretende Indizes in gegenüberliegenden Positionen summiert wird und die Fasermetrik durch $g_{ab} \doteq -\text{tr}(\tau_a \cdot \tau_b) \equiv \delta_{ab}$ gegeben ist).

Die Zerlegung der Intensitätsmatrix in der WTB ist hingegen

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} (\rho \cdot \mathbf{1} + q \cdot \mathcal{Q} + s_a \Pi^a) . \quad (3.7)$$

Die Transformationsformeln für die Umrechnung der Komponenten zwischen den beiden Basen sind gegeben durch

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \quad (3.8a)$$

$$q = \rho_1 - \rho_2 . \quad (3.8b)$$

In gleicher Weise lassen sich auch das Kinetische Feld \mathcal{K}_μ

$$\mathcal{K}_\mu = \begin{cases} K_{a\mu} \mathcal{P}^a + Q_{a\mu} \Pi^a , & \text{(ETB)} & \text{(a)} \\ \frac{1}{2} K_\mu \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{2} k_\mu \mathcal{Q} + Q_{a\mu} \Pi^a & \text{(WTB)} & \text{(b)} \end{cases} \quad (3.9)$$

und das Lokalisationsfeld \mathcal{L}_μ

$$\mathcal{L}_\mu = \begin{cases} L_{a\mu} \mathcal{P}^a + N_{a\mu} \Pi^a , & \text{(ETB)} & \text{(a)} \\ \frac{1}{2} L_\mu \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{2} l_\mu \mathcal{Q} + N_{a\mu} \Pi^a & \text{(WTB)} & \text{(b)} \end{cases} \quad (3.10)$$

in beide Basissysteme zerlegen. Bei dieser Zerlegung treten zwei Typen von Feldern auf, und zwar solche, deren Komponenten bei der Spurbildung $\text{tr}(\mathcal{K}_\mu)$ bzw. $\text{tr}(\mathcal{L}_\mu)$ verschwinden, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Die erste Art von Feldern (nämlich $Q_{a\mu}$ und $N_{a\mu}$) bezeichnet man als *Austauschfelder*, welche sich nicht eindeutig einem der beiden Teilchen zuordnen lassen. Die zweite Art von Feldern ($K_{a\mu}$ und $L_{a\mu}$) lassen sich durch geeignete Linearkombination (in der WTB) oder direkt (in der ETB) den einzelnen Teilchen zuordnen, daher werden sie als *Einzelteilchenfelder* bezeichnet.

Darüberhinaus werden die Einzelteilchen-Generatoren τ_a für die 2-Teilchen Eichgruppe $U(1) \times U(1)$ festgelegt als ($a = 1, 2$)

$$\tau_a = -i\mathcal{P}_a \quad (3.11)$$

und sind demzufolge kovariant konstant:

$$\mathcal{D}_\mu \tau_a = 0 . \quad (3.12)$$

Und selbstverständlich kann man die Konnexion \mathcal{A}_μ und Krümmung $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sowohl in Bezug auf die Einteilchen-Basis ETB zerlegen

$$\mathcal{A}_\mu = A_{a\mu} \tau^a \quad (3.13a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{a\mu\nu} \tau^a \quad (3.13b)$$

als auch in Bezug auf die WTB

$$\mathcal{A}_\mu = -i\hat{A}_\mu \cdot \mathbf{1} - ia_\mu \cdot \mathcal{Q} \quad (3.14a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -i\hat{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} - if_{\mu\nu} \mathcal{Q} , \quad (3.14b)$$

wobei die WTB-Komponenten zu den ETB-Komponenten in folgender Beziehung stehen:

$$\hat{A}_\mu = \frac{1}{2} (A_{1\mu\nu} + A_{2\mu\nu}) \quad (3.15a)$$

$$a_\mu = \frac{1}{2} (A_{1\mu\nu} - A_{2\mu\nu}) , \quad (3.15b)$$

und analog für die Feldstärken gilt

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F_{1\mu\nu} + F_{2\mu\nu}) \quad (3.15c)$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F_{1\mu\nu} - F_{2\mu\nu}) . \quad (3.15d)$$

Das äußere Eichpotential \hat{A}_μ erzeugt dabei die äußere Feldstärke $\hat{F}_{\mu\nu}$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \hat{A}_\nu - \nabla_\nu \hat{A}_\mu \quad (3.16)$$

und das innere Eichpotential a_μ die innere Feldstärke $f_{\mu\nu}$:

$$f_{\mu\nu} = \nabla_\mu a_\nu - \nabla_\nu a_\mu . \quad (3.17)$$

Die Formulierung in der WTB scheint zur Beschreibung des 2-Teilchensystems geeigneter zu sein als die ETB, da sie direkt zum Auftreten eines $SO(2)$ -Unterbündels führt. In der Tat läßt sich ein typisches Element der Eichgruppe $\mathcal{S} \in U(1) \times U(1)$ in der WTB schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \exp(-iA \cdot \mathbf{1} - ia \cdot \mathcal{Q}) \\ &= \exp(-iA \cdot \mathbf{1}) \cdot \exp(-ia\mathcal{Q}) \\ &\doteq \mathcal{S}_{tot(A)} \cdot \mathcal{S}_{rel(a)} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Man findet nun, daß die Permutatoren Π_a sich unter der Wirkung der *Relativgruppe* $\{\mathcal{S}_{rel}\}$ wie ein $SO(2)$ Eichdublett transformieren, d.h.

$$\mathcal{S} \cdot \Pi_a \cdot \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}_{rel} \cdot \Pi_a \cdot \mathcal{S}_{rel}^{-1} = \Pi_b \cdot \overset{\circ}{S}^b_a . \quad (3.19)$$

Hierbei bezeichnet $\overset{\circ}{S}$ ein $SO(2)$ -Element der Relativgruppe

$$\overset{\circ}{S}^a_b = \cos 2a \cdot \delta^a_b - \sin 2a \cdot \varepsilon^a_b \quad (3.20)$$

und $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$ ist der $SO(2)$ -invariante Permutationstensor in zwei Dimensionen. Die entsprechende $SO(2)$ Unterkonnexion $\overset{\circ}{\omega}^a_{b\mu}$ läßt sich sofort aus der ursprünglichen $U(1) \times U(1)$ -Konnexion \mathcal{A}_μ durch Verwendung der kovarianten Ableitung des Permutator-Dubletts bestimmen

$$\mathcal{D}_\mu \Pi_a = \Pi_b \cdot \overset{\circ}{\omega}^b_{a\mu} \quad (3.21a)$$

mit

$$\overset{\circ}{\omega}^b_{a\mu} = -2a_\mu \cdot \varepsilon^b_a . \quad (3.21b)$$

Daher gelangen wir zu dem plausiblen Resultat, daß die Umeichung des *internen* Freiheitsgrads des ausgedehnten Teilchens nur durch die Relativgruppe $\{\mathcal{S}_{rel}\}$ vermittelt wird. Dieser interne Freiheitsgrad wird nicht beeinflußt durch die Wirkung der Totalgruppe $\{\mathcal{S}_{tot}\}$, welche sich auf die *äußere* Bewegung (d.h. Schwerpunktbewegung) des 2-Teilchen Systems bezieht. Als ein einfaches Beispiel für

diesen Mechanismus betrachte man eine allgemeine $U(1) \times U(1)$ -Eichtransformation der Intensitätsmatrix \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\rightarrow \mathcal{I}' = \mathcal{S} \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{S}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\rho \cdot \mathbf{1} + q \cdot \mathcal{Q} + s'_a \Pi^a) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Offensichtlich bleiben hierbei die totale und relative Dichte ρ und q invariant, während sich die *Überlappungsdichten* $\{s_a\}$ wie die Komponenten eines $SO(2)$ -Vektorfeldes transformieren:

$$s'_a = s_b \cdot \overset{\circ}{S}^b_a . \quad (3.23)$$

Als Konsequenz dieses Transformationsverhaltens muß die Ableitung dieses Vektors auf eichkovariante Weise erfolgen:

$$D_\mu s_a = \partial_\mu s_a - s_b \overset{\circ}{\omega}^b_{a\mu} . \quad (3.24)$$

3.2 Rotierende Basis und Polarisationsströme

Das Transformationsverhalten der Überlappungsdichten s_a (3.23) bildet den Anlaß zur Einführung eines rotierenden, eichinvarianten Permutator-Dubletts $\hat{\Pi}, \tilde{\Pi}$:

$$\hat{\Pi} = \hat{s}_a \Pi^a \quad (3.25a)$$

$$\tilde{\Pi} = \varepsilon^{ab} \hat{s}_a \Pi_b \quad (3.25b)$$

$$\left(\hat{s}_a = \frac{s_a}{s}, s^2 = s^a s_a \right) .$$

Diese neue Basis kann nun sowohl mit der ETB als auch mit der WTB verwendet werden. In Bezug auf diese *rotierende Basis* (RTB) $\{\tilde{\Pi}, \hat{\Pi}\}$ schreibt sich die Intensitätsmatrix

$$\mathcal{I} = \begin{cases} \left(\rho_a \mathcal{P}^a + \frac{1}{2} s \hat{\Pi} \right), & \text{(ETB)} & \text{(a)} \\ \frac{1}{2} \left(\rho \cdot \mathbf{1} + q \mathcal{Q} + s \hat{\Pi} \right), & \text{(WTB)} & \text{(b)} \end{cases} \quad (3.26)$$

Im folgenden werden wir häufig von dieser Zerlegung von \mathcal{I} Gebrauch machen, zusammen mit einer analogen Zerlegung der Austauschfelder $Q_{a\mu}$ und $N_{a\mu}$. Diese treten bei der Zerlegung des Hamiltonians \mathcal{H}_μ in seine beiden hermiteschen

Anteile \mathcal{K}_μ (3.9) und \mathcal{L}_μ (3.10) auf (s.o.):

$$Q_{a\mu} = {}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot \hat{s}_a + {}^{(\perp)}Q_\mu \cdot \varepsilon^b{}_a \hat{s}_b \quad (3.27a)$$

$$N_{a\mu} = {}^{(\parallel)}N_\mu \cdot \hat{s}_a + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot \varepsilon^b{}_a \hat{s}_b . \quad (3.27b)$$

Der offensichtliche Vorteil der Verwendung der RTB ist die Eichinvarianz der Operatorkomponenten. Dadurch kann man statt mit den $SO(2)$ eichkovarianten Größen $s_a, Q_{a\mu}, N_{a\mu}$ nun mit den eichinvarianten Größen $s, {}^{(\parallel)}Q_\mu, {}^{(\perp)}Q_\mu, {}^{(\parallel)}N_\mu, {}^{(\perp)}N_\mu$ arbeiten. Dies erlaubt es, die Feldgleichungen in einer *eichinvarianten* Weise zu formulieren. (der RTB-Formalismus wurde beispielsweise auch verwendet, um die Dirac'sche Spinortheorie als eine \mathbb{C}^4 -Realisation der RST darzustellen, siehe z.B. [23]).

Schließlich können für das 2-Teilchen-System noch die Ströme konstruiert werden: Die Zerlegung (2.37) des Hamiltonians \mathcal{H}_μ in \mathcal{K}_μ und \mathcal{L}_μ erlaubt es, eine analoge Zerlegung der Geschwindigkeitsoperatoren vorzunehmen

$$v_{a\mu} = {}^{(C)}v_{a\mu} + {}^{(P)}v_{a\mu} \quad (3.28)$$

und zwar unter Verwendung des Zusammenhangs (2.25) zwischen diesen Operatoren und dem Hamiltonian. Der *Konvektionsanteil* ${}^{(C)}v_{a\mu}$ berechnet sich dabei aus dem kinetischen Feld \mathcal{K}_μ in Form eines Anti-Kommutators

$${}^{(C)}v_{a\mu} = \frac{i\hbar}{2Mc} \{ \mathcal{K}_\mu, \tau_a \} \quad (3.29)$$

wohingegen der *Polarisationsanteil* mit dem Lokalisationsfeld \mathcal{L}_μ in Form eines Kommutators verknüpft ist:

$${}^{(P)}v_{a\mu} = \frac{\hbar}{2Mc} [\mathcal{L}_\mu, \tau_a] . \quad (3.30)$$

Mit (2.24) folgt für den ersten Strom

$$j_{1\mu} = {}^{(C)}j_{1\mu} + {}^{(P)}j_{1\mu} \quad (3.31a)$$

$${}^{(C)}j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left(\rho_1 K_{1\mu} + \frac{1}{2} s \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu \right) \quad (3.31b)$$

$${}^{(P)}j_{1\mu} = \frac{\hbar}{2Mc} \cdot \varepsilon^{ab} s_a N_{b\mu} \equiv \frac{\hbar}{2Mc} s \cdot {}^{(\perp)}N_\mu \quad (3.31c)$$

und für den zweiten Strom

$$j_{2\mu} = {}^{(C)}j_{2\mu} + {}^{(P)}j_{2\mu} \quad (3.32a)$$

$${}^{(C)}j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left(\rho_2 K_{2\mu} + \frac{1}{2} s \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu \right) \quad (3.32b)$$

$${}^{(P)}j_{2\mu} = -\frac{\hbar}{2Mc} \varepsilon^{ab} s_a N_{b\mu} \equiv -\frac{\hbar}{2Mc} s \cdot {}^{(\perp)}N_\mu \quad (3.32c)$$

Daran läßt sich ablesen, daß für den speziellen Fall eines reinen Zustands Ψ die Polarisationsanteile $^{(P)}j_{a\mu}$ nur dann von Null verschieden sein können, wenn die beiden Wellenfunktionen ψ_a sich überlappen und damit die Überlappungsdichte s von Null verschieden ist. Die Einzelteilchen-Dichten eines reinen 2-Teilchen Zustands nehmen dann die folgende Form an:

$$\rho_1 = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{P}_1) \rightarrow \bar{\Psi} \cdot \mathcal{P}_1 \cdot \Psi = L_1^2 \quad (3.33a)$$

$$\rho_2 = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{P}_2) \rightarrow \bar{\Psi} \cdot \mathcal{P}_2 \cdot \Psi = L_2^2 \quad (3.33b)$$

$$s_1 = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \Pi_1) \rightarrow \bar{\Psi} \cdot \Pi_1 \cdot \Psi = 2L_1L_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.33c)$$

$$s_2 = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \Pi_2) \rightarrow \bar{\Psi} \cdot \Pi_2 \cdot \Psi = 2L_1L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.33d)$$

$$s = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \hat{\Pi}) \rightarrow \bar{\Psi} \cdot \hat{\Pi} \cdot \Psi = 2L_1L_2 . \quad (3.33e)$$

Aus der letzten Gleichung kann man ablesen, daß die Überlappungsdichte s nur für sich überlappende Wellenpakete ψ_a von Null verschieden ist. Man kann sich auch überzeugen, daß die Fierz-Identität (2.9) für einen reinen Zustand mit der Parametrisierung (3.33) erfüllt ist, weil gilt (in der WTB).

$$\rho^2 - (q^2 + s^2) = 0 . \quad (3.34)$$

Schreibt man die Ströme $j_{a\mu}$ in die WTB um

$$J_\mu \doteq j_{1\mu} + j_{2\mu} \quad (3.35a)$$

$$\dot{j}_\mu \doteq \dot{j}_{1\mu} - \dot{j}_{2\mu} \quad (3.35b)$$

so findet man

$$J_\mu = \frac{\hbar}{2Mc} (\rho \cdot K_\mu + q \cdot k_\mu + 2s \cdot {}^{(||)}Q_\mu) \quad (3.36a)$$

$$\dot{j}_\mu = \frac{\hbar}{2Mc} (\rho \cdot k_\mu + q \cdot K_\mu + 2s \cdot {}^{(\perp)}N_\mu) . \quad (3.36b)$$

Dabei stellt man fest, daß der Gesamtstrom J_μ (3.36) keinen Polarisationsanteil ($\sim {}^{(\perp)}N_\mu$) besitzt, und deshalb ausschließlich von den Konvektionsanteilen der Einzelteilchenströme gebildet wird. Der Gesamtstrom ist aber als eine externe Größe anzusehen, die den Punktteilchenlimes ($q, s \rightarrow 0$) überlebt und damit im wesentlichen die Punktteilchen-Eigenschaften des ausgedehnten Teilchens mit einer schwachen Kopplung an die inneren Freiheitsgrade beschreibt. Außerdem trägt der Strom J_μ die Gesamtladung $N = 2$ des 2-Teilchen Systems, d.h.

$$\int_{(S)} J_\mu \cdot dS^\mu = \int_{(S)} j_{1\mu} \cdot dS^\mu + \int_{(S)} j_{2\mu} \cdot dS^\mu = 2 , \quad (3.37)$$

wohingegen der Relativstrom j_μ ein neutraler Strom ist, der keine Ladung trägt:

$$\int_{(S)} j_\mu \cdot dS^\mu = \int_{(S)} j_{1\mu} \cdot dS^\mu - \int_{(S)} j_{2\mu} \cdot dS^\mu = 0 . \quad (3.38)$$

Die internen Freiheitsgrade des ausgedehnten Teilchens werden jedoch durch den Relativstrom (3.36b) beschrieben, der den doppelten Polarisationsanteil der beiden Einteilchen-Ströme enthält. Was diesen Polarisationsanteil betrifft, so stellt man fest, daß es einen solchen in einer (skalaren) 1-Teilchen Theorie nicht gibt (weder in der RST noch in der konventionellen Quantenmechanik). Damit ist klar, daß die Polarisationsanteile eines jeden (skalaren) Teilchens eines 2-Teilchen Systems in der RST durch die Anwesenheit des anderen Teilchens entstehen. Dieses Argument erscheint auch deshalb plausibel, weil skalare Teilchen keine intrinsische Polarisation besitzen können.

3.3 Die Integrabilitätsbedingung

Nachdem die Kinematik des 2-Teilchen Systems im obigen Abschnitt beschrieben wurde, kann man nun zu den dynamischen Aspekten dieses Systems übergehen. In diesem Abschnitt diskutieren wir die Hamiltonsche Dynamik, und zwar ausschließlich die Integrabilitätsbedingung (2.15). Zunächst stellt man bei der Betrachtung dieser Gleichung fest, daß wie im Einteilchen-Fall (2.38) für das Lokalisationsfeld $L_\mu = \text{tr}(\mathcal{L}_\mu) = L_{1\mu} + L_{2\mu}$ in der WTB folgende Beziehung gilt:

$$\nabla_\mu L_\nu - \nabla_\nu L_\mu = 0 . \quad (3.39)$$

Also ist der Vektor L_μ ein Gradientenfeld und erlaubt es uns deshalb, ein Amplitudenfeld $L(x)$ durch

$$L_\mu = \frac{\partial_\mu L^2}{L^2} = 2 \frac{\partial_\mu L}{L} \quad (3.40)$$

einzuführen. Aber im Gegensatz zu diesem erfreulichen Resultat ist der andere Lokalisationskoeffizient l_μ (3.10b) im allgemeinen kein Gradientenfeld, da die Integrabilitätsbedingung hier eine nicht-triviale Rotationsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} & \nabla_\mu l_\nu - \nabla_\nu l_\mu = \\ & 4 \left({}^{(\parallel)}N_\mu \cdot {}^{(\perp)}Q_\nu - {}^{(\parallel)}N_\nu \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu - {}^{(\perp)}N_\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q_\nu + {}^{(\perp)}N_\nu \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu \right) . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Der nächste wichtige Punkt betrifft die kinetischen Felder K_μ und k_μ (3.9a). Mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung findet man, daß ihre Rotation mit den Feldstärken verknüpft ist, aber in einer sehr unterschiedlichen Weise für den äußeren und inneren Anteil, nämlich

$$\nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu = 2 \hat{F}_{\mu\nu} \quad (3.42a)$$

und

$$\nabla_\mu k_\nu - \nabla_\nu k_\mu = 2 f_{\mu\nu} + 2 G_{\mu\nu} , \quad (3.42b)$$

wobei die Austauschfeldstärke $G_{\mu\nu}$ definiert ist als

$$G_{\mu\nu} = 2 \left({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}^{(\perp)}Q_\nu - {}^{(\parallel)}Q_\nu \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu - {}^{(\parallel)}N_\mu \cdot {}^{(\perp)}N_\nu + {}^{(\parallel)}N_\nu \cdot {}^{(\perp)}N_\mu \right) . \quad (3.43)$$

Das totale kinetische Feld K_μ spürt hier zweimal die äußere Feldstärke $\hat{F}_{\mu\nu}$! Der Grund für dieses Verhalten liegt in der Tatsache, daß das äußere Feld $\hat{F}_{\mu\nu}$ sich durch seine Definition nur auf eine Ladungseinheit bezieht, aber das totale kinetische Feld K_μ mit dem Gesamtstrom J_μ verknüpft ist, der die doppelte Gesamtladung trägt (vgl. (3.37)). Dies wird deutlich, wenn man die Ströme ausdrückt durch die entsprechenden Geschwindigkeitsoperatoren \mathcal{V}_μ, v_μ , was auf

$$J_\mu = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{V}_\mu) \quad (3.44a)$$

$$j_\mu = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot v_\mu) \quad (3.44b)$$

führt, wobei der Gesamtgeschwindigkeitsoperator \mathcal{V}_μ bis auf einen konstanten Vorfaktor mit dem kinetischen Gesamtfeld \mathcal{K}_μ übereinstimmt.

$$\mathcal{V}_\mu := v_{1\mu} + v_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \mathcal{K}_\mu . \quad (3.45)$$

Also ist auch die Gesamtgeschwindigkeit \mathcal{V}_μ eine rein konvektive Größe (siehe auch die Aufteilung der Geschwindigkeitsoperatoren (3.28)-(3.30)), wohingegen die Relativgeschwindigkeit v_μ

$$v_\mu := v_{1\mu} - v_{2\mu} = \frac{1}{2Mc^2} (\bar{\mathcal{H}}_\mu \cdot \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \cdot \mathcal{H}_\mu) \quad (3.46)$$

auch einen Polarisationsanteil ${}^{(P)}v_\mu$ enthält

$$v_\mu = {}^{(C)}v_\mu + {}^{(P)}v_\mu , \quad (3.47)$$

der gemeinsam mit seinem konvektiven Gegenstück ${}^{(C)}v_\mu$ in der WTB folgende Form annimmt:

$${}^{(C)}v_\mu = \frac{\hbar}{2Mc} \{ \mathcal{K}_\mu, \mathcal{Q} \} = \frac{\hbar}{2Mc} (K_\mu \cdot \mathcal{Q} + k_\mu \cdot \mathbf{1}) \quad (3.48a)$$

$${}^{(P)}v_\mu = \frac{i\hbar}{2Mc} [\mathcal{Q}, \mathcal{L}_\mu] = \frac{\hbar}{Mc} \left({}^{(\perp)}N_\mu \cdot \hat{\Pi} - {}^{(\parallel)}N_\mu \cdot \tilde{\Pi} \right) . \quad (3.48b)$$

Die konvektive Gestalt (3.44)-(3.45) des Gesamtstromes J_μ führt also gemeinsam mit seiner doppelten Gesamtladung (3.37) dazu, daß der Wirbel von K_μ das zweifache Gesamtfeld $\hat{F}_{\mu\nu}$ ist, was durch Gleichung (3.42a) ausgedrückt wird.

Auch die Wirbelgleichung für das kinetische Relativfeld k_μ (3.42b) besitzt einige außergewöhnliche Eigenschaften. Offensichtlich “fühlt” dieses Feld nicht nur die interne Feldstärke $f_{\mu\nu}$, welche durch Gleichung (3.17) definiert ist, sondern auch die Austauschfeldstärke $G_{\mu\nu}$ (3.43). Es ist leicht einzusehen, daß dieses Feld in einer pseudo-Riemannschen Raumzeit der folgenden Bedingung unterworfen ist:

$$\nabla_\mu G_{\nu\lambda} + \nabla_\nu G_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda G_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (3.49)$$

welche notwendig und hinreichend für die Existenz eines Austauschpotentials G_μ ist, so daß $G_{\mu\nu}$ die Rotation dieses Potentials bildet:

$$G_{\mu\nu} = \nabla_\mu G_\nu - \nabla_\nu G_\mu . \quad (3.50)$$

Daher kann man die Rotationsgleichung für k_μ (3.42b) auch in der folgenden Form schreiben

$$\nabla_\mu {}'k_\nu - \nabla_\nu {}'k_\mu = 2f_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

so daß das modifizierte Feld $'k_\mu$

$$'k_\mu := k_\mu - 2G_\mu \quad (3.52)$$

nur noch die innere Feldstärke $f_{\mu\nu}$ “fühlt”.

Im folgenden werden wir vom modifizierten Feld $'k_\mu$ an Stelle des ursprünglichen Feldes k_μ Gebrauch machen, da dies die Gleichungen vereinfacht. Beispielsweise findet man für die kovariante Ableitung des Einheitsvektors \hat{s}_a , der in Gleichung (3.25) definiert wurde

$$D_\mu \hat{s}_a = \varepsilon^b{}_a \hat{s}_b \cdot {}'k_\mu . \quad (3.53)$$

Auch die kovarianten Ableitungen der Basisoperatoren der rotierenden Basis lassen sich mit Hilfe des neuen Feldes $'k_\mu$ folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{D}_\mu \widehat{\Pi}_a = 'k_\mu \cdot \widetilde{\Pi} \quad (3.54a)$$

$$\mathcal{D}_\mu \widetilde{\Pi}_a = -'k_\mu \cdot \widehat{\Pi} . \quad (3.54b)$$

Es sollte noch darauf hingewiesen werden, daß das Austauschpotential G_μ nicht nur in das modifizierte kinetische Feld $'k_\mu$ eingeht, sondern auch eine wichtige Rolle bei den Wirbelgleichungen für die Komponenten $Q_{a\mu}$ und $N_{a\mu}$ des Hamiltonians \mathcal{H}_μ spielt, die in der RTB folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{(\parallel)} Q_\nu - \nabla_\nu^{(\parallel)} Q_\mu &= l_\mu \cdot {}^{(\perp)}N_\nu - l_\nu \cdot {}^{(\perp)}N_\mu \\ &\quad + 2 \left({}^{(\perp)}Q_\mu \cdot G_\nu - {}^{(\perp)}Q_\nu \cdot G_\mu \right) \end{aligned} \quad (3.55a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{(\perp)} Q_\nu - \nabla_\nu^{(\perp)} Q_\mu &= -l_\mu \cdot {}^{(\parallel)}N_\nu + l_\nu \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu \\ &\quad - 2 \left({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot G_\nu - {}^{(\parallel)}Q_\nu \cdot G_\mu \right) \end{aligned} \quad (3.55b)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{(\parallel)} N_\nu - \nabla_\nu^{(\parallel)} N_\mu &= -l_\mu \cdot {}^{(\perp)}Q_\nu + l_\nu \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu \\ &\quad + 2 \left({}^{(\perp)}N_\mu \cdot G_\nu - {}^{(\perp)}N_\nu \cdot G_\mu \right) \end{aligned} \quad (3.55c)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{(\perp)} N_\nu - \nabla_\nu^{(\perp)} N_\mu &= l_\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q_\nu - l_\nu \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu \\ &\quad - 2 \left({}^{(\parallel)}N_\mu \cdot G_\nu - {}^{(\parallel)}N_\nu \cdot G_\mu \right) . \end{aligned} \quad (3.55d)$$

Dieses System sieht nun ziemlich kompliziert aus, aber es erlaubt, auf konsistente Weise zwei der vier Austauschfelder Null zu setzen, nämlich (${}^{(\parallel)}Q_\mu = {}^{(\perp)}N_\mu \equiv 0 \rightsquigarrow G_\mu \equiv 0$) und die anderen zwei beizubehalten (${}^{(\parallel)}N_\mu \neq 0, {}^{(\perp)}Q_\mu \neq 0$).

3.4 Die Erhaltungsgleichung

Nach der Untersuchung der Integrabilitätsbedingung (2.15) im letzten Abschnitt behandeln wir nun die Erhaltungsgleichung (2.16) für unser 2-Teilchen System. Betrachten wir zunächst den Koeffizienten L_μ des Lokalisationsfeldes (3.10b), so liefert die Erhaltungsgleichung für diesen folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu L_\mu + \frac{1}{2} (L^\mu L_\mu + l^\mu l_\mu - K^\mu K_\mu - k^\mu k_\mu) \\ + 2 \left[\left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 + {}^{(\parallel)}N_\mu \cdot {}^{(\parallel)}N^\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot {}^{(\perp)}N^\mu \right. \\ \left. - {}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q^\mu - {}^{(\perp)}Q_\mu \cdot {}^{(\perp)}Q^\mu \right] = 0 . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Oft ist es jedoch günstiger, mit dem Amplitudenfeld $L(x)$ anstatt mit dem Lokalisationsfeld L_μ zu arbeiten, und Gleichung (3.56) in $L(x)$ ausgedrückt lautet

$$\begin{aligned} \square L + \left[\left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 + \frac{1}{4} (l^\mu l_\mu - K^\mu K_\mu - k^\mu k_\mu) \right. \\ \left. + {}^{(\parallel)}N_\mu \cdot {}^{(\parallel)}N^\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot {}^{(\perp)}N^\mu \right. \\ \left. - {}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q^\mu - {}^{(\perp)}Q_\mu \cdot {}^{(\perp)}Q^\mu \right] \cdot L = 0 . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Diese Amplitudengleichung spielt eine wichtige Rolle in der RST, da sie im wesentlichen das relativistische Analogon zur Schrödingergleichung darstellt, aus der die Energieeigenwerte bestimmt werden können. (In relativistischen Theorien wie der RST sollte man besser von einem Massen-Eigenwertproblem sprechen). Dieses kann im 1-Teilchen-Fall für ein Coulomb-Feld exakt gelöst werden [22], und die Eigenwerte stimmen mit den aus der Klein-Gordon Gleichung berechneten Werten überein. Der Grund hierfür ist, daß die RST auf dem 1-Teilchen-Sektor mit der konventionellen Klein-Gordon Theorie identisch ist.

Die Amplitudengleichung enthält aber auch den zweiten Lokalisationskoeffizienten l_μ , welcher aber kein Gradientenfeld darstellt, siehe (3.41). Daher führt die Integrabilitätsbedingung zunächst nicht auf ein zweites Amplitudenfeld, das eine zweite Amplitudengleichung zuläßt, so daß wir gezwungen sind, eine Gleichung für l_μ anzugeben, die formal der Gleichung für L_μ (3.56) entspricht:

$$\nabla^\mu l_\mu + L^\mu l_\mu - K^\mu k_\mu = 0 . \quad (3.58)$$

Schließlich sollen an dieser Stelle auch die Quellgleichungen für die beiden kinetischen Felder angegeben werden

$$\nabla^\mu K_\mu + L^\mu \cdot K_\mu + l^\mu \cdot k_\mu + 4 ({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}^{(\parallel)}N^\mu + {}^{(\perp)}Q_\mu \cdot {}^{(\perp)}N^\mu) = 0 \quad (3.59a)$$

$$\nabla^\mu k_\mu + L^\mu \cdot k_\mu + l^\mu \cdot K_\mu = 0 , \quad (3.59b)$$

und ebenso die Quellgleichungen für die Austausch-Komponenten des Hamiltonians \mathcal{H}_μ

$$\nabla^\mu {}^{(\parallel)}Q_\mu - {}^{(\perp)}Q_\mu \cdot 'k^\mu + L^\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu + K^\mu \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu = 0 \quad (3.60a)$$

$$\nabla^\mu {}^{(\perp)}Q_\mu + {}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot 'k^\mu + L^\mu \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu + K^\mu \cdot {}^{(\perp)}N_\mu = 0 \quad (3.60b)$$

$$\nabla^\mu {}^{(\parallel)}N_\mu - {}^{(\perp)}N_\mu \cdot 'k^\mu + L^\mu \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu - K^\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu = 0 \quad (3.60c)$$

$$\nabla^\mu {}^{(\perp)}N_\mu + {}^{(\parallel)}N_\mu \cdot 'k^\mu + L^\mu \cdot {}^{(\perp)}N_\mu - K^\mu \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu = 0 . \quad (3.60d)$$

3.5 Die Dichte-Dynamik

Die relativistische von-Neumann-Gleichung (2.14) ist die Feldgleichung für die Dichtematrix \mathcal{I} , deren WTB-Zerlegung uns zur Gesamtdichte ρ , zur relativen Dichte q und zur Überlappungsdichte s geführt hat. Nun könnte man die Feldgleichungen für diese Dichten angeben. Es ist für das folgende aber günstiger, eine Umparametrisierung dieser Dichten vorzunehmen, und zwar folgendermaßen:

$$\rho = Z_T \cdot L^2 \quad (3.61a)$$

$$q = Z_R \cdot L^2 \quad (3.61b)$$

$$s = Z_O \cdot L^2, \quad (3.61c)$$

wodurch die *Renormalisierungs-Faktoren* Z_T, Z_R, Z_O eingeführt werden. Als Konsequenz dieser Parametrisierung kann der Intensitätsoperator \mathcal{I} geschrieben werden als

$$\mathcal{I} = \mathcal{Z} \cdot L^2 \quad (3.62)$$

mit dem Renormalisierungsoperator \mathcal{Z} , der durch die Renormalisierungsfaktoren ausgedrückt

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \left(Z_T \cdot \mathbf{1} + Z_R \cdot \mathcal{Q} + Z_O \cdot \hat{\Pi} \right) \quad (3.63)$$

lautet. Wir können nun anstatt die Dichte-Dynamik für ρ, q, s anzugeben gleich die Dynamik der Renormalisierungs-Faktoren Z_T, Z_R, Z_O verwenden:

$$\partial_\mu Z_T = Z_R \cdot l_\mu + 2Z_O \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu \quad (3.64a)$$

$$\partial_\mu Z_R = Z_T \cdot l_\mu - 2Z_O \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu \quad (3.64b)$$

$$\partial_\mu Z_O = 2 \left(Z_T \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu + Z_R \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu \right). \quad (3.64c)$$

Dieses System besitzt ein erstes Integral von der Form

$$Z_T^2 - (Z_R^2 + Z_O^2) = \sigma_*, \quad (3.65)$$

wobei der Mischungsindex σ_* eine Konstante ist, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als $\sigma_* = 0, \pm 1$ gewählt werden kann. Indem man die Dichten (3.61) in die Komponentenform (3.34) der Fierz-Identität einführt, erkennt man, daß der Wert $\sigma_* = 0$ für die reinen Zustände steht, welche demzufolge durch eine Mischungsvariable ζ und einen Mischungswinkel ξ_o auf folgende Weise parametrisiert

werden können

$$Z_T = \frac{1}{2}e^\zeta \quad (3.66a)$$

$$Z_R = \frac{1}{2}e^\zeta \cdot \cos \xi_o \quad (3.66b)$$

$$Z_O = \frac{1}{2}e^\zeta \cdot \sin \xi_o . \quad (3.66c)$$

Für $\sigma_* = +1$ liegen positive Gemische vor, hier bietet sich folgende Parametrisierung an:

$$Z_T = \cosh \zeta \quad (3.67a)$$

$$Z_R = \sinh \zeta \cdot \cos \xi_o \quad (3.67b)$$

$$Z_O = \sinh \zeta \cdot \sin \xi_o , \quad (3.67c)$$

und für die negativen Gemische $\sigma_* = -1$ gilt entsprechend

$$Z_T = \sinh \zeta \quad (3.68a)$$

$$Z_R = \cosh \zeta \cdot \cos \xi_o \quad (3.68b)$$

$$Z_O = \cosh \zeta \cdot \sin \xi_o . \quad (3.68c)$$

Für die folgenden Berechnungen ist es günstig, alle drei Fälle in einer Formel zusammenzufassen:

$$Z_{II} \doteq \sqrt{Z_R^2 + Z_O^2} \quad (3.69)$$

so daß man für alle drei Fälle schreiben kann

$$Z_R = Z_{II} \cdot \cos \xi_o \quad (3.70a)$$

$$Z_O = Z_{II} \cdot \sin \xi_o \quad (3.70b)$$

mit

$$Z_T^2 - Z_{II}^2 = \sigma_* , \quad (3.71)$$

was auch durch Figur 3.1 veranschaulicht wird.

Der interessante Punkt bei dieser dreifachen Unterteilung des Dichtekonfigurationsraumes liegt in der Tatsache, daß die reinen Zustände, obwohl sie kinematisch getrennt sind von den Mischungen, durch diese mit unbegrenzter Genauigkeit angenähert werden können, indem der Grenzprozeß $\zeta \rightarrow \infty$ vollzogen wird. Ob dieser Prozess auch durch die Dynamik erlaubt wird und wie das Verhältnis zwischen Mischungen und reinen Zuständen aussieht, erfordert aber eine separate Untersuchung.

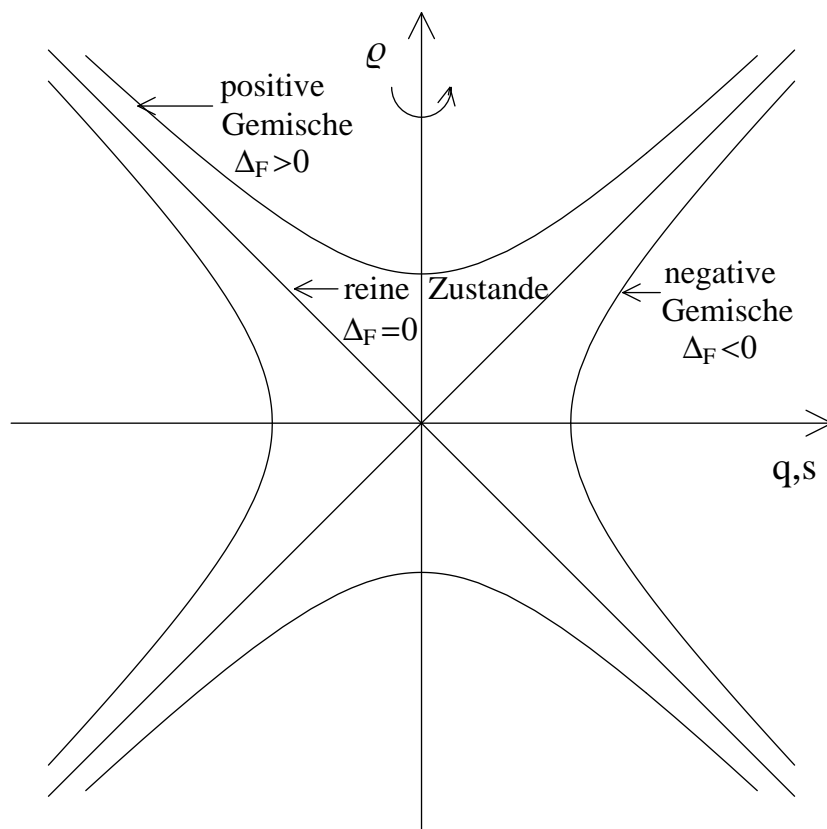


Abbildung 3.1: Dichtekonfigurationsraum für ein 2-Teilchen System. Die Figur ist rotations-symmetrisch zur ρ -Achse, es ist die Fierz-Abweichung (3.11) $\Delta_F = \rho^2 - (q^2 + s^2) = \text{const.}$ aufgetragen.

Die Fierz-Identität (2.9) liefert eine algebraische Bedingung für die reinen Zustände, die demzufolge eine reduzierte Zahl von Freiheitsgraden besitzen müssen. Andererseits erkennt man an Figur 1, daß die reinen Zustände den 2-dimensionalen Fierz-Kegel besetzen und die Mischungen 2-dimensionale Hyperboloide, daß also sowohl Mischungen als auch reine Zustände die selbe Zahl von Freiheitsgraden besitzen. Aber dies kann nicht zutreffen, da die reinen Zustände als Grenzkonfiguration $\zeta \rightarrow \infty$ angesehen werden können, und deshalb die interne Variable ζ für die Beschreibung der reinen Zustände verschwinden muß. Wie kann man sich dieses Verschwinden von ζ erklären? Ein erster Hinweis kommt von der Kombination der Reparametrisierungen (3.33a)-(3.33e) und (3.61a)-(3.61c) mit (3.62) für die Dichten (ρ, q, s) im Falle reiner Zustände:

$$\rho \Rightarrow L_1^2 + L_2^2 = e^\zeta \cdot L^2 \doteq L^2 \quad (3.72a)$$

$$q \Rightarrow L_1^2 - L_2^2 = e^\zeta \cdot L^2 \cos \xi_o = L^2 \cdot \cos \xi_o \quad (3.72b)$$

$$s \Rightarrow 2L_1L_2 = e^\zeta \cdot L^2 \sin \xi_o = L^2 \sin \xi_o . \quad (3.72c)$$

Offensichtlich kann man ζ für reine Zustände zum Verschwinden bringen, wenn man es in gemeinsam mit dem Amplitudenfeld L in ein *modifiziertes* Amplitudenfeld $\mathring{L}^2 (= e^\zeta \cdot L^2)$ hineinabsorbiert, welches die richtige Variable für die Beschreibung der Lokalisationseigenschaften des 2-Teilchen Systems ist. Als Folge hiervon ist es möglich, alle 2-Teilchen Gleichungen in einer Form zu schreiben, welche sowohl den Mischungsindex σ_* als auch die Mischungsvariable ζ und das Amplitudenfeld \mathring{L} enthält, so daß die reinen Zustände erreicht werden, indem entweder σ_* gleich Null gesetzt wird, oder man ζ gegen Unendlich gehen läßt. Die übrigen Variablen \mathring{L} und ξ_o sind dann ausreichend, um die reinen Zustände zu beschreiben. Auch für die Gemische ist es vorteilhaft, ein solches modifiziertes Amplitudenfeld einzuführen, das dann definiert wird als

$$\mathring{L} = \sqrt{Z_{II}} L . \quad (3.73)$$

Die Einführung von ζ und ξ_o erfordert das Aufsuchen der zugehörigen Feldgleichungen für diese beiden Variablen. Hierbei erweist es sich als günstig, wenn man zunächst die beiden Hamilton'schen Koeffizienten l_μ und ${}^{(II)}N_\mu$ in zwei neue Vektoren g_μ, h_μ

$$g_\mu = 2 {}^{(II)}N_\mu \cdot \cos \xi_o - l_\mu \cdot \sin \xi_o \quad (3.74a)$$

$$h_\mu = 2 {}^{(II)}N_\mu \cdot \sin \xi_o + l_\mu \cdot \cos \xi_o , \quad (3.74b)$$

überführt. Aus der Renormalisierungsdynamik (3.64) ergibt sich dann für ζ und ξ_o

$$\partial_\mu \zeta = h_\mu \quad (3.75a)$$

$$\partial_\mu \xi_o = 2 ({}^{(\perp)}Q_\mu + \frac{Z_T}{2Z_{II}} \cdot g_\mu) . \quad (3.75b)$$

Mit der Einführung von zwei neuen dynamischen Größen (g_μ, h_μ) muß man auch ihre Feldgleichungen angeben, welche sich auf einfache Weise aus den entsprechenden Gleichungen für das alte Paar $(l_\mu, {}^{(II)}N_\mu)$ ableiten lassen. Die Rotationsgleichungen für dieses neue Paar von Vektoren lauten

$$\begin{aligned} \nabla_\mu g_\nu - \nabla_\nu g_\mu &= \frac{Z_T}{Z_{II}} [h_\mu \cdot g_\nu - h_\nu \cdot g_\mu] \\ &+ 4 [{}^{(\perp)}N_\mu (\cos \xi_o \cdot G_\nu + \sin \xi_o \cdot {}^{(II)}Q_\nu) \\ &- {}^{(\perp)}N_\nu \cdot (\cos \xi_o \cdot G_\mu + \sin \xi_o \cdot {}^{(II)}Q_\mu)] \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\nabla_\mu h_\nu - \nabla_\nu h_\mu = 0 . \quad (3.76b)$$

Die letzte Gleichung ist selbstverständlich trivial, da h_μ bereits als Gradientenfeld identifiziert wurde, siehe (3.75a). Auch die Quellgleichungen lassen sich angeben, wobei die Quellgleichung für h_μ durch eine Wellengleichung für ζ ersetzt werden kann, da offensichtlich $\nabla^\mu h_\mu \equiv \square \zeta$ gilt:

$$\begin{aligned} \square \zeta + \dot{L}^\mu \cdot \partial_\mu \zeta - \frac{Z_T}{Z_{II}} \left\{ \partial^\mu \zeta \cdot \partial_\mu \zeta + g^\mu g_\mu \right\} - \cos \xi_o \left(K^\mu k_\mu \right) = \\ 2 \text{}^{(\perp)} Q_\mu \cdot g^\mu + 2 \sin \xi_o \left(\text{}^{(\parallel)} Q_\mu \cdot K^\mu + \text{}^{(\perp)} N_\mu \cdot \dot{k}^\mu \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Hierbei wurde das modifizierte Lokalisationsfeld \dot{L}_μ eingeführt, welches zum modifizierten Amplitudenfeld $\dot{L}(x)$ in derselben Beziehung steht wie die entsprechenden unmodifizierten Felder (3.40), so daß gilt

$$\dot{L}_\mu = 2 \frac{\partial_\mu \dot{L}}{\dot{L}}. \quad (3.78)$$

Abschließend muß nun noch die Quellgleichung für das Vektorfeld g_μ angegeben werden, welche folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu g_\mu + \dot{L}^\mu \cdot g_\mu + \sin \xi_o \left(K^\mu k_\mu \right) \\ = -2 \text{}^{(\perp)} Q_\mu \cdot h^\mu + 2 \cos \xi_o \left(\text{}^{(\perp)} N_\mu \cdot \dot{k}^\mu + \text{}^{(\parallel)} Q_\mu \cdot K^\mu \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Schließlich müßten nun noch die Wellengleichungen für die Felder \dot{L} und ξ_o angegeben werden. Dies ist allerdings nicht nötig, da man zwei Amplitudenfelder einführen kann, die \dot{L} und ξ_o auf folgende Art verknüpfen:

$$L_1 \doteq \cos \frac{\xi_o}{2} \cdot \sqrt{Z_{II}} \cdot L \equiv \cos \frac{\xi_o}{2} \cdot \dot{L} \quad (3.80a)$$

$$L_2 \doteq \sin \frac{\xi_o}{2} \cdot \sqrt{Z_{II}} \cdot L \equiv \sin \frac{\xi_o}{2} \cdot \dot{L}. \quad (3.80b)$$

Die Einführung von zwei Amplitudenfeldern erfolgt hierbei dadurch, daß man das gesamte Amplitudenfeld L_μ bzw. \dot{L}_μ in zwei Anteile zerlegt. Diese Konstruktion ist nötig, da die beiden Einzelamplitudenfelder $L_{1\mu}$ und $L_{2\mu}$ keine Gradientenfelder sind, wie man an der Rotationsgleichung für deren Differenz $l_\mu = L_{1\mu} - L_{2\mu}$ (3.41) ablesen kann. Durch Einführung dieser neuen Felder ergeben sich zwei Amplitudengleichungen

$$\square L_1 + L_1 \cdot \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{1\mu} K_1^\mu + X_0 + W_1 \right\} = X_1 \cdot L_2 \quad (3.81a)$$

$$\square L_2 + L_2 \cdot \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{2\mu} K_2^\mu + X_0 + W_2 \right\} = X_2 \cdot L_1. \quad (3.81b)$$

Würden nun die Mischungspotentiale W_a und die Austauschpotentiale X_0 und X_a verschwinden (deren explizite Form wird später angegeben), wäre also $W_a = X_a = X_0 \equiv 0$, so wären nur zwei ungekoppelte Wellengleichungen ($a = 1, 2$) übrig:

$$\square L_a + L_a \left\{ \left(\frac{M c}{\hbar} \right)^2 - K_{a\mu} K_a{}^\mu \right\} = 0 . \quad (3.82)$$

Diese sind äquivalent zu zwei konventionellen Klein-Gordon Gleichungen

$$D^\mu D_\mu \psi_a + \left(\frac{M c}{\hbar} \right)^2 \psi_a = 0 \quad (3.83)$$

wie schon in Kapitel 2 gezeigt wurde. Diese Gleichungen sind nur durch die Eichwechselwirkung gekoppelt, die sich im Auftreten von Vektorpotentialen A_μ in der konventionellen Quantentheorie bzw. von K_μ im RST-Formalismus ausdrückt. Das Vorhandensein von Mischungspotentialen W_a und Austauschpotentialen X_a in den Amplitudengleichungen sowie das Auftreten von $G_{\mu\nu}$ in den Maxwell-Gleichungen signalisieren aber, daß ungewöhnliche, nicht auf eine Eichwechselwirkung zurückführbare Wechselwirkungen zwischen den zwei Teilchen existieren. Diese können als das Analogon zum Auftreten von verschränkten ("entangled") Zuständen in der konventionellen Theorie angesehen werden. Nun hängen die physikalischen Eigenschaften einer solchen RST-Verschränkung natürlich stark von der Gestalt der Mischungs- und Austauschpotentiale ab. Für die Mischungspotentiale findet man

$$W_1 = \frac{\sigma_*}{(2Z_{II})^2} \left\{ h^\mu h_\mu - g^\mu g_\mu - 2g^\mu h_\mu \cdot \frac{L_2}{L_1} \right\} - g_s \left(K_{1\mu} K_1{}^\mu - K_{2\mu} K_2{}^\mu \right) \quad (3.84a)$$

$$W_2 = \frac{\sigma_*}{(2Z_{II})^2} \left\{ h^\mu h_\mu - g^\mu g_\mu + 2g^\mu h_\mu \cdot \frac{L_1}{L_2} \right\} + g_s \left(K_{1\mu} K_1{}^\mu - K_{2\mu} K_2{}^\mu \right) , \quad (3.84b)$$

und für die Austauschpotentiale

$$X_0 = {}^{(\perp)}N_\mu \cdot {}^{(\perp)}N^\mu - {}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}^{(\parallel)}Q^\mu \quad (3.84c)$$

$$X_1 = \frac{Z_T}{Z_{II}} \left({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot K^\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot {}'k^\mu \right) + \left({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}'k^\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot K^\mu \right) \quad (3.84d)$$

$$X_2 = \frac{Z_T}{Z_{II}} \left({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot K^\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot {}'k^\mu \right) - \left({}^{(\parallel)}Q_\mu \cdot {}'k^\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \cdot K^\mu \right) . \quad (3.84e)$$

Hierbei wurde für die Darstellung der Mischungspotentiale W_a (3.84a)-(3.84b) von der Einführung einer Strukturfunktion Gebrauch gemacht, welche durch die Renormalisierungsfaktoren folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$g_s \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{Z_T}{Z_{II}} - 1 \right) . \quad (3.85)$$

Für spätere Zwecke ist es vorteilhaft, diese Funktion durch eine weitere Strukturfunktion g_w zu ergänzen, die folgendermaßen definiert ist

$$g_w \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{Z_T}{Z_{II}} + 1 \right) = g_s + 1, \quad (3.86)$$

so daß beide Strukturfunktionen beim Übergang zu reinen Zuständen folgende Grenzwerte annehmen

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} g_s = 0 \quad (3.87a)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} g_w = 1. \quad (3.87b)$$

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß die Mischungspotentiale W_a (3.84a)-(3.84b) beim Übergang zu reinen Zuständen verschwinden $W_a \Rightarrow 0$, und zwar entweder indem man den Mischungsindex $\sigma_* = 0$ setzt, oder indem man die Mischungsvariable gegen Unendlich gehen läßt: $\zeta \rightarrow \infty$ ($\Leftrightarrow Z_{II} \rightarrow \infty$). Also können auch in diesen neuen Gleichungen die reinen Zustände dynamisch erreicht werden, wenn die Mischungsvariable ζ asymptotisch ihren Wert für reine Zustände $\zeta = \infty$ annimmt.

Zum Abschluß sei noch angegeben, auf welche Weise sich die Einzelteilchendichten ρ_a durch die Amplituden L_a und die Strukturfunktionen g_w und g_s ausdrücken lassen:

$$\rho_1 = g_w L_1^2 + g_s L_2^2 \quad (3.88a)$$

$$\rho_2 = g_w L_2^2 + g_s L_1^2. \quad (3.88b)$$

Damit sind die Gleichungen für das 2-Teilchen System geschlossen und wir fassen die dynamischen Variablen und ihre Bestimmungsgleichungen noch einmal kurz zusammen:

- Zwei Amplitudenfelder L_a , welche den Amplitudengleichungen (3.81) genügen
- zwei kinetische Felder K_μ und $'k_\mu$, welche die Quellgleichungen (3.59) und die Maxwellgleichungen (3.42a) und (3.51) erfüllen
- die Mischungsvariable ζ , welche aus ihrer Wellengleichung (3.77) bestimmt wird
- das Vektorfeld g_μ , dessen Quelle durch (3.79) und dessen Rotation durch (3.76a) festgelegt ist

- die Austauschfelder ${}^{(\parallel)}Q_\mu$, ${}^{(\perp)}Q_\nu$, ${}^{(\parallel)}N_\mu$ und ${}^{(\perp)}N_\mu$, für welche die Quellgleichungen (3.60) und die Wirbelgleichungen (3.55) gelten

Dieses Gleichungssystem näher zu untersuchen ist die eigentliche Aufgabe dieser Doktorarbeit. Wie man sich unschwer vorstellen kann, sind Lösungen für dieses System nicht leicht zu finden. Es empfiehlt sich daher, das Gesamtproblem in Teilprobleme zu zerlegen. Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, daß man die Mischungseffekte ohne Berücksichtigung der Austauscheffekte untersucht, daß man also die Austauschpotentiale $X_a, X_0 \equiv 0$ setzt (Mischungsentartung [25, 26, 27]). Dieser Fall wird im nächsten Kapitel behandelt. Eine andere Vereinfachung des Gleichungssystems besteht in der Vernachlässigung der Mischungsfreiheitsgrade (\Rightarrow Annahme eines reinen Zustandes) aber unter Beibehaltung der Austausch-Felder (Austausch-Entartung [28]), siehe Kapitel 5.

Kapitel 4

Die Mischungsentartung

In diesem Kapitel wird ausschließlich die Mischungsdynamik untersucht, es werden also alle Austauschfelder ${}^{(\parallel)}Q_\mu$, ${}^{(\perp)}Q_\mu$, ${}^{(\parallel)}N_\mu$ und ${}^{(\perp)}N_\mu \equiv 0$ gesetzt. Diese Vereinfachung gestattet es, eine Integrationskonstante über der Raumzeit (den Mischungsparameter C_*) einzuführen, welche den “Abstand” der 2-Teilchen-Konfiguration von einem reinen Zustand angibt ($C_* = \infty$: reiner Zustand), siehe Abschnitt 1.

Im darauffolgenden Abschnitt wird diese Tatsache ausgenutzt, um eine Störungsentwicklung um die reinen Zustände aufzubauen, wobei die elektrostatische Interteilchenwechselwirkung mit berücksichtigt wird. Man stellt dabei fest, daß die Dichten (3.88), welche aus den Amplitudenfunktionen nullter Ordnung (d.h. für reine Zustände) gebildet werden, Separations- und Fusionseffekten unterliegen, wenn man den Mischungsparameter C_* variiert. Hierbei wird aber nicht berücksichtigt, daß sich bei Variation von C_* auch die Amplitudenfunktionen selbst verändern, aus denen wiederum die Dichten gebildet werden. Die Bestimmung der veränderten Amplitudenfunktionen ist bei der hier gewählten Störungsentwicklung jedoch schwierig, da es zwei Entwicklungsparameter (nämlich $1/C_*$ für den Mischungseffekt sowie die Feinstrukturkonstante α_* für die elektromagnetische Wechselwirkung) gibt.

Daher wird in Abschnitt 3 die Interteilchenwechselwirkung vernachlässigt, also allein der Mischungseffekt berücksichtigt. Durch diese Vernachlässigung und die Verwendung einer speziellen Methode (Dalgarno-Lewis) wird es möglich, die Amplitudenkorrekturen erster Ordnung exakt zu berechnen und die korrigierten Amplitudenfelder zur Bildung der Dichten (3.88) heranzuziehen. Dabei stellt man

fest, daß die Separations- und Fusionseffekte der Dichten durch die korrigierten Amplitudenfelder gerade kompensiert werden, so daß die Dichten (in der Ordnung $1/C_*^2$) gerade invariant bleiben.

Schließlich wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt (indem man eine Transformationsgruppe, die Mischungsgruppe, einführt), daß die Dichten nicht nur in dieser Störungsordnung invariant bleiben, sondern daß ihre Gestalt überhaupt nicht vom Mischungsparameter C_* abhängt. Da die Dichten die physikalisch relevanten Größen des Systems sind, bedeutet dies, daß ein System, welches Mischungseffekten unterliegt, ohne daß Austauschfelder auftreten, nicht von einem System, in dem reine Zustände vorliegen, unterschieden werden kann (Mischungsentartung).

4.1 Der Mischungsparameter C_*

Vernachlässigt man die Austauschfelder, so stellt man zunächst fest, daß die Austauschfeldstärke $G_{\mu\nu}$ (2.44) verschwindet und damit die Maxwell-Gleichungen (3.42) für die beiden Felder $K_{a\mu}$ ihre übliche Form annehmen:

$$\nabla_\mu K_{a\nu} - \nabla_\nu K_{a\mu} = F_{a\mu\nu} . \quad (4.1)$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich in Abhängigkeit von einem Skalarfeld $\alpha_a(x)$ und dem externen Eichpotential ${}^{(ex)}A_\mu$ sowie dem Wechselwirkungspotential der Teilchen untereinander $'A_{a\mu}$ formal schreiben als

$$K_{a\mu} = \partial_\mu \alpha_a + {}^{(ex)}A_\mu - 'A_{a\mu} \quad (4.2)$$

$$(a = 1, 2) .$$

Außerdem ermöglicht die Annahme verschwindender Austauschfelder die Einführung eines Skalarfeldes χ , welches das Vektorfeld g_μ (3.74a) in analoger Weise erzeugt wie die Mischungsvariable ζ (3.75a) das Vektorfeld h_μ (3.74b). Diese Behauptung kann sofort überprüft werden, indem man die Wirbelgleichung für g_μ (3.76a) betrachtet, welche sich im vorliegenden Fall zu

$$\nabla_\mu g_\nu - \nabla_\nu g_\mu = \frac{Z_T}{Z_{II}} (h_\mu g_\nu - h_\nu g_\mu) \quad (4.3)$$

vereinfacht. Diese vereinfachte Form erlaubt es offensichtlich, als formale Lösung für g_μ anzusetzen

$$g_\mu = Z_{II} \cdot \partial_\mu \chi \quad (4.4)$$

was obige Behauptung bestätigt. Hat man nun das Skalarfeld χ eingeführt, so kann man die Quellgleichung für g_μ in eine Wellengleichung für das neue Skalarfeld χ umformen:

$$\square\chi + L^\mu \cdot \partial_\mu\chi + \frac{Z_T}{Z_{II}} \partial^\mu\zeta \cdot \partial_\mu\chi + 2 \frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \cdot \frac{K^\mu k_\mu}{Z_{II}} = 0. \quad (4.5)$$

Durch das Nullsetzen der Austauschfelder nimmt die Wellengleichung für die Mischungsvariable ζ (3.77) eine ähnliche Form an, nämlich

$$\square\zeta + L^\mu \cdot \partial_\mu\zeta - \frac{Z_T}{Z_{II}} \left(\partial^\mu\zeta \cdot \partial_\mu\zeta + Z_{II}^2 \partial^\mu\chi \cdot \partial_\mu\chi - \frac{L_1^2 - L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} (K^\mu k_\mu) \right) = 0. \quad (4.6)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß man aus den Beziehungen (3.80a) und (3.80b) folgende Gleichungen ableiten kann:

$$\sin \xi_o = 2 \frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \quad (4.7a)$$

$$\cos \xi_o = \frac{L_1^2 - L_2^2}{L_1^2 + L_2^2}. \quad (4.7b)$$

Nun besteht ein große Vereinfachung für die reinen Mischungskonfigurationen darin, daß die Gleichungen (4.5)-(4.6) nicht benötigt werden! Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß sowohl ζ als auch χ durch die Amplitudenfelder L_1 und L_2 ausgedrückt werden können, sodaß die Wellengleichungen für χ und ζ automatisch erfüllt sind, wenn die entsprechenden Amplitudengleichungen (3.81) gelten, die für verschwindende Austauschfelder folgendermaßen aussehen:

$$\square L_1 + L_1 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{1\mu} K_1^\mu + W_1 \right\} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\square L_2 + L_2 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{2\mu} K_2^\mu + W_2 \right\} = 0. \quad (4.8b)$$

Der Grund für dieses Ergebnis liegt in der Renormalisierungsgleichung (3.64c), welche den Renormalisierungsfaktor Z_O als eine Konstante über der Raumzeit festlegt:

$$Z_O = \text{const.} (\doteq C_*). \quad (4.9)$$

Ist nun aber Z_O konstant, so ist der Überlappungswinkel ξ_o fest mit der Mischungsvariable ζ verbunden, siehe (3.70b):

$$Z_{II}(\zeta) = \frac{C_*}{|\sin \xi_o|} = C_* \cdot \left| \frac{L_1^2 + L_2^2}{2L_1 L_2} \right|. \quad (4.10)$$

Also ist die Mischungsvariable ζ eindeutig durch die Amplituden L_a und den Mischungsindex C_* bestimmt.

Andererseits läßt sich aus dem Verschwinden der beiden Austauschfelder ${}^{(\parallel)}N_\mu$ und ${}^{(\perp)}Q_\mu$ folgendes System für die beiden Skalarfelder ζ und χ ableiten, (durch Auflösen des Systems (3.74) nach ${}^{(\parallel)}N_\mu$ und von (3.75b) nach ${}^{(\perp)}Q_\mu$)

$${}^{(\parallel)}N_\mu \equiv \frac{1}{2} \left(\cos \xi_o Z_{II} \cdot \partial_\mu \chi + \sin \xi_o \cdot \partial_\mu \zeta \right) = 0 \quad (4.11a)$$

$$2 {}^{(\perp)}Q_\mu \equiv \partial_\mu \xi_o - Z_T \partial_\mu \chi = 0. \quad (4.11b)$$

Die Lösung dieses Systems ist nun leicht zu finden. Sie lautet

$$\cos \xi_o = \frac{L_1^2 - L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} = - \begin{cases} \sqrt{C_*^2 + 1} \cdot \sin(\chi - \chi_*); & \sigma_* = +1 \\ \sqrt{C_*^2 - 1} \cdot \sinh(\chi - \chi_*); & \sigma_* = -1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Also ist auch das Skalarfeld χ (bis auf eine Integrationskonstante χ_*) durch die Amplitudenfelder L_a festgelegt. Als Folge dieser Festlegung der beiden Felder ζ und χ durch die L_a kann man auf die Betrachtung der Wellengleichungen für χ (4.5) und ζ (4.6) verzichten. Damit die Amplitudenfelder ein abgeschlossenes System bilden, müssen nun noch die Mischungspotentiale W_a (3.84) durch die Amplitudenfelder ausgedrückt werden:

$$W_1 = \sigma_* \frac{L_1^2 - 3L_2^2}{(L_1^2 + L_2^2)} \cdot \frac{(L_1 \partial_\mu L_2 - L_2 \partial_\mu L_1) (L_1 \partial^\mu L_2 - L_2 \partial^\mu L_1)}{\sigma_* (2L_1 L_2)^2 + C_*^2 (L_1^2 + L_2^2)^2} - g_s [K_{1\mu} K_1^\mu - K_{2\mu} K_2^\mu] \quad (4.13a)$$

$$W_2 = \sigma_* \frac{L_2^2 - 3L_1^2}{(L_1^2 + L_2^2)} \cdot \frac{(L_1 \partial_\mu L_2 - L_2 \partial_\mu L_1) (L_1 \partial^\mu L_2 - L_2 \partial^\mu L_1)}{\sigma_* (2L_1 L_2)^2 + C_*^2 (L_1^2 + L_2^2)^2} + g_s [K_{1\mu} K_1^\mu - K_{2\mu} K_2^\mu]. \quad (4.13b)$$

Außerdem muß die Strukturfunktion g_s (3.85) ausschließlich durch die Amplitudenfelder ausgedrückt werden können:

$$g_s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\sigma_*}{C_*^2} \frac{L_1^2 L_2^2}{(L_1^2 + L_2^2)^2}} - 1 \right). \quad (4.14)$$

Auf diese Weise liefert die Mischungsdynamik ein geschlossenes System für die Amplitudenfelder, da die kinetischen Felder ausschließlich das äußere Potential

enthalten, wenn man auf die Interteilchenwechselwirkung $'A_{a\mu}$ verzichtet. Leider stellen die Mischungspotentiale W_a (4.13) stark nichtlineare Funktionen der Amplituden und ihrer Ableitungen dar, und es scheint völlig aussichtslos, exakte Lösungen für dieses gekoppelte Amplitudengleichungssystem (4.8) bei festgelegtem Mischungsparameter C_* zu finden. Am Ende dieses Kapitels wird aber eine Transformation angegeben, die es erlaubt, *exakte Lösungen* für dieses System anzugeben, wenn die Lösungen für reine Zustände $C_* \rightarrow \infty$ (3.82) (d.h. für zwei vollständig entkoppelte Klein-Gordon Gleichungen) als bekannt vorausgesetzt werden.

Diese Transformation stellt jedoch den Schlußpunkt einer Reihe von Untersuchungen an diesem Gleichungssystem dar, die hier vorgestellt werden sollen. Zunächst bietet sich natürlich eine Störungsentwicklung um die reinen Zustände $C_* = \infty$ an (siehe [25, 26]), die exakte Lösung wird später, in Abschnitt 4.4, behandelt.

4.2 Störungstheoretische Entwicklung um die reinen Zustände

Eine störungstheoretische Behandlung von gebundenen 2-Teilchen Systemen ist im vorliegenden Fall auf zwei Arten möglich: Zunächst kann man die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den zwei Teilchen, die durch ein externes Potential gebunden sind, als Störung ansehen, wie dies auch in der konventionellen Quantenmechanik geschieht. Die ungestörte Situation besteht dann aus zwei nicht-wechselwirkenden Teilchen in einem externen Potential und kann als Ausgangspunkt für eine Störungsentwicklung verwendet werden. Andererseits kann man den Mischungseffekt als eine Störung der reinen Zustände ansehen. Da die Einführung des Mischungsparameters C_* (4.9) im Falle verschwindender Austauschfelder es erlaubt, den Mischungseffekt kontinuierlich ein- und auszuschalten ($C_* \rightarrow \infty$: reine Zustände) könnte man an eine Störungsentwicklung in Abhängigkeit von Potenzen von C_* denken. Im Gegensatz zu dieser Störungsentwicklung basiert die Störungsentwicklung im Hinblick auf die Interteilchenwechselwirkung auf der elektromagnetischen Kopplungskonstante $\alpha_* \doteq \frac{e^2}{\hbar c}$. Im folgenden werden beide Störungseffekte in erster Näherung gemeinsam behandelt.

Wie in der Störungstheorie üblich, setzt man alle auftretenden Felder als Summe von individuellen Termen zusammen, deren Größe von Ordnung zu Ordnung

abnimmt. Man schreibt dann für die Amplitudenfelder

$$L_a(x) = {}^{(0)}L_a(x) + {}^{(1)}L_a(x) + {}^{(2)}L_a(x) + \dots \quad (4.15)$$

und für die kinetischen Felder

$$K_a(x) = {}^{(0)}K_a(x) + {}^{(1)}K_a(x) + {}^{(2)}K_a(x) + \dots \quad (4.16)$$

Wenn man die Amplitudenzerlegungen (4.15) in die Amplitudengleichungen einsetzt, so liegt in niedrigster Ordnung (${}^{(0)}L_a(x)$) der Reine-Zustands-Fall vor, d.h.

$$\square {}^{(0)}L_a + {}^{(0)}L_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - {}^{(0)}K_{a\mu} \cdot {}^{(0)}K_a{}^\mu \right\} = 0 \quad (4.17)$$

Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß das kinetische Feld die Interteilchenwechselwirkung in niedrigster Ordnung nicht spürt, d.h. daß man in dieser Ordnung setzen kann

$${}^{(0)}K_{a\mu} = \partial_\mu {}^{(0)}\alpha_a + {}^{(ex)}A_\mu \quad (4.18)$$

Für eine statische, radialsymmetrische Feldkonfiguration macht man für das Vektorpotential ${}^{(ex)}A_\mu$ den Ansatz

$${}^{(ex)}A_\mu = A_{ex}(r) \cdot \hat{t}_\mu \quad (4.19)$$

wobei r die Radialkoordinate bezeichnet und $\hat{t}_\mu (\doteq \partial_\mu x^0)$ einen Einheitsvektor in Zeitrichtung ($\hat{t}^\mu \hat{t}_\mu = +1$) beschreibt. Beispielsweise gilt für das Couplombpotential mit z_{ex} Ladungseinheiten, welche am Ursprung $r = 0$ lokalisiert sind

$$A_{ex}(r) = z_{ex} \frac{\alpha_*}{r} \quad (4.20)$$

Es ist klar, daß für eine solche symmetrische Situation die Phasenwinkel $\alpha_a(x)$ von der Zeitkoordinate x^0 nur auf folgende Weise abhängen können

$${}^{(0)}\alpha_a(x) = \frac{M_a c}{\hbar} \cdot x^0, \quad (4.21)$$

wobei die Integrationskonstanten M_a die *Massen-Eigenwerte* der gebundenen Teilchen beschreiben. Als eine Konsequenz dieser Symmetrieforderungen müssen die kinetischen Felder in nullter Ordnung folgendermaßen aussehen

$${}^{(0)}K_a(r) = \frac{{}^{(0)}M_a \cdot c}{\hbar} + z_{ex} \frac{\alpha_*}{r}, \quad (4.22)$$

wobei ${}^{(0)}M_a$ die Massen-Eigenwerte in nullter Ordnung beschreiben. Für die so vereinfachte Situation lautet die statische Form der Amplitudengleichungen (4.17)

$$-\Delta {}^{(0)}L_a + {}^{(0)}L_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - ({}^{(0)}K_a)^2 \right\} = 0 . \quad (4.23)$$

Diese erlauben die wohlbekannten Energie-Eigenfunktionen ${}^{(0)}L_n(r)$ des relativistischen (skalaren) Wasserstoffatoms

$${}^{(0)}L_a(r) = \hat{L} \cdot \sqrt{\frac{z_{ex}^3}{\pi a_B^3}} \cdot L_a(y) . \quad (4.24)$$

$$(y \doteq z_{ex} \frac{r}{a_B})$$

als Lösung. Die Eigenfunktionen $L_n(y)$ bestehen aus einem Produkt aus Laguerre-Polynomen und einem Exponentialanteil. Sie können in jedem Lehrbuch über relativistische Quantenmechanik nachgeschlagen werden (z.B. [29]). Darüberhinaus bezeichnet \hat{L} eine Normierungskonstante, für welche im Falle der reinen Zustände ($\sigma_* = 0$) gilt: $\hat{L} \Rightarrow 1$, aber welche im allgemeinen vom Mischungsparameter C_* abhängt. Schließlich bezeichnet $a_B (\doteq \frac{\hbar^2}{Me^2})$ den Bohr'schen Radius.

Da unser Hauptinteresse den Mischungseffekten gilt und nicht den relativistischen Korrekturen, können wir uns mit der nicht-relativistischen Näherung der Eigenfunktionen $L_n(y)$ zufriedengeben, welche dann z.B. für den 1-Teilchen Grundzustand ($1s$) lauten

$$L_1(y) = \exp(-y) , \quad (4.25)$$

oder für den ersten angeregten Zustand

$$L_2(y) = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \left(1 - \frac{y}{2} \right) \exp\left(-\frac{y}{2}\right) . \quad (4.26)$$

Entsprechend sind auch die Massen-Eigenwerte ${}^{(0)}M_a$ im relativistischen Fall bekannt, aber im nichtrelativistischen Grenzfall begnügen wir uns mit den nicht-relativistischen Bindungsenergien ${}^{(0)}E_{B,a}$, welche in niedrigster Ordnung lauten

$${}^{(0)}E_{B,1} = (M - {}^{(0)}M_1) \cdot c^2 \cong \frac{1}{2} z_{ex}^2 \frac{e^2}{a_B} \quad (4.27a)$$

$${}^{(0)}E_{B,2} = (M - {}^{(0)}M_2) \cdot c^2 \cong \frac{1}{8} z_{ex}^2 \frac{e^2}{a_B} . \quad (4.27b)$$

Die eben besprochenen Resultate für die nullte Störungsordnung sind bereits ausreichend, um einige Besonderheiten der RST bezüglich der Dichten ρ_a aufzuzeigen. Die physikalische Bedeutung dieser Dichten leitet sich aus der Tatsache ab,

daß diese die Vektorpotentiale $'A_{a\mu}$ der elektromagnetischen Interteilchenwechselwirkung über die Ströme $j_{a\mu}$ erzeugen (vgl. (3.42), Lorentz-Eichung $\nabla^\mu A_\mu = 0$):

$$\square'A_{a\mu} = 4\pi\alpha_*j_{a\mu} . \quad (4.28)$$

Man kann nun leicht zeigen, daß diese Potentiale $'A_{a\mu}(\Rightarrow' A_a(r) \cdot \hat{t}_\mu)$ in erster Störungsordnung in Abhängigkeit von den skalaren Dichten geschrieben werden können als

$$'A_a^{(1)}(r) = \alpha_* \int dV' \frac{{}^{(0)}\rho_a(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (4.29)$$

Hierbei werden die Dichten in nullter Ordnung ${}^{(0)}\rho_a$ erzeugt, indem man die Amplituden nullter Ordnung ${}^{(0)}L_a$ (4.24) in die Gleichungen (3.88) einsetzt. Die daraus resultierenden Einzelteilchen-Potentiale $'A_a^{(1)}$ werden dann als Objekte erster Ordnung angesehen und gehen in die Korrekturen erster Ordnung für die kinetischen Felder folgendermaßen ein:

$${}^{(1)}K_1(r) = \frac{{}^{(1)}M_1 c}{\hbar} - 'A_2^{(1)}(r) \quad (4.30a)$$

$${}^{(1)}K_2(r) = \frac{{}^{(1)}M_2 c}{\hbar} - 'A_1^{(1)}(r) . \quad (4.30b)$$

Da diese Potentiale selbst wieder in die Wellengleichungen (4.8) eingehen, ist der Einfluß der Dichten auf die Massen-Energieeigenwert-Korrekturen ${}^{(1)}M_a$ klar ersichtlich. Diese Korrekturen können aus den Amplitudengleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} -\Delta {}^{(1)}L_a + {}^{(1)}L_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - ({}^{(0)}K_a)^2 \right\} = \\ 2 {}^{(0)}L_a ({}^{(0)}K_a \cdot {}^{(1)}K_a) - {}^{(1)}W_a^b \cdot {}^{(0)}L_b \end{aligned} \quad (4.31)$$

berechnet werden, in welche selbstverständlich auch die Korrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}K_a$ (4.30) für die kinetischen Felder eingehen. Die Mischungspotentiale erster Ordnung ${}^{(1)}W_{ab}$ werden dabei berechnet, indem man die Amplituden nullter Ordnung ${}^{(0)}L_a$ in die Definitionsgleichungen für die W_{ab} (4.13) einsetzt.

Nachdem nun die Rolle der Dichten ${}^{(0)}\rho_a$ bei der Berechnung der Massen-Energiekorrekturen erster Ordnung klar geworden ist, ist noch ein weiterer wichtiger Punkt diese Dichten betreffend zu erwähnen: Wenn man den Mischungsparameter C_* von Unendlich (reine Zustände) bis zu seinem minimal möglichen Wert laufen läßt ($C_- = 1$ für die negativen Gemische ($\sigma_* = -1$) und $C_+ = 0$ für die positiven Gemische ($\sigma_* = +1$)), so verformen sich die Dichten gemäß (3.88). Für die

reinen Zustände stimmen die Dichten ${}^{(0)}\rho_a$ mit den Quadraten $({}^{(0)}L_a)^2$ der Amplituden überein, da die Strukturfunktion g_w (3.86) hier gleich eins ist und g_s (3.85) verschwindet (siehe Abbildung 4.1). Mit abnehmendem Mischungsparameter C_* entwickeln sich die Dichten aber deutlich von ihrer ursprünglichen Gestalt weg, und diese Gestaltänderung findet für beide Gemische auf sehr unterschiedliche Weise statt:

(i) bei den positiven Gemischen gleichen sich beide Dichten immer mehr an, bis sie identisch werden (${}^{(0)}\rho_1 \equiv {}^{(0)}\rho_2$), wenn C_* seinen Minimalwert $C_+ = 0$ annimmt (Fusion der Dichten, siehe Abbildung 4.3).

(ii) bei den negativen Gemischen drängen sich beide Dichten voneinander weg, und versuchen, nicht überlappende Regionen im 3-dimensionalen Raum anzunehmen, so daß eine vollständige Trennung der Dichten im Grenzfall $C_- = 1$ vorliegt (siehe Abbildung 4.2).

Diese Dichotomie beim Verhalten der von der RST beschriebenen Materiefelder erinnert stark an die Fermion-Boson-Dichotomie der Materie in der konventionellen Quantentheorie. Dort besagt das Pauli-Prinzip, daß 1-Teilchen Wellenfunktionen von Fermionen sich nur mit geringer Wahrscheinlichkeit in denselben Regionen des 3-dimensionalen Raums aufhalten, wohingegen die Wellenfunktionen von Bosonen dazu neigen, in eine einzige Wellenfunktion zu verschmelzen (Bose-Einstein Kondensation). Solch eine Dichotomie im Verhalten der Materie muß sich zwangsläufig auch in experimentellen Daten niederschlagen, z.B. wenn zwei Teilchen sich durch die Wirkung einer anziehenden äußeren Kraft in einem gebundenen Zustand befinden. Hierbei wird man vermuten, daß Materie, die sich wie Fermionen verhält, einen niedrigeren Energiezustand annimmt als bosonische Materie, da (klassisch gesprochen) die Ladungsseparation die elektrostatische Bindungsenergie verringert, wohingegen die Ladungsfusion die Wechselwirkungsenergie der Bosonen erhöht. Dieses Verhalten trifft in der konventionellen Quantentheorie zu und ist auch in der RST realisiert, wird aber erst in Kapitel 7 behandelt.

Es sei hier aber darauf hingewiesen, daß das oben dargestellte Verhalten nur für die nullte Ordnung der Dichten ${}^{(0)}\rho_a$ (3.88) gilt, welche aus den Amplituden nullter Ordnung ${}^{(0)}L_a$ (4.24) gebildet werden. Die Dichten ρ_a , welche aus den exakten Lösungen L_a des Systems (4.8) gebildet werden, zeigen dieses Verhalten *nicht*. Diese bleiben für *jeden* Wert von C_* invariant (\rightsquigarrow Mischungsentartung s.u.). Man kann aber zeigen, daß bei der Lösung des vollen Problems (4.8) die

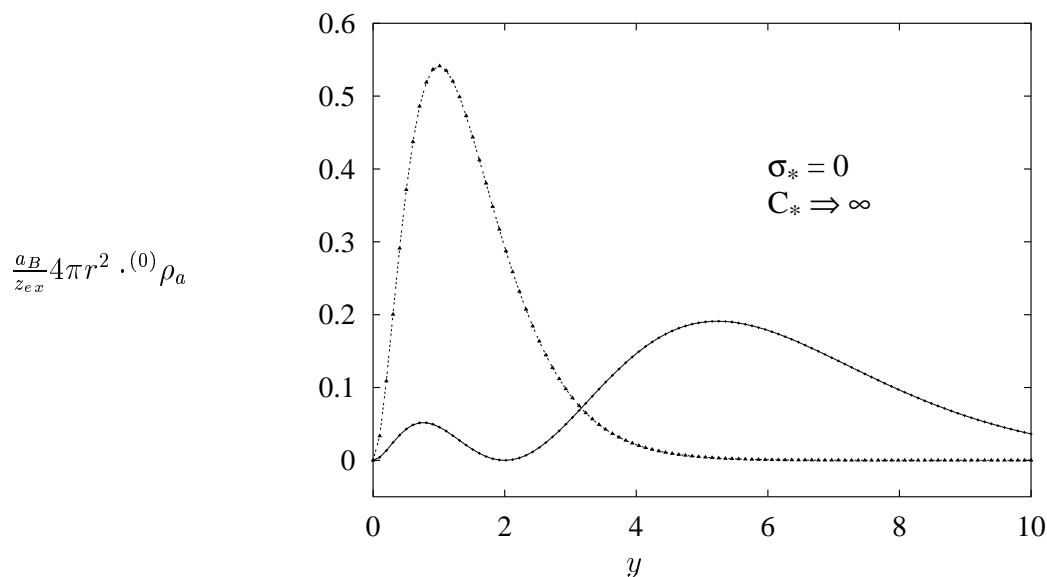


Abbildung 4.1: Für die reinen Zustände ($\sigma_* = 0$ oder $C_* \Rightarrow \infty$) stimmen beide Ladungsverteilungen ${}^{(0)}\rho_a$ (3.88) mit den Quadraten der Amplituden ${}^{(0)}L_a^2$ (4.25) und (4.26) überein.

Amplituden L_a genau das Verhalten der Dichten nullter Ordnung ${}^{(0)}\rho_a$, also Fusion und Separation, zeigen (Mischungsgruppe, s.u.).

Zum Abschluß dieser störungstheoretischen Betrachtung sind noch die Massen-Eigenwerte zu bestimmen. Setzt man voraus, daß das vorliegende 2-Teilchen Massen-Eigenwertproblem eine Lösung besitzt (was zutrifft, s.u.), nimmt die Störungsentwicklung der kinetischen Felder die Form der exakten Lösungen an:

$$K_1(r) = \frac{M_1 c}{\hbar} + A_{ex}(r) - {}'A_2(r) \quad (4.32a)$$

$$K_2(r) = \frac{M_2 c}{\hbar} + A_{ex}(r) - {}'A_1(r) \quad (4.32b)$$

und damit wären beide Eigenwerte M_a bekannt. Außerdem kennt man die Massen-Eigenwerte nullter Ordnung ${}^{(0)}M_a$, die bei ausgeschalteten elektromagnetischen und Mischungsspezifischen Interteilchenwechselwirkungen auftreten, d.h. für $'A_a \equiv 0$ und $C_* \rightarrow \infty$. Die Gesamtmasse M_{12} des 2-Teilchen Systems mit eingeschalteten Interteilchenwechselwirkungen kann man definieren als

$$M_{12} = \frac{1}{2} \left\{ {}^{(0)}M_1 + M_1 + {}^{(0)}M_2 + M_2 \right\}. \quad (4.33)$$

Dies scheint eine plausible Annahme zu sein, da M_{12} im Fall verschwindender Interteilchenwechselwirkungen $M_a \Rightarrow {}^{(0)}M_a$ die Summe der individuellen Massen-Eigenwerte ${}^{(0)}M_a$ bildet. Außerdem wird die Interteilchen-Wechselwirkung ($M_{12} -$

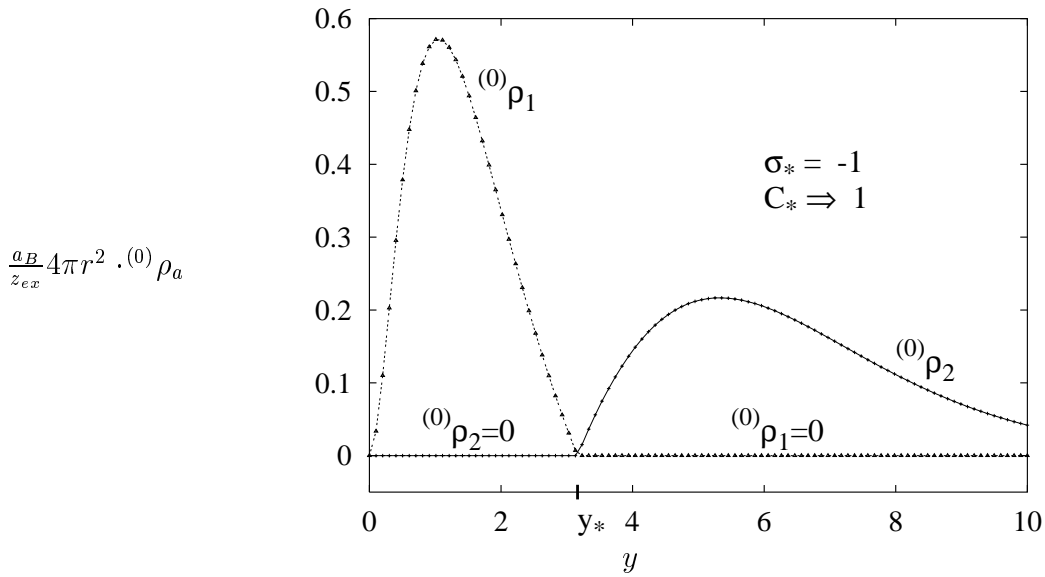


Abbildung 4.2: Für negative Gemische tritt für den Fall, daß C_* seinen Minimalwert $C_- = 1$ annimmt, eine vollständige Separation der Ladungen ein. Die erste Ladung ist auf den Innenbereich $y < y_*$ ($= 3.1633$) beschränkt: ${}^{(0)}\rho_1 \neq 0$, ${}^{(0)}\rho_2 \equiv 0$, während das zweite Teilchen nicht in diesen Bereich eindringen kann. Umgekehrt kann das erste Teilchen nicht in den Außenbereich $y > y_*$ eindringen, da dieser ausschließlich dem zweiten Teilchen vorbehalten ist: ${}^{(0)}\rho_1 \equiv 0$, ${}^{(0)}\rho_2 \neq 0$.

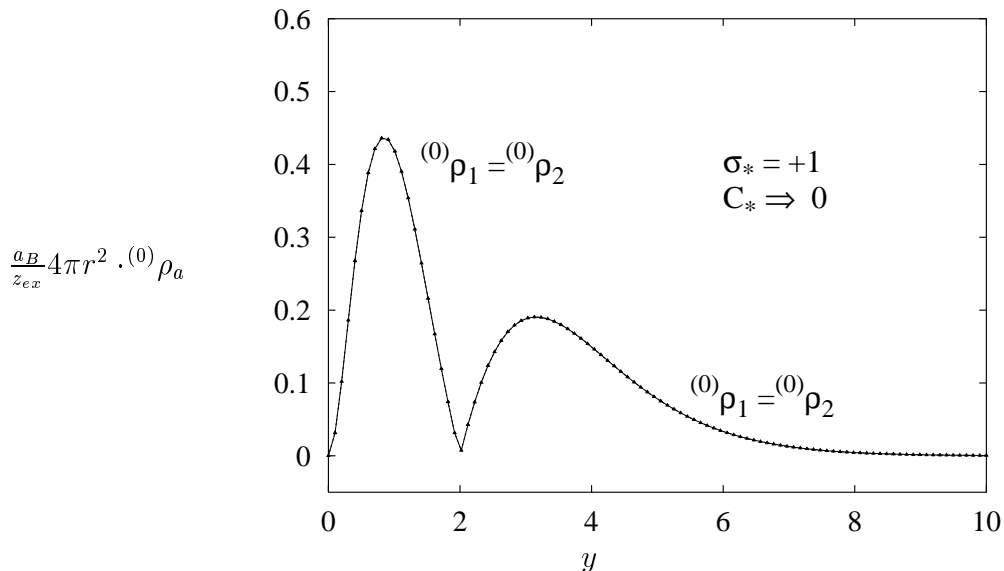


Abbildung 4.3: Für positive Gemische ($\sigma_* = +1$) verschmelzen beide Ladungsverteilungen ${}^{(0)}\rho_a$ im Grenzfall $C_* \Rightarrow 0$ ineinander: ${}^{(0)}\rho_1 \equiv {}^{(0)}\rho_2$. Sie füllen dann gemeinsam den gesamten dreidimensionalen Raum $0 \leq y < \infty$ aus.

${}^{(0)}M_1 - {}^{(0)}M_2$) auf beide Teilchen nach folgendem Muster verteilt

$$M_{12} - \left\{ {}^{(0)}M_1 + {}^{(0)}M_2 \right\} = \frac{1}{2}(M_1 - {}^{(0)}M_1) + \frac{1}{2}(M_2 - {}^{(0)}M_2), \quad (4.34)$$

d.h. beide 1-Teilchen-Freiheitsgrade tragen mit dem selben Gewicht $\frac{1}{2}$ zum Gesamtwert der Masse bei.

In der Störungstheorie erster Ordnung schließt man auf die Massenkorrektur ${}^{(1)}M_{12}$, welche von den Interteilchenwechselwirkungen erzeugt wird auf

$${}^{(1)}M_{12} = \frac{1}{2} \left\{ {}^{(1)}M_1 + {}^{(1)}M_2 \right\}, \quad (4.35)$$

wobei die individuellen Massenkorrekturen ${}^{(1)}M_a$ durch Anwendung von Standardmethoden der Störungsrechnung auf die Amplitudengleichungen erster Ordnung (4.31) ermittelt werden können. Die vollständige Rechnung ist in der Arbeit [25] aufgeführt und nicht schwierig, aber langwierig. Das Ergebnis für die Wechselwirkungsenergie ${}^{(1)}E_{12} = {}^{(1)}M_{12} \cdot c^2$ ist in Figur 4.4 zu sehen. Man kann an dieser Figur einige wichtige Punkte ablesen:

(i) Für reine Zustände verschwindet die Mischungswechselwirkung (d.h. $W_{ab} \Rightarrow 0$), es liegen dann zwei nicht verschränkte 1-Teilchen-Zustände vor. Diese werden durch das ungekoppelte Amplitudensystem (3.82) beschrieben und unterliegen nur der elektromagnetischen Wechselwirkung. Daher sollte die Wechselwirkungsenergie durch die klassische elektrostatische Wechselwirkungsenergie (U_C) beschrieben werden, welche durch die zwei Ladungsverteilungen der beiden Einzelteilchen-Amplituden ${}^{(0)}L_a(\vec{r})$ gebildet wird:

$$U_C = e^2 \int dV \int dV' \frac{\left({}^{(0)}L_1(\vec{r}) \right)^2 \cdot \left({}^{(0)}L_2(\vec{r}') \right)^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.36)$$

Für die $(1s, 2s)$ -Konfiguration (4.25)-(4.26) findet man (entweder aus der Literatur [30] oder durch explizites Nachrechnen)

$$U_C(1s, 2s) = \frac{17}{81} z_{ex} \frac{e^2}{a_B} \approx 5.711 \cdot z_{ex} [eV]. \quad (4.37)$$

Wie man an Figur 4.4 ablesen kann, wird diese Bedingung durch die Störungsrechnung reproduziert, diese ist also in Bezug auf die Eichkräfte zuverlässig.

(ii) Schaltet man die Mischungswechselwirkung ein, so verringert man den Wert von C_* von Unendlich hin zu endlichen Werten ($C_* < \infty$). Wie die numerischen Resultate zeigen, fällt die Wechselwirkungsenergie ${}^{(1)}E_{12} = {}^{(1)}M_{12} \cdot c^2$ mit fallendem C_* ab und nähert sich den experimentellen Werten für das Heliumatom

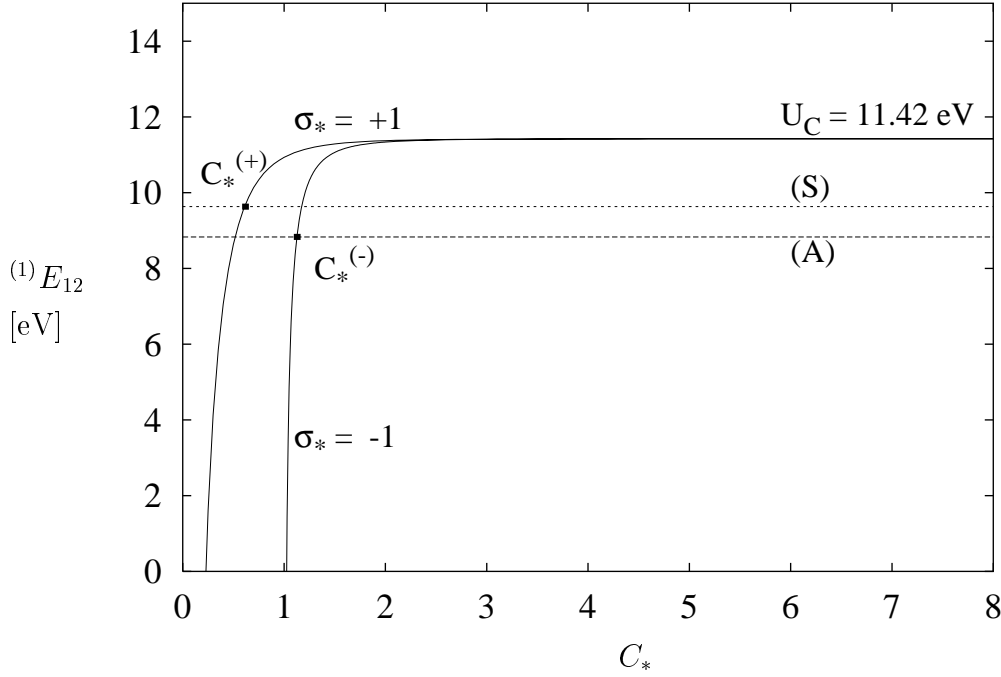


Abbildung 4.4: Wechselwirkungsenergie ${}^{(1)}E_{12} = {}^{(1)}M_{12} \cdot c^2$ in erster Ordnung Störungstheorie. Diese Energie nimmt für reine Zustände den Wert des klassischen Coulombintegrals an: ${}^{(1)}E_{12}(\infty) = U_C$. Die numerische Übereinstimmung mit den experimentellen Werten ${}^{(S)}E_{12} = 9.63$ eV und ${}^{(A)}E_{12} = 8.83$ eV tritt für $C_*^{(+)} = 0.62$ und $C_*^{(-)} = 1.13$ auf. Allerdings liefert die Störungstheorie nur in der Nähe der reinen Zustände verlässliche Aussagen. In diesem Bereich ändert sich der Energieeigenwert nicht (\rightsquigarrow Mischungsentartung).

an. Man erkennt auch, daß die Wechselwirkungsenergie für die positiven Gemische bei festem C_* größer ist als für die negativen Gemische. Dies unterstützt die Vermutung, daß den negativen (positiven) Gemische fermionischer (bosonischer) Materie entsprechen.

Wie verlässlich ist aber diese Störungstheorie? Läßt man den Parameter C_* gegen seine Grenzwerte (negative Gemische: $C_* \rightarrow C_- = 1$; positive Gemische: $C_* \rightarrow C_+ = 0$) gehen, wird die Wechselwirkungsenergie unendlich (${}^{(1)}E_{12} \rightarrow -\infty$). Offensichtlich bricht hier die Störungstheorie zusammen. Hält man sich aber in der Nähe der reinen Zustände auf ($C_* \rightarrow \infty$), so sollten die Werte, die von der Störungstheorie geliefert werden, verlässlicher sein. Hierbei fällt auf, daß in diesem Bereich die Energieeigenwerte der positiven und negativen Gemische identisch werden. Daher kann man in diesem Bereich vom Vorliegen einer Mischungsentartung sprechen. Diese Beobachtung wird durch eine analytische Berechnung für diesen Bereich erhärtet, welche im nächsten Abschnitt vorgestellt wird. Ab-

schließlich sei noch erwähnt, daß diese Mischungsentartung für *alle* Werte von C_* existiert, wenn man das Problem exakt löst (im übernächsten Abschnitt).

4.3 Asymptotische Mischungsentartung und die Dalgarno-Lewis Methode

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt wird in diesem Abschnitt allein die Wirkung der Mischungswechselwirkung betrachtet, d.h. die elektromagnetische Interaktion wird vernachlässigt. Dabei wird die Störungsrechnung in Potenzen von $1/C_*$ bis zur Ordnung $1/C_*^2$ durchgeführt, wobei man findet, daß die Energieeigenwerte sich bis zu dieser Ordnung nicht verändern. Eine besondere Form von Störungsrechnung, die Dalgarno-Lewis Methode, erlaubt es, die Verschiebung der Amplitudenfunktionen in erster Ordnung exakt zu berechnen. Dabei findet man, daß die Separations- und Fusionseffekte der Dichten ${}^{(0)}\rho_a$ (${}^{(0)}L_a$) durch die Verschiebung der Amplituden ${}^{(0)}L_a \rightarrow {}^{(1)}L_a$ gerade kompensiert werden. Die Dichten bleiben also bis zur Ordnung $1/C_*^4$ invariant! Durch dieses Ergebnis wurde das Auffinden der exakten Lösung und der Mischungsgruppe (s.u.) vorbereitet, da man hierbei zunächst als Hypothese von der Invarianz der Dichten ausgegangen ist.

Es bietet sich nun an, die Mischungseffekte anhand des nichtrelativistischen Grenzfalles zu betrachten, wie dies auch schon im vorigen Abschnitt getan wurde. Die Schrödingergleichungen in reskaliert Form lauten:

$$-\Delta_y L_a(y) + (\nu_c + \nu_a + \epsilon_{B,a}) \cdot L_a(y) = 0 . \quad (4.38)$$

Dabei hängen die Amplituden L_a von der dimensionslosen Variable y ab, siehe (4.24), die Eigenwerte $E_{B,a}$ wurden in dimensionslose Form $\epsilon_{B,a}$ gebracht, indem man sie durch die Energiedifferenz ${}^{(0)}\Delta_{1,2} = {}^{(0)}E_{B,1} - {}^{(0)}E_{B,2}$ aus dem Grundzustands-Eigenwert ${}^{(0)}E_{B,1}$ und dem Eigenwert des ersten angeregten Zustands ${}^{(0)}E_{B,2}$ dividiert (${}^{(0)}\Delta_{1,2} \doteq \frac{3}{8} z_{ex}^2 \frac{e^2}{a_B}$):

$$\epsilon_{B,a} \doteq \frac{3}{4} \frac{E_{B,a}}{{}^{(0)}\Delta_{1,2}} . \quad (4.39)$$

Außerdem wird die reskalierte Form $\nu_a(y)$ ($a = 1, 2$) der Mischungspotentiale W_a (4.13) gebildet, indem man setzt:

$$\nu_a(y) \doteq \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{2M} \frac{W_a}{{}^{(0)}\Delta_{1,2}} \quad (4.40)$$

Das Coulomb-Potential in reskaliert Form lautet

$$\nu_c(y) = -\frac{2}{y}. \quad (4.41)$$

Als Ausgangspunkt für die Störungsentwicklung dient wieder der Fall reiner Zustände ($C_* \rightarrow \infty$), in dem man ein Paar gewöhnlicher, ungekoppelter Schrödingergleichungen erhält:

$$-\Delta_y {}^{(0)}L_n(y) + (\nu_c + {}^{(0)}\epsilon_{B,n}) \cdot {}^{(0)}L_n(y) = 0 \quad (4.42)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

mit den bekannten (reskalierten) Eigenwerten ${}^{(0)}\epsilon_{B,n} = n^{-2}$ und entsprechenden Lösungen ${}^{(0)}L_n(y)$. Die niedrigsten Energieeigenwerte sind ${}^{(0)}\epsilon_{B,1} = 1$ für den Grundzustand ($n = 1$) und ${}^{(0)}\epsilon_{B,2} = \frac{1}{4}$ für den ersten angeregten Zustand ($n = 2$), mit den entsprechenden Lösungen ${}^{(0)}L_1(y)$ (4.25) und ${}^{(0)}L_2(y)$ (4.26). Im folgenden werden wir die Mischung dieser beiden Zustände durch Verringern des Mischungsparameters C_* von ($C_* = \infty$) hin zu endlichen Werten ($C_* < \infty$) untersuchen.

Genäherte Lösungen für das System von Schrödingergleichungen (4.38) erhält man, indem die Mischungslösungen $L_a(y)$ nach der orthonormalen Basis $\{{}^{(0)}L_n(y)\}$ der 1-Teilchen-Zustände entwickelt:

$$L_a(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{an} {}^{(0)}L_n(y). \quad (4.43)$$

Setzt man diesen Ansatz in das Schrödinger-System (4.38) ein, multipliziert mit einem Basiszustand ${}^{(0)}L_m(y)$ von links und integriert über den gesamten 3-dimensionalen Raum, so erhält man ein unendlichdimensionales, nicht-lineares algebraisches System zur Bestimmung der Eigenwerte $\epsilon_{B,a}$ und der Koeffizienten λ_{an} . Dieses System wird gelöst, indem man die Modenentwicklung (4.43) bei einem endlichen Wert N abbricht. Das resultierende algebraische System lautet in allgemeiner Form ($a = 1, 2$)

$$\sum_{n=1}^N \lambda_{an} \left\{ (\Delta\epsilon_{B,a} + {}^{(0)}\epsilon_{a,m}) \langle m|n \rangle + \langle m|\nu_a|n \rangle \right\} = 0, \quad (4.44)$$

$$(m, n | = 1, \dots, N)$$

wobei folgende Notationen verwendet wurden:

$$\langle m|\nu_a|n \rangle \doteq \int dy y^2 {}^{(0)}L_m(y) \cdot \nu_a(y) \cdot {}^{(0)}L_n(y) \quad (4.45a)$$

$$\langle m|n \rangle = \int dy y^2 {}^{(0)}L_m(y) \cdot {}^{(0)}L_n(y) = \frac{1}{4}\delta_{mn} \quad (4.45b)$$

$$\Delta\epsilon_{B,a} \doteq \epsilon_{B,a} - {}^{(0)}\epsilon_{B,a} \quad (4.45c)$$

$${}^{(0)}\epsilon_{a,m} = {}^{(0)}\epsilon_{B,a} - {}^{(0)}\epsilon_{B,m} . \quad (4.45d)$$

Dieses algebraische System (4.44) sieht wie ein gewöhnliches lineares Diagonalisierungsproblem aus, dessen Lösung sowohl die Energieeigenwerte $\epsilon_{B,a}$ als auch die entsprechenden Koeffizienten λ_{an} liefern würde. Allerdings ist diese Annahme nicht richtig, da der nichtlineare Charakter dieses Systems darin begründet liegt, daß die Mischungspotentiale ν_a selbst wieder von den Lösungen $L_a(y)$ abhängen. Dadurch ist man gezwungen, einen Iterationsprozess durchzuführen, wobei man zur Konstruktion der Mischungspotentiale ν_a (bzw. der korrespondierenden Matrixelemente $\langle m|\nu_a|n \rangle$) mit den Amplitudenfunktionen nullter Ordnung ${}^{(0)}L_a(y)$ beginnt. Die Diagonalisierung liefert dann eine erste Korrektur $\Delta\epsilon_{B,a}$ der Eigenwerte nullter Ordnung ${}^{(0)}\epsilon_{B,a}$ gemeinsam mit einer korrigierten Amplitudenfunktion $L_a(y)$ (4.43). Diese Ergebnisse werden dann in die Mischungspotentiale ν_a eingesetzt und durchlaufen einen weiteren Iterationsschritt, welcher zu genaueren Eigenwerten $\epsilon_{B,a}$ und Amplituden $L_a(y)$ führt. Bei genügend großen Werten für den Mischungsparameter C_* konvergiert der Iterationsprozess bei einem wohldefinierten Fixpunkt, welcher die gewünschte Lösung $\{\Delta\epsilon_{B,a}; L_a(y)\}$ des Diagonalisierungsproblems darstellt. In den folgenden numerischen Berechnungen betrug die Zahl der Iterationsschritte bis zum Auffinden des Fixpunktes mit akzeptabler Genauigkeit (1 zu 10^5) ca. $30 \sim 40$ Schritte. Die Zahl der verwendeten Moden betrug $N = 5$; und die minimal zugänglichen Werte des Mischungsparameters C_* waren in der Größenordnung $C_* \gtrsim 0.9$ für die positiven Gemische und $C_* \gtrsim 1.3$ für die negativen Gemische. Für kleinere Werte von C_* führte der Iterationsprozess nicht auf einen wohldefinierten Fixpunkt, was auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen ist. Es ergibt sich ein qualitativ ähnliches Bild für die Bindungsenergie $\epsilon_B (\doteq \epsilon_{B,1} + \epsilon_{B,2})$ wie das in Figur 4.4 gezeigte (siehe die Diskussion dort). Im hier betrachteten Fall geht aber in der Nähe der reinen Zustände ($C_* \rightarrow \infty$) die Bindungsenergie gegen die Summe der Eigenwerte nullter Ordnung ${}^{(0)}\epsilon_{B,a}$

$$\lim_{C_* \rightarrow \infty} \epsilon_B = {}^{(0)}\epsilon_{B,1} + {}^{(0)}\epsilon_{B,2} = \frac{5}{4} . \quad (4.46)$$

da die elektromagnetische Interteilchenwechselwirkung vernachlässigt wurde. Dieser Grenzwert wird schon mit großer Genauigkeit für relativ kleine Werte von C_* angenommen. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß die Energiekorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}\epsilon_B$ sich höchstens mit der vierten Ordnung im Mischungsparameter (${}^{(1)}\epsilon_B \sim C_*^{-4}$) verändern, wenn man davon ausgeht, daß der exakte Energieeigenwert in eine Potenzreihe in Bezug auf die Potentialstärke ν_a entwickelt wird:

$$\epsilon_B = {}^{(0)}\epsilon_B + {}^{(1)}\epsilon_B + {}^{(2)}\epsilon_B + \dots \quad (4.47)$$

Hierbei ist der Korrekturterm n -ter Ordnung ${}^{(n)}\epsilon_B$ ein Funktional der n -ten Ordnung des Potentials ν_a : ${}^{(n)}\epsilon_B = {}^{(n)}\epsilon_B[(\nu_a)^n]$.

Bevor wir aber zeigen, daß die Mischungsentartung bis zur Ordnung C_*^{-2} nicht aufgehoben wird, sollte noch eine Anmerkung bezüglich der oben genannten Resultate gemacht werden. Wie in Abschnitt 4.4 gezeigt wird, ist die Mischungsentartung für alle Werte von C_* gültig, d.h. der exakte Eigenwert ϵ_B ist unabhängig vom Mischungsparameter C_* . Bei obigem Iterationsverfahren wurde aber bei kleinen Werten von C_* eine Veränderung dieses Eigenwertes gefunden, wobei das Verfahren in der Umgebung eines Fixpunktes konvergierte. Das so gefundene (falsche) Verhalten der Eigenwerte bei kleinen C_* muß damit erklärt werden, daß die Modenentwicklung nur bis $N = 5$ durchgeführt wurde und offensichtlich Moden höherer Ordnung in einer solchen Weise beitragen, daß auch für kleine C_* der Eigenwert unverändert bleibt.

Wir interessieren uns im folgenden für die linearen und quadratischen Näherungen, welche der Störungsrechnung in erster und zweiter Ordnung in der Quantentheorie entsprechen. Die Energiekorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$ ergeben sich hierbei aus dem allgemeinen System (4.44) zu ($a=1,2$):

$${}^{(1)}\epsilon_{B,a} = -4 \langle a | \nu_a | a \rangle, \quad (4.48)$$

und es gilt entsprechend für die Korrekturen zweiter Ordnung

$${}^{(2)}\epsilon_{B,a} = 16 \cdot \sum_{n \neq a}^N \frac{(\langle a | \nu_a | n \rangle)^2}{{}^{(0)}\epsilon_{a,n}}. \quad (4.49)$$

Damit findet man die Energieeigenwerte $\epsilon_{B,a}$ bis zur zweiten Ordnung

$$\epsilon_{B,a} = {}^{(0)}\epsilon_{B,a} + {}^{(1)}\epsilon_{B,a} + {}^{(2)}\epsilon_{B,a} + O(\nu^3). \quad (4.50)$$

Entsprechend gilt für die Amplitudenfelder

$$L_a(y) = {}^{(0)}L_a(y) + \sum_{n \neq a}^N ({}^{(1)}\tilde{\lambda}_{an} + {}^{(2)}\tilde{\lambda}_{an}) {}^{(0)}L_n(y) + O(\nu^3) \quad (4.51)$$

wobei die Koeffizienten in erster und zweiter Ordnung gegeben sind durch ($n \neq a$)

$${}^{(1)}\tilde{\lambda}_{an} = -4 \frac{\langle n|\nu_a|a \rangle}{({}^{(0)}\epsilon_{a,n})} \quad (4.52a)$$

$${}^{(2)}\tilde{\lambda}_{an} = 16 \left\{ - \frac{\langle a|\nu_a|a \rangle \cdot \langle n|\nu_a|a \rangle}{({}^{(0)}\epsilon_{a,n})^2} + \frac{1}{({}^{(0)}\epsilon_{a,n})} \sum_{m \neq a}^N \frac{\langle n|\nu_a|m \rangle \cdot \langle m|\nu_a|a \rangle}{({}^{(0)}\epsilon_{a,m})} \right\}. \quad (4.52b)$$

Offensichtlich kann derselbe Iterationsprozeß wie oben beschrieben ebenso auf diese linearen und quadratischen Korrekturterme angewendet werden. Hierbei fällt auf, daß die Energiekorrekturen (4.50) ein im Vergleich zu den Amplitudenkorrekturen (4.51) qualitativ anderes Verhalten zeigen; denn die Korrekturterme werden aus den Matrixelementen ν_a auf unterschiedliche Weise gebildet. So werden beispielsweise die Energiekorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$ (4.48) aus den Diagonalelementen gebildet, während die entsprechenden Amplitudenkorrekturen ${}^{(1)}\tilde{\lambda}_{an}$ (4.52a) auf den Nicht-Diagonalelementen beruhen. Dies erklärt, warum eine Veränderung im Mischungsparameter C_* eine Deformation der Amplitudenfelder $L_a(y)$ (4.51) auslösen kann, obwohl die Energieeigenwerte von dieser Veränderung von C_* unbeeinflusst bleiben. Dieses Verhalten tritt in der Störungsordnung C_*^{-2} auf: Man kann zeigen, daß die Eigenwerte in dieser Ordnung konstant bleiben, während die Amplituden sich verändern. Damit liegt hier ein Analogon zur Austauschentartung in der konventionellen Quantentheorie vor.

Um diese Behauptung, welche mathematisch korrekt formuliert folgendermaßen lautet

$$\lim_{C_* \rightarrow \infty} C_*^2 \cdot \Delta\epsilon_{B,a} = 0 \quad (4.53)$$

$$(a=1,2),$$

zu beweisen, muß man die Mischungspotentiale $\nu_a(L_1, L_2)$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h.

$$\nu_a = {}^{(1)}\nu_a + {}^{(2)}\nu_a + {}^{(3)}\nu_a + \dots + {}^{(n)}\nu_a + \dots, \quad (4.54)$$

wobei der n -te Term ${}^{(n)}\nu_a$ sich mit der Ordnung C_*^{-2n} verändert. Dann muß man die Matrixelemente (4.48) in der niedrigsten Ordnung ($n=1$) berechnen, und

schließlich zeigen, daß die Korrekturterme ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$ tatsächlich in erster Ordnung verschwinden (d.h. ${}^{(1)}\epsilon_{B,a} \sim C_*^{-4}$ oder höher). Damit findet man bestätigt, daß die Mischungsentartung als Analogon zur Austauschentartung in der konventionellen Quantentheorie zumindest in niedrigster Störungsordnung vorliegt.

Beginnen wir nun mit dem ersten Schritt, so findet man die folgenden Entwicklungen für die Mischungspotentiale (4.54) in erster Ordnung

$${}^{(1)}\nu_1(L_1, L_2) = \frac{\sigma_*}{C_*^2} \left\{ ({}^{(0)}\epsilon_{B,1} - {}^{(0)}\epsilon_{B,2}) \cdot \left(\frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \right)^2 - \frac{L_1^2 - 3L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} \cdot \left(\frac{\dot{L}_1 L_2 - \dot{L}_2 L_1}{L_1^2 + L_2^2} \right)^2 \right\} \quad (4.55a)$$

$${}^{(1)}\nu_2(L_1, L_2) = \frac{\sigma_*}{C_*^2} \left\{ ({}^{(0)}\epsilon_{B,2} - {}^{(0)}\epsilon_{B,1}) \cdot \left(\frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \right)^2 - \frac{L_2^2 - 3L_1^2}{L_1^2 + L_2^2} \cdot \left(\frac{\dot{L}_1 L_2 - \dot{L}_2 L_1}{L_1^2 + L_2^2} \right)^2 \right\} \quad (4.55b)$$

und ebenso in zweiter Ordnung

$${}^{(2)}\nu_1(L_1, L_2) = \frac{1}{C_*^4} \left\{ (2L_1 L_2)^2 (L_1^2 - 3L_2^2) \cdot \frac{(\dot{L}_1 L_2 - \dot{L}_2 L_1)^2}{(L_1^2 + L_2^2)^5} - ({}^{(0)}\epsilon_{B,1} - {}^{(0)}\epsilon_{B,2}) \cdot \left(\frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \right)^4 \right\} \quad (4.56a)$$

$${}^{(2)}\nu_2(L_1, L_2) = \frac{1}{C_*^4} \left\{ (2L_1 L_2)^2 (L_2^2 - 3L_1^2) \cdot \frac{(\dot{L}_1 L_2 - \dot{L}_2 L_1)^2}{(L_1^2 + L_2^2)^5} - ({}^{(0)}\epsilon_{B,2} - {}^{(0)}\epsilon_{B,1}) \cdot \left(\frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \right)^4 \right\}. \quad (4.56b)$$

Nähert man die Matrixelemente für die Energiekorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$ (4.48) durch die niedrigste Ordnung in den Potentialen ${}^{(1)}\nu_a$ (4.55), so schließt man für ihr asymptotisches Verhalten

$${}^{(1)}\epsilon_{B,a} \Rightarrow -4 \langle a | {}^{(1)}\nu_a | a \rangle \sim C_*^{-2} \quad (4.57)$$

was aber nicht zutrifft: Es gibt keinen Korrekturterm erster Ordnung ($\sim C_*^{-2}$) in den Energiekorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$, wie im folgenden gezeigt wird:

Man definiert zwei Hilfspotentiale $\tilde{\nu}_1(L_1, L_2)$ und $\tilde{\nu}_2(L_1, L_2)$ folgendermaßen:

$$\tilde{\nu}_1 \doteq \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \cdot \frac{1}{y^2 \cdot L_1(y)^2} \cdot \frac{d}{dy} \left\{ y^2 L_1(y)^2 \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{L_1(y)^2}{L_1(y)^2 + L_2(y)^2} \right) \right\} \quad (4.58a)$$

$$\tilde{\nu}_2 \doteq \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \cdot \frac{1}{y^2 \cdot L_2(y)^2} \cdot \frac{d}{dy} \left\{ y^2 L_2(y)^2 \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{L_2(y)^2}{L_1(y)^2 + L_2(y)^2} \right) \right\}. \quad (4.58b)$$

Hierbei werden die Amplitudenfunktionen $L_a(y)$ ($a=1,2$) als exakte Lösungen der entsprechenden Amplitudengleichungen (4.38) angesehen. Verwendet man diese Amplitudengleichungen (mit *beliebigem* Bindungspotential ν_c) so findet man die folgende explizite Form für die Hilfspotentiale

$$\tilde{\nu}_1 = \frac{\sigma_*}{C_*^2} \left\{ \left(3L_2^2 - L_1^2 \right) \cdot \frac{(L_1 \dot{L}_2 - L_2 \dot{L}_1)^2}{(L_1^2 + L_2^2)^3} + (\nu_1 - \nu_2 + \epsilon_{B,1} - \epsilon_{B,2}) \cdot \left(\frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \right)^2 \right\} \quad (4.59a)$$

$$\tilde{\nu}_2 = \frac{\sigma_*}{C_*^2} \left\{ \left(3L_1^2 - L_2^2 \right) \cdot \frac{(L_1 \dot{L}_2 - L_2 \dot{L}_1)^2}{(L_1^2 + L_2^2)^3} + (\nu_2 - \nu_1 + \epsilon_{B,2} - \epsilon_{B,1}) \cdot \left(\frac{L_1 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \right)^2 \right\}. \quad (4.59b)$$

In dieser Form ist aber sofort einsichtig, daß die asymptotische Form ($C_* \rightarrow \infty$) dieser Hilfspotentiale $\tilde{\nu}_a$ dieselbe ist wie die der ursprünglichen Potentiale ν_a (4.54), d.h. wir finden als Entwicklungen

$$\tilde{\nu}_a = {}^{(1)}\tilde{\nu}_a + {}^{(2)}\tilde{\nu}_a + \dots + {}^{(n)}\tilde{\nu}_a + \dots \quad (4.60)$$

mit den Identifikationen

$${}^{(1)}\tilde{\nu}_a(L_1, L_2) \equiv {}^{(1)}\nu_a(L_1, L_2). \quad (4.61)$$

Andererseits folgt unmittelbar aus den ursprünglichen Definitionen (4.58) der Hilfspotentiale $\tilde{\nu}_a$, daß im asymptotischen Grenzfall (wo $L_a(y) \Rightarrow {}^{(0)}L_a(y)$ wird) die Diagonalmatrixelemente verschwinden, d.h.

$$\lim_{C_* \rightarrow \infty} \int_0^\infty dy y^2 L_a(y)^2 \cdot \tilde{\nu}_a(y) = \langle a | {}^{(1)}\tilde{\nu}_a | a \rangle = 0. \quad (4.62)$$

Daher kann man die Energiekorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$ (4.48) ebenso auf folgende Weise schreiben

$$\lim_{C_* \rightarrow \infty} {}^{(1)}\epsilon_{B,a} = -4 \langle a | {}^{(1)}\nu_a' | a \rangle \quad (4.63)$$

wobei die modifizierten Potentiale ν_a' eingeführt wurden durch

$$\nu_a' \doteq \nu_a - \tilde{\nu}_a . \quad (4.64)$$

Diese modifizierten Potentiale ν_a' haben einen in erster Ordnung verschwindenden Term ${}^{(1)}\nu_a'$, was man unmittelbar an den früheren Identifikationen (4.61) erkennt, d.h.

$${}^{(1)}\nu_a' \doteq {}^{(1)}\nu_a - {}^{(1)}\tilde{\nu}_a \equiv 0 . \quad (4.65)$$

Man kann also an diesen asymptotischen Beziehungen (4.63)-(4.65) die Gültigkeit der Behauptung (4.53) überprüfen. Die hierbei gemachten Annahmen setzen keine spezielle Form des Bindungspotentials ν_c voraus. Daher gilt diese asymptotische Form von Mischungsentartung (4.53) für alle gebundenen 2-Teilchen Mischungen, was bedeutet, daß diese bis zur Ordnung C_*^{-4} dieselben Energieeigenwerte besitzen wie die reinen Zustände ($C_* = \infty$).

Darüberhinaus stellt man fest, daß in zweiter Ordnung ($n = 2 : {}^{(1)}\epsilon_{B,a} \sim C_*^{-4}$), die durch Potentialterme zweiter Ordnung ${}^{(2)}\nu_a$ (4.56) bestimmt wird, ebenso keine Differenz zwischen positiven und negativen Gemischen auftritt. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß der Mischungsindex σ_* in diese Terme nicht eingeht; außerdem werden die Potentialterme erster Ordnung ${}^{(1)}\nu_a$ (4.55) quadriert, wenn sie in den quadratischen Korrekturterm ${}^{(2)}\epsilon_{B,a} (\sim C_*^{-4})$ eingehen. Dadurch fällt auch hier der Mischungsindex heraus ($\sigma_*^2 = 1$). Also hat der Mischungscharakter (positives oder negatives Gemisch) keinen Einfluß auf die zweite Störungsordnung. Dies bedeutet, daß die Entartung zwischen positiven und negativen Gemischen höchstens in der Störungsordnung ($\sim C_*^{-6}$) aufgehoben werden kann.

Das Konzept der Entartung besagt, daß zwei (oder mehr) *unterschiedliche* Feldkonfigurationen dieselbe Energie besitzen. Daher will man auch im vorliegenden Fall der Mischungsentartung wissen, wie sich 2-Teilchen Konfigurationen $\{L_1, L_2\}$ mit derselben Energie (in der Ordnung C_*^{-2}), aber mit unterschiedlichem Mischungsindex σ_* in ihrer räumlichen Ausdehnung unterscheiden, d.h. wir betrachten die Amplitudenkorrekturen ${}^{(1)}L_a$ (4.51) genauer

$${}^{(1)}L_a(y) = \sum_{n \neq a} {}^{(1)}\tilde{\lambda}_{an} {}^{(0)}L_n(y) . \quad (4.66)$$

Aus ihrer Konstruktionsvorschrift folgt, daß diese Korrekturen erster Ordnung der Orthogonalisierungsbedingung

$$\langle a | {}^{(1)}L_a \rangle = 0 . \quad (4.67)$$

gehörten. Offensichtlich muß man zunächst die Matrixelemente ${}^{(1)}\tilde{\lambda}_{an}$ (4.52a) berechnen, dann die unendliche Summe auf der rechten Seite von (4.66) aufaddieren, um daraus die Amplitudenkorrekturen ${}^{(1)}L_a(y)$ zu erhalten. Aber natürlich kann ein solcher Vorgang in den meisten Fällen nicht exakt durchgeführt werden, weshalb man sich auf eine endliche Summe beschränkt und nur die niedrigsten Terme der Modenentwicklung (4.66) berücksichtigt (z.B. bis zur 5. Ordnung, s.o. bei der Berechnung der Eigenwerte). Da die Modenentwicklung sehr langsam konvergiert, ist das so erhaltene Ergebnis nicht sehr genau. Daher sucht man nach einer Methode, die es erlaubt, die Amplitudenkorrekturen in erster Ordnung ${}^{(1)}L_a$ (4.66) exakt zu berechnen, ohne die Summation der unendlichen Reihe durchführen zu müssen. Diese Möglichkeit eröffnet die Dalgarno-Lewis Methode [31, 32]. Die DL-Methode kann für eine Reihe von Störpotentialen durchgeführt werden. Findet man eine Funktion $f_a(y)$, die mit den ungestörten 1-Teilchen Amplitudenfunktionen ${}^{(0)}L_a(y)$ auf eine Weise zusammenhängt, die weiter unten dargestellt wird, so kann man die Korrekturterme erster Ordnung in Abhängigkeit von diesen Funktionen f_a schreiben als

$${}^{(1)}L_a(y) = (f_a(y) - \overline{f_a}) \cdot {}^{(0)}L_a(y), \quad (4.68)$$

wobei die Mittelwerte $\overline{f_a}$ wie üblich definiert sind als

$$\overline{f_a} = 4 \langle a | f_a | a \rangle, \quad (4.69)$$

(dabei ist die modifizierte Orthonormalisierungsbedingung (4.45b) zu beachten) so daß die Orthogonalisierungsbedingung (4.67) erfüllt ist. Daher findet man für die in erster Ordnung korrigierten Amplitudenfelder folgende Beziehung:

$$\{^1\}L_a(y) \doteq {}^{(0)}L_a(y) + {}^{(1)}L_a(y) = \hat{N}_a \cdot \{1 + f_a(y) - \overline{f_a}\} \cdot {}^{(0)}L_a(y). \quad (4.70)$$

Hierbei hat man die Normierungsfaktoren \hat{N}_a eingeführt, welche mit der Standardabweichung der DL Funktionen $f_a(y)$ folgendermaßen in Beziehung stehen

$$\hat{N}_a = \{1 + \overline{(\Delta f_a)^2}\}^{-1/2}, \quad (4.71)$$

wobei die Standardabweichung $\overline{(\Delta f_a)^2}$ in der üblichen Weise definiert ist

$$\overline{(\Delta f_a)^2} \doteq 4(\langle a | f_a^2 | a \rangle - 4(\langle a | f_a | a \rangle)^2) \quad (4.72)$$

(für den unkonventionellen Faktor 4 sei wieder auf die modifizierte Orthonormalisierungsbedingung (4.45b) verwiesen). Ähnlich wie im Fall der Amplitudenkorrekturen erster Ordnung ${}^{(1)}L_a(y)$ erspart uns die Dalgarno-Lewis Methode auch die

Berechnung der unendlichen Reihe, wenn es darum geht, die Energiekorrekturen zweiter Ordnung ${}^{(2)}\epsilon_{B,a}$ (4.49) zu berechnen. Anstatt sich mit einer unendlichen Zahl von Termen zu beschäftigen, muß man nur zwei Integrale berechnen:

$${}^{(2)}\epsilon_{B,a} = -4 \langle a | \nu_a \cdot f_a | a \rangle - 4 {}^{(1)}\epsilon_{B,a} \cdot \overline{f_a}. \quad (4.73)$$

Nun ist der entscheidende Punkt für die Anwendung der Dalgarno-Lewis Methode das Auffinden der Funktionen f_a , welche (wenn man sie als Operatoren auffaßt) aus der folgenden Kommutatorrelation ($a = 1, 2$) abgeleitet werden:

$$[f_a, h_0]({}^{(0)}L_a) = ({}^{(1)}\nu_a + {}^{(1)}\epsilon_{B,a}) \cdot ({}^{(0)}L_a), \quad (4.74)$$

wobei h_0 den ungestörten 1-Teilchen Hamiltonian (4.42) beschreibt, d.h.

$$h_0 = -\Delta + \nu_c. \quad (4.75)$$

Im vorliegenden Fall von $SO(3)$ -symmetrischen Feldern vereinfacht sich der Kommutator zu

$$\Delta_y f_a(y) + 2 \frac{{}^{(0)}\dot{L}_a(y)}{{}^{(0)}L_a(y)} \cdot \dot{f}_a(y) = ({}^{(1)}\nu_a + {}^{(1)}\epsilon_{B,a}) \quad (4.76)$$

wobei in niedrigster Ordnung ($\sim C_*^{-2}$) die Eigenwerte ${}^{(1)}\epsilon_{B,a}$ nicht beitragen (s.o.) und daher weggelassen werden können. Glücklicherweise können die Lösungen $f_a(y)$ in niedrigster Ordnung (d.h. $\sim C_*^{-2}$) leicht aus den Gleichungen (4.76) berechnet werden:

$$f_a(y) = \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \cdot \frac{({}^{(0)}L_a(y))^2}{{}^{(0)}L_1(y)^2 + ({}^{(0)}L_2(y))^2}. \quad (4.77)$$

Für die folgende Betrachtung ist es vorteilhaft, dieses Ergebnis durch den Überlappungswinkel ξ_o (4.7) auszudrücken

$$f_1(y) = \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \cdot \cos^2 \frac{\xi_o}{2} \quad (4.78a)$$

$$f_2(y) = \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \cdot \sin^2 \frac{\xi_o}{2}. \quad (4.78b)$$

Daher haben die Amplitudenkorrekturen erster Ordnung $\{^1\}L_a(y)$ (4.70) folgende Gestalt

$$\{^1\}L_a(y) = \hat{N}_a \cdot \varphi_a(y) \cdot ({}^{(0)}L_a(y)) \quad (4.79)$$

wobei die modulierenden Faktoren $\varphi_a(y)$ durch den Überlappungswinkel ξ_o ausgedrückt lauten:

$$\varphi_1(y) = 1 + \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \left\{ \cos^2 \frac{\xi_o}{2} - \overline{\cos^2 \frac{\xi_o}{2}} \right\} \quad (4.80a)$$

$$\varphi_2(y) = 1 + \frac{\sigma_*}{2C_*^2} \left\{ \sin^2 \frac{\xi_o}{2} - \overline{\sin^2 \frac{\xi_o}{2}} \right\}. \quad (4.80b)$$

Man kann nun sehr leicht zeigen, daß die beiden Mittelwerte übereinstimmen: $\overline{\cos^2 \frac{\xi_o}{2}} = \overline{\sin^2 \frac{\xi_o}{2}}$ (d.h. $\overline{f_1} = \overline{f_2}$). Dieses Resultat erlaubt es uns, die Deformation der Amplitudenfelder $L_a(y)$ durch die Veränderung des Mischungsparameters C_* im Hinblick auf das Überlappungsphänomen zu beschreiben: Man betrachtet einen Bereich im Raum, an dem das erste Amplitudenfeld $L_1(y)$ sehr viel größer ist als das zweite $L_2(y)$, und damit ξ_o ungefähr den Wert Null annimmt (mod 2π). Im Bezug auf die Mittelwerte bedeutet dies, daß in diesem Raumbereich

$$\cos^2 \frac{\xi_o}{2} > \overline{\cos^2 \frac{\xi_o}{2}} \quad (4.81a)$$

$$\sin^2 \frac{\xi_o}{2} < \overline{\sin^2 \frac{\xi_o}{2}} \quad (4.81b)$$

gilt, und damit für die positiven Gemische ($\sigma_* = +1$) das erste Amplitudenfeld L_1 durch den ersten modulierenden Faktor ($\varphi_1 > 1$) vergrößert wird, während das zweite abnimmt ($\varphi_2 < 1$). Dies bedeutet, daß auf dem Weg von einem reinen Zustand ($C_* = \infty, \varphi_a = 1$) zu einem positiven Gemisch ($C_* < \infty$), $\sigma_* = +1$ die modulierenden Faktoren φ_a das dominierende Amplitudenfeld verstärken und das schwächere noch zusätzlich abschwächen. Daraus folgt, daß die Amplitudenfelder im Falle positiver Gemische sich separieren (siehe Figur 4.5), während die Dichten in diesem Fall fusionieren (vgl. Figur 4.3 oben). Entsprechend gilt für die negativen Gemische ($\sigma_* = -1$), daß die Amplituden fusionieren (Figur 4.6) während die Dichten sich separieren (Figur 4.2 oben). Nun kann man diese qualitativen Argumente dadurch stützen, daß man eine quantitative Größe, den Überlappungsgrad $z_o[L]$ für die Amplitudenfelder einführt (Figur 4.8)

$$z_o[L] = 2 \int dV \frac{L_1^2 \cdot L_2^2}{L_1^2 + L_2^2}. \quad (4.82)$$

Zum Vergleich kann man eine entsprechende Größe auch für die Dichten ρ_a einführen, welche aus den Amplitudenfeldern nullter Ordnung ${}^{(0)}L_a$ gebildet werden (vgl. Figur 4.7)

$$z_o[\rho] \doteq 2 \int dV \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (4.83)$$

Vergleicht man Figur 4.7 mit 4.8, so kann man erkennen, daß die beiden Effekte tatsächlich genau gegenläufig sind. Man kann nun tatsächlich zeigen, daß die Dichten ρ_a , welche aus den Amplitudenfeldern unter Berücksichtigung der Korrekturen erster Ordnung $\{^1\}L_a(y)$ gebildet werden, invariant sind unter einer Veränderung des Mischungsparameters C_* (in der hier betrachteten Ordnung der Störungstheorie ($\sim C_*^{-2}$)). Dies geschieht, indem man die beiden Amplitudenkorrekturen erster Ordnung $\{^1\}L_a(y)$ (4.79) und die zugehörigen Strukturfunktionen g_s (4.14) und g_w (3.86) in erster Ordnung

$$g_w \simeq 1 + \frac{\sigma_*}{C_*^2} \left(\frac{{}^{(0)}L_1 {}^{(0)}L_2}{({}^{(0)}L_1)^2 + ({}^{(0)}L_2)^2} \right)^2 \quad (4.84a)$$

$$g_s \simeq \frac{\sigma_*}{C_*^2} \left(\frac{{}^{(0)}L_1 {}^{(0)}L_2}{({}^{(0)}L_1)^2 + ({}^{(0)}L_2)^2} \right)^2, \quad (4.84b)$$

in die definierenden Gleichungen (3.88) für die Dichten einsetzt. Damit wurde gezeigt, daß die Mischungsentartung sich nicht nur auf die Energieeigenwerte, sondern auch auf alle anderen observablen Größen auswirkt (die Amplitudenfelder selbst sind keine meßbaren Größen).

Zusammenfassend kann man sagen, daß bewiesen wurde, daß in dieser Ordnung der Störungstheorie C_*^{-2} ein System, welches in einer Mischung ohne Berücksichtigung der Austauschfelder vorliegt, physikalisch äquivalent zu einem System ist, das als ein reiner Zustand beschrieben werden kann. Im nächsten Abschnitt folgt nun der Nachweis, daß dieses Ergebnis in jeder Ordnung der Störungstheorie gültig ist, wobei man auf eine Transformation mit Gruppeneigenschaften stößt, die im folgenden als Mischungsgruppe bezeichnet wird.

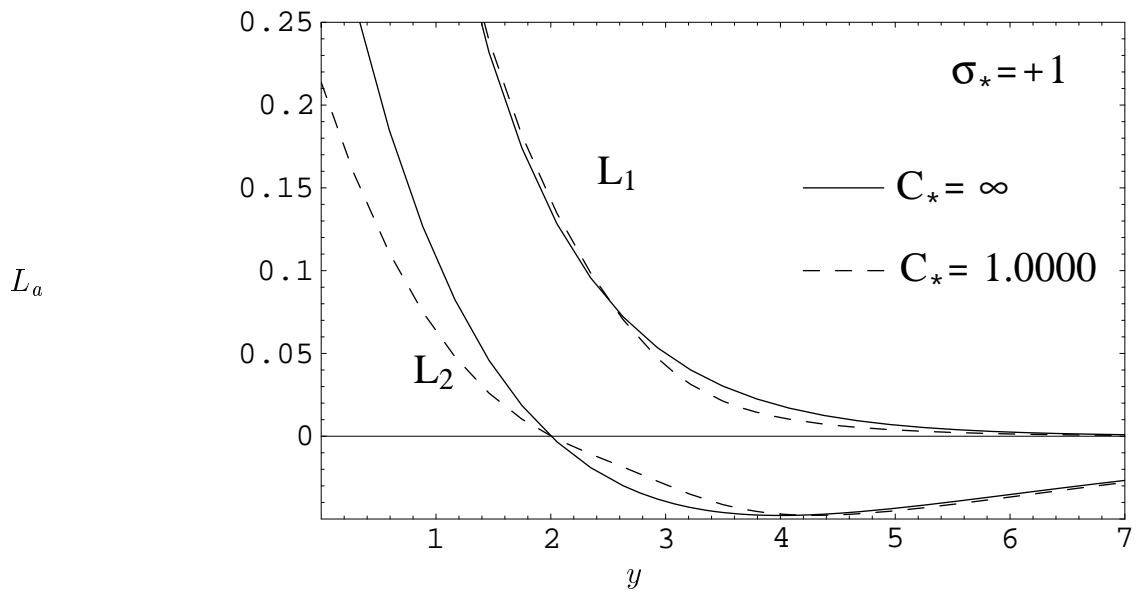


Abbildung 4.5: Deformation der Amplituden L_a für positive Gemische ($\sigma_* = +1$): Die Dalgarno-Lewis Methode erlaubt es, die Amplitudenkorrekturen erster Ordnung $\{^1\}L_a$ (4.79) exakt zu berechnen. Die Amplitudendeformationen werden erst signifikant, wenn man in die Nähe des Grenzwertes $C_* = 1.0$ kommt.

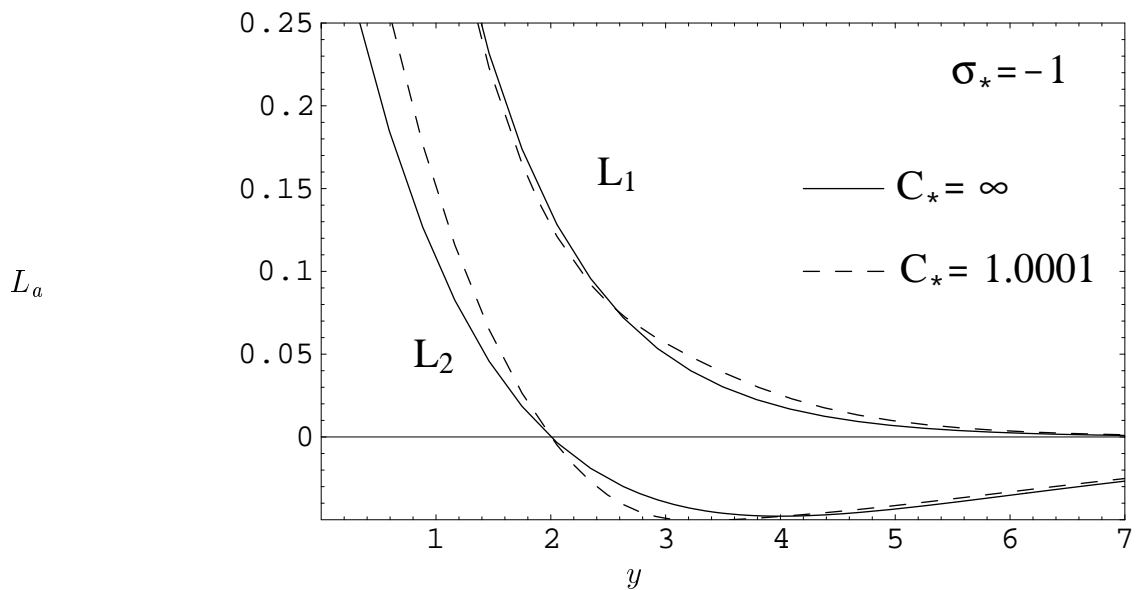


Abbildung 4.6: Deformation der Amplituden L_a für negative Gemische ($\sigma_* = -1$): Die Deformationen für negative Gemische werden erst signifikant, wenn Man in die Nähe des Grenzwertes $C_- = 1$ kommt (hier : $C_* = 1.0001$).

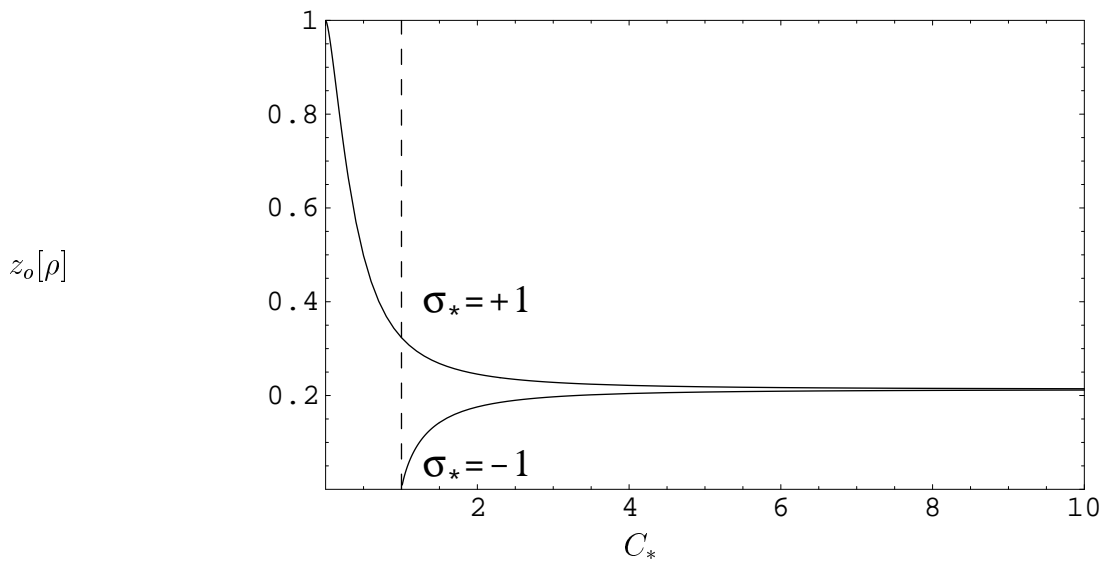


Abbildung 4.7: Überlappungsgrad $z_o(\rho)$ (4.83): Befinden sich beide Dichten in einem reinen Zustand, d.h. $\rho_1 = {}^{(0)}L_1(y)^2$ und $\rho_2 = {}^{(0)}L_2(y)^2$, so überlappen sich diese teilweise: $z_o[\rho] \rightarrow 0.21$. Bei abnehmendem Mischungsparameter ($C_* < \infty$) und festgehaltenen Amplituden ${}^{(0)}L_a$ verschmelzen die Dichten ρ_a für positive Gemische ($\sigma_* = +1$, $z_o[\rho] \rightarrow 1$ für $C_* \rightarrow C_+ = 0$) und separieren sich für negative Gemische ($\sigma_* = -1$, $z_o[\rho] \rightarrow 0$ für $C_* \rightarrow C_- = 1$.)

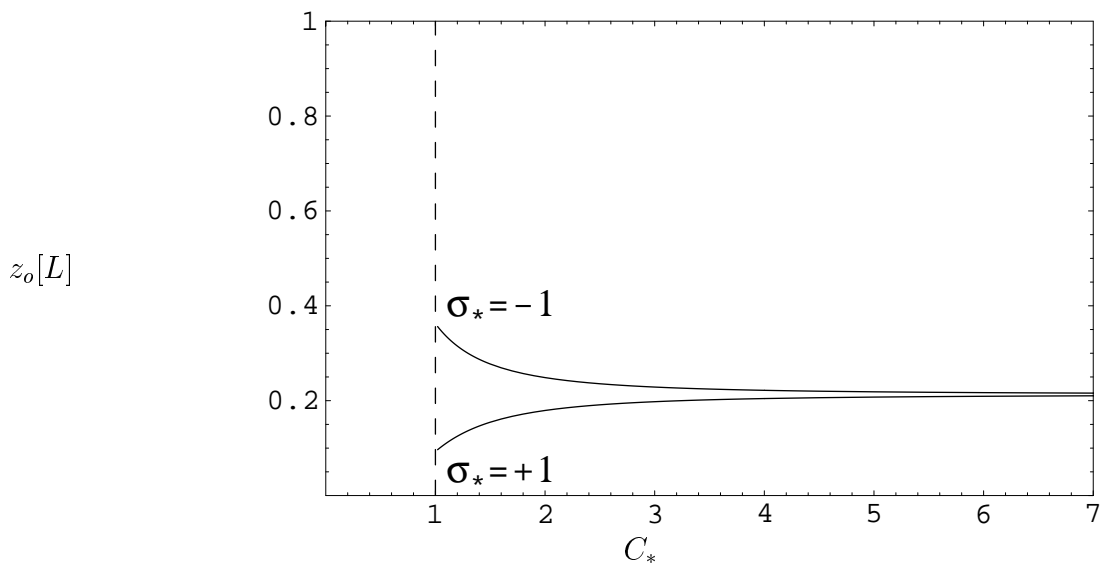


Abbildung 4.8: Überlappungsgrad $z_o[L]$ (4.82): Reduziert man den Mischungsparameter C_* , so tritt für den Überlappungsgrad der Amplituden L_a das entgegengesetzte Verhalten wie für die Dichten ρ_a auf: Wenn die Dichten verschmelzen, separieren sich die Amplituden und umgekehrt. Beide Effekte heben sich gegenseitig auf, so daß die Dichten ρ_a , welche aus den modifizierten L_a gebildet werden, invariant bleiben.

4.4 Die Mischungsgruppe

Wir kommen in diesem Abschnitt noch einmal auf den Zusammenhang zwischen den Dichten und den Amplitudenfeldern zurück, der schon in (3.88) angegeben wurde:

$$\rho_1 = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{P}_1) = g_w \cdot L_1^2 + g_s \cdot L_2^2 \quad (4.85a)$$

$$\rho_2 = \text{tr}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{P}_2) = g_w \cdot L_2^2 + g_s \cdot L_1^2 . \quad (4.85b)$$

Wie wir bereits aus dem Verhalten der Strukturfunktionen g_s und g_w im Grenzfall $C_* \rightarrow \infty$ wissen (vgl. (3.87)), stimmen die Dichten in diesem Fall mit den Quadraten der Lösungen von zwei entkoppelten Klein-Gordon Gleichungen überein, d.h. $\rho_a \rightarrow {}^{(0)}L_a^2$ ($a = 1, 2$). Da im Fall verschwindender Austauschfelder die Strukturfunktionen g_s und g_w nur von den Amplitudenfeldern abhängen, siehe (4.14) und (3.86), stellt die Beziehung (4.86) eine nicht-lineare Transformation $[R^{(2)}]$ der Amplituden dar

$$[R^{(2)}] : (L_1, L_2) \rightarrow (\rho_1, \rho_2) , \quad (4.86)$$

oder ausgeschrieben

$$\rho_1 = {}^{(2)}R_1(L_1, L_2) \doteq g_w(L_1, L_2) \cdot L_1^2 + g_s(L_1, L_2) \cdot L_2^2 \quad (4.87a)$$

$$\rho_2 = {}^{(2)}R_2(L_1, L_2) = g_w(L_1, L_2) \cdot L_2^2 + g_s(L_1, L_2) \cdot L_1^2 . \quad (4.87b)$$

Definiert man nun zwei neue Amplitudenfelder (bis auf das Vorzeichen) als

$$\left(L_1'\right)^2 \doteq \rho_1 \quad (4.88a)$$

$$\left(L_2'\right)^2 \doteq \rho_2 , \quad (4.88b)$$

so kann man die Dichtetransformation $[R^{(2)}]$ (4.86) auch als Amplitudentransformation $[R]$ auffassen

$$[R] : (L_1, L_2) \rightarrow (L_1', L_2') , \quad (4.89)$$

d.h.

$$L_1' = R_1(L_1, L_2) \doteq \sqrt{g_w \cdot L_1^2 + g_s \cdot L_2^2} \quad (4.90a)$$

$$L_2' = R_2(L_1, L_2) = \sqrt{g_w \cdot L_2^2 + g_s \cdot L_1^2} . \quad (4.90b)$$

Beim Wurzelziehen hat man darauf zu achten, daß die Vorzeichen der neuen Amplituden L_a' in einer solchen Weise gewählt werden, daß die L_a' stetig differenzierbar über der Raumzeit bleiben, wenn auch die Ausgangsamplituden diese

Eigenschaft besitzen. Hier muß beachtet werden, daß die Lösungen des quasi-linearen Systems von Klein-Gordon-Gleichungen (4.8) nur bis auf ein Vorzeichen festliegen.

Die Transformationen (4.89) haben eine interessante Eigenschaft, nämlich die Effekte von Fusion ($\rho_1(x) \approx \rho_2(x)$) für positive Gemische und Separation ($\rho_1(x) \cdot \rho_2(x) \approx 0$) für negative Gemische, wie oben schon gezeigt wurde. In diesem Abschnitt behandeln wir die inverse Transformation $[\Lambda] = [R^{-1}]$, d.h. wir definieren

$$[\Lambda] : (L_1, L_2) \rightarrow (\acute{L}_1, \acute{L}_2), \quad (4.91)$$

mit der expliziten Darstellung (vgl. (4.14) und (3.86))

$$\acute{L}_1 = \Lambda_1(L_1, L_2) \doteq \sqrt{\frac{1}{2}(L_1^2 - L_2^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(L_1^2 - L_2^2)^2 + \lambda_* (2L_1L_2)^2}} \quad (4.92a)$$

$$\acute{L}_2 = \Lambda_2(L_1, L_2) \doteq \sqrt{-\frac{1}{2}(L_1^2 - L_2^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(L_1^2 - L_2^2)^2 + \lambda_* (2L_1L_2)^2}}. \quad (4.92b)$$

Die überraschendste Eigenschaft dieser Transformationen (4.92) ist, daß sie eine Gruppe mit dem Gruppenparameter λ_* bilden, welcher definiert ist als

$$\lambda_* \doteq \frac{1}{1 + \frac{\sigma_*}{C_*^2}}. \quad (4.93)$$

Führt man also zwei Transformationen (4.92) hintereinander aus, welche durch $^{(1)}\lambda_*$ und $^{(2)}\lambda_*$ parametrisiert werden, so gilt

$$^{(3)}\lambda_* = ^{(1)}\lambda_* \cdot ^{(2)}\lambda_*. \quad (4.94)$$

Das Gruppenelement Λ^{-1} wird durch λ_*^{-1} parametrisiert und stellt das Inverse des Gruppenelements Λ dar, welches durch λ_* parametrisiert wird. Die Identität ist gegeben durch $\lambda_* = 1$ ($\Leftrightarrow C_* = \infty$). Die Mischungsgruppe (4.92) hat einige Gemeinsamkeiten mit der Lorentz-Gruppe $SO(1, 1)$ in 1+1 Dimensionen

$$\acute{L}_1 = \cosh \beta_* \cdot L_1 + \sinh \beta_* \cdot L_2 \quad (4.95a)$$

$$\acute{L}_2 = \sinh \beta_* \cdot L_1 + \cosh \beta_* \cdot L_2. \quad (4.95b)$$

In beiden Fällen bleiben die Lichtkegel ($L_1 = \pm L_2$) als ganzes invariant und ein Punkt $L_1 = L_2$ ($\doteq L_c$) auf dem Kegel wird auf diesem auf folgende Weise verschoben

$$L_C \Rightarrow \acute{L}_c = \begin{cases} (4\lambda_*)^{1/4} \cdot L_c, & \text{bei } [\Lambda] \quad (4.92) \\ e^{\beta_*} \cdot L_c, & \text{bei } SO(1, 1) \quad (4.95). \end{cases} \quad (4.96)$$

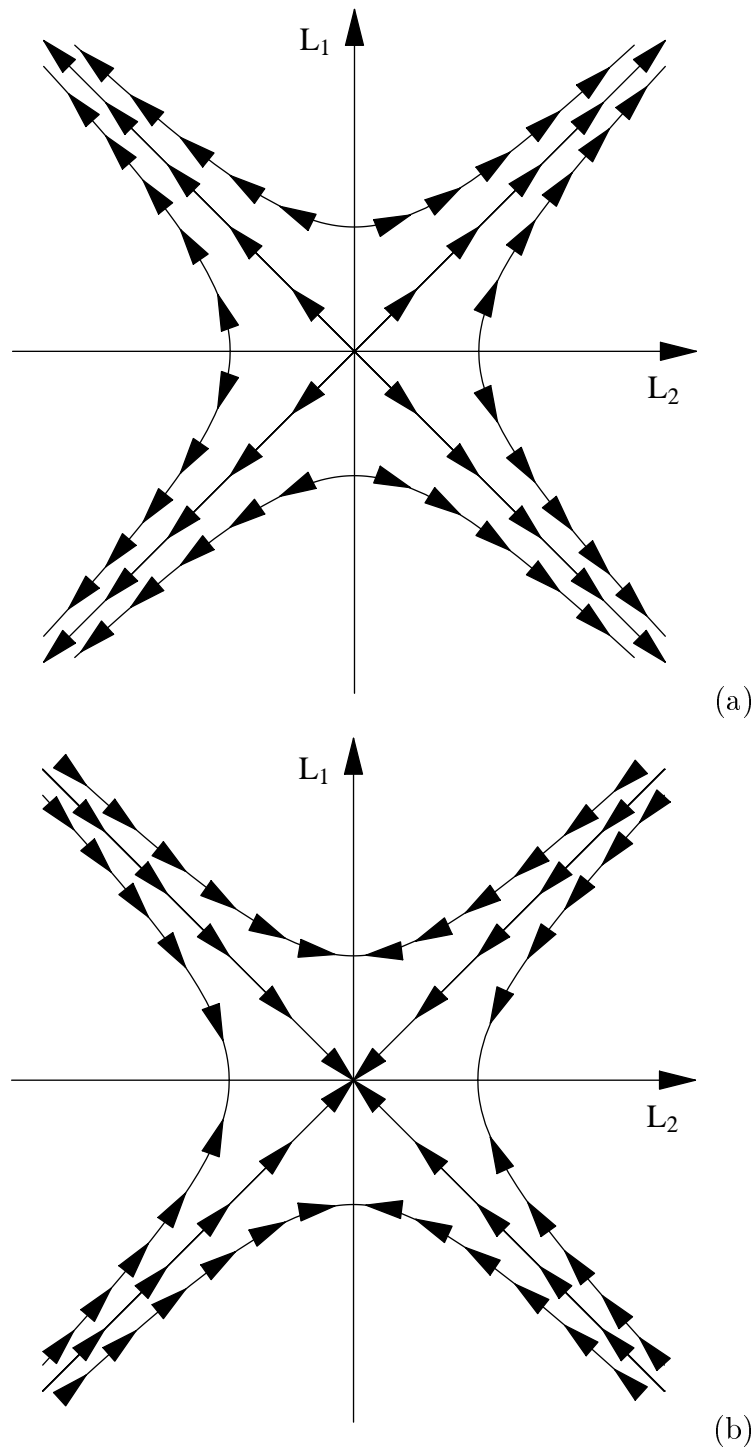


Abbildung 4.9: Die Mischungsgruppe $[\Lambda]$ (4.92) zerfällt in zwei Teile: Expansive Transformationen ($\lambda_* > 1$, siehe Figur (a)) und kontraktive Transformationen ($\lambda_* < 1$, siehe Figur (b)). Die Menge der invarianten Punkte besteht aus den Lichtkegeln $L_1^2 = L_2^2$ und den Achsen $L_1 \equiv 0$ bzw. $L_2 \equiv 0$. Beide invarianten Mengen werden durch die transformierten Punkte asymptotisch angenähert: Die Lichtkegel für eine *expansive* Transformation (Fusion der Amplituden, vgl. Figur 4.10 (b)) und die Achsen für eine *kontraktive* Transformation (Separation der Amplituden, vgl. Figur 4.10(c)). Aber die Orbits als ganzes stimmen bei der Mischungsgruppe $[\Lambda]$ (4.92) und der Lorentz-Gruppe $SO(1,1)$ (4.95) überein.

Darüberhinaus ist der Orbit eines Punktes (L_1, L_2) unter beiden Gruppenaktionen derselbe und wird durch die beiden Hyperboloide

$$'L_1^2 - 'L_2^2 = \text{const.} (= L_1^2 - L_2^2), \quad (4.97)$$

gegeben, vgl. Figur 4.9. Aber offensichtlich werden Punkte auf diesen Orbits von beiden Gruppentransformationen in unterschiedlicher Weise verschoben. So wird beispielsweise die "Raum" und "Zeit"-Achse ($L_1 \equiv 0$ oder $L_2 \equiv 0$) im Falle der Lorentz-Gruppe $SO(1, 1)$ auf ein neues Achsensystem transformiert, so daß die bekannten Effekte von Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation auftreten. Im Gegensatz dazu bleiben die Punkte auf den Achsen bei einer Transformation durch die Mischungsgruppe $[\Lambda]$ fest, d.h.

$$\Lambda_1(L_1, 0) = L_1; \quad \Lambda_2(L_1, 0) = 0 \quad (4.98a)$$

$$\Lambda_1(0, L_2) = 0; \quad \Lambda_2(0, L_2) = L_2. \quad (4.98b)$$

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß das Produkt der Amplituden sich unter der Mischungsgruppe folgendermaßen transformiert

$$\left('L_1 \cdot 'L_2\right)^2 = \lambda_* \left(L_1 \cdot L_2\right)^2. \quad (4.99)$$

Diese Eigenschaft findet in der Lorentz-Gruppe keine Entsprechung; sie stellt die Orthogonalität der Amplitudenfelder vor und nach der Transformation sicher (siehe (4.102) weiter unten). Daher beziehen sich die meisten Ähnlichkeiten beider Gruppen hauptsächlich auf die Umgebung der Lichtkegel. Dies wird besonders deutlich, wenn man die Pullback-Metrik γ_{ab} der Lorentz-Metrik $\eta_{ab} = \text{diag}[1, -1]$

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial 'L_c}{\partial L_a} \frac{\partial 'L_d}{\partial L_b} \eta_{cd}. \quad (4.100)$$

betrachtet. Denn für die Mischungsgruppe findet man hier durch explizite Berechnung

$$\gamma_{11} = 1 - (\lambda_* - 1) \frac{L_2^2 (L_1^2 - L_2^2)}{\left('L_1^2 + 'L_2^2\right)^2} \quad (4.101a)$$

$$\gamma_{22} = -1 - (\lambda_* - 1) \frac{L_1^2 (L_1^2 - L_2^2)}{\left('L_1^2 + 'L_2^2\right)^2} \quad (4.101b)$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = (\lambda_* - 1) \frac{L_1 L_2 (L_1^2 - L_2^2)}{\left('L_1^2 + 'L_2^2\right)^2}. \quad (4.101c)$$

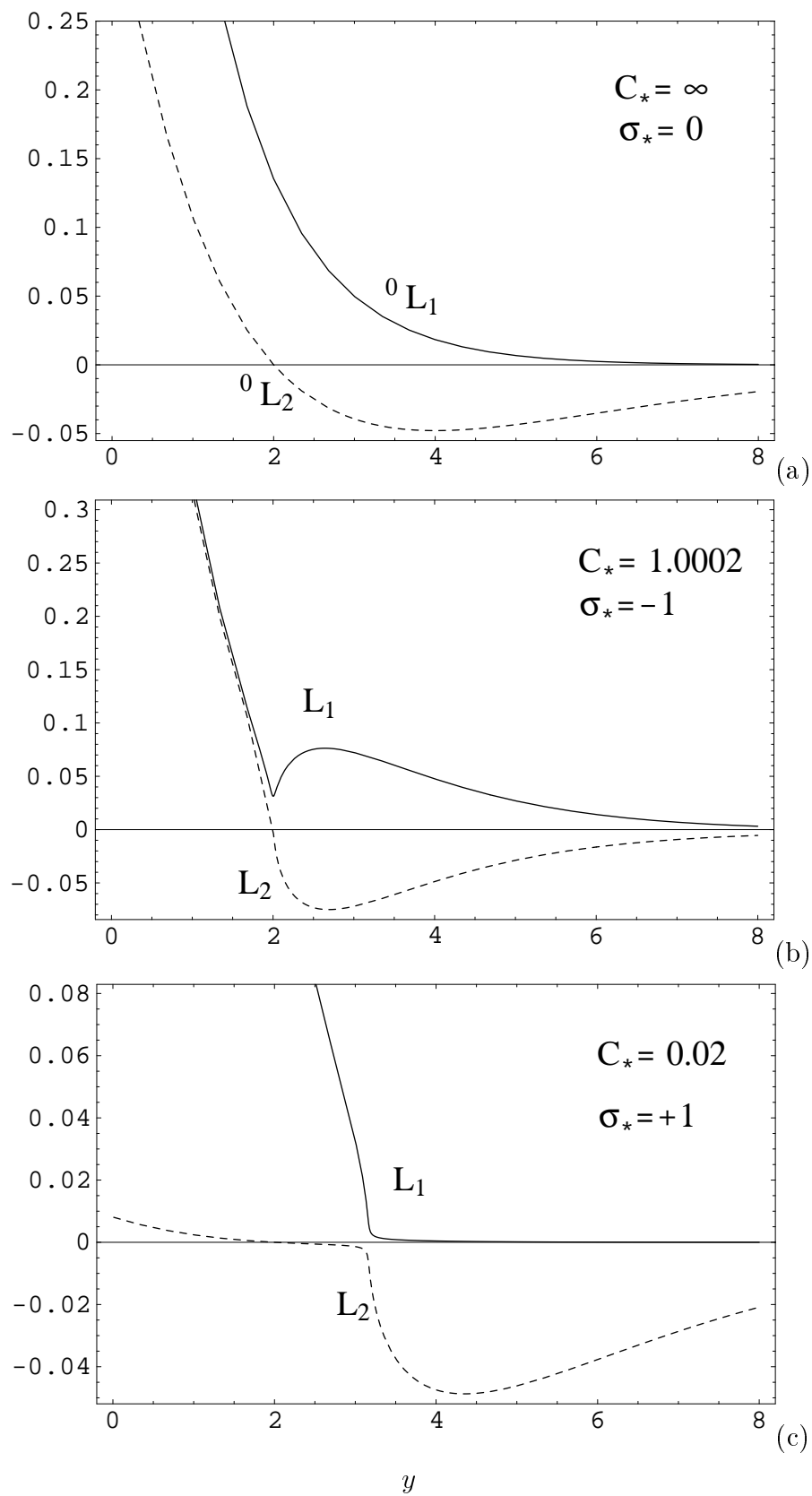


Abbildung 4.10: Die Mischungstransformationen $[\Lambda]$ (4.92) deformieren die ursprünglichen (dimensionslosen) Amplituden 0L_a (4.25)-(4.26), siehe Figur (a), in einer solchen Weise, daß im expansiven Fall ($\lambda_* > 1$) die Amplituden dieselbe Form annehmen (bis auf ihr Vorzeichen): Fusion ($L_1 = L_2$) bzw. Anti-Fusion ($L_1 = -L_2$), siehe Figur (b). Im kontraktiven Fall, $\lambda_* < 1$, siehe Figur (c), separieren die Amplituden.

Also stimmt die Pullback-Metrik γ_{ab} in der Nähe der Lichtkegel ($L_1^2 = L_2^2$) mit der Lorentz-Metrik η_{ab} überein, und zwar für jeden Wert des Gruppenparameters λ_* . Es ist nun gerade dieses Verhalten der Mischungsgruppe in der Nähe der Lichtkegel und der Achsen, welches für die Effekte von Fusion und Separation verantwortlich ist. Verfolgt man das Orbit eines Punktes (L_1, L_2) während einer Gruppen-Transformation mit wachsendem Gruppenparameter (expansive Transformation: $\lambda_* > 1$, Figur 4.9(a)), so wird der Lichtkegel ($L_1^2 = L_2^2$) durch dieses Orbit immer stärker angenähert, was dazu führt, daß die Werte der beiden Amplitudenfelder $L_a(x)$ (bis auf ihr Vorzeichen) identisch werden. Dies ist der Effekt der Amplitudenfusion ($L_1(x) \approx L_2(x)$), siehe Figur 4.10(b). Da für diese Transformationen $\lambda_* > 1$ gilt, ist $\sigma_* = -1$ (vgl (4.93)), so daß der Fusionseffekt nur für die negativen Gemische auftritt. Der entgegengesetzte Prozeß der Amplitudentrennung (vgl. Figur 4.10(c)) tritt für positive Gemische ($\sigma_* = +1$) auf, da hier die Mischungstransformationen auf kontraktive Weise wirken (Figur 4.9(b), $\lambda_* < 1$). Diese kontraktive Gruppenaktion läßt die kleinere der beiden Dichten gegen Null gehen, während sie die größere bei einem endlichen Wert beläßt. Faßt man also beide Amplituden als Felder über der Raumzeit auf, so müssen diese sich separieren, was bedeutet, daß sich Regionen in der Raum-Zeit bilden, in denen nur die eine der beiden Amplituden vorkommt, während die andere gegen Null strebt. Das geometrische Aussehen dieser Regionen wird durch die Flächen gegeben, an denen die Amplituden ihre Nullstellen besitzen, d.h. durch 2-Sphären im 3-dimensionalen Raum, wenn man davon ausgeht, daß die Feldkonfigurationen sphärische Symmetrie aufweisen. Als ein Beispiel für eine solche statische, sphärisch symmetrische 2-Teilchen Konfiguration betrachten wir den nicht-relativistischen Grundzustand (${}^{(0)}L_1$) und den ersten angeregten Zustand (${}^{(0)}L_2$) des 1-Teilchen Coulomb-Problems, deren explizite Gestalt in reskaliert Form bereits in (4.24)-(4.25) angegeben wurde. Die beiden 1-Teilchen Zustände sind orthonormal im folgenden Sinne:

$$\int_0^\infty dy y^2 {}^{(0)}L_a(y) {}^{(0)}L_b(y) = \frac{1}{4} \delta_{ab} \quad (4.102)$$

$$(a, b | = 1, 2).$$

Nun verwendet man die zwei 1-Teilchen Zustände ${}^{(0)}L_1$ und ${}^{(0)}L_2$ als Ausgangsbasis für eine Mischungstransformation (4.92) und betrachtet die resultierenden Amplituden $L_a(y)$ ($a = 1, 2$)

$$L_a(y) = \Lambda_a ({}^{(0)}L_1(y), {}^{(0)}L_2(y)), \quad (4.103)$$

vergleiche Figur 4.10. Offensichtlich verschmelzen die Amplituden für negative Gemische ($\sigma_* = -1 \Leftrightarrow \lambda_* > 1$), wohingegen sie sich für positive Gemische ($\sigma_* = +1 \Leftrightarrow \lambda_* < 1$) voneinander trennen. Damit zeigen die Amplituden L_a das umgekehrte Verhalten wie die Dichten ρ_a (4.87) (siehe oben), welche für positive Gemische verschmelzen und sich für negative Gemische separieren. Offensichtlich ist der Grund hierfür die Tatsache, daß die Dichten ρ_a sich über die inversen Mischungstransformationen $[R]$ (4.89) anstelle der hier betrachteten $[\Lambda]$ (4.91) für die Amplituden L_a transformieren.

4.5 Exakte Lösungen

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun relativ einfach, exakte Lösungen $L_a(x)$ für die gekoppelten Amplitudengleichungen (4.8) zu finden, obwohl die Mischungspotentiale W_a , welche durch die Gleichungen (4.13) gegeben sind, stark nichtlineare Funktionen der gesuchten Amplituden L_a sind. Dies liegt daran, daß die Lösungen des auf komplizierte Weise gekoppelten Systems (4.8) mit den Lösungen des einfachen, ungekoppelten Systems von 1-Teilchen Klein-Gordon Gleichungen (3.82) genau durch eine Mischungstransformation $[\Lambda]$ (4.91) zusammenhängen. Andererseits sind exakte Lösungen der 1-Teilchen Klein-Gordon Gleichungen (3.82) für viele physikalisch relevante Probleme bekannt (für die exakten Lösungen des statischen, relativistischen Coulomb-Problems sei auf [33] verwiesen). Damit sind dann aber auch die Lösungen $L_a(x)$ der vollen, gekoppelten Amplitudengleichungen (4.8) ebenso exakt berechenbar. Daher sind die Amplitudenfelder L_a , welche in Figur 4.10 dargestellt wurden, als exakte 2-Teilchen Lösungen des gesamten, zeitunabhängigen Amplitudensystems (4.8) im Coulombpotential anzusehen. Nur aufgrund der Tatsache, daß die nichtrelativistischen Lösungen einfacher zu handhaben sind, haben wir uns auf die nichtrelativistische Form (4.24)-(4.25) beschränkt, welche von der exakten, relativistischen Lösung nur in der Ordnung α_*^2 abweicht.

Um die Existenz exakter Lösungen zu beweisen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir zeigen, daß die Mischungstransformationen $[\Lambda]$ (4.91) die Amplitudengleichungen (4.8) forminvariant lassen, wofür man das Transformationsverhalten der Mischungspotentiale W_a kennen muß. Die Forminvarianz wird gezeigt, indem man die Gruppeneigenschaft der Mischungstransformation ausnützt. Genauer gesagt führt man die allgemeine Transformation $\Lambda : L_a \rightarrow 'L_a$ durch, indem man von den ursprünglichen Amplituden L_a zunächst auf einen reinen Zustand

transformiert, welcher die Lösungen des ungekoppelten Klein-Gordon Systems ${}^{(0)}L_a$ (4.24)-(4.25) besitzt, da die Mischungspotentiale hier verschwinden. Danach transformiert man diese Amplituden ${}^{(0)}L_a$ in die gewünschten neuen Amplituden, also insgesamt $'L_a : L_a \Rightarrow {}^{(0)}L_a \Rightarrow 'L_a$. Offensichtlich wird der gewünschte Beweis durch diese Hintereinanderausführung von Transformationen erbracht, wenn die Mischungspotentiale $'W_a$ ausgedrückt durch die Amplituden $'L_a$ genau dieselbe formale Abhängigkeit von den $'L_a$ besitzen wie die ursprünglichen Potentiale W_a (4.13) von den L_a . Um den Beweis einer solchen Abhängigkeit zu führen, machen wir uns die Quasi-Linearität der Mischungstransformationen zunutze.

Zunächst macht man sich klar, daß der d'Alambert-Operator $\square'L_a$ in den neuen Amplituden $'L_a$, ausgedrückt durch die alten Variablen L_a ($a = 1, 2$), folgendermaßen aussieht:

$$\square'L_a = \sum_{b,c=1}^2 \frac{\partial^2 L_a}{\partial L_b \cdot \partial L_c} (\partial^\mu L_a) (\partial_\mu L_b) + \sum_{b=1}^2 \frac{\partial L_a}{\partial L_b} \cdot \square L_b . \quad (4.104)$$

Wenn also die alten Amplituden L_a dem System (4.8) gehorchen, so müssen die neuen Amplituden $'L_a$ den folgenden Gleichungen gehorchen

$$\begin{aligned} \square'L_a + \left(L_1 \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_1} + L_2 \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_2} \right) \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{a\mu} K_a^\mu + 'W_a \right\} = \\ \left(L_1 \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_1} + L_2 \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_2} \right) \cdot 'W_a - \sum_{b=1}^2 L_b \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_b} \cdot W_b + L_d \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_d} \left[K_{1\mu} K_1^\mu - K_{2\mu} K_2^\mu \right] \\ + \sum_{b,c=1}^2 \frac{\partial^2 L_a}{\partial L_b \cdot \partial L_c} (\partial^\mu L_b) (\partial_\mu L_c) \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$(d \neq a) .$$

Diese neuen Amplituden $'L_a$ sollen dieselben Gleichungen (4.8) wie die ursprünglichen Amplituden L_a erfüllen, d.h. es soll gelten

$$\square'L_a + 'L_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{a\mu} K_a^\mu + 'W_a \right\} = 0 , \quad (4.106)$$

wobei $'W_a$ dieselbe funktionale Abhängigkeit (4.13) von $'L_a$ besitzt wie W_a von L_a . Um diese Forminvarianz der Amplitudengleichungen zu zeigen, benötigt man die Quasi-Linearität der Mischungstransformationen ($a = 1, 2$):

$$L_1 \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_1} + L_2 \cdot \frac{\partial L_a}{\partial L_2} = 'L_a , \quad (4.107)$$

und darüberhinaus, daß die Mischungspotentiale W_a sich auf folgende Weise transformieren ($d \neq a$)

$$\begin{aligned} \dot{L}_a \cdot {}'W_a &= \sum_{b=1}^2 L_b \cdot \frac{\partial \dot{L}_a}{\partial L_b} \cdot W_b - L_d \cdot \frac{\partial \dot{L}_a}{\partial L_d} \left[K_{1\mu} K_1^\mu - K_{2\mu} K_2^\mu \right] \\ &\quad - \sum_{b,c=1}^2 \frac{\partial^2 \dot{L}_a}{\partial L_b \partial L_c} \left(\partial^\mu L_b \right) \cdot \left(\partial_\mu L_c \right). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Hierbei stellen wir uns für diesen Beweis vor, daß die alten Amplituden L_a identisch sind mit den Amplituden für einen reinen Zustand ${}^{(0)}L_a$, welche die gewöhnlichen Klein-Gordon Gleichungen (3.82) mit verschwindenden Mischungspotentialen ($W_a \equiv 0$) erfüllen, sowie daß die neuen Amplituden \dot{L}_a nun gerade die gewünschten Lösungen des Amplitudensystems (4.8) ($\dot{L}_a \rightarrow L_a$) darstellen. Die entsprechenden Mischungspotentiale berechnet man dann unter Zurhilfenahme von (4.108) als ($b \neq a$)

$${}'W_a = -(-1)^a \cdot \frac{L_b}{L_a} \frac{\partial \dot{L}_a}{\partial L_b} \left[K_{1\mu} K_1^\mu - K_{2\mu} K_2^\mu \right] - \frac{1}{L_a} \sum_{b,c=1}^2 \frac{\partial^2 \dot{L}_a}{\partial L_b \partial L_c} \left(\partial^\mu L_b \right) \left(\partial_\mu L_c \right). \quad (4.109)$$

Wie oben schon erklärt, benötigt man für unseren Beweis die Identifizierung der Mischungspotentiale ${}'W_a$ (4.109) mit den W_a der Form (4.13). Daher muß man die Gültigkeit folgender Beziehungen nachweisen, wobei die erste sich auf den kinetischen Teil der Mischungspotentiale bezieht

$$\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\partial \dot{L}_2}{\partial L_1} = \frac{L_2}{L_1} \frac{\partial \dot{L}_1}{\partial L_2} = -g_s(\dot{L}_1, \dot{L}_2) \quad (4.110a)$$

und die zweite auf die Ableitungen

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{L_a} \sum_{b,c=1}^2 \frac{\partial^2 \dot{L}_a}{\partial L_b \partial L_c} \left(\partial^\mu L_b \right) \left(\partial_\mu L_c \right) = \\ & \sigma_* \cdot \frac{T_a}{L_1^2 + L_2^2} \cdot \frac{(\dot{L}_1 \partial_\mu \dot{L}_2 - \dot{L}_2 \partial_\mu \dot{L}_1) (\dot{L}_1 \partial^\mu \dot{L}_2 - \dot{L}_2 \partial^\mu \dot{L}_1)}{\sigma_* (2L_1 L_2)^2 + C_*^2 (L_1^2 + L_2^2)^2} \end{aligned} \quad (4.110b)$$

wobei die Funktionen $T_a = T_a(\dot{L}_1, \dot{L}_2)$ gegeben sind durch

$$T_1 = \dot{L}_1^2 - 3\dot{L}_2^2 \quad (4.111a)$$

$$T_2 = \dot{L}_2^2 - 3\dot{L}_1^2. \quad (4.111b)$$

Der Nachweis für die Gültigkeit von (4.110a)-(4.110b) ist nur deshalb möglich, weil die Mischungstransformationen einen quasi-linearen Charakter aufweisen (vgl. 4.107). In der Tat ist diese Eigenschaft die Definition der Homogenität ersten Grades, und es versteht sich von selbst, daß die Mischungstransformation $[\Lambda]$ (4.92) gerade von diesem Typ ist (wie übrigens auch die Lorentz-Transformation (4.95)). Aber diese Beobachtung führt uns direkt auf den Nachweis der ersten Beziehung (4.110a). Der Grund hierfür liegt darin, daß die homogenen Funktionen (4.107) ebenso als die Lösungen des folgenden Systems partieller Differentialgleichungen definiert werden können:

$$\frac{\partial \dot{L}_1}{\partial L_1} = \frac{\dot{L}_1}{L_1} \cdot g_w \quad (4.112a)$$

$$\frac{\partial \dot{L}_1}{\partial L_2} = -\frac{\dot{L}_1}{L_2} \cdot g_s \quad (4.112b)$$

$$\frac{\partial \dot{L}_2}{\partial L_1} = -\frac{\dot{L}_2}{L_1} \cdot g_s \quad (4.112c)$$

$$\frac{\partial \dot{L}_2}{\partial L_2} = \frac{\dot{L}_2}{L_2} \cdot g_w \quad (4.112d)$$

Hier müssen die Funktionen $g_w(L_1, L_2)$ und $g_s(L_1, L_2)$ homogen vom Grade Null sein

$$L_1 \cdot \frac{\partial g_w}{\partial L_1} + L_2 \cdot \frac{\partial g_w}{\partial L_2} = 0 \quad (4.113a)$$

$$L_1 \cdot \frac{\partial g_s}{\partial L_1} + L_2 \cdot \frac{\partial g_s}{\partial L_2} = 0 \quad (4.113b)$$

und der Bedingung

$$g_w - g_s = 1 \quad (4.114)$$

gehörchen. Aber offensichtlich sind die Strukturfunktionen g_w und g_s (3.85)-(3.86), bzw. (4.14) gerade von diesem Typ (4.112)-(4.114) und damit ist die erste Bedingung (4.110a) trivialerweise erfüllt.

Andererseits bringt die zweite Bedingung (4.110b) die Ableitungen zweiter Ordnung der homogenen Funktionen \dot{L}_a ins Spiel, was es nötig macht, zu den Gleichungen erster Ordnung (4.107) das Gegenstück in zweiter Ordnung aufzusuchen:

$$L_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \dot{L}_a}{(\partial L_1)^2} + 2 L_1 L_2 \frac{\partial^2 \dot{L}_a}{\partial L_1 \partial L_2} + L_2^2 \frac{\partial^2 \dot{L}_a}{(\partial L_2)^2} = 0 \quad (4.115)$$

$$(a = 1, 2)$$

Diese Gleichung gilt allgemein für alle quasilinearen Funktionen. Sie erzwingt für

die zweiten Ableitungen der neuen Amplituden folgende Form ($a = 1, 2$)

$$\frac{\partial^2 \mathring{L}_a}{(\partial L_1)^2} = S_a \cdot L_2^2 \quad (4.116a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathring{L}_a}{\partial L_1 \partial L_2} = -S_a \cdot L_1 L_2 \quad (4.116b)$$

$$\frac{\partial^2 \mathring{L}_a}{(\partial L_2)^2} = S_a \cdot L_1^2. \quad (4.116c)$$

Im speziellen Fall der Mischungsgruppe $[\Lambda]$ (4.91) findet man für die Funktionen $S_a(\mathring{L}_1, \mathring{L}_2)$ durch explizite Berechnung:

$$S_a = (\lambda_* - 1) \mathring{L}_a \cdot \frac{T_a}{(\mathring{L}_1^2 + \mathring{L}_2^2)^3}, \quad (4.117)$$

wobei die Funktionen T_a bereits durch die Gleichungen (4.111) definiert wurden. Nun sorgt jedoch die spezielle Form der zweiten Ableitungen (4.116) zusammen mit dem eben gefundenen Resultat (4.117) dafür, daß man die zweite Bedingung (4.110b) folgendermaßen schreiben kann

$$\begin{aligned} & (L_1 \partial_\mu L_2 - L_2 \partial_\mu L_1) (L_1 \partial^\mu L_2 - L_2 \partial^\mu L_1) = \\ & - \frac{\sigma_*}{\lambda_* - 1} \frac{(\mathring{L}_1^2 + \mathring{L}_2^2)^2}{\sigma_* (2\mathring{L}_1 \mathring{L}_2)^2 + C_*^2 (\mathring{L}_1^2 + \mathring{L}_2^2)^2} \cdot (\mathring{L}_1 \partial_\mu \mathring{L}_2 - \mathring{L}_2 \partial_\mu \mathring{L}_1) (\mathring{L}_1 \partial^\mu \mathring{L}_2 - \mathring{L}_2 \partial^\mu \mathring{L}_1) \end{aligned} \quad (4.118)$$

Glücklicherweise ist diese Beziehung fast schon eine Trivialität, da man aus der Homogenität der Mischungstransformationen schließen kann, daß sich die Ableitungen in der folgenden Weise transformieren:

$$L_1 \partial_\mu L_2 - L_2 \partial_\mu L_1 = \frac{1}{D_L} (\mathring{L}_1 \partial_\mu \mathring{L}_2 - \mathring{L}_2 \partial_\mu \mathring{L}_1) \quad (4.119)$$

wobei D_L die Determinante der Jacobimatrix

$$D_L = \det \left(\frac{\partial \mathring{L}_a}{\partial L_b} \right). \quad (4.120)$$

bezeichnet. Für unseren Spezialfall der Mischungsgruppe $[\Lambda]$ (4.91) findet man durch direkte Berechnung

$$D_L = \frac{\mathring{L}_1 \mathring{L}_2}{L_1 L_2} \cdot \frac{L_1^2 + L_2^2}{\mathring{L}_1^2 + \mathring{L}_2^2}, \quad (4.121)$$

was dann unmittelbar die zu zeigende Bedingung (4.118) als gültig bestätigt (unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen dem Mischungsindex σ_* und dem Gruppenparameter λ_* (4.93) sowie der Gleichung (4.99)).

Damit ist der Beweis abgeschlossen und die Mischungsgruppe $[\Lambda]$ als eine Gruppe identifiziert, die das Amplitudensystem (4.8) invariant läßt, wobei die invariante Form der Mischungspotentiale durch (4.13) gegeben ist. Das Vorhandensein der Mischungspotentiale im Amplitudensystem (4.8) ist nötig, um die Effekte von Fusion und Separation zu ermöglichen, wie sie in Figur 4.10 dargestellt sind. Hierbei wurde, wie in den vorangegangenen Abschnitten, ein 2-Teilchen System im statischen, radialsymmetrischen Coulombpotential in nichtrelativistischer Näherung untersucht. Die aufgezeichneten Lösungen wurden aus den Lösungen des ungekoppelten Systems (4.17) durch Anwendung der Mischungstransformation berechnet. Diese Lösungen können auch in die Mischungspotentiale $W_a(\vec{r})$ eingesetzt werden, welche die geeignete Form besitzen, um für die Separations- und Fusionseffekte zu sorgen, vgl. Figur 4.11 und 4.12. Offensichtlich kann man diese Effekte der RST als das Gegenstück zu den analogen Effekten in der konventionellen Quantentheorie anzusehen, welche durch die (Anti-)Symmetrisierung der 2-Teilchen Wellenfunktionen zustande kommen.

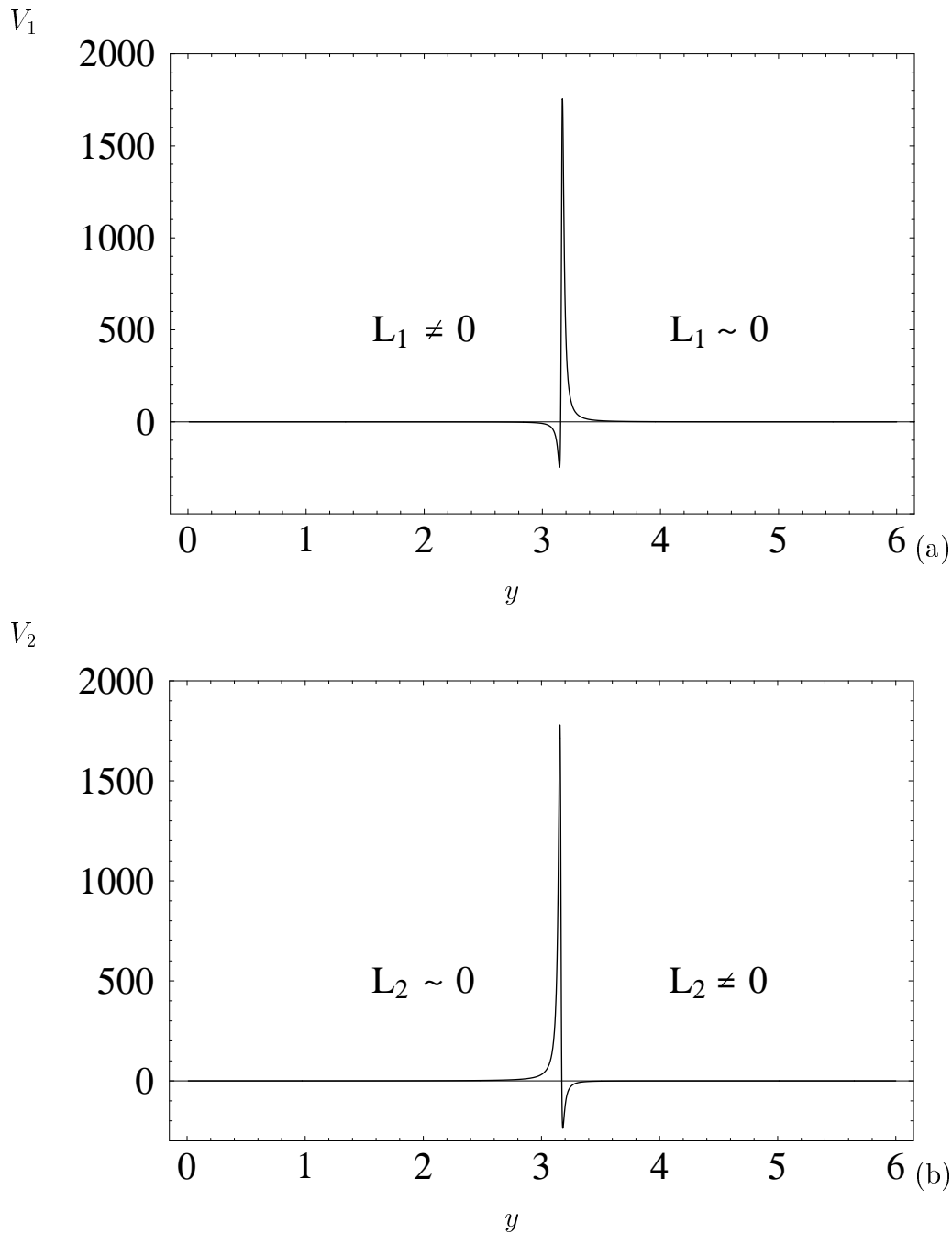


Abbildung 4.11: Im Falle positiver Gemische ($\sigma_* = +1$) wird die Separation der Amplituden durch die Gestalt der Mischungspotentiale W_a (4.13) (in reskaliertes Form $V_a = \frac{\hbar^2}{2M} W_a$) verursacht, welche als abstoßende Wände wirken. Dadurch wird die erste Amplitude L_1 auf die linke Seite der Wand in Figur (a) beschränkt, sowie die zweite Amplitude L_2 auf die rechte Seite der Wand in Figur (b). Die Amplitudenfelder sind auf diejenige Seite der abstoßenden Wand beschränkt, vor der das Mischungspotential kurz anziehend wirkt. Mischungsparameter: $C_* = 0.02$. Die Potentiale V_1 und V_2 wurden in atomaren Einheiten von $\frac{e^2}{2a_B} = 13.61$ [eV] gemessen.

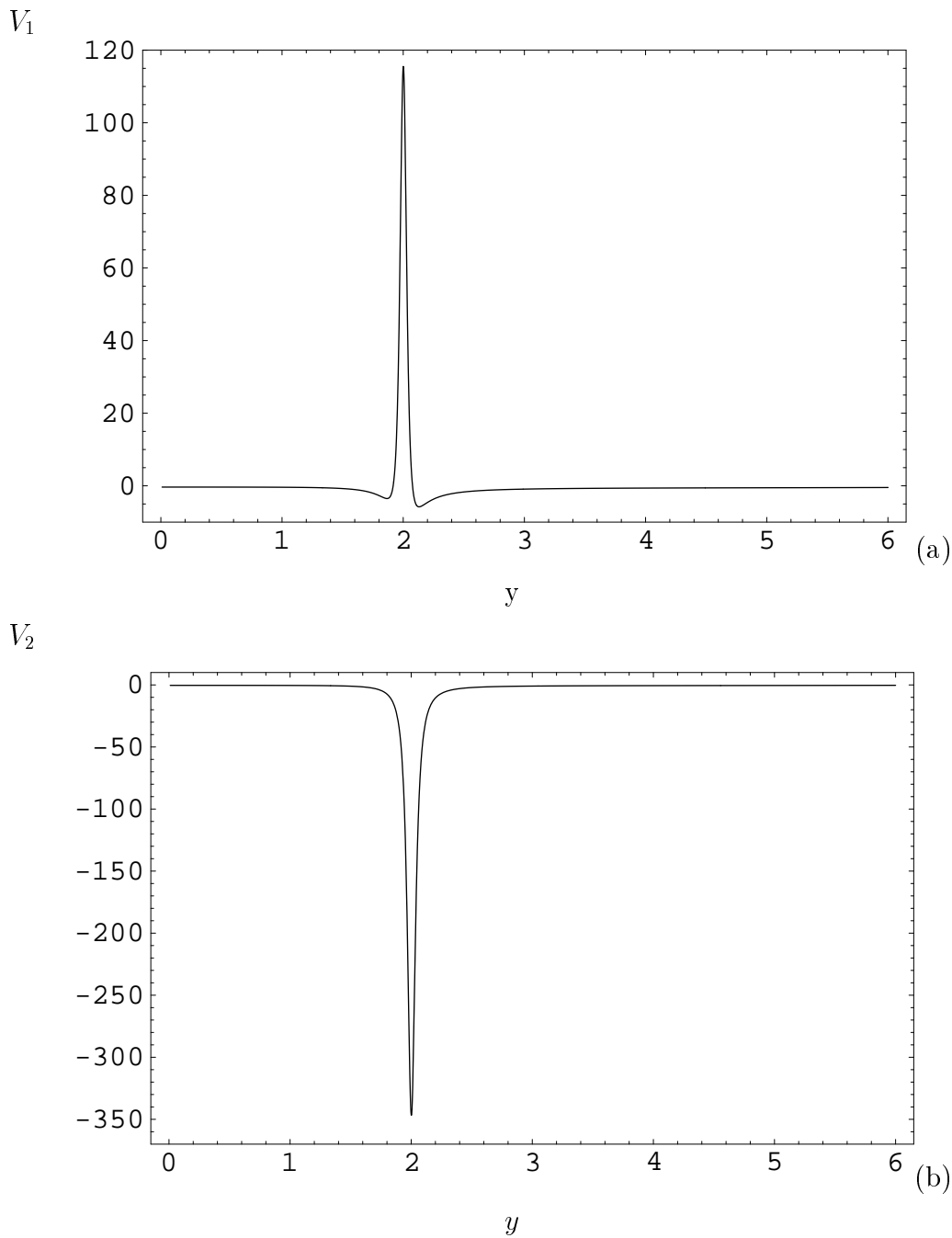


Abbildung 4.12: Im Falle negativer Gemische ($\sigma_* = -1$) kommt die Fusion durch die anziehende und abstoßende Wirkung der Mischungspotentiale V_a zustande, welche dazu führen, daß die Amplituden zu einer gemeinsamen Form verschmelzen, sich also nur im Vorzeichen unterscheiden: $L_1^2 \approx L_2^2$. Das Mischungspotential V_1 für die erste Amplitude L_1 , Figur (a), wirkt wie eine abstoßende δ -Funktion und führt so zu dem Knick in der Amplitude L_1 , vgl. Figur 4.10(b). Das zweite Mischungspotential V_2 (Figur (b)) wirkt als anziehende δ -Funktion, erzeugt aber keinen Knick von L_2 , (vgl. Figur 4.10(b)), da die zweite Amplitude L_2 in dem Punkt Null wird, in dem V_2 den minimalen Wert annimmt (d.h. L_2 verschwindet an der δ -Funktion). Mischungsparameter: $C_* = 1.001$.

Kapitel 5

Die Austauschentartung

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß es für ein System von zwei Teilchen, die in reinen Zuständen vorliegen, physikalisch keinen Unterschied macht, ob Austauschfelder vorhanden sind oder nicht (Kapitel 5.1), (vgl. [28]). Alle meßbaren Größen (z.B. Ströme, Energieeigenwerte etc.) verändern sich unter Hinzunahme von Austauschfeldern nicht. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß die Austauschfelder sich im Falle reiner Zustände zusammen mit den Amplitudenfeldern $L_{a\mu}$ und den kinetischen Feldern $K_{a\mu}$ so zu neuen, effektiven Größen $\mathbb{L}_{a\mu}$ und $\mathbb{K}_{a\mu}$ kombinieren lassen, daß für diese effektiven Größen die Feldgleichungen für reine Zustände ohne Austauschfelder gelten (d.h. diese Felder sind Lösungen zweier ungekoppelter Klein-Gordon Gleichungen).

Obwohl es bei reinen Zuständen also physikalisch keinen Unterschied macht, ob Austauschfelder vorhanden sind oder nicht, wird in Kapitel 5.2 die Austauschdynamik für reine Zustände genauer untersucht. Im Gegensatz zu den effektiven Feldern, die ein autonomes Gleichungssystem bilden, koppelt die Austauschfeld-Dynamik an die effektiven Feldgrößen an. Nun können die effektiven Größen $\mathbb{L}_{a\mu}$ und $\mathbb{K}_{a\mu}$ für reine Zustände als bekannt vorausgesetzt werden, sodaß man diese in der Austauschdynamik als feste Hintergrundfelder ansehen kann. Es läßt sich nun zeigen, daß für eine bestimmte Untermenge von Feldkonfigurationen (*Austauschvakua*) die Austauschfelder die Bedeutung von Übergangsamplituden zwischen zwei Lösungen der effektiven Amplitudengleichungen besitzen.

5.1 Die Einzelteilchen-Dynamik als abgeschlossenes System

Zunächst definieren wir die Austauschfelder in allgemeiner Form: Der Hamiltonian \mathcal{H}_μ läßt sich bei vorhandenen Austauschfeldern nicht in block-diagonaler Form im Bezug auf die Einzelteilchen-Projektoren schreiben:

$$\mathcal{H}_\mu \neq \sum_a \mathcal{P}_a \cdot \mathcal{H}_\mu \cdot \mathcal{P}_a . \quad (5.1)$$

Die zusätzlichen Bestandteile ($^{(\pi)}\mathcal{H}_\mu$) des Hamiltonians

$$^{(\pi)}\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_\mu - \sum_a \mathcal{P}_a \cdot \mathcal{H}_\mu \cdot \mathcal{P}_a \quad (5.2)$$

bezeichnet man als *Austauschfelder*, weil diese für die Austauscheffekte zwischen den Teilchen verantwortlich sind. Diese neue Form von Wechselwirkung, ‘‘Austauschwechselwirkung’’ genannt, kann nicht auf die wohlbekanntere Eichwechselwirkung zurückgeführt werden, und wir nehmen an, daß diese für die bisher unverstandenen Quanteneffekte der Materie verantwortlich ist. Jedoch wird im folgenden gezeigt, daß diese neue Art von Wechselwirkung nur im Zusammenhang mit den Gemischeffekten der RST physikalisch relevant werden kann, nicht jedoch für reine Zustände. In diesem Kapitel betrachten wir jedoch ausschließlich reine Zustände, wodurch sich das Gleichungssystem (3.81) wesentlich vereinfacht: die Austauschpotentiale W_a (3.84) verschwinden (wegen $\sigma_* = 0$) und in den Mischungspotentialen X_a (3.84) wird der Quotient $Z_T/Z_{II} = 1$ (wegen (3.71)).

Um nun zu zeigen, daß für reine Zustände eine Austauschentartung vorliegt, muß man beweisen, daß die physikalischen Größen des Systems unabhängig von der Dynamik der Austauschfelder sind. Mit physikalischen Größen bezeichnet man beobachtbare Größen, beispielsweise die Ströme $j_{a\mu}$ (vgl. (3.31) und (3.32))

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left\{ \rho_1 \cdot K_{1\mu} + \frac{1}{2} s \left({}^{(\parallel)}Q_\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \right) \right\} \quad (5.3a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left\{ \rho_2 \cdot K_{2\mu} + \frac{1}{2} s \left({}^{(\parallel)}Q_\mu - {}^{(\perp)}N_\mu \right) \right\} . \quad (5.3b)$$

Diese lassen sich durch die Beziehungen (3.33), welche nur für reine Zustände erfüllt sind, vereinfachen zu

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_1^2 \cdot \left\{ K_{1\mu} + \frac{L_2}{L_1} \left({}^{(\parallel)}Q_\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \right) \right\} \quad (5.4a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_2^2 \cdot \left\{ K_{2\mu} + \frac{L_1}{L_2} \left({}^{(\parallel)}Q_\mu - {}^{(\perp)}N_\mu \right) \right\} . \quad (5.4b)$$

Nun geht man von den Austauschfeldern $\{({}^{\parallel})Q_\mu, ({}^\perp)N_\mu\}$ zu einem neuen Paar von Austauschfeldern $\{F_\mu, G_\mu\}$ über, indem man setzt

$$F_\mu \doteq \frac{L_1^2 + L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^{\parallel})Q_\mu - \frac{L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^\perp)N_\mu \quad (5.5a)$$

$$G_\mu \doteq \frac{L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^{\parallel})Q_\mu - \frac{L_1^2 + L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^\perp)N_\mu . \quad (5.5b)$$

In diesem neuen Variablensatz lassen sich die Ströme (5.4) nun in folgender Weise schreiben

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_1^2 (K_{1\mu} + F_\mu - G_\mu) \quad (5.6a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_2^2 (K_{2\mu} + F_\mu + G_\mu) . \quad (5.6b)$$

$$(5.6c)$$

Dies ist ein erfreuliches Resultat, denn es erlaubt, *effektive* kinetische Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ einzuführen:

$$\mathbb{K}_{1\mu} \doteq K_{1\mu} + F_\mu - G_\mu \quad (5.7a)$$

$$\mathbb{K}_{2\mu} \doteq K_{2\mu} + F_\mu + G_\mu , \quad (5.7b)$$

wodurch die Ströme (5.6) die einfachere Gestalt

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_1^2 \mathbb{K}_{1\mu} \quad (5.8a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_2^2 \mathbb{K}_{2\mu} \quad (5.8b)$$

annehmen. Genau in dieser Form lassen sich die Ströme schreiben, wenn alle Austauschfelder verschwinden, wenn also der Hamiltonian sich als Einzelteilchen-Operator (5.1) schreiben läßt:

$$\mathcal{H}_\mu \Rightarrow \sum_{a=1}^2 \mathcal{P}_a \cdot \mathcal{H}_\mu \cdot \mathcal{P}_a . \quad (5.9)$$

In dieser Situation vereinfachen sich sowohl das kinetische Feld \mathcal{K}_μ (3.9) als auch das Lokalisationsfeld \mathcal{L}_μ (3.10) zu

$$\mathcal{K}_\mu \Rightarrow K_{a\mu} \mathcal{P}_a \quad (5.10a)$$

$$\mathcal{L}_\mu \Rightarrow L_{a\mu} \mathcal{P}_a \quad (5.10b)$$

und entsprechend lassen sich die Ströme $j_{a\mu}$ (3.31)-(3.32) schreiben als

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_1^2 K_{1\mu} \quad (5.11a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} L_2^2 K_{2\mu} . \quad (5.11b)$$

Dies ist offenbar genau dieselbe Form wie für die Ströme mit nicht-verschwindenden Austauschfeldern (5.8), wenn man die Ersetzungen

$$K_{a\mu} \iff \mathbb{K}_{a\mu} \quad (5.12)$$

vornimmt.

Die entscheidende Frage ist nun, ob diese formale Äquivalenz zwischen verschwindenden und nicht verschwindenden Austauschfeldern eine *physikalische* Äquivalenz beider Situationen nach sich zieht. Ist dies der Fall, so müssen die beiden Paare von Strömen $j_{a\mu}$ (5.8) und (5.11) (aufgrund der Tatsache, daß sie observable Größen sind) für alle möglichen Konfigurationen von Austauschfeldern übereinstimmen, sonst liegt keine Austauschentartung vor. Man kann nun zeigen, daß die RST-Dynamik eine Menge von Lösungen produziert, welche alle *dieselben* Amplitudenfelder L_a und kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ erzeugen, und daher auch die Ströme $j_{a\mu}$ nicht verändern. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß die Dynamik für die reinen Zustände ein autonomes, gekoppeltes System für die Amplituden L_a und die effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ bildet, wohingegen die Dynamik der Austauschfelder nicht geschlossen ist und an dieses autonome Einzelteilchen-System ankoppelt. Diese Behauptung wird im folgenden dadurch bewiesen, daß man eine weitere observable Größe des Systems, nämlich die Energie-Impulsdichte $T_{\mu\nu}$, durch die modifizierten kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ allein (also ohne Zuhilfenahme der Austauschfelder) ausdrücken kann. Hierzu zerlegt man den Energie-Impulsoperator $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ (2.30) in die RTB-Basis

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = t_{a\mu\nu} \cdot \mathcal{P}^a + \frac{1}{2} \hat{t}_{\mu\nu} \cdot \hat{\Pi} + \frac{1}{2} \tilde{t}_{\mu\nu} \cdot \tilde{\Pi} . \quad (5.13)$$

Die Komponenten von $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ werden nun in der üblichen Weise berechnet, wobei es sich hier anbietet, zu einem neuen Paar von Austauschfeldern $\{S_\mu, T_\mu\}$ überzugehen, welches das zweite Paar von Austauschfeldern $\{({}^\perp)Q_\mu, ({}^{\parallel})N_\mu\}$ in einer ähnlichen Weise ersetzt wie dies oben (5.5) schon mit dem ersten Paar geschehen ist:

$$S_\mu = \frac{L_1^2 + L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^{\parallel})N_\mu + \frac{L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^\perp)Q_\mu \quad (5.14a)$$

$$T_\mu = \frac{L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^{\parallel})N_\mu + \frac{L_1^2 + L_2^2}{2L_1L_2} \cdot ({}^\perp)Q_\mu . \quad (5.14b)$$

Hiermit lassen sich die Einzelteilchen-Komponenten $t_{a\mu\nu}$ von $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ (5.13) folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned}
t_{1\mu\nu} &= \text{tr}(\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{T}_{\mu\nu}) & (5.15a) \\
&= \frac{\hbar^2}{M} \left\{ K_{1\mu} K_{1\nu} + L_{1\mu} L_{1\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[K_{1\lambda} K_{1\lambda} + L_{1\lambda} L_{1\lambda} - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \left\{ (F_\mu + G_\mu)(F_\nu + G_\nu) + (S_\mu + T_\mu)(S_\nu + T_\nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [(F_\lambda + G_\lambda)(F^\lambda + G^\lambda) + (S_\lambda + T_\lambda)(S^\lambda + T^\lambda)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{2\mu\nu} &= \text{tr}(\mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{T}_{\mu\nu}) & (5.15b) \\
&= \frac{\hbar^2}{M} \left\{ K_{2\mu} K_{2\nu} + L_{2\mu} L_{2\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[K_{2\lambda} K_{2\lambda} + L_{2\lambda} L_{2\lambda} - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \left\{ (F_\mu - G_\mu)(F_\nu - G_\nu) + (S_\mu - T_\mu)(S_\nu - T_\nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [(F_\lambda - G_\lambda)(F^\lambda - G^\lambda) + (S_\lambda - T_\lambda)(S^\lambda - T^\lambda)] \right\}.
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Form kann man auch für die Austauschkomponenten von $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ finden:

$$\begin{aligned}
\hat{t}_{\mu\nu} &= \text{tr}(\hat{\Pi} \cdot \mathcal{T}_{\mu\nu}) & (5.16a) \\
&= \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \left\{ K_{1\mu}(F_\nu - G_\nu) + K_{1\nu}(F_\mu - G_\mu) + L_{1\mu}(S_\nu - T_\nu) + L_{1\nu}(S_\mu - T_\mu) \right. \\
&\quad \left. - g_{\mu\nu} [K_{1\lambda}(F^\lambda - G^\lambda) + L_{1\lambda}(S^\lambda - T^\lambda)] \right\} \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \left\{ K_{2\mu}(F_\nu + G_\nu) + K_{2\nu}(F_\mu + G_\mu) + L_{2\mu}(S_\nu + T_\nu) + L_{2\nu}(S_\mu + T_\mu) \right. \\
&\quad \left. - g_{\mu\nu} [K_{2\lambda}(F^\lambda + G^\lambda) + L_{2\lambda}(S^\lambda + T^\lambda)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{\mu\nu} &= \text{tr}(\tilde{\Pi} \cdot \mathcal{T}_{\mu\nu}) & (5.16b) \\
&= \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \left\{ L_{1\mu}(F_\nu - G_\nu) + L_{1\nu}(F_\mu - G_\mu) - K_{1\mu}(S_\nu - T_\nu) - K_{1\nu}(S_\mu - T_\mu) \right. \\
&\quad \left. - g_{\mu\nu} [L_{1\lambda}(F^\lambda - G^\lambda) - K_{1\lambda}(S^\lambda - T^\lambda)] \right\} + \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \left\{ -L_{2\mu}(F_\nu + G_\nu) - L_{2\nu}(F_\mu + G_\mu) + K_{2\mu}(S_\nu + T_\nu) + K_{2\nu}(S_\mu + T_\mu) \right. \\
&\quad \left. - g_{\mu\nu} [-L_{2\lambda}(F^\lambda + G^\lambda) + K_{2\lambda}(S^\lambda + T^\lambda)] \right\}.
\end{aligned}$$

Mit diesem Zwischenergebnis läßt sich die Energie-Implusdichte $T_{\mu\nu}$ (2.29) aus dem Operator $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ (5.13) bilden, indem man für die Dichten die Beziehungen

(3.33) verwendet. Das Ergebnis läßt sich in sehr einfacher Form schreiben, wenn man zusätzlich *effektive* Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ einführt, wie dies im Falle der kinetischen Felder schon getan wurde, vgl. (5.7):

$$\mathbb{L}_{1\mu} \doteq L_{1\mu} + S_\mu - T_\mu \quad (5.17a)$$

$$\mathbb{L}_{2\mu} \doteq L_{2\mu} + S_\mu + T_\mu . \quad (5.17b)$$

Dies führt auf folgendes Ergebnis für die Energie-Impulsdichte

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= t_{a\mu\nu}\rho^a + \frac{1}{2}s\hat{t}_{\mu\nu} \quad (5.18) \\ &= \frac{\hbar^2}{M}L_1^2 \left\{ \mathbb{K}_{1\mu}\mathbb{K}_{1\nu} + \mathbb{L}_{1\mu}\mathbb{L}_{1\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[\mathbb{K}_{1\lambda}\mathbb{K}_1^\lambda + \mathbb{L}_{1\lambda}\mathbb{L}_1^\lambda - \left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^2 \right] \right\} \\ &+ \frac{\hbar^2}{M}L_2^2 \left\{ \mathbb{K}_{2\mu}\mathbb{K}_{2\nu} + \mathbb{L}_{2\mu}\mathbb{L}_{2\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[\mathbb{K}_{2\lambda}\mathbb{K}_2^\lambda + \mathbb{L}_{2\lambda}\mathbb{L}_2^\lambda - \left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

welche offensichtlich die Summe von zwei entkoppelten 1-Teilchen-Beiträgen darstellt. Dieses Resultat kam nur deshalb zustande, weil die Intensitätsmatrix \mathcal{I} (3.26) keine Komponente in Richtung des zweiten Permutators $\tilde{\Pi}$ besitzt. Da die entsprechende Komponente $\tilde{t}_{\mu\nu}$ von $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ (5.16b) eine “falsche” Kombination der Einzelteilchen- und Austauschfelder enthält, hätte das Beibehalten dieses Terms bei der Konstruktion von $T_{\mu\nu}$ über die Spurbildung die Elimination der ursprünglichen Felder $K_{a\mu}$ und $L_{a\mu}$ durch die neuen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ (5.7) und $\mathbb{L}_{a\mu}$ (5.17) verhindert.

Das vorliegende Ergebnis für die Energie-Impulsdichte $T_{\mu\nu}$ (5.18) im Falle reiner Zustände deutet nun auf denselben Entartungseffekt hin wie er schon für die Ströme $j_{a\mu}$ (5.8) aufgetreten ist. Falls man zeigen kann, daß die effektiven Felder $\mathbb{K}_{a\mu}, \mathbb{L}_{a\mu}$ einer autonomen Dynamik unterworfen sind, wäre die Physik, welche auf dem Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$ (5.18) beruht, von der spezifischen Form der Austauschfelder völlig unabhängig. Diese Unabhängigkeit der Energie-Impulsdichte für reine Zustände vom Auftreten von Austauschfeldern läßt sich symbolisch auf folgende Weise schreiben

$$L_{a\mu} \Leftrightarrow \mathbb{L}_{a\mu} ; \quad (5.19)$$

analog zu der entsprechenden Äquivalenzrelation für die Kinetischen Felder (5.12). Da die Austauschfelder aus den Strömen $j_{a\mu}$ und dem Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ zugunsten der modifizierten 1-Teilchen-Felder eliminiert wurden, finden wir die oben behauptete Austauschentartung bestätigt, falls diese effektiven Felder $\mathbb{K}_{a\mu}, \mathbb{L}_{a\mu}$ auch in ihrer Dynamik nicht an die Austauschfelder ankoppeln. Der Beweis

für dieses Verhalten ist nicht trivial, da die ursprünglichen Felder $K_{a\mu}$ und $L_{a\mu}$ sehr wohl an die Austauschfelder ankoppeln. Verwendet man die neuen Felder, so erkennt man zuerst, daß die Integrationsbedingung für die effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ folgendermaßen lautet

$$\nabla_\mu \mathbb{K}_{a\nu} - \nabla_\nu \mathbb{K}_{a\mu} = F_{a\mu\nu} \quad (5.20)$$

wobei die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla^\mu F_{a\mu\nu} = 4\pi\alpha_* j_{a\nu} , \quad (5.21)$$

die Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ durch die Ströme $j_{a\mu}$ (5.8) an die effektiven kinetischen Felder koppeln. Auf ähnliche Weise lassen sich die Rotationsgleichungen für die effektiven Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ (5.17) bilden, und diese nehmen eine besonders einfache Form an:

$$\nabla_\mu \mathbb{L}_{a\nu} - \nabla_\nu \mathbb{L}_{a\mu} = 0 , \quad (5.22)$$

was bedeutet, daß beide Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) Gradientenfelder sind, welche von Skalarfeldern $\mathbb{L}_a(x)$ erzeugt werden:

$$\mathbb{L}_{a\mu} = \partial_\mu \mathbb{L}_a . \quad (5.23)$$

Wir werden beweisen, daß diese Skalarfelder \mathbb{L}_a mit den Amplitudenfeldern L_a übereinstimmen, welche als Teile der Ströme $j_{a\mu}$ (5.11) auftreten, so daß die effektive Einzelteilchen-Dynamik ein geschlossenes System von Gleichungen bildet.

Die zweite Hälfte des dynamischen Systems leitet man aus der Erhaltungsgleichung (2.23) ab, welche für die effektiven kinetischen Felder ($a = 1, 2$) folgende Gestalt annimmt

$$\nabla^\mu \mathbb{K}_{a\mu} = -2\mathbb{L}_{a\mu} \mathbb{K}_a{}^\mu \quad (5.24)$$

und entsprechend für die effektiven Lokalisationsfelder ($a = 1, 2$)

$$\nabla^\mu \mathbb{L}_{a\mu} + \mathbb{L}_{a\mu} \mathbb{L}_a{}^\mu = \mathbb{K}_{a\mu} \mathbb{K}_a{}^\mu - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 . \quad (5.25)$$

Damit stellen die dynamischen Gleichungen der effektiven Einzelteilchen-Felder offensichtlich ein autonomes System dar, welches nicht an die Austauschfelder koppelt, wenn man die Amplitudenfelder L_a mit den effektiven Lokalisationsfeldern $\mathbb{L}_{a\mu}$ in Beziehung setzen kann. Dies läßt sich verhältnismäßig leicht erreichen, da die Ladungserhaltung (2.23) für die Ströme $j_{a\mu}$ (5.8) oder die in Komponenten

geschriebene Form der relativistischen Schrödingergleichung (2.13) sofort folgende Identifizierung liefert

$$\mathbb{L}_{a\mu} \equiv \partial_\mu L_a . \quad (5.26)$$

Trotz seiner einfachen Form ist dieses Resultat von großer Bedeutung, da es die Quellgleichungen (5.25) in die Form von Einzelteilchen-Amplitudengleichungen bringt

$$\square L_a + L_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \mathbb{K}_{a\mu} \mathbb{K}_a{}^\mu \right\} = 0, \quad (5.27)$$

welche den Klein-Gordon Gleichungen in der konventionellen Quantentheorie entsprechen. Damit wurde gezeigt, daß die Austauschfelder keinen Einfluß auf die Physik reiner Zustände haben. Trotz dieser Tatsache ist es aufschlußreich, die Austauschfeld-Dynamik näher zu betrachten.

5.2 Austauschdynamik und Austauschvakua

Für die weitere Untersuchung der Austauschdynamik ist es günstig, zunächst die Wirbelgleichungen für die Austauschfelder zu betrachten. Sie lauten

$$\nabla_\mu F_\nu - \nabla_\nu F_\mu = 0 \quad (5.28a)$$

$$\nabla_\mu G_\nu - \nabla_\nu G_\mu = 2 [F_\mu T_\nu - F_\nu T_\mu - G_\mu S_\nu + G_\nu S_\mu] \quad (5.28b)$$

$$\nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu = 0 \quad (5.28c)$$

$$\nabla_\mu T_\nu - \nabla_\nu T_\mu = 2 [S_\mu T_\nu - S_\nu T_\mu + G_\mu F_\nu - G_\nu F_\mu] . \quad (5.28d)$$

Hierbei fällt auf, daß zwei der vier Austauschfelder (F_μ , S_μ) verschwindende Wirbel besitzen und daher Gradientenfelder sein müssen

$$F_\mu = \partial_\mu F \quad (5.29a)$$

$$S_\mu = \frac{\partial_\mu S}{S} . \quad (5.29b)$$

Wir werden diese Eigenschaft verwenden, wenn wir die Lösungen der Austauschdynamik untersuchen.

Die zweite Hälfte der Gleichungen sind die Quellgleichungen, welche aus der

Erhaltungsgleichung (2.16) abgeleitet werden

$$\begin{aligned} \nabla^\mu F_\mu = & (G^\mu - F^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (G^\mu + F^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} \\ & + (T^\mu - S^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} - (T^\mu + S^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} + 4S^\mu F_\mu \end{aligned} \quad (5.30a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu G_\mu = & (F^\mu - G^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (F^\mu + G^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} \\ & + (S^\mu - T^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} - (S^\mu + T^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} + 2(G^\mu S_\mu + F^\mu T_\mu) \end{aligned} \quad (5.30b)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu S_\mu = & (T^\mu - S^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (T^\mu + S^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} \\ & + (F^\mu - G^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} + (F^\mu + G^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} + 2(S^\mu S_\mu - F^\mu F_\mu) \end{aligned} \quad (5.30c)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu T_\mu = & (S^\mu - T^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (S^\mu + T^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} \\ & + (G^\mu - F^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} + (G^\mu + F^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} + 2(T^\mu S_\mu - F^\mu G_\mu) . \end{aligned} \quad (5.30d)$$

Die Wirbelgleichungen (5.28) stellen ein autonomes System dar, nur die Quellgleichungen (5.30) koppeln offensichtlich an die effektiven Einzelteilchen-Felder. Man muß also die Lösungen für die effektiven Einzelteilchen-Felder bereits kennen, um diese als feste Hintergrundfelder in die Austauschdynamik einzusetzen. Wie schon erwähnt sind die effektiven Einzelteilchenfelder aber für viele Situationen schon bekannt, da diese die Lösungen von 1-Teilchen Klein-Gordon Gleichungen darstellen.

Für die Diskussion der Lösungen der Austauschdynamik ist das Konzept des Austauschvakua hilfreich, welches wir im folgenden einführen. Um dieses Konzept zu verstehen, drückt man zunächst die Wirbelgleichungen für die effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ (5.20) in Abhängigkeit der ursprünglichen Felder $K_{a\mu}$ aus und findet folgende Form

$$\nabla_\mu K_{1\nu} - \nabla_\nu K_{1\mu} = F_{1\mu\nu} + G_{\mu\nu} \quad (5.31a)$$

$$\nabla_\mu K_{2\nu} - \nabla_\nu K_{2\mu} = F_{2\mu\nu} - G_{\mu\nu} . \quad (5.31b)$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die ursprünglichen kinetischen Felder $K_{a\mu}$ im allgemeinen nicht nur die gewöhnlichen Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ als Wirbel besitzen, sondern auch ein zusätzliches Feld $G_{\mu\nu}$, das als Austauschfeldstärke bezeichnet wird. Seine explizite Gestalt findet man, indem man das vorliegende Resultat (5.31) mit der Definition (5.7) und den Wirbelgleichungen (5.20) der effektiven Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ kombiniert

$$G_{\mu\nu} = \nabla_\mu G_\nu - \nabla_\nu G_\mu = 2[F_\mu T_\nu - F_\nu T_\mu - G_\mu S_\nu + G_\nu S_\mu] . \quad (5.32)$$

Falls die Austauschfeldstärke verschwindet ($G_{\mu\nu} \equiv 0$), liegt eine spezielle Feldkonfiguration vor, ein sogenanntes Austauschvakuum. Ein solches Vakuum kann

trivialerweise auftreten, indem alle Austauschfelder verschwinden ($F_\mu = G_\mu = T_\mu = S_\mu = 0$), oder auf eine nichttriviale Weise, sodaß alle Austauschfelder von Null verschieden sind, aber dennoch $G_{\mu\nu}$ verschwindet. Damit ein solches nicht-triviales Vakuum auftreten kann, müssen bestimmte Beziehungen zwischen den Austauschfeldern erfüllt sein, welche mit der vorliegenden Austauschdynamik (5.28)-(5.30) konsistent sein müssen. Man findet, daß zwei Typen von Austauschvakua konsistent mit der Dynamik sind:

$$\left. \begin{array}{l} T_\mu = S_\mu \\ G_\mu = F_\mu \end{array} \right\} \text{erstes Vakuum} \quad (5.33)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} T_\mu = -S_\mu \\ G_\mu = -F_\mu \end{array} \right\} \text{zweites Vakuum} . \quad (5.34)$$

Beide Vakua haben einige Gemeinsamkeiten, aber sie unterscheiden sich auch in einigen wichtigen Punkten, weshalb eine genauere Betrachtung nötig ist. Alle Größen, welche sich auf das erste Vakuum (5.33) beziehen, werden mit einem Superskript (1) bezeichnet, also ${}^{(1)}K_{a\mu}$, ${}^{(1)}L_{a\mu}$, ${}^{(1)}G_\mu$, etc. und entsprechendes gilt für das zweite Vakuum (5.34).

Betrachtet man noch einmal die ursprünglichen kinetischen Felder $K_{a\mu}$, so stellt man fest, daß deren Wirbel nun in einer Vakuumkonfiguration ($G_{\mu\nu} \equiv 0$) genau mit der Feldstärke $F_{a\mu\nu}$ übereinstimmen, vgl. (5.31)

$$\nabla_\mu K_{a\nu} - \nabla_\nu K_{a\mu} = F_{a\mu\nu} . \quad (5.35)$$

Dies bedeutet jedoch nicht, daß beide kinetischen Felder $K_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) in jedem Vakuumtyp identisch sind; im Gegenteil findet man aufgrund der Definition der effektiven Felder für das erste Vakuum (5.33)

$${}^{(1)}K_{1\mu} \equiv \mathbb{K}_{1\mu} \quad (5.36a)$$

$${}^{(1)}K_{2\mu} = \mathbb{K}_{2\mu} + 2 \cdot {}^{(1)}G_\mu \quad (5.36b)$$

und entsprechend für das zweite Vakuum

$${}^{(2)}K_{1\mu} = \mathbb{K}_{1\mu} - 2 \cdot {}^{(2)}G_\mu \quad (5.37a)$$

$${}^{(2)}K_{2\mu} \equiv \mathbb{K}_{2\mu} . \quad (5.37b)$$

Das erste kinetische Feld $K_{1\mu}$ stimmt mit seiner effektiven Version $\mathbb{K}_{1\mu}$ im ersten Vakuum überein (5.36a), aber nicht im zweiten Vakuum (5.37a), und entsprechend stimmt das zweite Feld $K_{2\mu}$ mit der effektiven Version im zweiten Vakuum

überein (5.37b) jedoch nicht im ersten Vakuum (5.36b). Nichtsdestoweniger besitzt das erste Feld ${}^{(1)}K_{1\mu}$ im ersten Vakuum (5.36a) denselben Wirbel wie im zweiten Vakuum (5.37a), da beide Vakuumfelder sich durch das Austauschpotential G_μ unterscheiden, welches verschwindenden Wirbel aufweist (vgl. (5.32)), und zwar auf Grund der Vakuum-Bedingung ($G_{\mu\nu} \equiv 0$). Jene Bedingung erlaubt es auch, den Austauschvektor G_μ als Gradientenfeld anzusehen, d.h.

$$G_\mu = \partial_\mu G, \quad (5.38)$$

für beide Vakuumtypen.

Ein ähnlicher Effekt tritt nun für die Lokalisationsfelder auf. Genauer gesagt folgt aus (5.28d), daß auch der Wirbel des Austauschfeldes T_μ durch die Vakuumbedingung verschwindet und dieses somit ein Gradientenfeld für beide Vakuumtypen darstellt

$$T_\mu = \frac{\partial_\mu T}{T}. \quad (5.39)$$

Somit sind alle vier Austauschfelder F_μ , G_μ , S_μ , T_μ als Gradientenfelder identifiziert worden und es konnten die entsprechenden Skalarfelder F (5.29a), S (5.29b), G (5.38), und T (5.39) eingeführt werden. Dies bedeutet jedoch, daß nicht nur die effektiven Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ (5.17), welche für die Vakuumkonfigurationen folgendes Aussehen haben

$$\left. \begin{array}{l} {}^{(1)}\mathbb{L}_{1\mu} \equiv L_{1\mu} \\ {}^{(1)}\mathbb{L}_{2\mu} = L_{2\mu} + 2 \cdot {}^{(1)}T_\mu \end{array} \right\} \text{erstes Vakuum} \quad (5.40a)$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^{(2)}\mathbb{L}_{1\mu} = L_{1\mu} - 2 \cdot {}^{(2)}T_\mu \\ {}^{(2)}\mathbb{L}_{2\mu} \equiv L_{2\mu} \end{array} \right\} \text{zweites Vakuum,} \quad (5.40b)$$

Gradientenfelder sind, vgl. (5.26), sondern auch die ursprünglichen Lokalisationsfelder $L_{a\mu}$ dieses Gradientenverhalten in beiden Vakua übernehmen

$$L_{a\mu} = \partial_\mu \tilde{L}_a. \quad (5.41)$$

Daher können wir im ersten Vakuum (5.40a) die Amplitudenfelder des ersten Teilchens identifizieren

$${}^{(1)}\mathbb{L}_1 \equiv {}^{(1)}\tilde{L}_1 \quad (5.42)$$

und ebenso für das zweite Vakuum (5.40b) die Amplituden für das zweite Teilchen

$${}^{(2)}\mathbb{L}_2 \equiv {}^{(2)}\tilde{L}_2, \quad (5.43)$$

aber die Amplituden des zweiten Teilchens im ersten Vakuum (5.40a) und des ersten Teilchens im zweiten Vakuum (5.40b) erfordern eine separate Betrachtung.

Offensichtlich gibt es folgende Verbindung zwischen den beiden Amplitudenfeldern \mathbb{L}_a (5.26) und \tilde{L}_a (5.41) im entsprechenden Vakuum

$$|^{(1)}\tilde{L}_2| = (T_{(1)})^{-2} \cdot |\mathbb{L}_2| = (S_{(1)})^{-2} |\mathbb{L}_2| \quad (5.44a)$$

$$|^{(2)}\tilde{L}_1| = (T_{(2)})^2 \cdot |\mathbb{L}_1| = (S_{(2)})^{-2} |\mathbb{L}_1|. \quad (5.44b)$$

Dieses Resultat identifiziert das Skalarfeld T (5.39) (und damit auch S (5.29b)) mit der Bedeutung von *Übergangsamplituden*, welche die Absolutwerte der Amplituden $^{(1)}\tilde{L}_2$ und $^{(2)}\tilde{L}_1$ aus ihren effektiven Gegenstücken \mathbb{L}_2 und \mathbb{L}_1 erzeugen. Da diese Erzeugung durch gewöhnliche Multiplikation geschieht, ist leicht einzusehen, daß die Austauschfelder singulär werden, wenn die effektiven Amplitudenfelder \mathbb{L}_a Null werden. Da diese virtuellen Felder nicht in die physikalischen Dichten eingehen, sind diese Singularitäten jedoch unbeobachtbar.

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß die Amplituden \tilde{L}_a (5.41), welche durch den Prozess (5.44) erzeugt werden, nicht beliebige Raum-Zeit-Funktionen sind. Vielmehr sind sie Lösungen desselben Problems, welches auch von ihren effektiven Gegenstücken $\mathbb{L}_a \equiv L_a$ gelöst wird, nämlich den Amplitudengleichungen (5.27). Daher erzeugen die Vakuumkonfigurationen einen neuen, dynamisch möglichen, aber virtuellen Zustand zu dem physikalisch vorhandenen Zustand, welcher sich im "falschen" Vakuum befindet (d.h. das erste Teilchen im zweiten Vakuum und umgekehrt).

Diese Behauptung läßt sich leicht beweisen, indem man die Quellgleichungen für die ursprünglichen Lokalisationskomponenten $L_{a\mu}$, welche aus der Erhaltungsgleichung (2.16) abgeleitet werden, hinschreibt:

$$\nabla^\mu L_{a\mu} + L_{a\mu} L_a^\mu + \left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^2 - K_{a\mu} K_a^\mu = F^\mu F_\mu - G^\mu G_\mu + T^\mu T_\mu - S^\mu S_\mu. \quad (5.45)$$

Daher erfüllen für beide Vakua (5.33)-(5.34) die Lokalisationsfelder die vereinfachte Quellgleichung ($a = 1, 2$):

$$\nabla^\mu L_{a\mu} + L_{a\mu} L_a^\mu + \left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^2 - K_{a\mu} K_a^\mu = 0 \quad (5.46)$$

welche jedoch formal mit ihrem effektiven Gegenstück (5.25) übereinstimmt. Außerdem liefert die Gradientenbedingung (5.41) die entsprechenden Amplitudengleichungen ($a = 1, 2$) in einer Form, welche äquivalent zum effektiven Gegenstück

(5.27) ist:

$$\square \tilde{L}_a + \tilde{L}_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - K_{a\mu} K_a^\mu \right\} = 0 . \quad (5.47)$$

Diese Beziehung erlaubt es nun, die beiden Amplituden $\tilde{L}_a \equiv \mathbb{L}_a$ und kinetischen Felder $K_{a\mu} \equiv \mathbb{K}_{a\mu}$ für das a -te Teilchen im a -ten Vakuum zu identifizieren, wie dies schon in den Gleichungen (5.36a), (5.37b), (5.40a), (5.40b), (5.42) und (5.43) getan wurde. Für das Teilchen im falschen Vakuum ist diese Amplitudengleichung jedoch neu. Betrachtet man zum Beispiel die Amplitudengleichung (5.47) als das Massen-Eigenwertproblem für gebundene 2-Teilchen Zustände, so muß der entsprechende Eigenwert \tilde{M}_a ($a = 1, 2$) für das Teilchen im falschen Vakuum

$$\left(\frac{\tilde{M}_a c}{\hbar} \right)^2 \doteq \lim_{r \rightarrow \infty} (K_{a\mu} K_a^\mu) \quad (5.48)$$

nicht notwendigerweise mit dem effektiven Massen-Eigenwert \mathbb{M}_a

$$\left(\frac{\mathbb{M}_a c}{\hbar} \right)^2 \doteq \lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbb{K}_{a\mu} \mathbb{K}_a^\mu) \quad (5.49)$$

übereinstimmen. Ebenso wenig müssen die virtuellen Amplituden \tilde{L}_a als Lösungen von (5.47) mit den effektiven Amplituden \mathbb{L}_a , welche die Lösung von (5.27) bilden, übereinstimmen, siehe das unten angeführte Beispiel.

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß der "falsche" Quantenzustand $\{\tilde{M}_a, \tilde{L}_a, K_{a\mu}\}$, welcher aus dem effektiven Zustand $\{\mathbb{M}_a, \mathbb{L}_a, \mathbb{K}_{a\mu}\}$ durch die nicht-trivialen Austauschfelder erzeugt wird, virtuellen Charakter hat, da die physikalischen Größen ausschließlich von den effektiven Feldern abhängen. Betrachtet man die Erhaltungsgleichung für ein Teilchen im falschen Vakuum, welche aus der Quellgleichung für das kinetische Feld $K_{a\mu}$ abgeleitet wird, so lautet diese in allgemeiner Form

$$\nabla^\mu K_{a\mu} + 2L_{a\mu} K_a^\mu = -2(F^\mu S_\mu - T^\mu G_\mu) . \quad (5.50)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für die nicht-trivialen Vakuumlösungen (5.33) und (5.34) zur trivialen Vakuum-Form ($a = 1, 2$)

$$\nabla^\mu K_{a\mu} + 2L_{a\mu} K_a^\mu = 0 . \quad (5.51)$$

Also kann man, ausgehend von der Gradientenbeziehung (5.41) einen erhaltenen virtuellen Strom für ein Teilchen im falschen Vakuum erzeugen ($a \neq b$)

$${}^{(a)}j_{b\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left({}^{(a)}\tilde{L}_b \right)^2 {}^{(a)}K_{b\mu} \quad (5.52)$$

welcher andererseits wegen (5.51) die übliche Erhaltungsgleichung erfüllt

$$\nabla^\mu {}^{(a)}j_{b\mu} = 0 \quad (5.53)$$

aber sicher nicht mit dem erhaltenen Strom $j_{b\mu}$ (5.8) übereinstimmt, da für eine virtuelle Konfiguration ($a \neq b$) die virtuellen Felder immer von ihren effektiven Gegenständen abweichen, ${}^{(a)}\tilde{L}_b \neq \mathbb{L}_b$ und ${}^{(a)}K_{b\mu} \neq \mathbb{K}_{b\mu}$.

Um die Diskussion der Vakuumkonfigurationen abzuschließen, sei noch erwähnt, daß die Verbindung (5.44) der virtuellen Amplituden ${}^{(b)}\tilde{L}_a$ zu ihren effektiven Gegenständen \mathbb{L}_a eine elegante Methode für die Erzeugung von Lösungen für die Felder T_μ und $S_\mu (= \pm T_\mu)$ erlaubt. Da beide Vektorfelder in einer Vakuumkonfiguration verschwindenden Wirbel besitzen, genügt es, die Quellgleichungen (5.30c) und (5.30d) zu betrachten, welche für die Übergangsamplitude $T_{(a)}$ im a -ten Vakuum lauten

$$\frac{1}{2}\square\left(\frac{1}{T_{(1)}^2}\right) + \mathbb{L}_{2\mu}{}^\mu \partial_\mu\left(\frac{1}{T_{(1)}^2}\right) = -2\frac{1}{T_{(1)}^2} {}^{(1)}G_\mu \cdot (\mathbb{K}_{2\mu} - {}^{(1)}G_\mu) \quad (5.54a)$$

$$\frac{1}{2}\square(T_{(2)}^2) + \mathbb{L}_{1\mu}{}^\mu \partial_\mu(T_{(2)}^2) = 2T_{(2)}^2 {}^{(2)}G_\mu \cdot (\mathbb{K}_{1\mu} + {}^{(2)}G_\mu). \quad (5.54b)$$

Offensichtlich koppelt die Amplitude $T_{(1)}$ für das erste Vakuum nur an die effektiven Felder $\mathbb{K}_{2\mu}, \mathbb{L}_{2\mu}$ des zweiten Teilchens und umgekehrt. Man erhält nun jede Lösung $T(x) = \pm S(x)$ der Vakuum-Dynamik aus der Festlegung einer Lösung $\tilde{L}_a(x)$ der virtuellen Amplitudengleichung (5.47) und der Lösung von (5.44) für die gewünschte Übergangsamplitude

$$T_{(1)} = \left| \frac{\mathbb{L}_2}{{}^{(1)}\tilde{L}_2} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.55a)$$

$$T_{(2)} = \left| \frac{{}^{(2)}\tilde{L}_1}{\mathbb{L}_1} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.55b)$$

Faßt man beispielsweise das effektive Amplitudensystem (5.27) als statisches Massen-Eigenwertproblem mit diskretem Massenspektrum auf $\{\mathbf{n}\}\mathbb{L}_a, \{\mathbf{n}\}\mathbb{K}_{a\mu}, \{\mathbf{n}\}\mathbb{M}_a\}$, welches durch eine Menge von Quantenzahlen $\{\mathbf{n}\}$ festgelegt wurde, so kann man einfach eine dieser Eigenfunktionen $\{\mathbf{m}\}\mathbb{L}_a$ ($\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$) als das virtuelle Gegenüber der effektiven Amplitude \mathbb{L}_a nehmen und findet damit automatisch die gewünschte Übergangsamplitude durch (5.55). Im letzten Schritt muß der Austauschvektor $G_\mu (= \pm F_\mu)$ dann aus den entsprechenden Quellgleichungen (5.30a), (5.30b) bestimmt werden, welche sich für Vakuumkonfigurationen folgenderma-

ßen vereinfachen

$$\nabla^\mu ({}^1)G_\mu = -2 ({}^1)G^\mu \cdot \mathbb{L}_{2\mu} - 2 ({}^1)T^\mu \cdot \mathbb{K}_{2\mu} + 4 ({}^1)T^\mu \cdot ({}^1)G_\mu \quad (5.56a)$$

$$\nabla^\mu ({}^2)G_\mu = -2 ({}^2)G^\mu \cdot \mathbb{L}_{1\mu} - 2 ({}^2)T^\mu \cdot \mathbb{K}_{1\mu} - 4 ({}^2)G^\mu \cdot ({}^2)T_\mu . \quad (5.56b)$$

Für das erste Vakuum (5.55a) kann man also eine *beliebige* Lösung \tilde{L}_n der Klein-Gordon-Eigenwertproblems (5.47) einsetzen, um die Vakuum-Amplitude $T_{(1)}$ zu bilden

$$T_{(1)} = \left| \frac{\mathbb{L}_2}{\tilde{L}_n} \right|^{\frac{1}{2}} . \quad (5.57)$$

Diese Wahl für das erste Vakuum muß nicht mit der für das zweite Vakuum übereinstimmen ($n \neq m$)

$$T_{(2)} = \left| \frac{\tilde{L}_m}{\mathbb{L}_1} \right|^{\frac{1}{2}} . \quad (5.58)$$

Aber gerade weil man einen beliebigen Zustand als virtuellen Zustand wählen kann, ist es möglich, \mathbb{L}_1 als den virtuellen Zustand \tilde{L}_n , der zum Zustand \mathbb{L}_2 konjugiert ist, zu wählen; umgekehrt kann man \mathbb{L}_2 als den virtuellen Zustand wählen, der zu \mathbb{L}_1 konjugiert ist, wodurch man eine *selbst-konjugierte* Konfiguration erhält:

$$T_{(1)} = S_{(1)} = \left| \frac{\mathbb{L}_2}{\mathbb{L}_1} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.59a)$$

$$T_{(2)} = \frac{1}{S_{(2)}} = \left| \frac{\mathbb{L}_2}{\mathbb{L}_1} \right|^{\frac{1}{2}} . \quad (5.59b)$$

In Figur 5.1 betrachten wir das Beispiel einer solchen Konfiguration, nämlich die radialsymmetrischen 2-Teilchen Zustände im Coulomb-Potential. Die $SO(3)$ -Symmetrie führt dazu, daß die Rotations- und Quellgleichungen für die Felder F_μ (5.28a), (5.30a) und G_μ (5.28b), (5.30b) automatisch erfüllt sind, unabhängig davon, ob man eine Vakuumkonfiguration ($G_{\mu\nu} \equiv 0$) betrachtet oder nicht. Die Amplitudenfunktionen \mathbb{L}_a sind Lösungen der 1-Teilchen Klein-Gordon-Gleichungen (5.27).

Was bedeutet nun das Vorliegen einer solchen Konfiguration? Man kann an einen Austauschprozess denken, bei dem beide Teilchen ihre Rollen vertauschen ($S_{(1)} = \frac{1}{S_{(2)}}$), was man als RST-Analogon des Verschränkungs-Prozesses in der konventionellen Quantenmechanik ansehen kann. Allerdings spielt dieses Entanglement bei reinen Zuständen keine Rolle, da wie oben gezeigt die physikalischen

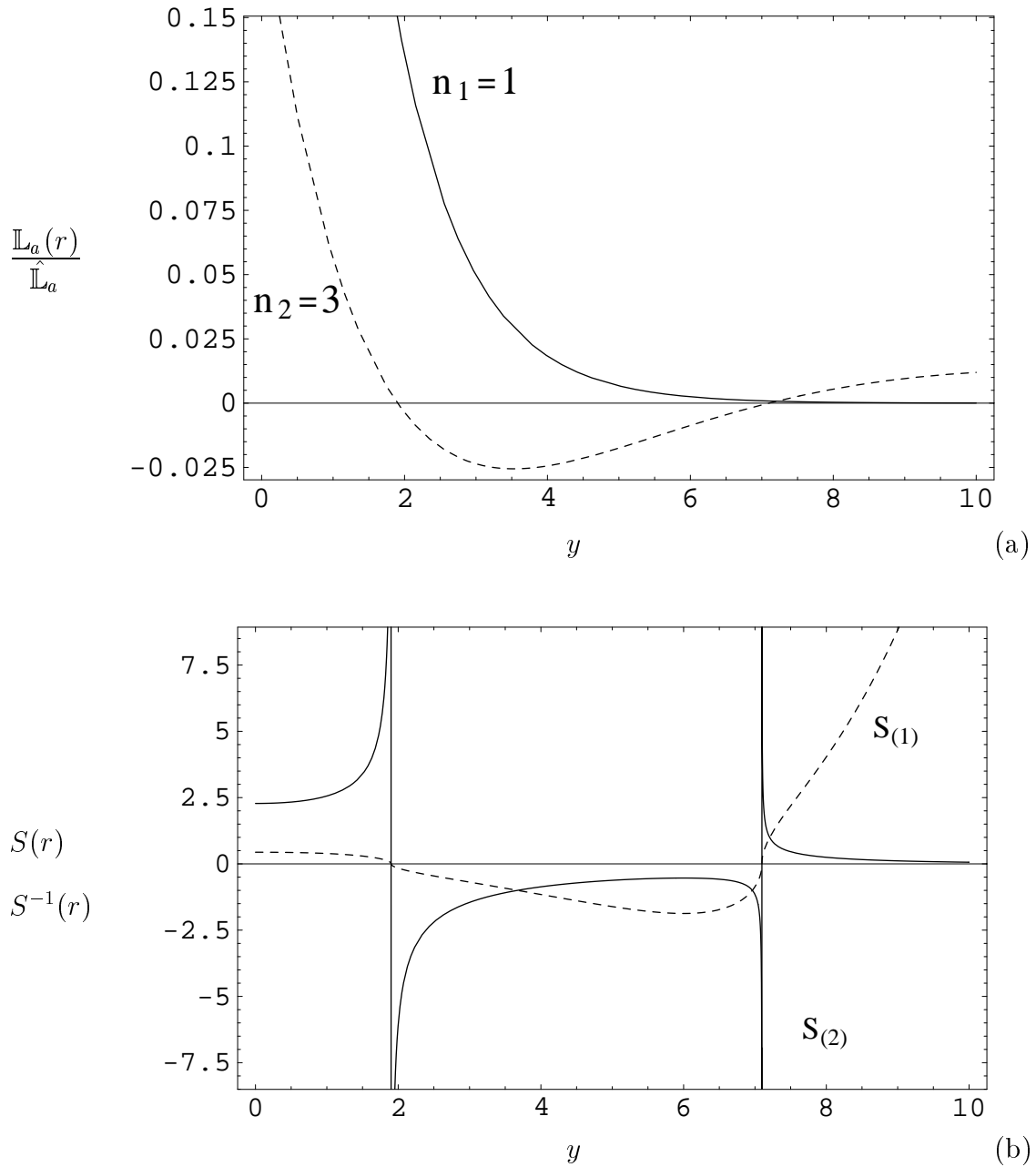


Abbildung 5.1: Für den Grundzustand ($n_1 = 1$) und den zweiten angeregten Zustand ($n_2 = 3$) sind die effektiven Amplitudenfelder \mathbb{L}_a als Lösungen der 1-Teilchen Amplitudengleichungen (5.27) in Figur (5.1a) dargestellt. Deren Quotient liefert eine mögliche Lösung $S_{(1)}$ und $S_{(2)}$ (5.28) für die Gleichung der Übergangsamplituden (5.54). Diese Konstruktion verlangt, daß die Übergangsamplituden an den Nullstellen der effektiven Amplitudenfelder \mathbb{L}_a entweder Null oder unendlich werden, siehe Figur (5.1b). Durchgezogene Linie: $S_{(2)} = (S_{(1)})^{-1}$, gestrichelte Linie: $S_{(1)}$.

Größen im Falle reiner Zustände nicht von den Feldkonfigurationen der Austauschfelder abhängen. Daher werden im nächsten Kapitel beide Effekte gleichzeitig behandelt, also Gemische *und* Austauschfelder, und es zeigt sich, daß die in diesem Kapitel beschriebene Mischung von zwei Zuständen, welche Lösungen des Klein-Gordon-Problems (5.27) darstellen, in etwas abgewandelter Form auch dort auftritt. Das Zusammenwirken von Austauschfeldern und Gemischen führt für gebundene Zustände darüber hinaus zur Ununterscheidbarkeit der beiden beteiligten Teilchen.

Kapitel 6

Mischungs- und Austauscheffekte

In diesem Kapitel werden Mischungs- und Austauscheffekte gemeinsam behandelt, also das gesamte in Kapitel 3 beschriebene System untersucht, ohne vereinfachende Annahmen zugrunde zu legen (siehe [34]). Dabei zeigt sich (in Kapitel 6.1), daß eine Kombination der Einzelteilchen-Felder $L_{a\mu}$ und $K_{a\mu}$ gemeinsam mit den Austauschfeldern zu effektiven Feldern $\mathbb{L}_{a\mu}$ und $\mathbb{K}_{a\mu}$ die Feldgleichungen wesentlich vereinfacht. Dieses Verfahren verläuft analog zur Vorgehensweise in Kapitel 5.1, nur mit dem Unterschied, daß der Mischungscharakter der Materie bei der Umdefinition der Felder durch einen Mischungsparameter (λ) berücksichtigt wird.

Die neu eingeführten Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ sind Gradientenfelder, die Quadrate der zugehörigen Amplitudenfelder \mathbb{L}_a bilden direkt die Dichten, d.h. $\mathbb{L}_a^2 = \rho_a$. Somit tritt die in Kapitel 4 behandelte Separation und Fusion der Amplitudenfelder nicht mehr auf. Dennoch bildet dieses Kapitel eine Synthese aus den beiden vorherigen Kapiteln, denn ohne die Einführung eines Mischungsparameters λ sowie der Idee, effektive Felder einzuführen, hätte man die hier gemachten Vereinfachungen nicht durchführen können.

In Kapitel 6.2 wird gezeigt, daß die neue Parametrisierung eine Entkopplung in zwei Teilsysteme (für jeweils ein Teilchen) zuläßt, so daß die Austauschwechselwirkung zwischen den beiden Teilchen nur noch in Form von zwei algebraischen Zwangsbedingungen auftritt. Dadurch wird es möglich, die Teilsysteme getrennt zu behandeln und aus der entstandenen Lösungsklasse diejenigen Lösungen auszuwählen, welche diese algebraischen Zwangsbedingungen erfüllen.

6.1 Effektive Einzelteilchenfelder

Betrachten wir nochmals die Gleichungen für die Renormalisierungsfaktoren (3.64)

$$\partial_\mu Z_T = Z_R \cdot l_\mu + 2 Z_0 \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu \quad (6.1a)$$

$$\partial_\mu Z_R = Z_T \cdot l_\mu - 2 Z_0 \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu \quad (6.1b)$$

$$\partial_\mu Z_0 = 2(Z_T \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu + Z_R \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu) \quad (6.1c)$$

so stellen wir fest, daß die rechte Seite der dritten Gleichung (6.1c) eine Kombination der Austauschfelder Q_μ und N_μ ist, welche ein Gradientenfeld sein muß, da auch die linke Seite ein Gradientenfeld darstellt. Bezeichnet man dieses Gradientenfeld mit

$$S_\mu \doteq \frac{1}{2} \frac{\partial_\mu Z_0}{Z_0} \quad (6.2)$$

so kann man eine neue Kombination von Austauschfeldern (S_μ, T_μ) einführen, welche das alte Paar (${}^{(\parallel)}N_\mu, {}^{(\perp)}Q_\mu$) ersetzen:

$$S_\mu = \frac{Z_T}{Z_0} \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu + \frac{Z_R}{Z_0} \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu \quad (6.3a)$$

$$T_\mu = \frac{Z_R}{Z_0} \cdot {}^{(\parallel)}N_\mu + \frac{Z_T}{Z_0} \cdot {}^{(\perp)}Q_\mu. \quad (6.3b)$$

Mit dieser Ersetzung nimmt die Renormalisierungsdynamik (6.1) folgende Form an

$$\partial_\mu Z_T = Z_R \cdot l_\mu + 2\lambda(Z_T \cdot S_\mu - Z_R \cdot T_\mu) \quad (6.4a)$$

$$\partial_\mu Z_R = Z_T \cdot l_\mu - 2\lambda(Z_T \cdot T_\mu - Z_R \cdot S_\mu) \quad (6.4b)$$

$$\partial_\mu Z_0 = 2 Z_0 \cdot S_\mu. \quad (6.4c)$$

Bei dieser Reparametrisierung wurden die beiden unterschiedlichen Gemischsorten durch Einführung des Skalarfeldes $\lambda(x)$ berücksichtigt, welches definiert wird durch

$$\lambda \doteq \frac{1}{1 + \frac{\sigma_*}{Z_0^2}} \quad (6.5)$$

und welches die Feldgleichung

$$\partial_\mu \lambda = 4\lambda(1 - \lambda) \cdot S_\mu \quad (6.6)$$

erfüllt. Aufgrund seiner Definition (6.5) schließt man sofort, daß $\lambda < 1$ für positive Gemische ($\sigma_* = +1$) gilt, und daß für negative Gemische ($\sigma_* = -1$) $\lambda > 1$ ist. Ist $\lambda = 1$, so liegt ein reiner Zustand ($\sigma_* = 0$) vor. Da die beiden Gemischtypen aufgrund der RST-Dynamik voneinander getrennt werden, muß die Feldgleichung für die Mischungsvariable λ Lösungen besitzen, welche diese dynamische Trennung widerspiegeln. Nun ist leicht einzusehen, daß dies der Fall ist, da das Austauschfeld S_μ (6.3a) ein Gradientenfeld darstellt vgl. (6.2)

$$S_\mu \equiv \frac{\partial_\mu S}{S}, \quad (6.7)$$

und man daher die Feldgleichung für λ (6.6) leicht integrieren kann

$$\lambda = \begin{cases} \frac{S^4}{S^4 + S_c^4} & , \sigma_* = +1 \\ \frac{S^4}{S^4 - S_c^4} & , \sigma_* = -1, \end{cases} \quad (6.8)$$

wobei S_c eine beliebig wählbare Integrationskonstante darstellt. Obwohl dieses Resultat nur die ursprüngliche Definition von λ (6.5) wiedergibt, wenn man folgende Größen identifiziert

$$Z_0^2 = \left(\frac{S}{S_*} \right)^2 \quad (6.9)$$

und berücksichtigt, daß durch Differenzieren dieser Gleichung gerade wieder Gleichung (6.2) entsteht, so können wir jetzt sicher sein, daß die Unterteilung des Konfigurationsraumes in positive und negative Gemische auch im neuen Variablensatz erfüllt wird: Die Feldgleichung für λ (6.6) erlaubt entweder Lösungen mit $\lambda < 1$ (\leadsto positive Gemische: $\sigma_* = +1$, $0 < S^2 < \infty$) oder Lösungen mit $\lambda > 1$ (\leadsto negative Gemische: $\sigma_* = -1$, $S_c^2 < S^2 < \infty$).

Eine besondere Situation liegt vor, wenn die Austauschfelder verschwinden und damit insbesondere $S_\mu \equiv 0$ ist. In diesem Fall muß das neue Feld $S(x)$ (6.7) eine Konstante über der Raumzeit sein, welche wir mit S_* bezeichnen. Daraus folgt, daß auch die neue Variable λ konstant wird, vgl. (6.8)

$$\lambda_* = \frac{S_*^4}{S_*^4 + \sigma_* \cdot S_c^4}. \quad (6.10)$$

Das Verschwinden der Austauschfelder führt also dazu, daß der Mischungsparameter $\lambda(x)$ zu einer Konstante λ_* wird. Diese Konstante ist identisch mit dem Gruppenparameter λ_* (4.93) der Mischungsgruppe, siehe Kapitel 4. Der Effekt der Austauschfelder besteht also darin, den Parameter der Mischungsgruppe

raumzeit-abhängig zu machen: $\lambda_* \Rightarrow \lambda(x)$. Dieses Zusammenspiel von Austausch- und Gemischeffekten führt nun zu den in der RST auftretenden Quanteneffekten, wie wir im folgenden zeigen werden.

Doch zunächst muß die Reparametrisierung abgeschlossen werden, indem man eine (6.3) entsprechende Transformation auch für die beiden Austauschfelder ${}^{(\parallel)}Q_\mu$ und ${}^{(\perp)}N_\mu$ einführt. Hierzu betrachtet man nochmals die Ströme (3.31)-(3.32)

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left\{ \rho_1 K_{1\mu} + \frac{1}{2} s \left({}^{(\parallel)}Q_\mu + {}^{(\perp)}N_\mu \right) \right\} \quad (6.11a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \left\{ \rho_2 K_{2\mu} + \frac{1}{2} s \left({}^{(\parallel)}Q_\mu - {}^{(\perp)}N_\mu \right) \right\}. \quad (6.11b)$$

Die Form dieser Ströme erlaubt es nun, zwei neue Felder $\{F_\mu, G_\mu\}$ einzuführen, welche die Felder $\{{}^{(\parallel)}Q_\mu, {}^{(\perp)}N_\mu\}$ ersetzen

$$F_\mu = \frac{Z_T}{Z_0} \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu - \frac{Z_R}{Z_0} {}^{(\perp)}N_\mu \quad (6.12a)$$

$$G_\mu = \frac{Z_R}{Z_0} \cdot {}^{(\parallel)}Q_\mu - \frac{Z_T}{Z_0} {}^{(\perp)}N_\mu. \quad (6.12b)$$

Der Grund für diese Ersetzung ist die Tatsache, daß beide Ströme $j_{a\mu}$ (6.11) dadurch eine sehr einfache Form annehmen, nämlich

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \rho_1 \left\{ K_{1\mu} + \lambda(F_\mu - G_\mu) \right\} \quad (6.13a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \rho_2 \left\{ K_{2\mu} + \lambda(F_\mu + G_\mu) \right\}, \quad (6.13b)$$

und dieses Ergebnis läßt sich weiter vereinfachen zu

$$j_{1\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \rho_1 \mathbb{K}_{1\mu} \quad (6.14a)$$

$$j_{2\mu} = \frac{\hbar}{Mc} \rho_2 \mathbb{K}_{2\mu} \quad (6.14b)$$

wenn man gleichzeitig die effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) einführt durch

$$\mathbb{K}_{1\mu} = K_{1\mu} + \lambda(F_\mu - G_\mu) \quad (6.15a)$$

$$\mathbb{K}_{2\mu} = K_{2\mu} + \lambda(F_\mu + G_\mu). \quad (6.15b)$$

Damit ist die endgültige Form der Ströme $j_{a\mu}$ (6.14) dieselbe als wenn man die Austauschfelder in den ursprünglichen Strömen (6.11) Null setzt, vorausgesetzt man ersetzt die ursprünglichen kinetischen Felder $K_{a\mu}$ durch die neu eingeführten

effektiven Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ (6.15). Eine solche Absorption der Austauschfelder in die Einzelteilchen-Felder ist nicht nur eine formaler Trick, sondern erlaubt auch eine tiefere Einsicht in den physikalischen Gehalt der Theorie (s.u.). Für den Spezialfall reiner Zustände ($\lambda = 1$) wurde diese Reparametrisierung der Austauschfelder in Abhängigkeit von $S_\mu, T_\mu, F_\mu, G_\mu$ bereits in Kapitel 5 beschrieben.

Nachdem die kinetischen Felder in ihre neue Form (6.15) gebracht wurden, bietet es sich an, auch die Lokalisationsfelder $L_{a\mu}$ in eine neue Form zu transformieren. Die genaue Form der Transformation zu den effektiven Lokalisationsfeldern $\mathbb{L}_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) erkennt man, wenn man die Energie-Impulsdichte $T_{\mu\nu}$ (2.29) näher betrachtet. Durch eine ähnliche Analyse, wie sie bereits für die Ströme $j_{a\mu}$ (6.14) durchgeführt wurde, findet man hier für die effektiven Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$

$$\mathbb{L}_{1\mu} = L_{1\mu} + \lambda(S_\mu - T_\mu) \quad (6.16a)$$

$$\mathbb{L}_{2\mu} = L_{2\mu} + \lambda(S_\mu + T_\mu) \quad (6.16b)$$

und diese neuen Felder bilden die Energie-Impulsdichte $T_{\mu\nu}$, allerdings in komplizierterer Weise als dies im Fall der kinetischen Felder mit den Strömen (6.14) der Fall war. Um die Struktur des Energie-Impulstensors $T_{\mu\nu}$ zu vereinfachen, spaltet man diesen in drei Teile auf

$$T_{\mu\nu} = {}^{(1)}T_{\mu\nu} + {}^{(2)}T_{\mu\nu} + {}^{(x)}T_{\mu\nu} , \quad (6.17)$$

wobei die ersten beiden Terme ${}^{(a)}T_{\mu\nu}$ ($a = 1, 2$) die Einzelteilchen-Beiträge darstellen und der dritte Term ${}^{(x)}T_{\mu\nu}$ die Austauschfelder enthält. Ähnlich wie im Fall der Ströme $j_{a\mu}$ enthalten die Einzelteilchen-Beiträge ${}^{(a)}T_{\mu\nu}$ nicht mehr explizit die Austauschfelder, da diese in die effektiven Einzelteilchen-Felder $\mathbb{K}_{a\mu}, \mathbb{L}_{a\mu}$ absorbiert wurden

$${}^{(1)}T_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{M} \rho_1 \left\{ \mathbb{K}_{1\mu} \mathbb{K}_{1\nu} + \mathbb{L}_{1\mu} \mathbb{L}_{1\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\mathbb{K}_{1\lambda} \mathbb{K}_1^\lambda + \mathbb{L}_{1\lambda} \mathbb{L}_1^\lambda - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.18a)$$

$${}^{(2)}T_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{M} \rho_2 \left\{ \mathbb{K}_{2\mu} \mathbb{K}_{2\nu} + \mathbb{L}_{2\mu} \mathbb{L}_{2\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\mathbb{K}_{2\lambda} \mathbb{K}_2^\lambda + \mathbb{L}_{2\lambda} \mathbb{L}_2^\lambda - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right] \right\} . \quad (6.18b)$$

Andererseits wird der Austauschterm ${}^{(x)}T_{\mu\nu}$ selbst wieder aus zwei Anteilen aufgebaut, welche die Einzelteilchen-Felder nicht enthalten:

$${}^{(x)}T_{\mu\nu} = {}^{(1)}t_{\mu\nu} + {}^{(2)}t_{\mu\nu} . \quad (6.19)$$

Diese Anteile sehen folgendermaßen aus:

$${}^{(1)}t_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{M} \lambda(1-\lambda)\rho_1 \left\{ (F_\mu - G_\mu)(F_\nu - G_\nu) + (S_\mu - T_\mu)(S_\nu - T_\nu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[(F_\lambda - G_\lambda)(F^\lambda - G^\lambda) + (S_\lambda - T_\lambda)(S^\lambda - T^\lambda) \right] \right\} \quad (6.20a)$$

$${}^{(2)}t_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{M} \lambda(1-\lambda)\rho_2 \left\{ (F_\mu + G_\mu)(F_\nu + G_\nu) + (S_\mu + T_\mu)(S_\nu + T_\nu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[(F_\lambda + G_\lambda)(F^\lambda + G^\lambda) + (S_\lambda + T_\lambda)(S^\lambda + T^\lambda) \right] \right\} . \quad (6.20b)$$

Im Gegensatz zu den Strömen $j_{a\mu}$ (6.14) enthält der Energie-Impulstensor (6.17) einen Zusatzterm (nämlich ${}^{(x)}T_{\mu\nu}$), welcher auch nach der Absorption der Austauschfelder in die neuen Einzelteilchen-Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$, $\mathbb{L}_{a\mu}$ ausschließlich aus den Austauschfeldern $(S_\mu, T_\mu, F_\mu, G_\mu)$ gemeinsam mit der Mischungsvariable $\lambda(x)$ aufgebaut wird. Ein solcher Term in $T_{\mu\nu}$ ist nötig, um den Energie-Impuls Erhaltungssatz (2.27) (bzw. die Energie-Impuls-Bilanz (2.31)) zu gewährleisten, während die Stromerhaltung (2.23) ohne einen solchen expliziten Austauschterm erfüllt ist. Der Austauschterm besteht nun sowohl aus den Austauschfeldern als auch aus dem Mischungsparameter $\lambda(x)$ und stellt somit eine Verknüpfung von Austausch- und Mischungseffekten dar. Insbesondere wird klar, daß sowohl das Nullsetzen der Austauschfelder als auch das Vorliegen reiner Zustände ($\lambda = 1$) dazu führt, daß dieser Austauschterm ${}^{(x)}T_{\mu\nu}$ (6.19) verschwindet. Dies erklärt, warum bei Vorliegen nur eines der beiden Effekte keine Änderung der physikalischen Größen auftritt.

Will man sich davon überzeugen, daß die Erhaltungsgleichungen für die physikalischen Dichten erfüllt sind, so muß man die Quell- und Wirbelgleichungen für die Hamilton'schen Komponentenfelder, welche aus der Integrabilitätsbedingung (2.15) und der Erhaltungsgleichung (2.16) folgen, auf die neue Parametrisierung durch die Einzelteilchen-Felder $\{\mathbb{K}_{a\mu}, \mathbb{L}_{a\mu}\}$ und die Austauschfelder $\{S_\mu, T_\mu, F_\mu, G_\mu\}$ umschreiben.

Nun liefert die Integrationsbedingung für die ursprünglichen Lokalisationsfelder $L_{a\mu}$ (3.10)

$$\nabla_\mu L_{1\nu} - \nabla_\nu L_{1\mu} = -[\nabla_\mu L_{2\nu} - \nabla_\nu L_{2\mu}] = 2\lambda [S_\mu T_\nu - S_\nu T_\mu - F_\mu G_\nu + F_\nu G_\mu] . \quad (6.21)$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß das totale Lokalisationsfeld L_μ ein Gradientenfeld ist (vgl. (3.40))

$$L_\mu \doteq L_{1\mu} + L_{2\mu} = 2 \frac{\partial_\mu L}{L} . \quad (6.22)$$

Im Gegensatz dazu sind die Einzelteilchen-Felder $L_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) offensichtlich keine Gradientenfelder. Aber man kann nun die effektiven Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) (6.16) als Gradienten von Amplitudenfeldern $\mathbb{L}_a(x)$ auffassen, indem man setzt

$$\mathbb{L}_{a\mu} = \frac{\partial_\mu \mathbb{L}_a}{\mathbb{L}_a} . \quad (6.23)$$

Daß dies möglich ist, erkennt man, indem man die in den neuen Austauschfeldern $\{S_\mu, T_\mu\}$ ausgedrückte Renormalisierungsdynamik (6.4) auf die Einzelteilchendichten ρ_a umrechnet. Man erhält für diese Einzelteilchendichten

$$\partial_\mu \rho_1 = 2\rho_1 \mathbb{L}_{1\mu} \quad (6.24a)$$

$$\partial_\mu \rho_2 = 2\rho_2 \mathbb{L}_{2\mu} \quad (6.24b)$$

was die effektiven Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ als Gradientenfelder

$$\nabla_\mu \mathbb{L}_{a\nu} - \nabla_\nu \mathbb{L}_{a\mu} = 0 \quad (6.25)$$

identifiziert, in Übereinstimmung mit Gleichung (6.23).

Nachdem nun der Übergang von den Lokalisationsfeldern $L_{a\mu}$ zu den Amplitudenfeldern \mathbb{L}_a (6.23) vorgenommen wurde, ist man selbstverständlich auch an den Wellengleichungen für die skalaren Amplitudenfelder \mathbb{L}_a interessiert. Diese lauten

$$\begin{aligned} \square \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_1 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \mathbb{K}_{1\mu} \mathbb{K}_1^\mu \right\} \\ = \lambda(1 - \lambda) \mathbb{L}_1 \left\{ (S^\mu - T^\mu)(S_\mu - T_\mu) + (F^\mu - G^\mu)(F_\mu - G_\mu) \right\} \end{aligned} \quad (6.26a)$$

$$\begin{aligned} \square \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_2 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \mathbb{K}_{2\mu} \mathbb{K}_2^\mu \right\} \\ = \lambda(1 - \lambda) \mathbb{L}_2 \left\{ (S^\mu + T^\mu)(S_\mu + T_\mu) + (F^\mu + G^\mu)(F_\mu + G_\mu) \right\} . \end{aligned} \quad (6.26b)$$

Man beachte, daß auch diese Gleichungen für den Fall verschwindender Austauschfelder ($S_\mu = T_\mu = F_\mu = G_\mu \equiv 0$) *oder* reiner Zustände ($\lambda \equiv 1$) die triviale Form zweier entkoppelter Klein-Gordon Gleichungen annehmen

$$\square \mathbb{L}_a + \mathbb{L}_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \mathbb{K}_{a\mu} \mathbb{K}_a^\mu \right\} = 0 . \quad (6.27)$$

Dies zeigt noch einmal deutlich, weshalb RST-Quanteneffekte nur auftreten können, wenn sowohl nicht-triviale Austauschfelder als auch Gemische vorliegen. Erst durch beide Effekte gemeinsam werden die Gleichungen (6.27) in ihre verschränkte Form (6.26) übergeführt, welche die Einzelteilchen-Amplituden \mathbb{L}_a mit den Austauschfeldern verknüpfen, sodaß Austauschereffekte auftreten können.

Eine Kopplung der Einzelteilchen- an die Austauschfelder wird nun auch für die kinetischen Felder zu erwarten sein. In der Tat lassen sich die Wirbelgleichungen der effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ ($a = 1, 2$) aus der abstrakten Integritätsbedingung (2.15) auf einfache Weise berechnen

$$\nabla_{\mu}\mathbb{K}_{1\nu} - \nabla_{\nu}\mathbb{K}_{1\mu} = F_{1\mu\nu} + 2\lambda(1 - \lambda) \left[(S_{\mu} - T_{\mu})(F_{\nu} - G_{\nu}) - (S_{\nu} - T_{\nu})(F_{\mu} - G_{\mu}) \right] \quad (6.28a)$$

$$\nabla_{\mu}\mathbb{K}_{2\nu} - \nabla_{\nu}\mathbb{K}_{2\mu} = F_{2\mu\nu} + 2\lambda(1 - \lambda) \left[(S_{\mu} + T_{\mu})(F_{\nu} + G_{\nu}) - (S_{\nu} + T_{\nu})(F_{\mu} + G_{\mu}) \right]. \quad (6.28b)$$

Diese Gleichungen machen klar, daß die effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ als Wirbel nicht nur die Komponenten $F_{a\mu\nu}$ der Bündelkrümmung $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ (2.34) besitzen, sondern darüberhinaus noch einen zusätzlichen Wirbel (im folgenden als Austauschfeldstärke bezeichnet), welcher durch den zweiten Term auf der rechten Seite von (6.28) gegeben ist. Wie schon für die Energie-Impulsdichte $T_{\mu\nu}$ (6.17) und die Amplitudengleichungen (6.26) gezeigt, verschwindet der Austauscheffekt auch für die kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$, wenn man die Austauschfelder $S_{\mu}, T_{\mu}, F_{\mu}, G_{\mu}$ Null setzt oder wenn reine Zustände ($\lambda = 1$) vorliegen. Der Austauscheffekt für die kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ (6.15) unterscheidet sich aber in einem Punkt vom entsprechenden Effekt für die Energie-Impulsdichte und die Amplitudengleichungen, nämlich dadurch, daß der kinetische Austauschterm (6.28) schon verschwindet, wenn nur eines der Austauschfeldpaare $\{S_{\mu}, T_{\mu}\}$ oder $\{F_{\mu}, G_{\mu}\}$ gleich Null ist, während in den beiden anderen Fällen Austauscheffekte auch dann vorhanden sind, wenn nur eines der beiden Austauschfelder-Paare von Null verschieden ist.

Um nun die Einzelteilchen-Gleichungen für die effektiven Felder zu schließen, fehlen noch die Quellgleichungen der kinetischen Felder. Diese erhält man aus der Erhaltungsgleichung (2.16) in gewohnter Weise:

$$\nabla^{\mu}\mathbb{K}_{1\mu} + 2\mathbb{L}_1^{\mu} \mathbb{K}_{1\mu} = 0 \quad (6.29a)$$

$$\nabla^{\mu}\mathbb{K}_{2\mu} + 2\mathbb{L}_2^{\mu} \mathbb{K}_{2\mu} = 0. \quad (6.29b)$$

Beachtet man die Gradientenbedingung der effektiven Lokalisationsfelder $\mathbb{L}_{a\mu}$ (6.25), so erkennt man, daß die vorliegende Quellgleichung (6.29) nichts anderes als die Gleichung für die Stromerhaltung (2.23) ist, wenn man die in Gleichung (6.14) angegebene Form der Ströme zusammen mit den Differentialgleichungen für die Dichten (6.24) verwendet.

Wie die Betrachtung der Einzelteilchen-Dynamik gezeigt hat, gibt es eine Kopplung der Einzelteilchen-Felder an die Austauschfelder, vgl. die Amplitudenglei-

chungen (6.26) sowie die Rotationsgleichungen (6.28) für die effektiven kinetischen Felder. Diese Kopplung verknüpft die Austausch- und Einzelteilchenfelder auf eine solche Weise, daß die Einzelteilchen-Dynamik sich von der Austauschdynamik nur für reine Zustände ($\lambda = 1$) abkoppeln läßt, nicht aber für Gemische ($\lambda \neq 1$). Für die reinen Zustände kann man also zuerst das autonome Einzelteilchen-System lösen und dann diese Lösungen als festgelegte Hintergrundfelder in die Austauschdynamik einführen, wie schon in Kapitel 5 gezeigt. Aber im Falle von Gemischen mit Austauschfeldern ist dieses Vorgehen nicht mehr möglich, man muß also das Einzelteilchen-System gemeinsam mit dem Gleichungssystem für die Austauschfelder lösen, da die Einzelteilchen-Felder in diesem Fall an die Austauschfelder ankoppeln. Die Quellgleichungen der Austauschfelder lassen sich aus der Erhaltungsgleichung (2.16) ableiten

$$\begin{aligned} \nabla^\mu S_\mu = & - (S^\mu - T^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (S^\mu + T^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} + (F^\mu - G^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} + (F^\mu + G^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} \\ & + 2(2\lambda - 1)S^\mu S_\mu - 2\lambda F^\mu F_\mu - 2(\lambda - 1)G^\mu G_\mu \end{aligned} \quad (6.30a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu T_\mu = & (S^\mu - T^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (S^\mu + T^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} - (F^\mu - G^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} + (F^\mu + G^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} \\ & + 2(2\lambda - 1)(S^\mu T_\mu - F^\mu G_\mu) \end{aligned} \quad (6.30b)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu F_\mu = & - (F^\mu - G^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (F^\mu + G^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} - (S^\mu - T^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} - (S^\mu + T^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} \\ & + 2(\lambda - 1)G^\mu T_\mu + 2(3\lambda - 1)F^\mu S_\mu \end{aligned} \quad (6.30c)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu G_\mu = & (F^\mu - G^\mu)\mathbb{L}_{1\mu} - (F^\mu + G^\mu)\mathbb{L}_{2\mu} + (S^\mu - T^\mu)\mathbb{K}_{1\mu} - (S^\mu + T^\mu)\mathbb{K}_{2\mu} \\ & + 2(3\lambda - 2)S^\mu G_\mu + 2\lambda F^\mu T_\mu . \end{aligned} \quad (6.30d)$$

Es fällt auf, daß auch im Falle reiner Zustände die Austauschfelder nicht von den Einzelteilchen-Feldern abkoppeln. Eine solche Entkopplung tritt ausschließlich für die Wirbelgleichungen auf, welche aus der Integrabilitätsbedingung (2.15) abgeleitet werden:

$$\nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu = 0 \quad (6.31a)$$

$$\nabla_\mu T_\nu - \nabla_\nu T_\mu = 2(2\lambda - 1)[S_\mu T_\nu - S_\nu T_\mu] + 2[G_\mu F_\nu - G_\nu F_\mu] \quad (6.31b)$$

$$\nabla_\mu F_\nu - \nabla_\nu F_\mu = 2(\lambda - 1)[S_\mu F_\nu - S_\nu F_\mu + G_\mu T_\nu - G_\nu T_\mu] \quad (6.31c)$$

$$\nabla_\mu G_\nu - \nabla_\nu G_\mu = 2\lambda[F_\mu T_\nu - F_\nu T_\mu + S_\mu G_\nu - S_\nu G_\mu] . \quad (6.31d)$$

Hier erkennt man anhand der ersten Gleichung (6.31a), daß S_μ immer ein Gradientenfeld darstellt, was allerdings schon aus der Definition dieses Feldes (6.2) folgt. Darüberhinaus wird das Feld F_μ im Falle reiner Zustände ebenso zu einem Gradientenfeld, vgl. (6.31c).

Die neue Parametrisierung führt nicht nur zu einer formalen Vereinfachung der gesamten RST-Dynamik, sondern macht die Theorie auch transparenter, da klar zwischen Einzelteilchen- und Austauschfeldern unterschieden wird. Als Folge davon kann man die physikalischen Voraussagen der RST in Form von Austauschwechselwirkungen zwischen Einzelteilchen-Systemen beschreiben. Darüberhinaus macht die neue Parametrisierung auch verständlich, weshalb Zustandsgemische gemeinsam mit Austauschfeldern auftreten müssen, damit sich physikalisch relevante Effekte ergeben, da nur in diesem Fall Austauschsterme in den Gleichungen für die effektiven Einzelteilchen-Felder $\mathbb{L}_{a\mu}$ und $\mathbb{K}_{a\mu}$ vorhanden sind.

6.2 Zerlegung in zwei Teilsysteme

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, daß es möglich ist, das vorliegende gekoppelte Gleichungssystem aus Einzelteilchen- und Austauschfeldern so umzuformen, daß zwei getrennte Teilsysteme entstehen, welche nur durch eine algebraische Zwangsbedingung verknüpft sind. Hierzu ist es notwendig, für die Austauschfelder eine neue Parametrisierung einzuführen. Ausgangspunkt für diese Umparametrisierung bilden die Wirbelgleichungen für die effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ (6.28), deren Wirbel nicht identisch sind mit den Eichfeldstärken $F_{a\mu\nu}$, da sie noch zusätzliche Beiträge von den Austauschfeldern enthalten. Es erscheint daher sinnvoll, die Austauschfeldstärken $X_{a\mu\nu}$ für jedes der beiden Teilchen folgendermaßen zu definieren

$$X_{1\mu\nu} = 2\lambda(1 - \lambda) \left[(S_\mu - T_\mu)(F_\nu - G_\nu) - (S_\nu - T_\nu)(F_\mu - G_\mu) \right] \quad (6.32a)$$

$$X_{2\mu\nu} = 2\lambda(1 - \lambda) \left[(S_\mu + T_\mu)(F_\nu + G_\nu) - (S_\nu + T_\nu)(F_\mu + G_\mu) \right], \quad (6.32b)$$

so daß die ursprünglichen Wirbelgleichungen (6.28) ($a = 1, 2$) sich vereinfachen zu

$$\nabla_\mu \mathbb{K}_{a\nu} - \nabla_\nu \mathbb{K}_{a\mu} = F_{a\mu\nu} + X_{a\mu\nu}. \quad (6.33)$$

Darüberhinaus schließt man auch aus diesen Wirbelgleichungen, daß die Austauschfeldstärken $X_{a\mu\nu}$ folgender Identität genügen müssen

$$\nabla_\lambda X_{a\mu\nu} + \nabla_\mu X_{a\nu\lambda} + \nabla_\nu X_{a\lambda\mu} \equiv 0 \quad (6.34)$$

und deshalb selbst als die Wirbel von Austauschpotentialen $X_{a\mu}$ dargestellt werden können:

$$X_{a\mu\nu} = \nabla_\mu X_{a\nu} - \nabla_\nu X_{a\mu}. \quad (6.35)$$

Offenbar können die entsprechenden Austauschpotentiale $X_{a\mu}$ dadurch gefunden werden, daß man die Wirbelgleichungen der Austauschfelder (6.31) verwendet. Es ergibt sich für die gesuchten Austausch-Potentiale:

$$X_{1\mu} = \lambda F_\mu + (1 - \lambda)G_\mu \quad (6.36a)$$

$$X_{2\mu} = \lambda F_\mu - (1 - \lambda)G_\mu . \quad (6.36b)$$

Als Folge davon kann man nun zu den ursprünglichen Wirbelgleichungen für die kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ (6.28) zurückkehren und neue Felder $\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu}$ einführen

$$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \doteq \mathbb{K}_{a\mu} - X_{a\mu} \quad (6.37)$$

welche ihrerseits nun nur noch die Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ als Wirbel besitzen:

$$\nabla_\mu \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\nu} - \nabla_\nu \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} = F_{a\mu\nu} . \quad (6.38)$$

Da diese Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ selbst wieder die Wirbel von Vektorpotentialen $A_{a\mu}$ sind

$$F_{a\mu\nu} = \nabla_\mu A_{a\nu} - \nabla_\nu A_{a\mu} , \quad (6.39)$$

kann die formale Lösung der Gleichung (6.38) geschrieben werden als

$$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} = \partial_\mu \alpha_a + A_{a\mu} . \quad (6.40)$$

Hierbei bleiben die Skalarfelder α_a zunächst unbestimmt, werden aber für die statische Situation, welche im nächsten Kapitel untersucht wird, mit den Energieeigenwerten in Beziehung stehen. Für den Fall ohne Austauschfelder stellt das Skalarfeld α_a den Phasenfaktor der Wellenfunktion ψ_a (2.43) dar.

Wegen (6.37) und (6.40) kennt man dann auch die allgemeine Form der ursprünglichen, effektiven kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$

$$\mathbb{K}_{a\mu} = \partial_\mu \alpha_a + A_{a\mu} + X_{a\mu} . \quad (6.41)$$

Der nächste Schritt der Reparametrisierung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Austauschfelder meistens in Form bestimmter Kombinationen auftreten (vgl. die Amplitudengleichungen (6.26) oder die Austauschfeldstärken $X_{a\mu\nu}$ (6.32)). Daher führt man diese Kombinationen als neue Feldvariablen ein, d.h. man setzt

für beide Mischungstypen ($\sigma_* = \pm 1$)

$$\Lambda_{1\mu} \doteq \sqrt{\sigma_* \lambda (1 - \lambda)} (S_\mu - T_\mu) \quad (6.42a)$$

$$\Lambda_{2\mu} \doteq \sqrt{\sigma_* \lambda (1 - \lambda)} (S_\mu + T_\mu) \quad (6.42b)$$

$$\Gamma_{1\mu} \doteq \sqrt{\sigma_* \lambda (1 - \lambda)} (F_\mu - G_\mu) \quad (6.42c)$$

$$\Gamma_{2\mu} \doteq \sqrt{\sigma_* \lambda (1 - \lambda)} (F_\mu + G_\mu) . \quad (6.42d)$$

Aufgrund der Definition der Mischungsvariablen λ (6.5) stellen die neuen Austauschfelder $\Lambda_{a\mu}, \Gamma_{a\mu}$ reelle Vierer-Vektorfelder für beide Gemischttypen dar. Durch diese Parametrisierung vereinfachen sich die Austauschfeldstärken $X_{a\mu\nu}$ (6.32) wesentlich und nehmen folgende Form an:

$$X_{a\mu\nu} = 2\sigma_* \left[\Lambda_{a\mu} \Gamma_{a\nu} - \Lambda_{a\nu} \Gamma_{a\mu} \right] , \quad (6.43)$$

und dieses Ergebnis führt für die Wirbelgleichungen der Austauschpotentiale (6.35) auf ($a = 1, 2$)

$$\nabla_\mu X_{a\nu} - \nabla_\nu X_{a\mu} = 2\sigma_* [\Lambda_{a\mu} \Gamma_{a\nu} - \Lambda_{a\nu} \Gamma_{a\mu}] . \quad (6.44)$$

In ähnlicher Weise schreiben sich die Wirbelgleichungen für die neuen Felder $\Gamma_{a\mu}$

$$\nabla_\mu \Gamma_{a\nu} - \nabla_\nu \Gamma_{a\mu} = -2 \left[\Lambda_{a\mu} X_{a\nu} - \Lambda_{a\nu} X_{a\mu} \right] , \quad (6.45)$$

und schließlich nehmen die Wirbelgleichungen für $\Lambda_{a\mu}$ folgende Gestalt an

$$\nabla_\mu \Lambda_{a\nu} - \nabla_\nu \Lambda_{a\mu} = -2 \left[X_{a\mu} \Gamma_{a\nu} - X_{a\nu} \Gamma_{a\mu} \right] . \quad (6.46)$$

Der Vollständigkeit halber seien auch noch die Quellgleichungen der neuen Felder angegeben:

$$\nabla^\mu \Lambda_{a\mu} = -2\Lambda_a^\mu \mathbb{L}_{a\mu} + 2\Gamma_a^\mu \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \quad (6.47a)$$

$$\nabla^\mu \Gamma_{a\mu} = -2\Gamma_a^\mu \mathbb{L}_{a\mu} - 2\Lambda_a^\mu \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \quad (6.47b)$$

$$\nabla^\mu X_{a\mu} = -2X_a^\mu \mathbb{L}_{a\mu} - 2\mathbb{L}_a^\mu \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} - \nabla^\mu \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \quad (6.47c)$$

Die Quellgleichungen von $\Lambda_{a\mu}$ und $\Gamma_{a\mu}$ lassen sich aus den Quellgleichungen (6.30) ableiten, wohingegen sich die Quellgleichung für die Austauschpotentiale $X_{a\mu}$ aus (6.29) unter Verwendung von (6.37) ergibt.

Schließlich nehmen mit diesen Ersetzungen auch die Amplitudengleichungen (6.26) eine einfachere Form an, nämlich

$$\square \mathbb{L}_a + \mathbb{L}_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \mathbb{K}_{a\mu} \mathbb{K}_a^\mu \right\} = \sigma_* \mathbb{L}_a \left\{ \Lambda_{a\mu} \Lambda_a^\mu + \Gamma_{a\mu} \Gamma_a^\mu \right\} . \quad (6.48)$$

Diese neue Parametrisierung mag den Anschein erwecken, daß man eine vollständige Trennung des 2-Teilchen Systems in zwei unabhängige Teilsysteme vollzogen hat, da sowohl die Einzelteilchen-Dynamik (6.38) und (6.48) als auch die Austauschdynamik (6.44)-(6.47) die beiden Teilsysteme nicht explizit verknüpfen: Alle dynamischen Gleichungen gelten für jeden Teilchenindex ($a=1,2$) getrennt. Aber es besteht immer noch eine versteckte Kopplung beider Teilchen, und die verborgene Art dieser Kopplung ist gerade der Grund für den besonderen Charakter der Austauschwechselwirkung, im Gegensatz zu der leicht zu verstehenden Wirkung der Eichkräfte.

Als Vorbereitung für die folgende Darstellung der Besonderheiten der Austauschkräfte sei zunächst darauf hingewiesen, daß die neue Parametrisierung *vier* neue Felder (d.h. $X_{a\mu}$ und $\Gamma_{a\mu}$) anstelle von nur *zwei* Feldern (nämlich G_μ und F_μ), vgl. (6.12) einführt. Daher muß es Zwangsbedingungen zwischen diesen neuen Feldern geben, und es läßt sich leicht zeigen, daß diese im Falle positiver Gemische ($\sigma_* = +1$) folgende Form annehmen

$$\Gamma_{1\mu} = \cosh \beta \cdot X_{2\mu} - \sinh \beta \cdot X_{1\mu} \quad (6.49a)$$

$$\Gamma_{2\mu} = \cosh \beta \cdot X_{1\mu} - \sinh \beta \cdot X_{2\mu} , \quad (6.49b)$$

und entsprechend für die negativen Gemische ($\sigma_* = -1$)

$$\Gamma_{1\mu} = \cosh \beta \cdot X_{1\mu} - \sinh \beta \cdot X_{2\mu} \quad (6.50a)$$

$$\Gamma_{2\mu} = \cosh \beta \cdot X_{2\mu} - \sinh \beta \cdot X_{1\mu} . \quad (6.50b)$$

Die Variable β , welche in diesen Zwangsbedingungen auftritt, hängt mit der Mischungsvariablen λ folgendermaßen zusammen

$$\lambda \doteq \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \tanh \beta), & \sigma_* = +1 \\ \frac{1}{2}(1 + \coth \beta), & \sigma_* = -1 . \end{cases} \quad (6.51)$$

Der mögliche Wertebereich von β ist $-\infty < \beta < +\infty$ für die positiven Gemische ($\rightsquigarrow 0 < \lambda < 1$) und $0 < \beta < \infty$ für die negativen Gemische ($\rightsquigarrow 1 < \lambda < \infty$), in Übereinstimmung mit dem Wertebereich der ursprünglichen Mischungsvariable λ (6.5). Beide Zwangsbedingungen (6.49) und (6.50) können in eine gemeinsame Form für beide Gemischsorten übergeführt werden, indem man die Hilfsvariable β eliminiert. Es ergibt sich eine "symmetrische" Bedingung

$$\Gamma_{1\mu}\Gamma_{1\nu} + \sigma_* X_{1\mu} X_{1\nu} = \Gamma_{2\mu}\Gamma_{2\nu} + \sigma_* X_{2\mu} X_{2\nu} \quad (6.52)$$

und eine “anti-symmetrische” Bedingung

$$X_{1\mu}\Gamma_{1\nu} - X_{1\nu}\Gamma_{1\mu} = -\left[X_{2\mu}\Gamma_{2\nu} - X_{2\nu}\Gamma_{2\mu}\right]. \quad (6.53)$$

Die neue Parametrisierung gibt also einen ersten Hinweis auf die Tatsache, daß die Austauschkräfte eher als Zwangsbedingungen für die Bewegung der beiden Teilchen auftreten denn als gewöhnliche dynamische Kräfte (wie z.B. die Eichkräfte).

Die Zwangsbedingung (6.53) kann nun verwendet werden, um einige weitere Besonderheiten der RST-Dynamik zu erklären. Man kann mit ihrer Hilfe aus den Wirbelgleichungen (6.46) für die neuen Austauschfelder $\Lambda_{a\mu}$ schließen, daß diese zu einem Gradientenfeld Λ_μ kombiniert werden können

$$\Lambda_\mu \doteq \Lambda_{1\mu} + \Lambda_{2\mu} \equiv \frac{\partial_\mu \Lambda}{\Lambda}, \quad (6.54)$$

und dieses ist dann mit dem Gradientenfeld S_μ (6.3a) verbunden durch

$$\Lambda_\mu = \begin{cases} \frac{S_\mu}{\cosh \beta}, & \sigma_* = +1 \\ \frac{S_\mu}{\sinh \beta}, & \sigma_* = -1. \end{cases} \quad (6.55)$$

Diese Gleichung kann leicht integriert werden und liefert einen Zusammenhang zwischen den zugehörigen Skalarfeldern β und S (6.7)

$$S = e^{\beta/2} \cdot S_c, \quad (6.56)$$

oder äquivalent dazu für β (6.51) und Λ

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \Lambda_{\text{in}} \cdot \exp\left[\tan^{-1}\left(\frac{e^{\beta(x)} - e^{\beta_{\text{in}}}}{1 + e^{\beta(x) + \beta_{\text{in}}}}\right)\right], & \sigma_* = +1 \\ \Lambda_{\text{in}} \cdot \sqrt{\frac{\tanh(\beta(x)/2)}{\tanh(\beta_{\text{in}}/2)}}, & \sigma_* = -1. \end{cases} \quad (6.57)$$

Λ_{in} und β_{in} stellen hierbei die Werte von $\Lambda(x)$ und $\beta(x)$ an einem Referenzereignis x_{in} der Raumzeit dar.

Damit ist die Reparametrisierung unseres Gleichungssystems abgeschlossen. In der neuen Parametrisierung erkennt man sofort, weshalb physikalisch relevante Effekte nur durch Zusammenwirken von Gemischen *und* Austauschfeldern auftreten können. Darüberhinaus gestattet es diese Parametrisierung, die Voraussagen der RST an einem konkreten Beispiel zu überprüfen, nämlich anhand der statischen Lösungen der 2-Teilchen RST-Dynamik im Coulomb-Potential eines Kerns (skalares He-Atom). Hieraus lassen sich die He-Energieniveaus für die radialsymmetrischen Zustände errechnen, die dann mit den spektroskopischen Daten verglichen werden können.

Kapitel 7

Energieeigenwerte des skalaren He-Atoms

In diesem Kapitel wird ein konkretes Anwendungsbeispiel für die im letzten Kapitel angegebene 2-Teilchen Parametrisierung der RST behandelt: Die Berechnung der statischen Zustände in einem (skalaren) Helium-Atom. Die dabei abgeleiteten Ergebnisse sollen natürlich mit den entsprechenden Resultaten der konventionellen Quantentheorie verglichen werden. Daher wird in Kapitel 7.1 kurz die störungstheoretische Berechnung der Energieeigenwerte in der konventionellen Quantentheorie beschrieben.

In Kapitel 7.2 und 7.3 werden die Dynamik der Austauschfelder und die Bildung verschränkter Zustände in der RST diskutiert. Das in diesen Abschnitten abgeleitete Differentialgleichungssystem wird in Kapitel 7.4 auf statische, radialsymmetrische Zustände spezialisiert. Es ist nun möglich, das relativistische 2-Teilchen Eigenwertproblem fast vollständig in zwei 1-Teilchen Eigenwertprobleme aufzuspalten, so daß die verbleibende Kopplung durch die Austauschfelder zur *Ununterscheidbarkeit* von zwei Teilchen in gebundenen Zuständen führt (Kapitel 7.5).

Schließlich wird in Kapitel 7.6 ein allgemeines Verfahren angegeben, um die Energieeigenwerte von verschränkten 2-Teilchen-Zuständen in erster Ordnung Störungstheorie zu bestimmen. Dieses wird dann auf den Fall positiver Gemische (Kapitel 7.7) und negativer Gemische (Kapitel 7.8) spezialisiert. Die numerische Berechnung der Energieeigenwerte wird in Kapitel 7.9 angegeben, wobei zuerst das Einteilchen-Spektrum (Kapitel 7.10) und im Anschluß daran die 2-Teilchen

Korrekturen (Kapitel 7.11) berechnet werden. Das Kapitel schließt mit dem Vergleich zwischen den Ergebnissen der konventionellen Quantenmechanik und der RST. Dabei zeigt sich, daß die RST deutlich bessere Werte als die konventionelle Quantenmechanik liefert (Kapitel 7.12).

7.1 He-Niveaus in der konventionellen Quantenmechanik

Aufgrund des Paulischen (Anti-)symmetrisierungspostulats müssen die Orts-Wellenfunktionen $\Psi(1, 2)$ eines 2-Teilchen Systems entweder symmetrisch (Ψ_+) oder antisymmetrisch (Ψ_-) unter Teilchenvertauschung sein, d.h.

$$\Psi_{\pm}(1, 2) = \pm \Psi_{\pm}(2, 1) . \quad (7.1)$$

Da die Umkehrung des Vorzeichens der 2-Teilchen Wellenfunktion die Physik des Systems nicht verändert, nennt man die beiden Teilchen ununterscheidbar. Dies drückt sich auch in dem Umstand aus, daß man nicht jedem Teilchen eine 1-Teilchen-Wellenfunktion zuordnen kann, sondern sich nur das Gesamtsystem durch eine Zweiteilchen-Wellenfunktion $\Psi(1, 2)$ darstellen läßt. In diesem Zusammenhang spricht man davon, daß die Teilchen ihre "Individualität" verlieren und "verschränkt" sind [35]. Diese Ununterscheidbarkeit zieht eine Identifikation korrespondierender Punkte im Phasenraum mit sich und verändert daher dessen Topologie [36].

In der nicht-relativistischen Näherung wird die Zeitentwicklung der 2-Teilchen Wellenfunktionen $\Psi(1, 2)$ durch die Schrödingergleichung beschrieben

$$i\hbar\dot{\Psi}(1, 2) = \hat{H}\Psi(1, 2) . \quad (7.2)$$

Ist der 2-Teilchen Hamiltonian \hat{H} symmetrisch unter der Vertauschung von Teilchen (d.h. $\hat{H}(1, 2) = \hat{H}(2, 1)$), so behält die Zeitentwicklung (7.2) die (Anti-)symmetrie (7.1) der Wellenfunktionen bei. Ein einfaches Modellsystem mit einem solchen Hamiltonian ist ein 2-Teilchen System, welches ausschließlich über elektrostatische Kräfte wechselwirkt, d.h.

$$\hat{H}(1, 2) = \hat{H}(1) + \hat{H}(2) + \hat{H}_{\text{int}}(1, 2) \quad (7.3a)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(1, 2) \doteq \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} . \quad (7.3b)$$

Wenn man die Zwischenteilchenwechselwirkung vernachlässigt ($\hat{H}_{\text{int}} \Rightarrow 0$), z.B. wenn eine große räumliche Trennung nach einem Streuprozess auftritt, bleibt die Verschränkung dennoch erhalten, und zwar in der einfachen Form

$$\Psi_{\pm}(1, 2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_I(1) \otimes \psi_{II}(2) \pm \psi_{II}(1) \otimes \psi_I(2) \right), \quad (7.4)$$

so daß der 2-Teilchen Zustand nun in Abhängigkeit von zwei 1-Teilchen Zuständen ψ_I und ψ_{II} beschrieben werden kann, jedoch nicht in einer Form, die es erlaubt, jeden 1-Teilchen Zustand eindeutig einem Teilchen zuzuordnen. Es ist vielmehr so, daß beide Teilchen die beiden 1-Teilchen Zustände gleichzeitig besetzen. Als direkte Folge dieser Tatsache sind diese einfach verschränkten Zustände der Ursprung vieler Quanten-Paradoxa, z.B. vom EPR-Typ [37].

Es ist daher klar, daß diese seltsamen Quanteneffekte sich letzten Endes auf das (Anti-)symmetrisierungspostulat (bzw. Spin-Statistik-Theorem) zurückführen lassen, welches selbst nicht aus fundamentaleren Prinzipien abgeleitet werden kann. Diese Situation wird auch von den modernen Lehrbüchern über die Quantentheorie erkannt, die klarstellen, daß das (Anti-)symmetrisierungspostulat “nicht auf andere Prinzipien der Quantenmechanik zurückgeführt werden kann” [38]. Aber trotz seiner unzureichenden theoretischen Begründung trifft das (Anti-)symmetrisierungspostulat Voraussagen, welche äußerst gut zutreffen. Als eines von vielen überzeugenden Beispielen hierfür betrachten wir die Aufspaltung von gebundenen 2-Teilchen Zuständen in Ortho- und Parazustände (z.B. Ortho- und Parahelium). Die dabei auftretenden Phänomäne werden in niedrigster Ordnung Störungstheorie klarer als durch eine vollständige Lösung des Problems.

Geht man zunächst von zwei nicht-wechselwirkenden und unterscheidbaren (nicht-verschränkten) Teilchen aus, so kann man ihre (normierten) Wellenfunktionen schreiben als

$$\Psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_I(\vec{r}_1) \cdot \psi_{II}(\vec{r}_2). \quad (7.5)$$

Diese erfüllen die entsprechenden Schrödinger-Eigenwertgleichungen

$$\hat{H}_0(1, 2)\Psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E_0(1, 2)\Psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (7.6)$$

$$(\hat{H}_0(1, 2) = \hat{H}(1) + \hat{H}(2)).$$

Da hierbei die Interteilchen-Wechselwirkung vernachlässigt wurde, ist der 2-Teilchen Eigenwert $E_0(1, 2)$ die Summe der 1-Teilchen Eigenwerte $E_{I/II}$

$$E_0(1, 2) = E_I + E_{II}, \quad (7.7)$$

welche selbst durch die entsprechenden 1-Teilchen Probleme festgelegt werden

$$\hat{H}(1)\psi_I(\vec{r}_1) = E_I\psi_I(\vec{r}_1) \quad (7.8a)$$

$$\hat{H}(2)\psi_{II}(\vec{r}_2) = E_{II}\psi_{II}(\vec{r}_2) . \quad (7.8b)$$

Offensichtlich sind die Energieniveaus $E_0(1, 2)$ von unterscheidbaren Teilchen entartet, da die Vertauschung der 1-Teilchen Zustände $\psi_{I/II}$ für den Aufbau der Wellenfunktion Ψ_0 (7.5) dasselbe 2-Teilchen-Spektrum ergeben (*Austauschentarung*).

Um nun eine erste Abschätzung der tatsächlichen 2-Teilchen Energie $E(1, 2)$ als Eigenwert des Hamiltonians $\hat{H}(1, 2)$ (7.3a)

$$\hat{H}(1, 2)\Psi_{\pm}(1, 2) = E^{\pm}(1, 2)\Psi_{\pm}(1, 2) \quad (7.9)$$

unter Berücksichtigung der Interteilchenwechselwirkung zu erhalten, kann man sich zunächst mit der Störungstheorie erster Ordnung zufriedengeben und die Energiekorrekturen $\Delta E_{(\pm)}$

$$\Delta E_{(\pm)} \doteq E^{\pm}(1, 2) - E_0(1, 2) \quad (7.10)$$

in der Standard-Form

$$\Delta E_{(\pm)} = \langle \Psi_{\pm} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{\pm} \rangle \quad (7.11)$$

berechnen. Setzt man hierin die (anti-)symmetrisierten Wellenfunktionen Ψ_{\pm} (7.4) ein, so erhält man sofort die folgende Form für die Energiekorrekturen

$$\Delta E_{(\pm)} = E_C \pm E_G . \quad (7.12)$$

Hierbei ist der erste Beitrag (E_C) nichts anderes als die klassische elektrostatische Wechselwirkungsenergie durch die beiden Ladungswolken mit den Dichten $\rho_{I/II}$, d.h.

$$\rho_I(\vec{r}) = e|\psi_I(\vec{r})|^2 \quad (7.13a)$$

$$\rho_{II}(\vec{r}) = e|\psi_{II}(\vec{r})|^2 , \quad (7.13b)$$

nämlich die Coulomb-Energie E_C

$$E_C = e^2 \iint dV dV' \frac{\rho_I(\vec{r})\rho_{II}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (7.14)$$

Dieser klassische Beitrag, welcher auf unterscheidbare Teilchen zurückführbar ist, wird nun durch den zweiten Term $\pm E_G$ in (7.12) ergänzt. Offensichtlich drückt

dieser Term das Vorhandensein von Austauschkräften, welche durch das (Anti-)symmetrisierungspostulat zustande kommen, in Form der Austauschenergie E_G aus:

$$E_G = e^2 \iint dV dV' \frac{\psi_I^*(\vec{r})\psi_I(\vec{r}')\psi_{II}^*(\vec{r})\psi_{II}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.15)$$

Daraus ergibt sich, daß die Austauschwechselwirkungen die Austauschentartung der Energieniveaus für die unterscheidbaren Teilchen (7.5)-(7.8) aufheben, so daß die Energie der (anti-)symmetrisierten Zustände durch das Austauschintegral E_G (7.12) erhöht (bzw. vermindert) wird, vgl. Figur 7.1. Diese Voraussage der Term-aufspaltung durch die konventionelle Quantentheorie wird qualitativ (aber nicht quantitativ) sehr gut bestätigt (Ortho- und Parahelium) und stellt daher eine unmittelbare und überzeugende Bestätigung des (Anti-)symmetrisierungspostulats dar.

Was einem hierbei dennoch etwas seltsam vorkommt, ist die Tatsache, daß einer der beiden Energiebeiträge (die Austauschenergie E_G) nicht auf die Wirkung einer konkreten Kraft zurückgeführt werden kann, wie dies im Falle der Coulomb-Energie (7.14) durch die Wirkung der $U(1)$ -Eichwechselwirkung möglich ist, sondern auf ein abstraktes Symmetrisierungsprinzip zurückgeführt werden muß. Dies wirft die Frage auf, ob es nicht vielleicht einen alternativen Zugang zur Beschreibung von Mehrteilchen-Systemen geben könnte, welcher dieselbe Aufspaltung (7.12) für ununterscheidbare Teilchen liefert, aber in der Lage ist, der Austauschenergie E_G ein spezifisches Feld (*Austauschfeld*) zuzuordnen, welches die zu ihm gehörigen Austauschkräfte auf ähnliche Weise wie die Eichkräfte durch die Eichfelder (durch Minimalkopplung) vermittelt.

Eine weitere Frage tritt in Verbindung mit der numerischen Genauigkeit der Voraussage der konventionellen Quantentheorie bezüglich der Aufspaltung (7.12) auf. Der numerische Vergleich zwischen den vorausgesagten Energieverschiebungen $\Delta E_{(\pm)}$ (7.12) und den experimentellen Beobachtungen ist eher enttäuschend, vgl. Figur 7.1 und Tabelle 7.1. Anstelle einer Übereinstimmung von Experiment und theoretischer Vorhersage im Bereich von wenigen Prozent, wie man es von einer Störungstheorie erster Ordnung erwarten würde, reichen die Fehler bis zu 30 Prozent. Gibt es einen Grund, weshalb die Störungstheorie erster Ordnung solche unpräzisen Resultate liefert ?

Im folgenden werden beide Fragen gemeinsam beantwortet, und zwar indem die physikalischen Auswirkungen der Austauschfelder in der RST vorgestellt wird. In der ersten Ordnung Störungstheorie liefert diese Beschreibung um ungefähr ei-

ne Größenordnung bessere Übereinstimmung zwischen theoretischen Voraussagen und den beobachteten Daten (s.u. Tabelle 1 und 2 unten) als die konventionelle Quantentheorie. Durch den Vergleich der neuen Beschreibung mit der konventionellen Quantenmechanik kann auch geklärt werden, warum die niedrigste Ordnung der konventionellen Quantentheorie so unzufriedenstellende numerische Ergebnisse liefert.

7.2 Die Austausch-Dynamik

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, hat die Verschränkung von gebundenen Zuständen in der konventionellen Quantenmechanik direkten Einfluß auf die Energieeigenwerte, vgl. deren Aufspaltung in Ortho- und Parazustände (7.12). Nun erwartet man einen ähnlichen Zusammenhang zwischen Verschränkung von Zuständen und Energieeigenwerten auch in der RST. Um diesen RST-Effekt zu beschreiben, besprechen wir zuerst den Charakter der Austauschkräfte anhand der im letzten Kapitel eingeführten Parametrisierung, durch die das RST-System in zwei fast entkoppelte Einteilchen-Systeme zerlegt werden konnte. Durch diese neue Parametrisierung wird es möglich, die besondere Natur der Austauschkräfte auf einfache Weise zu demonstrieren. Dabei ist es für die hier betrachteten statischen Lösungen ausreichend, sich auf eine spezielle Klasse von Lösungen zu beschränken, nämlich auf solche mit verschwindender Euler-Klasse $\mathbf{E}(= \frac{1}{2}E_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)$. Die Euler-Klasse \mathbf{E} ist ein wohlbekanntes Konzept aus der Differentialtopologie [9] und wurde im Rahmen der RST bereits dazu verwendet, um die topologischen Unterschiede zwischen positiven und negativen Gemischen von einem rein mathematischen Standpunkt aus zu beschreiben [39]. In Abhängigkeit von der alten und der neuen Parametrisierung nimmt die Euler-Klasse für beide Gemische folgende Form an:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= 4\sqrt{\sigma_*\lambda(1-\lambda)}[G_\mu F_\nu - G_\nu F_\mu] \\ &= 4[X_{1\mu}\Gamma_{1\nu} - X_{1\nu}\Gamma_{1\mu}] \\ &= -4[X_{2\mu}\Gamma_{2\nu} - X_{2\nu}\Gamma_{2\mu}]. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den Wirbelgleichungen für die neuen Austauschfelder $\Lambda_{a\mu}$ (6.46), so erkennt man sofort, daß die Euler-Klasse auf folgende

Weise geschrieben werden kann:

$$E_{\mu\nu} = -2[\nabla_\mu \Lambda_{1\nu} - \nabla_\nu \Lambda_{1\mu}] \quad (7.17a)$$

$$= +2[\nabla_\mu \Lambda_{2\nu} - \nabla_\nu \Lambda_{2\mu}] . \quad (7.17b)$$

Daher muß der Wert von \mathbf{E} auf jeder kompakten 2-Fläche C^2 der Raumzeit verschwinden

$$\oint_{C^2} \mathbf{E} = 0, \quad (7.18)$$

und zwar aufgrund des verallgemeinerten Stokeschen Satzes

$$\oint_{C^2} \mathbf{E} = \oint_{C^2} \mathbf{d}\Lambda_{\mathbf{a}} = \int_{\partial C^2 = \emptyset} \Lambda_{\mathbf{a}} \quad (7.19)$$

wobei der Rand (∂C^2) einer geschlossenen 2-Fläche immer verschwindet (vgl. die ausführlichere Besprechung dieses Punktes in [39]).

Nun macht man eine Annahme, die zur Vereinfachung der folgenden Diskussion der Austauschfelder führt: Man verwandelt diese *globale* Eigenschaft verschwindender Windungszahlen (7.18) in eine *lokale* Eigenschaft, indem man fordert, daß die Euler-Klasse schon lokal verschwindet: $\mathbf{E}(x) \equiv 0$. Offensichtlich kann dies erreicht werden (vgl. (7.16)), indem man die beiden Austauschfelder $X_{a\mu}, \Gamma_{a\mu}$ proportional zueinander wählt, d.h.

$$\Gamma_{a\mu} = \gamma_a \cdot X_{a\mu} . \quad (7.20)$$

Diese Bedingung führt zum Verschwinden des Wirbels der Austauschfelder $\Lambda_{a\mu}$ (6.46) und erlaubt es, diese als Gradientenfelder zu identifizieren

$$\Lambda_{a\mu} = \frac{\partial_\mu \Lambda_a}{\Lambda_a} . \quad (7.21)$$

Dies ist eine stärkere Bedingung als das vorige Ergebnis (6.54) und kann verwendet werden, um die Wirbelgleichungen der beiden übrigen Austauschfelder (6.44)-(6.45) in die folgende Form zu bringen (für negative Gemische $\sigma_* = -1$):

$$\nabla_\mu \left\{ \Lambda_a^2 \cdot (\Gamma_{a\nu} + X_{a\nu}) \right\} - \nabla_\nu \left\{ \Lambda_a^2 (\Gamma_{a\mu} + X_{a\mu}) \right\} = 0 \quad (7.22a)$$

$$\nabla_\mu \left\{ \Lambda_a^{-2} \cdot (\Gamma_{a\nu} - X_{a\nu}) \right\} - \nabla_\nu \left\{ \Lambda_a^{-2} (\Gamma_{a\mu} - X_{a\mu}) \right\} = 0 . \quad (7.22b)$$

Es ist nun ein Leichtes, zu zeigen, daß dieses System von Wirbelgleichungen die formale Lösung

$$X_{a\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_a^2} + \Lambda_a^2 \right) \partial_\mu \tilde{K}_a \equiv \cosh(\ln \Lambda_a^2) \partial_\mu \tilde{K}_a \quad (7.23a)$$

$$\Gamma_{a\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_a^2} - \Lambda_a^2 \right) \partial_\mu \tilde{K}_a \equiv \sinh(\ln \Lambda_a^2) \partial_\mu \tilde{K}_a \quad (7.23b)$$

mit den beiden unbestimmten Skalarfunktionen $\tilde{K}_a (a = 1, 2)$ zuläßt. Jedoch sorgen die Bedingungen (6.52) dafür, daß beide skalaren Funktionen \tilde{K}_a (bis auf eine Integrationskonstante) übereinstimmen müssen:

$$\tilde{K}_1(x) \equiv \tilde{K}_2(x) \doteq \tilde{K}(x) . \quad (7.24)$$

Analog dazu findet man für die positiven Gemische anstelle von (7.23)

$$X_{a\mu} = \cos[\ln(\Lambda_a^{-2})] \cdot \partial_\mu \tilde{K} \quad (7.25a)$$

$$\Gamma_{a\mu} = \sin[\ln(\Lambda_a^{-2})] \cdot \partial_\mu \tilde{K} \quad (7.25b)$$

was offensichtlich das Wirbelgleichungssystem (6.44)-(6.45) unter Berücksichtigung der Bedingungen (6.52)-(6.53) löst. Offensichtlich können die Faktoren γ_a der Proportionalitätsbedingung (7.20) direkt aus der formalen Lösung (7.23)-(7.25) abgelesen werden als

$$\gamma_a = \begin{cases} \tanh[\ln(\Lambda_a^{-2})], & \sigma_* = -1 \\ \tan[\ln(\Lambda_a^{-2})], & \sigma_* = +1 . \end{cases} \quad (7.26)$$

Da die Austauschfeld-Konfigurationen mit verschwindender Euler-Klasse nun bekannt sind, kann man zu den Amplitudengleichungen (6.48) zurückkehren, um den Einfluß der Austauschfelder auf die zugehörigen Lösungen $\mathbb{L}_a(x)$ aufzuzeigen. Die Lösung dieser Amplitudengleichungen ist nun sicher nicht leicht zu finden, da diese nichtlineare Terme aufweisen. Dieses Problem läßt sich jedoch umgehen, indem man das Paar von Feldern $\{\mathbb{L}_a, \Lambda_a\}$ für jedes Teilchen ($a = 1, 2$) in ein neues Paar $\{\phi_a, \varphi_a\}$ transformiert, welches die Lösung des folgenden Gleichungssystems erster Ordnung darstellt:

$$\partial_\mu \phi_a = \phi_a \cdot \mathbb{L}_{a\mu} + b_a \varphi_a \cdot \Lambda_{a\mu} \quad (7.27a)$$

$$\partial_\mu \varphi_a = \varphi_a \cdot \mathbb{L}_{a\mu} + B_a \phi_a \cdot \Lambda_{a\mu} \quad (7.27b)$$

$$(b_a, B_a = \text{const.}).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dieses System integrabel ist, und zwar aufgrund der Gradienteneigenschaft von $\mathbb{L}_{a\mu}$ (6.23) und $\Lambda_{a\mu}$ (7.21). Kann man Lösungen für das neue System ϕ_a, φ_a finden, so lassen sich die gewünschten Lösungen $\mathbb{L}_a(x)$ (6.48) und $\Lambda_a(x)$ (6.47a) einfach dadurch finden, daß man das System (7.27) invertiert, was auf folgende Gleichungen führt:

$$|\mathbb{L}_a(x)| = L_{a,*} \sqrt{|B_a \cdot \phi_a^2(x) - b_a \cdot \varphi_a^2(x)|} \quad (7.28a)$$

$$\Lambda_a(x) = \Lambda_{a,\text{in}} \exp\left[\int_{x_{\text{in}}}^x \frac{\phi_a \cdot d\varphi_a - \varphi_a \cdot d\phi_a}{B_a \cdot \phi_a^2 - b_a \cdot \varphi_a^2}\right] . \quad (7.28b)$$

Andererseits erkennt man leicht, daß die Felder $\phi_a(x), \varphi_a(x)$ folgendes System von Gleichungen zweiter Ordnung erfüllen

$$\square\phi_a + \phi_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \overset{\circ}{\mathbb{K}}_a^\mu - X_{a\mu} X_a^\mu - \sigma_* \Gamma_{a\mu} \Gamma_a^\mu \right\} = 2 \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \left\{ b_a \varphi_a \Gamma_a^\mu + \phi_a X_a^\mu \right\} \quad (7.29a)$$

$$\square\varphi_a + \varphi_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \overset{\circ}{\mathbb{K}}_a^\mu - X_{a\mu} X_a^\mu - \sigma_* \Gamma_{a\mu} \Gamma_a^\mu \right\} = 2 \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \left\{ B_a \phi_a \Gamma_a^\mu + \varphi_a X_a^\mu \right\}, \quad (7.29b)$$

denn man erhält dieses System auf einfache Weise dadurch, daß man das Gleichungssystem erster Ordnung noch einmal ableitet und die dynamischen Gleichungen für die ursprünglichen Felder \mathbb{L}_a (6.48) und Λ_a (6.47a) einsetzt. Jedoch ist es nötig, außerdem noch folgende Bedingung an die Konstanten B_a, b_a zu stellen, welche in den Transformationsgleichungen (7.27) auftreten:

$$B_a \cdot b_a = -\sigma_* \quad (7.30)$$

$$(a = 1, 2).$$

Das neue Amplitudensystem (7.29) für die neuen Felder $\{\phi_a, \varphi_a\}$ weist nun eine wichtige Eigenschaft auf, die es dem alten System (6.48) voraushat; es enthält nämlich die Austauschfelder $X_{a\mu}, \Gamma_{a\mu}$ in einer neuen Kombination, die zusätzliche Vereinfachungen zuläßt: Zunächst stellt man fest, daß durch die Gleichungen (7.23) und (7.25), welche für die Austauschfelder gelten, die Austauschsterme auf der linken Seite des neuen Systems (7.29) vereinfacht werden zu

$$X_{a\mu} X_a^\mu + \sigma_* \Gamma_{a\mu} \Gamma_a^\mu = \left(\partial_\mu \tilde{K} \right) \left(\partial^\mu \tilde{K} \right). \quad (7.31)$$

Dann betrachtet man die rechte Seite der neuen Gleichungen (7.29) und stellt fest, daß diese die Austauschfelder in folgender Form enthalten:

$$b_a \varphi_a \Gamma_{a\mu} + \phi_a X_{a\mu} \doteq \tilde{K}_{a\mu} \quad (7.32a)$$

$$B_a \phi_a \Gamma_{a\mu} + \varphi_a X_{a\mu} \doteq \tilde{k}_{a\mu}. \quad (7.32b)$$

Um die Eigenschaften dieser speziellen Kombinationen $\tilde{K}_{a\mu}, \tilde{k}_{a\mu}$ der Austausch- und Amplitudenfelder aufzuzeigen, betrachten wir deren Wirbel und finden durch Berücksichtigung des Gleichungssystems erster Ordnung (7.27) gemeinsam mit den Wirbeln der Austauschfelder (6.44)-(6.45):

$$\nabla_\mu \tilde{K}_{a\nu} - \nabla_\nu \tilde{K}_{a\mu} = \mathbb{L}_{a\mu} \tilde{K}_{a\nu} - \mathbb{L}_{a\nu} \tilde{K}_{a\mu} - b_a \left[\Lambda_{a\mu} \tilde{k}_{a\nu} - \Lambda_{a\nu} \tilde{k}_{a\mu} \right] \quad (7.33a)$$

$$\nabla_\mu \tilde{k}_{a\nu} - \nabla_\nu \tilde{k}_{a\mu} = \mathbb{L}_{a\mu} \tilde{k}_{a\nu} - \mathbb{L}_{a\nu} \tilde{k}_{a\mu} - B_a \left[\Lambda_{a\mu} \tilde{K}_{a\nu} - \Lambda_{a\nu} \tilde{K}_{a\mu} \right]. \quad (7.33b)$$

Diese spezifische Form der Wirbel der Feldkombinationen $\tilde{K}_{a\mu}, \tilde{k}_{a\mu}$ (7.32) erlaubt die formale Lösung

$$\tilde{K}_{a\mu} = (\partial_\mu \tilde{K}) \cdot \phi_a \quad (7.34a)$$

$$\tilde{k}_{a\mu} = -(\partial_\mu \tilde{K}) \cdot \varphi_a \quad (7.34b)$$

was anhand des Gleichungssystems erster Ordnung (7.27) leicht nachgeprüft werden kann.

Nun ermöglichen es die Beziehungen (7.31), (7.32) und (7.34), daß wir einige wichtige Schlüsse über die Natur der Austauschfelder ziehen können. Denn das Einsetzen dieser Beziehungen in das neue Amplitudensystem (7.29) bringt dieses in seine endgültige Form

$$\square \phi_a + \phi_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} + \partial_\mu \tilde{K} \right) \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}_a{}^\mu + \partial^\mu \tilde{K} \right) \right\} = 0 \quad (7.35a)$$

$$\square \varphi_a + \varphi_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} - \partial_\mu \tilde{K} \right) \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}_a{}^\mu - \partial^\mu \tilde{K} \right) \right\} = 0. \quad (7.35b)$$

Erstaunlicherweise hat dieses System von vier Gleichungen (ein Paar für jedes Teilchen $a = 1$ bzw. $a = 2$) genau die Form der nicht verschränkten Amplitudengleichung (6.27), bei der die Austauschfelder Null gesetzt wurden, wenn man die kinetischen Felder $K_{a\mu}$ durch die Kombinationen $\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} + \partial_\mu \tilde{K}$ für den “oberen” Zustand ϕ_a und durch $\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} - \partial_\mu \tilde{K}$ für den “unteren” Zustand φ_a ersetzt. Jedoch verändert eine solche Modifikation der kinetischen Felder um einen Gradiententerm ($\partial_\mu \tilde{K}$) nicht die Wirbel (6.38) dieser Felder, welche daher immer noch mit den ursprünglichen Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ übereinstimmen. Daher wirken die Austauschfelder nicht in derselben Weise wie die Eichkräfte $F_{a\mu\nu}$, sondern indirekt, so daß sie eher eine Zwangsbedingung an die Bewegung der beiden Teilchen darstellen. Ruft man sich nochmals in Erinnerung, daß die kinetischen Felder im wesentlichen der Phase der Wellenfunktionen ψ_a der Teilchen entsprechen, so erscheint die hier getroffene Ersetzung $\mathbb{K}_{a\mu} \Rightarrow \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu} \pm \partial_\mu \tilde{K}$ (als Folge der Wirkung der Austauschfelder) als eine Modifikation der beiden Phasen $\alpha_a(x)$ dieser Wellenfunktionen durch eine *gemeinsames* Skalarfeld $\tilde{K}(x)$. Da für gebundene Zustände die Phasen der Wellenfunktionen die Bindungsenergien E ($e^{-i\alpha} \sim e^{-iEt/\hbar}$) enthalten, liefert dieses Ergebnis einen ersten Hinweis darauf, daß sich die Energieeigenwerte durch den Einfluß der Austauschfelder verschieben werden.

7.3 Verschränkte Zustände in der RST

Eine weitere Auswirkung der Austauschfelder besteht im Auftreten einer Verschränkung beider Teilchen, d.h. jedes der beiden Teilchen ($a = 1, 2$) scheint *zwei* 1-Teilchen Zustände zu besetzen, nämlich sowohl ϕ_a (7.35a) als auch φ_a (7.35b). Dies macht die Situation in der RST vergleichbar mit dem Auftreten von verschränkten Zuständen Ψ_{\pm} (7.4) in der konventionellen Quantentheorie. Um diese Tatsache genauer zu verstehen, muß man sich nur in Erinnerung rufen, daß die Einzelteilchen-Dichten ρ_a mit dem Quadrat der Amplitudenfelder L_a^2 übereinstimmen (vgl. (6.24)), und daß man deshalb aus der Gleichung (7.28a) folgende Beziehung ableiten kann

$$\rho_a(x) = \rho_{a,*} |B_a \phi_a^2(x) - b_a \varphi_a^2(x)|, \quad (7.36)$$

wobei $\rho_{a,*}$ die Konstante bezeichnet, welche für die Normierung der Ströme (3.37) benötigt wird. Für die positiven Gemische ($\sigma_* = +1$) erfüllt man die Bedingung (7.30) für die Transformationsparameter B_a, b_a , indem man *Mischungswinkel* μ_a auf folgende Weise einführt (für positive Gemische, ($\sigma_* = +1$))

$$B_a = \frac{\cos \mu_a + 1}{\sin \mu_a} \quad (7.37a)$$

$$b_a = \frac{\cos \mu_a - 1}{\sin \mu_a} \quad (7.37b)$$

und für negative Gemische ($\sigma_* = -1$)

$$B_a = \frac{\cosh \mu_a + 1}{\sinh \mu_a} \quad (7.38a)$$

$$b_a = \frac{\cosh \mu_a - 1}{\sinh \mu_a}. \quad (7.38b)$$

Damit lauten die Einzelteilchen-Dichten ρ_a (7.36) für die positiven Gemische

$$\rho_a(x) = \cos^2 \left(\frac{\mu_a}{2} \right) \cdot \phi_a^2(x) + \sin^2 \left(\frac{\mu_a}{2} \right) \cdot \varphi_a^2(x), \quad (7.39)$$

und analog für die negativen Gemische

$$\rho_a(x) = \left| \cosh^2 \left(\frac{\mu_a}{2} \right) \cdot \phi_a^2 - \sinh^2 \left(\frac{\mu_a}{2} \right) \cdot \varphi_a^2(x) \right|, \quad (7.40)$$

wobei die Normierungskonstanten in die Quantenzustände ϕ_a, φ_a hineinabsorbiert wurden. Offensichtlich besteht die Einzelteilchen-Dichte $\rho_1(\rho_2)$ aus Beiträgen von *beiden* Quantenzuständen ϕ_1 und φ_1 (ϕ_2 und φ_2), wobei die relativen Gewichtungsfaktoren durch die Mischungswinkel bestimmt sind.

Da beide Ströme $j_{a\mu}$ von den skalaren Dichten ρ_a gebildet werden (vgl. (6.14)), sind auch diese mit beiden Quantenzuständen ϕ_a, φ_a verknüpft, und somit wird diese Art von 2-Teilchen Verschränkung auch auf die Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ übertragen, welche aus beiden Zuständen gemeinsam gemäß den Maxwell-Relationen (2.51) gebildet werden. Andererseits wird die Bewegung des ersten (zweiten) Teilchens durch das erste (zweite) Eichfeld $F_{1\mu\nu}$ ($F_{2\mu\nu}$) beeinflusst, und zwar weil durch das Prinzip der Minimalkopplung das kinetische Feld $\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{1\mu}$ ($\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{2\mu}$) in das Amplitudensystem (7.35) eingeht. Deshalb koppelt das erste (zweite) Teilchen nicht nur an das zweite (erste) Teilchen, sondern über den RST-Mischungseffekt der Ströme auch an sich selbst. Wir werden im folgenden die Beziehung zwischen dieser Verschränkung von Zuständen in der RST und der physikalischen *Ununterscheidbarkeit* beider Teilchen im Falle statischer, gebundener Zustände behandeln. Gleichzeitig wird auch deutlich, daß die Verschränkung von Zuständen in der RST durch die Eichkräfte vermittelte physikalische Effekte produziert (z.B. Energieverschiebungen), die demzufolge verschwinden müssen, wenn die Eichkräfte vernachlässigt werden.

7.4 Statische Lösungen

Wenn man sagt, daß ein Atom sich in einem stationären Zustand befindet, so meint man damit nicht, daß alle Teile des Atoms in Ruhe sind; im Gegenteil, bei nicht verschwindendem Drehimpuls muß eine Bewegung von Teilen des Atoms vorliegen, um nicht verschwindende Drehimpulsquantenzahlen hervorzurufen. Jedoch existiert ein besonderer Unterraum von stationären Zuständen, für die alle Komponenten der Atomhülle als statisch angesehen werden können, und zwar in dem Sinne, daß keine magnetischen Wechselwirkungen (durch die Bewegung von Ladungen) auftreten und der Drehimpuls verschwindet (z.B. im Grundzustand). Es liegt dann eine völlig *elektrostatische* Situation vor, bei der alle Wechselwirkungen zwischen den unterschiedlichen Komponenten des Atoms ausschließlich über elektrostatische Kräfte zustande kommen. Eine solche Situation wird nun im Rahmen der RST behandelt, mit dem Ziel der Berechnung von 2-Teilchen-Energieeigenwerten für verschränkte Zustände.

Für eine solche vollkommen statische Feldkonfiguration verschwinden die räumlichen Anteile \vec{j}_a der Viererströme $\{j_{a\mu}\} = (j_a; \vec{j}_a)$ (d.h. $\vec{j}_a \equiv 0$) und somit zeigen

diese in Zeitrichtung \hat{t}_μ , mit $\hat{t}_\mu \hat{t}^\mu = 1$:

$$j_{a\mu}(x) = j_a(\vec{r})\hat{t}_\mu . \quad (7.41)$$

Gemäß der Proportionalitätsbedingung für die Ströme und kinetischen Felder (vgl. (6.14)) müssen beide Objekte dieselbe Symmetrie besitzen, d.h. wir setzen ($a = 1, 2$)

$$\mathbb{K}_{a\mu}(x) = \mathbb{K}_a(\vec{r})\hat{t}_\mu, \quad (7.42)$$

wobei die skalaren Komponenten \mathbb{K}_a ausschließlich von der räumlichen Position \vec{r} , aber nicht von der Zeit t abhängen. Damit die elektromagnetischen Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ als die Wirbel der modifizierten kinetischen Felder $\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu}$ (6.38) keine magnetische Komponente besitzen, muß man außerdem fordern, daß

$$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu}(x) = \overset{\circ}{\mathbb{K}}_a(\vec{r})\hat{t}_\mu \quad (7.43)$$

gilt. Andererseits sind die kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$ und $\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu}$ durch die Austauschfelder $X_{a\mu}$ (6.37) verknüpft, welche daher von derselben Form sein müssen

$$X_{a\mu}(x) = X_a(\vec{r})\hat{t}_\mu , \quad (7.44)$$

und gleiches gilt auch für die neuen Austauschfelder $\Gamma_{a\mu}$ (6.42)

$$\Gamma_{a\mu}(x) = \Gamma_a(\vec{r})\hat{t}_\mu . \quad (7.45)$$

Neben diesen zeitartigen Feldern existieren auch raumartige Felder $\Lambda_{a\mu}$, welche durch die Wirbelgleichung (6.46) miteinander verknüpft sind. Denn aufgrund der Tatsache, daß beide Austauschfelder $\Gamma_{a\mu}$ (7.44) und $X_{a\mu}$ (7.45) proportional sind, ist die allgemeine Bedingung (7.20) erfüllt und dies macht die Austauschfelder $\Lambda_{a\mu}$ zu zeitunabhängigen Gradientenfeldern: $\Lambda_a = \Lambda_a(\vec{r})$ (vgl. (7.21)).

Diese Zeitunabhängigkeit der Skalarfelder Λ_a gemeinsam mit dem zeitartigen Charakter der Vektorfelder $X_{a\mu}$ (7.44) und $\Gamma_{a\mu}$ (7.45) führt dazu, daß das Skalarfeld $\tilde{K}(x)$ (7.24) eine lineare Funktion von der Zeit t sein muß (beachte: $\hat{t}_\mu \doteq \partial_\mu t$)

$$\tilde{K}(x) = K_* t \quad (7.46)$$

$$(K_* = \text{const.}),$$

denn andernfalls könnte das frühere Resultat für $X_{a\mu}$ und $\Gamma_{a\mu}$ (7.23)-(7.25) nicht die statischen Bedingungen (7.44)-(7.45) erfüllen. Daher können die Funktionen

$X_a(\vec{r})$ (7.44) und $\Gamma_a(\vec{r})$ (7.45) einfach aus den allgemeineren Resultaten (7.23)-(7.25) abgelesen werden:

$$X_a(\vec{r}) = \begin{cases} K_* \cosh[\ln(\Lambda_a^{-2}(\vec{r}))], & \sigma_* = -1 \\ K_* \cos[\ln(\Lambda_a^{-2}(\vec{r}))], & \sigma_* = +1 \end{cases} \quad (7.47)$$

und

$$\Gamma_a(\vec{r}) = \begin{cases} K_* \sinh[\ln(\Lambda_a^{-2}(\vec{r}))], & \sigma_* = -1 \\ K_* \sin[\ln(\Lambda_a^{-2}(\vec{r}))], & \sigma_* = +1 . \end{cases} \quad (7.48)$$

Nun ist die Zwangsbedingung (6.52) in trivialer Weise erfüllt, nämlich durch

$$\Gamma_a^2 + \sigma_* X_a^2 = \sigma_* K_*^2 = \text{const.} \quad (7.49)$$

$$(a = 1, 2)$$

und die statische Form des neuen Amplitudensystems (7.35) wird zu

$$-\Delta\phi_a + \phi_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}_a(\vec{r}) + K_* \right)^2 \right\} = 0 \quad (7.50a)$$

$$-\Delta\varphi_a + \varphi_a \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}_a(\vec{r}) - K_* \right)^2 \right\} = 0 . \quad (7.50b)$$

Dies ist ein sehr angenehmes Resultat, da es das komplizierte 2-Teilchen Problem in vier Einteilchen-Eigenwertprobleme (7.50) aufteilt. Ein solches 1-Teilchen Eigenwertproblem kann exakt gelöst werden, wenn man die elektrostatische Zwischenteilchenwechselwirkung vernachlässigt [24], d.h. wenn man die Vektorpotentiale $A_{a\mu}$ (6.39) als nur von einer externen Quelle erzeugt ansieht:

$$\nabla^\mu F_{1\mu\nu} = \nabla^\mu F_{2\mu\nu} = 4\pi\alpha_*^{(ex)} j_\nu . \quad (7.51)$$

In dieser Situation sind die Vektorpotentiale für beide Teilchen identisch

$$A_{a\mu} \Rightarrow {}^{(ex)}A_\mu = {}^{(ex)}A(\vec{r})\hat{t}_\mu \quad (7.52)$$

$$(a = 1, 2)$$

und das elektrostatische Vektorpotential ${}^{(ex)}A(\vec{r})$ schreibt sich in Abhängigkeit von der externen Ladungsdichte ${}^{(ex)}j(\vec{r})$ wie üblich als

$${}^{(ex)}A(\vec{r}) = \alpha_* \int dV \frac{{}^{(ex)}j(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} . \quad (7.53)$$

Diese Ladungsdichte für eine Punktladung, die z_{ex} Ladungseinheiten trägt, lautet

$${}^{(ex)}j(\vec{r}) = z_{ex}\delta^3(\vec{r}), \quad (7.54)$$

und man erhält als Vektorpotential das wohlbekannte Coulomb-Potential

$${}^{(ex)}A(\vec{r}) = z_{ex}\frac{\alpha_*}{r} \quad (7.55)$$

(vgl. die Behandlung des 1-Teilchen Coulomb-Problems in [24]). Werden jedoch die Interteilchenwechselwirkungen mitgenommen, so fühlt ein Teilchen das Vorhandensein des anderen Teilchens, und somit wird das elektrostatische Potential $A(\vec{r})$ verändert zu [21]

$$A_1(\vec{r}) = {}^{(ex)}A(\vec{r}) - {}'A_2(\vec{r}) \quad (7.56a)$$

$$A_2(\vec{r}) = {}^{(ex)}A(\vec{r}) - {}'A_1(\vec{r}), \quad (7.56b)$$

wobei die Wechselwirkungspotentiale $'A_a(\vec{r})$ aus den zugehörigen Stromdichten $j_a(\vec{r})$ wie üblich erzeugt werden

$$'A_a(\vec{r}) = \alpha_* \int dV' \frac{j_a(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.57)$$

Selbstverständlich kann das vollständige Problem unter Berücksichtigung der Zwischenteilchenwechselwirkung nicht mehr analytisch gelöst werden, aber man kann die Wechselwirkungspotentiale $'A_a$ (7.57) als kleine Störung des äußeren Coulomb-Potentials ${}^{(ex)}A(\vec{r})$ (7.53) auffassen und auf diese Art ein qualitatives Bild der Austauscheffekte einer solchen verschränkten 2-Teilchen Konfiguration erhalten.

Wie wir gleich zeigen werden, werden diese Austauscheffekte durch das Vorhandensein einer Integrationskonstante K_* in den Eigenwertgleichungen (7.50) beschrieben. Setzt man alle Austauschfelder gleich Null ($\Rightarrow K_* = 0$), so wird die Verschränkung aufgehoben und alle vier Gleichungen (7.50) nehmen die statische Form der nicht gekoppelten Amplitudengleichungen (6.27) an. Jedoch kann man zeigen, daß das Vorhandensein von nichttrivialen Austauschfeldern (\leadsto nicht-triviales K_* in (7.50) drastische Auswirkungen auf die Mischungswinkel μ_a (7.37)-(7.38) und die zugehörigen Massen-Eigenwerte ($\overset{\circ}{\mathbb{M}}_a$) hat.

7.5 Ununterscheidbarkeit von Teilchen in der RST

Bevor man den Einfluß der Verschränkung auf die Massen-Eigenwerte $\overset{\circ}{M}_a$ beschreibt, ist es nötig, die letzteren zunächst präzise zu definieren. In einer relativistischen Theorie ist es sinnvoll, von Massen-Eigenwerten $\overset{\circ}{M}_a$ anstelle von Energieeigenwerten E_a zu sprechen, und in der Tat kommen diese Massen-Eigenwerte in der RST auf natürliche Weise zustande. Sucht man nämlich nach lokalisierten Lösungen für die gekoppelten Amplitudengleichungen (7.50), so treten die Massen-Eigenwerte eines Teilchens hier als die asymptotischen Werte der modifizierten kinetischen Felder $\overset{\circ}{K}_a(\vec{r})$ im Unendlichen auf, d.h. wir setzen

$$\overset{\circ}{M}_a \doteq \frac{\hbar}{c} \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \left(\overset{\circ}{K}_a(\vec{r}) \right). \quad (7.58)$$

Erinnert man sich an die allgemeine Form der Felder $\overset{\circ}{K}_{a\mu}$ (6.40), so ergibt sich ($a = 1, 2$)

$$\overset{\circ}{K}_a(\vec{r}) = \frac{\overset{\circ}{M}_a c}{\hbar} + A_a(\vec{r}), \quad (7.59)$$

wobei man voraussetzt, daß die elektrostatischen Potentiale $A_a(\doteq A_{a\mu} \hat{t}^\mu)$ im Unendlichen verschwinden (d.h. $A_a(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$). Für die spezielle Situation von reinen Zuständen würde die vorliegende Form der kinetischen Felder (7.59) den üblichen Exponentialfaktor $\exp[-iEt/\hbar]$ der Wellenfunktionen (3.42) mit dem Energieeigenwert $E = \overset{\circ}{M}c^2$ erzeugen. Da die modifizierten kinetischen Felder $\overset{\circ}{K}_a(\vec{r})$ ausschließlich die tatsächlichen elektromagnetischen Feldstärken $F_{a\mu\nu}$ spüren (vgl. (6.38)), kann man aus den Maxwellgleichungen für die vorliegende statische Situation folgern, daß die kinetischen Felder $\overset{\circ}{K}_a(\vec{r})$ mit den Stromdichten $j_a(\vec{r})$ (7.41) durch die Poisson-Gleichungen

$$\Delta \overset{\circ}{K}_1 = -4\pi\alpha_* (j_{\text{ex}} - j_2) \quad (7.60a)$$

$$\Delta \overset{\circ}{K}_2 = -4\pi\alpha_* (j_{\text{ex}} - j_1) \quad (7.60b)$$

verknüpft sind. Die formale Lösung dieser Gleichungen ist gerade (7.59), wobei die Potentiale $A_a(\vec{r})$ durch die Gleichungen (7.56) festgelegt werden (für eine detaillierte Diskussion der elektromagnetischen Wechselwirkungen in der RST siehe auch [21]). Für lokalisierte Ladungsdichten $j(\vec{r})$ verschwinden alle diese Potentiale A_{ex}, A_a im Unendlichen ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$) und damit ist die Randbedingung (7.58) erfüllt, welche für die Definition der Massen-Eigenwerte $\overset{\circ}{M}_a$ vorausgesetzt wurde.

Da die Massen-Eigenwerte $\overset{\circ}{M}_a$ nun definiert sind, kann man sich daran machen, diese durch Einführung der kinetischen Felder $\overset{\circ}{K}_a$ (7.59) in das System von Eigenwertgleichungen einzusetzen und die modifizierten Massen-Eigenwerte $\{M_a, m_a\}$

$$M_a = \overset{\circ}{M}_a + \frac{\hbar}{c} K_* \quad (7.61a)$$

$$m_a = \overset{\circ}{M}_a - \frac{\hbar}{c} K_* \quad (7.61b)$$

zu bestimmen. Durch diese Ersetzung nehmen die Amplitudengleichungen für das erste Teilchen ($a = 1$) folgende Form an

$$-\Delta\phi_1 + \phi_1 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{M_1c}{\hbar} \right)^2 - 2 \frac{M_1c}{\hbar} \cdot A_1(\vec{r}) - (A_1(\vec{r}))^2 \right\} = 0 \quad (7.62a)$$

$$-\Delta\varphi_1 + \varphi_1 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{m_1c}{\hbar} \right)^2 - 2 \frac{m_1c}{\hbar} \cdot A_1(\vec{r}) - (A_1(\vec{r}))^2 \right\} = 0, \quad (7.62b)$$

und entsprechendes gilt für das zweite Teilchen ($a = 2$):

$$-\Delta\phi_2 + \phi_2 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{M_2c}{\hbar} \right)^2 - 2 \frac{M_2c}{\hbar} \cdot A_2(\vec{r}) - (A_2(\vec{r}))^2 \right\} = 0 \quad (7.63a)$$

$$-\Delta\varphi_2 + \varphi_2 \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{m_2c}{\hbar} \right)^2 - 2 \frac{m_2c}{\hbar} \cdot A_2(\vec{r}) - (A_2(\vec{r}))^2 \right\} = 0. \quad (7.63b)$$

Offensichtlich wird das erste Teilchen durch *zwei* lokalisierte Lösungen $\{\phi_1, \varphi_1\}$ des ersten Systems (7.62) beschrieben, wobei der Eigenwert M_1 das obere Energieniveau bezeichnet (im folgenden wird vorausgesetzt, daß $K_* > 0$ ist) und von der Lösung $\phi_1(\vec{r})$ herrührt

$$M_1 = \overset{\circ}{M}_1 + \frac{\hbar}{c} K_* . \quad (7.64)$$

Entsprechend gilt für die zweite Lösung $\varphi_1(\vec{r})$, daß sie den unteren Energieeigenwert m_1 erzeugt:

$$m_1 = \overset{\circ}{M}_1 - \frac{\hbar}{c} K_* . \quad (7.65)$$

Auf dieselbe Weise wird das zweite Teilchen ebenfalls durch zwei Eigenlösungen des Systems (7.63) beschrieben, nämlich durch $\phi_2(\vec{r})$, welches den oberen Eigenwert M_2 (7.63a) liefert

$$M_2 = \overset{\circ}{M}_2 + \frac{\hbar}{c} K_*, \quad (7.66)$$

und durch $\varphi_2(\vec{r})$, dem der untere Eigenwert m_2 (7.63b) zugeordnet ist:

$$m_2 = \overset{\circ}{M}_2 - \frac{\hbar}{c} K_* . \quad (7.67)$$

Somit sind die Eigenwerte M_a, m_a Hilfsgrößen für die Bestimmung der physikalischen Massen $\overset{\circ}{M}_a$.

Nun folgt die entscheidende Begründung für die Ununterscheidbarkeit von Teilchen in der RST: Befinden sich die zwei Teilchen in unterschiedlichen physikalischen Zuständen, welche z.B. durch unterschiedliche Stromdichten ($j_1(\vec{r}) \neq j_2(\vec{r})$) charakterisiert werden, dann sind die beiden elektrostatischen Potentiale $A_1(\vec{r})$ (7.56a) und $A_2(\vec{r})$ (7.56b), welche durch diese beiden Ströme erzeugt werden, ebenfalls unterschiedlich ($A_1(\vec{r}) \neq A_2(\vec{r})$); infolgedessen ist das Eigenwertspektrum $\{M_1, m_1\}$ des ersten Teilchens (7.62) nicht identisch mit dem für das zweite Teilchen $\{M_2, m_2\}$ (7.63). Jedoch erzwingen die Austauschfelder (in Form der Konstante K_*) eine Zwangsbedingung zwischen beiden Eigenwertspektren. Die Beziehungen (7.64)-(7.67) für die Massen-Eigenwerte zeigen, daß die physikalischen Massen $\overset{\circ}{M}_a$ die Mittelwerte der Hilfsgrößen M_a, m_a sind, d.h.

$$\overset{\circ}{M}_1 = \frac{1}{2}(M_1 + m_1) \quad (7.68a)$$

$$\overset{\circ}{M}_2 = \frac{1}{2}(M_2 + m_2) , \quad (7.68b)$$

und somit ist die Integrationskonstante K_* die Hälfte der Differenz dieser Hilfsgrößen

$$K_* = \frac{\hbar}{2c}(M_1 - m_1) = \frac{\hbar}{2c}(M_2 - m_2) . \quad (7.69)$$

Diese Bedingung führt dazu, daß die Differenz der Energieniveaus (oder besser: der Massen-Niveaus) für beide Spektren (7.62) und (7.63) *dieselbe* sein muß; und dies kann im allgemeinen nur erfüllt werden, wenn beide Energiespektren *identisch* sind ! (vgl. Abbildung 7.1). Dies bedeutet aber, daß die Potentiale $A_1(\vec{r})$ und $A_2(\vec{r})$ (7.56) (bzw. $'A_1(\vec{r})$ und $'A_2(\vec{r})$ (7.57)) identisch sein müssen: $A_1(\vec{r}) \equiv A_2(\vec{r}) (\doteq A(\vec{r}))$. Aber da diese Potentiale durch die Stromdichten $j_a(\vec{r})$ (7.41) erzeugt werden, schließt man, daß auch beide Stromdichten identisch sein müssen: $j_1(\vec{r}) \equiv j_2(\vec{r}) (\doteq j(\vec{r}))$. Dies bedeutet aber, daß beide Teilchen *ununterscheidbar* sind, denn sie besitzen

- dieselben physikalischen Massen ($\overset{\circ}{M}_1 = \overset{\circ}{M}_2 \doteq \overset{\circ}{M}$)
- dieselben Eigenwerte ($M_1 = M_2 \doteq M_*$; $m_1 = m_2 \doteq m_*$)
- dieselben Eigenlösungen ($\phi_1(\vec{r}) \equiv \phi_2(\vec{r}) \doteq \phi(\vec{r})$; $\varphi_1(\vec{r}) \equiv \varphi_2(\vec{r}) \doteq \varphi(\vec{r})$)
- dieselben skalaren und Ladungs-Dichten ($\rho_1(\vec{r}) \equiv \rho_2(\vec{r}) \doteq \frac{1}{2}\rho(\vec{r})$)

- dieselben Mischungswinkel: $\mu_1 = \mu_2 (\doteq \mu_*)$.

Aus diesem Resultat folgt, daß auch alle übrigen physikalischen Größen, wie kinetische Felder und Austauschfelder, Energie-Impulsdichten usw. für beide Teilchen identisch sind. Also sind alle physikalischen Objekte, welche zur Unterscheidung der beiden Teilchen herangezogen werden können, für beide Teilchen identisch und offensichtlich muß man diese deshalb als ununterscheidbar ansehen. Im Gegensatz zum postulativen Charakter der Ununterscheidbarkeit von Teilchen in der konventionellen Quantentheorie läßt sich diese in der RST offensichtlich aus der RST-Dynamik selbst ableiten, da sie die Voraussetzung für das Auftreten gebundener 2-Teilchen Zustände darstellt.

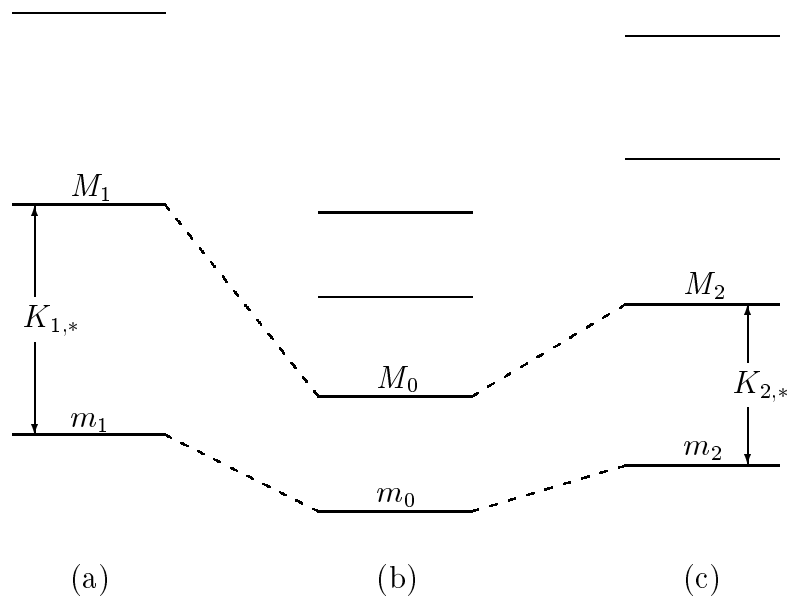


Abbildung 7.1: Ununterscheidbarkeit von Teilchen in der RST. Vernachlässigt man die Interteilchenwechselwirkung ($'A_a \equiv 0$), so besetzt jedes Teilchen einen 1-Teilchen Zustand mit zugehörigem Massen-Eigenwert M_0 bzw. m_0 , Teil (b). Schaltet man die Interteilchen-Wechselwirkung ein, so erzeugt diese die Wechselwirkungspotentiale $'A_a(\vec{r})$ (7.57). Sind diese unterschiedlich ($'A_1(\vec{r}) \neq 'A_2(\vec{r})$), weil sie aus unterschiedlichen Ladungsdichten ($j_1(\vec{r}) \neq j_2(\vec{r})$) gebildet werden, wird sich der Abstand $K_{a,*}$ der beiden Massen-Energiezustände $\{M_a, m_a\}$ (7.64)-(7.67) für beide Teilchen unterscheiden, Teil (a) und (c). Die RST-Dynamik erzwingt aber identische Abstände ($K_{1,*} = K_{2,*} = K_*$), vgl. (7.49). Diese können nur bei völliger physikalischer Übereinstimmung der beiden Teilchen auftreten.

7.6 Störungsrechnung erster Ordnung

Um die Besonderheiten der RST besser zu verstehen, ist es hilfreich, die nicht-relativistische Näherung zu betrachten und die zugehörigen Voraussagen der RST mit der konventionellen nicht-relativistischen Quantentheorie zu vergleichen. Besonders wird man sich dabei für den Vergleich der nicht-relativistischen Energieeigenwerte mit denen der konventionellen Quantentheorie interessieren.

Die Hilfsgrößen M_* und m_* bestimmen die Masse $\overset{\circ}{M}$ der beiden Teilchen gemäß (7.68), d.h.

$$\overset{\circ}{M} = \frac{1}{2} (M_* + m_*). \quad (7.70)$$

Diese gemeinsame Masse $\overset{\circ}{M}$ muß aus dem entkoppelten Eigenwertsystem (7.62)-(7.63) bestimmt werden, welches sich jedoch stark vereinfacht, wenn man die im vorigen Abschnitt getroffenen Identifikationen vornimmt, die aus der Ununterscheidbarkeit der Teilchen folgen:

$$-\Delta\phi + \phi \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{M_*c}{\hbar} \right)^2 - 2 \frac{M_*c}{\hbar} A(\vec{r}) - \left(A(\vec{r}) \right)^2 \right\} = 0 \quad (7.71a)$$

$$-\Delta\varphi + \varphi \left\{ \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{m_*c}{\hbar} \right)^2 - 2 \frac{m_*c}{\hbar} A(\vec{r}) - \left(A(\vec{r}) \right)^2 \right\} = 0. \quad (7.71b)$$

Für eine qualitative Diskussion der allgemeinen Eigenschaften dieses Systems stellt man die Eigenwerte in Form eines Massenfunctionals dar, d.h. für den oberen Zustand ϕ (7.71a)

$$\frac{M_*c}{\hbar} = - \langle A \rangle + \frac{Mc}{\hbar} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \cdot \left\{ \int dV (\vec{\nabla}\phi)^2 - \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \right\}} \quad (7.72)$$

$$\left(\langle A \rangle \doteq \int dV (\phi(\vec{r}))^2 A(\vec{r}), \text{ etc.} \right),$$

und genauso für den unteren Zustand φ (7.71b)

$$\frac{m_*c}{\hbar} = - [A] + \frac{Mc}{\hbar} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \cdot \left\{ \int dV (\vec{\nabla}\varphi)^2 - [(A - [A])^2] \right\}}. \quad (7.73)$$

$$\left([A] \doteq \int dV (\varphi(\vec{r}))^2 A(\vec{r}), \text{ etc.} \right).$$

Das Auftreten einer Wurzel für die Massenfunktionale deutet offensichtlich auf einen relativistischen Effekt hin, aber für den gegenwärtigen Zweck werden wir uns mit dem nichtrelativistischen Grenzwert zufriedengeben, für den die Entwicklung der Wurzel (in Bezug auf die Zwischenteilchen-Kopplungskonstante α_*) nur die kinetischen Energiebeiträge übrig läßt, d.h.

$$M_*c^2 \approx Mc^2 - \hbar c \langle A \rangle + \frac{\hbar^2}{2M} \int dV (\vec{\nabla} \phi)^2 \quad (7.74a)$$

$$m_*c^2 \approx Mc^2 - \hbar c [A] + \frac{\hbar^2}{2M} \int dV (\vec{\nabla} \varphi)^2. \quad (7.74b)$$

Rein formal sieht dieses Resultat so aus, wie man es auch von der konventionellen Quantentheorie erwarten würde. Dort vernachlässigt man die Ruhemasse (M) des Teilchens und kommt so zu einem Schrödinger-Energieeigenwert E_S (oder e_S), welcher die Summe der Erwartungswerte von potentieller und kinetischer Energie ist

$$E_S \doteq M_*c^2 - Mc^2 = -\hbar c \langle A \rangle + \frac{\hbar^2}{2M} \int dV (\vec{\nabla} \phi)^2 \quad (7.75a)$$

$$e_S \doteq m_*c^2 - Mc^2 = -\hbar c [A] + \frac{\hbar^2}{2M} \int dV (\vec{\nabla} \varphi)^2. \quad (7.75b)$$

Tatsächlich ist es nicht schwer zu zeigen, daß diese nicht-relativistischen Grenzwerte (7.75) genau die Eigenwerte E_S, e_S sind, welche bei der Lösung des nicht-relativistischen Grenzfalls der relativistischen Eigenwertgleichungen (7.71) auftreten:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \phi - \hbar c A \cdot \phi = E_S \cdot \phi \quad (7.76a)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \varphi - \hbar c A \cdot \varphi = e_S \cdot \varphi. \quad (7.76b)$$

Die Gleichungen (7.76) stimmen mit den zeitunabhängigen Schrödingergleichungen der konventionellen Theorie für unverschränkte Zustände (7.8) überein. Aber obwohl es ein schönes Ergebnis ist, daß der nichtrelativistische Grenzfall des Eigenwert-Problems (7.71) aus der Relativistischen Schrödingertheorie die Form gewöhnlicher Schrödingergleichungen (7.76) annimmt, weichen die Ergebnisse der RST von denen der Standardtheorie deutlich ab. Der Unterschied der RST zur konventionellen Theorie besteht dabei in der besonderen Art, mit der ein Teilchen auf das andere Teilchen über das elektrostatische Potential $A(\vec{r})$ einwirkt. Es ist klar, daß durch die physikalische Ununterscheidbarkeit beider Teilchen das elektrostatische Potential $A(\vec{r})$, welches in das relativistische Problem (7.71) oder

das Schrödingerproblem (7.76) eingeht, sich additiv aus dem externen Potential $A_{\text{ex}}(\vec{r})$ und einem für beide Teilchen identischen Potential $'A(\vec{r})$ zusammensetzt, vgl. (7.56)

$$A(\vec{r}) = A_{\text{ex}}(\vec{r}) - 'A(\vec{r}) . \quad (7.77)$$

Das Wechselwirkungspotential $'A(\vec{r})$ wird dabei von der Ladungsdichte $j(\vec{r}')$

$$'A(\vec{r}) = \alpha_* \int dV' \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.78)$$

erzeugt, welche in der RST aufgrund ihrer Ununterscheidbarkeit für beide Teilchen idenisch ist.

Daher besteht das entscheidende neue Element, welches die RST zum nichtrelativistischen Eigenwertproblem beiträgt, also in der spezifischen Form der elektrostatischen Wechselwirkungen. Dieser Unterschied muß sich nun in Form einer modifizierten Berechnungsformel für die Energieeigenwerte niederschlagen, welche mit der konventionellen Methode (7.12)-(7.15) verglichen werden muß.

Kehren wir für den Moment zum relativistischen Fall zurück, so muß man noch die physikalische Masse \mathbb{M} des gebundenen 2-Teilchen Systems definieren, wenn beide individuellen Massen $\overset{\circ}{\mathbb{M}}_1 = \overset{\circ}{\mathbb{M}}_2 \doteq \overset{\circ}{\mathbb{M}}$ bekannt sind. Wenn die Interteilchenwechselwirkung abgeschaltet wird, d.h. $'A_a \Rightarrow 0$, nimmt die Masse $\overset{\circ}{\mathbb{M}}$ (7.70) einen Wert $\mathbb{M}_{(0)}$ an, welcher allein durch das externe Bindungspotential zustande kommt (z.B. die Coulomb-Kraft des Kerns). Die Gesamtmasse des 2-Teilchen-Systems ist dann einfach die Summe $2\mathbb{M}_{(0)}$ der beiden Einteilchen-Eigenwerte $\mathbb{M}_{(0)}$, welche selbst den Mittelwert aus den beiden Hilfsgrößen M_0 und m_0 darstellen, die durch das äußere Feld allein bestimmt werden:

$$\mathbb{M}_{(0)} = \frac{1}{2} (M_0 + m_0) , \quad (7.79)$$

vgl. Teil (b) der Figur 7.1. Wenn man nun die (abstoßende) Interteilchen-Wechselwirkung einschaltet, so erhöhen sich die Eigenwerte $\{M_0, m_0\}$ auf die entsprechenden Eigenwerte mit Interteilchenwechselwirkung $\{M_*, m_*\}$. Damit steigt aber auch die Einzelteilchen-Masse $\mathbb{M}_{(0)}$ (7.79) auf den Wert $\overset{\circ}{\mathbb{M}}$ (7.70) an. Man kann nun für die physikalische Masse \mathbb{M} des wechselwirkenden 2-Teilchen Systems jedoch nicht einfach den zweifachen Wert einsetzen (d.h. $\mathbb{M} \neq 2\overset{\circ}{\mathbb{M}}$), da dies bedeuten würde, daß die Interteilchen-Wchselwirkung doppelt gezählt würde. Daher definieren wir die Gesamtmasse des wechselwirkenden 2-Teilchen Systems als den Wert für verschwindende elektrostatische Interteilchenwechselwirkung

$(2\mathbb{M}_{(0)})$ plus die halbe Differenz der entsprechenden Werte mit und ohne Wechselwirkung:

$$\mathbb{M} = 2\mathbb{M}_{(0)} + \frac{1}{2} \left(2\overset{\circ}{\mathbb{M}} - 2\mathbb{M}_{(0)} \right) = \mathbb{M}_{(0)} + \overset{\circ}{\mathbb{M}}. \quad (7.80)$$

Daher ist die gesamte 2-Teilchen Masse \mathbb{M} die Summe der 1-Teilchen Masse *ohne* Interteilchen-Wechselwirkung ($\mathbb{M}_{(0)}$) plus eine Masse *mit* Interteilchen-Wechselwirkung ($\overset{\circ}{\mathbb{M}}$). Also beträgt die Erhöhung der Energie durch die Interteilchen-Wechselwirkung

$$\Delta E = \mathbb{M}c^2 - 2\mathbb{M}_{(0)}c^2 = (\overset{\circ}{\mathbb{M}} - \mathbb{M}_{(0)})c^2, \quad (7.81)$$

oder ausgedrückt in Abhängigkeit von den Hilfsgrößen M_* , m_* unter Verwendung von (7.70) und (7.79)

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(M_* - M_0 \right) c^2 + \frac{1}{2} \left(m_* - m_0 \right) c^2. \quad (7.82)$$

Dies führt dann in niedrigster Ordnung der Kopplungskonstante α_* (als dem geeigneten Parameter zur Beschreibung einer Störungsentwicklung) bezogen auf den nicht-relativistischen Grenzfall (7.74) auf

$$\Delta E = \frac{1}{2} \hbar c \left\{ \langle 'A \rangle + ['A] \right\} = \frac{1}{2} e^2 \iint dV dV' \frac{\{ \phi_0(\vec{r})^2 + \varphi_0(\vec{r})^2 \} j_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.83)$$

Hierbei bezeichnet $j_0(\vec{r}')$ die Einzelteilchen-Ladungsdichte in niedrigster Ordnung und $\phi_0(\vec{r})^2$, $\varphi_0(\vec{r})^2$ die Lösungen der gewöhnlichen Schrödingergleichungen (7.76) für verschwindende Interteilchenwechselwirkung. Ruft man sich jetzt noch die allgemeine Form der Ströme $j_{a\mu}$ (6.14) ins Gedächtnis und beschränkt sich auf den nicht-relativistischen Grenzfall der kinetischen Felder $\mathbb{K}_{a\mu}$

$$\mathbb{K}_{a\mu} \approx \frac{Mc}{\hbar} \hat{t}_\mu, \quad (7.84)$$

so erlaubt uns dies, die Ladungsdichte $j_0(\vec{r}')$ in (7.83) durch die skalare Dichte $\rho_0(\vec{r}')$ (welche auf Eins normiert sein muß) zu ersetzen, so daß man als endgültige Formel für die Energiekorrektur erhält:

$$\Delta E = \frac{1}{2} e^2 \iint dV dV' \frac{\{ \phi_0(\vec{r})^2 + \varphi_0(\vec{r})^2 \} \rho_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.85)$$

Offensichtlich weicht dieses Resultat stark von dem naiven klassischen Ergebnis ΔE_{cl}

$$\Delta E_{\text{cl}} = e^2 \iint dV dV' \frac{\phi_0(\vec{r})^2 \varphi_0(\vec{r}')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.86)$$

ab, welches man erhält, wenn man im nicht-relativistischen Schrödinger-System (7.76) in Analogie zur klassischen Coulomb-Energie E_C (7.14) den Teilchen im Zustand $\phi_0(\vec{r})$ ($\varphi_0(\vec{r})$) die Ladungsdichten $e\phi_0(\vec{r})^2$ ($e\varphi_0(\vec{r})^2$) zuordnet. Dennoch liefert das klassische Resultat (7.86) eine grobe Näherung der Wechselwirkungs-Energie ΔE , welche in der konventionellen Theorie weiter aufgespalten wird in Ortho- und Parazustände, vgl. Gleichung (7.12). Eine entsprechende Aufspaltung der Energiezustände ist in der RST auf die Tatsache zurückzuführen, daß die positiven und negativen Gemische unterschiedliche Dichten $\rho_0(\vec{r})$ besitzen, was notwendigerweise die RST-Energiekorrekturen ΔE (7.85) in zwei Niveaus aufspaltet, welche mit der konventionellen Aufspaltung (7.12) verglichen werden müssen. Daher muß man für die genaue Beschreibung der RST-Energiekorrekturen ΔE (7.85) offensichtlich die skalare Dichte $\rho_0(\vec{r})$ in niedrigster Ordnung bestimmen, und somit auch verstehen, wodurch sich positive und negative Gemische unterscheiden. Es erscheint deshalb sinnvoll, die beiden Gemischttypen getrennt voneinander zu untersuchen.

7.7 Positive Gemische ($\sigma_* = +1$)

Die gesuchten Einteilchen-Dichten für die positiven Gemische kann man direkt aus dem bereits abgeleiteten Resultat (7.39) ablesen, wobei man beachten muß, daß die Ununterscheidbarkeit der Teilchen es verlangt, die beiden Mischungswinkel μ_a miteinander zu identifizieren : $\mu_1 = \mu_2 \doteq \mu_*$, vgl. Abschnitt 7.4. Dies liefert

$$\rho_0(\vec{r}) \Rightarrow \rho_+(\vec{r}) = \cos^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \phi_0^2(\vec{r}) + \sin^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \varphi_0^2(\vec{r}) . \quad (7.87)$$

Hierbei setzt man voraus, daß die beiden Eigenfunktionen $\phi_0(\vec{r})$ und $\varphi_0(\vec{r})$ auf Eins normiert sind, was sich dann sofort auf die Ladungsdichte $j_0(\vec{r})(\equiv \rho_0(\vec{r}))$ in der vorliegenden niedrigsten Störungsordnung) überträgt, wodurch der Strom $j_0(\vec{r})$ automatisch auf Eins normiert ist. Die RST-Energiekorrekturformel (7.85) läßt es sinnvoll erscheinen, eine mittlere Dichte $\bar{\rho}(\vec{r})$ einzuführen durch

$$\bar{\rho}(\vec{r}) \doteq \frac{1}{2} \left\{ \phi_0^2(\vec{r}) + \varphi_0^2(\vec{r}) \right\} , \quad (7.88)$$

womit sich die Formel für die Energiekorrektur (7.85) als eine Funktion des Mi-

schungswinkels μ_* ergibt

$$\Delta E_+(\mu_*) = e^2 \iint dV dV' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}) \cdot \bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{2} \cos \mu_* e^2 \iint dV dV' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}) (\phi_0^2(\vec{r}') - \varphi_0^2(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.89)$$

Der erste Term ist die klassische elektrostatische Selbstenergie der mittleren Ladungsverteilung $\bar{\rho}(\vec{r})$ (7.88) und stellt offensichtlich das RST-Analogon zur Coulomb-Energie E_C (7.14) der konventionellen Quantentheorie dar. Der zweite Term, welcher den Mischungswinkel μ_* enthält, ist der zur konventionellen Austauschenergie E_G (7.15) analoge Term in der RST und gibt den Bereich der möglichen Energieeigenwerte an ($0 \leq \mu_* \leq \pi$). Da in das zugehörige Integral die Differenz der elektrostatischen Wechselwirkungsenergie des Paares von Ladungsdichten $\{\bar{\rho}, \phi_0^2\}$ und $\{\bar{\rho}, \varphi_0^2\}$ eingeht, ist diese Größe negativ, da der stärker gebundene Zustand φ_0 lokalisierter ist als der schwächer gebundene Zustand ϕ_0 und die elektrostatische Wechselwirkungsenergie sich erhöht, wenn eine Ladungsverteilung lokalisierter wird. Daher erwartet man, daß die RST-Energiekorrektur ΔE (7.85) ihren minimalen Wert für den Mischungswinkel $\mu_* = 0$ annimmt, d.h.

$$\Delta E_+(0) = e^2 \int dV dV' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}) \cdot \bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{2} e^2 \int dV dV' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}) (\varphi_0^2(\vec{r}') - \phi_0^2(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.90)$$

Die mit dieser Formel berechneten Energieeigenwerte stimmen mit den experimentellen Werten wesentlich besser überein als die mit der Formel (7.12) der konventionellen Quantentheorie, vgl. Tabelle 1 am Ende dieses Kapitels.

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß das Massen-Eigenwertspektrum der RST nur eindeutig bestimmt ist, wenn man den Mischungswinkel μ_* festlegt, wobei eine naheliegende Wahl natürlich derjenige Wert für μ_* darstellt, welcher die Energieeigenwerte minimiert, wie dies für Gleichung (7.90) schon getan wurde. Jedoch sind diese Energieeigenwerte dann offensichtlich unabhängig von der speziellen Wahl der Integrationskonstanten der Austauschfelder! Als eine naheliegende Wahl für die Skalarfelder $\Lambda_a(\vec{r})$, welche aufgrund der Ununterscheidbarkeit als identisch angesehen werden müssen (d.h. $\Lambda_1(\vec{r}) \equiv \Lambda_2(\vec{r}) \doteq \Lambda(\vec{r})$), kann man folgende Randbedingung im Unendlichen fordern

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Lambda(\vec{r}) = 1. \quad (7.91)$$

Mit dieser Bedingung lautet die allgemeine Form von $\Lambda_a(x)$ (7.28b) unter Verwendung der Transformationskonstanten B_a, b_a (7.37) und unter Berücksichtigung der

Teilchen-Ununterscheidbarkeit folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\Lambda(\vec{r}) &= \exp\left[2 \tan\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \int_{\infty}^{(\vec{r})} \frac{\phi(\vec{r})d\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r})d\phi(\vec{r})}{\phi^2(\vec{r}) + \tan^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \varphi^2(\vec{r})}\right] \\ &= \exp\left[2 \tan\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \tan^{-1}\left(\frac{\mu_*}{2} \frac{\varphi(\vec{r})}{\phi(\vec{r})}\right)\right].\end{aligned}\quad (7.92)$$

Es sei hierbei darauf hingewiesen, daß der weniger stark gebundene Zustand $\phi(\vec{r})$ immer weniger stark lokalisiert ist als der stärker gebundene Zustand $\varphi(\vec{r})$ und daß man deshalb $|\varphi(\vec{r})| \ll |\phi(\vec{r})|$ im Unendlichen ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$) findet, so daß die Randbedingung (7.91) erfüllt ist.

Darüberhinaus verschwinden die Austauschfelder $\Gamma_1(\vec{r}) \equiv \Gamma_2(\vec{r})(\doteq \Gamma(\vec{r}))$ (7.48) im Unendlichen, wohingegen die Felder $X_1(\vec{r}) \equiv X_2(\vec{r})(\doteq X(\vec{r}))$ (7.47) den Wert K_* annehmen

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} X(\vec{r}) = K_* . \quad (7.93)$$

Als Folge davon sind beide kinetischen Felder $\mathbb{K}_1(\vec{r}) \equiv \mathbb{K}_2(\vec{r})(\doteq \mathbb{K}(\vec{r}))$ (6.41) asymptotisch mit dem oberen Eigenwert M_* verknüpft:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \mathbb{K}(\vec{r}) = \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \left(\overset{\circ}{\mathbb{K}}(\vec{r}) + X(\vec{r}) \right) = \frac{\overset{\circ}{M}c}{\hbar} + K_* = \frac{M_*c}{\hbar} \quad (7.94)$$

(für die nicht-relativistische Näherung dieser Gleichung siehe auch die Näherung (7.84)). Die asymptotische Form der Ladungsdichten $j_1(\vec{r}) \equiv j_2(\vec{r})(\doteq j(\vec{r}))$ muß also den Quotienten aus dem oberen Eigenwert M_* und der freien Teilchenmasse M enthalten

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} j(\vec{r}) = \frac{M_*}{M} \cdot \rho(\vec{r}) , \quad (7.95)$$

welche für den nicht-relativistischen Grenzfall wieder durch Eins angenähert wird ($\frac{M_*}{M} \Rightarrow 1$), vergleiche die Anmerkungen unter (7.84). Schließlich können die Integrationskonstanten Λ_{in} und β_{in} in dem Ergebnis für $\Lambda(\vec{r})$ (6.57) auf eine solche Weise festgelegt werden, daß asymptotisch $\beta \rightarrow \infty$ geht für $\Lambda \rightarrow 1$ (7.91), was dann auch den asymptotischen Wert der Mischungsvariablen λ (6.5) im Unendlichen auf $\lambda \rightarrow 1$ festlegt. Also nähern sich die positiven Gemische asymptotisch einem reinen Zustand ($\lambda = 1$) an.

Damit ist die Behandlung verschränkter Zustände für die positiven Gemische abgeschlossen. Offensichtlich stellen diese physikalisch sinnvolle Lösungen der RST-Dynamik dar.

7.8 Negative Gemische ($\sigma_* = -1$)

Die Ununterscheidbarkeit von Teilchen in der RST macht beide Einzelteilchendichten ρ_a (7.60) auch in diesem Fall identisch ($\rho_1(\vec{r}) \equiv \rho_2(\vec{r}) \doteq \rho_0(\vec{r})$). Für die Dichte gilt somit:

$$\rho_0 \Rightarrow \rho_-(\vec{r}) = \rho_* \left| \cosh^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \phi_0^2(\vec{r}) - \sinh^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \varphi_0^2(\vec{r}) \right|. \quad (7.96)$$

Im Gegensatz zur Dichte ρ_+ (7.87) für positive Gemische muß die Dichte $\rho_-(\vec{r})$ (7.96) noch zusätzlich normiert werden, indem man die Normalisierungskonstante ρ_* geeignet wählt, welche vom Mischungswinkel μ_* abhängt, selbst wenn die Dichten nullter Ordnung $\phi_0^2(\vec{r})$ und $\varphi_0^2(\vec{r})$ bereits auf Eins normiert sind:

$$\rho_* = \frac{1}{\int dV \left| \cosh^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \phi_0^2 - \sinh^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \varphi_0^2 \right|}. \quad (7.97)$$

Die allgemeine Korrekturformel (7.85) kann auch für die negativen Gemische wieder in zwei Anteile aufgespalten werden:

$$\Delta E_-(\mu_*) = e^2 \iint dV dV' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}) \bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + e^2 \iint dV dV' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}) (\rho_-(\vec{r}') - \bar{\rho}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.98)$$

Diese Korrekturformel weist aber offensichtlich eine kompliziertere Abhängigkeit vom Mischungswinkel μ_* auf als sein Gegenstück für positive Gemische (7.89). Daher ist der Prozeß der Energie-Minimalisierung in Bezug auf den Mischungswinkel μ_* für die negativen Gemische etwas komplizierter. Jedoch zeigt sich, daß die "Austauschenergie" für die negativen Gemische (d.h. der minimale Wert des zweiten Integrals auf der rechten Seite von Gleichung (7.98)) in der Nähe von $\mu_* = 0$ immer etwas kleiner ist als für die positiven Gemische (siehe das zweite Integral auf der rechten Seite von (7.89)); damit existiert die Aufteilung der Energieeigenwerte in Ortho- und Parazustände auch in der RST, und zwar auf eine solche Weise, daß die positiven (negativen) Gemische den symmetrischen (antisymmetrischen) Zuständen der konventionellen Theorie entsprechen. Jedoch unterscheiden sich die quantitativen Voraussagen der RST und der konventionellen Quantentheorie erheblich, wobei die Ergebnisse der RST dichter an den experimentellen Werten liegen (s.u.).

7.9 Numerische Berechnung der Ortho- und Para-Helium-Zustände

Vernachlässigt man die Spinwechselwirkung, so läßt sich der Hilbertraum für das konventionelle Helium-Problem in einen Raum- und Spin-Anteil faktorisieren, was dazu führt, daß der Raumanteil der Wellenfunktionen entweder symmetrisch (Para-Zustände) oder antisymmetrisch (Ortho-Zustände) sein muß, damit er mit einem antisymmetrischen bzw. symmetrischen Spin-Anteil zu einem antisymmetrischen Gesamtzustand zusammengefügt werden kann. Die zugehörige Aufspaltung der atomaren Energiezustände ist eine experimentell ausgezeichnet verifizierte Tatsache, und jede alternative Form von Quantentheorie muß mit diesem Phänomen konsistent sein.

Diese Konsistenzbedingung bedeutet, daß die positiven und negativen Gemische in der RST analog zu den konventionellen (anti-)symmetrischen Wellenfunktionen (bzw. ihren Raumanteilen) sein müssen. Daher muß die RST schon in niedrigster Störungsordnung die Helium-Energieeigenwerte in der Nähe der experimentellen Werte vorhersagen. Da diese sich mit den Voraussagen der konventionellen Quantentheorie nur in unzureichender Weise beschreiben lassen, besteht für die RST die Möglichkeit, die konventionelle Quantentheorie bereits in dieser niedrigsten Störungsordnung zu übertreffen. Die Berechnung der *exakten* Energieeigenwerte der RST ist aber ähnlich schwierig wie in der gewöhnlichen Quantentheorie.

Will man die Energieeigenwerte des 2-Teilchen Systems aufsuchen, so ist es zunächst erforderlich, die relativistischen Einteilchen-Amplitudengleichungen (7.71) für verschwindende Interteilchenwechselwirkung (d.h. $A(\vec{r}) \Rightarrow A_{\text{ex}}(\vec{r})$ (7.55)) zu berechnen. Danach kann man zur nicht-relativistischen Näherung für die Massen-Eigenwerte M_* , m_* und den zugehörigen Eigenlösungen ϕ_0 , φ_0 übergehen (welche das nicht-relativistische Schrödinger-System (7.76) lösen). Schließlich muß man die Energiekorrekturen $\Delta E(0)$ für die positiven Gemische (7.90) bestimmen und die Energiekorrekturen $\Delta E(\mu_*)$ in Bezug auf μ_* für die negativen Gemische (7.98) minimieren. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der konventionellen Theorie ergibt dann einen ersten Test für die Brauchbarkeit der RST.

7.10 Das Einteilchen-Spektrum

Wie schon in den letzten Kapiteln gezeigt wurde, sind für unverschränkte Teilchen die Amplitudengleichungen physikalisch äquivalent zu zwei Klein-Gordon Gleichungen. Daher stimmt das Lösungsspektrum des vorliegenden Amplitudensystems (7.71) mit verschwindender Interteilchenwechselwirkung mit dem wohlbekanntem Klein-Gordon Spektrum überein (vgl. z.B. [33]). In Übereinstimmung mit der Beschränkung auf rein statische Lösungen genügt es, hier nur die Resultate für die s -Zustände (also für verschwindenden Drehimpuls) anzugeben, deren Massen-Spektrum in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl n folgendermaßen aussieht:

$$M_*^{(n)} = \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{(2z_{\text{ex}}\alpha_*)^2}{\left(2n-1 + \sqrt{1-(2z_{\text{ex}}\alpha_*)^2}\right)^2}}}, \quad (7.99)$$

wobei $a_B (= \frac{\hbar^2}{Me^2})$ den Bohr-Radius bezeichnet.

Anstatt nun die allgemeine Formel für die Eigenfunktionen $\phi_0^{(n)}(\vec{r})$ hier anzugeben, beschränken wir uns exemplarisch auf die drei Zustände niedrigster Ordnung ($n = 1, 2, 3$), die bis auf eine Normierungskonstante ϕ_* lauten

$$\phi_0^{(1)}(y) = \phi_* y^{\alpha_1} \cdot \exp[-\alpha_2 \cdot y]. \quad (7.100)$$

Hierbei wurde die Radialvariable $r = |\vec{r}|$ mit Hilfe des Bohr'schen Radius a_B wie üblich in die dimensionslose Variable y übergeführt

$$y \doteq z_{\text{ex}} \frac{r}{a_B} \quad (7.101)$$

und die Konstanten α_1, α_2 hängen von der Kopplungskonstante α_* folgendermaßen ab

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - (2z_{\text{ex}}\alpha_*)^2} \right\} \quad (7.102a)$$

$$\alpha_2 = \frac{M_*^{(1)}}{M(1 + \alpha_1)}. \quad (7.102b)$$

Für die (normierte) Grundzustandsfunktion $\phi_0^{(1)}$ (7.100) ergibt sich daher im nicht-relativistischen Grenzfall

$$\phi_0^{(1)} \Rightarrow e^{-y}. \quad (7.103)$$

Dieser Zustand gehorcht der dimensionslosen Normierungsbedingung

$$\int_0^{\infty} dy y^2 \left(\phi_0^{(n)}(y) \right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (7.104)$$

Auf ähnliche Weise findet man für den nicht-relativistischen Grenzfall der angeregten Zustände

$$\phi_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 - \frac{y}{2} \right) \exp\left[-\frac{y}{2}\right] \quad (7.105a)$$

$$\phi_0^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{27}} \left(1 - \frac{2}{3}y + \frac{2}{27}y^2 \right) \exp\left[-\frac{y}{3}\right] \quad (7.105b)$$

welche alle die dimensionslose Normierungsbedingung (7.104) erfüllen.

7.11 Zweiteilchen-Korrekturen

Nachdem nun das Einteilchen-Spektrum bekannt ist, können die Zweiteilchen-Korrekturen ΔE (7.85) direkt in dimensionsloser Form geschrieben werden

$$\Delta E = 16 z_{\text{ex}} \frac{e^2}{a_B} \left\{ \int_{y=0}^{\infty} dy y \bar{\rho}(y) \int_{y'=0}^y dy' y'^2 \rho_0(y') + \int_{y=0}^{\infty} dy y^2 \bar{\rho}(y) \int_{y'=y}^{\infty} dy' y' \rho_0(y') \right\}. \quad (7.106)$$

Hierbei ist die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ (7.88) in dimensionsloser Form für jedes Paar von Zuständen ϕ_0, φ_0 gegeben durch

$$\bar{\rho}(y) = \frac{1}{2} \left(\phi_0^2(y) + \varphi_0^2(y) \right). \quad (7.107)$$

Die Dichte für positive Gemische ($\rho_0 \Rightarrow \rho_+$) wird aus $\rho_+(\vec{r})$ (7.87) bestimmt und lautet

$$\rho_+(y) = \cos^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \phi_0^2(y) + \sin^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \cdot \varphi_0^2(y), \quad (7.108)$$

und für negative Gemische gilt ($\rho_0 \Rightarrow \rho_-$) (7.96) entsprechend

$$\rho_-(y) = \rho_* \left| \cosh^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \phi_0^2(y) - \sinh^2\left(\frac{\mu_*}{2}\right) \varphi_0^2(y) \right|. \quad (7.109)$$

Dabei müssen alle Dichten die Normierungsbedingung (7.104) erfüllen

$$\int_0^{\infty} dy y^2 \bar{\rho}(y) = \int_0^{\infty} dy y^2 \rho_{\pm}(y) = \frac{1}{4}, \quad (7.110)$$

welche aus der allgemeinen Bedingung für die Normierung der Ströme (3.37)-(3.38) abgeleitet wurde.

Die nächste Aufgabe besteht in der Berechnung des Mischungswinkels μ_* , der die Bindungsenergie extremalisiert (oder äquivalent dazu die Energiekorrektur ΔE minimiert). Hierbei stellt man nun erhebliche Unterschiede zwischen beiden Gemischttypen fest: Während der Korrekturterm für positive Gemische $\Delta E_+(\mu_*)$ (7.89) eine sehr einfache Abhängigkeit vom Mischungswinkel μ_* aufweist, so daß man sofort erkennt, daß das Minimum von ΔE_+ für $\mu_* = 0$ auftritt, vgl. (7.90), benötigt man für die Energiekorrektur $\Delta E_-(\mu_*)$ (7.98) der negativen Gemische eine etwas aufwendigere Prozedur. Diese Schwierigkeit tritt deshalb auf, weil die Dichte $\rho_-(y)$ (7.109) aufgrund von (7.110) für jeden Wert des Mischungswinkels μ_* extra normiert werden muß (vgl. (7.97)).

Aus der allgemeinen Korrekturformel (7.85) folgt sofort, daß der minimale Energiewert ΔE_+ für die positiven Gemische bei $\mu_* = 0$ (7.90) mit einem lokalen Maximum von ΔE_- für die negativen Gemische (ebenfalls für $\mu_* = 0$) zusammenfallen muß, da in beiden Fällen die Dichte $\rho_0(\vec{r})$ identisch ist mit der Dichte für den schwächer gebundenen Zustand $\phi_0^2(\vec{r})$ (vgl. (7.87) und (7.96)). Daher überschneiden sich die Energiebänder für positive und negative Gemische nicht in der Nähe verschwindenden Mischungswinkels $\mu_* = 0$, und diese Tatsache erlaubt es, die positiven (negativen) Gemische eindeutig mit den Para-(Ortho-)Zuständen der konventionellen Quantentheorie zu identifizieren, siehe Figur 7.2. Vergleicht man die minimalen Werte der Energiebänder mit den entsprechenden störungstheoretischen Resultaten (7.12) der konventionellen Quantentheorie für die Ortho- und Parazustände, so erkennt man, daß die Ergebnisse der RST wesentlich besser mit den experimentellen Werten übereinstimmen als die der Standardtheorie (siehe Tabellen 1 und 2).

7.12 Vergleich mit der konventionellen Quantentheorie

Die Ortho- und Parazustände des Heliumatoms sind Gegenstand intensiver Forschungen im Rahmen der konventionellen Quantentheorie. Wenn man verschiedene Störterme, welche sich beispielsweise auf die relativistischen oder Spineffekte beziehen, mit berücksichtigt, so erlauben die Ergebnisse der konventionellen Theorie eine Berechnung der Feinstrukturkonstante mit einer Genauigkeit von 1.6

2-Teilchen Zustand	Konventionelle QM		RST		experimentell		Fehler (%)		Fehler (%)	
	$\Delta E = E_C \pm E_G$		$\Delta E = (\overset{\circ}{M} - M_{(0)})c^2$		ΔE_S	ΔE_A	konv. QM		RST	
	$\Delta E_{(+)}$	$\Delta E_{(-)}$	ΔE_+	ΔE_-			symm.	antis.	pos.	neg.
(1s, 2s)	12.62	10.23	9.803	9.201	9.634	8.838	31.0	15.8	1.8	4.1
(1s, 3s)	5.728	5.101	4.514	4.340	4.380	4.178	30.8	22.1	3.1	3.9
(1s, 4s)	3.264	3.009	2.583	2.509	2.487	2.408	31.2	25.0	3.9	4.2
(1s, 5s)	2.106	1.978	1.669	1.632	1.601	1.561	31.5	26.7	4.2	4.5
(1s, 6s)	1.470	1.397	1.167	1.145	1.116	1.093	31.7	27.8	4.6	4.8
(1s, 7s)	1.085	1.039	0.8613	0.8476	0.8215	0.8079	32.1	28.6	4.8	4.9
(1s, 8s)	0.8328	0.8021	0.6618	0.6526	0.6301	0.6211	32.2	29.1	5.0	5.1
(1s, 9s)	0.6596	0.6381	0.5243	0.5178	0.4986	0.4923	32.3	29.6	5.2	5.2
(1s, 10s)	0.5352	0.5196	0.4256	0.4209	0.4043	0.3997	32.4	30.0	5.3	5.3

Tabelle 7.1: Voraussagen der konventionellen Quantenmechanik und der RST für die 2-Teilchen Energiekorrektur ΔE . Die Voraussagen $\Delta E_{(\pm)}$ (7.12) der konventionellen Quantenmechanik, zweite Spalte, weichen stark von den experimentellen Werten $\Delta E_{S/A} = E_{\text{exp}}^{S/A} - E_0$ ab (vierte Spalte). Die Voraussagen der RST (7.90) bzw. (7.98) (dritte Spalte) sind wesentlich genauer als diejenigen der konventionellen Quantentheorie, siehe die Fehlerspalten. Alle Energiekorrekturen ΔE (zweite bis vierte Spalte) wurden in Elektronenvolt gemessen [eV] und die Fehler beziehen sich auf die experimentellen Werte $\Delta E_{S/A}$, welche aus [40] stammen. Alle Korrekturen höherer Ordnung (relativistische und Spineffekte sowie die Berücksichtigung der endlichen Kernmasse) wurden vernachlässigt, da sie in die hier dargestellten Korrekturterme niedrigster Ordnung nicht eingehen.

2-Teilchen Zustand	Konventionelle QM	RST	experimentell	Fehler (%)	Fehler (%)
	$2 E_G$	$\Delta E_+ - \Delta E_-$	$\Delta E_S - \Delta E_A$	konv. QM	RST
(1s, 2s)	2.389	0.603	0.796	200.1	-24.2
(1s, 3s)	0.628	0.175	0.202	210.9	-13.4
(1s, 4s)	0.2547	0.0736	0.0796	220.0	-7.5
(1s, 5s)	0.1281	0.0377	0.0392	226.8	-3.8
(1s, 6s)	0.0734	0.0218	0.0222	230.6	-1.8
(1s, 7s)	0.04598	0.01375	0.01372	235.1	0.2
(1s, 8s)	0.03069	0.00922	0.00908	238.0	1.5
(1s, 9s)	0.02150	0.00647	0.00631	240.7	2.5
(1s, 10s)	0.01564	0.00472	0.00457	242.2	3.3

Tabelle 7.2: Voraussagen der konventionellen Quantenmechanik und der RST für die Ortho-Para Aufspaltung. Die Übereinstimmung der Voraussagen der RST mit den experimentellen Daten ist hier sogar noch besser als für die Absolutwerte (vgl. Tabelle 1).

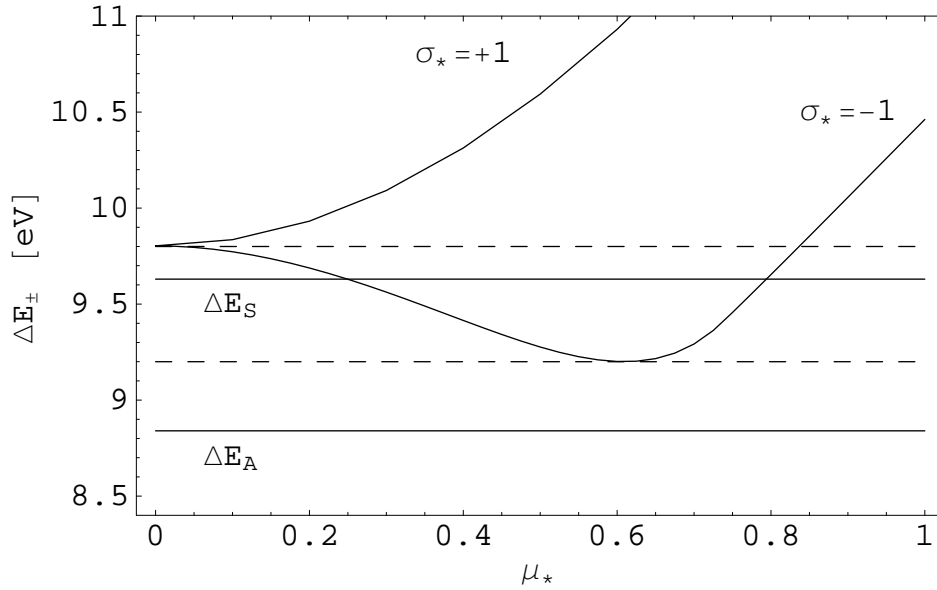


Abbildung 7.2: Energiekorrekturen ΔE_{\pm} und Mischungswinkel μ_* für den $(1s, 2s)$ Zustand. Für $\mu_* = 0$ fallen das Minimum der Wechselwirkungsenergie für positive Gemische $\Delta E_+(0)$ (7.90) und ein lokales Maximum der Wechselwirkungsenergie für negative Gemische $\Delta E_-(0)$ (7.98) zusammen. Die experimentellen Werte sind $\Delta E_S = 9.63$ [eV] für den Para-Zustand und $\Delta E_A = 8.85$ [eV] für den Ortho-Zustand, vgl. Figur 7.3.

zu 10^8 [41], oder die Berechnung von “im wesentlichen” exakten Energieniveaus (1 zu 10^{18}) [40]. Will man jedoch die Voraussagen beider Theorien miteinander vergleichen, so muß man ihre Vorhersagen Ordnung für Ordnung gegenüberstellen. Diesen Prozeß wird man mit einem Vergleich der Voraussagen in niedrigster Ordnung der beiden Theorien beginnen.

Wendet man sich hierbei zuerst der konventionellen Quantentheorie zu, so stellt man einen erstaunlich großen Fehler der konventionellen Voraussagen $\Delta E_{(\pm)}$ (7.12) fest, siehe Tabellen 1 und 2. Da die Voraussagen der RST deutlich besser ausfallen, mag man sich fragen, ob es einen physikalischen Effekt gibt, der von der RST auch schon in niedrigster Ordnung besser erfaßt wird als von der konventionellen Quantentheorie. Es scheint, daß es auf diese Frage eine plausible Antwort gibt, und zwar, wenn man die Lage der Energieniveaus ΔE im Vergleich zur klassischen elektrostatischen Energie E_C (7.14) betrachtet: Die experimentellen Werte $\Delta E_S, \Delta E_A$ und die Voraussagen der RST ΔE_{\pm} (7.85) (gegeben durch (7.90) für die positiven Gemische und durch (7.98) für die negativen Gemische) sind immer *kleiner* als die naive, klassische Coulomb-Energie E_C (7.12), wohingegen die Voraussagen der konventionellen Theorie die Energiekorrektur *über* den klassischen Wert E_C für die symmetrischen Zustände erhöht, diese aber für die

antisymmetrischen Zustände *unter* den klassischen Wert E_C drückt (vgl. Abbildung 7.3). Nun mag dieser Prozeß, welcher die ‘symmetrische’ Energie über die ‘antisymmetrische’ Energie erhöht, von einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus sehr plausibel erscheinen, da die Symmetrisierung der Wellenfunktionen Ψ_0 (7.5) die Teilchen näher zusammenbringt (im statistischen Sinne), indem zugelassen wird, daß beide denselben Raumbereich ($|\Psi_+(r_1 = r_2)|^2 \neq 0$) einnehmen, während die Antisymmetrisierung $\Psi_0 \Rightarrow \Psi_-$ dieses Verhalten gerade verbietet ($|\Psi_-(r_1 = r_2)|^2 = 0$). Wenn die Teilchen jedoch näher zusammenrücken ($r_1 \approx r_2$), steigt die Wechselwirkungsenergie durch H_{int} (7.3b) an und die Teilchen weisen eine höhere Wechselwirkungsenergie $\Delta E_{(+)}$ auf. Werden die Teilchen andererseits aufgrund des Antisymmetrisierungspostulats ($\Psi_0 \Rightarrow \Psi_-$) voneinander weggedrängt, nimmt die Wechselwirkungsenergie $\Delta E_{(-)}$ (7.12) ab.

Was bei dieser plausiblen probabilistischen Betrachtung aber offensichtlich nicht richtig berücksichtigt wird, sind die fluid-dynamischen Aspekte des zugrundeliegenden Quantenprozesses. Wie sich im gewöhnlichen Coulomb-Integral (7.14) bereits andeutet, und was durch die fluiddynamischen Aspekte der RST (7.90) und (7.98) zusätzlich untermauert wird, ist die Tatsache, daß die Energiekorrekturen erster Ordnung als wechselwirkende *Ladungswolken* anstelle von räumlichen Wahrscheinlichkeitsdichten von *Punktteilchen* interpretiert werden können. Wenn man eine solche fluid-dynamische Interpretation zugrunde legt, wird deutlich, warum die RST mit ihrer Möglichkeit, die Mischungsenergie zu minimieren, näher an die experimentellen Daten herankommt: Die Art von Energieminimierung in der RST läßt die Ladungsdichten expandieren, so daß sie sich über ein größeres Gebiet des dreidimensionalen Raumes verteilen, und die entsprechende Verringerung der elektrostatischen Energie führt zu einer Verringerung der (Selbst-)Wechselwirkungsenergie (die Selbst-Energie einer elektrostatischen Ladungswolke von linearer Dimension d variiert wie d^{-1}).

Dieser energie-minimisierende Delokalisationseffekt der Ladungswolken wird besonders deutlich, wenn man die Verringerung der Energie für negative Gemische ΔE_- (7.98) unter den Wert für positive Gemische $\Delta E_+(0)$ (7.90) betrachtet: Der Minimalwert ΔE_+ für positive Gemische wird aus dem allgemeinen Resultat (7.85) abgeleitet, indem man den Mischungswinkel μ_* den Wert $\mu_* = 0$ annehmen läßt, was die Dichte $\rho_+(\vec{r})$ (7.87) mit der Dichte $\phi_0^2(\vec{r})$ des schwächer gebundenen Energiezustandes identifiziert, welcher der am stärksten delokalisierte Zustand ist, der für die positiven Gemische erreichbar ist. Die negativen Gemische sind aber in der Lage, einen noch stärker delokalisierten Zustand anzunehmen (vgl. Figur

7.4) und dadurch die Energiekorrektur für negative Gemische ΔE_- (7.98) noch unter den niedrigsten Wert für positive Gemische $\Delta E_+(0)$ (7.90) zu drücken.

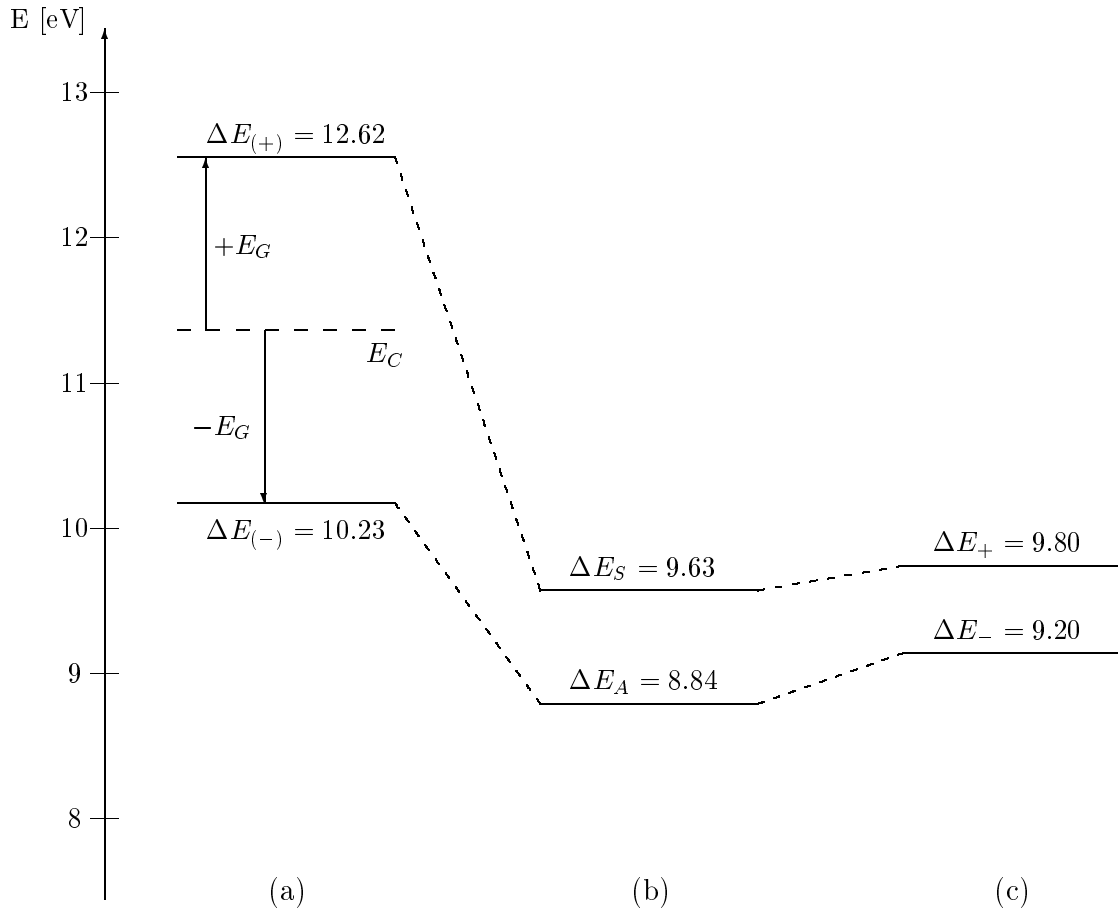


Abbildung 7.3: Vergleich der $(1s, 2s)$ Energiekorrekturen. Für die $(1s, 2s)$ Energiezustände sagt die konventionelle Quantentheorie eine Coulomb-Energie E_C (7.14) von 11.42 [eV] voraus. Diese wird zur Berechnung des symmetrischen Zustandes um die Austauschenergie (7.15) $E_G = 1.19$ [eV] erhöht, so daß sich für diesen $\Delta E_{(+)} = 12.62$ [eV] als Energiekorrektur ergibt. Zur Berechnung des anti-symmetrischen Zustandes wird die Coulomb-Energie um denselben Betrag E_G vermindert, so daß die Energiekorrektur $\Delta E_+ = 9.80$ [eV] beträgt, Teil (a). Der experimentelle Wert für die symmetrischen Zustände beträgt $\Delta E_S = 9.63$ [eV] und $\Delta E_A = 8.84$ [eV] für die anti-symmetrischen Zustände. Beide Werte liegen unterhalb der klassischen Referenzenergie E_C , Teil (b). Die experimentelle Situation wird durch die RST besser beschrieben, da diese Energieverschiebungen ΔE_{\pm} liefert, welche bis auf wenige Prozent mit den experimentellen Werten übereinstimmen: $\Delta E_+ = 9.80$ [eV], $\Delta E_- = 9.20$ [eV], Teil (c). Alle theoretischen Korrekturen sind Korrekturen niedrigster Ordnung, relativistische sowie Spin-Effekte wurden daher vernachlässigt. Das Nullniveau $\Delta E = 0$ wird erreicht für verschwindende Interteilchenwechselwirkung.

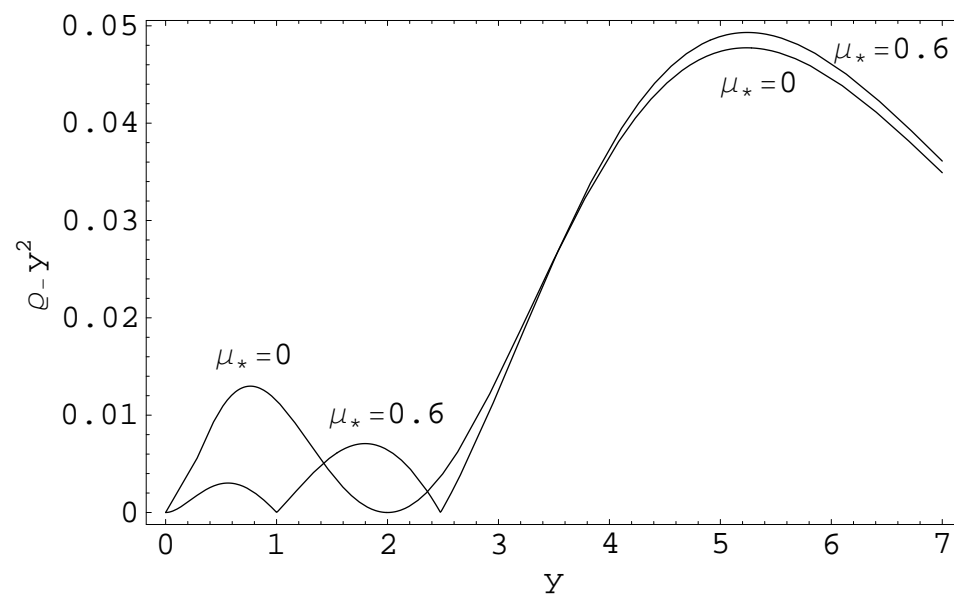


Abbildung 7.4: Delokalisation der Dichte für negative Gemische (ρ_-). Die Variation des Mischungswinkels μ_* führt zu einer Verringerung der Ladungsdichte $\rho_-(\vec{r})$ (7.96) in der Nähe des Kerns ($y \lesssim 1$) sowie einer Konzentration im Außenbereich ($y \gg 1$) und damit zu einer zusätzlichen Delokalisation der Dichte $\rho_-(\vec{r})$ (7.96). Dies führt zur Verringerung der Wechselwirkungsenergie ΔE_- für negative Gemische unter das Minimum $\Delta E_+(0)$ für die positiven Gemische, vgl. Figur 7.2.

Kapitel 8

Ausblick und Danksagung

Als Abschluß dieser Arbeit soll hier ein Ausblick auf mögliche weitere Anwendungen der Relativistischen Schrödingertheorie im 2-Teilchen Fall gegeben werden. Im Anschluß daran wird die Frage erörtert, ob die Relativistische Schrödingertheorie (im 2-Teilchen Fall) eine Formulierung als nichtlineare Feldtheorie zuläßt, ob man also die Feldgleichungen der RST durch Extremalisierung aus einer Lagrangedichte ableiten kann. Dies hätte den Vorteil, daß man Energieniveaus nicht nur durch eine Störungsentwicklung, sondern auch durch Anwendung eines Variationsprinzips berechnen könnte. Darüberhinaus würde dies den Übergang zu einer zweitquantisierten Theorie ermöglichen, welche mit den bereits existierenden zweitquantisierten 2-Teilchen-Gleichungen verglichen werden könnte.

Zunächst aber zu den Anwendungen der RST:

1.) Berechnung der Energieniveaus von 2-Teilchen-Bindungszuständen

Die Ergebnisse der ersten Ordnung Störungstheorie, welche in dieser Arbeit vorgestellt wurden, lagen näher an den experimentellen Werten als die Ergebnisse der konventionellen Quantentheorie. Man sollte nun prüfen, ob dieses Ergebnis auch für höhere Störungsordnungen erhalten bleibt. Darüberhinaus kann man den Vergleich zwischen RST und konventioneller Quantentheorie im Prinzip für jedes 2-Teilchen System durchführen, zu dem experimentelle Werte als Vergleichskriterium vorliegen. Insbesondere würde sich hierfür das H_2 -Molekül eignen, da die 1-Teilchen-Lösungen (für das H_2^+ -Ion) in analytischer Form darstellbar sind. Man würde dabei neben einer Abschätzung der Energieniveaus auch eine solche für den Gleichgewichtsabstand zwischen den beiden Wasserstoffatomen erhalten.

2.) Drehimpulse in der RST

In der vorliegenden Arbeit wurden die Energieniveaus einer rein statischen He-Konfiguration berechnet, d.h. für Konfigurationen mit verschwindendem Drehimpuls. Analoge Rechnungen lassen sich auch mit nicht verschwindendem Drehimpuls durchführen, wobei sich die interessante Frage stellt, wie sich die Drehimpulse von zwei Teilchen in der RST addieren. Durch den fluid-dynamischen Charakter der RST kann man nicht von zwei Punktteilchen ausgehen, deren Drehimpulse man wie in der konventionellen Quantentheorie zusammensetzt. Gibt es dennoch ein zur konventionellen Quantenmechanik analoges Drehimpuls-Additionsgesetz, findet man also z.B. eine Entsprechung für die Clebsch-Gordan Koeffizienten im Rahmen der RST ?

3.) Streuprozesse in der RST

Es gibt experimentelle Beweise für das Vorhandensein von Kräften zwischen zwei Teilchen, die über die Eichkräfte hinausgehen. Ein beliebtes Beispiel hierfür ist die Streuung von He^3 und He^4 [42]. Es ist klar, daß ein solcher Streuprozess durch die elektromagnetischen Kräfte bestimmt wird, wobei jede der beiden Teilchensorten aus derselben Zahl und Art von geladenen Teilchen besteht (jeweils zwei Elektronen und zwei Protonen). Daher sollte man annehmen, daß die Resultate bei Streuprozessen zwischen He^3 und He^4 im wesentlichen dieselben sind. Man stellt aber gewaltige Unterschiede fest, je nachdem, ob zwei He^3 , zwei He^4 -Atome oder ein He^3 mit einem He^4 -Atom kollidiert. Betrachtet man z.B. die in einem 90° -Winkel gemessene Zählrate für die Streuung zweier He^4 -Atome, so stellt man fest, daß diese doppelt so groß ist wie bei He^3 - He^4 -Streuung, und daß bei He^3 - He^3 -Streuung diese Zählrate sogar verschwindet. Wie kann ein solches Verhalten erklärt werden, wenn in allen Fällen dieselben Eichkräfte wirken ? Kann das Vorhandensein der Austauschfelder bei der Streuung von zwei Teilchen (zusätzlich zur Eichwechselwirkung) hierfür eine Erklärung liefern ?

*

Doch nun zurück zu der Frage, ob man eine Lagrange-Dichte für das RST-Feldgleichungssystem im 2-Teilchen-Fall finden kann. Zur Beantwortung dieser Frage lohnt es sich, die Struktur der Austauschfeldgleichungen genauer zu betrachten, insbesondere die der Wirbelgleichungen (6.44)-(6.46). Setzt man $\omega_{1\mu} = 2\Lambda_{a\mu}$, $\omega_{2\mu} = 2\Gamma_{a\mu}$ sowie $\omega_{3\mu} = 2X_{a\mu}$, so lassen sich die drei Wirbelgleichungen (für positive Gemische) in Formenschreibweise folgendermaßen formulieren:

$$d\omega^i = \epsilon^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad (8.1)$$

wobei die Indizes i, j, k von 1 bis 3 laufen. Dieses Ergebnis stellt aber einen Spezialfall der Maurer-Cartan Strukturgleichung dar, welche besagt, daß für die Maurer-Cartan-Formen einer Lie-Gruppe (d.h. die zur Lie-Algebra dualen Formen) folgende Beziehung gilt:

$$d\omega^i = \frac{1}{2}c^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad (8.2)$$

wobei die $c^i{}_{jk}$ die Strukturkonstanten der Lie-Algebra bezeichnen. Man kann also die Austauschfelder mit den Maurer-Cartan-Formen spezieller Lie-Gruppen identifizieren, und zwar mit denen der $SO(3)$ (für positive Gemische) bzw. der $SO(1, 2)$ (für negative Gemische). Die Maurer-Cartan Formen kann man in einer geeigneten Parametrisierung der Lie-Gruppe leicht angeben. Parametrisiert man die Gruppe $SO(3)$ (positive Gemische) durch die Euler-Winkel θ, φ, ψ , so nehmen die Maurer-Cartan Formen folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}\omega_{1\mu} &= -\partial_\mu\psi - \partial_\mu\varphi \cos\theta \\ \omega_{2\mu} &= -\partial_\mu\theta \sin\psi + \partial_\mu\varphi \cos\psi \sin\theta \\ \omega_{3\mu} &= -\partial_\mu\theta \cos\psi - \partial_\mu\varphi \sin\psi \sin\theta\end{aligned}$$

und entsprechend für die Gruppe $SO(1, 2)$ (negative Gemische)

$$\begin{aligned}\omega_{1\mu} &= -\partial_\mu\psi - \partial_\mu\varphi \cos\theta \\ \omega_{2\mu} &= -\partial_\mu\theta \sinh\psi + \partial_\mu\varphi \cosh\psi \sin\theta \\ \omega_{3\mu} &= -\partial_\mu\theta \cosh\psi + \partial_\mu\varphi \sinh\psi \sin\theta.\end{aligned}$$

Trotz anderer Bezeichnungsweise erkennt man leicht, daß ein Spezialfall dieser Lösungen, nämlich $\varphi = \varphi_* = \text{const.}$ in Kapitel 7 für die Berechnung der statischen Lösungen verwendet wurde (vgl. (7.23) und (7.25)). Höchstwahrscheinlich steht die Tatsache, daß einer der drei Euler-Winkel konstant gesetzt wurde, in direkter Verbindung mit der Konstanz des Mischungswinkels μ_* . Man wird also erwarten, daß für den oben angegebenen allgemeineren Fall der Mischungswinkel eine dynamische Feldgröße darstellt $\mu = \mu(x)$.

Wie hilft uns nun aber die obige Betrachtung beim Auffinden einer Lagrange-Dichte? Statt die Lagrange-Dichte von den Austauschfeldern $\Lambda_{a\mu}, \Gamma_{a\mu}$ und $X_{a\mu}$ abhängen zu lassen, kann man nun die Eulerwinkel als Variationsparameter verwenden. Man hat durch die Parametrisierung der Austauschfelder mit Euler-Winkeln also *Potentiale* gefunden, welche die Wirbelgleichungen der Austauschfelder automatisch erfüllen. Dieses Verfahren ist analog zu dem für die Maxwell'schen Gleichungen. Durch den Ansatz $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und damit die

Einführung eines *Vektorpotentials* A_μ werden die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt und in der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes kann nach dem Vektorpotential und nicht nach der Feldstärke variiert werden.

Es sollte daher möglich sein, mit Hilfe der Euler-Winkel eine Lagrange-Dichte zu konstruieren, aus welcher sich die Quellgleichungen der RST durch Variation ergeben. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme konnte jedoch leider nicht mehr im Zeitrahmen der vorliegenden Arbeit erbracht werden.

*

Zum Abschluß möchte ich noch die Gelegenheit ergreifen, all jenen zu danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben:

Herrn Dr. Sorg für die interessante Themenstellung und seine ständige Gesprächsbereitschaft; die vielen Diskussionen mit ihm haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. W. Weidlich für die freundliche Aufnahme am Institut und die Übernahme des Hauptberichts

Herrn Prof. Dr. H.-R. Trebin für die Übernahme des Mitberichts

allen Institutsmitgliedern für die angenehme Arbeitsatmosphäre und viele interessante Diskussionen (nicht nur physikalischen Inhalts)

und nicht zuletzt meinen Eltern dafür, daß sie mir während meiner gesamten Ausbildung mit Rat und Tat zur Seite standen

Symbolverzeichnis

Eichtheorien und Faserbündel

\mathcal{A}_μ	lokale Konnexion, Vektorpotential
$A_{a\mu}$	Komponenten der Konnexion bezüglich Generatoren τ^a
$A^\alpha{}_{\beta\mu}$	Matrizelemente der Konnexion
$A^\#$	Fundamentales Vektorfeld über P ($A \in \mathfrak{g}$)
d	äußere Ableitung im Basisraum M
d_P	äußere Ableitung im Prinzipalbündel P
\mathcal{D}_μ	lokale kovariante Ableitung
$\mathcal{F}_{\mu\nu}$	lokale Krümmung, Feldstärketensor
$F_{a\mu\nu}$	Komponenten des Feldstärketensors bez. τ^a
M	Mannigfaltigkeit, Basisraum
ω	globale Konnexion
Ω	globale Krümmung
$P(M, G)$	Prinzipalbündel mit Strukturgruppe G
$P \times V/G$	Assoziiertes Vektorbündel zu P mit Faser V und Strukturgruppe G
$\pi : P \rightarrow M$	Projektion aus Prinzipalbündel in Basisraum
ϕ_i	Koordinatensystem in Umgebung U_i
ψ_{ij}	Übergangsfunktion zwischen Koordinatensystemen i, j
$\sigma_i(p)$	lokaler Schnitt im Prinzipalbündel $P(M, G)$
σ_i^*	Pullbackabbildung
τ_a	Lie-Algebra-Generator
$[(u, v)]$	Element von $P \times V/G$ mit $u \in P$ und $v \in V$
U_i	offene Menge auf M
(U_i, ϕ_i)	Karte auf M
$\{U_i, \phi_i\}$	Atlas, vollständige Überdeckung von M

Sub- und Superskripte

${}^{(n)}F$	n -te Ordnung in einer Störungsentwicklung von F , für $n = 1, 2$ auch: F im n -ten Austauschvakuum
$'F$	selbst-wechselwirkungsfreier Anteil des Feldes F
F_0	F ohne Berücksichtigung der Interteilchenwechselwirkung
$F_{I/II}$	auf Teilchen I/II bezogene Größe (in Standardquantentheorie)
F_*	Integrationskonstante

Relativistische Schrödingertheorie

a	Teilchenindex $a = 1, 2$
a_B	Bohr'scher Radius $(= \frac{\hbar^2}{Me^2})$
a_μ	relatives Eichfeld (erweiterte Teilchenbasis)
\hat{A}_μ	gesamtes Eichfeld (erweiterte Teilchenbasis)
$A_{a\mu}$	Komponenten des Eichfeldes (Einzelteilchenbasis)
${}^{(ex)}A_\mu$	externes Eichpotential
α_*	Feinstrukturkonstante $(= \frac{e^2}{\hbar c})$
α	Phasenwinkel der Wellenfunktion
B_a, b_a	Konstante bei Transformation $\{\mathbb{L}_{a\mu}, \Gamma_{a\mu}\} \rightarrow \{\phi_a, \varphi_a\}$
β	Parameter einer $SO(1, 1)$ -Transformation, welche $\Gamma_{a\mu}$ und $\Lambda_{a\mu}$ verknüpft
C_*	konstanter Mischungsparameter
χ	Skalarfeld, "Potential" von g_μ
D_L	Determinante der Jakobimatrix bei Mischungstransformation
\mathcal{D}_F	Fierz-Deviator
Δ_F	Fierz-Abweichung
${}^{(0)}\Delta_{1,2}$	Reskalierungsfaktor für Energieeigenwerte
ΔE	Energiekorrektur in der RST
$\Delta E_{(\pm)}$	Energiekorrektur für (anti)symmetrische Energiezustände in konventioneller Theorie
ΔE_\pm	Energiekorrektur für positive/negative Gemische in der RST
$\Delta E_{S/A}$	Energiekorrektur für (anti)symmetrische Energiezustände (experimentell)
E_S, e_S	Schrödinger-Energieeigenwerte
E_C	klassische Coulombenergie

E_G	Austauschenergie in Standardquantentheorie
$E_{\mu\nu}$	Euler-Klasse
$\epsilon_{B,a}$	reskalierte Energieeigenwerte
f_ν	Kraft-Operator
f_ν	Kraftdichte
f_a	Dalgarno-Lewis Funktionen
$f_{\mu\nu}$	relative Feldstärke (erweiterte Teilchenbasis)
$\hat{F}_{\mu\nu}$	gesamte Feldstärke (erweiterte Teilchenbasis)
F_μ, F	Austauschfeld nach Reparametrisierung
$F_{a\mu\nu}$	Komponenten der Feldstärke (Einzelteilchenbasis)
g_μ	aus $\{^{(II)}N_\mu, l_\mu\}$ gebildetes Feld
g_w, g_s	Strukturfunktionen
G_μ, G	Austauschfeld nach Reparametrisierung
$G_{\mu\nu}$	Austauschfeldstärke
γ_a	Proportionalitätsfaktor zwischen $\Gamma_{a\mu}$ und $X_{a\mu}$
γ_{ab}	Pullback der Lorentz-Metrik η_{ab}
$\Gamma_{a\mu}$	Austauschfeld, Komponente der Maurer-Cartan-Form
\hat{H}	Hamiltonian der nicht-relativistischen Schrödingertheorie
h_0	ungestörter Hamiltonian (Dalgarno-Lewis-Methode)
h_μ	aus $\{^{(II)}N_\mu, l_\mu\}$ gebildetes Feld
\mathcal{H}_μ	Hamilton'sche 1-Form, RST Hamiltonian
$^{(\pi)}\mathcal{H}_\mu$	Austauschfeld-Anteil von \mathcal{H}_μ
\mathcal{I}	Intensitätsmatrix
j_μ	relativer Strom (erweiterte Teilchenbasis)
$j_{a\mu}$	Komponenten des Stroms (Einzelteilchenbasis)
J_μ	gesamter Strom (erweiterte Teilchenbasis)
\mathcal{J}_μ	Stromoperator
\mathcal{K}_μ	Hermite'scher Anteil von \mathcal{H}_μ , kinetisches Feld
K_μ	gesamtes kinetisches Feld (erweiterte Teilchenbasis)
$\tilde{K}_a(x)$	Skalarfunktionen (bei $E_{\mu\nu} \equiv 0$)
k_μ	relatives kinetisches Feld (erweiterte Teilchenbasis)
$'k_\mu$	modifiziertes relatives kinetisches Feld
$K_{a\mu}$	kinetische Felder (Einzelteilchenbasis)
$\tilde{K}_{a\mu}, \tilde{k}_{a\mu}$	Feldkombinationen ($E_{\mu\nu} \equiv 0$)
$\mathbb{K}_{a\mu}$	effektive kinetische Felder
$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{a\mu}$	effektive kinetische Felder mit $F_{a\mu\nu}$ als Wirbel

\mathcal{L}_μ	Antihermite'scher Anteil von \mathcal{H}_μ , Lokalisationsfeld
l_μ	relatives Lokalisationsfeld (erweiterte Teilchenbasis)
L_μ	gesamtes Lokalisationsfeld (erweiterte Teilchenbasis)
$\mathbb{L}_{a\mu}$	Komponenten des effektiven Lokalisationsfeldes
\tilde{L}_a	virtuelles Amplitudenfeld (in Vakuumzustand)
$L(x)$	Amplitudenfeld, gebildet aus L_μ
$'L(x)$	modifiziertes Amplitudenfeld
$L_a(x)$	Amplitudenfelder, gebildet aus $\{L, \xi_o\}$
$'L_a$	Amplitudenfelder nach Mischungstransformation
$\{^1\}L_a$	korrigierte Amplitudenfelder (0. und 1. Ordnung)
\hat{L}	Normierungskonstante
λ_*	Gruppenparameter der Mischungstransformation
λ	Mischungsparameter, raumzeit-abhängig
λ_{an}	Koeffizienten bei Modenentwicklung nach ${}^{(0)}L_n$
${}^{(1)}\tilde{\lambda}_{an}, {}^{(2)}\tilde{\lambda}_{an}$	Entwicklungskoeffizienten 1. und 2. Ordnung
$\Lambda_{a\mu}$	Austauschfeld, Komponente der Maurer-Cartan-Form
$[\Lambda]$	inverse Amplitudentransformation
m_a	modifizierter Masseneigenwert
M	invariante Teilchenmasse (Ruhemasse)
$M_*^{(n)}$	n -ter Massen-Eigenwert des Klein-Gordon Spektrums
M_a	a -ter Massen-Eigenwert, auch: modifizierter Masseneigenwert
\tilde{M}_a	virtueller Masseneigenwert (in Vakuumzustand)
M_{12}	Gesamtmasse mit Interteilchenwechselwirkung
$\overset{\circ}{M}_a$	(physikalische) Massen-Eigenwerte
μ_a	Mischungswinkel
\hat{N}_a	Normierungsfaktoren
$N_{a\mu}$	Austauschfelder, Komponentfelder von \mathcal{L}_μ
${}^{(\parallel)}N, {}^{(\perp)}N$	eichinvariante Komponenten der Austauschfelder $N_{a\mu}$
ν_a	reskalierte Mischungspotentiale
$\tilde{\nu}_a$	reskalierte Hilfspotentiale
ν'_a	modifizierte Mischungspotentiale
ω^i	Komponenten der Maurer-Cartan-Form
$\overset{\circ}{\omega}{}^b{}_{a\mu}$	Konnexionsform der Relativgruppe
ϕ_a	bei Dalgarno-Lewis-Methode modulierende Faktoren, für $E_{\mu\nu} \equiv 0$: Amplitudenfunktionen

φ_a	für $E_{\mu\nu} \equiv 0$ Amplitudenfunktionen
$\varphi_0^{(n)}$	n -te Eigenfunktionen der Klein-Gordon-Gleichung
φ	Euler-Winkel
\mathcal{P}_a	Projektoren (Einzelteilchenbasis)
Π_a	Permutatoren (Einzelteilchenbasis)
$\hat{\Pi}, \tilde{\Pi}$	Basisoperatoren der rotierenden Basis
$\psi_{I/II}$	1-Teilchen Wellenfunktion
ψ	1-Teilchen Wellenfunktion, auch: Euler-Winkel
Ψ	Wellenfunktion, Schnitt in komplexem Vektorbündel
Ψ_{\pm}	(anti-)symmetrische Wellenfunktion
q	relative Dichte (erweiterte Teilchenbasis)
$Q_{a\mu}$	Austauschfelder, Komponentenfelder von \mathcal{K}_{μ}
$(\parallel)Q, (\perp)Q$	eichinvariante Komponenten der Austauschfelder $Q_{a\mu}$
\mathcal{Q}	Basisoperator in erweiterter Teilchenbasis
\hat{r}_{μ}	Einheitsvektor in radialer Raumrichtung
ρ	gesamte Teilchendichte (erweiterte Teilchenbasis)
ρ_a	Teilchendichte (Einzelteilchenbasis)
$[R]$	Amplitudentransformation
s_a	eichkovariante Komponentenfelder von \mathcal{I}
\hat{s}_a	Einheitsvektor s_a/s
s	eichinvariantes Komponentenfeld von \mathcal{I} , Länge des Vektors $\{s_1, s_2\}$
S_a	Kombination der \hat{L}_a bei Mischungstransformation
S_{μ}, S	Austauschfeld nach Reparametrisierung
S_c	Integrationskonstante
\mathcal{S}	typisches Element einer Eichgruppe
$\overset{\circ}{S}{}^a{}_b$	Element der Relativgruppe $SO(2)$
σ_*	Mischungsindex
\hat{t}_{μ}	Einheitsvektor in Zeitrichtung
$t_{a\mu\nu}$	Einzelteilchen-Komponenten von $T_{\mu\nu}$
$\hat{t}_{\mu\nu}, \tilde{t}_{\mu\nu}$	Austausch-Komponenten von $T_{\mu\nu}$
T_a	Kombination der \hat{L}_a bei Mischungstransformation
T_{μ}, T	Austauschfeld nach Reparametrisierung
$T_{\mu\nu}$	Energie-Impuls-Tensor

${}^{(a)}T_{\mu\nu}$	Einzelteilchen-Komponenten von $T_{\mu\nu}$
${}^{(x)}T_{\mu\nu}$	Austauschfeld-Komponente von $T_{\mu\nu}$
${}^{(a)}t_{\mu\nu}$	Zerlegung von ${}^{(x)}T_{\mu\nu}$ nach Einzelteilchenbeiträgen
${}^{(\text{mat})}T_{\mu\nu}$	materieller Anteil von $T_{\mu\nu}$
${}^{(\text{el})}T_{\mu\nu}$	(elektromagnetischer) Eichfeldanteil von $T_{\mu\nu}$
$\mathcal{T}_{\mu\nu}$	Energie-Impuls-Operator
θ	Euler-Winkel
U_C	Coulomb-Energie
v_μ	relativer Geschwindigkeitsoperator, (erweiterte Teilchenbasis)
$v_{a\mu}$	Komponenten des Geschwindigkeitsoperators (Einzelteilchenbasis)
${}^{(C)}v_{a\mu}$	Konvektionsanteil von $v_{a\mu}$
${}^{(P)}v_{a\mu}$	Polarisationsanteil von $v_{a\mu}$
V_a	reskalierte Mischungspotentiale
\mathcal{V}_μ	gesamter Geschwindigkeitsoperator, (erweiterte Teilchenbasis)
W_a	Mischungspotentiale
$'W_a$	Mischungspotentiale nach Mischungstransformation
X_a, X_0	Austauschpotentiale
$X_{a\mu}$	Austauschfeld, Komponente der Maurer-Cartan-Form
$X_{a\mu\nu}$	Austauschfeldstärke
ξ_o	Mischungswinkel
y	reskalierte Radialvariable
z_{ex}	Kernladungszahl
$z_o[L]$	Überlappungsgrad der Amplitudenfelder
$z_o[\rho]$	Überlappungsgrad der Dichten
\mathcal{Z}	Renormalisierungsoperator
Z_T, Z_O, Z_R	Renormalisierungs-Faktoren
Z_{II}	Renormalisierungs-Faktor, Länge des Vektors $\{Z_R, Z_O\}$
ζ	Mischungsvariable

Literaturverzeichnis

- [1] M. Daniel and C.M. Viallet, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 175 (1980)
- [2] U. Ochs, Dissertation, Universität Stuttgart (1996)
- [3] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Adam Hilger, 1990)
- [4] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, 1963), Vol. I
- [5] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, 1969), Vol. II
- [6] M. Göckeler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity* (Cambridge University Press, 1987)
- [7] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics* (North-Holland, 1982)
- [8] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds, and Physics Part II: 92 Applications* (North-Holland, 1989)
- [9] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, 1983)
- [10] T. Frankel, *The Geometry of Physics* (Cambridge University Press, 1997)
- [11] M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik* (Vieweg, 1995)
- [12] H. Sazdjian, *Phys. Rev. D* **33**, 3401 (1986)
- [13] H. Sazdjian, *Ann. Phys.* **191**, 52 (1989)
- [14] M. Fierz, *Z. Phys.* **104**, 553 (1937)
- [15] J.P. Crawford, *J. Math. Phys.* **26**, 1439 (1985)

-
- [16] M. Mattes and M. Sorg, *Nuov. Cim. B* **109**, 1097 (1994)
- [17] S. Rupp, T. Sigg, and M. Sorg, *Int. Journ. Theor. Phys.* **39**, 1543 (2000)
- [18] D. Giulini et al., *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, 1996)
- [19] R. Penrose, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **356**, 1927 (1998)
- [20] U. Ochs and M. Sorg, *J. Phys. A* **28**, 7263 (1995)
- [21] M. Mattes, S. Rupp, and M. Sorg, *Can. J. Phys.* **79**, 879 (2001)
- [22] M. Mattes and M. Sorg, *J. Phys. A* **32**, 4761 (1999)
- [23] M. Mattes and M. Sorg, *Journ. Math. Phys.* **40**, 71 (1999)
- [24] M. Mattes and M. Sorg, *J. Phys. A* **32**, 4761 (1999)
- [25] S. Rupp and M. Sorg, *Int. Journ. Theor. Phys.* **40**, 1817 (2001)
- [26] S. Rupp and M. Sorg, *Nuov. Cim. B* **116**, 739 (2001)
- [27] S. Rupp and M. Sorg, *Phys. Rev. A* **63**, 022112 (2001)
- [28] S. Rupp, S. Pruß-Hunzinger, and M. Sorg, *Exchange Degeneracy of Relativistic Two-Particle Quantum States*, Preprint (2001)
- [29] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, 1998)
- [30] D. Grau, *Übungsaufgaben zur Quantentheorie* (Hanser, 1993)
- [31] A. Dalgarno and J.T. Lewis, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **233**, 70 (1955)
- [32] H.A. Mavromatis, *Am. J. Phys.* **59**, 738 (1991)
- [33] W. Greiner, *Relativistische Quantenmechanik* (Harri Deutsch, 1987)
- [34] S. Rupp and M. Sorg, *Exchange Interactions and Mass-Eigenvalues of Relativistic Two-Particle Quantum Mixtures*, Preprint (2001)
- [35] J.A. Wheeler and W.H. Zurek (eds.), *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University Press, 1983)
- [36] J.M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuov. Cim. B* **37**, 1 (1977)

-
- [37] F. Selleri, *Quantum Paradoxes and Physical Reality* (Kluwer Acad. Publ., 1990)
- [38] L.E. Ballentine, *Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 1990)
- [39] S. Pruß-Hunzinger, M. Mattes and M. Sorg, *Geometry and Topology of Relativistic Two-Particle Quantum Mixtures*, Preprint (2001)
- [40] G.W.F. Drake and W.C. Martin, Can. J. Phys. **76**, 679 (1998)
- [41] Tau Zhang, Zong-Chao Yan, and G.W.F. Drake, Phy. Rev. Lett. **77**, 1715 (1996)
- [42] F. Wilczec, Sci. Americ., May 1991, p. 24