

---

# **Straffe zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten kompakter euklidischer Raumformen**

---

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart zur  
Erlangung der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von  
**Marc-Oliver Otto**  
geboren in Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr. Wolfgang Kühnel  
Mitberichter: Prof. Dr. Eberhard Teufel  
Tag der Einreichung: 18. Juni 2003  
Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 2003

---

Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart  
2003

---



FÜR STEPHANIE



Je sais bien que le lecteur n'a pas  
grand besoin de savoir tout cela,  
mais j'ai besoin, moi, de le lui dire.

(J.-J. ROUSSEAU, LES CONFESIONS – LIVRE I)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>1 Kompakte euklidische Raumformen</b>	<b>19</b>
1.1 Modelle der <i>ERF</i> . . . . .	24
1.2 Bestimmung der Fundamentalbereiche . . . . .	27
<b>2 Straffheit in <i>ERF</i></b>	<b>31</b>
2.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	31
2.2 Straffheit in <i>ERF</i> . . . . .	33
2.3 Tight surgery und tight smoothing . . . . .	35
<b>3 Straffe Flächen in <i>ERF</i></b>	<b>41</b>
3.1 Existenzresultate . . . . .	41
3.2 Nichtexistenzresultate . . . . .	65
3.2.1 Die Kleinsche Flasche . . . . .	65
3.2.2 Die projektive Ebene . . . . .	69
3.3 Offene Fragen . . . . .	71
3.4 Zusammenfassung . . . . .	72
<b>4 Differentialtopologische Interpretation</b>	<b>73</b>
4.1 Glatte Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum . . . . .	74
4.1.1 Kritische Punkte . . . . .	74
4.1.2 Höhenfunktionen . . . . .	75
4.1.3 Die Verbindung mit straffen glatten Flächen . . . . .	77
4.2 Polyedrische Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum . . . . .	80

4.3	Straffe glatte Flächen in $ERF$	
	–differentialtopologisch–	83
4.3.1	Lokale Höhenfunktionen in $ERF$	83
4.3.2	Anwendung auf straffe glatte Flächen	85
4.4	Straffe polyedrische Flächen in $ERF$	
	–differentialtopologisch–	97
<b>5</b>	<b>Straffe glatte Flächen mit Rand in <math>ERF</math></b>	<b>101</b>
5.1	Definitionen	101
5.2	Straffheit	105
5.3	Existenz- und Nichtexistenzaussagen	106
5.4	Zusammenfassung	115
<b>6</b>	<b>Straffe Flächen in <math>\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n</math></b>	<b>117</b>
6.1	Definitionen	117
6.2	Resultate	119
6.3	Zusammenfassung	125
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>
	<b>Index</b>	<b>135</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>139</b>

---



# Einleitung

Kuiper definierte zu Beginn der 60er Jahre in seinen Arbeiten [52] und [53] straffe Immersionen kompakter Flächen  $M$  in den dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  als solche minimaler totaler Absolutkrümmung  $\tau(M)$ , d.h. als solche, für welche in der Ungleichung

$$\tau(M) \geq 4 - \chi(M)$$

Gleichheit gilt, wobei  $\chi(M)$  die Euler-Charakteristik von  $M$  bezeichnet. Dabei stützte er sich auf Betrachtungen von Alexandrov in [2] über die Totalkrümmung sowie von Chern und Lashof in [29] und [30] über totale Absolutkrümmung immersierter Mannigfaltigkeiten.

Straffheit einer immersierten Fläche ist eine Verallgemeinerung von Konvexität und heißt in gewissem Sinne, dass sie unter Berücksichtigung ihrer topologischen Eigenschaften so 'konvex wie möglich' immersiert ist.

Kuiper bewies in oben genannten Arbeiten unter anderem, dass die projektive Ebene und die Kleinsche Flasche nicht straff in den  $\mathbb{E}^3$  immersierbar sind, während sich alle anderen Flächen straff in diesen immersieren lassen. Lediglich die Frage der straffen Immersierbarkeit der projektiven Ebene mit einem Henkel blieb dort noch unbeantwortet und lange offen. Erst 1992 konnte Haab in [37] zeigen, dass keine glatte straffe Immersion dieser Fläche in den  $\mathbb{E}^3$  existiert.

Mit der Einführung der Zwei-Stück-Eigenschaft (Two-Piece-Property (TPP)) durch Banchoff in [7], welche für Flächen im  $\mathbb{E}^3$  äquivalent zur Minimalität der totalen Absolutkrümmung ist und besagt, dass jede beliebige Ebene die Fläche in nicht mehr als zwei Teile teilt, und mit der Übertragung des Satzes von Gauß-Bonnet auf den polyedrischen Fall in [5] und [6] wurde es möglich, auch polyedrische Flächen analog zu den glatten Flächen zu untersuchen. Eine Zusammenfassung der polyedrischen Ergebnisse findet man in [48]. Wie im glatten Fall konnte früh die Nichtexistenz einer straffen polyedrischen Immersion der projektiven

Ebene und der Kleinschen Flasche und die Existenz einer straffen polyedrischen Immersion aller anderen Flächen in den  $\mathbb{E}^3$  gezeigt werden. Jedoch blieb auch hier der Fall der projektiven Ebene mit einem Henkel unbehandelt. Nach dem Beweis der Nichtexistenz im glatten Fall vermutete man, dass auch keine polyedrische Realisierung möglich sei, doch Cervone lieferte 1994 in [22] bzw. [25] ein Beispiel einer straffen polyedrischen Immersion dieser Fläche und beschreibt anhand dieses 'Sonderfalls' in [24] den grundlegenden Unterschied zwischen straffen polyedrischen und straffen glatten Immersionen ebenso wie Banchoff dies in [4] verdeutlichte. Insbesondere bewies dieser die Existenz einer straffen polyedrischen Einbettung einer kompakten Fläche in einen beliebig dimensional euklidischen Raum.

Zusammengefasst sind diese Ergebnisse in [10] nachzulesen; dort ist auch eine umfangreiche Referenzliste zu finden. Eine gute Einführung in die Theorie der 'Straffheit' ist das Buch von Cecil und Ryan [21], wobei auch auf die kurzen Übersichtsartikel von Thorbergsson [69] und Willmore [71] verwiesen werden soll.

**In der vorliegenden Arbeit** wird die Theorie straffer Immersionen – glatt oder polyedrisch – berandeter und unberandeter Flächen in euklidische Raumformen übertragen. Dies sind Quotienten  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  des  $\mathbb{R}^n$  nach fixpunktfrei wirkenden kristallografischen Gruppen  $\Gamma$ , woraus die lokale Isometrie zum  $\mathbb{R}^n$  unmittelbar folgt. Nach den Bieberbachschen Sätzen (siehe [12] und [13]) gibt es in jeder Dimension nur endlich viele. Die dreidimensionalen wurden Mitte der 30er Jahre von Hantzsche und Wendt in [38] klassifiziert, während dies für die vierdimensionalen von Levine 1970 in [57] durchgeführt wurde. Dies sind die einzigen vollständigen Klassifikationen kompakter euklidischer Raumformen.

Die Darstellung der Klassifikation in Dimension drei, die daraus resultierenden Fundamentalbereiche der Gruppen  $\Gamma$  und die damit verbundenen Modelle der dreidimensionalen, kompakten euklidischen Raumformen (kurz: *ERF*) ist Inhalt von Kapitel 1.

Kapitel 2 ist nach Einführung der grundlegenden Begriffe insbesondere der Definition straffer Immersionen kompakter Flächen  $M$  – glatt oder polyedrisch – in *ERF* gewidmet. Es stellt sich heraus, dass die totale Absolutkrümmung  $\tau(M)$  der schärferen Ungleichung

$$\tau(M) \geq |\chi(M)|$$

---

---

genügt. Immersionen, für welche in dieser Ungleichung die Gleichheit gilt, werden straff genannt.

Weiter werden in Kapitel 2 äquivalente Formulierungen der Straffheit hergeleitet und die notwendigen Werkzeuge zum Beweis der Existenz- und Nichtexistenzaussagen straffer Immersionen in  $ERF$  vorgestellt.

In Kapitel 3 werden Existenz- und Nichtexistenzaussagen straffer Immersionen in  $ERF$  bewiesen. Die Existenz einer solchen Immersion –glatt oder polyedrisch– wird für alle orientierbaren und fast alle nichtorientierbaren Flächen bewiesen. Nichtexistenz einer straffen Immersion wird sowohl für die Kleinsche Flasche in den Drei-Torus und eine andere orientierbare  $ERF$ , als auch für die projektive Ebene in alle  $ERF$  bewiesen. Für die projektive Ebene mit zwei Henkeln wird eine straffe polyedrische Immersion in alle  $ERF$  vorgestellt. Die Fragen nach einer straffen glatten Immersion dieser Fläche und einer straffen Immersion der projektiven Ebene mit einem Henkel in eine  $ERF$  bleiben offen. Die Ergebnisse sind im letzten Abschnitt dieses Kapitels zusammengefasst. Dort findet man auch die Verweise auf die einzelnen Sätze.

Kapitel 4 charakterisiert die Straffheit in  $ERF$  differentialtopologisch. Klassisch ist die Straffheit einer immersierten Fläche  $M$  äquivalent zu der Aussage, dass eine Höhenfunktion auf  $M$  genau ein Maximum und ein Minimum hat. Dies setzt die Existenz einer auf ganz  $M$  definierten Höhenfunktion voraus, welche es in der vorliegenden Situation nicht gibt. Durch Ausnutzung der lokalen Isometrie zum  $\mathbb{R}^3$  kann man lokale Höhenfunktionen definieren und beweisen, dass eine glatte Immersion einer Fläche  $M$  nichtpositiver Euler-Charakteristik genau dann straff ist, wenn keine lokale Höhenfunktion ein Maximum auf  $M$  besitzt. Weiter wird gezeigt, dass dies äquivalent ist zu der Aussage, dass der Betrag aller Singularitäten des zu der lokalen Höhenfunktion gehörenden Gradientenvektorfeldes gleich eins ist. Diese Resultate werden in angepasster Form auch für polyedrische Immersionen bewiesen.

In Kapitel 5 wird die Theorie straffer Immersionen in  $ERF$  auf Immersionen kompakter glatter Flächen mit Rand in diese Räume übertragen. Straffe glatte Immersionen dieser Flächen in den euklidischen Raum wurden von Banchoff [7], Kühnel [47] und Rodríguez [67] studiert. Es gibt straffe glatte Immersionen aller Flächen mit Rand in den  $\mathbb{E}^3$ , falls das Geschlecht der Fläche größer als eins ist und mehr als eine Randkomponente hat. Die Vermutung von White ([70]) besagt hingegen, dass es keine glatte straffe Immersion einer kompakten orientierbaren

---

Fläche, außer der Keisscheibe, mit nur einer Randkomponente gibt.

Im Fall einer immersierten glatten Fläche  $M$  in eine  $ERF$  ist die Minimalität der totalen Absolutkrümmung  $\tau(M)$  äquivalent zur Übereinstimmung von  $\tau(M)$  mit dem Betrag der totalen Krümmung. Dies wird zur Definition straffer glatter Immersionen kompakter Flächen mit Rand in  $ERF$  herangezogen, woraus auch hier zum Einen folgt, dass eine solche Immersion genau dann straff ist, wenn die totale Absolutkrümmung mit dem Betrag der Euler-Charakteristik übereinstimmt und zum Anderen, dass eine solche Immersion genau dann straff ist, wenn sie minimale totale Absolutkrümmung besitzt.

Damit werden Existenz- und Nichtexistenzaussagen straffer Immersionen kompakter Flächen mit Rand in  $ERF$  bewiesen. Es existieren straffe Immersionen aller orientierbaren Flächen und aller nichtorientierbaren Flächen vom Geschlecht größer zwei in alle  $ERF$ . Im Falle gerader Euler-Charakteristik gilt dies auch für Geschlecht zwei. Alle Aussagen gelten hier unabhängig von der Anzahl der Randkomponenten. Weiter wird die Nichtexistenz einer straffen Immersion eines Möbiusband in den Drei-Torus und eine weitere orientierbare  $ERF$  bewiesen.

Kapitel 6 verallgemeinert die Theorie straffer Flächen in  $ERF$  auf den Fall höherdimensionaler, kompakter euklidischer Raumformen. Auch hier wird eine Immersion einer kompakten Fläche in eine beliebig dimensionale, kompakte euklidische Raumform straff genannt, wenn die totale Absolutkrümmung mit dem Betrag der Totalkrümmung übereinstimmt.

Es wird eine Konstruktion vorgestellt, mit welcher man straffe glatte Flächen genügend kleiner Euler-Charakteristik in kompakte euklidische Raumformen beliebiger Dimension größer als drei erzeugen kann. Klassisch gibt es diese Immersionen nur in den Dimensionen kleiner als sechs, wobei in Dimension fünf lediglich die projektive Ebene straff und glatt immersiert werden kann.

---

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Wolfgang Kühnel danken, für die außerordentlich gute Betreuung die er mir beim Erstellen meiner Dissertation zukommen ließ, für viele hilfreiche Diskussionen und Hinweise und insbesondere für den Freiraum zur selbständigen Arbeit, den er mir während meiner Tätigkeit an seinem Lehrstuhl geschaffen hat.

Weiter danke ich Herrn Prof. Eberhard Teufel zum Einen für die Erstellung des Zweitgutachtens und zum Anderen für die vielen Gespräche und Anregungen zur Abrundung der Arbeit.

Außerdem danke ich Gabi Preissler für Ihr akribisches und kritisches Korrekturlesen und Ihre Hilfe bei diversen Maple-Problemen, insbesondere in Abschnitt 2.3, Martin Bulach für das Erstellen von Abbildung 6.2 in Cinderella, das Lösen diverser LaTeX-Probleme und für die Arbeit an Abbildung 3.24, Thorsten Wittmann für die vielen hitzigen Diskussionen und allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts für das sehr angenehme Arbeitsklima in den letzten Jahren.

Mein besonderer Dank geht an meine Frau Stephanie, die mich in der ganzen Zeit unermüdlich motiviert und unterstützt hat und an meinen Sohn Jannis, der immer für die nötige Ablenkung sorgte. Somit haben beide wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

---



# Abstract

In the early 1960's Nicolaas Kuiper defined and studied tight immersions of surfaces in Euclidean three-space  $\mathbb{E}^3$  in [52] and [53]. Let  $M$  be a smooth ( $C^\infty$ -) surface with Euler characteristic  $\chi(M)$  immersed in Euclidean three-space. By definition, the total absolute curvature of  $M$  is

$$\tau(M) = \int_M \frac{|K| do}{2\pi}$$

where  $K$  denotes the Gaussian curvature and  $do$  is the absolute value of the exterior 2-form which represents the area. With Gauss-Bonnet's theorem and the knowledge of inequality (1) for the integral over all points of positive Gaussian curvature  $K$

$$\int_{K>0} \frac{K do}{2\pi} \geq 2 \tag{1}$$

it follows (see [52]) that inequality (2) holds for immersions of closed surfaces in Euclidean three-space

$$\tau(M) = \int_M \frac{|K| do}{2\pi} \geq 4 - \chi(M). \tag{2}$$

If equality occurs in (2) the immersion  $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$  is called tight, which means that the surface has minimal total absolute curvature. Tightness is a generalization of the notion of convexity. In some sense, it means that a surface is embedded or immersed 'as convexly as possible' with respect to its topological properties. With the introduction of the two-piece-property (TPP) which is equivalent to equality in (2) for surfaces in  $\mathbb{E}^3$  it was possible to examine tightness not only for smooth surfaces but also for polyhedral ones as it was done by Banchoff in [4]. For all surfaces — smooth or polyhedral — it is known whether they can be immersed or embedded tightly in three-space or not. A good collection of the known results and a huge reference list on tightness can be found in [10].

In the first part of the present work (Chapter 1, 2 and 3) we transfer these results to the case where the surfaces — smooth or polyhedral — are immersed in three-dimensional compact Euclidean space forms (*CES*). By definition, a *CES* is the compact quotient  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  where  $\Gamma$  is a freely acting discrete subgroup of the Euclidean group. Now, the problem of classifying the *CES* is reduced to the search of these groups. Bieberbach's theorems state that there are only finitely many in each dimension and therefore also a finite number of *CES*. With the help of this Hantzsche and Wendt classified the *CES* in [38] and proved that there are only six orientable and four non-orientable ones in dimension three.

In [38] one can find diagrams of the group actions. We extend these in Chapter 1 to diagrams of the fundamental domains of the ten different groups  $\Gamma$ . The resulting diagrams of the fundamental domains of the groups  $\Gamma_i$  which represent the different *CES* can be seen in the Figures 1.5 and 1.6. The arrows indicate the way how the edges are identified. This implies the identifications of the faces, where we are only allowed to identify those faces whose edges are oriented in the same way. These identifications come out of the study of the group actions.

A surface  $M$  is a compact and connected two-dimensional manifold without boundary.  $M$  is embedded into a *CES* if it is homeomorphic to a subset of a *CES* and immersed into a *CES* by a continuous mapping  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  if  $f$  is locally injective. If  $M$  is of differentiability class  $C^\infty$  we will speak of a smooth surface. This together with a smooth map  $f$  shall be a smooth immersion of  $M$ . A polyhedral surface  $M \subset \mathbb{R}^3/\Gamma$  is a surface embedded in a *CES* such that  $M$  is a finite union of planar polygons where any two of them have no interior points in common and non-adjacent faces have no points in common. By subdivision one can always assume that the polygons are convex. Then the intersection of two such convex polygons is either empty or one point or a line segment, and the intersection of two edges is either empty or one vertex. Similarly, one can talk about polyhedral immersions of surfaces.

To get a definition of tight smooth surfaces consider the embedded surface in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  shown in Figure 1(a). Obviously, Figure 1(a) shows a smooth and polyhedral embedding of the two-dimensional torus in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  as it can be seen in Figure 1(b). It is a surface consisting only of points of vanishing curvature. 'This is not possible in Euclidean three-space'. Therefore, the lower bound for the total absolute curvature of a surface is zero and not 2. The example shows that there are surfaces for which the minimal value is reached. Because Gauss-Bonnet's the-

---



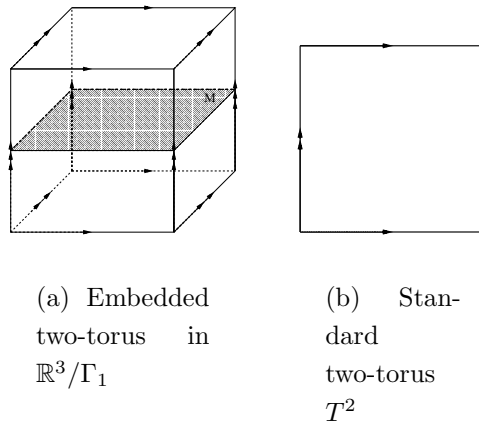


Figure 1: A first example

orem only depends on intrinsic measures, it is also valid in our case and therefore the following holds for a smooth surface  $M$  in  $CES$

$$\tau(M) = \int_M \frac{|K| do}{2\pi} \geq \left| \int_M \frac{K do}{2\pi} \right| = |\chi(M)| \quad (3)$$

where  $\chi(M)$  denotes the Euler characteristic of  $M$ .

The first example shows that inequality (3) is sharp and we are now able to define tight smooth surfaces in  $CES$  in analogy to the definition in Euclidean three-space.

**Definition:** Let  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  be a smooth immersion of a surface  $M$  in a  $CES$ .  $f$  is called tight if the following equality holds

$$\tau(M) = |\chi(M)|. \quad (4)$$

**Consequence:** A surface  $M$  is tight if and only if its Gaussian curvature  $K$  doesn't change sign.

It follows that an immersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  of a surface  $M$  with negative Euler characteristic  $\chi(M)$  in any  $CES$  is tight if and only if there exists no point  $p \in f(M)$  with positive curvature. If  $\chi(M)$  is positive,  $f$  is tight if and only if no point  $p \in f(M)$  with negative curvature exists. In the case of  $\chi(M)$  being zero every point has to have vanishing curvature.

The last equivalent formulation of tightness follows directly out of equation 3.

**Conclusion:** *A surface  $M$  is tight if and only if its total absolute curvature is equal to the absolute value of its total curvature.*

If we consider polyhedral surfaces it is necessary to redefine the total absolute curvature for this case as it is done in [18]. With this definition and the fact that Gauss-Bonnet's theorem also holds for polyhedral surfaces (see [4] and [6]), it is possible to prove equivalent statements in terms of the polyhedral situation as it is done above for smooth surfaces. Therefore, we have the opportunity to deal with surfaces — smooth or polyhedral — in the same way.

At the beginning we would like to mention two tools which are necessary to prove the existence theorems. The first one is tight surgery. This is a well known procedure to construct tight examples of higher genus. This works for  $CES$  just as it does in three-space. We only have to regard the identifications in the  $CES$ . At the end of Chapter 1 we construct an explicit formula of the handle which is involved in the operation of the tight surgery. As we said it is well known that it works but no formula exists in the literature. The second tool we want to mention is tight smoothing as it is defined in [50]. There it is shown that it is possible to smooth tight polyhedral surfaces if the vertices have valence three or are standard-saddle-vertices so that the resulting smooth surface has the same topological type and is also tight. This procedure can be transferred to the case of  $CES$  without change.

With the help of the models in Chapter 1 and the tools stated above we are able to prove existence- and non-existence results of tight immersions of surfaces in  $CES$ . We show in theorem 3.1 and theorem 3.7 that all orientable surfaces and all non-orientable surfaces with even Euler characteristic less than zero admit a tight immersion in any  $CES$ . Theorem 3.8 proves the existence of a tight immersion of all surfaces with odd Euler characteristic less than  $-3$  in any  $CES$  while theorem 3.3 deals with the Klein bottle: existence of a tight immersion in all  $CES$  but the three-torus and one other orientable  $CES$  is proved. The projective plane with two handles admits at least a tight polyhedral immersion in any  $CES$  as it is shown in theorem 3.10. Theorem 3.20, theorem 3.18 and theorem 3.19 prove the non-existence of tight immersions of the projective plane in any  $CES$  and of the Klein bottle in the three-torus and in the third orientable  $CES$ . The only open cases are therefore the existence- or nonexistence of tight immersions of the projective plane with one handle and a smooth tight immersion of the projective plane with two handles in any  $CES$ . All the proved results are collected in the

---

following diagram. The statements hold for maps –smooth or polyhedral– unless stated otherwise.

surface \ $CES$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_4$	$\Gamma_5$	$\Gamma_6$	$\mathfrak{B}_i$	proved in
sphere embedding immersion	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	theorem 3.1 remark 3.2
projective plane	/	/	/	/	/	/	/	theorem 3.20
torus embedding immersion	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	theorem 3.1 remark 3.12
Klein bottle embedding immersion	/	✓	/	?	?	✓	✓	theorem 3.3/3.19/Cor. 3.18 remark 3.5/Cor. 3.18
$\chi = -1$	?	?	?	?	?	?	?	
$\chi < 0$ even (non-or.) embedding immersion	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	theorem 3.7 theorem 3.7
$\chi < 0$ (orientable) embedding immersion	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	theorem 3.1 remark 3.12
$\chi = -3$ polyhedral immersion	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 3.10
$\chi = -3$ differentiable	?	?	?	?	?	?	?	
$\chi \leq -5$ odd immersion	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 3.8

For compact surfaces, the  $TPP$  is closely related to the study of critical points of height functions. It follows that a surface has the  $TPP$  if and only if no height function restricted to the surface has more than one strict local maximum. We extend this characterisation in Chapter 4 to immersions of surfaces in  $CES$ . Because there is no height function in the classical sense it is not allowed to use the existing Morse theory. That is why we have to find a modified notion of height functions in our case as we do in Definition 4.21:

**Definition:** Let  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  be a ( $C^\infty$ ) immersion of a compact surface  $M$  in a  $CES$ .

For given  $e \in S^2$  and point  $p \in f(M)$  the local height function  $h_{e,p}$  is defined as follows

$$h_{e,p} : f(M) \supset U_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U_p \ni q \mapsto \langle q, e \rangle,$$

where  $U_p$  is a sufficiently small neighbourhood of  $p$ .

With this definition it is possible to characterize tightness in terms of height functions in our case (see theorem 4.25).

**Theorem:** *An immersion  $f$  is tight if and only if the local height function  $h_{e,p}$  has no maximum (minimum) for almost every  $e$ .*

We prove further a special version of the index theorem of Hopf for tight immersions in *CES* with the help of the classical theorem of corse:

**Theorem:** *Let  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  be a tight and differentiable ( $C^\infty$ ) immersion of a compact surface  $M$  with  $\chi(M) \leq 0$  in the 3-torus. Let  $h_{e,p}$  be the local height function and  $X = \text{grad}h_{e,p}$  the gradient vectorfield of  $h_{e,p}$ .*

*Then the following holds for almost every  $e \in S^2$*

$$\sharp \text{ Singularities of } X = \tau(M).$$

This leads directly to another equivalent formulation of tightness in our case. We only have to assume that all singularities of  $X$  have index one.

**Theorem:** *Let  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  be a differentiable ( $C^\infty$ ) immersion of a compact surface  $M$  with  $\chi(M) \leq 0$  in the 3-torus. Let  $h_{e,p}$  be the local height function and  $X = \text{grad}h_{e,p}$  the gradient vectorfield of  $h_{e,p}$ .*

*Then  $f$  is tight if and only if all singularities of  $X$  have index one for almost every  $e \in S^2$ .*

In Chapter 5 we generalize the notion of tightness in *CES* to immersions of surfaces *with boundary* in these space forms.

After the definition of the total and the total absolut curvature we define tight immersions of surfaces with boundary as follows:

**Definition:** *An immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  of a compact surface  $M$  with boundary  $\partial M$  in a *CES* is called tight, if the following holds*

$$\tau(M, \partial M) = |t(M, \partial M)|,$$

*i.e.  $f$  is tight if the total absolute curvature is equal to the absolute value of the total curvature of  $(M, \partial M)$ .*

Because the Gauss-Bonnet theorem is valid for surfaces with boundary it also follows that a surface with boundary is tight if and only if the total absolute curvature is equal to the absolute value of the Euler characteristic of  $(M, \partial M)$ .

Tight immersions of surfaces without boundary are defined as immersions with minimal total absolute curvature. This also holds for surfaces with boundary as the following theorem shows.

**Theorem:** *The following holds for the total absolute curvature  $\tau(M, \partial M)$  of an immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  of a compact surface  $M$  with boundary in a CES:*

$$\tau(M, \partial M) \geq |\chi(M, \partial M)|.$$

*An immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  of a compact surface  $M$  with boundary in a CES is therefore tight if and only if its total absolute curvature is minimal.*

Now we are able to prove existence and non-existence results of tight immersions of surfaces with boundary in CES. The methods are similar to the ones in the case without boundary.

We prove in theorem 5.8 the existence of a tight immersion of all orientable surfaces homeomorphic to the sphere with a number of disjoint open discs (at least one) removed in any CES. The same is true for surfaces homeomorphic to a surface of non-positive Euler-characteristic with any number of disjoint discs removed as we show in theorem 5.17.

In theorem 5.12 we show the existence of tight immersions of the projective plane with more than two handles and any number of disjoint discs removed in any CES and the existence of tight immersions of the projective plane with any number of handles and any number of disjoint discs removed in eight of the ten CES.

Non-existence of a tight immersion of the Moebiusstrip in the 3-torus is proved in theorem 5.15. This follows directly from the non-existence proof of a tight Klein bottle in the 3-torus.

Finally we show in theorem 5.21 that there exist tight immersions of surfaces homeomorphic to a non-orientable surface with even Euler-characteristic with any number of disjoint discs removed in any CES whereas the genus has to be greater than one for two of the orientable CES.

All the proved results are collected in the following diagram. The statements hold

---

for differentiable maps in this case but they can easily be proved for polyhedral ones.

surface \ $CES$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_4$	$\Gamma_5$	$\Gamma_6$	$\mathfrak{B}_i$	proved in
sphere	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 5.8
Möbiusstrip	/	✓	/	✓	✓	✓	✓	theorem 5.15, 5.16 and 5.12
torus	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 5.17
Klein bottle	?	✓	?	✓	✓	✓	✓	theorem 5.21
$\chi = 1$ $n > 1$	?	✓	?	✓	✓	✓	✓	theorem 5.12
$\chi = -1$ and $\chi = -3$	?	✓	?	✓	✓	✓	✓	theorem 5.12
$\chi < -3$ odd	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 5.12
$\chi = -2$ even (non-or.)	?	✓	?	✓	✓	✓	✓	theorem 5.21
$\chi < -2$ even (non-or.)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 5.21
$\chi < 0$ (orientable)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	theorem 5.17

The diagram has to be read as follows. If nothing else is said the statements hold for any number  $n$  of disjoint discs removed from the compact surfaces in column one. We proved more in Chapter 5. Especially we differ between embeddings and immersions which are no embeddings. But if we would take this into account the diagram would get unreadable.

We want to mention that we proved the existence of tight immersions of orientable surfaces with one boundary component in any  $CES$ . It is an unproved conjecture for Euclidean three-space that no such immersion exists (see [70]).

In Chapter 6 we generalize the theory of tight immersions of compact surfaces in  $CES$  to immersions of compact surfaces in higher dimensional Euclidean space forms. Because the  $n$ -torus is an Euclidean space form in every dimension we look at this case only. So we only take into consideration immersions

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma$$

where  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$  and  $M$  is a compact surface without boundary.

Of course we only want to look at substantial immersion which means that the image doesn't lie in a lower dimensional subspace.

Because the codimension is greater than one, we have to define the total absolute curvature and the total curvature as it done classically by replacing the Gauss curvature by the Lipschitz-Killing curvature.

Now we are able to define tight immersions in this case.

**Definition:** *An immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  of a compact surface  $M$  in a  $n$ -dimensional Euclidean space form is called tight if the total absolute curvature is equal to the absolute value of the total curvature.*

With the Gauss-Bonnet formula it follows directly that such an immersion is therefore tight if and only if the total absolute curvature is equal to the absolute value of the Euler-Characteristic of the surface.

With these definitions we are able to prove existence results of tight immersions of compact surfaces in the  $n$ -torus. We do this by giving an example of a tight and substantial embedding of the torus with one handle in the 4-cube and iterate this construction in the orientable case in the proof of theorem 6.5. The type of the construction can be used to produce non-orientable examples also as we do in the corollaries 6.6, 6.7 and 6.8. The only thing is that the surfaces have to have higher genus.

All the proved results are collected in the following diagram. The statements have to be read as existence of tight maps of the given type in the  $n$ -torus if the compact surface in column one has the given Euler-characteristic.

surface/space form	$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$		
orientable proved in	$\chi \leq 2 - 2(n - 2)$ theorem 6.5	smooth, polyhedral	embedding, immersion
non-orientable $\chi$ even proved in	$\chi \leq 2 - 2(n - 1)$ corollary 6.6	smooth, polyhedral	immersion
non-orientable $\chi$ odd proved in	$\chi \leq 1 - 2n$ corollary 6.7	smooth, polyhedral	immersion
$\chi = 3 - 2n$ proved in	$\chi = 3 - 2n$ corollary 6.8	polyhedral	immersion





# Kapitel 1

## Kompakte euklidische Raumformen

In diesem Kapitel werden die kompakten euklidischen Raumformen definiert und die dreidimensionalen, welche im Folgenden mit  $ERF$  bezeichnet werden, klassifiziert. Außerdem werden die zu den jeweiligen  $ERF$  gehörenden Modelle vorgestellt und diskutiert.

**Definition 1.1.** *Die dreidimensionalen, kompakten euklidischen Raumformen ( $ERF$ ) sind die Quotienten des  $\mathbb{R}^3$  nach torsionsfreien kristallografischen Gruppen  $\Gamma \subset \mathbf{E}(\mathbf{n})$ .*

Eine torsionsfreie kristallografische Gruppe  $\Gamma$  ist eine diskrete Untergruppe der euklidischen Bewegungsgruppe  $\mathbf{E}(\mathbf{n})$  mit der Eigenschaft, dass der Quotient  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  kompakt ist und sie keine Elemente endlicher Ordnung besitzt.

**Definition und Satz 1.2.** *Sei  $\Gamma$  eine kristallografische Gruppe. Dann existiert eine kompakte Teilmenge  $\mathfrak{F}$  des  $\mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft*

$$\Gamma(\mathfrak{F}) = \mathbb{R}^n$$

*und die Mengen  $\gamma_1\mathfrak{F}$  und  $\gamma_2\mathfrak{F}$  schneiden einander für alle  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , höchstens in Teilmengen der Ränder von  $\gamma_1\mathfrak{F}$  bzw.  $\gamma_2\mathfrak{F}$ . Die Teilmenge  $\mathfrak{F}$  wird als Fundamentalbereich der Gruppe  $\Gamma$  bezeichnet.*

Ein Beweis des Satzes ist beispielsweise in [45, Seite 53] zu finden.

**Satz 1.3.** *Im Fall kompakter euklidischer Raumformen (orientierbar und auch nichtorientierbar) kann der Fundamentalbereich der torsionsfreien kristallografischen Gruppe  $\Gamma$  mit der euklidischen Raumform  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  identifiziert werden.*

*Beweis:* Man hat die in Definition 1.2 angegebenen Eigenschaften des Fundamentalbereichs einer kristallografischen Gruppe für den Quotienten  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  nachzuweisen.

Die Kompaktheit von  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  folgt ebenso direkt aus der Definition einer kristallografischen Gruppe (Uniformität), wie die Tatsache, dass sich die Mengen  $\gamma_1(\mathbb{R}^n/\Gamma)$  und  $\gamma_2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$  für alle  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , höchstens in Teilmengen der Ränder von  $\gamma_1(\mathbb{R}^n/\Gamma)$  bzw.  $\gamma_2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$  schneiden (eigentliche Diskontinuität). Außerdem gilt offensichtlich  $\Gamma(\mathbb{R}^n/\Gamma) = \mathbb{R}^n$ , womit der Quotient  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  die letzte geforderte Eigenschaft eines Fundamentalbereichs erfüllt.  $\square$

Anschließend an Ergebnisse von Bieberbach ([12], [13]) und Hopf ([40]) wurden die *ERF* von Hantzsche und Wendt Mitte der dreißiger Jahre in [38] klassifiziert, mit dem Resultat, dass es in Dimension drei nur sechs orientierbare und vier nichtorientierbare euklidische Raumformen gibt.

In folgendem Satz wird die Klassifikation der *ERF* zusammengefasst und die konkrete Darstellung der Gruppen angegeben.

**Satz 1.4.** *Es gibt nur sechs **orientierbare**, kompakte euklidische Raumformen der Dimension drei. Sie sind die Quotienten des  $\mathbb{R}^3$  mit den folgenden Gruppen  $\Gamma_i$ ,  $i = 1 \dots 6$ , wobei  $\Theta$  die zur jeweiligen Gruppe  $\Gamma_i$  gehörende Drehgruppe bezeichnet.*

**Die Gruppe  $\Gamma_1$ :**

$\Theta = \{1\}$ , wobei  $\Gamma_1$  durch drei beliebige linear unabhängige Translationen  $t_1, t_2, t_3$  erzeugt wird.

Die definierenden Relationen der Gruppe  $\Gamma_1$  sind:

$$t_i t_k = t_k t_i \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

**Die Gruppen  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_5$ :**

$\Theta = \mathbb{Z}_n$  ( $n = 2, 3, 4, 6$ ), wobei jede Gruppe  $\Gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, 5$ , durch drei Translationen  $t_1, t_2, t_3$  und eine Schraubung  $\gamma$  um den Schraubwinkel  $2\pi/n$  erzeugt wird.

Die Translationen  $t_1$  und  $t_2$  erzeugen dabei ein in der  $xy$ -Ebene gelegenes Gitter, das für  $n=2$  beliebig, für  $n=3, 6$  hexagonal und für  $n=4$  quadratisch ist.

Die Translation  $t_3$  verschiebt die  $z$ -Achse um die Längeneinheit, während  $\gamma$  die  $z$ -Achse (bzw. eine Parallele dazu) als Schraubachse mit der Verschiebungslänge  $1/n$  und dem Schraubwinkel  $2\pi/n$  besitzt.

Die definierenden Relationen sind:  $(i, k=1, 2, 3)$

---

**Die Gruppe  $\Gamma_2$  :**

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= t_3, \\ \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_1^{-1}, \quad \gamma t_2 \gamma^{-1} = t_2^{-1}, \quad \gamma t_3 \gamma^{-1} = t_3, \\ t_i t_k &= t_k t_i, \end{aligned}$$

**Die Gruppe  $\Gamma_3$  :**

$$\begin{aligned} \gamma^3 &= t_3, \\ \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_2, \quad \gamma t_2 \gamma^{-1} = t_1^{-1} t_2^{-1}, \quad \gamma t_3 \gamma^{-1} = t_3, \\ t_i t_k &= t_k t_i, \end{aligned}$$

**Die Gruppe  $\Gamma_4$  :**

$$\begin{aligned} \gamma^4 &= t_3, \\ \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_2, \quad \gamma t_2 \gamma^{-1} = t_1^{-1}, \quad \gamma t_3 \gamma^{-1} = t_3, \\ t_i t_k &= t_k t_i, \end{aligned}$$

**Die Gruppe  $\Gamma_5$  :**

$$\begin{aligned} \gamma^6 &= t_3, \\ \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_2, \quad \gamma t_2 \gamma^{-1} = t_1^{-1} t_2, \quad \gamma t_3 \gamma^{-1} = t_3, \\ t_i t_k &= t_k t_i. \end{aligned}$$

(Auf die nähere Beschreibung der Gruppenwirkungen dieser fünf Gruppen wird nicht näher eingegangen. Der Leser sei hierzu auf die Originalliteratur ([38]) bzw. auf die in moderner Notation gehaltenen Zusammenfassung in [74] verwiesen.)

**Die Gruppe  $\Gamma_6$  :**

$\Theta = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , wobei  $\Gamma_6$  von drei Translationen  $t_1, t_2, t_3$  und drei Schraubungen  $\alpha, \beta, \gamma$  erzeugt wird.

Die Translationen verschieben die  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse um die Längeneinheit. Die Schraubungen  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$  besitzen Schraubachsen parallel zur  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse, den Schraubwinkel  $\pi$  und die Ganghöhe  $1/2$ .

Die definierenden Relationen sind:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= t_1, \quad \beta^2 = t_2, \quad \gamma^2 = t_3, \quad \gamma \beta \alpha = t_1 t_3, \\ \alpha t_1 \alpha^{-1} &= t_1, \quad \alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}, \quad \alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}, \\ \beta t_1 \beta^{-1} &= t_1^{-1}, \quad \beta t_2 \beta^{-1} = t_2, \quad \beta t_3 \beta^{-1} = t_3^{-1}, \\ \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_1^{-1}, \quad \gamma t_2 \gamma^{-1} = t_2^{-1}, \quad \gamma t_3 \gamma^{-1} = t_3, \\ t_i t_k &= t_k t_i \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Die Lage der Achsen und die Translationsrichtungen sind Abbildung 1.8 zu entnehmen.

Es gibt nur vier **nichtorientierbare**, kompakte euklidische Raumformen der Dimension drei. Sie sind die Quotienten des  $\mathbb{R}^3$  mit untenstehenden Gruppen  $\mathfrak{B}_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ . Hierbei bezeichnet  $S$  eine Gleitspiegelung mit Gleitspiegelebene  $S_p$  und  $\gamma$  eine Schraubung in Richtung der Translation  $t_2$ .

**Die Gruppe  $\mathfrak{B}_1$ :**

Die Translationen  $t_1$  und  $t_2$  erzeugen in der Gleitspiegelebene  $Sp$  ein Parallelogrammgitter. Die Translation  $t_3$  verschiebt senkrecht zur Gleitspiegelebene  $Sp$  um eine Längeneinheit.

Die definierenden Relationen von  $\mathfrak{B}_1$  sind:

$$\begin{aligned} S^2 &= t_1, \\ St_1S^{-1} &= t_1, \quad St_2S^{-1} = t_2, \quad St_3S^{-1} = t_3^{-1}, \\ t_it_j &= t_jt_i \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Abbildung 1.1 ist die Gruppenwirkung zu entnehmen.

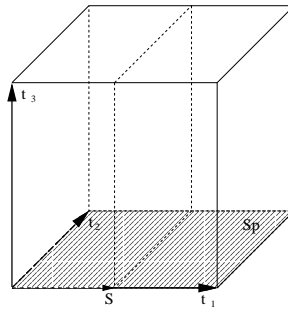


Abbildung 1.1: Gruppenwirkung von  $\mathfrak{B}_1$

**Die Gruppe  $\mathfrak{B}_2$ :**

Die Translationen  $t_1$  und  $t_2$  erzeugen in der Gleitspiegelebene  $Sp$  der Gleitspiegelung  $S$  ein Parallelogrammgitter. Der Endpunkt des Vektors von  $t_3$  projiziert sich orthogonal auf  $Sp$  in den Mittelpunkt des Bodenparallelogramms.

Die definierenden Relationen von  $\mathfrak{B}_2$  sind:

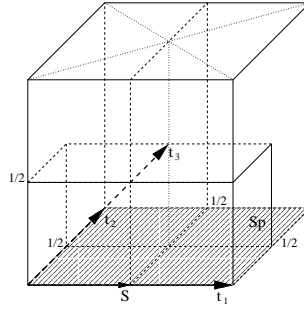
$$\begin{aligned} S^2 &= t_1, \\ St_1S^{-1} &= t_1, \quad St_2S^{-1} = t_2, \quad St_3S^{-1} = t_1t_2t_3^{-1}, \\ t_it_j &= t_jt_i \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Abbildung 1.2 ist die Gruppenwirkung zu entnehmen.

**Die Gruppe  $\mathfrak{B}_3$ :**

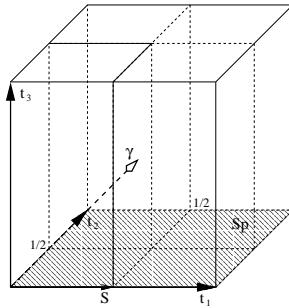
Die Translationen  $t_1, t_2, t_3$  erzeugen ein orthogonales Gitter.

Die definierenden Relationen von  $\mathfrak{B}_3$  sind:

Abbildung 1.2: Gruppenwirkung von  $\mathfrak{B}_2$ 

$$\begin{aligned}
 S^2 &= t_1, & S\gamma S^{-1} &= t_1\gamma, \\
 St_1 S^{-1} &= t_1, & St_2 S^{-1} &= t_2, & St_3 S^{-1} &= t_3^{-1}, \\
 \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_1^{-1}, & \gamma t_2 \gamma^{-1} &= t_2, & \gamma t_3 \gamma^{-1} &= t_3^{-1}, \\
 \gamma^2 &= t_2, & t_i t_j &= t_j t_i & (i, j &= 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

Abbildung 1.3 ist die Gruppenwirkung zu entnehmen.

Abbildung 1.3: Gruppenwirkung von  $\mathfrak{B}_3$ 

#### Die Gruppe $\mathfrak{B}_4$ :

Die Translationen  $t_1, t_2, t_3$  erzeugen ein Rechkantgitter.

Die definierenden Relationen von  $\mathfrak{B}_4$  sind:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= t_1, & S\gamma S^{-1} &= t_1 t_3^{-1} \gamma, \\
 St_1 S^{-1} &= t_1, & St_2 S^{-1} &= t_2, & St_3 S^{-1} &= t_3^{-1}, \\
 \gamma t_1 \gamma^{-1} &= t_1^{-1}, & \gamma t_2 \gamma^{-1} &= t_2, & \gamma t_3 \gamma^{-1} &= t_3^{-1}, \\
 \gamma^2 &= t_2, & t_i t_j &= t_j t_i & (i, j &= 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

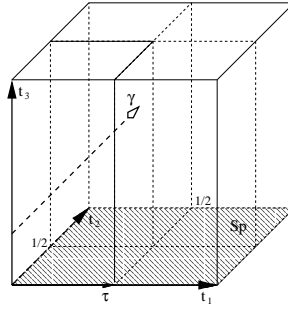
Abbildung 1.4: Gruppenwirkung von  $\mathfrak{B}_4$ 

Abbildung 1.4 ist die Gruppenwirkung zu entnehmen.

Die sechs orientierbaren *ERF* seien im Folgenden mit  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1, \dots, \mathbb{R}^3/\Gamma_6$ , die vier nichtorientierbaren mit  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1, \dots, \mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_4$  bezeichnet. Sind alle *ERF* gemeint, wird vereinfachend  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  geschrieben.

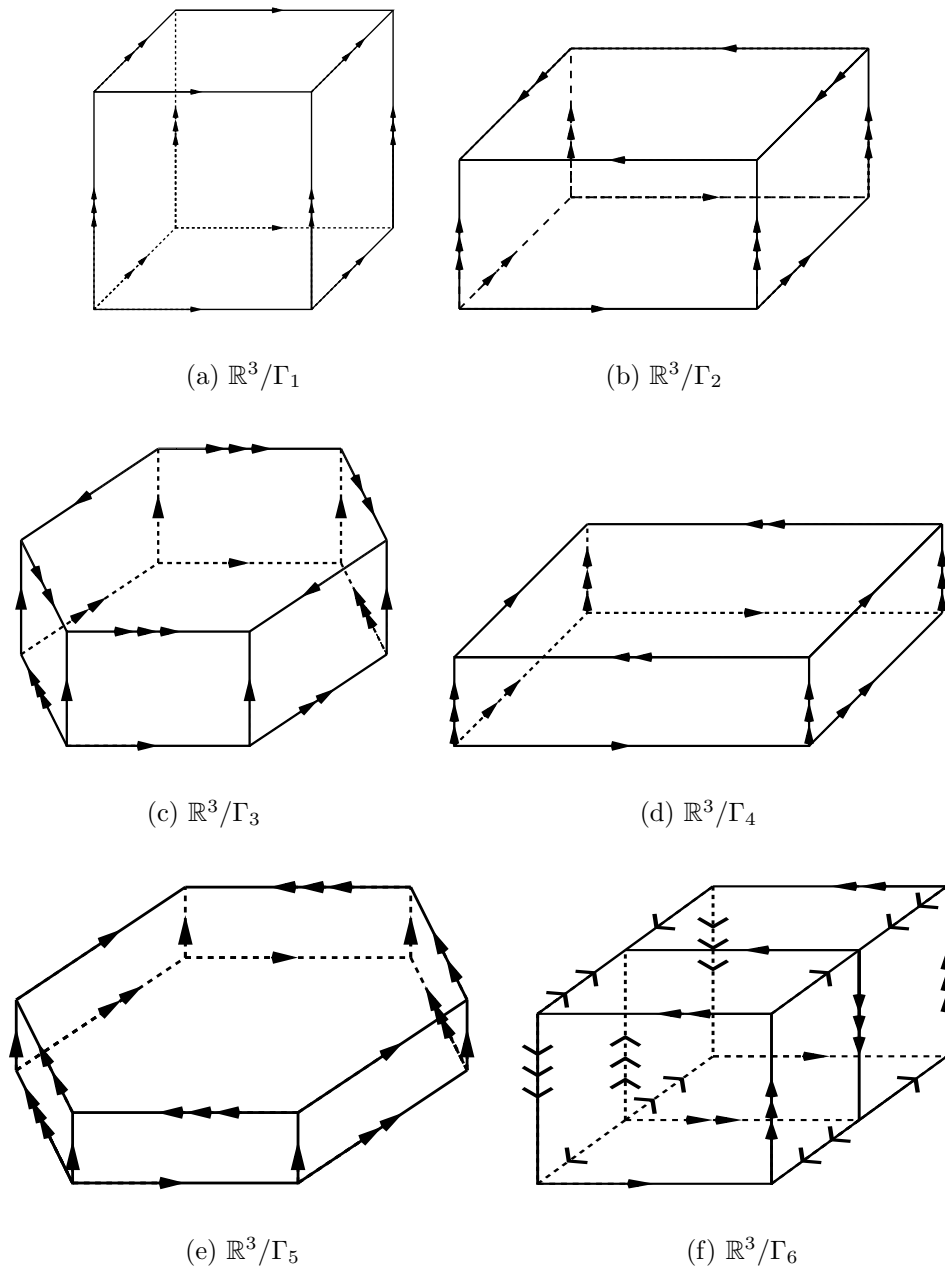
## 1.1 Modelle der *ERF*

Dieser Abschnitt stellt Modelle der *ERF* vor und diskutiert ausführlich deren Bestimmung.

Nach Satz 1.3 sind mit den Fundamentalbereichen der Gruppen aus Satz 1.4 die *ERF* gegeben und diese sind geeignete Modelle derselben bzw. sind mit diesen zu identifizieren.

Die Fundamentalbereiche werden im Folgenden vorgestellt. Abbildung 1.5 zeigt die orientierbaren *ERF*, während in Abbildung 1.6 die nichtorientierbaren *ERF* dargestellt sind. Die Pfeile markieren die Art und Weise, wie die Kanten miteinander identifiziert sind. Diese Identifikationen induzieren dann die Identifikationen der Seiten, indem nur solche identifiziert werden, deren Kanten dies auch erlauben.

In diesem Zusammenhang sei auf [61] verwiesen. Dort ist eine andere Art der Darstellung zu finden.

Abbildung 1.5: Modelle der orientierbaren *ERF* als Fundamentalbereiche der  $\Gamma_i$

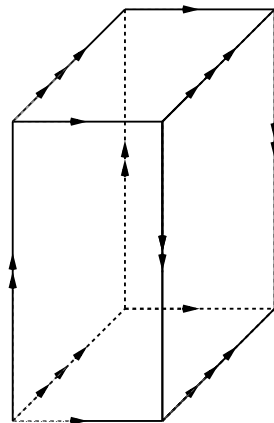
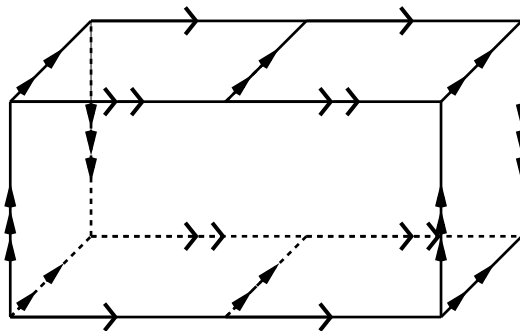
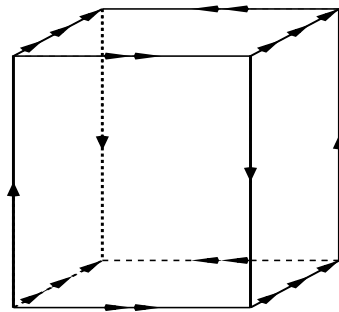
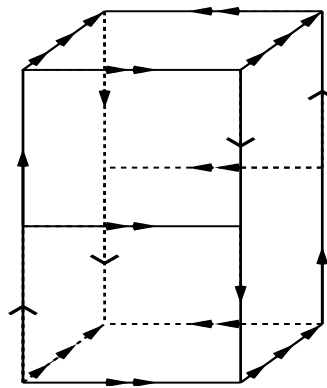
(a)  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ (b)  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_2$ (c)  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_3$ (d)  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_4$ 

Abbildung 1.6: Modelle der nichtorientierbaren *ERF* als Fundamentalbereiche der  $\mathfrak{B}_j$



## 1.2 Bestimmung der Fundamentalbereiche

Anhand des Beispiels  $\Gamma_6$  soll die Vorgehensweise zur Bestimmung des Fundamentalbereichs einer solchen kristallografischen Gruppe aufgezeigt werden.

Satz 1.4 liefert die erzeugenden Elemente und Relationen der Gruppe, wobei die Lage der Schraubachsen und der Translationen in Abbildung 1.7 (siehe [49]) zu sehen ist. Die Translationen werden in dieser Gruppe jeweils als erstes identifi-

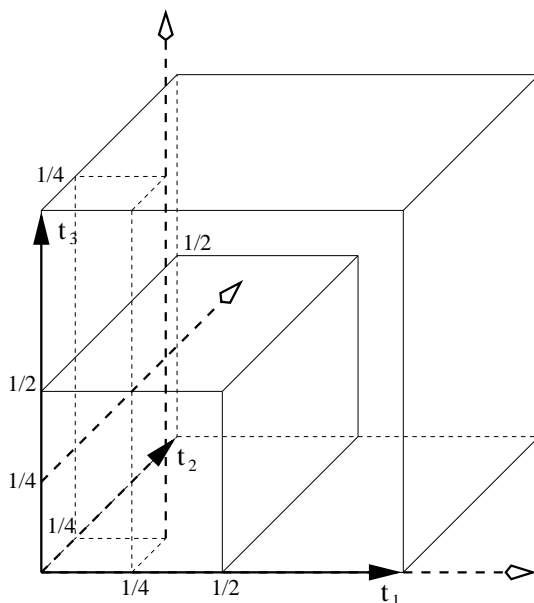


Abbildung 1.7: Lage der Schraubachsen in der Gruppe  $\Gamma_6$

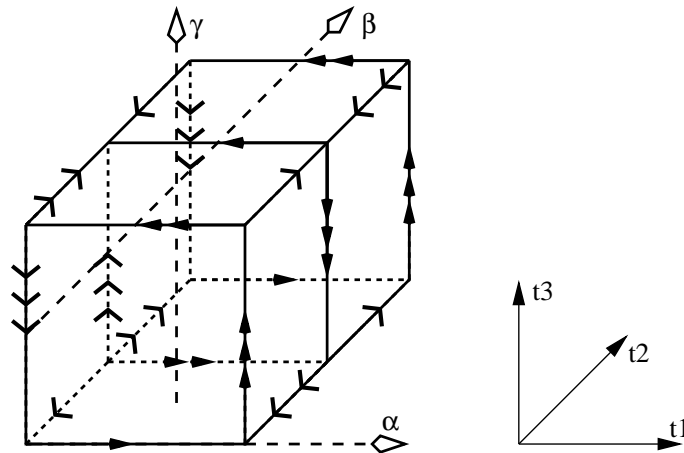
ziert. Der Fundamentalbereich ist damit eine Teilmenge des Einheitswürfels und

$$\Theta = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ist die verbleibende, auf dem Einheitswürfel operierende Gruppe, denn

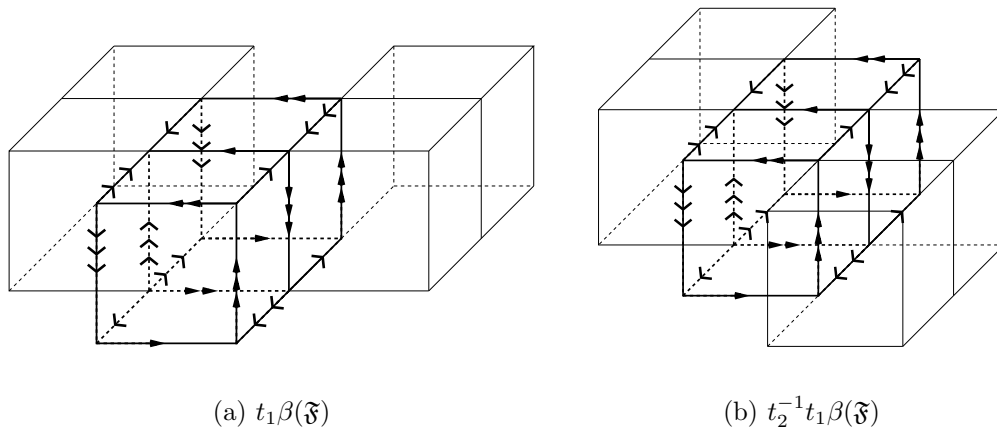
$$\Gamma_6/\text{Translationen} \cong \Theta.$$

Man hat demnach noch drei nichttriviale Elemente, genauer also die drei verschiedenen Schraubungen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Um einzusehen, dass es sich bei dem in Abbildung 1.5(f) dargestellten Bereich tatsächlich um den Fundamentalbereich von  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  handelt, wird Abbildung 1.8 betrachtet. Sie zeigt eine Teilmenge des Einheitswürfels, welche im Folgenden mit  $\mathfrak{F}$  bezeichnet wird. Man hat nun zu zeigen, dass die drei verbleibenden nicht trivialen Elemente jeden inneren Punkt

Abbildung 1.8: Fundamentalbereich von  $\Gamma_6$  mit Schraubachsen

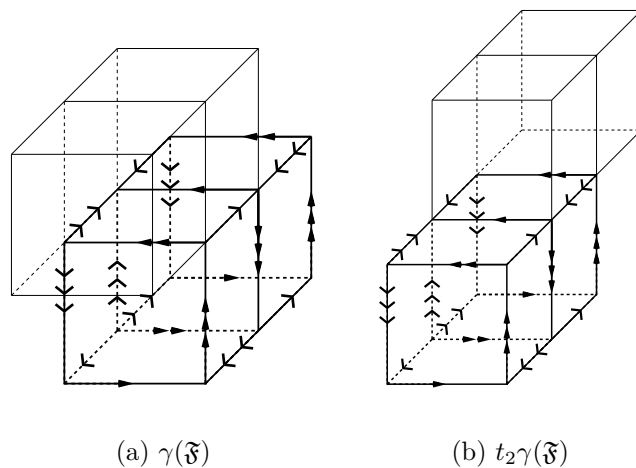
von  $\mathfrak{F}$  aus diesem herausbewegen und Schnitte nur im Rand auftreten. Es wird sich zeigen, dass die Bahnen von  $\mathfrak{F}$  den Einheitswürfel ausfüllen. Damit ist offensichtlich, dass die Bahn von  $\mathfrak{F}$  unter  $\Gamma_6$  den ganzen  $\mathbb{R}^3$  überdeckt.

Abbildung 1.9 zeigt die Wirkung von  $\beta$  auf  $\mathfrak{F}$ , wobei die Translationen angegeben sind, welche  $\mathfrak{F}$  wieder ‘in den Würfel’ hineinbewegen (wegen der Identifikation der Translationen). Man sieht leicht, dass damit der untere Teil des Einheitswürfels

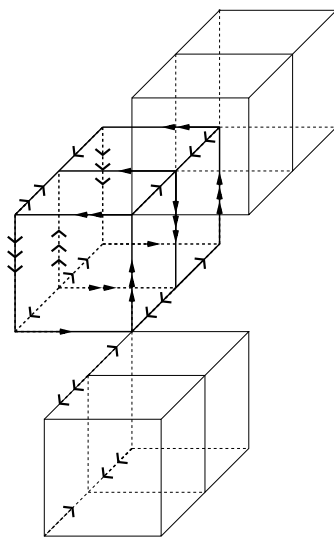
(a)  $t_1\beta(\mathfrak{F})$ (b)  $t_2^{-1}t_1\beta(\mathfrak{F})$ Abbildung 1.9: Wirkung von  $\beta$  auf  $\mathfrak{F}$ 

überdeckt ist.

Auch die obere Hälfte wird durch die Bahn von  $\mathfrak{F}$  unter den Schraubungen überdeckt. Man betrachte Abbildung 1.10. Diese veranschaulicht die Wirkung von  $\gamma$  auf  $\mathfrak{F}$ . Modulo den Translationen wird durch diese Schraubung der linke obere

Abbildung 1.10: Wirkung von  $\gamma$  auf  $\mathfrak{F}$ 

Teil des Würfels überdeckt. Abbildung 1.11 entnimmt man die Überdeckung des letzten Viertels des Würfels durch die Wirkung von  $\alpha$  auf  $\mathfrak{F}$  modulo Translationen. In diesem Bild ist auch die Identifizierung der Kanten am Beispiel einer Kante dargestellt. Die Identifikationen der anderen Kanten ergeben sich analog und sind den vorherigen Abbildungen zu entnehmen.

Abbildung 1.11:  $t_3 t_2 \alpha(\mathfrak{F})$ 

Offensichtlich ist

$$\Theta(\mathfrak{F}^\circ) \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$


---

wobei  $\mathfrak{F}^\circ$  die inneren Punkte von  $\mathfrak{F}$  bezeichnet. Weiter ist

$$\Theta(\partial\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{F} = \partial\mathfrak{F}$$

mit  $\partial\mathfrak{F}$  dem Rand von  $\mathfrak{F}$ .

Damit sind die Eigenschaften eines Fundamentalbereichs für  $\mathfrak{F}$  gezeigt, denn es gilt ebenfalls (siehe oben)

$$\Gamma_6(\mathfrak{F}) = \mathbb{R}^3.$$

---

# Kapitel 2

## Straffheit in $ERF$

Dieses Kapitel definiert, nach Einführung der benötigten Begriffe, die Straffheit sowohl von glatten, als auch von polyedrischen Immersionen kompakter Flächen in dreidimensionale, kompakte euklidische Raumformen und beweist äquivalente Formulierungen derselben. Anschließend werden die zum Beweis der Existenz- und Nichtexistenzaussagen über straffe Immersionen kompakter Flächen in  $ERF$  notwendigen Werkzeuge vorgestellt.

### 2.1 Grundlegende Definitionen

Eine Fläche  $M$  ist eine kompakte, zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

$M$  ist eingebettet in eine  $ERF$ , wenn sie homöomorph zu einer Teilmenge einer  $ERF$  ist.  $M$  ist immersiert durch eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$ , falls  $f$  lokal injektiv ist und die Ableitung von  $f$  maximalen Rang hat. Ist  $M$  in der Differenzierbarkeitsklasse  $C^\infty$ , spricht man von einer glatten Fläche. Dies ist zusammen mit einer  $C^\infty$ -Abbildung  $f$  eine glatte Immersion.

Die totale Absolutkrümmung  $\tau(M)$  einer glatten Fläche  $M$  ist definiert als

$$\tau(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| do,$$

wobei  $K$  die Gauß-Krümmung und  $do$  das Oberflächenelement der Fläche bezeichnet.

Eine polyedrische Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3/\Gamma$  ist eine eingebettete Fläche in eine  $ERF$ , so dass  $M$  die endliche Vereinigung endlich vieler ebener Polygone ist, wobei je zwei

keine inneren Punkte gemeinsam haben, ebensowenig, wie zwei nicht aneinandergrenzende Seiten keine Punkte gemeinsam haben. Aufgrund der M"oglichkeit zur Unterteilung kann man die Polygone immer als konvex ansehen. Das hei"ft, dass der Schnitt zweier solcher konvexer Polygone entweder leer, ein Punkt oder ein Geradenst"uck ist und dass der Schnitt zweier Kanten entweder leer oder eine Ecke ist. Analog spricht man von polyedrischen Immersionen von Fl"achen.

Die oben gegebene Definition der totalen Absolutkr"ummung ist f"ur polyedrische Fl"achen nat"urlich nicht g"ultig. Im Folgenden wird ein Analogon zu dieser Kr"ummung konstruiert, welche auf [20] (dieser Verweis geht auf [1] zur"uck) bzw. unabh"angig davon auf Brehm und K"uhnel ([17], [18]) zur"uckgeht.

In jeder Ecke  $v$  der polyedrischen Fl"ache, in welchen die gew"ohnliche Gau"ß-Kr"ummung nicht existiert, wird die polyedrische Kr"ummung  $K(v)$  folgenderma"Ben definiert

$$K(v) := 2\pi - \sum_i \alpha_i,$$

wobei die  $\alpha_i$  die Innenwinkel der Polygone an  $v$  bezeichnen.

Genau wie im glatten Fall gilt f"ur eine kompakte polyedrische Fl"ache  $M$  die Gau"ß-Bonnet-Gleichung f"ur die totale Kr"ummung  $\int_M K do$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K do := \frac{1}{2\pi} \sum_{v \in M} K(v) = \chi(M).$$

Es ist jedoch so, dass  $|K(v)|$  nicht als Analogon zur absoluten Gau"ß-Kr"ummung angesehen werden kann, denn es gibt z.B. einen "uberall flachen polyedrischen 2-Torus im  $\mathbb{E}^3$  (siehe [17]), so dass diese Absolutkr"ummung die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{v \in M} |K(v)| \geq 4 - \chi(M)$$

nicht erf"ullt.

Ein passendes Analogon zu  $|K|$  findet man in folgender Weise. Man definiert sich den positiven Kr"ummungsanteil  $K_+(v)$  durch

$$\begin{aligned} K_+(v) := & \text{Fl"acheninhalte der Menge der "au"ereren Einheitsnormalen } (\subseteq S^2), \\ & \text{senkrecht zu lokalen St"utzebenen von } M \text{ in } v \\ & \text{(es gilt selbstverst"andlich } 0 \leq K_+(v) \leq 2\pi), \end{aligned}$$

den negativen Kr"ummungsanteil  $K_-(v)$  durch

$$K_-(v) := K_+(v) - K(v)$$

und die absolute Krümmung  $K_*(v)$  einer polyedrischen Fläche als Summe der beiden:

$$K_*(v) := K_+(v) + K_-(v).$$

Für die positive Krümmung  $K_+(v)$  gilt (wie im glatten Fall):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{v \in M} K_+(v) \geq 2.$$

Ist  $v$  eine innere Ecke der konvexen Hülle ihrer Nachbarn, so ist  $K_+(v) = 0$ .

Mit  $K_*$  hat man nun das passende Analogon zur absoluten Gauß-Krümmung gefunden, denn es gilt für die totale Absolutkrümmung  $\tau(M)$  einer polyedrischen Fläche  $M$  im  $\mathbb{E}^3$

$$\tau(M) := \frac{1}{2\pi} \int_M K_* = \frac{1}{2\pi} \sum_{v \in M} K_*(v) \geq 4 - \chi(M)$$

in Analogie zum glatten Fall.

## 2.2 Straffheit in $ERF$

Die Straffheit einer immersierten Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum ist über die Minimalität der totalen Absolutkrümmung definiert. Mit anderen Worten wird eine Fläche straff genannt, wenn sie nur soviel Krümmung besitzt, wie ihr die Topologie vorschreibt. Dies soll auch für immersierte Flächen in  $ERF$  gelten.

Man stellt fest, dass die untere Schranke der totalen Absolutkrümmung in  $\mathbb{E}^3$  verschärft werden kann, denn es gibt immersierte Flächen  $M$  in  $ERF$ , für welche gilt

$$K(p) \equiv 0 \quad \text{für alle } p \in M \text{ (siehe Abbildung 2.1).}$$

Abbildung 2.1 zeigt einen flachen, glatten und polyedrischen 2-Torus in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  (zu den ebenen Modellen von Flächen siehe [33]), daher verschwindet auch seine totale Absolutkrümmung (glatt oder polyedrisch). Damit ist die untere Schranke für  $\tau(M)$  einer immersierten Fläche in eine  $ERF$  nicht zwei, sondern null, welche auch angenommen wird.

Der Satz von Gauß-Bonnet hängt nur von Größen der inneren Geometrie ab. Deshalb ist er auch in  $ERF$  gültig, und es gilt für eine glatte Fläche in einer  $ERF$ :

$$\tau(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| \, do \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_M K \, do \right| = |\chi(M)| \quad (2.1)$$

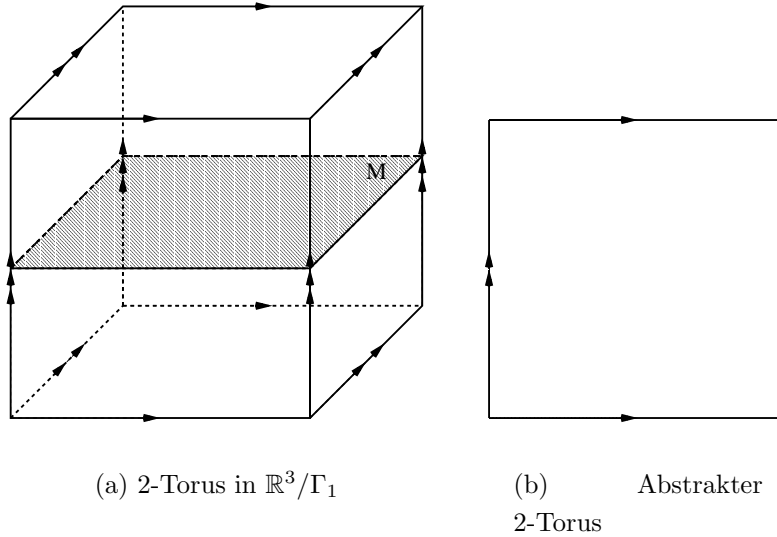


Abbildung 2.1: Beispiel einer Fläche überall verschwindender Krümmung

(Analog gilt für polyedrische Flächen  $M$ :

$$\tau(M) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v \in M} K_*(v) \geq |\chi(M)|. \quad (2.2)$$

Aus Abbildung 2.1 ersieht man, dass die Ungleichungen (2.1) und (2.2) scharf sind, und man ist nun in der Lage, Straffheit in *ERF* analog zum klassischen Fall zu definieren:

**Definition 2.1.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine glatte oder polyedrische Immersion einer Fläche  $M$  in eine *ERF*.  $f$  heißt *straff*, wenn folgende Gleichung gilt

$$\tau(M) = |\chi(M)|. \quad (2.3)$$

Diese Definition liefert fast unmittelbar ein geeignetes Werkzeug zur Überprüfung der Straffheit einer immersiiten Fläche in eine *ERF*:

**Folgerung 2.2.** Eine glatte bzw. polyedrische Fläche  $M$  ist genau dann *straff*, wenn die Gauß-Krümmung  $K$  von  $M$  ihr Vorzeichen nicht ändert bzw. für alle Ecken  $v \in M$  derselbe Krümmungsanteil (entweder  $K_+(v)$  oder  $K_-(v)$ ) verschwindet.

*Beweis:* Der Beweis wird zunächst für den glatten Fall durchgeführt. Es gelten folgende Äquivalenzen:



Nach Definition 2.3 ist  $M$  genau dann straff, wenn

$$\frac{1}{2\pi} \int_M |K| do = \tau(M) = |\chi(M)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_M K do \right|.$$

Dies gilt wiederum genau dann, wenn  $K$  das Vorzeichen nicht ändert.

Der Beweis lässt sich analog im polyedrischen Fall führen:

Die polyedrische Fläche  $M$  ist straff, d.h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K_* = \tau(M) = |\chi(M)| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{v \in M} K(v) \right|.$$

womit

$$\left| \sum_{v \in M} (K_+(v) - K_-(v)) \right| = \sum_{v \in M} (K_+(v) + K_-(v)).$$

Dies kann nur dann gelten, wenn einer der beiden Krümmungsanteile identisch für alle  $v \in M$  verschwindet.

Die Rückrichtung ist nun trivial.  $\square$

Offensichtlich folgt daraus, dass eine Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer Fläche  $M$  nichtpositiver Euler-Charakteristik  $\chi(M)$  genau dann straff ist, wenn kein Punkt  $p \in f(M)$  positiver Krümmung  $K(p)$  existiert. Ist  $\chi(M)$  positiv, ist  $f$  genau dann straff, wenn jeder Punkt aus  $f$  nichtnegative Krümmung besitzt. Dies gilt selbstverständlich sowohl für polyedrische als auch für glatte Immersionen. Im Fall negativer Euler-Charakteristik bedeutet Straffheit für polyedrische Immersionen, dass es in keiner Ecke eine lokale Stützebene gibt.

Die letzte äquivalente Formulierung der Straffheit in *ERF* folgt unmittelbar aus der Gleichheit in den Ungleichungen (2.1) bzw. (2.2). Sie wird später zur Definition straffer Flächen mit Rand herangezogen.

**Folgerung 2.3.** *Eine glatte bzw. polyedrische Fläche  $M$  ist genau dann straff, wenn die totale Absolutkrümmung der Fläche mit dem Betrag ihrer Totalkrümmung übereinstimmt.*

## 2.3 Tight surgery und tight smoothing

Um nun Existenz bzw. Nichtexistenz straffer Immersionen zu beweisen, benötigt man noch zwei Operationen: Die tight surgery und das straffe Glätten (tight smoothing).

---

Die tight surgery ist eine wohlbekannte Operation, mit Hilfe derer man Henkel in straffe Flächen  $M$  vom Geschlecht  $g(M)$  so einhängen kann, dass die resultierende Fläche  $N$  wieder straff mit Geschlecht  $g(N) = g(M) + 1$  ist. In der Literatur existiert noch keine Ausarbeitung, welche diesen Henkel 'in geschlossener Form' darstellt. Er wird immer beschrieben als der Teil eines Rotationstorus, auf dem die Gauß-Krümmung negativ ist. Im Folgenden soll demnach eine Kurve gefunden werden, welche eine horizontale (die  $x$ -Achse) und eine vertikale Gerade miteinander verbindet. Diese wird rotiert, und man erhält den Henkel als die daraus entstandene Drehfläche (genauer erhält man die Hälfte eines solchen Henkels, welcher durch Spiegelung vervollständigt werden kann). Dieser besteht nur aus Punkten nichtpositiver Krümmung.

Die Krümmung  $\kappa$  der gesuchten ebenen Kurve wird folgendermaßen vorgegeben:

$$\kappa(s) = \delta e^{\frac{-1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)}} = \delta e^{\frac{1}{s^2-1}}; \quad s \in (-1, 1),$$

wobei  $\delta$  eine noch zu bestimmende Konstante ist.

$$\kappa_{\mathbb{R}}(s) = \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq -1, \\ \kappa(s) & \text{falls } s \in (-1, 1), \\ 0 & \text{falls } s > 1 \end{cases}$$

ist eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $\mathbb{R}$ , denn die  $k$ -te Ableitung  $\kappa^{(k)}(s)$  ergibt sich zu

$$\kappa^{(k)}(s) = \delta e^{\frac{1}{s^2-1}} \left( \sum_{l=1}^k \frac{l!(-1)^{l+1}}{(s+1)^{l+1}} + \sum_{l=1}^k \frac{l!(-1)^l}{(s-1)^{l+1}} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die natürliche Gleichung der gesuchten ebenen Kurve ist:  $\kappa_{\mathbb{R}} = \kappa_{\mathbb{R}}(s)$ . Sei  $\alpha$  der Winkel zwischen Kurventangente und positiver  $x$ -Achse. Dann gilt

$$\alpha' = \kappa_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \alpha(s) = \int_{-1}^s \kappa_{\mathbb{R}}(\sigma) d\sigma.$$

Aus der Bedingung  $\alpha(1) = \pi/2$  bestimmt sich  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\pi}{2 \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{\sigma^2-1}} d\sigma}.$$

Damit hat man die folgende Parametrisierung der gesuchten ebenen Kurve:

$$x(s) = \int_{-1}^s \cos(\alpha(\sigma)) d\sigma; \quad y(s) = \int_{-1}^s \sin(\alpha(\sigma)) d\sigma.$$


---

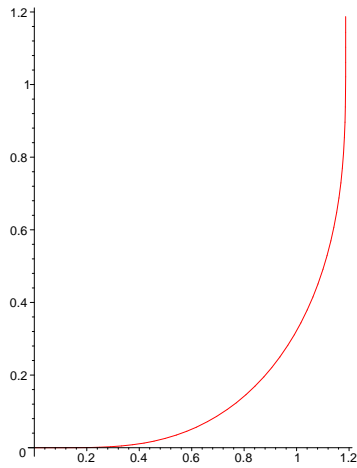
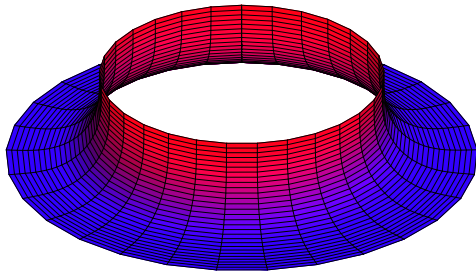


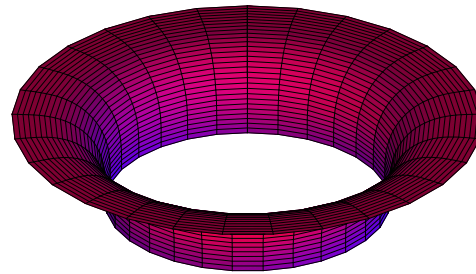
Abbildung 2.2: Der Meridian

Dieser Meridian ist in [Abbildung 2.2](#) zu sehen.

Rotiert man diese Kurve um eine geeignete Gerade parallel zur  $y$ -Achse, erhält man die Hälfte des gesuchten Henkels. Diese ist in [Abbildung 2.3 \(a\)](#) zu sehen. Es wurde um die Gerade  $x = 3$  gedreht.



(a) Drehfläche

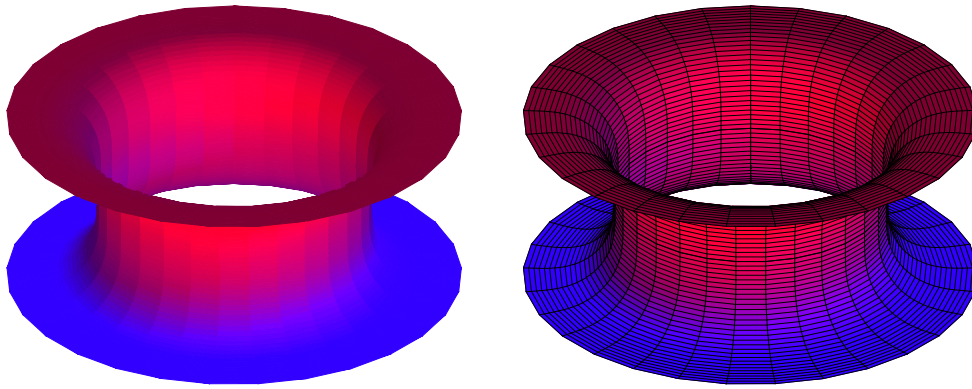


(b) gespiegelt

Abbildung 2.3: Der Henkel entsteht

Dieser muss abschließend noch an einer geeigneten Ebene parallel zur  $x, z$ -Ebene gespiegelt werden. Die gespiegelte Drehfläche ist in [Abbildung 2.3 \(b\)](#) dargestellt. Diese beiden Teile passen nach Konstruktion  $C^\infty$  zusammen. Das Resultat ist in [Abbildung 2.4](#) zu sehen.

Dieser 'straffe Henkel' kann jetzt in eine gelochte Ebene eingesetzt und durch einen Zylinder verlängert werden. Beispiele hierfür sind den [Abbildungen 2.5](#) und [2.6](#) zu entnehmen.

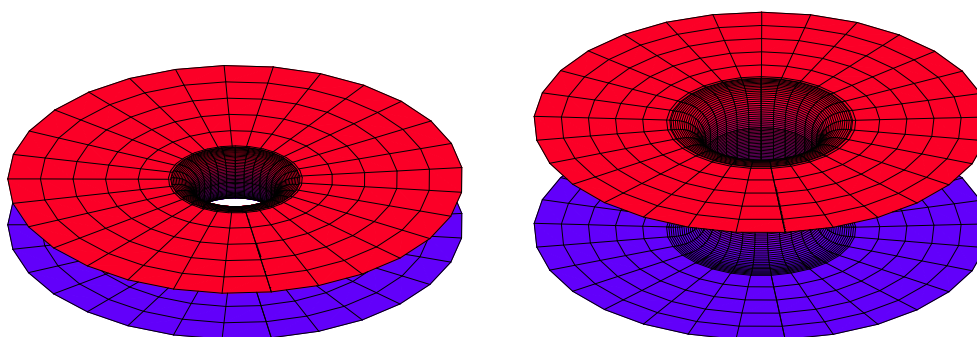


(a) Der Henkel

(b) Der Henkel

Abbildung 2.4: Der fertige Henkel

Das straffe Glätten (tight smoothing) geht auf Kühnel und Pinkall [50] zurück. In diesem Artikel wird gezeigt, dass eine straffe polyedrische Fläche so geglättet werden kann, dass die resultierende Fläche glatt und straff ist vom selben topologischen Typ. Dies ist möglich, wenn die Ecken der polyedrischen Fläche entweder Wertigkeit drei haben oder die dort definierten Standard-Sattel-Ecken sind (Wertigkeit ist vier, alle Winkel der Seiten an dieser Ecke sind strikt kleiner als  $\pi$  und es gibt keine lokale Stützebene durch diese Ecke). Schon in [18] wurde für das Glätten die Grundlage gelegt, indem von Brehm und Kühnel gezeigt wurde, dass eine jede polyedrische Fläche in  $\mathbb{E}^3$  in geeignetem Sinne durch glatte Flächen des selben topologischen Typs approximiert werden kann, so dass unter anderem die totale Absolutkrümmung 'konvergiert' (in einem geeigneten Sinne).



(a) Henkel verbindet zwei parallele Ebenen

(b) Henkel mit eingefügtem Zylinder verbindet zwei parallele Ebenen

Abbildung 2.5: Beispiele der tight surgery

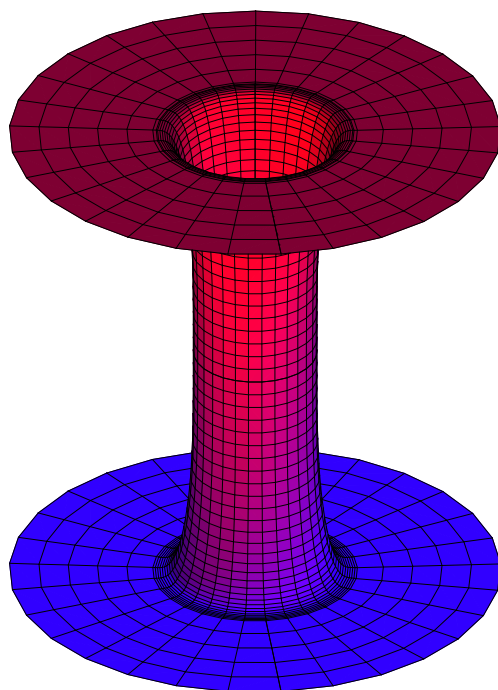


Abbildung 2.6: Henkel verbindet zwei parallele Ebenen



# Kapitel 3

## Straffe Flächen in $ERF$

In diesem Kapitel werden Existenz- und Nichtexistenzaussagen über straffe Immersionen –glatt oder polyedrisch– kompakter Flächen in  $ERF$  getroffen und bewiesen.

Es stellt sich heraus, dass alle orientierbaren und fast alle nichtorientierbaren Flächen in jede  $ERF$  straff immersierbar sind. Lediglich für die projektive Ebene und die Kleinsche Flasche kann die Nichtexistenz einer solchen Immersion in alle  $ERF$  bzw. in den 3-Torus und in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  gezeigt werden. Für die projektive Ebene mit zwei Henkeln ist nur eine polyedrische Immersion bekannt. Die Fragen nach einer glatten und straffen Immersion dieser Fläche, einer straffen Immersion der projektiven Ebene mit einem Henkel und einer straffen Immersion der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  bleiben unbeantwortet.

### 3.1 Existenzresultate

Folgender Satz liefert die Existenz einer straffen Einbettung jeder beliebigen orientierbaren Fläche, wie dies auch im  $\mathbb{E}^3$  richtig ist. Es bleiben keine offenen Fälle.

**Satz 3.1.** *Sei  $M$  eine orientierbare Fläche. Dann existiert eine straffe Einbettung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  in jede beliebige  $ERF$ .  $f$  kann glatt oder polyedrisch gewählt werden.*

*Beweisskizze:* Der Beweis soll hier lediglich skizziert werden. Für die Details sei auf [65] verwiesen.

Zunächst ist offensichtlich, dass jeder Rand eines konvexen Körpers, welcher vollständig im 'Inneren' der  $ERF$  liegt, eine straff eingebettete Sphäre ist, denn

in diesem Fall sind die Straffheitsbedingungen im  $\mathbb{E}^3$  und in den  $ERF$  identisch. Man betrachte die eingebettete Fläche in Abbildung 3.1.

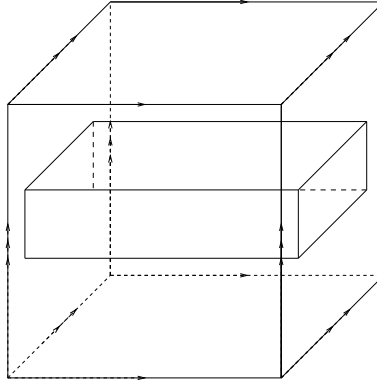


Abbildung 3.1: Straffe Einbettung des Torus in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine straffe Einbettung des Torus, da dieser lediglich aus parabolischen bzw. Flachpunkten besteht. Straffes Einhängen weiterer Henkel beweist den Satz im Falle des 3-Torus. Wegen der Existenz gegenüberliegender Seiten in jeder  $ERF$ , welche durch Translation miteinander identifiziert werden kann man die dargestellte Konstruktion auch in allen anderen  $ERF$  durchführen.  $\square$

*Bemerkung 3.2.* Im Fall, dass  $M$  eine Sphäre ist, stimmen der klassische und der hier vorliegende Fall überein. Man beachte jedoch, dass damit auch die Aussage: ‘Eine straffe Immersion einer Sphäre in  $\mathbb{E}^3$  ist tatsächlich eine Einbettung’ (siehe [29]) in keiner Weise auch für Immersionen in  $ERF$  gültig bleibt. Denn eine ‘runde Sphäre’, welche einen ‘größeren’ Durchmesser als der Fundamentaltbereich durchdringt sich selbst und bleibt straff.

Das Folgende behandelt den Fall nichtorientierbarer Flächen, wobei diese in verschiedene Klassen aufgeteilt werden und die Sätze separat für die einzelnen Klassen formuliert und bewiesen werden.

**Satz 3.3.** *Sei  $M$  die Kleinsche Flasche. Dann gibt es eine straffe Einbettung – glatt oder polyedrisch –  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  in jede nichtorientierbare  $ERF$  und eine Immersion – glatt oder polyedrisch –  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_i$ ,  $i = 2, 4, 5, 6$ . Handelt es sich bei der  $ERF$  um  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  oder  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$ , kann  $f$  als Einbettung gewählt werden.*

*Beweis:* Der Satz wird durch Angabe konkreter Einbettungen bzw. Immersionen gezeigt.



Zunächst wird die Kleinsche Flasche straff in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$  eingebettet und diese Einbettung auf alle anderen nichtorientierbaren *ERF* übertragen. Man betrachte die in Abbildung 3.2(a) dargestellte Fläche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ .

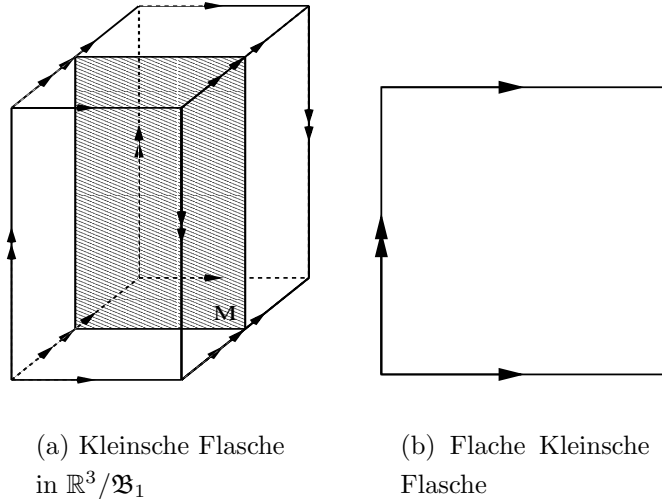


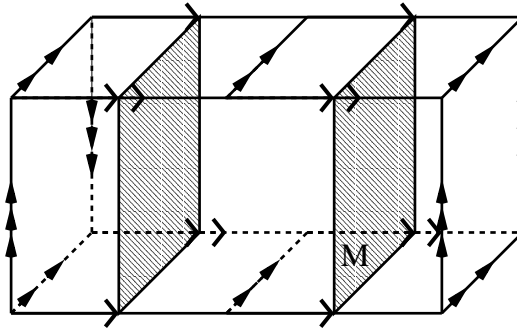
Abbildung 3.2: Straffe Einbettung der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$

Die immersierte Fläche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$  besteht offensichtlich nur aus Flachpunkten. Sie ist homöomorph zur Kleinschen Flasche, wie man aus Abbildung 3.2(b) ersehen kann, in welcher die Fläche mit den von der *ERF* induzierten Identifikationen dargestellt ist. Sie ist die aus der Topologie bekannte abstrakte, ebene Darstellung der Kleinschen Flasche, hier jedoch nicht abstrakt, sondern als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ . Sie erfüllt trivialerweise die Straffheitsbedingung (verschwindende totale Absolutkrümmung, ebenso wie die Euler-Charakteristik). Damit ist der Satz für  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$  bewiesen.

Betrachtet man  $\mathfrak{B}_3$  und  $\mathfrak{B}_4$ , dargestellt in Abbildung 1.6, genauer, so stellt man fest, dass die oben gezeigte straffe Einbettung auch eine in diese beiden Raumformen darstellt, denn die Fundamentalbereiche dieser Raumformen haben eine orientierbare Identifikation von Boden- und Dachfläche bei gleichzeitiger nichtorientierbarer Identifikation der linken und rechten Seite analog zu  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ .

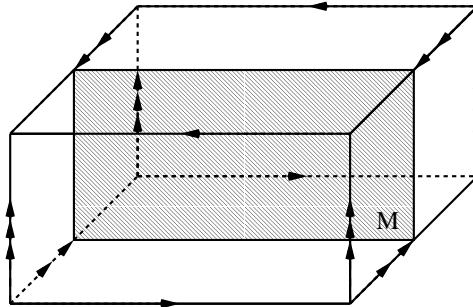
Es bleibt, eine straffe Einbettung der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_2$  zu finden. Man betrachte dazu Abbildung 3.3.

Wegen der nichtorientierbaren Identifikation der Vorder- und Rückseite und der gleichzeitigen orientierbaren Identifikation von Boden- und Dachfläche ist dies eine straffe Einbettung der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_2$ , womit der Satz für alle

Abbildung 3.3: Eingebettete Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_2$ 

nichtorientierbaren  $ERF$  gezeigt ist.

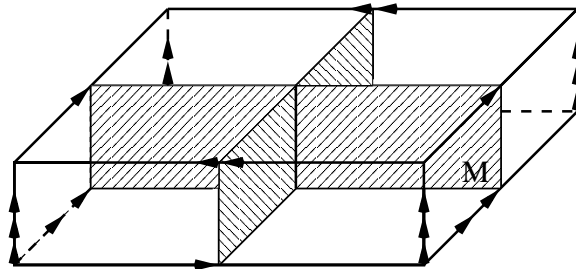
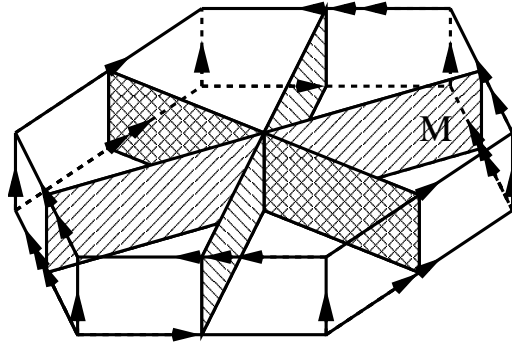
Um die Aussage für  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  zu beweisen, ist die eingebettete Fläche in Abbildung 3.4 zu studieren.

Abbildung 3.4: Eingebettete Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ 

Die Schraubung um  $\pi$  identifiziert die obere und untere Kante der eingebetteten Fläche mit einem Twist (nichtorientierbare Identifikation), während die anderen zwei ohne diesen identifiziert werden. Die resultierende Fläche ist damit eine straffe eingebettete Kleinsche Flasche.

Diese Idee bzw. Konstruktion muss nun auf die verbleibenden Fälle  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ ,  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  übertragen werden. Die Ergebnisse (die Realisierungen der Kleinschen Flasche in diesen  $ERF$ ) sind in den Abbildungen 3.5, 3.6 und 3.7 zu sehen.

Man beachte, dass im Falle der immersierten Fläche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$  die obere Kante der einen 'Ebene' mit der unteren Kante der anderen identifiziert wird (Schraubung um  $\pi/2$ ). Geht man durch beide 'Ebenen', ist der Effekt eine Rotation um  $\pi$ , mit anderen Worten, eine Verbindung mit einem Twist. Die vertikalen Kanten werden ohne Twist identifiziert, so dass die dargestellte Fläche in Abbildung 3.5

Abbildung 3.5: Die Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ Abbildung 3.6: Die Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$ 

eine straff immersierte Kleinsche Flasche ist.

Analog erkennt man, dass die immersierte Fläche aus Abbildung 3.6 eine Kleinsche Flasche ist. Dreimaliges Durchlaufen (Schraubung jeweils um  $\pi/3$ ) liefert die Identifikation durch einen Twist und damit die Behauptung.

Man betrachte Abbildung 3.7. Um einzusehen, dass es sich dabei um eine eingebettete Kleinsche Flasche handelt, muss man die Identifikationen der Kanten genau studieren. Die obere Kante wird mit der unteren als zwei separate Kanten jeweils mit einem Twist identifiziert. Die vordere Hälfte der oberen Kante wird mit der vorderen Hälfte der unteren via einer Schraubung um  $\pi$  identifiziert, ebenso wie die hinteren Hälften der Kanten. Die vertikalen Kanten werden durch eine Translation identifiziert. Damit ist die dargestellte Fläche eine Kleinschen Flasche, dargestellt in Abbildung 3.8, mit sechs involvierten Kanten im Gegensatz zum klassischen abstrakten Modell mit vier Kanten. Dass es sich um eine eingebettete Fläche handelt, ist ebenfalls an diesem Modell zu erkennen. Man hat die Umgebungen eines jeden Punktes zu betrachten. Die 'kritischen' sind die Eckpunkte. Für alle anderen ist die Homöomorphie einer jeden Umgebung zur Kreisscheibe offensichtlich. Betrachte Abbildung 3.9. Der Abbildung ist

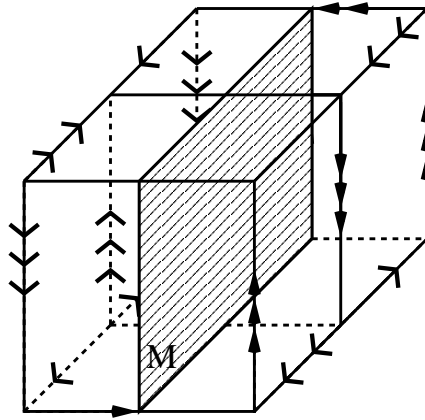
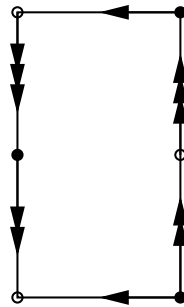
Abbildung 3.7: Die Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$ 

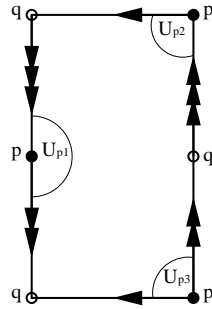
Abbildung 3.8: Ein Modell der Kleinschen Flasche

zu entnehmen, dass sich die Teilumgebungen  $U_{p_1}, U_{p_2}$  und  $U_{p_3}$  offensichtlich zu der gewünschten Kreisscheibe ergänzen. Ebenso gilt dies für den Punkt  $q$ . Damit handelt es sich um die gewünschte Einbettung der Kleinschen Flasche, womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

*Bemerkung 3.4.* Abbildung 3.2 stellt eine eingebettete Kleinsche Flasche  $K$  in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$  dar. Vorder- und Rückseite dieser  $ERF$  werden durch eine Translation miteinander identifiziert. Offensichtlich gilt demnach

$$\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1 \cong K \times S^1.$$

*Bemerkung 3.5.* Es gibt noch eine weitere Art, Immersionen der Kleinschen Flasche in die orientierbaren  $ERF$  zu konstruieren (auch geeignet, um straffe Immersionen in obige  $ERF$  zu erzeugen, welche keine Einbettungen sind). Hierzu sei auf [34] und [9] verwiesen. Dort wird eine Kleinsche Flasche vorgestellt, welche durch eine rotierende Acht um die z-Achse mit gleichzeitiger Drehung um

Abbildung 3.9: Umgebung des Punktes  $p$ 

$\pi$  entstanden ist. Diese Darstellung ist die Basis der Konstruktion einer straffen Immersion in eine orientierbare  $ERF$  und ist in [Abbildung 3.10](#) zu sehen.

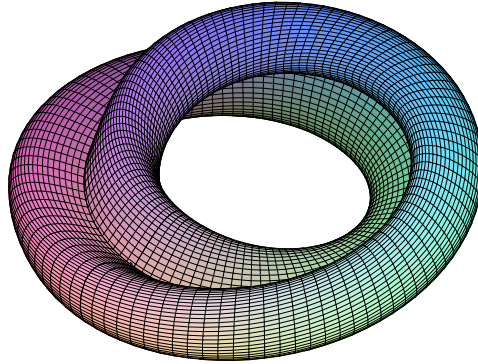


Abbildung 3.10: Die Kleinsche Flasche

Nun zur Konstruktion einer Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ . Man starte mit einem Zylinder über einer Acht als Grundkurve in der orientierbaren  $ERF$   $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ . In dieser werden Dach- und Bodenfläche durch eine Schraubung um  $\pi$  miteinander identifiziert. Diese Identifikation ersetzt die oben geschilderte Drehung um  $\pi$ . [Abbildung 3.11](#) zeigt die zu betrachtende Fläche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ . Der Zylinder hat natürlich überall verschwindende Gauß-Krümmung. Damit gilt die linke Seite der folgenden Gleichung

$$\tau(M) = 0 = |\chi(M)|,$$

woraus die rechte Seite unmittelbar folgt, denn es gilt

$$\tau(M) \geq |\chi(M)| \geq 0.$$

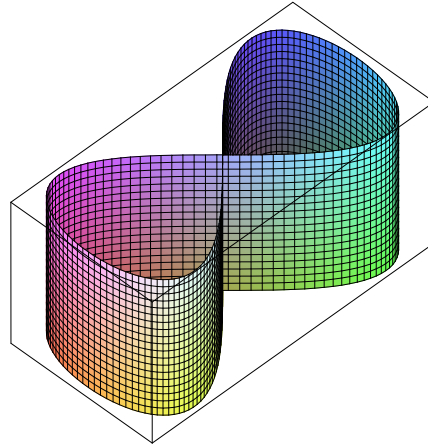


Abbildung 3.11: Die Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$

Damit handelt es sich um eine immensierte Kleinsche Flasche oder einen Torus. Um die Euler-Charakteristik der Fläche 'von Hand' auszurechnen betrachte man das polyedrische Bild dieser Fläche. Man sieht sofort, dass die Euler-Charakteristik der betrachteten Fläche null ergibt, da jede Teilfläche keinen Beitrag zu  $\chi$  leistet. Man beachte die Identifikationen und das Mehrfachauftreten von Ecken und Kanten (siehe Abbildung 3.12).

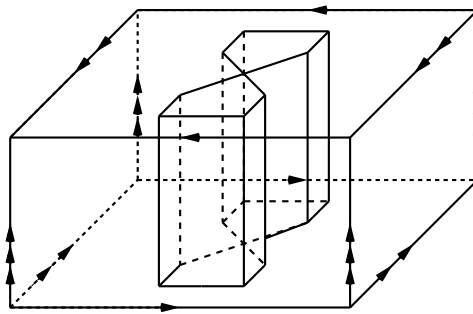


Abbildung 3.12: Polyedrische Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$

Die Nichtorientierbarkeit der Fläche folgt aus der speziellen Identifikation, d.h. aus der Verschraubung um  $\pi$  und der Selbstdurchdringung (siehe [34]).

Damit handelt es sich um eine straffe Immersion der Kleinschen Flasche.

Diese Konstruktion liefert straffe Immersionen der Kleinschen Flasche wiederum auch in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$ , weil es in dieser, wie in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ , eine Identifikation von Seitenflächen

durch eine Schraubung um  $\pi$  gibt.

Die Idee im Falle  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  wird nun auf die *ERF* erweitert, welche keine Identifikation von Seiten durch eine Schraubung um  $\pi$  besitzen. Sei nun  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$  die *ERF*, in welche immersiert wird. Boden- und Dachfläche werden durch eine Schraubung um  $\pi/2$  identifiziert. Indem eine weitere Selbstdurchdringung auf der Schraubachse erlaubt wird, erhält man ein Beispiel einer straff immersierten Kleinschen Flasche. Man betrachte Abbildung 3.13. Sie zeigt zwei Achten, welche

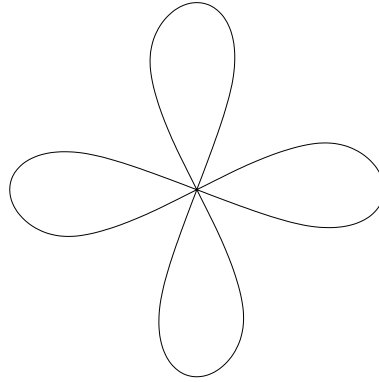


Abbildung 3.13: 'Basis-Kurve' in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$

durch Rotation um  $\pi/2$  um den gemeinsamen Doppelpunkt ineinander übergehen. Der Zylinder über diesen beiden Achten ist ein Beispiel einer immersierten Kleinschen Flasche  $M$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ . Wegen der Identifikation handelt es sich bei  $M$  um eine geschlossene Fläche. Offensichtlich ist der Rang der Ableitung in jedem Punkt zwei, womit es sich um eine Immersion handelt.  $M$  besteht nur aus parabolischen Punkten und ist demnach straff, wenn es sich um eine Kleinsche Flasche ( $\chi(M) = 0$ ) handelt, denn

$$\tau(M) = 0 = |\chi(M)|,$$

woaus wiederum das Verschwinden der Euler-Charakteristik folgt (siehe obige Argumentation).

Will man diese nachrechnen ist das polyedrische Modell in Abbildung 3.14 zu betrachten. Um aus dieser Abbildung die Euler-Charakteristik zu berechnen, werden die Ecken und Kanten bei Identifikation nicht nur einfach, sondern mit ihren Identifikationen gezählt. Daraus ergeben sich acht Seiten, acht vertikale und 16 horizontale Kanten sowie 16 Ecken, woraus das Verschwinden der Euler-Charakteristik folgt. Damit ist die immersierte Fläche straff.

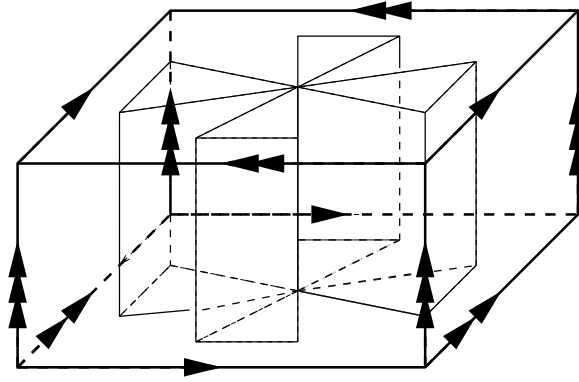


Abbildung 3.14: Polyedrische Realisierung der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$

Die Nichtorientierbarkeit soll Abbildung 3.15 veranschaulichen.

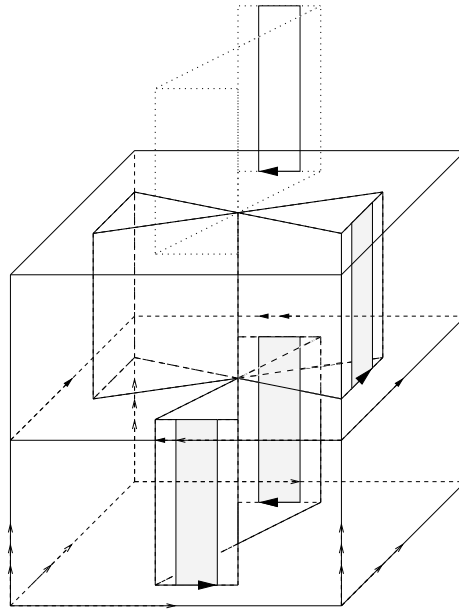
Man mache sich klar, dass das schraffierte Band ein Möbiusband ist. Die Pfeile sollen die Orientierung auf dem Band verdeutlichen. Damit ist der Satz für  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$  gezeigt. Der Beweis lässt sich einfach auf die verbleibende  $ERF$  übertragen. Abbildung 3.16 zeigt die Basiskurve in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$ . Sie stellt drei Achten dar, welche durch eine Drehung um  $\pi/3$  ineinander übergehen. Zylinder über diesen Achten bilden ein Beispiel einer straff immersierten Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$ , da Boden- und Dachfläche in dieser  $ERF$  durch eine Schraubung um  $\pi/3$  identifiziert sind. Dies führt zu der benötigten Identifikation durch einen Twist, womit obige Argumentation analog zu führen ist.

*Bemerkung 3.6.* Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Frage der Orientierbarkeit/Nichtorientierbarkeit intrinsisch beantwortet werden muss. Man betrachte Abbildung 3.17. Obwohl die Seiten der Fläche jeweils durch Translation und Spiegelung identifiziert werden, handelt es sich im ersten Fall um eine Kleinsche Flasche und im zweiten Fall um einen Torus. Dies ist durch Betrachtung des Einheitsvektorfeldes auf  $M$  nicht zu beweisen, lediglich durch die Orientierung auf der Fläche und der Existenz eines Möbiusbandes im ersten Fall ist dies möglich.

Die Frage nach der Existenz straffer Immersionen kompakter Flächen gerader negativer Euler-Charakteristik in  $ERF$  kann vollständig geklärt werden:

**Satz 3.7.** *Sei  $M$  eine geschlossene nichtorientierbare Fläche gerader Euler-Charakteristik  $\chi(M) < 0$ . Dann existiert eine straffe Einbettung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  in jede  $ERF$ . Die Einbettung  $f$  kann glatt oder polyedrisch gewählt werden. Außerdem gibt es straffe Immersionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  in jede  $ERF$ , welche keine*



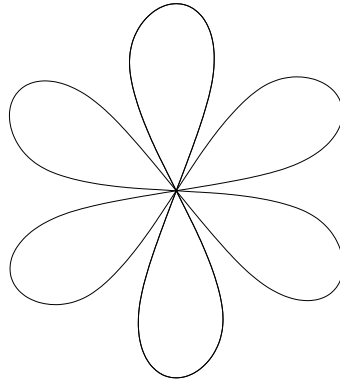
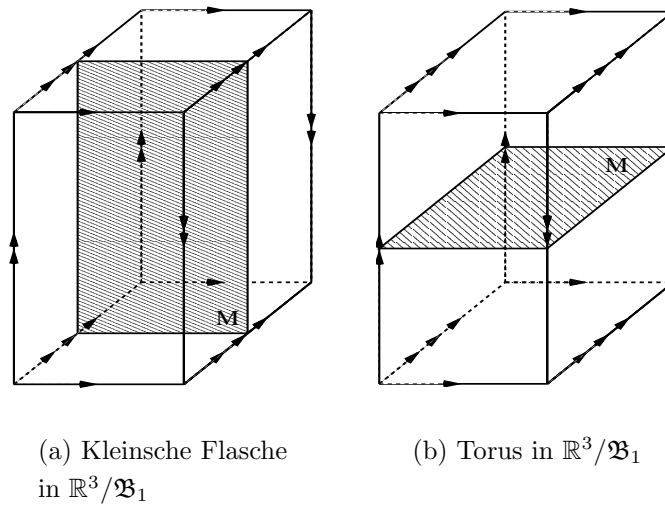
Abbildung 3.15: Nichtorientierbarkeit in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ 

*Einbettungen sind.*

*Beweis:* Man hat für Teil zwei des Satzes zu zeigen, dass in jeder *ERF* straffe Immersionen der Kleinschen Flasche mit beliebig vielen (orientierbaren) Henkeln existieren. Folgendes Prinzip kann zum Beweis für den Fall orientierbarer *ERF* verwendet werden. Man startet mit einer straffen Immersion eines 2-Torus und klebt in diesen Henkel, welche die Orientierung umkehren (Selbstdurchdringung), so dass die Straffheit der resultierenden Fläche gewährleistet ist. Das Einhängen dieser Henkel ist ein Beispiel der tight surgery (vergleiche [53], 3. Abschnitt). Abbildung 3.18 zeigt das Einhängen eines nichtorientierbaren Henkels in der orientierbaren Raumform  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  auf die eben beschriebene Art.

Man beachte die Selbstdurchdringung, welche in Abbildung 3.18 gepunktet gezeichnet ist. Es ist leicht einzusehen, dass es sich hierbei um einen Torus mit einem nichtorientierbaren Henkel handelt ( $\chi(M) = -2$ ) und dass die Fläche keine Ecken positiver Krümmung besitzt. Damit ist die Straffheit der polyedrischen Immersion gesichert. Wegen der Dreiwertigkeit aller Ecken ist diese Fläche straff glättbar. Weitere Henkel können wie üblich eingehängt werden und man erhält straffe Beispiele beliebigen Geschlechts (siehe dazu Abbildung 3.23).

In diesem Beispiel wurde die Identifikation durch die Schraubung um  $\pi$  ausgenutzt, um Singularitäten an der Verheftung des Torus mit dem nichtorientierba-

Abbildung 3.16: Die Basiskurve in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$ (a) Kleinsche Flasche  
in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ (b) Torus in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ Abbildung 3.17: Straffe Flächen in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ 

ren Henkel zu vermeiden. Werden Dach- und Bodenfläche nicht durch Verschraubung identifiziert, sondern nur durch Translation, können die Singularitäten dadurch vermieden werden, dass ein geeigneter gescherter Henkel eingehängt wird. Immersionen dieser Flächen in die nichtorientierbaren  $ERF$ , welche keine Einbettungen sind, erzeugt man mit Hilfe der in obiger Bemerkung (nach dem Beweis von Satz 3.3) vorgestellten Immersion der Kleinschen Falsche in die nichtorientierbaren  $ERF$ . Das Einhängen straffer Henkel beweist auch in diesem Fall Teil zwei des Satzes.

Mit dieser Prozedur erzeugt man jedoch lediglich Immersionen, d.h. man hat noch Einbettungen in die verschiedenen orientierbaren  $ERF$  zu finden. Im Falle von  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  startet man mit der oben gefundenen Einbettung der Klein-

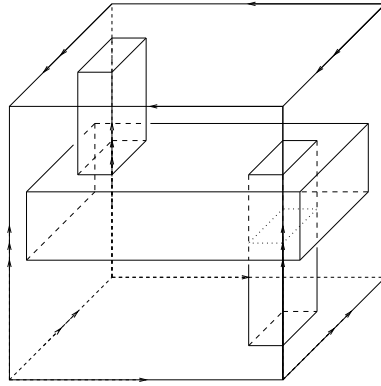


Abbildung 3.18: Straffer Torus mit einem nichtorientierbaren Henkel in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$

schen Flasche in diese Raumformen (siehe Abbildung 3.4 und 3.7) und hängt in diese einen orientierbaren Henkel ein. Im Falle von  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  muss dies ein gescherter Henkel sein, um Singularitäten zu vermeiden (siehe [65]), und man hat dadurch eine straffe Einbettung einer Fläche mit  $\chi(M) = -2$  konstruiert. Eine straffe Einbettung dieser Fläche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  ist in Abbildung 3.19 zu sehen.

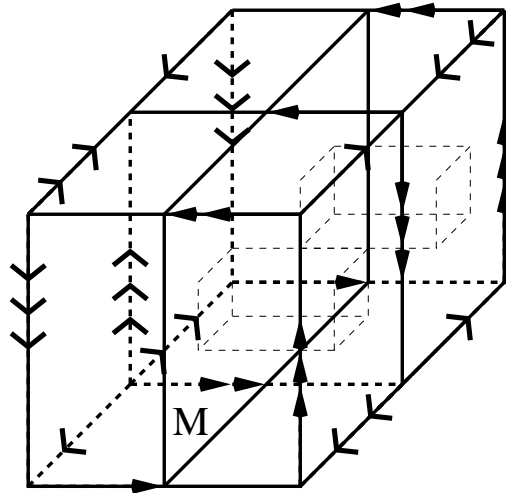


Abbildung 3.19: Straffe Kleinsche Flasche mit einem orientierbaren Henkel in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$

Hängt man in die gefundenen Flächen orientierbare Henkel in gewöhnlicher Art ein, so erhält man straffe Immersionen bzw. Einbettungen in alle orientierbaren *ERF* und hat den Satz für diese beiden *ERF* bewiesen.

Straffe Einbettungen der gesuchten Flächen in die verbleibenden  $ERF$  findet man folgendermaßen. Man betrachte Abbildung 3.20. Sie zeigt eine straffe Einbettung

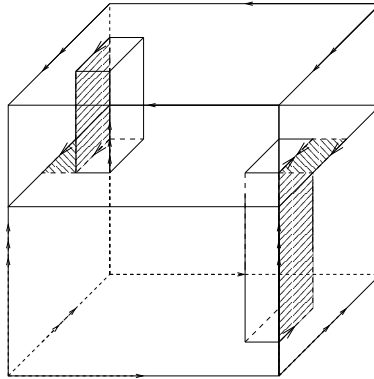


Abbildung 3.20: Einbettung einer Fläche mit  $\chi = -2$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$

der nichtorientierbaren Fläche  $M$  mit  $\chi(M) = -2$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ .

Die Nichtorientierbarkeit der Fläche ist ebenfalls in Abbildung 3.20 illustriert. Die schraffierte Teilfläche ist ein Möbiusband, wie man anhand der Pfeilmarkierungen leicht verifiziert. Damit ist die Behauptung gezeigt.

In den anderen Fällen geht man vollkommen analog vor. Man startet mit einer horizontalen 'Ebene', welche auch in den verbleibenden Fällen einen straffen Torus darstellt und hängt einen Henkel wie beschrieben an und erhält ebenfalls eine straffe Einbettung einer nichtorientierbaren Fläche  $M$  mit  $\chi(M) = -2$ . In  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  hat man durch Einhängen eines gescherten Henkels Singularitäten zu vermeiden. Hierzu betrachte man Abbildung 3.21. Die dargestellte Henkeleinhängung

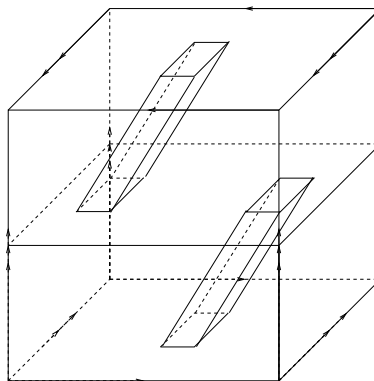


Abbildung 3.21: Einbettung einer Fläche mit  $\chi = -2$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$

in den flachen Torus entspricht dem Einhängen eines nichtorientierbaren Henkels der geometrischen Topologie (man vgl. hierzu [3] Abbildung 7.2(b)), hier jedoch ohne Selbstdurchdringungen. Deshalb handelt es sich hierbei um eine straffe Einbettung der nichtorientierbaren Fläche  $M$  mit  $\chi(M) = -2$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ .

Die straffen nichtorientierbaren Flächen gerader negativer Euler-Charakteristik höheren Geschlechts erhält man wie gewöhnlich durch tight surgery, z.B. im Innern des eingehängten Henkels, und hat den Satz damit für alle orientierbaren  $ERF$  bewiesen, denn alle erzeugten Flächen sind offensichtlich straff glättbar.

Der Fall straffer nichtorientierbarer Flächen gerader Euler-Charakteristik in nichtorientierbaren  $ERF$  stellt sich einfacher dar, und man kommt ebenfalls überall ohne Selbstdurchdringungen aus. Man betrachte die nichtorientierbare Raumform  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$ , in welcher die linke und rechte Seite einander durch Spiegelung zugeordnet sind und betrachte die Fläche, wie in Abbildung 3.22 dargestellt.

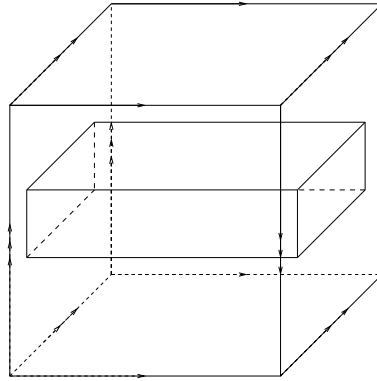


Abbildung 3.22: Kleinsche Flasche in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$

Wegen der Identifikation durch Spiegelung ist dies eine Einbettung einer Kleinschen Flasche.

Demnach hat man jetzt lediglich noch orientierbare Henkel einzuhängen, wie in Abbildung 3.23 gezeigt, und erhält straffe nichtorientierbare Flächen gerader Euler-Charakteristik beliebigen Geschlechts (durch weiteres Einhängen von Henkeln dieser Art).

Da in jeder der vier nichtorientierbaren Raumformen gegenüberliegende Seiten existieren, welche einander durch Spiegelung zugeordnet und alle konstruierten Flächen straff glättbar sind, ist auch der erste Teil des Satzes bewiesen.  $\square$

Im Falle nichtorientierbarer Flächen ungerader Euler-Charakteristik  $\chi < -3$

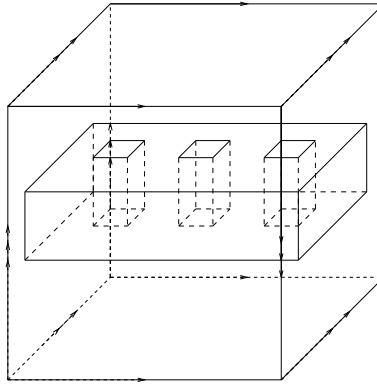


Abbildung 3.23: Kleinsche Flasche mit Henkeln in  $\mathbb{R}^3/\mathfrak{B}_1$

konnte bislang nicht auf Selbstdurchdringungen verzichtet werden. Diese Flächen können jedoch in jede  $ERF$  straff immersiert werden.

**Satz 3.8.** *Sei  $M$  eine geschlossene nichtorientierbare Fläche ungerader Euler-Charakteristik  $\chi(M) < -3$ . Dann existiert eine straffe Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  in jede  $ERF$ . Die Immersion  $f$  kann polyedrisch oder glatt gewählt werden.*

*Beweis:* Der Beweis benutzt die in dem Artikel von Kühnel und Pinkall [50] konstruierte straffe polyedrische Immersion einer projektiven Ebene mit zwei Henkel in den  $\mathbb{E}^3$ , welche straff geglättet werden kann und eine Dreifachsymmetrie aufweist. Diese Fläche  $M_{alt}$  kann in ein Inneres  $I$  und ein Tetraeder, ihr Äußeres, aufgeteilt werden.

Die Idee besteht nun darin, dieses Innere in einen straff immersierten Torus besonderer Bauart einzuhängen und damit eine straffe polyedrische Fläche mit Euler-Charakteristik  $\chi(M) = -5$  zu erhalten, welche straff glättbar ist.

Zunächst muss  $I$  näher untersucht und leicht modifiziert werden.

Das Innere  $I$  ist nach [50] eine projektive Ebene mit drei Löchern. Abbildung 3.24 zeigt die straffe Fläche, wobei das Innere farbig und vom Tetraeder zur besseren Verständlichkeit nur der Umriss gezeichnet ist. Die Henkel, die mit dem Tetraeder verheftet werden, werden so verlängert, dass jeder mit einer senkrecht auf dem Boden des Tetraeders stehenden Ebene geschlossen werden kann. Abbildung 3.25 zeigt, auf welche Weise die ursprüngliche Fläche verändert wird. Diese gelöcherte projektive Ebene wird nun in einen straff immersierten Torus eingehängt. Auch dieser Torus soll so gebaut sein, dass er eine Dreifachsymmetrie aufweist. Ein Zylinder über einem gleichseitigen Dreieck, dessen Ränder orientierbar identifiziert

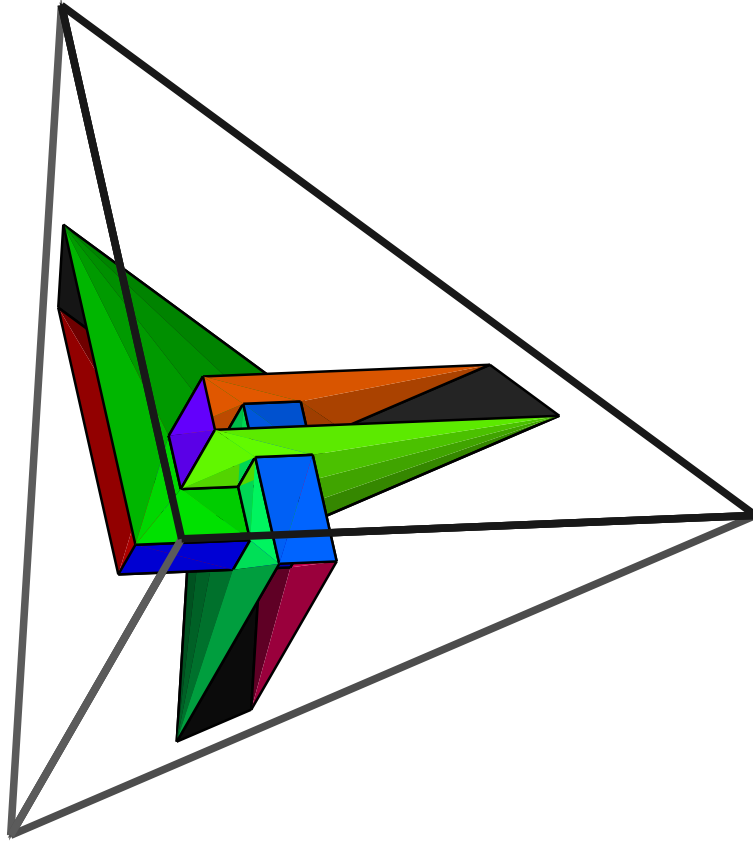


Abbildung 3.24: Straffe projektive Ebene mit 2 Henkeln

werden, realisiert solch einen Torus. In Abbildung 3.26 ist die daraus resultierende Fläche zu sehen.

Diese straffe polyedrische Immersion des 2-Torus ist in jeder Raumform zu finden, in welcher gegenüberliegende Seiten durch eine Translation miteinander identifiziert werden. Dies ist in der Tat der Fall. Das Dreieck ist so gewählt, dass die projektive Ebene eingehängt werden kann.

Man sieht folgendermaßen, dass die so konstruierte Fläche Euler-Charakteristik  $\chi(M_{neu}) = -5$  hat. Das Innere der Fläche ist eine Boy-Fläche mit drei Löchern und hat demnach Euler-Charakteristik  $\chi = -2$ . Der Dreieckstorus mit drei entfernten Kreisscheiben besitzt  $\chi = -3$ . Verklebt man diese beiden erhält man  $\chi(M_{neu}) = -5$ , wie behauptet. Die Tatsache, dass es sich um eine geschlossene Fläche ohne Rand handelt, ist leicht einzusehen.

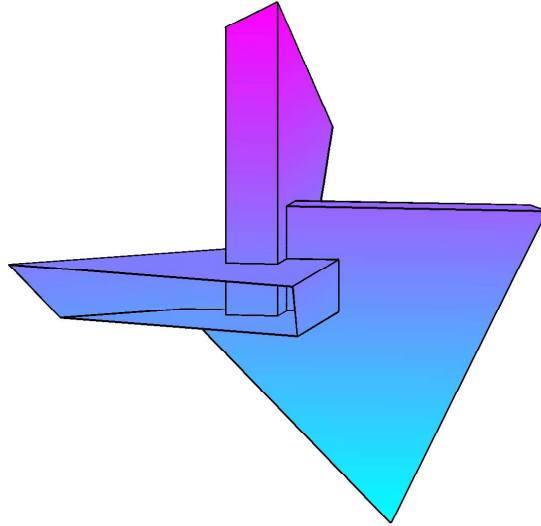


Abbildung 3.25: Modifizierte Fläche

Jetzt ist noch zu klären, ob diese polyedrische Fläche  $M_{neu}$  zum einen straff ist und zum anderen, ob sie, falls sie straff ist, straff geglättet werden kann.

Um die Straffheit zu beweisen, benutze man die Straffheitseigenschaft der Fläche  $M_{alt}$  im  $\mathbb{E}^3$ . Dort gilt

$$\tau(M_{alt}) = 4 - \chi(M_{alt}) = 4 - (-3) = 7.$$

Das Tetraeder (das Äußere von  $M_{alt}$ ) liefert zwei an totaler Absolutkrümmung, der straffe Torus, in welchen die Fläche eingehängt wird, null, d.h.

$$\tau(M_{neu}) = 4 - \chi(M_{alt}) - 2 = 4 - (-3) - 2 = 5 = |\chi(M_{neu})|.$$

Dies beweist die Straffheit der neuen Fläche.

Es bleibt zu zeigen, dass diese Fläche straff geglättet werden kann. Im  $\mathbb{E}^3$  ist nach [50] die Boy-Fläche mit drei Löchern im Tetraeder straff glättbar. Es wurde lediglich das Tetraeder entfernt und durch einen Torus ersetzt. Dies hat auf die Ecken, welche durch diese Operation betroffen sind, keinen Einfluss. Die Wertigkeit bleibt für alle Ecken gleich drei. Damit ist es möglich, auch die neue Fläche straff zu glätten.

Es ist nun möglich, weitere Henkel nach bekanntem Prinzip einzuhängen, ohne die Straffheit der Fläche zu zerstören. Man erhält straffe Immersionen nichtorientierbarer Flächen  $M$  ungeraden Geschlechts und  $\chi(M) < -3$  in jede beliebige



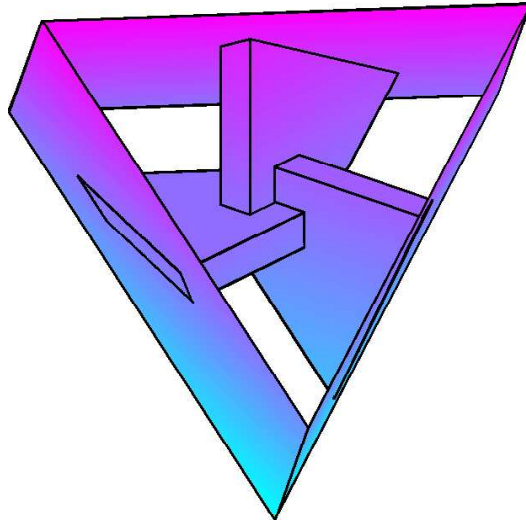


Abbildung 3.26: Modifizierte Fläche, eingehängt in einen straffen Torus

*ERF*, womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

*Bemerkung 3.9.* Es sei hier noch ein weiteres Beispiel einer polyedrischen Immersion einer projektiven Ebene mit drei Henkeln angeführt. Es basiert auf einer Konstruktion von Cervone in [26]. Dort präsentiert er ein Beispiel einer getwisteten Fläche dieses Typs. Der Schlüssel dieser Konstruktion liegt darin, einen geeigneten getwisteten Torus zu finden, welcher einen Affensattel enthält. Dieser kann durch einen Teil der von Brehm in [16] eingeführten projektiven Ebene ersetzt werden. Dadurch verringert sich die Euler-Charakteristik um eins und die Fläche wird nichtorientierbar. In Abbildung 3.27 ist der getwistete Torus mit einem Affensattel zu sehen.

Die Fläche ist rotationssymmetrisch bezüglich  $2\pi/3$ -Drehungen um die  $z$ -Achse, welche durch den 'Flächenmittelpunkt' geht und nach oben weist. Boden- und Dachfläche sind eben und die Ecken dieser Flächenstücke liegen auf gleicher Höhe bezüglich der  $z$ -Achse. Die Idee zur Konstruktion einer polyedrischen Immersion einer projektiven Ebene mit drei Henkeln besteht nun darin, Boden- und Dachfläche der abgebildeten Fläche zu entfernen und die resultierende Fläche in einen Torus mit parallelen Seiten und zwei entfernten Kreisscheiben einzukleben. Abbildung 3.31 zeigt solch einen Torus. Dann ist der Affensattel durch einen Teil von Brehms projektiver Ebene zu ersetzen. Dies geht, wie auch in [26], ohne positive Krümmung zu erzeugen. Damit hat die Fläche  $M$  die Euler-Charakteristik

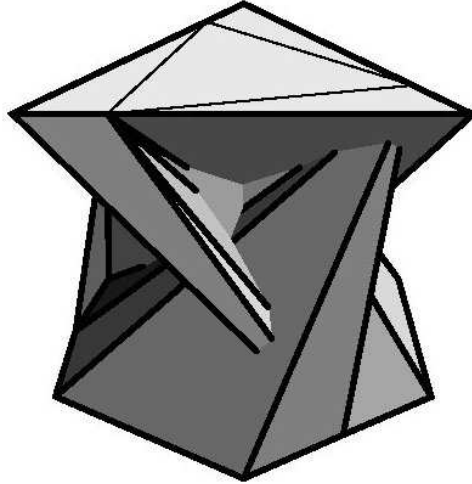


Abbildung 3.27: Der gewistete Torus mit Affensattel

–5. Es bleibt die Straffheit der konstruierten Fläche zu zeigen. Die modifizierte Fläche besitzt nur an den Ecken, welche mit dem Torus verklebt werden, positive Krümmung, denn sie wird straff nach Bildung ihres konvexen Envelopes (Rand der konvexen Hülle). Wegen der speziellen Art der Verklebung verschwindet offensichtlich die positive Krümmung in diesen Ecken und die Fläche wird straff. Wie auch schon die Ausgangsfläche von Cervone, so ist auch die resultierende Fläche mit den bekannten Methoden wegen zu hoher Wertigkeit einzelner Ecken nicht glättbar.

Die Fläche mit Euler-Charakteristik  $\chi = -3$  stellt einen Sonderfall dar. Lediglich eine polyedrische Immersion konnte gefunden werden, welche mit der bestehenden Prozedur nicht zu glätten ist. Es ist möglich, dass sich bei dieser Fläche, wie im Euklidischen bei der Fläche mit  $\chi = -1$ , ein Unterschied zwischen polyedrischer und glatter straffer Immersionen ergibt. (Man vergleiche dazu die Ausführungen zum klassischen Fall in [24].)

**Satz 3.10.** *Sei  $M$  die projektive Ebene mit zwei Henkeln. Dann existiert eine straffe polyedrische Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  in jede *ERF*.*

*Beweis:* Cervone präsentierte in [22] bzw. [25] eine straffe polyedrische Immersion einer projektiven Ebene mit einem Henkel  $S$ . Dieses überraschende Ergebnis ist die Grundlage für den hier geführten Beweis. Das Beispiel besteht aus einer projektiven Ebene, umgeben von einem Zylinder  $Z$ , der dadurch entsteht, dass

zwei Kreisscheiben aus dem konvexen Envelope entfernt werden. Abbildung 3.28 zeigt die Fläche von oben, bestehend aus 13 Ecken, 28 triangulierten Seiten und 42 Kanten. Die Selbstdurchdringungen sind die Schnitte der Seiten, welche nicht durch einen dicken schwarzen Strich gekennzeichnet sind. In diesem Bild zeigt die

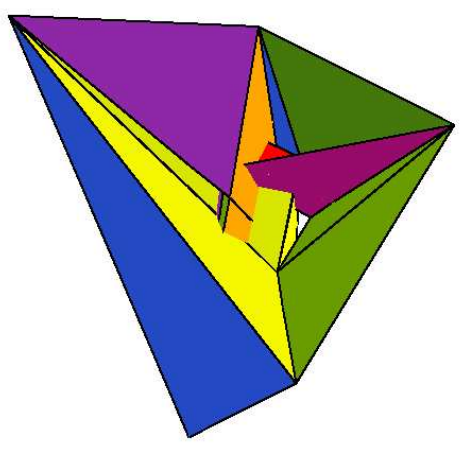


Abbildung 3.28: Eine straffe polyedrische projektive Ebene mit einem Henkel

$x$ -Achse nach oben rechts, die  $y$ -Achse nach oben links und die  $z$ -Achse weist aus der Papierseite heraus. Die Fläche besitzt die folgenden Ecken:

$$a = (-2, 0, 0), b = (0, 0, 0), c = (1, 0, 0), d = (0, 1, 0), e = (-2, -1, 2),$$

$$f = (1, -1, 2), g = (1, 1, 2), h = (0, 3, 2), i = (-3/8, 0, 1/2), j = (1/2, 1/4, 1),$$

$$k = (-1/4, 7/12, 7/6), l = (0, 3/4, 7/6), m = (1/4, 0, 1/2)$$

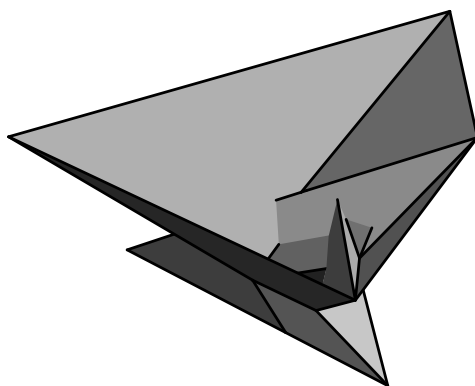
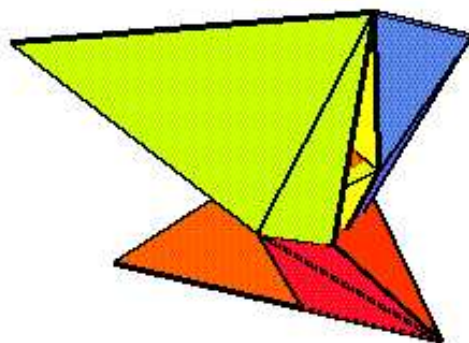
und folgende Seiten:

$$abk, bgk, bgj, bij, gfj, adl, akl, cdl, flm, clm,$$

$$hij, ehi, bci, cim, fim, efi, hkl, hjl, fjl, ghk,$$

$$abe, bef, bcf, cfg, cgh, cdh, adh, aeh.$$

Die Ecke  $a$  ist die Ecke ganz unten,  $h$  die Ecke links oben. Die Idee zur Konstruktion einer straffen polyedrischen Immersion in die  $ERF$ , besteht nun darin, den Envelope  $Z$  dieser Fläche (in diesem Fall ein offener Zylinder) zu entfernen und die restliche Fläche  $N$  in einen geeigneten Torus einzukleben. In den Abbildungen 3.29 und 3.30 ist die projektive Ebene mit zwei Löchern zu sehen.

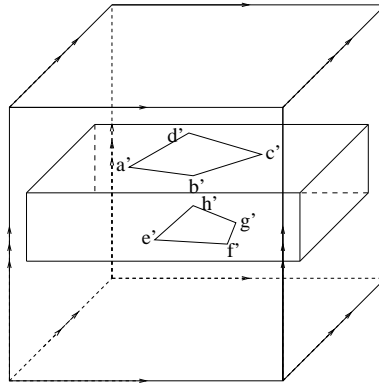
Abbildung 3.29:  $S$  ohne Zylinder  $Z$ Abbildung 3.30:  $S$  ohne Zylinder  $Z$ 

Es wurden von  $S$  die Flächen

$$abe, bef, bcf, cfg, cgh, cdh, adh, aeh$$

entfernt. Die Euler-Charakteristik von  $N$  ist  $-1$ , denn es wurden 8 Flächen und 8 Kanten entfernt. Die Ecken  $a, b, c, d$  und  $e, f, g, h$  liegen jeweils auf derselben Höhe (bzgl. der  $z$ -Richtung). Damit kann  $N$  in einen Torus  $T$  eingeklebt werden, der parallele Seiten besitzt und aus welchem zwei Kreisscheiben entfernt wurden. Abbildung 3.31 zeigt solch einen Torus eingebettet in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ . Diese Einbettung existiert in allen  $ERF$ , da in allen Fundamentalbereichen gegenüberliegende Seiten existieren, welche durch Translation miteinander identifiziert sind. Bei der Verklebung werden die Ecken  $a$  mit  $a'$ ,  $b$  mit  $b'$  usw. identifiziert. Die Euler-Charakteristik der entstandenen Fläche  $M$  ist  $-3$ , denn

$$\chi(M) = \chi(N) + \chi(T) = -1 - 2 = -3,$$

Abbildung 3.31: Torus in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  mit zwei entfernten Kreisscheiben

wobei  $T$  den Torus mit zwei entfernten Kreisscheiben bezeichnet.

Es bleibt die Straffheit der erzeugten Fläche zu zeigen.  $S$  ist straff und deshalb liegt die komplette positive Krümmung auf der konvexen Hülle von  $S$  und deshalb, wegen der Konstruktion von  $S$ , in den Ecken  $a, b, c, d$  und  $e, f, g, h$ . Dies sind die Ecken, welche auch bei der Verklebung involviert sind. Durch die spezielle Art der Verklebung tritt an keiner der acht Ecken positive Krümmung auf, womit die Straffheit von  $M$  und damit der Satz bewiesen ist.  $\square$

*Bemerkung 3.11.* Schon die von Cervone in [22] bzw. [25] konstruierte Fläche  $S$  war nicht straff glättbar, so auch nicht die hier konstruierte Fläche  $M$ . Denn ginge dies, dann auch im klassischen Fall im Widerspruch zum Beweis der Nichtexistenz einer solchen Fläche durch Haab in [37]. Die bei der Verklebung beteiligten Ecken  $a, b, c, d, e, f, g, h$  sind nämlich im  $\mathbb{R}^3$  nicht das Problem, sondern Ecken im 'Innern', welche durch die hier vorliegende Konstruktion unberührt geblieben sind. Dies beweist jedoch nicht, dass es keine straffe glatte Immersion dieser Fläche  $M$  in eine  $ERF$  geben kann. Man ist versucht zu glauben, dass dies problemlos möglich sei, denn sie existiert ja schon im  $\mathbb{R}^3$ . Doch jeder Versuch scheiterte an der Existenz positiver Krümmung an einigen Ecken.

*Bemerkung 3.12.* Es existiert eine straffe Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer jeden orientierbaren Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  in jede  $ERF$ , welche keine Einbettung ist. Die Immersion  $f$  kann glatt oder polyedrisch gewählt werden.

Auch im  $\mathbb{E}^3$  ist dies richtig (siehe [10], Beispiel 1.3.5).

Um diese Behauptung in dem hier vorliegenden Fall zu beweisen, wird die strafte Realisierung der Kleinschen Flasche in den orientierbaren  $ERF$  verwendet. Die Immersion in Abbildung 3.11 wird nur deshalb zur Kleinschen Flasche, weil

Boden- und Dachfläche durch eine Schraubung identifiziert werden. Hat man diese Verschraubung nicht, wird diese Immersion zwingenderweise zu einem Torus, wie im Beweis zu Satz 3.17 gezeigt. In jeder  $ERF$  existieren gegenüberliegende Seiten, welche durch Translation einander zugeordnet sind, und man hat damit in jeder  $ERF$  eine straffe Immersion des Torus, welche keine Einbettung ist. Selbstverständlich kann diese Immersion glatt oder polyedrisch gewählt werden (siehe dazu Abbildung 3.12). Straffes Einhängen weiterer Henkel in der üblichen Weise liefert die Behauptung.

*Bemerkung 3.13.* Wie auch im dreidimensionalen euklidischen Raum können auch in dem vorliegenden Fall die verschiedenen straffen Immersionen einer Fläche in unterschiedlichen (regulären) Homotopieklassen liegen (siehe zur Theorie im euklidischen Fall [66] und [23]).

Man betrachte Abbildung 3.32 aus [23]. Sie zeigt eine straffe Immersion der zu-

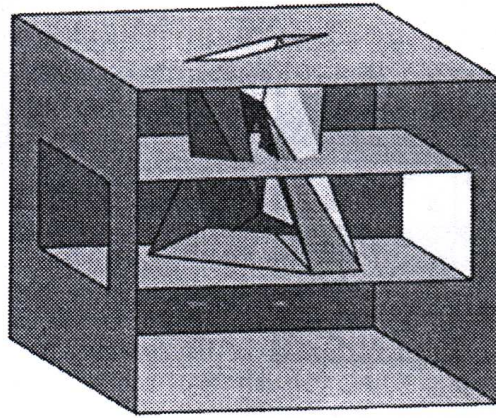


Abbildung 3.32: Straffe Immersion

sammenhängenden Summe des gewisteten Torus mit zwei Standardtori.

Klebt man den in der Abbildung dargestellten gewisteten Torus in einen parabolischen straffen Torus (in  $ERF$ ) ein, erhält man auch in den  $ERF$  eine straffe orientierbare Fläche vom Geschlecht zwei, welche sicher einen anderen regulären Homotopietyp hat wie die aus der Standardprozedur entstandene.

## 3.2 Nichtexistenzresultate

In diesem Kapitel wird bewiesen, dass es keine straffe Immersion der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  gibt und sich die projektive Ebene in keine *ERF* straff immersieren lässt. Die Aussagen gelten sowohl für glatte als auch für polyedrische Immersionen.

### 3.2.1 Die Kleinsche Flasche

Das Ziel der nun folgenden Überlegungen ist der Beweis, dass sich die Kleinsche Flasche nicht straff in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  immersieren lässt. Dazu sind zunächst einige Vorbemerkungen über Überlagerungen vonnöten.

**Definition 3.14.** *Eine Überlagerung  $p : N \rightarrow M$  von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, welche eine lokale Isometrie ist, heißt eine Riemannsche Überlagerung.*

Zum Begriff der Überlagerung sei auf [43], S. 160 bzw. Kapitel 9, verwiesen.

Um diese Definition auf den hier vorliegenden Fall anzuwenden, wird der flache  $n$ -dimensionale Torus  $T^n$  näher untersucht, d.h. ein Torus mit überall verschwindender Schnittkrümmung bzw. verschwindendem Krümmungstensor. (Dies ist nach [42], Theorem 3.8, äquivalent.)

Sei  $(a_1, \dots, a_n)$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Das Gitter  $\Gamma$  bezüglich dieser Basis ist die Menge aller Vektoren  $\sum_{j=1}^n k_j a_j$  mit  $k_j \in \mathbb{Z}$ . Identifiziert man  $\Gamma$  mit der Gruppe der Translationen von  $\mathbb{R}^n$  mit Translationsrichtung  $\sum_{j=1}^n k_j a_j$ , kann man den Quotienten  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  wie folgt kanonisch mit der Struktur einer zu  $T^n$  isomorphen glatten Mannigfaltigkeit ausstatten. Die Abbildung  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ , definiert durch

$$p\left(\sum_j x_j a_j\right) = (e^{2i\pi x_j})_{(j=1, \dots, n)},$$

ist nämlich konstant auf dem Gitter  $\Gamma$  und liefert nach Quotientenbildung eine stetige bijektive Abbildung  $p' : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow T^n$ . Diese Abbildung ist ein Homöomorphismus, da  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  kompakt ist. Eine lokale Parametrisierung für  $T^n$  um

$$x = (e^{2i\pi x_j})_{(j=1, \dots, n)}$$

ist gegeben durch

$$\Phi : ]x_1 - 1/2, x_1 + 1/2[ \times \cdots \times ]x_n - 1/2, x_n + 1/2[ \longrightarrow T^n,$$

wobei  $\Phi(y_1, \dots, y_n) =$  Klasse von  $(e^{2i\pi y_j})_{(j=1, \dots, n)}$  in  $T^n$ . In dieser Parametrisierung gilt

$$\Phi^{-1} \circ p' \left( \sum_j x_j a_j \right) = (x_1, \dots, x_n),$$

womit  $p$  und  $p'$  glatt sind. Man kann nun  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  mit der kanonischen Metrik ausstatten, für welche  $\pi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  eine Riemannsche Überlagerung ist. Benutzt man  $p'$ , erhält man eine Metrik  $g_\Gamma$  auf  $T^n$  so, dass  $p'$  eine Isometrie ist. Sind  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  und  $(\frac{\partial}{\partial x_j})_{(j=1, \dots, n)}$  die Koordinatenvektorfelder auf  $T^n$  bezüglich der Parametrisierung  $\Phi$ , dann ist die Metrik in dieser Parametrisierung gegeben durch

$$g_\Gamma = \sum_{i,j} \langle a_i, a_j \rangle dx_i \otimes dx_j.$$

Solche Metriken auf dem Torus werden flache Metriken auf  $T^n$  genannt, womit die lokale Isometrie zum  $\mathbb{R}^n$  offensichtlich wird.

**Lemma 3.15.** *Seien  $\pi^* : N \rightarrow M$  eine lokale Isometrie und  $M$  zusammenhängend. Dann ist  $N$  genau dann vollständig, wenn  $M$  vollständig und  $\pi^*$  eine Riemannsche Überlagerung ist.*

Der Beweis ist in [63] auf Seite 202 zu finden.

Ein weiteres Hilfsmittel zum Beweis unseres Problems ist in folgendem Satz formuliert, welcher auf Massey [58] zurückgeht und heute Einzug in die Lehrbücher globaler Differentialgeometrie gefunden hat (siehe [31], Kapitel 5.8).

**Satz 3.16.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine vollständige Fläche verschwindender Gauß-Krümmung. Dann ist  $M$  entweder ein Zylinder oder eine Ebene.*

Nach Definition ist ein Zylinder eine reguläre Fläche  $M$ , so dass durch jeden Punkt  $p \in M$  eine eindeutige Gerade  $R(p) \subset M$  (Erzeugende durch  $p$ ) verläuft, welche die folgende Bedingung erfüllt: Ist  $p \neq q$ , dann sind die Geraden  $R(p)$  und  $R(q)$  entweder parallel oder gleich.

Mit dieser Definition ist eine Ebene lediglich ein spezieller Zylinder.

Es ist nun möglich, den zentralen Satz zum Beweis unseres Problems zu formulieren und zu beweisen.

**Satz 3.17.** *Jede immersierte kompakte Fläche  $M$  überall verschwindender Gauß-Krümmung  $K$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  ist ein immersierter 2-Torus.*



*Beweis:* Sei  $M$  eine kompakte und daher vollständige und zusammenhängende Fläche ([74], Seite 94). Die Überlagerung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$$

ist nach den obigen Betrachtungen des  $n$ -dimensionalen Torus eine Riemannsche Überlagerung. Aus Lemma 3.15 folgt dann, dass die Überlagerung  $\pi^{-1}(M)$  der Fläche  $M$  im  $\mathbb{R}^3$  eine vollständige Fläche ist. Diese ist dreifach periodisch wegen  $\Gamma_1 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und kann keine nichtverschwindende Krümmung besitzen, da  $\pi^{-1}(M)$  lokal die gleichen Krümmungseigenschaften haben muss wie  $M$  wegen der lokalen Isometrie-eigenschaft von  $\pi$ . Sie kann jedoch in Zusammenhangskomponenten zerfallen.

Damit ist  $\pi^{-1}(M)$  nach Satz 3.16 eine disjunkte Vereinigung von Zylindern nach obiger Bemerkung.

Im Folgenden wird gezeigt, dass es kein Möbiusband um ein erzeugendes Element der Fundamentalgruppe vom  $M$  gibt und  $M$  damit nur ein Torus sein kann.

Seien  $c$  ein nicht null-homotoper Loop in der Fundamentalgruppe von  $M$  und  $\tilde{c} \subset \pi^{-1}(c)$  der Lift des einmal durchlaufenen  $c$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Man beachte, dass die Tangente im ‘Startpunkt’ und die Tangente im ‘Endpunkt’ von  $\tilde{c}$  parallel sind, weil die Elemente der Decktransformationsgruppe von  $\pi(\Gamma_1)$  lediglich Translationen sind. Man beachte weiter, dass  $\pi^{-1}(M)$  orientierbar ist ( $\pi^{-1}(M)$  ist zylindrisch, wie oben gezeigt). Mit dieser Orientierung und der Orientierung von  $\tilde{c}$  ist man in der Lage, eine geeignet kleine  $\varepsilon$ -Umgebung  $C_{\tilde{c}}$  von  $\tilde{c}$  zu erhalten. Man beachte, dass  $C_{\tilde{c}}$  ein orientiertes Band ist, welches unter  $\pi$  auf ein ebensolches orientiertes Zylinderband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  abgebildet wird, weil die Decktransformationsgruppe lediglich Translationen beinhaltet und deshalb die parallelen Tangenten des Start- und Endpunktes orientierbar identifiziert werden. Das beweist den Satz.  $\square$

**Korollar 3.18.** *Sei  $M$  die Kleinsche Flasche. Dann gibt es keine straffe Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  in den 3-Torus.*

*Beweis:* Sei  $f(M)$  eine straffe Immersion der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ . Dann gilt

$$\tau(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| do = \chi(M) = 0,$$

d.h.  $f(M)$  besteht nur aus Punkten verschwindender Gauß-Krümmung und ist als Immersion der Kleinschen Flasche kompakt und vollständig. Damit ist Satz 3.17 anwendbar und  $M$  ein immersierter Torus im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

---

Diese Aussage läßt sich zum Beweis der Nichtexistenz einer straffen Immersion der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  verwenden.

**Satz 3.19.** *Sei  $M$  die Kleinsche Flasche. Dann gibt es keine straffe Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_3$  in die ERF  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$ .*

*Beweis:* Angenommen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_3$  sei eine straffe Immersion der Kleinschen Flasche  $M$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$ .

Sei  $\pi_* : T^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_3$  die normale Überlagerung von  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  durch  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ , dem 3-Torus  $T^3$ . Die Blätterzahl  $k$  der Überlagerung folgt aus der Ordnung der Decktransformationsgruppe und ist offensichtlich drei. Aus der Normalität der Überlagerung folgt außerdem, dass die Deckbewegungsgruppe transitiv auf den Fasern wirkt und es sei weiter bemerkt, dass es sich bei  $\pi_*$  um eine lokale Isometrie handelt. (Diese Betrachtungen findet man ausführlich im Anschluss an Satz 4.30 behandelt.)

Mit  $\pi_*^{-1}(M)$  sei die Hochhebung von  $M$  in  $T^3$  bezeichnet. Wegen der Endlichkeit der Blätterzahl  $k$  ist diese ebenso eine kompakte Fläche (oder besteht aus einer disjunkten Vereinigung solcher) wie  $M$ . Weiter verhält sich die Euler-Charakteristik wie folgt:

$$\chi(\pi_*^{-1}(M)) = k \cdot \chi(M).$$

(Siehe auch hierzu die Ausführungen nach Satz 4.30.)

Wegen der transitiven Wirkung der Decktransformationsgruppe und der Tatsache, dass  $\chi(M)$  verschwindet, kommen damit für  $\pi_*^{-1}(M)$  nur folgende vier Möglichkeiten in Frage.

1. die disjunkte Vereinigung dreier Tori,
2. die disjunkte Vereinigung dreier Kleinscher Flaschen,
3. ein Torus,
4. eine Kleinsche Flasche.

Die Überlagerung  $\pi_*$  ist eine lokale Isometrie, womit die Krümmung der überlagernden Flächen ebenso verschwinden muss, wie die der straff immersi-erten Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ . Diese wären demnach ebenfalls straff in den  $T^3$  immersi-ert. Korollar 3.18 schließt dies jedoch für die Kleinschen Flaschen aus.

Nach [44] ist eine orientierbare Überlagerung einer nicht-orientierbaren Fläche immer geradzahlablättrig, womit die Überlagerungen durch Tori ebenfalls nicht möglich sind und die Annahme es gäbe eine straffe Immersion der Kleinschen Flasche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  zum Widerspruch geführt, der Satz damit bewiesen.  $\square$

### 3.2.2 Die projektive Ebene

**Satz 3.20.** *Die projektive Ebene lässt sich in keine ERF straff immersieren.*

Zum Beweis ist folgendes Lemma notwendig.

**Lemma 3.21.** *Sei  $\Gamma$  die Fundamentalgruppe einer ERF. Dann besitzt  $\Gamma$  keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung, d.h.  $\Gamma$  ist torsionsfrei.*

Zum Beweis dieser Tatsache sei auf [74], Theorem 3.1.3 verwiesen.

*Beweis:* (von Satz 3.20)

Der Beweis soll durch Widerspruch geführt werden. Angenommen, es gebe eine straffe Immersion der projektiven Ebene  $M$  in eine ERF.

Sei  $\pi$  die Riemannsche Überlagerung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma.$$

Definitionsgemäß ist  $\pi$  damit eine lokale Isometrie. Man hat zu beachten, dass  $\pi^{-1}(M)$  isomorph zu einer disjunkten Vereinigung von 2-Sphären oder projektiven Ebenen sein muss, weil die Fläche  $M$  durch Flächen überlagert werden muss und diese beiden Typen die einzigen möglichen sind. Weil  $\pi$  eine lokale Isometrie ist, muss jede dieser Sphären oder projektiven Ebenen lokal dieselben Krümmungseigenschaften haben wie  $M$ , d.h. sie dürfen nur aus Punkten nichtnegativer Krümmung bestehen (wegen der Straffheit von  $M$  nach Annahme). Dies ist für projektive Ebenen  $P$  unmöglich, denn sei  $f : P \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine Immersion der projektiven Ebene in den dreidimensionalen euklidischen Raum mit  $K \geq 0$  überall. Dann gilt

$$1 = \chi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_P K do = \frac{1}{2\pi} \int_P |K| do \geq 4 - \chi(M) = 3,$$

womit die Sphären als überlagernde Flächen die einzig möglichen sind. (Für in  $\mathbb{E}^3$  immensierte orientierbare kompakte Flächen mit  $K \geq 0$  in jedem Punkt gilt nach [30], dass diese Flächen eingebettet und konvex sind also insbesondere homöomorph zur 2-Sphäre.)

---

Die Überlagerung einer projektiven Ebene durch Sphären ist zweiblättrig in jeder Komponente, weshalb die totale Absolutkrümmung einer jeden Sphäre gleich zwei sein muss. Desweiteren sind die Sphären konvex und eingebettet (siehe [30], wie oben erwähnt). Um im Quotienten eine projektive Ebene zu haben, muss es ein nicht triviales Element der Ordnung zwei in der Decktransformationsgruppe der Überlagerung geben, weil die Fundamentalgruppe der projektiven Ebene isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$  ist (siehe [64]). Nach Lemma 3.21 gibt es jedoch in keiner Gruppe  $\Gamma$ , den Decktransformationsgruppen der Überlagerungen, ein nicht triviales Element endlicher Ordnung, womit  $M$  in keine *ERF* straff immersiert sein kann.  $\square$

---

### 3.3 Offene Fragen

Dieses Kapitel stellt die noch offenen Fälle zusammen.

#### Frage

Gibt es eine straffe Immersion der projektiven Ebene mit einem Henkel in eine *ERF*?

#### Frage

Gibt es eine straffe und glatte Immersion der projektiven Ebene mit zwei Henkel in eine *ERF*?

Offen ist außerdem die Frage der straffen Einbettbarkeit der Kleinschen Flasche in zwei der orientierbaren Raumformen.



# Kapitel 4

## Differentialtopologische Interpretation

Im klassischen Fall des  $\mathbb{E}^3$  lässt sich die Straffheit einer glatten Fläche auch differentialtopologisch über die Anzahl kritischer Punkte einer nichtdegenerierten Höhenfunktion, welche global auf dieser Fläche definiert ist, deuten. Kuiper führte dies in [54] und [55] durch und brachte darin die Morse-Theorie ([62] und [59]) mit der totalen Absolutkrümmung in Verbindung.

Banchoff übertrug dieses Prinzip in [5] und [6] auf straffe polyedrische Flächen. Eine Fläche ist demnach genau dann straff, wenn fast jede Höhenfunktion auf dieser (nach  $\mathbb{R}$ ) die minimale Anzahl kritischer Punkte hat bzw. genau ein Maximum und ein Minimum besitzt. Essentiell für diese Betrachtungen ist eine global auf der ganzen Fläche existierende Höhenfunktion, um die bestehende Morse-Theorie anzuwenden.

Diese Existenz ist im vorliegenden Fall  $ERF$  das Problem. Um dies zu umgehen, zieht man sich auf lokale Höhenfunktionen zurück und beweist, dass eine Fläche in  $ERF$  genau dann straff ist, wenn fast alle Höhenfunktionen auf der Fläche weder ein relatives Maximum noch ein relatives Minimum besitzen.

Dieses Kapitel stellt den klassischen Fall und die dazu notwendigen Prinzipien vor und überträgt sie in obigem Sinne auf die hier vorliegende Situation.

## 4.1 Glatte Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum

Es werden zuerst die grundlegenden Definitionen und notwendigen Resultate aus der Theorie kritischer Punkte und Höhenfunktionen im dreidimensionalen euklidischen Raum eingeführt, wobei zunächst der glatte Fall studiert wird.

### 4.1.1 Kritische Punkte

Seien  $M_1$  und  $M_2$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt  $x \in M_1$  heißt kritischer Punkt von  $f$ , wenn die zu  $f$  gehörende induzierte lineare Abbildung  $f_*$  bei  $x$  nicht surjektiv ist. Ist  $y \in M_2$  das Bild eines kritischen Punktes unter  $f$  heißt  $y$  kritischer Wert von  $f$ . Alle nichtkritischen Werte von  $M_2$  heißen reguläre Werte von  $f$ .

Im Spezialfall einer reellwertigen Funktion  $f$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt  $f$  genau dann einen kritischen Punkt bei  $x \in M$ , wenn  $f_*(x) = 0$  ist. Sind  $(x_1, \dots, x_n)$  lokale Koordinaten in einer Umgebung von  $x$ , heißt dies nichts anderes als

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0.$$

Ist  $x$  ein kritischer Punkt von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , untersucht man die Hesse-Matrix von  $f$ , welche in lokalen Koordinaten durch die symmetrische Matrix

$$H_x(f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j}$$

dargestellt wird.

Sei nun  $x$  ein kritischer Punkt von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $x$  degenerierter kritischer Punkt, wenn  $rg(H_x) < n$  ist, wobei  $n = \dim(M)$ . Ist  $rg(H_x) = n$  heißt  $x$  nichtdegenerierter kritischer Punkt. Der Index von  $f$  bei  $x$  ist gleich der Anzahl negativer Eigenwerte von  $H_x$ . Das Verhalten von  $f$  in einer Umgebung eines nichtdegenerierten kritischen Punktes ist durch den Index, wie im Lemma von Morse (siehe z.B. [21]) gezeigt, festgelegt:

**Lemma 4.1.** (*Lemma von Morse*): Sei  $x$  ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  vom Index  $k$ . Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem mit Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n)$  in einer Umgebung  $U$  mit Ursprung bei  $x$ , so dass die folgende Identität in ganz  $U$  gilt:

$$f = f(x) - (x_1)^2 - \dots - (x_k)^2 + (x_{k+1})^2 + \dots + (x_n)^2.$$



Damit ist ein kritischer Punkt vom Index  $n$  ein lokales Maximum von  $f$ , einer vom Index 0 ein lokales Minimum und alle anderen diverse Arten von Sattelpunkten. Eine Funktion  $f$ , welche nur nichtdegenerierte kritische Punkte besitzt, heißt eine nichtdegenerierte Funktion oder Morse-Funktion. Die Zahl der nichtdegenerierten kritischen Punkte vom Index  $k$  von  $f$  bezeichnet man mit  $\mu_k(f)$ .

*Bemerkung 4.2.* Aus dem Lemma von Morse folgt, dass die nichtdegenerierten kritischen Punkte einer reellwertigen Funktion  $f$  auf einer Mannigfaltigkeit diskret liegen.

### 4.1.2 Höhenfunktionen

In enger Verbindung zu dieser Theorie der kritischen Punkten steht das Studium von Höhenfunktionen. Seien  $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine Immersion und mit  $S^2$  die Sphäre der Einheitsvektoren am Ursprung in  $\mathbb{E}^3$  bezeichnet. Für  $e \in S^2$  ist die lineare Höhenfunktion  $h_e : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$h_e : x \mapsto \langle x, e \rangle$$

definiert, wobei  $\langle x, e \rangle$  das euklidische Skalarprodukt von  $x$  und  $e$  bezeichnet. Die Einschränkung von  $h_e$  auf  $M$ , durch

$$h_e(x) = \langle e, f(x) \rangle$$

definiert, ist eine reellwertige differenzierbare Funktion auf  $M$ .

Es sei in diesem Zusammenhang an die Gauß-Abbildung erinnert. Diese war definiert als die Abbildung

$$\nu : \perp M \rightarrow S^2,$$

welche einem Punkt  $e \in \perp_x M$  einen Vektor parallel zu  $e$  am Ursprung zuordnet.  $\perp M$  bezeichnet dabei das Einheitsnormalenvektorbündel von  $M$ . Dieses ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Ebenfalls wichtig in diesem Kontext ist das Gaußsche Normalenbild, d.h. das Bild unter der Gauß-Abbildung  $\nu$ , denn den Flächeninhalt der Oberfläche dieses Bildes kann man mit der totalen Absolutkrümmung in Verbindung bringen (siehe [49]). Es gilt

$$\int_M |K| do = Vol_{S^2}(\nu(M)),$$

wobei das Symbol  $Vol_{S^2}$  den Flächeninhalt (d.h. das zweidimensionale Volumen) einer Teilmenge der 2-Sphäre bezeichnet,  $M$  eingebettet vorliegen soll und rechts

noch mit der Überdeckungsanzahl gewichtet werden muss. Ansonsten betrachtet man  $+\nu$  und  $-\nu$  einzeln und halbiert dann die Summe der beiden Volumina. Mit diesen Bezeichnungen kann nun folgendes Lemma formuliert werden, welches eine Aussage darüber macht, wann eine Höhenfunktion einen kritischen Wert in einem Punkt besitzt.

**Lemma 4.3.** *Seien die Bezeichnungen wie oben gegeben und  $e \in S^2$  fest gewählt. Dann ist  $e = \pm\nu(x_0)$  für  $x_0 \in M$  mit  $\nu(x_0)$  dem Bild von  $x_0$  unter der Gauß-Abbildung  $\nu$  genau dann, wenn  $x_0$  kritischer Punkt der Höhenfunktion  $h_e$  ist.*

*Beweis:* Sei  $e = \pm\nu(x_0)$ , d.h.  $e$  zeigt in Richtung des Normalenvektors in  $x_0$ . Dies gilt genau dann, wenn  $e$  senkrecht auf der Tangentialebene in  $x_0$  steht.

Dies ist äquivalent zu

$$\left\langle e, \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\rangle \Big|_{x_0} = 0$$

für jedes  $i$  und lokale Koordinaten  $(u_1, \dots, u_n)$ .

Äquivalent dazu ist folgende Aussage

$$\frac{\partial(h_e \circ f)}{\partial u_i} \Big|_{x_0} = 0$$

für jedes  $i$ , was genau dann gilt, wenn

$$(h_e)_* \Big|_{x_0} = 0$$

Nach Definition ist dies äquivalent dazu, dass  $x_0$  kritischer Punkt von  $h_e$  ist, was das Lemma beweist.  $\square$

Mit Lemma 4.3 und lokalen Rechnungen lässt sich folgender Satz beweisen, der eine Aussage darüber macht, wann eine Höhenfunktion lediglich nichtdegenerierte kritische Punkte besitzt.

**Satz 4.4.** *Für  $e \in S^2$  ist  $h_e$  genau dann eine Morse-Funktion, wenn  $e$  regulärer Wert der Gauß-Abbildung  $\nu$  ist.*

Demnach hat man die kritischen Punkte der Gauß-Abbildung zu untersuchen. Dazu ist folgender Satz hilfreich (siehe z.B. Paragraph 6 in [19], oder [60], Paragraph 2 als Satz von Brown bezeichnet).

**Satz 4.5. Satz von Sard (Brown)**

*Die Menge der kritischen Werte einer differenzierbaren Abbildung (hier  $\nu$ ) von Mannigfaltigkeiten hat das Lebesgue-Maß Null.*

**Korollar 4.6.** aus Lemma 4.3 und Satz 4.5

Bezeichnet  $\mu(e)$  die Anzahl nichtdegenerierter kritischer Punkte von  $h_e$ , dann gilt

$$\text{Vol}_{S^2}(\nu(M)) = \frac{1}{2} \int_{e \in S^2 \setminus C} \mu(e) do,$$

wobei  $C$  die Menge vom Maß Null der kritischen Werte von  $\nu$  bezeichnet.

Damit hat man die totale Abolutkrümmung mit der Anzahl nichtdegenerierter kritischer Punkte von Höhenfunktionen in Beziehung gebracht, denn es gilt

$$\tau(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| do = \frac{1}{2\pi} \text{Vol}_{S^2}(\nu(M)) = \frac{1}{4\pi} \int_{e \in S^2 \setminus C} \mu(e) do.$$

Mit Hilfe von Satz 4.5 kann man eine Aussage machen, für welche  $e \in S^2$  die Höhenfunktion  $h_e$  eine Morse-Funktion ist.

**Korollar 4.7.** Für fast alle  $e \in S^2$  ist  $h_e$  eine Morse-Funktion.

Elementare Morse-Theorie liefert folgenden Satz (Morse-Ungleichungen), der die Anzahl der kritischen Punkte einer Morse-Funktion mit der Euler-Charakteristik (einer topologischen Invariante) in Verbindung bringt (siehe [39], Kapitel 6).

**Satz 4.8.** Sei  $M$  eine kompakte Fläche. Wenn  $\mu_0(e)$  die Zahl der lokalen Minima,  $\mu_1(e)$  die Zahl der lokalen Sattelpunkte,  $\mu_2(e)$  die Zahl der lokalen Maxima der Höhenfunktion  $h_e$  bezeichnet, dann gilt für fast alle  $e \in S^2$  einzeln

$$\mu_0(e) - \mu_1(e) + \mu_2(e) = \chi(M).$$

*Bemerkung 4.9.* Dieser Satz gilt auch für höherdimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten  $M$ :

$$\sum_k (-1)^k \mu_k(e) = \chi(M),$$

wobei mit  $\mu_k$  die Anzahl der kritischen Punkte einer Morse-Funktion vom Index  $k$  bezeichnet ist.

### 4.1.3 Die Verbindung mit straffen glatten Flächen

Jetzt kann man die Theorie der Höhenfunktionen mit der Theorie der straffen glatten Flächen verknüpfen.

**Satz 4.10.** *Sei  $M$  eine kompakte Fläche. Die größte untere Schranke der totalen Absolutkrümmung aller glatten Immersionen  $f$  von  $M$  in den  $\mathbb{E}^3$  ist gleich*

$$\gamma(M) := \min\{\mu(\phi) \mid \phi \text{ ist eine Morse-Funktion auf } M\},$$

wobei  $\mu(\phi)$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $\phi$  auf  $M$  bezeichnet.

*Beweis:* Siehe Kuiper [51], wobei (zur Vervollständigung) auch auf [73] verwiesen wird.  $\square$

*Bemerkung 4.11.* Dieser Satz ist in [51] allgemein für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension formuliert und bewiesen.

Mit dieser Aussage lässt sich folgender Satz beweisen.

**Satz 4.12.** *Sei  $M$  eine kompakte Fläche. Dann gilt:*

1.  $\gamma(M) = 4 - \chi(M)$ .
2. Für fast alle Höhenfunktion  $h_e$  auf  $M$  gilt  $\mu(e) = \gamma(M) = 4 - \chi(M)$  genau dann, wenn  $h_e$  genau ein lokales Maximum und ein lokales Minimum auf  $M$  besitzt.

*Beweis:* 1.) Ist die totale Absolutkrümmung einer Immersion minimal, dann gilt für kompakte Flächen  $M$  die folgende Gleichheit:  $\tau(M) = 4 - \chi(M)$ . Gleichzeitig fällt dann jedoch nach Satz 4.10  $\tau(M)$  auch mit  $\gamma(M)$  zusammen, womit  $\gamma(M) = 4 - \chi(M)$  folgt.

2.) Es gilt:

$$\mu(e) = \gamma(M) = 4 - \chi(M) = 4 - (\mu_0(e) - \mu_1(e) + \mu_2(e)) = \mu_0(e) + \mu_1(e) + \mu_2(e)$$

Damit ist

$$\mu_0(e) + \mu_2(e) = 2.$$

Da  $M$  kompakt vorausgesetzt ist, gilt  $\mu_0(e) = \mu_2(e) = 1$ , d.h.  $h_e$  besitzt auf  $M$  genau ein lokales Maximum und ein lokales Minimum.

Andererseits gilt:

$$\mu_0(e) - \mu_1(e) + \mu_2(e) = \chi(M) \Rightarrow \mu_1(e) = 2 - \chi(M),$$

woraus

$$\mu(e) = \gamma(M) = 4 - \chi(M).$$

folgt.  $\square$

Damit gilt für straffe Flächen im  $\mathbb{E}^3$  folgender

**Satz 4.13.** *Eine Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  einer kompakten Fläche  $M$  in den  $\mathbb{E}^3$  genau dann straff, wenn fast jede Höhenfunktion  $h_e$  genau ein lokales Maximum und ein lokales Minimum auf  $M$  besitzt.*

*Beweis:* Für eine straffe Fläche  $M$  gilt  $\tau(M) = 4 - \chi(M)$  und damit ist  $\mu(e) = 4 - \chi(M)$  nach Korollar 4.6. Mit Satz 4.12 folgt daraus, dass fast jede Höhenfunktion  $h_e$  genau ein lokales Maximum und ein lokales Minimum auf  $M$  besitzt. Die andere Richtung folgt analog.  $\square$

Dies führt nun zu einer äquivalenten Definition straffer Immersionen:

**Definition 4.14.** *Eine glatte Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  einer kompakten Fläche  $M$  heißt straff, wenn jede nichtdegenerierte Höhenfunktion  $h_e$  (mit obigen Bezeichnungen) genau ein lokales Maximum und ein lokales Minimum besitzt.*

*Bemerkung 4.15.* Satz 4.13 sieht man auch anders ein:

Straffheit einer Fläche ist äquivalent zu der Aussage (siehe [49]), dass das Integral über die Punkte positiver Gauß-Krümmung  $K$ , d.h. die Totalkrümmung, gleich  $4\pi$  ist (dies war die ursprüngliche Definition straffer Flächen von Alexandrov in [2]). Dies kann nur dann gelten, wenn fast jede Höhenfunktion genau ein Maximum und ein Minimum auf  $M$  besitzt, in Analogie zu Satz 4.13.

---

## 4.2 Polyedrische Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum

Wie bei glatten Flächen kann man auch die Straffheit einer polyedrischen Fläche in Verbindung mit Höhenfunktionen bringen. Auch hier ist die Minimalität der totalen Absolutkrümmung äquivalent zu der Aussage, dass eine Höhenfunktion die minimale Anzahl kritischer Punkte auf  $M$  besitzt. Höhenfunktionen auf Flächen untersuchte Banchoff in [5], [6] und [11]. In dem erstgenannten Artikel führt er eine Theorie kritischer Punkte für Abbildungen auf Geraden ein und beweist Analoga zum Satz von Gauß-Bonnet und zum Theorema Egregium. Die Definitionen und Theoreme waren durch die wohlbekannteren Resultate in der Theorie kritischer Punkte und der Krümmungstheorie für Mannigfaltigkeiten im euklidischen Raum motiviert. In [8] erweitert er diese Theorie auf Abbildungen in den  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum. Im zweitgenannten Artikel wird die Spezialisierung der Resultate auf den Fall zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten vorgenommen, während sich der dritte mit speziellen Höhenfunktionen beschäftigt.

Die Grundprinzipien der von Banchoff eingeführten Theorie werden im Folgenden vorgestellt (siehe in diesem Zusammenhang auch wieder [48] und [10]).

Für  $e \in S^2$  ist die Höhenfunktion  $h_e : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , wie im glatten Fall durch

$$h_e : x \mapsto \langle x, e \rangle$$

definiert, wobei  $\langle x, e \rangle$  das euklidische Skalarprodukt von  $x$  und  $e$  bezeichnet.

Die Einschränkung von  $h_e$  auf die polyedrische Fläche  $M$ , durch

$$h_e(x) = \langle e, f(x) \rangle$$

definiert, ist eine reellwertige Funktion auf  $M$ , ganz in Analogie zum glatten Fall, wobei  $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine polyedrische Immersion bezeichnet.

Diese Höhenfunktion ist in allgemeiner Lage bezüglich  $f(M)$ , wenn

$$h_e(v) \neq h_e(w)$$

für alle verschiedenen Ecken  $v, w \in f(M)$  gilt.

Ist die Höhenfunktion  $h_e$  in allgemeiner Lage, so wird ein Punkt  $p \in f(M)$  regulär genannt, wenn die Ebene durch  $p$  senkrecht zu  $e$  die Diskumgebung  $Star(p)$  in zwei Teile zerschneidet.  $Star(p)$  ist dabei die Vereinigung aller Ecken, Kanten und Flächen, welche  $p$  enthalten.

---

*Bemerkung 4.16.* Damit ist die Diskumgebung  $Star(p)$  eines jeden Punktes  $p$  einer polyedrischen Fläche  $f(M)$  homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe.

Mit dieser Definition von Regularität folgt, dass jeder Punkt im Inneren einer Seite oder Kante regulär bzgl. einer Höhenfunktion  $h_e$  in allgemeiner Lage sein muss. Denn wegen dieser kann keine Kante oder Seite auf  $e$  senkrecht stehen.

Die Ecken, welche nicht regulär sind, heißen kritisch bzgl.  $h_e$ .

Jetzt wird jeder Ecke  $v \in f(M)$  ein Index folgendermaßen zugeordnet.

$v$  heißt Mittelecke eines Dreiecks  $\Delta$ , wenn die von  $v$  verschiedenen Ecken des Dreiecks  $\Delta$  in verschiedenen Halbräumen bezüglich der durch  $v$  gehenden, zu  $e$  senkrechten Ebene liegen.

Dann bildet man den Index dieser Ecke  $v$  wie folgt:

$$ind(v, e) = 1 - \frac{1}{2}(\# \Delta \text{ mit } v \text{ als Mittelecke bzgl. } e).$$

*Bemerkung 4.17.* Hieraus folgt, dass für jede reguläre Ecke der Index gleich Null ist und jedes Dreieck genau eine Mittelecke für  $e$  besitzt.

Mit diesen Definitionen kann man den Satz über kritische Punkte auch für polyedrische Flächen formulieren und beweisen.

**Satz 4.18.** *Seien  $M$  eine polyedrische Fläche und  $h_e$  eine Höhenfunktion in allgemeiner Lage. Dann gilt*

$$\sum_{v \in M} ind(v, e) = \chi(M).$$

*Beweis:* Siehe [5]. □

*Bemerkung 4.19.* Wie im Fall glatter Flächen (in dem fast alle Höhenfunktionen nur endlich viele kritische Punkte besitzen) gilt auch hier, dass fast alle Höhenfunktionen in allgemeiner Lage sind. Es gilt hier jedoch nicht, dass fast alle Höhenfunktionen nur nichtdegenerierte kritische Punkte besitzen. Ein polyedrischer Affensattel, eine Fläche mit einem isolierten degenerierten kritischen Punkt, liefert das Gegenbeispiel, denn im Gegensatz zum glatten Fall, in welchem alle Höhenfunktionen in der Nähe des ‘degenerierten’  $e$  nur nichtdegenerierte kritische Punkte haben, hat die Ecke auch für alle Vektoren bei  $e$  den Index  $-2$  und ist demnach degeneriert. Im oben genannten Satz wird nirgendwo die Nichtdegeneriertheit der kritischen Punkte gefordert. Er gilt unabhängig von der Kompliziertheit von  $Star(v)$  aller Ecken.

---

In folgendem Satz werden nun die kritischen Punkte einer Höhenfunktion in allgemeiner Lage auf einer Fläche mit der Straffheit dieser in Verbindung gebracht (siehe [10]).

**Satz 4.20.** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine straffe polyedrische Immersion einer kompakten Fläche  $M$  in den dreidimensionalen euklidischen Raum. Dann ist  $f$  genau dann straff, wenn jede Höhenfunktion  $h_e$  in allgemeiner Lage (Bezeichnungen wie oben) genau ein lokales Maximum und ein lokales Minimum auf  $f(M)$  (und damit  $2 - \chi(M)$  Sattelpunkte) besitzt.*

---



## 4.3 Straffe glatte Flächen in $ERF$ –differentialtopologisch–

Ziel dieses Kapitels ist die differentialtopologische Charakterisierung straff immersierter glatter Flächen in  $ERF$ . Es stellt sich heraus, dass es in  $ERF$  keine Höhenfunktionen im klassischen Sinn gibt und deshalb die Resultate aus der Morse-Theorie hier nicht direkt verwendet werden können. Trotzdem lassen sich Aussagen über straffe Flächen in Verbindung mit kritischen Punkten spezieller Höhenfunktionen treffen.

### 4.3.1 Lokale Höhenfunktionen in $ERF$

Grundlegend für die klassische Theorie straffer Flächen im  $\mathbb{E}^3$  aus differentialtopologischer Sicht ist die Existenz einer auf der ganzen Fläche definierte Höhenfunktion. Es liegt deshalb nahe, diese Höhenfunktion auch auf Flächen in  $ERF$  zu definieren. Es stellt sich allerdings heraus, dass eine Höhenfunktion, wie im klassischen Fall hier nicht existiert. Betrachte hierzu Abbildung 4.1.

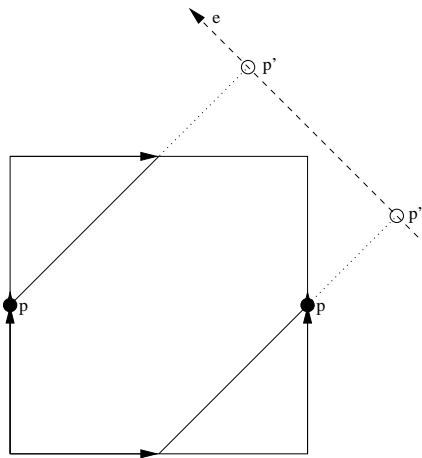


Abbildung 4.1: Problem einer ‘globalen’ Höhenfunktion

Diese zeigt das analoge zweidimensionale Problem. Dem Punkt  $p$  werden zwei verschiedene Höhen  $p'$  bei der Projektion auf die Richtung  $e$  zugeordnet. Daher ist es nicht möglich, den klassischen Höhenfunktionsbegriff in die  $ERF$  zu übertragen.

Es ist jedoch möglich, Höhen lokal zu messen, da die  $ERF$  lokal isometrisch zu einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  sind. Folgende Definition trägt dieser Feststellung

Rechnung.

**Definition 4.21.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine ( $C^\infty$ -)Immersion einer kompakten Fläche  $M$  in eine ERF.

Für gegebenes  $e \in S^2$  und einen beliebigen Punkt  $p \in f(M)$  ist die lokale Höhenfunktion  $h_{e,p}$  definiert durch

$$h_{e,p} : f(M) \supset U_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U_p \ni q \mapsto \langle q, e \rangle,$$

wobei mit  $U_p$  eine hinreichend kleine offene Umgebung von  $p$  bezeichnet ist.

Aus der lokalen Trivialität der Überlagerung  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  folgt die Existenz einer Umgebung  $U_p$  eines jeden Punktes  $p$ , so dass die Faser trivial ist, d.h. aus disjunkten Kopien dieser Umgebung besteht.

Beschränkt man sich auf ein Blatt dieser Überlagerung, kann das Standardskalarprodukt zur Höhenmessung verwendet werden. Damit hat man den klassischen Fall, nur eben lokal, vorliegen, und oben geschildertes Problem kann nicht mehr auftreten. Die vorhandene Morse-Theorie darf jedoch nicht verwendet werden, denn diese setzt eine global auf ganz  $M$  definierte Höhenfunktion voraus.

**Lemma 4.22.** Es gilt wie im klassischen Fall auch, dass  $p \in U_q$  genau dann kritischer Punkt von  $h_{e,q}$  ist, wenn  $e = \pm\nu(p)$  gilt.

*Beweis:* Der Beweis von Lemma 4.3, d.h. die analoge Formulierung des Lemmas im klassischen Fall, beschränkt sich auf lokale Rechnungen, welche in analoger Weise auch hier durchgeführt werden können, womit die Gültigkeit gezeigt ist.  $\square$

**Lemma 4.23.** Für festes  $e \in S^2$  ist  $h_{e,p}$  genau dann eine (lokal definierte) Morse-Funktion, wenn  $e$  regulärer Wert der Gauß-Abbildung  $\nu$  ist.

*Beweis:* Es ist zu zeigen, dass die Hesse-Matrix von  $h_{e,p}$  genau dann in allen kritischen Punkten vollen Rang hat, wenn  $e$  regulärer Wert der Gauß-Abbildung  $\nu$  ist.

Sei also  $p$  ein kritischer Punkt von  $h_{e,p}$ . Damit gelten folgende Gleichungen:

$$H_p(h_{e,p}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \langle f(u_1, u_2), e \rangle \right) \Big|_{i,j} \Big|_p$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \langle f(u_1, u_2), \nu \rangle \right) \Big|_{i,j} \Big|_p = \left( \left\langle \frac{\partial^2 f(u_1, u_2)}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle \right) \Big|_{i,j} \Big|_p \\
 &= \left( - \left\langle \frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_i}, \frac{\partial \nu}{\partial u_j} \right\rangle \right) \Big|_{i,j} \Big|_p = (h_{ij}) \Big|_p,
 \end{aligned}$$

wobei  $(h_{ij})$  die Matrix der zweiten Fundamentalform von  $f$  bezeichnet.

Zu zeigen ist demnach, dass  $\det(h_{ij})|_p \neq 0$  genau dann gilt, wenn  $e$  regulärer Wert der Gauß-Abbildung ist, d.h. wenn die Jacobi-Matrix von  $\nu$  an der Stelle  $p$  vollen Rang hat. Es gilt:

$$\det(h_{ij}) \Big|_p \neq 0 \iff K(p) \neq 0.$$

Die Gauß-Krümmung  $K(p)$  im Punkt  $p$  verschwindet aber genau dann nicht, wenn  $e$  regulärer Wert von  $\nu$  ist.  $\square$

Damit gilt folgendes

**Lemma 4.24.** *Für alle  $p \in M$  und fast alle  $e \in S^2$  ist  $h_{e,p}$  eine Morse-Funktion.*

*Beweis:* Aus dem Satz von Brown (Satz 4.5) folgt, dass fast alle  $e$  reguläre Werte von  $\nu$  sind. (Die Menge der kritischen Werte von  $\nu$  hat das Lebesgue-Maß null.) Damit folgt aus Lemma 4.23, dass  $h_{e,p}$  für fast alle  $e \in S^2$  eine Morse-Funktion ist.  $\square$

Dieses Lemma sagt mit anderen Worten, dass  $h_{e,p}$  für fast alle  $e \in S^2$ , wenn überhaupt, lediglich Maxima, Minima und Standardsattelpunkte, d.h. nichtdegenerierte kritische Punkte vom Index 2, 0 bzw. 1 besitzt.

Im Folgenden seien alle kritischen Punkte nichtdegeneriert.

### 4.3.2 Anwendung auf straffe glatte Flächen

Wendet man diese Resultate auf straffe Immersionen von Flächen nicht-positiver Euler-Charakteristik an, kann man eine erste Charakterisierung straffer Immersionen kompakter Flächen in  $ERF$  mit Hilfe der definierten lokalen Höhenfunktionen vornehmen.

**Satz 4.25.** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine glatte Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  in eine  $ERF$ . Die Immersion  $f$  ist genau dann straff, wenn die lokale Höhenfunktion  $h_{e,p}$  für fast alle  $e \in S^2$  nur kritische Punkte vom Index 1, d.h. nur Standardsattelpunkte, besitzt.*

Mit anderen Worten ist  $f$  genau dann straff, wenn  $h_{e,p}$  für fast alle  $e$  kein Maximum (Minimum) besitzt.

Zum Beweis ist folgender kleine Abschnitt notwendig, der die Verbindung zwischen kritischen Punkten von Höhenfunktionen und der Krümmung in diesen Punkten herstellt.

Die Aussagen gelten für den  $\mathbb{E}^3$ , sind jedoch wörtlich auf den vorliegenden Fall der *ERF* übertragbar, denn die Rechnungen sind alle lokaler Art, und man hat lediglich den Begriff der Höhenfunktion durch den Begriff der lokalen Höhenfunktion zu ersetzen.

### Die Verbindung zwischen kritischen Punkten von Höhenfunktionen und der Krümmung in diesen Punkten

In diesem Abschnitt wird die Verbindung zwischen kritischen Punkten von Höhenfunktionen und der Krümmung in diesen kritischen Punkten aufgezeigt.

Seien  $e_1, e_2, e_3$  drei orthogonale Einheitsvektoren,  $e$  orthogonal zur Tangentialebene an  $x_0$ , d.h.  $x_0$  ist nach Lemma 4.3 kritischer Punkt der Höhenfunktion  $h_e$ , und  $e_1, e_2$  seien die Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche bei  $x_0$ . In einer Umgebung von  $x_0$  können die Funktionen  $\phi_1 = \langle e_1, x \rangle$  und  $\phi_2 = \langle e_2, x \rangle$  für  $x \in M$  als Koordinaten verwendet werden, und das Linienelement  $ds$  bei  $x_0$  durch

$$ds^2 = d\phi_1^2 + d\phi_2^2$$

ausgedrückt werden.

Die Äquivalenzklasse aller Funktionen derselben Ableitungen nullter, erster und zweiter Ordnung wie die Funktion  $\langle e, \cdot \rangle$  bei  $x_0$ , d.h. der 2-Jet, ist gleich

$$J^2(\langle e, x \rangle) = \langle e, x_0 \rangle + \kappa_1 d\phi_1^2 + \kappa_2 d\phi_2^2,$$

wobei  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  die Hauptkrümmungen der Fläche bei  $x_0$  bezeichnen.

Die Gauß-Krümmung  $K$  der Fläche bei  $x_0$  ist bekanntermaßen das Produkt der Hauptkrümmungen:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Damit kann mit obigen Bezeichnungen folgendes Lemma (siehe hierzu [67]) formuliert werden.

**Lemma 4.26.** *Die Gauß-Krümmung  $K$  ist positiv in  $x_0$ , wenn die Funktion  $\langle e, \cdot \rangle$  einen kritischen Punkt vom Index 0 oder Index 2 bei  $x_0$  besitzt. Wenn andererseits*

$K$  positiv ist in  $x_0$ , dann besitzt  $\langle e, \cdot \rangle$  einen kritischen Punkt vom Index 0 oder Index 2 bei  $x_0$ , wobei  $e$  in Richtung einer der Normalen in  $x_0$  weist.

Die Gauß-Krümmung  $K$  ist negativ in  $x_0$ , wenn die Funktion  $\langle e, \cdot \rangle$  einen kritischen Punkt vom Index 1 bei  $x_0$  besitzt. Wenn andererseits  $K$  negativ ist in  $x_0$ , dann besitzt  $\langle e, \cdot \rangle$  einen kritischen Punkt vom Index 1 bei  $x_0$ , wobei  $e$  in Richtung einer der Normalen in  $x_0$  weist.

Ansonsten ist  $K = 0$  bei  $x_0$ .

Hat die Funktion  $\langle e, \cdot \rangle$  einen kritischen Punkt vom Index 0 bei  $x_0$ , dann hat die Funktion  $\langle -e, \cdot \rangle$  einen kritischen Punkt vom Index 2 bei  $x_0$  und umgekehrt.

*Beweis:* Die Aussagen des Satzes folgen unmittelbar aus obigen Überlegungen und dem Lemma von Morse.  $\square$

Mit diesem Lemma ist man in der Lage, vom Index des kritischen Punktes einer Höhenfunktion direkt auf die Krümmung in diesem Punkt zu schließen und umgekehrt.

### Anwendung

Mit Hilfe von Lemma 4.26 kann man nun Satz 4.25 beweisen.

*Beweis:* Seien  $f$  eine straffe Immersion und  $p \in f(M)$  ein kritischer Punkt der lokalen Höhenfunktion  $h_{e,p}$  vom Index 0. Dann folgt aus Lemma 4.26, dass die Gauß-Krümmung  $K(p)$  im Punkt  $p$  positiv ist. Nach Voraussetzung war  $M$  straff immersiert mit  $\chi(M) \leq 0$ , woraus für alle Punkte  $q \in f(M)$  folgt:  $K(q) \leq 0$  im Widerspruch zur Annahme. Damit kann  $h_{e,p}$  auf einer straff immersierten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  lediglich Standardsattelpunkte besitzen für fast alle  $e \in S^2$ .

Besitzt  $h_{e,p}$  auf einer immersierten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  lediglich Standardsattelpunkte für fast alle  $e \in S^2$ , folgt aus Lemma 4.26, dass die Gauß-Krümmung  $K(p)$  für alle Punkte  $p$  negativ ist, womit  $M$  wegen der Negativität der Euler-Charakteristik straff immersiert ist.  $\square$

Bislang waren alle Aussagen lokaler Art. Um jedoch die Anzahl der kritischen Punkte der lokalen Höhenfunktionen mit der totalen Absolutkrümmung oder der Euler-Charakteristik in Verbindung zu bringen sind globale Aussagen für die ganze Fläche notwendig. Hierbei beschränkt man sich zunächst auf die  $ERF$   $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ .

**Lemma 4.27.** In  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  ist  $X = \text{grad } h_{e,p}$  der Gradient der lokalen Höhenfunktion  $h_{e,p}$  für fast alle  $e \in S^2$  ein reguläres nichtdegeneriertes Vektorfeld auf ganz  $f(M)$ .

Dabei heißt ein tangentiales Vektorfeld regulär, wenn es ein tangentiales Einheitsvektorfeld mit endlich vielen Singularitäten ist. Nichtdegeneriert heißt ein Vektorfeld dann, wenn alle seine Singularitäten nichtdegeneriert sind.

*Beweis:* Es ergibt sich:

$$X = \text{grad } h_{e,p} = \left( \left\langle e, \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\rangle \right)_i$$

ist offensichtlich ein tangentiales Vektorfeld.

$h_{e,p}$  ist für fast alle  $e \in S^2$  eine Morse-Funktion, womit die Hesse-Matrix  $H(h_{e,p})$  für fast alle  $e$  vollen Rang hat.

Es gilt:

$$H(h_{e,p}) = J(X),$$

wobei  $J(X)$  die Jacobi-Matrix von  $X$  bezeichnet. Diese hat damit ebenfalls für fast alle  $e$  vollen Rang, woraus die Nichtdegeneriertheit von  $X$  für fast alle  $e$  folgt. Es gilt (aus der Definition von  $X$ ):

$$\sharp(\text{Singularitäten von } X) = \sharp(\text{kritische Punkte von } h_{e,p}).$$

Die Anzahl kritischer Punkte von  $h_{e,p}$  auf  $f(M)$  ist endlich, da  $h_{e,p}$  für fast alle  $e$  eine Morse-Funktion ist, wobei die kritischen Punkte diskret liegen und  $f(M)$  kompakt ist. Denn wäre die Anzahl nicht endlich, würden sich die kritischen Punkte auf  $f(M)$  häufen im Widerspruch zur diskreten Lage dieser. Damit ist auch die Anzahl der Singularitäten von  $X$  endlich.

Im Allgemeinen kann  $X$  nur in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  ein auf ganz  $f(M)$  definiertes Vektorfeld sein. Um dies einzusehen, betrachte man Abbildung 4.2.

Es ist hier wieder zur Vereinfachung ein zweidimensionales Bild gezeichnet. Das Problem besteht im vorliegenden Fall jedoch analog. Es gilt  $p = p'$ , jedoch ist offensichtlich  $X(p) = 0$  und  $X(p') \neq 0$ , womit  $X$  in diesem Fall kein auf ganz  $f(M)$  definiertes Vektorfeld sein kann. In den anderen *ERF* können analoge Probleme auftreten.

Man betrachte nun den Fall von  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  und damit verbunden Abbildung 4.3.

Die Höhen  $h_{e,p}$  und  $h_{e,p'}$  bei den Punkten  $p$  und  $p'$  unterscheiden sich lediglich um eine Translation, die beim Bilden des Gradienten verschwindet. Für das in der Abbildung dargestellte  $e$  gilt beispielsweise  $X(p) = X(p') = 0$ .

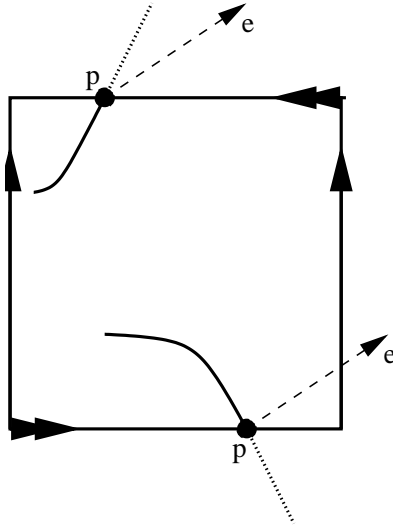


Abbildung 4.2: Problem in den nichtorientierbaren  $ERF$

Es bleibt noch zu klären, ob  $X$  auch auf dem Schnitt zweier Umgebungen  $U(p)$  und  $U(q)$  auch wohldefiniert ist. Betrachte hierzu Abbildung 4.4.

Für zwei Höhenfunktionen  $h_{e,p}$  und  $h_{e,q}$  und den mit diesen verbundenen Umgebungen  $U(p)$  und  $U(q)$  gilt

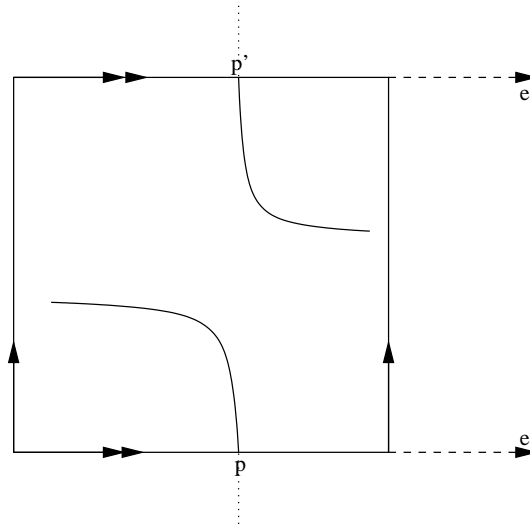
$$h_{e,p}(x) = h_{e,q}(x) + t \text{ für } x \in U(p) \cap U(q)$$

mit einem  $t \in \mathbb{R}$ . In dem abgebildeten Beispiel ist  $t = -2$ .

Diese Translation fällt bei der Gradientenbildung weg, woraus folgt, dass  $X$  ein überall (auf  $f(M)$ ) definiertes Vektorfeld ist.  $\square$

Allen Singularitäten eines Vektorfeldes wird eine Zahl zugeordnet, der sogenannte Index der Singularität, und zwar folgendermaßen: Man nehme eine kleine Umgebung eines singulären Punktes, welche keine anderen Singularitäten des Vektorfeldes beinhaltet, und sei der Rand dieser Umgebung eine einfach geschlossene Kurve. Weil die Fläche in jedem Punkt eine stetige erste Ableitung in jeder genügend kleinen Umgebung hat, kann man ein nicht singuläres Tangentenvektorfeld definieren. Der Index ist definiert als  $1/2\pi$  mal der Änderung der Richtung des ursprünglichen Vektorfeldes relativ zu dem lokalen nichtsingulären Vektorfeld längs dem Rand.

Mit dieser Definition kann folgender Satz formuliert werden, der auf H. Hopf [41] zurückgeht:

Abbildung 4.3:  $h_{e,p}$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ 

**Satz 4.28.** Die Summe der Indizes  $j$  aller Singularitäten  $1, \dots, r$  eines regulären Vektorfeldes auf einer Fläche  $M$  ist gleich der Euler-Charakteristik der Fläche

$$\sum_r j_r = \chi(M).$$

*Beweis:* siehe [41]. □

Das oben definierte Vektorfeld  $X$  ist genau dann singulär in einem Punkt  $p$ , wenn die lokale Höhenfunktion  $h_{e,p}$  in  $p$  einen kritischen Punkt hat.

Für straffe Flächen hat man in Satz 4.25 bewiesen, dass lediglich Sattelpunkte als kritische Punkte der lokalen Höhenfunktionen auftreten können. Damit hat  $X$  als Gradientenvektorfeld lokal folgendes Aussehen (siehe Abbildung 4.5).

Abbildung 4.5(b) zeigt die Berechnung des Index. Der Index dieser Singularität (und damit aller Singularitäten von  $X$  auf einer straff immersierten Fläche) ist  $j(\text{Singularität}) = -1$ . Denn die Änderung der Richtung des Vektorfeldes relativ zu einer Referenzrichtung (z.B. der horizontalen) beim positiven Durchlaufen eines einfach geschlossenen Weges in einer Umgebung um die Singularität, der homöomorph zum Kreis ist und keine weitere Singularität enthält, ist nach Abbildung 4.5(b) gleich  $-2\pi$ .

Damit gilt für eine straff immersierte Fläche  $M$  nichtpositiver Euler-Charakteristik  $\chi(M)$  in den 3-Torus  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  nach Satz 4.28:

$$\sum_r j_r = \chi(M).$$



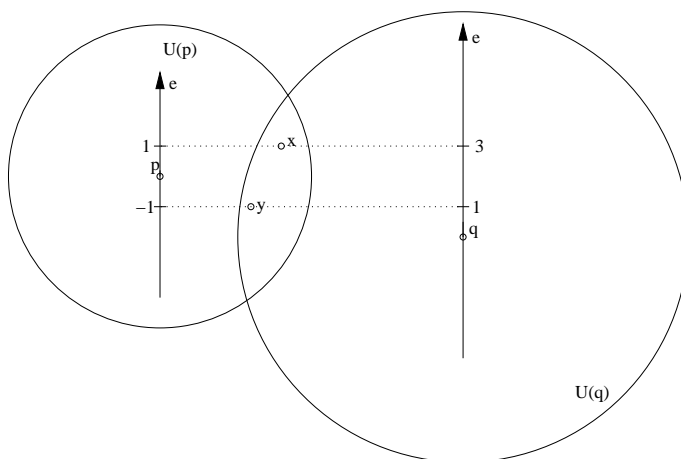
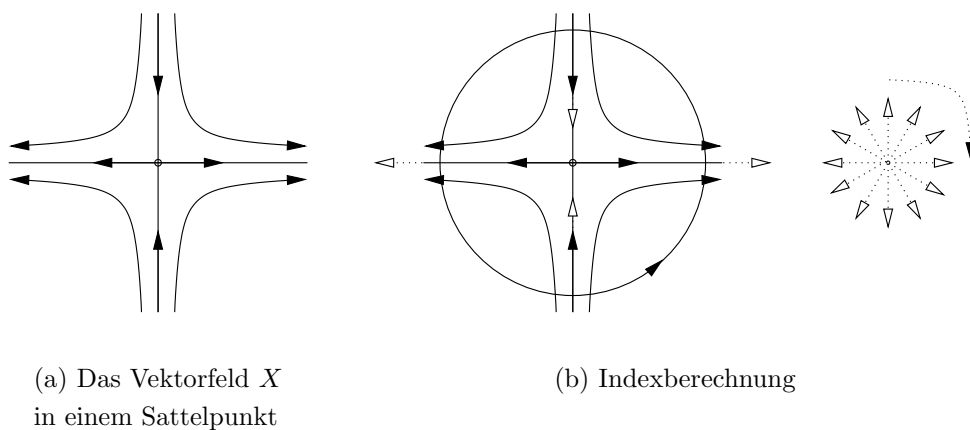


Abbildung 4.4: Schnitt zweier Umgebungen



(a) Das Vektorfeld  $X$  in einem Sattelpunkt

(b) Indexberechnung

Abbildung 4.5:  $X$  in einer Singularität

Andererseits ist der Betrag des Index in jeder Singularität gleich eins, womit

$$\left| \sum_r j_r \right| = \# \text{ Singularitäten von } X = |\chi(M)|$$

gilt, und man für straffe Flächen definitionsgemäß folgern kann

$$\# \text{ Singularitäten von } X = \tau(M).$$

Die obigen Aussagen werden jetzt in folgendem Satz zusammengefasst:

**Satz 4.29.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  eine straffe und glatte ( $C^\infty$ -) Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  in den 3-Torus.  $h_{e,p}$  sei die lokale Höhenfunktion und  $X = \text{grad}h_{e,p}$  das zugehörige Gradientenvektorfeld.

Dann gilt für fast alle  $e \in S^2$

$$\# \text{ Singularitäten von } X = \tau(M).$$

Man kann aus diesen Betrachtungen jedoch auch eine zur Straffheitsdefinition äquivalente Bedingung formulieren. Man hat lediglich vorauszusetzen, dass das Gradientenvektorfeld  $X$  (mit obigen Bezeichnungen) lediglich Singularitäten vom Index eins hat.

**Satz 4.30.** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  eine glatte ( $C^\infty$ -) Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  in den 3-Torus.  $h_{e,p}$  sei die lokale Höhenfunktion und  $X = \text{grad}h_{e,p}$  das zugehörige Gradientenvektorfeld.*

*Dann ist  $f$  genau dann straff, wenn für fast alle  $e \in S^2$  der Betrag des Index aller Singularitäten von  $X$  gleich eins ist.*

*Beweis:* Die Hinrichtung folgt aus den Betrachtungen vor Satz 4.29.

Ist andererseits für fast alle  $e \in S^2$  der Betrag des Index aller Singularitäten von  $X$  gleich eins, sind alle kritischen Punkte von  $h_{e,p}$  Sattelpunkte und  $f$  nach Satz 4.25 straff.  $\square$

Diese Sätze machen nur eine Aussage über Immersionen in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ . Im Folgenden wird die Behauptung auf die anderen *ERF* ausgedehnt. Dazu sind zunächst einige Bemerkungen zu Überlagerungen notwendig.

Sei  $\pi : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung. Dann heißt das Bild des injektiven Homomorphismus

$$\pi_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$$

die charakteristische Untergruppe der Überlagerung  $\pi$ , wobei mit  $\pi_1$  die Fundamentalgruppen der beiden Räume bezeichnet und der Einfachheit wegen der Basispunkt weggelassen wurde. Die charakteristische Untergruppe wird im Folgenden mit  $G(Y) \subset \pi_1(X)$  bezeichnet.

Ist die charakteristische Untergruppe ein Normalteiler von  $\pi_1(X)$ , wird die Überlagerung  $\pi$  normal genannt. Ein Homöomorphismus  $\phi : Y \rightarrow Y$  über  $X$  wird als Deckbewegung der Überlagerung bezeichnet. Diese Deckbewegungen bilden offensichtlich eine Gruppe, die Deckbewegungsgruppe  $\mathfrak{D}$  der Überlagerung  $\pi$ .

**Lemma 4.31.** *Für normale Überlagerungen  $\pi : Y \rightarrow X$  gelten folgende Aussagen:*

1.  $\mathfrak{D} \cong \pi_1(X)/G(Y)$ .

2. Die Blätterzahl der Überlagerung ist gleich der Ordnung von  $\mathfrak{D}$ .

*Beweis:* Siehe [43]. □

Die normalen Überlagerungen finden sich im Zusammenhang mit den  $ERF$  wieder. Es gilt folgender Satz, welcher die Anwendung der Bieberbachschen Sätze auf die vorliegenden kristallografischen Gruppen  $\Gamma$  darstellt.

**Satz 4.32.** *Sei  $X$  eine  $ERF$ . Dann wird  $X$  normal durch einen dreidimensionalen flachen Torus überlagert. Diese Überlagerung  $\pi$  ist Riemannsch, d.h. eine lokale Isometrie.*

*Beweis:* Siehe [74]. □

Auch die Deckbewegungsgruppe dieser Überlagerung lässt sich einfach finden.

**Satz 4.33.** *Seien  $ERF = \mathbb{R}^3/\Gamma$  und  $\Gamma^* = \Gamma \cap \mathbb{R}^3 (\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ .*

*Dann ist  $\Gamma/\Gamma^*$  die Decktransformationsgruppe  $\mathfrak{D}$  der Riemannschen Überlagerung  $\mathbb{R}^3/\Gamma^* \rightarrow ERF$  durch einen flachen Torus.*

*Beweis:* Siehe wiederum [74]. □

Mit diesen Vorbemerkungen kann man die obigen Aussagen über Immersionen in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  auch in die anderen Raumformen übertragen.

**Satz 4.34.** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine straffe Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  in eine  $ERF$ . Dann gibt es eine normale  $k$ -blättrige Überlagerung  $\pi : \mathbb{R}^3/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  der  $ERF$  durch einen flachen dreidimensionalen Torus. Des Weiteren sei  $h_{e,p}$  die lokale Höhenfunktion und  $X = \text{grad } h_{e,p}$  das zugehörige Gradientenvektorfeld auf dem Urbild  $\pi^{-1}(f(M))$  von  $f(M)$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ .*

*Dann gilt für fast alle  $e \in S^2$*

$$\sharp \text{ Singularitäten von } X = k \cdot \tau(M).$$

*Beweis:* Nach Lemma 4.32 wird jede  $ERF$  normal von einem flachen 3-Torus überlagert.  $\pi$  sei diese Überlagerung.

Als Überlagerung ist  $\pi$  insbesondere stetig (siehe [64]), und  $\pi^{-1}(f(M))$  ist, da  $f(M)$  kompakt ist, als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen.  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  ist ebenfalls kompakt und damit auch  $\pi^{-1}(f(M))$ . (Es gilt der Satz: In einem kompakten topologischen Raum ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist (vergleiche [36], Seite 127).)

Die Blätterzahl einer normalen Überlagerung ist nach Lemma 4.31 gleich der Ordnung von  $\mathfrak{D}$ , wobei  $\mathfrak{D} \cong \pi_1(X)/G(Y)$ . Für die charakteristische Untergruppe  $G(Y)$  von  $\pi$  gilt:

$$G(Y) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Damit ist die Ordnung von  $\mathfrak{D} \cong \pi_1(X)/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  endlich (vergleiche hierzu [46]) und mit ihr die Blätterzahl der Überlagerung.

Für diese Art von Überlagerungen (endliche Blätterzahl) gilt folgendes

**Lemma 4.35.** *Ist  $\pi : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung mit  $k$  Blättern ( $k$  endlich) und  $X$  sowie  $Y$  kompakt. Dann gilt*

$$\chi(X) = k \cdot \chi(Y).$$

*Beweis:* Siehe [15], Seite 216. □

Die Voraussetzungen dieses Lemmas sind nach obigen Bemerkungen erfüllt, womit die Euler-Charakteristik der überlagernden Fläche bekannt ist, wenn man die Blätterzahl der Überlagerung und die Euler-Charakteristik der überlagerten Fläche kennt.

Nun ist Satz 4.29 für die überlagernde Fläche  $\pi^{-1}(f(M))$  im 3-Torus anwendbar. Man hat lediglich noch zu zeigen, dass  $\pi^{-1}(f(M))$  eine straff immersierte Fläche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  ist. Dies ist in der Tat der Fall, denn  $\pi$  ist Riemannsch und damit eine lokale Isometrie, d.h. Krümmungseigenschaften der Fläche bleiben erhalten, insbesondere das Vorzeichen der Krümmung. Damit ist auch  $\pi^{-1}(f(M))$  straff immersiert und Satz 4.29 anwendbar.

$h_{e,p}$  sei die lokale Höhenfunktion und  $X = \text{grad } h_{e,p}$  das zugehörige Gradientenvektorfeld auf  $\pi^{-1}(f(M))$ .

Dann gilt für fast alle  $e \in S^2$ :

$$\# \text{ Singularitäten von } X = \tau(\pi^{-1}(f(M))) = |\chi(\pi^{-1}(f(M)))|.$$

Daraus folgt

$$\# \text{ Singularitäten von } X = k \cdot |\chi(f(M))| = k \cdot |\chi(M)|,$$

womit

$$\# \text{ Singularitäten von } X = k \cdot \tau(M)$$

gilt. □

In analoger Weise lässt sich auch Satz 4.30 auf die anderen  $ERF$  übertragen.

**Satz 4.36.** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine straffe Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) \leq 0$  in eine  $ERF$ . Dann gibt es eine normale  $k$ -blättrige Überlagerung  $\pi : \mathbb{R}^3/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  der  $ERF$  durch einen flachen dreidimensionalen Torus. Des Weiteren sei  $h_{e,p}$  die lokale Höhenfunktion und  $X = \text{grad } h_{e,p}$  das zugehörige Gradientenvektorfeld auf dem Urbild  $\pi^{-1}(f(M))$  von  $f(M)$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ . Dann ist  $f$  genau dann straff, wenn für fast alle  $e \in S^2$  der Betrag des Index aller Singularitäten von  $X$  gleich eins ist.*

*Beweis:* Dass  $f$  eine straffe Immersion ist, folgt aus dem Beweis von Satz 4.34, in welchem die Straffheit von  $\pi^{-1}(f(M))$  gezeigt wurde, denn damit gilt nach Satz 4.30, dass der Betrag des Index aller Singularitäten von  $X$  gleich eins ist.

Ist andererseits der Betrag des Index aller Singularitäten von  $X$  gleich eins, so ist wiederum nach Satz 4.30  $\pi^{-1}(f(M))$  straff immersiert und damit wegen der lokalen Isometrie von  $\pi$  auch  $f$  eine straffe Immersion.  $\square$

Handelt es sich bei der  $ERF$  um  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  gehen die Sätze 4.34 und 4.36 in natürlicher Weise in die Sätze 4.29 und 4.30 über ( $k = 1$ ).

### Die Anzahl der Blätter von $\pi$

Es bleibt die Bestimmung der Blätterzahl  $k$  bzw. der Ordnung der Decktransformationsgruppe  $\mathfrak{D}$ .

Es gilt

$$\mathfrak{D} \cong \pi_1(\mathbb{R}^3/\Gamma)/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

und

$$\pi_1(\mathbb{R}^3/\Gamma) \cong \Gamma.$$

Demnach hat man aus den Gruppen  $\Gamma$  die linear unabhängigen Translationen herauszufaktorisieren, um  $\mathfrak{D}$  zu erhalten.

Für  $\Gamma_1$  bleibt die triviale Gruppe und der daraus resultierenden Blätterzahl 1. Satz 4.34 geht damit folgerichtig in Satz 4.29 über.

Satz 1.4 liefert die anderen Gruppen. Für die Gruppen  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_5$  ergeben sich trivialerweise die Blätteranzahlen  $k$  der Überlagerungen zu  $k = 2, 3, 4, 6$ .

Allgemein gilt:

$$|\Theta| = k,$$

wobei  $\Theta$  die in Satz 1.4 angegebene Gruppe bezeichnet, welche ja gerade die entsprechende Gruppe modulo Translationen ist.

Damit ergibt sich die Blätterzahl  $k$  im Fall  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  zu vier, denn

$$k = |\Theta| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 4.$$

Auch die Anzahl der Blätter der ersten beiden ‘nichtorientierbaren’ Gruppen sind einfach zu bestimmen, denn die Gruppen  $\Gamma$  dieser beiden *ERF* werden sowieso nur von den Translationen und einem weiteren Element erzeugt, so dass neben der Identität lediglich die Gleitspiegelung als Element der Decktransformationsgruppe bleibt. Die Ordnung ist demnach in beiden Fällen zwei.

Die Blätteranzahlen der verbleibenden beiden Überlagerungen ergeben sich mit Hilfe folgender Überlegung: Der Fundamentalbereich der Gruppen ergab sich als Teilbereich des von den Translationen erzeugten Würfels. Damit bestimmen sich die Blätterzahlen der Überlagerungen des Torus aus

$$\text{Vol}(T^3) = k \cdot \text{Vol}(\mathbb{R}^3/\Gamma),$$

wobei  $\text{Vol}$  das euklidische Volumen der Fundamentalbereiche bezeichnet.

Offensichtlich sind die verbleibenden beiden Überlagerungen zweiblättrig.

Damit sind alle Blätterzahlen  $k$  bestimmt und man kann für alle Fälle die Euler-Charakteristik der überlagernden Flächen bestimmen, wenn man nur die Euler-Charakteristik der überlagerten Fläche kennt.

## 4.4 Straffe polyedrische Flächen in $ERF$ –differentialtopologisch–

In diesem Kapitel wird die Theorie kritischer Punkte von Höhenfunktionen auf polyedrischen Flächen in  $\mathbb{E}^3$  auf polyedrische Flächen in  $ERF$  übertragen.

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine polyedrische Immersion einer kompakten Fläche  $M$  in eine  $ERF$ .

Wie im Fall glatter Flächen ausführlich dargestellt, ist es nicht möglich, eine globale Höhenfunktion wie im klassischen Fall zu finden. Deshalb zieht man sich auch bei polyedrischen Flächen auf eine lokale Höhenfunktion zurück.

*Bemerkung 4.37.* Erneut sei auf die lokale Trivialität der universellen Überlagerung  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  verwiesen, welche die Existenz einer Umgebung  $U_p$  eines jeden Punktes  $p \in M$  liefert, so dass deren Faser trivial ist. Durch Subdivision ist es möglich, den  $Star(p)$ , d.h. die Diskumgebung eines jeden Punktes  $p \in M$ , so zu verkleinern, dass

$$Star(p) \subset U_p$$

gilt. Die Anzahl der Ecken bleibt dabei weiterhin endlich.

Jetzt kann man sich, analog zum Fall glatter Flächen, auf ein Blatt in der Faser über  $Star(p)$  beschränken und dort mit dem Standardskalarprodukt Höhen messen.

Dieser Bemerkung trägt die folgende Definition lokaler Höhenfunktionen auf einer polyedrischen Fläche  $M$  in  $ERF$  Rechnung. Sie ist analog zu der im glatten Fall und hier zur Wiederholung nochmals angegeben.

**Definition 4.38.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine polyedrische Immersion einer kompakten Fläche  $M$  in eine  $ERF$ .

Für gegebenes  $e \in S^2$  und einen beliebigen Punkt  $p \in f(M)$  ist die lokale Höhenfunktion  $h_{e,p}$  definiert durch

$$h_{e,p} : f(M) \supset Star(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Star(p) \ni q \mapsto \langle e, q \rangle,$$

wobei mit  $Star(p)$  die Diskumgebung von  $p$  bezeichnet ist (siehe Bemerkung 4.37).

Folgende Eigenschaft dieser lokalen Höhenfunktionen ist für das Weitere nötig:

**Definition 4.39.** Eine lokale Höhenfunktion ist in allgemeiner Lage bezüglich einer immersierten polyedrischen Fläche, wenn keine der Kanten der Fläche auf der Richtung  $e$  senkrecht steht.

Bemerkung 4.37 liefert die Möglichkeit, die Definition regulärer und kritischer Punkte einer (lokalen) Höhenfunktion aus dem Euklidischen zu übernehmen.

Seien  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  wiederum die universelle Überlagerung und  $\pi^{-1}(Star(p))$  diskrete Kopien von  $Star(p)$ . Im Folgenden beschränkt man sich auf ein Blatt der Faser von  $Star(p)$  und kann dieses mit  $Star(p)$  identifizieren.

Sei  $h_{e,p}$  eine lokale Höhenfunktion in allgemeiner Lage. Ein Punkt  $q \in f(M)$  einer polyedrischen Fläche  $M$  heißt regulär, wenn die Ebene senkrecht zu  $e$  durch  $p$  den  $Star(p)$  in zwei Teile schneidet. Mit dieser Definition sind wiederum alle Punkte im Inneren einer Seite oder einer Kante regulär, denn definitionsgemäß steht keine Kante oder Fläche senkrecht auf  $e$ .

Damit reicht es wiederum, lediglich den Ecken einen Index zuzuordnen:

$$ind(v, e) := 1 - \frac{1}{2}(\#\ \Delta \text{ mit } v \text{ als Mittelecke bzgl. } e).$$

Damit haben lokale Maxima und lokale Minima Index eins, denn diese Ecken sind für kein Dreieck  $\Delta$  Mittelecke. Liegt eine Ecke auf einer Kante oder in einer Seite, ist diese Ecke also ein regulärer Punkt, dann ist sie für genau zwei Dreiecke Mittelecke, womit der Index wunschgemäß verschwindet.

Mit diesen Definitionen lässt sich folgender Satz für polyedrisch immersierte Flächen in den 3-Torus formulieren und beweisen.

**Satz 4.40.** Seien  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  eine polyedrische Immersion einer kompakten Fläche  $M$  in eine ERF und  $h_{e,p}$  mit obigen Bezeichnungen eine lokale Höhenfunktion in allgemeiner Lage. Dann gilt:

$$\sum_{v \in M} ind(v, e) = \chi(M).$$

*Beweis:* Folgendes Lemma ist für den Beweis notwendig:

**Lemma 4.41.** Für eine polyedrische Immersion in einer ERF gilt:

$$3 \cdot \#\ \Delta = 2 \cdot \#\ \text{Kanten}.$$

*Beweis:* In einer polyedrischen Fläche ist jede Kante in genau zwei Dreiecken enthalten. Deshalb ist folgende Gleichung richtig:

$$3 \cdot \#\ \Delta = \#(\Delta, \text{Kante von } \Delta) = 2 \cdot \#\ \text{Kanten}.$$



□

Weil  $h_{e,p}$  in allgemeiner Lage ist, gilt für die polyedrische Immersion  $f$ :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in M} \text{ind}(v, e) &= \sum_{v \in M} \left(1 - \frac{1}{2}(\#\ \Delta \text{ mit } v \text{ als Mittelecke bzgl. } e)\right) \\ &= \#\ \text{Ecken} - \frac{1}{2} \sum_{v \in M} (\#\ \Delta \text{ mit } v \text{ als Mittelecke bzgl. } e). \end{aligned}$$

Da jedes Dreieck  $\Delta$  genau eine Mittelecke bzgl.  $e$  hat, gilt:

$$\sum_{v \in M} \text{ind}(v, e) = \#\ \text{Ecken} - \frac{1}{2} \#\ \Delta .$$

Obiges Lemma liefert:  $\#\ \Delta = 2 \cdot \#\ \text{Kanten} - 2 \cdot \#\ \Delta$ . Damit hat man:

$$\sum_{v \in M} \text{ind}(v, e) = \#\ \text{Ecken} - \#\ \text{Kanten} + \#\ \Delta = \chi(M).$$

□

**Korollar 4.42.** *Ist  $f$  eine straffe polyedrische Immersion einer kompakten Fläche  $M$  in den 3-Torus, dann gilt:*

$$\left| \sum_{v \in M} \text{ind}(v, e) \right| = \tau(M).$$

*Beweis:* Für polyedrische Immersionen gilt  $\tau(M) = |\chi(M)|$  und damit nach Satz 4.40

$$\tau(M) = \left| \sum_{v \in M} \text{ind}(v, e) \right|.$$

□

Offensichtlich gilt auch die andere Richtung.

**Korollar 4.43.** *Eine polyedrische Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  ist genau dann straff, wenn gilt*

$$\tau(M) = \left| \sum_{v \in M} \text{ind}(v, e) \right|.$$

Eine bessere Charakterisierung straffer polyedrischer Flächen folgt aus 2.2.

**Satz 4.44.** *Eine polyedrische Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_1$  einer kompakten Fläche  $M$  mit  $\chi(M) < 0$  in den 3-Torus ist genau dann straff, wenn es keine Ecke vom Index eins gibt.*

*Beweis:*  $f$  ist genau dann straff, wenn der Anteil positiver Krümmung von  $M$  verschwindet, es demnach weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum gibt, also genau dann, wenn es keine Ecke vom Index eins gibt. □



# Kapitel 5

## Straffe glatte Flächen mit Rand in ERF

In diesem Kapitel werden glatte Immersionen

$$f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$$

einer kompakten Fläche  $M$  mit nichtleerem Rand  $\partial M$  und Innerem  $M^\circ := M \setminus \partial M$  in  $ERF$  betrachtet und die Definition straffer Immersionen kompakter Flächen ohne Rand auf diese Klasse von Flächen übertragen.

Anschließend werden Existenzaussagen und Nichtexistenzaussagen solcher Immersionen bewiesen.

### 5.1 Definitionen

Zunächst seien die grundlegenden Definitionen einer berandeten Fläche, der Totalkrümmung und der totalen Absolutkrümmung berandeter Flächen in Analogie zum euklidischen Raum gegeben. Die Definitionen der Krümmungen im Euklidischen gehen auf [47] bzw. [35] zurück, wobei dort Immersionen  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit Rand in den  $(n + m)$ -dimensionalen euklidischen Raum untersucht werden. In diesem Zusammenhang sei auch auf [27], [28] (alternative Definition der Krümmungen) und [72] (verallgemeinerter Bildraum) und zur Morse-Theorie berandeter Mannigfaltigkeiten auf [14] verwiesen.

Die Definitionen beruhen auf lokalen Betrachtungen und sind deshalb auf den hier vorliegenden Fall übertragbar.

Zunächst sei eine berandete Fläche wie in [3] definiert:

**Definition 5.1.** Eine kompakte Fläche mit Rand (2-Mannigfaltigkeit mit Rand) ist ein Hausdorff-Raum  $(M, \partial M)$ , in welchem jeder Punkt entweder eine Umgebung besitzt, welche homöomorph zu  $\mathbb{E}^2$  oder zum abgeschlossenen Halbraum  $\mathbb{E}_+^2$  ist.

Das Innere  $M^\circ$  von  $(M, \partial M)$  besteht aus den Punkten von  $(M, \partial M)$ , welche eine Umgebung homöomorph zu  $\mathbb{E}^2$  haben.

Die Punkte  $x \in (M, \partial M)$  von  $(M, \partial M)$ , für welche es eine Umgebung  $U$  und einen Homöomorphismus  $h : \mathbb{E}_+^2 \rightarrow U$  gibt, so dass  $h(0) = x$  gilt, bilden den Rand  $\partial M$  von  $(M, \partial M)$ .

Damit ist  $(M, \partial M)$  als Vereinigung der beiden Punktmengen  $M^\circ$  und  $\partial M$  darstellbar.

Nach dieser elementaren Definition einer berandeten Fläche kann man die oben angekündigte Definition der Krümmungsgrößen angeben.

**Definition 5.2.** Sei  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine glatte Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit nichtleerem Rand  $\partial M$  in eine ERF.

Mit  $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  sei das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichnet. Dieses ist tangential an  $M^\circ$ , normal an  $\partial M$  und zeigt nach außen.

Weiter sei  $\perp_+^1$  der Raum der äußeren Einheitsnormalen, definiert durch

$$\perp_+^1 := \{(p, e) | p \in M^\circ, e \in \perp_p^1(M^\circ)\} \cup \{(p, e) | p \in \partial M, e \in \perp_p^1(\partial M), \langle e, \nu \rangle \geq 0\},$$

wobei  $\perp_p^1(M^\circ) \cong S^0$  und  $\perp_p^1(\partial M) \cong S^1$  gilt.

Dann heißt

$$\tau(M, \partial M) := \frac{1}{4\pi} \int_{\perp_+^1} |K(e)| do$$

totale Absolutkrümmung und

$$t(M, \partial M) := \frac{1}{4\pi} \int_{\perp_+^1} K(e) do$$

totale Krümmung der Fläche  $(M, \partial M)$ , wobei  $K(e)$  die Determinante der Weingarten-Abbildung  $L(e)$  in Normalenrichtung  $e$  und  $do$  das kanonische Volumenelement von  $\perp_+^1$  bezeichnet.

**Folgerung 5.3.** Sei  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine glatte Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit nichtleerem Rand  $\partial M$  in eine ERF.

Für die totale Absolutkrümmung einer Fläche mit Rand gilt

$$\tau(M, \partial M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\perp^1_+} |K(e)| d\sigma = \frac{1}{8\pi} \int_{\perp^1(\partial M)} |K(e)| d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\perp^1(M^\circ)} |K(e)| d\mu,$$

wobei  $d\sigma$  bzw.  $d\mu$  die kanonischen Volumenelemente von  $\perp^1(\partial M)$  bzw.  $\perp^1(M^\circ)$  bezeichnen.

*Beweis:* Diese Gleichung folgt direkt aus der Tatsache, dass

$$L(-e) = -L(e)$$

gilt und dass der Beitrag des Randes zur totalen Absolutkrümmung von  $(M, \partial M)$  gerade die Hälfte seiner totalen Absolutkrümmung ist.  $\square$

**Folgerung 5.4.** Seien  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  eine glatte Immersion einer kompakten Fläche  $M$  mit nichtleerem Rand  $\partial M$  in eine ERF und  $M_\varepsilon$  die äußere Parallelfläche von  $M$  im Abstand  $\varepsilon$  definiert durch

$$M_\varepsilon := f_\varepsilon(p, e) = f(p) + \varepsilon e, \quad e \in \perp^1_+.$$

Dann gilt für die totale Absolutkrümmung von  $(M, \partial M)$ :

$$\begin{aligned} \tau(M, \partial M) &= \frac{1}{4\pi} \int_{M_\varepsilon} |K_\varepsilon| d\sigma_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{M^\circ} |K| d\sigma + \frac{1}{8\pi} \int_{\perp^1(\partial M)} |K(e)| d\sigma, \end{aligned}$$

wobei  $K_\varepsilon$  bzw.  $K$  die Gauß-Krümmung von  $M_\varepsilon$  bzw.  $M$  und  $d\sigma_\varepsilon$  bzw.  $d\sigma$  das zugehörige Volumenelement bezeichnen.

Insbesondere gilt für eine ebene konvexe Randkurve einer Fläche  $(M, \partial M)$  im ‘Inneren’ der ERF:

$$\tau(M, \partial M) = \frac{1}{2\pi} \int_{M^\circ} |K| d\sigma + \frac{1}{8\pi} \int_{\perp^1(\partial M)} |K(e)| d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{M^\circ} |K| d\sigma + 1.$$

*Beweis:*  $M_\varepsilon$  ist eine Fläche ohne Rand und diffeomorph zu  $\perp^1_+$ . Damit gilt die Gleichheit

$$\tau(M, \partial M) = \frac{1}{4\pi} \int_{M_\varepsilon} |K_\varepsilon| d\sigma_\varepsilon.$$

Im ‘Inneren’ bedeutet hier wieder, dass die Hochhebung der Randkurve in den  $\mathbb{R}^3$  aus disjunkten Kopien derselben besteht. In diesem Fall ist  $\frac{1}{8\pi} \int_{\perp^1(\partial M)} |K(e)| d\sigma$  gleich der mit  $8\pi$  normierten totalen Absolutkrümmung des Standardrotations-torus und damit gleich eins.  $\square$

*Bemerkung 5.5.* Für eine geschlossene, reguläre und ebene Kurve  $\partial M(t)$  gilt im Euklidischen für die totale Absolutkrümmung  $\tau(\partial M(t))$  die Ungleichung:

$$\tau(\partial M(t)) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} |\kappa(t)| \cdot \|\dot{\partial M}(t)\| dt \geq 1, \quad (5.1)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Kurve einfach geschlossen und konvex ist. Ist dies der Fall, (d.h. die Krümmung  $\kappa$  der Kurve wechselt das Vorzeichen nicht,) so stimmt diese Ungleichung mit der Ungleichung von Fenchel [32] über die totale Krümmung von Raumkurven überein.

Die Definition 5.1 von  $\tau(\partial M(t))$  stimmt für geschlossene, reguläre und ebene Kurven mit der totalen Absolutkrümmung

$$\tau(\partial M(t)) = \frac{1}{8\pi} \int_{\perp^1(\partial M)} |K(e)| d\sigma$$

der Kurve, welche aus Definition 5.2 folgt, überein, was auch aus Folgerung 5.4 hervorgeht.

Es sei hier bemerkt, dass die Ungleichungen (5.1) und von Fenchel immer dann auch in *ERF* anwendbar bleiben, wenn man sich in obigem Sinne im ‘Inneren’ befindet.

Allgemein werden die Ungleichungen jedoch falsch, da es offensichtlich geschlossene Kurven gibt, welche überall verschwindende Krümmung besitzen. Ungleichung (5.1) wird damit in *ERF* im Allgemeinen trivial.

## 5.2 Straffheit

Straffe Flächen ohne Rand waren definiert als solche minimaler totaler Absolutkrümmung. Man konnte beweisen, dass dies zum Einen äquivalent ist zu der Aussage, dass alle Punkte dasselbe Vorzeichen haben, also  $K$  bzw.  $\det L(e)$  das Vorzeichen nicht wechselt, und zum Anderen äquivalent ist zu der Aussage, dass die totale Absolutkrümmung mit dem Betrag der Totalkrümmung der Fläche übereinstimmt (vergleiche Korollar 2.3).

Diese letzte Eigenschaft kompakter straffer Flächen in  $ERF$  soll nun zur Definition straffer Flächen mit Rand herangezogen werden. Es wird sich zeigen, dass auch in dem vorliegenden Fall diese Flächen genau diejenigen mit minimaler totaler Absolutkrümmung sind.

**Definition 5.6.** *Eine Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  mit Rand  $\partial M$  in eine  $ERF$  heißt straff, wenn gilt*

$$\tau(M, \partial M) = |t(M, \partial M)|,$$

*also wenn die totale Absolutkrümmung mit dem Betrag der Totalkrümmung von  $(M, \partial M)$  übereinstimmt.*

Nach [68] gilt die Formel von Gauß-Bonnet auch für Flächen mit Rand, d.h.

$$t(M) = \chi(M)$$

für eine zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit  $(M, \partial M)$  mit nichtleerem Rand. Der Beweis kann rein innergeometrisch geführt werden und ist demnach auch in dem hier vorliegenden Fall richtig und anwendbar, woraus folgende Aussage unmittelbar folgt.

**Folgerung 5.7.** *Eine Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  mit Rand in eine  $ERF$  ist genau dann straff, wenn gilt*

$$\tau(M) = |\chi(M)|.$$

Dies gilt ganz in Analogie zum Fall kompakter Flächen ohne Rand.

### 5.3 Existenz- und Nichtexistenzaussagen

Anschließend an diese Definitionen werden jetzt Existenz- und Nichtexistenzaussagen über straffe Immersionen berandeter Flächen in *ERF* bewiesen. Die Methoden sind ähnlich denen im Fall unberandeter Flächen. Insbesondere wird die *tight surgery* verwendet.

**Satz 5.8.** *Sei  $(M, \partial M)$  topologisch äquivalent zu  $(S^2 / \bigcup_{i=1}^n D_i, \bigcup_{i=1}^n C_i)$ ;  $i > 0$ , wobei mit  $D_i$  offene Kreisscheiben mit den Rändern  $C_i$  bezeichnet sind und  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , wenn  $i \neq j$  gilt.*

*Dann existiert eine straffe Einbettung  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  von  $(M, \partial M)$  in jede *ERF* für jedes beliebige  $n$ .*

*Beweis:* Sei  $n = 1$ . Damit ist  $(M, \partial M)$  homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  mit  $\chi(K) = 1$ .

Damit ist eine flache abgeschlossene Kreisscheibe  $K$  im Innern einer *ERF* mit konvexer Randkurve  $\partial K$  eine straffe Einbettung von  $(M, \partial M)$ , denn nach Satz 5.3 und der Straffheitsdefinition muss

$$\tau(K) = \tau(K^\circ) + \frac{1}{2}\tau(\partial K) = 1 = |\chi(K)|$$

gelten.

Der erste Summand ist für flaches  $K$  offensichtlich null, der zweite für konvexes und ebenes  $\partial K$  gleich eins (siehe Folgerung 5.4).

*Bemerkung 5.9.* Entfernt man aus  $K$  eine weitere offene Kreisscheibe, erzeugt man dadurch keine straffe Einbettung, denn die totale Absolutkrümmung dieser Sphäre mit zwei entfernten Kreisscheiben (d.h. verschwindender Euler-Charakteristik) ergibt sich zu

$$\tau(M) = \tau(M^\circ) + \frac{1}{2}\tau(\partial M) = 2$$

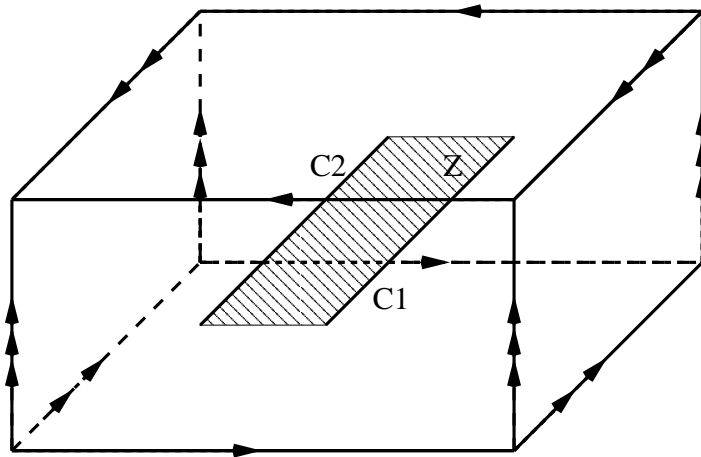
Man hat demnach eine Einbettung zu finden, welche lediglich aus Flachpunkten besteht und deren Randkurve ebenfalls keine Krümmung besitzt, um ein straff eingebettetes Zylinderband zu erhalten.

Sei nun  $n = 2$ , dann ist  $(M, \partial M)$  homöomorph zu einem Zylinderband  $Z$ . Abbildung 5.1 zeigt ein straff eingebettetes  $Z$ ,

denn offensichtlich ist  $\tau(Z^\circ) = \tau(\partial Z) = 0$ , womit auch das Verschwinden der totalen Absolutkrümmung des Zylinderbandes  $Z$  folgt. Da  $\chi(Z) = 0$  gilt

$$\tau(Z) = |\chi(Z)| = 0,$$



Abbildung 5.1: Straff eingebettetes Zylinderband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ 

womit die Straffheit dieser Einbettung gezeigt ist.

Nun kann man den Satz für beliebiges  $n$  beweisen, denn entfernt man aus dem eingebetteten straffen Zylinderband offene Kreisscheiben mit konvexer Randkurve  $C$  und der Bedingung  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , wenn  $i \neq j$ , erhält man straffe Einbettungen der Sphäre mit beliebig vielen entfernten offenen Kreisscheiben.

Dies ist offensichtlich richtig, denn durch das Entfernen einer flachen offenen Kreisscheibe wird der Betrag der Euler-Charakteristik um eins erhöht, ebenso wie die normierte totale Absolutkrümmung

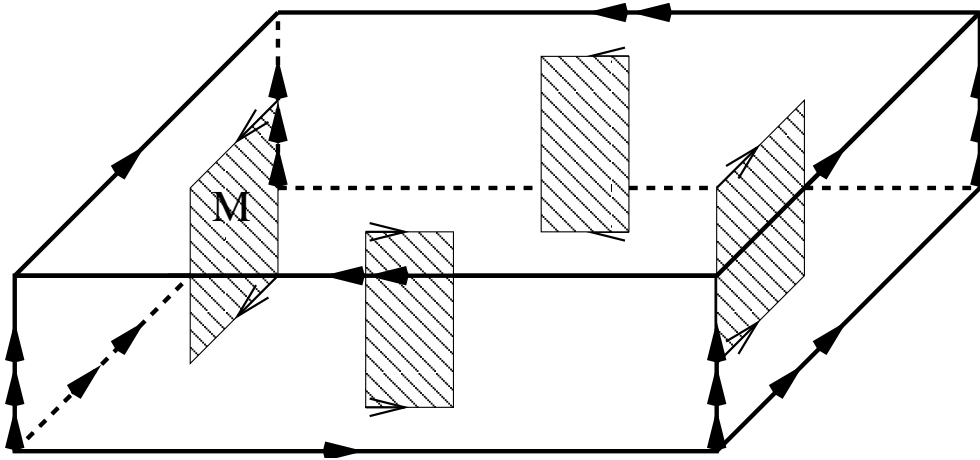
$$\frac{1}{2}\tau(\partial M) = 1$$

der Randkurve und die gewünschte Gleichheit von  $\tau$  und  $|\chi|$  bleibt erhalten, die Einbettung also straff.

Dies kann iteriert werden, womit der Satz bewiesen ist, denn die Konstruktion ist in alle anderen *ERF* übertragbar, da lediglich die Existenz gegenüberliegender Seiten vorausgesetzt wird, welche durch Translation miteinander identifiziert sind.

□

*Bemerkung 5.10.* Betrachte die in Abbildung 5.2 dargestellte eingebettete Fläche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ . Sie zeigt ebenfalls ein straff eingebettetes Zylinderband, welches nicht aus obiger Konstruktion hervorgeht. Analoge straffe Einbettungen können in den anderen orientierbaren Raumformen erzeugt werden. Bei Entfernung offener disjunkter flacher Kreisscheiben erhält man wie oben straffe Einbettungen der Sphäre mit beliebig vielen Löchern in dieser orientierbaren Raumform.

Abbildung 5.2: Straff eingebettetes Zylinderband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ 

Weiter macht obiges Beispiel klar, dass die im Euklidischen richtige Aussage, die totale Absolutkrümmung einer immersierrten Fläche mit Rand sei mindestens eins, im Falle der *ERF* nicht mehr gilt (vergleiche [35]).

Ist  $M$  homöomorph zum Zylinderband, gilt  $\chi(M) = 0$ , d.h. das Zylinderband ist straff immersierrt, wenn die totale Absolutkrümmung verschwindet. In diesem Fall ist also die Definition der Straffheit äquivalent zur Minimalität der totalen Absolutkrümmung. Dies gilt allgemein, denn man kann folgenden Satz beweisen.

**Satz 5.11.** *Für die totale Absolutkrümmung  $\tau(M, \partial M)$  einer Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  mit Rand in eine ERF gilt*

$$\tau(M, \partial M) \geq |\chi(M, \partial M)|.$$

*Eine Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  mit Rand in eine ERF ist also genau dann straff, wenn ihre totale Absolutkrümmung minimal ist.*

*Beweis:* Für die totale Absolutkrümmung einer kompakten Fläche  $(M, \partial M)$  gilt:

$$\tau(M, \partial M) = \frac{1}{4\pi} \int_{M_\varepsilon} |K_\varepsilon| do_\varepsilon.$$

D.h. sie ist gleich der totalen Absolutkrümmung der Parallellfläche. Diese ist nach Konstruktion  $C^\infty$  bis auf eine Menge vom Maß null (dort ist sie  $C^1$ ). Damit ist der Satz von Gauß-Bonnet auf die Parallellfläche anwendbar und es gilt, wie im Fall kompakter Flächen ohne Rand bewiesen

$$\frac{1}{4\pi} \int_{M_\varepsilon} |K_\varepsilon| do_\varepsilon = \frac{1}{2} \tau(M_\varepsilon) \geq \frac{1}{2} |\chi(M_\varepsilon)|.$$

Der Satz folgt jetzt aus der Tatsache, dass für die Euler-Charakteristik  $\chi(M_\varepsilon)$  der Parallellfläche  $M_\varepsilon$  von  $(M, \partial M)$  gilt ([47]):

$$\chi(M_\varepsilon) = 2\chi(M, \partial M).$$

Denn damit ist

$$\tau(M, \partial M) \geq |\chi(M, \partial M)|$$

und eine Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  mit Rand in eine *ERF* genau dann straff, wenn ihre totale Absolutkrümmung minimal ist, denn dann gilt

$$\tau(M, \partial M) = |\chi(M, \partial M)|,$$

was der obigen Definition der Straffheit entspricht.  $\square$

Straffe kompakte Flächen mit Rand in *ERF* sind demnach genau diejenigen minimaler totaler Absolutkrümmung, ganz in Analogie zum klassischen Fall.

**Satz 5.12.** *Sei  $(M, \partial M)$  topologisch äquivalent zu  $(P/\bigcup_{i=1}^n D_i, \bigcup_{i=1}^n C_i)$ ;  $i > 0$  ( $P$  sei die projektive Ebene mit beliebig vielen Henkeln), wobei mit  $D_i$  offene Kreisscheiben mit den Rändern  $C_i$  bezeichnet sind und  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , wenn  $i \neq j$  gilt.*

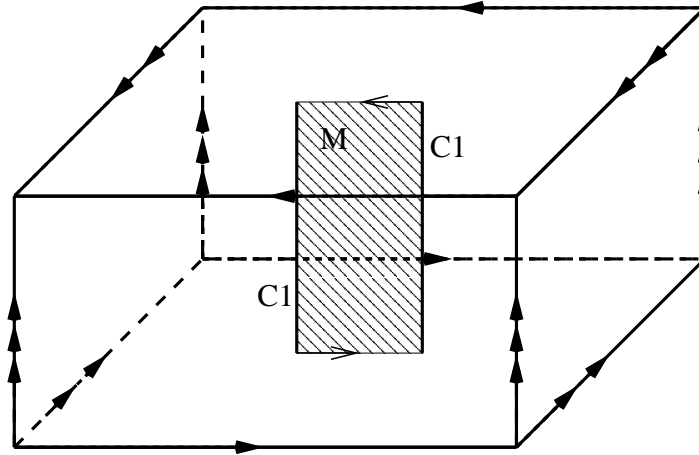
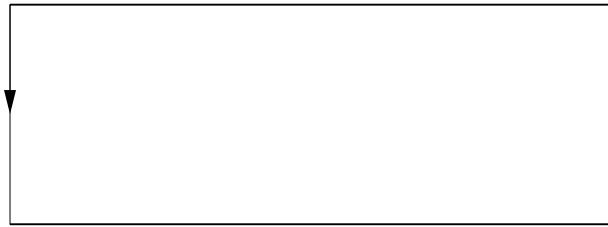
*Dann existiert eine straffe Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  von  $(M, \partial M)$  für jedes beliebige  $n$  in die orientierbaren *ERF*  $\mathbb{R}^3/\Gamma_i$  für  $i = 2, 4, 5, 6$  und in alle nichtorientierbaren *ERF*. Im Fall nichtorientierbarer *ERF* und der orientierbaren *ERF*  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  kann  $f$  als Einbettung gewählt werden.*

*Ist das Geschlecht von  $(M, \partial M)$  größer als zwei, existiert eine straffe Immersion  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  von  $(M, \partial M)$  für beliebiges  $n$  auch in die beiden *ERF*  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$ .*

*Bemerkung 5.13.* Das Geschlecht einer kompakten Fläche mit Rand ist gleich der kompakten Fläche, aus der die vorliegende durch Entfernen offener Kreisscheiben entstanden ist.

*Beweis:* Sei  $n = 1$ . Dann ist  $(M, \partial M)$  homöomorph zu einem Möbiusband, d.h. einer Fläche mit einer Randkomponente und verschwindender Euler-Charakteristik. Um eine straffe Einbettung zu erhalten, muss diese aus lauter Flachpunkten bestehen, und auch die Randkurve darf keine Krümmung besitzen.

Abbildung 5.3 a) zeigt eine straffe Einbettung des Möbiusbandes  $M$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ . Dass es sich bei  $M$  in Abbildung 5.3 a) tatsächlich um ein Möbiusband handelt,

(a) Straff eingebettetes Möbiusband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ 

(b) Ebenes Modell des Möbiusbandes

Abbildung 5.3: Das Möbiusband

wird durch die Identifizierung auf  $M$  (durch die Pfeile verdeutlicht), welche durch die Identifikationen der Seiten von  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  induziert wird, klar. Man hat hier ein Möbiusband wie im ebenen Modell (siehe Abbildung 5.3 (b)) vorliegen.

Wie im Falle des straff eingebetteten Zylinderbandes verschwindet auch hier die totale Absolutkrümmung und stimmt demnach mit der Euler-Charakteristik überein, womit die Straffheit der Einbettung gezeigt ist.

In  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  erhält man die straffe Einbettung des Möbiusbandes analog, denn die vordere Hälfte der Unterseite wird mit der vorderen Hälfte der Oberseite ebenfalls mit einem Twist identifiziert, was auf die gleiche Einbettung führt wie oben.

Auch die Einbettungen in die nichtorientierbaren *ERF* ergeben sich nach obigem Prinzip, denn in allen gibt es gegenüberliegende Seiten, welche durch eine Gleit- spiegelerung miteinander identifiziert werden, so dass analog zu oben ein ebenes Möbiusband entsteht, welches der Straffheitsbedingung genügt.

Das Entfernen offener flacher Kreisscheiben nach Voraussetzung und konvexem Rand liefert wie in obigem Satz die Existenz straffer Einbettungen der projektiven Ebene mit beliebig vielen Löchern in die *ERF*.

Um die Existenz einer straffen Immersion in die *ERF*  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$  zu zeigen, sei auf Abbildung 5.4 und 5.5 verwiesen. Abbildung 5.4 zeigt ein straff immer-

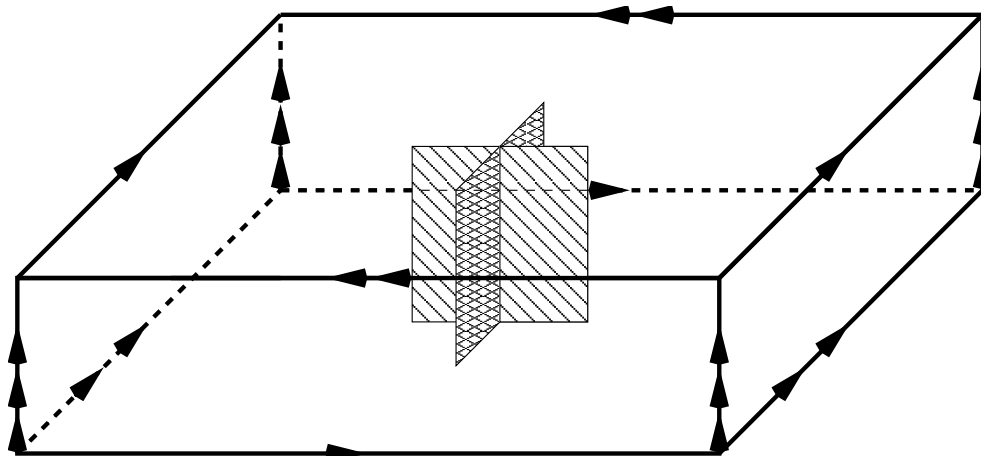


Abbildung 5.4: Straff immersierts Möbiusband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$

siertes Möbiusband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$ . Nach zweimaliger Identifikation von Boden- und Dachfläche um  $\pi/2$  entsteht die benötigte Identifikation durch einen Twist, und man hat das bekannte ebene Modell des Möbiusbandes vorliegen. Wegen der überall identisch verschwindenden Krümmung ist diese Immersion straff, denn es gilt  $\tau(M) = 0 = |\chi(M)|$ .

Eine Immersion in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$  findet man analog. Man studiere dazu Abbildung 5.5. Den benötigten Twist zum Erhalt einer nichtorientierbaren Fläche erhält man durch dreimaliges Verschrauben um  $\pi/3$ .

Auch hier liefert das Entfernen flacher offener Kreisscheiben straffe Immersionen für beliebiges  $n > 1$ .

In allen bisher betrachteten Fällen liefert die tight surgery, d.h. das straffe Einhängen beliebig vieler weiterer Henkel die Existenz straffer Flächen ungerader Euler-Charakteristik mit beliebig vielen Löchern und beliebigem Geschlechts in die betrachteten *ERF*.

Es bleibt eine straffe Immersion der projektiven Ebene mit drei Henkel und einer entfernten Kreisscheibe in die *ERF*  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  anzugeben.

Man startet mit der straffen Immersion der projektiven Ebene mit drei Henkeln ohne Rand und entfernt offene Kreisscheiben aus einem flachen Stück. Es ergeben

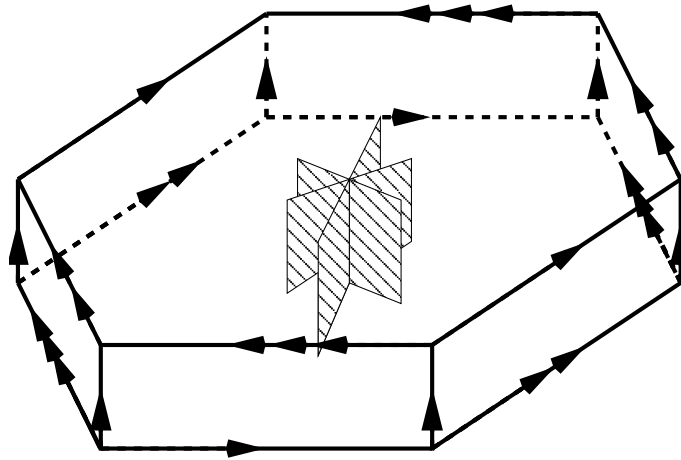


Abbildung 5.5: Straff immersierts Möbiusband in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$

sich offensichtlich straffe Immersionen in diese beiden *ERF* für beliebiges  $n$ . Straffes Einhängen weiterer Henkel schließt den Beweis des Satzes auch für diese *ERF* ab.  $\square$

*Bemerkung 5.14.* Der Satz zeigt außerdem, dass es straffe glatte Einbettungen des Möbiusbandes in verschiedene *ERF* gibt. Dies ist im Gegensatz zum Euklidischen, denn nach einem Satz von Kuiper ([56]) existiert dort keine solche.

Die Aussage lässt sich jedoch auf den Drei-Torus und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  übertragen, denn es gelten die folgenden beiden Sätze.

**Satz 5.15.** *Es existiert keine straffe Immersion des Möbiusbandes in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ .*

*Beweis:* Gebe es eine solche, müsste die Krümmung überall verschwinden, d.h. weder das Innere noch der Rand dürften Krümmung tragen.

Analoge Beweisführung wie im Falle des Nichtexistenzsatzes einer straffen Immersion der Kleinschen Flasche in diese *ERF* beweist den Satz, denn dort wurde die Nichtexistenz eines Möbiusbandes (um ein erzeugendes Element in der Fundamentalgruppe) bewiesen.  $\square$

**Satz 5.16.** *Es existiert keine straffe Immersion des Möbiusbandes  $M$  in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$ .*

*Beweis:* Der Beweis läuft analog zu dem von Satz 3.19.

Man nimmt erneut an,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_3$  sei eine solche straffe Immersion. Der Widerspruch zu dieser Annahme und damit der Beweis des Satzes folgt wieder aus der 3-Blättrigkeit der normalen Überlagerung des  $T^3$ , deren Eigenschaft lokale

Isometrie zu sein und der transitiven Wirkung der Decktransformationsgruppe zusammen mit der Nichtexistenz einer straffen Immersion des Möbiusbandes in den  $T^3$ . (Dass das Möbiusband nicht durch drei bzw. ein Zylinderband überlagert werden kann folgt auch hier aus der Tatsache, dass orientierbare Überlagerungen nichtorientierbarer Flächen geradzahlablättrig sein müssen.)  $\square$

**Satz 5.17.** *Sei  $(M, \partial M)$  topologisch äquivalent zu  $(T/\bigcup_{i=1}^n D_i, \bigcup_{i=1}^n C_i)$ ;  $i > 0$  ( $T$  sei eine orientierbare Fläche nichtpositiver Euler-Charakteristik), wobei mit  $D_i$  offene Kreisscheiben mit den Rändern  $C_i$  bezeichnet sind und  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , wenn  $i \neq j$  gilt.*

*Dann existiert eine straffe Einbettung  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  von  $(M, \partial M)$  für jedes beliebige  $n$  in alle ERF.*

*Beweis:* Man starte mit einem parabolischen straffen Torus  $M_{alt}$  (überall existent). Entfernung einer offenen konvexen Kreisscheibe liefert eine straffe Einbettung der berandeten orientierbaren Fläche  $M_{neu}$  vom Geschlecht eins, denn

$$\tau(M_{neu}) = \tau(M_{alt}) + 1 = |\chi(M_{alt})| + 1 = |\chi(M_{neu})|.$$

Iteration dieses Verfahrens zusammen mit der tight surgery beweist den Satz. (Straffes Einhängen weiterer Henkel in das oben konstruierte straffe Zylinderband liefert den Beweis dieses Satz für  $n \geq 2$ .)  $\square$

*Bemerkung 5.18.* Straffes Einhängen weiterer Henkel  $H$  auf eine straffe Kreisscheibe  $K$  liefert nicht den Beweis dieses Satzes, denn die totale Absolutkrümmung der so entstandenen Fläche  $M$  ergibt sich zu

$$\tau(M) = \tau(K) + \tau(H) = |\chi(K)| + 1 = 2 \neq |\chi(M)|.$$

Diese Konstruktion liefert also wie behauptet keine straffe Einbettung.

*Bemerkung 5.19.* Insbesondere zeigt dieser Satz, dass es straffe (glatte) Immersionen (Einbettungen) kompakter orientierbarer Flächen nichtpositiver Euler-Charakteristik mit nur einer Randkomponente in jede ERF gibt.

Im dreidimensionalen euklidischen Raum vermutet man die Nichtexistenz straffer Immersionen dieser Art von Flächen (siehe hierzu White's Vermutung in [70]).

*Bemerkung 5.20.* Startet man im Beweis des Satzes mit einer straffen Immersion eines Torus, welche keine Einbettung besitzt erhält man durch obige Konstruktion ebenfalls straffe Immersionen orientierbarer Flächen nichtpositiver Euler-Charakteristik mit beliebig vielen Randkomponenten, welche keine Einbettungen sind.

**Satz 5.21.** Sei  $(M, \partial M)$  topologisch äquivalent zu  $(K/\bigcup_{i=1}^n D_i, \bigcup_{i=1}^n C_i)$ ;  $i > 0$  ( $K$  sei eine nichtorientierbare Fläche gerader Euler-Charakteristik), wobei mit  $D_i$  offene Kreisscheiben mit den Rändern  $C_i$  bezeichnet sind und  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , wenn  $i \neq j$  gilt.

Dann existiert eine straffe Einbettung  $f : (M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  von  $(M, \partial M)$  für jedes beliebige  $n$  in alle nichtorientierbaren ERF und in die orientierbaren ERF  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$ .

In die orientierbaren ERF  $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$  existiert eine straffe Immersion für jedes beliebige  $n$  und in die beiden ERF  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  und  $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$  existiert eine straffe Immersion für alle  $n$ , falls das Geschlecht von  $(M, \partial M)$  größer als eins ist.

*Beweis:* Man beginne mit den jeweils existierenden Einbettungen bzw. Immersionen der geschlossenen, nichtorientierbaren Flächen gerader Euler-Charakteristik  $M_{alt}$  und entferne an den (immer existierenden) flachen Teilen eine offene Kreisscheibe. Damit ist die Euler-Charakteristik der Fläche mit Rand um eins kleiner als die der geschlossenen Fläche und die (halbe) totale Absolutkrümmung der Randkurve ist eins. Man erhält somit für die totale Absolutkrümmung der konstruierten Fläche  $M_{neu}$ :

$$\tau(M_{neu}) = \tau(M_{alt}) + 1 = |\chi(M_{alt})| + 1 = |\chi(M_{neu})|,$$

woraus die Straffheit der Fläche mit Rand folgt.

Iteration dieser Prozedur und die tight surgery beweist den Satz.  $\square$

*Bemerkung 5.22.* Implizit hat man auch noch die Existenz einer straffen Immersion dieser Art von Flächen in  $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ ,  $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$  und in die nichtorientierbaren ERF gezeigt, welche keine Einbettung ist.

### Vermutung:

*Ist  $f$  eine straffe Immersion einer kompakten Fläche  $(M, \partial M)$  mit Rand in eine ERF, dann besteht  $f|\partial M$  aus ebenen konvexen Kurven, wobei eben bedeutet, dass die Kurve in der universellen Überlagerung in einer Ebene liegt (für evtl. jede Komponente einzeln).*

Alle gefundenen straffen Immersionen kompakter Flächen mit Rand haben diese Eigenschaft (, wobei natürlich Kurven überall verschwindender Krümmung ebenfalls als konvex angesehen werden). Außerdem wird vermutet, dass diese Aussage auch im euklidischen Fall richtig ist (siehe dazu [70]).







# Kapitel 6

## Straffe Flächen in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

In diesem Kapitel wird die Theorie straffer Immersionen kompakter Flächen in  $ERF$  auf Immersionen kompakter Flächen in höherdimensionale euklidische Raumformen verallgemeinert. Es wird eine Konstruktion angegeben, mit welcher straffe orientierbare und nichtorientierbare Flächen mit genügend großem Geschlecht in  $n$ -dimensionalen Tori erzeugt werden können.

### 6.1 Definitionen

Lediglich in Dimension vier (siehe [57]) existiert eine vollständige Klassifikation der kompakten euklidischen Raumformen (75 verschiedene, darunter 27 orientierbare). Nach den Bieberbachschen Sätzen gehören aber die  $n$ -dimensionalen Tori für jedes  $n$  zu der Klasse orientierbarer euklidischer Raumformen dieser Dimension.

Im Folgenden beschränkt man sich deshalb auf Immersionen

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$$

in diese flachen  $n$ -Tori, wobei  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$  gilt und  $M$  eine kompakte Fläche bezeichnet.

Werden Flächen in höhere Dimensionen immersiert, interessiert man sich natürlich nur für Immersionen, welche die Fläche so abbilden, dass alle Dimensionen ausgeschöpft werden, die Fläche also nicht vollständig in einem Unterraum enthalten ist.

**Definition 6.1.** *Eine kompakte Fläche  $M$  heißt substantiell in  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , wenn sie*

nicht ganz in einem echten Unterraum von  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  enthalten ist. Eine Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  heißt *substantiell*, wenn ihr Bild substantiell ist.

Des Weiteren kann in höheren Kodimensionen nicht mehr von der Gauß-Krümmung gesprochen werden. Diese ist durch die Lipschitz-Killing-Krümmung zu ersetzen, d.h. die totale Absolutkrümmung  $\tau(M)$  einer Fläche  $M$  (immersiert in  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ) ist durch den Ausdruck

$$\tau(M) := \frac{1}{c_{n-1}} \int_{\perp^1} |K(e)| do$$

gegeben, wobei  $K(e)$  die Determinante des Shape-Operators in Richtung  $e \in \perp^1$ ,  $c_{n-1}$  das Volumen der Einheitssphäre  $S^{n-1}$  und  $\perp^1$  das Einheitsnormalenbündel mit seinem kanonischen Volumenelement bezeichnet.

Analog definiert man die totale Krümmung  $t(M)$  durch

$$t(M) := \frac{1}{c_{n-1}} \int_{\perp^1} K(e) do.$$

Damit ist die Definition straffer Immersionen kompakter Flächen in höherdimensionale euklidische Raumformen analog zu der aus Kapitel 6 formulierbar.

**Definition 6.2.** Eine Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  in eine  $n$ -dimensionale euklidische Raumform heißt *straff*, wenn gilt

$$\tau(M) = |t(M)|,$$

also wenn die totale Absolutkrümmung mit dem Betrag der Totalkrümmung von  $M$  übereinstimmt.

**Folgerung 6.3.** Eine Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  einer kompakten Fläche  $M$  in eine  $n$ -dimensionale euklidische Raumform ist genau dann straff, wenn gilt

$$\tau(M) = |\chi(M)|.$$

*Beweis:* Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz von Gauß-Bonnet, wie auch schon in den Fällen kompakter Flächen mit Rand und dem Standardfall.  $\square$

*Bemerkung 6.4.* Definition 6.2 und Folgerung 6.3 sind nur für glatte Immersionen gültig. Mit den Definitionen und Ausführungen in Kapitel 3 können sie wörtlich auf den Fall polyedrischer Immersionen übertragen werden.

Ebenso wie das Glätten straffer polyedrischer Immersionen bleibt auch die tight surgery eine gültige Operation (siehe [48] bzw. [10]).

## 6.2 Resultate

Der Beweis des folgenden Satzes beinhaltet die angekündigte Konstruktion und wird später auch auf die nichtorientierbaren Flächen übertragen.

**Satz 6.5.** *Sei  $M$  eine kompakte orientierbare Fläche mit  $\chi(M) \leq (2 - 2(n - 2))$ ,  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$  und  $n \geq 4$ .*

*Dann gibt es eine straffe substantielle Einbettung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  der Fläche  $M$  in den  $n$ -dimensionalen Torus. Die Einbettung  $f$  kann glatt oder polyedrisch gewählt werden.*

*Beweis:* Sei zunächst  $n = 4$ . Abbildung 6.1 illustriert diese vierdimensionale kompakte euklidische Raumform.

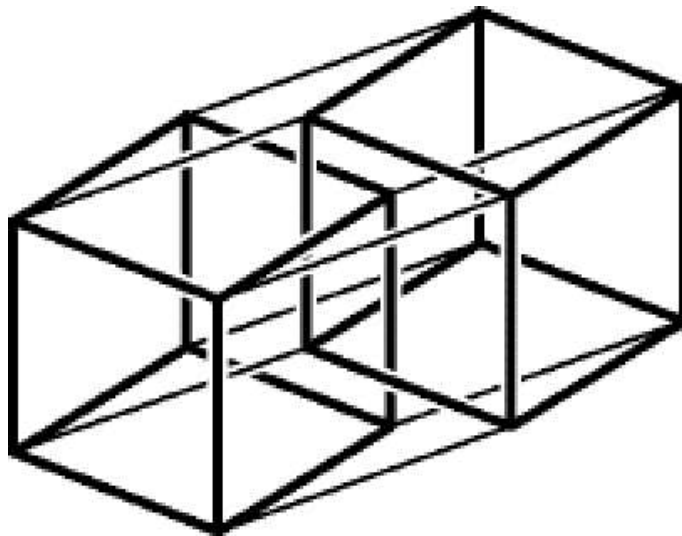


Abbildung 6.1:  $\mathbb{R}^4/\Gamma$ , der 4-Cube

Sie ist mit dem Fundamentalbereich der Gruppe  $\Gamma$ , also mit  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  zu identifizieren. Abbildung 6.1 ist analog zum dreidimensionalen Fall zu verstehen. Hier werden die gegenüberliegenden dreidimensionalen Seiten via Translation miteinander identifiziert. Dies sind nach Identifikation jeweils Drei-Tori. Zwei davon sind in Abbildung 6.1 fett gezeichnet. Sie werden miteinander identifiziert, denn sie gehen durch Translation ineinander über.

Die Idee ist nun, mit einer straffen Fläche in einem solchen 3-Torus zu starten und einen geeigneten Henkel so in diese einzuhängen, dass die resultierende Fläche

unter Bewahrung der Straffheit substantiell wird. Man betrachte dazu Abbildung [6.2](#).

---

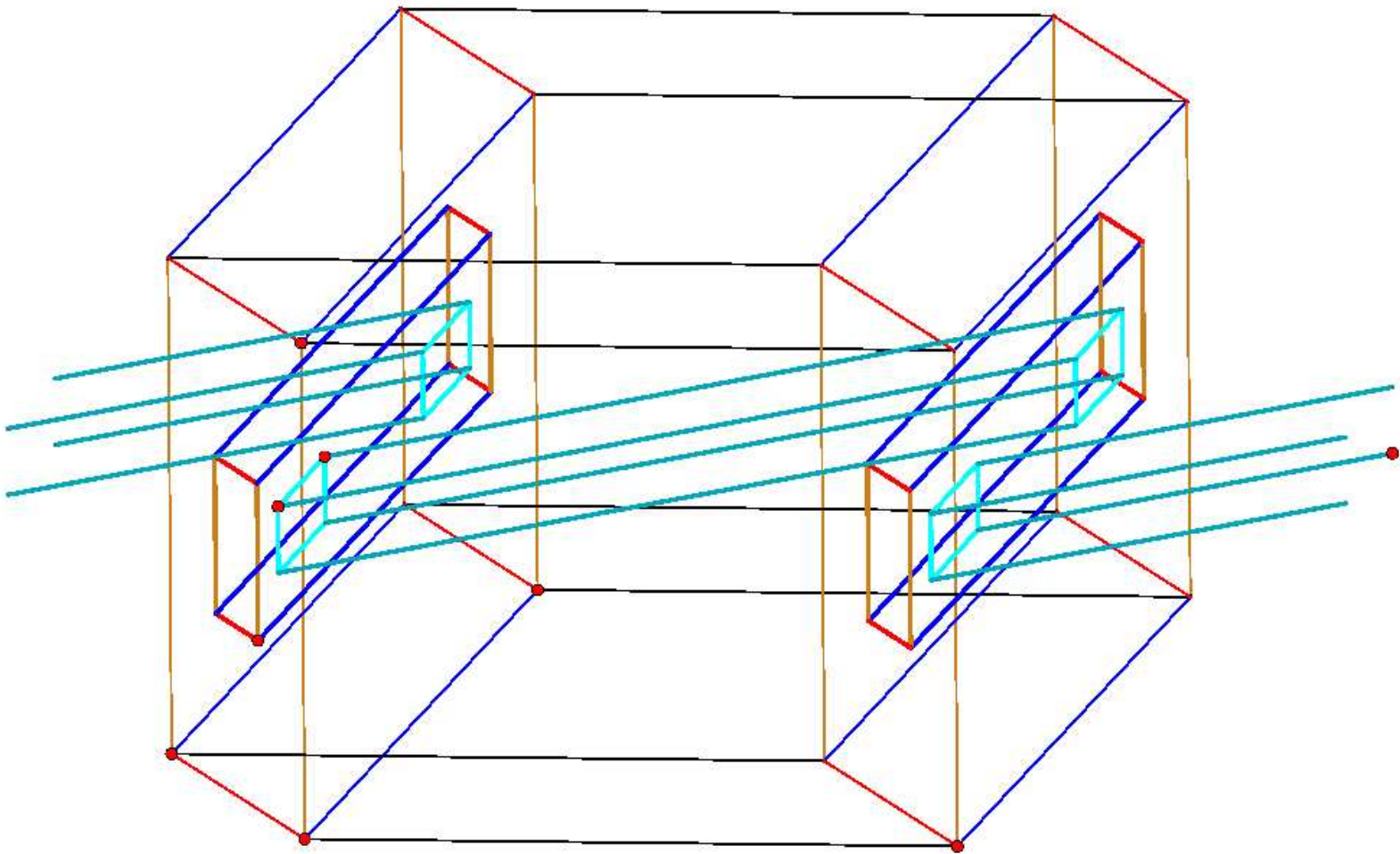


Abbildung 6.2:  $\mathbb{R}^4/\Gamma$

Sie stellt eine Fläche vom Geschlecht zwei, also mit  $\chi = -2$  dar, denn die beiden sichtbaren 2-Tori werden miteinander identifiziert, während ein weiterer Henkel eingehängt ist. Man hat nun zu zeigen, dass es sich um eine substantielle straffe Immersion handelt.

Zuerst wird die Straffheit gezeigt.

Man stellt fest, dass der  $Star(v)$  einer jeden Ecke  $v \in M$  (mit  $M$  sei jetzt und im Folgenden die in Abbildung 6.2 dargestellte Fläche bezeichnet) in einem dreidimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^4/\Gamma$  enthalten ist und damit die Untersuchung der Krümmung in den Ecken wie im dreidimensionalen Fall durchführbar ist. Alle Ecken sind entweder regulär oder Standardsattecken, woraus das Verschwinden von  $K_+$  für alle Ecken und damit die Straffheit der Fläche folgt.

Außerdem ist diese Fläche straff glättbar, denn die Wertigkeit aller Ecken ist kleiner oder gleich drei oder es handelt sich um Standardsattecken.

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass die Immersion substantiell ist.

Dies sieht man folgendermaßen ein. Der 2-Torus liegt offensichtlich in einem dreidimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^4/\Gamma$ , welcher von den Richtungen  $x_1$  (blau),  $x_2$  (rot) und  $x_3$  (braun) aufgespannt wird, ist in diesem Unterraum jedoch substantiell. Jetzt wird ein orientierbarer Henkel senkrecht auf der von den Richtungen  $x_1$  und  $x_3$  aufgespannten Seite des 2-Torus in Richtung  $x_4$  (schwarz) aufgesetzt. Um Singularitäten zu vermeiden, muss der Henkel dann geschert werden, was das Vorzeichen seiner Krümmung jedoch nicht ändert. Damit kann  $M$  nicht vollständig in einem dreidimensionalen Unterraum enthalten sein, die Abbildung  $f$  ist damit substantiell. (Diese Art der ‘Henkel-Einhängung’ kann als Beispiel einer tight surgery in höherer Dimension aufgefasst werden.)

Das spezielle Einfügen des Henkels verhindert Selbstdurchdringungen, womit es sich bei  $M$  um eine straff eingebettete orientierbare Fläche handelt.

Straffes Einhängen weiterer Henkel auf die übliche Weise beweist den Satz für  $\mathbb{R}^4/\Gamma$ .

Das eben beschriebene Verfahren kann jetzt folgendermaßen iteriert werden.

Die Raumform  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  ist (vor Identifikation) eine Seite des  $\mathbb{R}^4/\Gamma$ , und man startete mit einer straffen Fläche in  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  und fügte einen straffen Henkel ‘über eine weitere Dimension’ ein. Dieser Vorgang wird in die höheren Dimensionen übertragen.

Um eine straffe Fläche in  $\mathbb{R}^5/\Gamma$  zu erzeugen geht man analog vor.  $\mathbb{R}^4/\Gamma$  ist eine Seite (vor Identifikation) des  $\mathbb{R}^5/\Gamma$ . Die in Abbildung 6.2 dargestellte Fläche liegt vollständig in einem vierdimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^5/\Gamma$ . Die letzte Dimensi-



on schöpft man durch Einhängen eines weiteren Henkels, wie oben beschrieben, aus.

Die Straffheit und die Glättbarkeit der Fläche bleiben unverändert erhalten. Lediglich das Geschlecht hat sich durch den zusätzlichen Henkel um eins erhöht, woraus für diese Fläche in  $\mathbb{R}^5/\Gamma$  die Euler-Charakteristik  $-4$  folgt. Diese Fläche bildet dann den Start in Dimension sechs usw..

Analog erhält man straffe Flächen in die höherdimensionalen euklidischen Raumformen. Das Geschlecht erhöht sich mit jeder Dimension um eins, woraus für die Euler-Charakteristik folgt

$$\chi(M) = 2 - 2(n - 2),$$

da für das Geschlecht  $g$  gilt:  $g = n - 2$ . □

**Folgerung 6.6.** *Sei  $M$  eine kompakte nichtorientierbare Fläche mit geradem  $\chi(M) \leq (2 - 2(n - 1))$ ,  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$  und  $n \geq 4$ .*

*Dann gibt es eine straffe substantielle Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  der Fläche  $M$  in den  $n$ -dimensionalen Torus. Die Immersion  $f$  kann glatt oder polyedrisch gewählt werden.*

*Beweis:* Startet man nicht mit dem oben dargestellten Torus, sondern mit der straffen Kleinschen Flasche mit einem Henkel aus dem Beweis von Satz 3.7 für  $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$  (Torus wie oben plus einem gescherten nichtorientierbaren Henkel) und führt die vorgestellte Konstruktion durch, erhält man straffe nichtorientierbare Flächen geraden Geschlechts mit  $\chi(M) \leq (2 - 2(n - 1))$  in jeder Dimension. □

**Folgerung 6.7.** *Sei  $M$  eine kompakte nichtorientierbare Fläche mit ungeradem  $\chi(M) \leq (1 - 2n)$ ,  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$  und  $n \geq 4$ .*

*Dann gibt es eine straffe substantielle Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  der Fläche  $M$  in den  $n$ -dimensionalen Torus. Die Immersion  $f$  kann glatt oder polyedrisch gewählt werden.*

*Beweis:* Die in Abbildung 3.26 dargestellte Fläche stellt in diesem Fall den Ausgangspunkt obiger Konstruktion dar. Es handelt sich dabei um eine straffe projektive Ebene mit drei Henkel. Diese ist straff glättbar. Die Euler-Charakteristik der mit der Prozedur erzeugten Flächen  $M$  ergibt sich offensichtlich zu

$$\chi(M) \leq (1 - 2n).$$

□

**Folgerung 6.8.** *Sei  $M$  eine kompakte nichtorientierbare Fläche mit  $\chi(M) = 3 - 2n$  und  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$ .*

*Dann gibt es für  $n \geq 4$  eine straffe substantielle polyedrische Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  der Fläche  $M$  in den  $n$ -dimensionalen Torus.*

*Beweis:* Hängt man die in Satz 3.10 dargestellte projektive Ebene mit zwei Löchern in einen parabolischen Torus ein und führt obige Konstruktion durch, erzeugt man straffe Immersionen der Fläche  $M$  mit  $\chi(M) = 3 - 2n$  in jeder Dimension  $n \geq 4$ . Diese Fläche kann mit der üblichen Prozedur nicht geglättet werden (siehe hierzu ebenso Satz 3.10).  $\square$

Damit hat man insbesondere straffe glatte Flächen in lokal euklidischen Räumen beliebig hoher Dimension gefunden. Diese gibt es im euklidischen Raum  $\mathbb{E}^n$  nur in den Dimensionen  $n \leq 5$  (siehe [54]).

---

## 6.3 Zusammenfassung

Im Folgenden werden die Ergebnisse des letzten Abschnitts zusammengefasst. Wie in den vorangegangenen Kapiteln soll dies in Form einer Tabelle geschehen. Es handelt sich bei den Einträgen um Existenzaussagen straffer Abbildungen des angegebenen Typs kompakter Flächen der ersten Spalte mit entsprechender Euler-Charakteristik. Wird eine Abbildung als Immersion bezeichnet bedeutet dies wie immer, dass es sich hierbei nicht um eine Einbettung handelt.

Fläche/Raumform	$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$		
orientierbar bewiesen in:	$\chi \leq 2 - 2(n - 2)$ Satz 6.5	glatt, polyedrisch	Einbettung, Immersion
nichtorientierbar $\chi$ gerade bewiesen in:	$\chi \leq 2 - 2(n - 1)$ Folgerung 6.6	glatt, polyedrisch	Immersion
nichtorientierbar $\chi$ ungerade bewiesen in:	$\chi \leq 1 - 2n$ Folgerung 6.7	glatt, polyedrisch	Immersion
$\chi = 3 - 2n$ bewiesen in:	$\chi = 3 - 2n$ Folgerung 6.8	polyedrisch	Immersion

Offen bleiben die Fragen nach der Nichtexistenz straffer Immersionen. Insbesondere die Frage nach der Maximalität der Euler-Charakteristik der immersi-erten Fläche, d.h. die Frage, ob es Immersionen kompakter Flächen niedrigeren Geschlechts in höherdimensionale euklidische Raumformen gibt, bleibt unbeantwortet.



# Literaturverzeichnis

- [1] Lyuba Alboul and Ruud van Damme. Polyhedral metrics in surface reconstruction. In *The mathematics of surfaces, VI (Uxbridge, 1994)*, volume 58 of *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.*, pages 171–200, New York, 1996. Oxford Univ. Press. [32](#)
- [2] Aleksandr D. Aleksandrov. On a class of closed surfaces. *Recueil Math. (Moscow)*, 4:69–77, 1938. [3](#), [79](#)
- [3] Mark A. Armstrong. *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1983. [55](#), [101](#)
- [4] Thomas F. Banchoff. Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds. *Amer. J. Math.*, 87:462–472, 1965. [4](#), [9](#), [12](#)
- [5] Thomas F. Banchoff. Critical points and curvature for embedded polyhedra. *J. Diff. Geom.*, 1:245–256, 1967. [3](#), [73](#), [80](#), [81](#)
- [6] Thomas F. Banchoff. Critical points and curvature for embedded polyhedral surfaces. *Amer. Math. Monthly*, 77 I:475–485, 1970. [3](#), [12](#), [73](#), [80](#)
- [7] Thomas F. Banchoff. The two-piece property and tight  $n$ -manifolds-with-boundary in  $E^n$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161:259–267, 1971. [3](#), [5](#)
- [8] Thomas F. Banchoff. Critical points and curvature for embedded polyhedra II. *Progress in Math.*, 32:32–55, 1983. [80](#)
- [9] Thomas F. Banchoff. Differential geometry and computer graphics. In *Anniversary of Oberwolfach 1984, Perspectives in Mathematics*, pages 43–60, Basel, 1984. Birkhäuser Verlag. [46](#)
- [10] Thomas F. Banchoff and Wolfgang Kühnel. Tight submanifolds, smooth and polyhedral. In Thomas E. Cecil and Shiing-shen Chern, editors, *Tight and*

*Taut Submanifolds*, volume 32 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, pages 51–118. Cambridge University Press, 1997. [4](#), [9](#), [63](#), [80](#), [82](#), [118](#)

- [11] Thomas F. Banchoff and Floris Takens. Height functions on surfaces with three critical points. *Illinois Journal Math.*, 19:325–335, 1975. [80](#)
  - [12] Ludwig Bieberbach. Über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume. (Erste Abhandlung). *Math. Ann.*, 70:297–336, 1911. [4](#), [20](#)
  - [13] Ludwig Bieberbach. Über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume. (Zweite Abhandlung) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich. *Math. Ann.*, 72:400–412, 1912. [4](#), [20](#)
  - [14] Dietrich Braess. Morse-Theorie für berandete Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 208:133–148, 1974. [101](#)
  - [15] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1993. [94](#)
  - [16] Ulrich Brehm. How to build minimal polyhedral models of the Boy surface. *Math. Intell.*, 12:51–56, 1990. [59](#)
  - [17] Ulrich Brehm and Wolfgang Kühnel. Smooth approximation of polyhedral surfaces with respect to curvature measures. In Albrecht Dold and Beno Eckmann, editors, *Global Differential Geometry and Global Analysis 1979*, volume 838 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 64–68, Berlin; Heidelberg; New York, 1979. Springer Verlag. [32](#)
  - [18] Ulrich Brehm and Wolfgang Kühnel. Smooth approximation of polyhedral surfaces regarding curvatures. *Geom. Dedicata*, 12:435–461, 1982. [12](#), [32](#), [38](#)
  - [19] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1973. [76](#)
  - [20] Yu D. Burago. *Neravenstva izoperimetriceskogo tipa v teorii poverkhnostei ogranichennoi vneshnei krivizny*, volume 10 of *Sem. in Math.* Leningrad, 1968. [32](#)
-

- 
- [21] Thomas E. Cecil and Patrick J. Ryan. *Tight and taut immersions of manifolds*, volume 107 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman Publishing Inc., Boston; London; Melbourne, 1985. [4](#), [74](#)
- [22] Davide P. Cervone. A tight polyhedral immersion of the real projective plane with one handle. URL: <http://www.math.union.edu/locate/rp2-handle/>, 1994. [4](#), [60](#), [63](#)
- [23] Davide P. Cervone. Tight immersions of simplicial surfaces in three space. *Topology*, 35 No. 4:863–873, 1996. [64](#)
- [24] Davide P. Cervone. Tightness for smooth and polyhedral immersions of the projective plane with one handle. In Thomas E. Cecil and Shiing-shen Chern, editors, *Tight and Taut Submanifolds*, volume 32 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, pages 119–134. Cambridge University Press, 1997. [4](#), [60](#)
- [25] Davide P. Cervone. A tight polyhedral immersion in three-space of the projective plane with one handle. *Pacific J. Math.*, 196:113–122, 2000. [4](#), [60](#), [63](#)
- [26] Davide P. Cervone. A tight polyhedral immersion of the twisted surface of Euler characteristic  $-3$ . *Topology*, 40:571–584, 2001. [59](#)
- [27] Bang-yen Chen. On the total absolute curvature of manifolds immersed in Riemannian manifolds II. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 22:89–97, 1970. [101](#)
- [28] Bang-yen Chen. On the total absolute curvature of manifolds immersed in Riemannian manifolds III. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 22:385–400, 1970. [101](#)
- [29] Shiing-shen Chern and Richard K. Lashof. On the total curvature of immersed manifolds. *Amer. J. Math.*, 79:306–318, 1957. [3](#), [42](#)
- [30] Shiing-shen Chern and Richard K. Lashof. On the total curvature of immersed manifolds, II. *Mich. Math. J.*, 5:5–12, 1958. [3](#), [69](#), [70](#)
- [31] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976. [66](#)
- [32] Werner Fenchel. Über die Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. *Math. Ann.*, 101:238–252, 1929. [104](#)
-

- 
- [33] Peter A. Firby and Cyril F. Gardiner. *Surface topology*. Ellis Horwood series in mathematics and its applications. Ellis Horwood Limited, New York; London; Toronto; Sydney; Tokyo; Singapore, 1991. [33](#)
- [34] Alfred Gray. *Differentialgeometrie: klassische Theorie in moderner Darstellung*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg; Berlin; Oxford, 1994. [46](#), [48](#)
- [35] Nathaniel Grossmann. Relative Chern-Lashof theorems. *J. Diff. Geom.*, 7:607–614, 1972. [101](#), [108](#)
- [36] Karl P. Grotemeyer. *Topologie*, volume 836, 836a of *Hochschulschriften*. Bibliographisches Institut, Mannheim; Wien; Zürich, 1969. [93](#)
- [37] Francois Haab. Immersions tendues de surfaces dans  $E^3$ . *Comment. Math. Helv.*, 67:2:182–202, 1992. [3](#), [63](#)
- [38] Walter Hantzsche and Hilmar Wendt. Dreidimensionale euklidische Raumformen. *Math. Ann.*, 110:593–611, 1935. [4](#), [10](#), [20](#), [21](#)
- [39] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1976. [77](#)
- [40] Heinz Hopf. Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Ann.*, 95:313–339, 1925. [20](#)
- [41] Heinz Hopf. *Differential Geometry in the Large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1983. [89](#), [90](#)
- [42] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin and Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1980. [65](#)
- [43] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1996. [65](#), [93](#)
- [44] Tsai-han Kiang. Remarks on two-leaved orientable covering manifolds of closed manifolds. *Ann. Math.*, 44:128–130, 1943. [69](#)
- [45] Michael Klemm. *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1982. [19](#)
-



- 
- [46] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry I*. Wiley Classics Library. John Wiley and sons inc., New York; Chichester; Brisbane; Toronto; Singapore, 1996. [94](#)
- [47] Wolfgang Kühnel. Total curvature of manifolds with boundary in  $\mathbb{E}^n$ . *J. London Math. Soc. (2)*, 15:173–182, 1977. [5](#), [101](#), [109](#)
- [48] Wolfgang Kühnel. *Tight Polyhedral Submanifolds and Tight Triangulations*, volume 1612 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1995. [3](#), [80](#), [118](#)
- [49] Wolfgang Kühnel. *Differential geometry: curves – surfaces – manifolds*, volume 16 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, 2002. [27](#), [75](#), [79](#)
- [50] Wolfgang Kühnel and Ulrich Pinkall. Tight smoothing of some polyhedral surfaces. In Albrecht Dold and Beno Eckmann, editors, *Global Differential Geometry and Global Analysis 1984*, volume 1156 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 227–239, Berlin; Heidelberg; New York, 1984. Springer Verlag. [12](#), [38](#), [56](#), [58](#)
- [51] Nicolaas H. Kuiper. Immersions with minimal absolute curvature. *Centre Belge de Recherches Mathématiques, Extrait du Colloque de Géométrie Différentielle Globale tenu a Bruxelles du 19 au 22 décembre 1958*, pages 75–88, 1959. [78](#)
- [52] Nicolaas H. Kuiper. On surfaces in euclidean three-space. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 12:5–22, 1960. [3](#), [9](#)
- [53] Nicolaas H. Kuiper. Convex immersions of closed surfaces in  $E^3$ . *Comment. Math. Helv.*, 35:85–92, 1961. [3](#), [9](#), [51](#)
- [54] Nicolaas H. Kuiper. On convex maps. *Nieuw Archief voor Wiskunde (3)*, X:147–164, 1962. [73](#), [124](#)
- [55] Nicolaas H. Kuiper. Morse relations for curvature and tightness. In Albrecht Dold and Beno Eckmann, editors, *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, volume 209 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 77–89, Berlin; Heidelberg; New York, 1971. Springer Verlag. [73](#)
-

- 
- [56] Nicolaas H. Kuiper. Tight topological embeddings of the Moebius band. *J. Diff. Geom.*, 6:271–283, 1971/72. [112](#)
- [57] Ronald D. Levine. *The compact Euclidean space forms of dimension four*. PhD thesis, University of California, Berkely, 1970. [4](#), [117](#)
- [58] William S. Massey. Surfaces of gaussian curvature zero in euclidean 3-space. *Tôhoku Math. J.*, 14:73–79, 1962. [66](#)
- [59] John W. Milnor. *Morse Theory. Based on lecture notes by Michael Spivak and Raymond Wells*, volume 51 of *Annals of mathematics studies*. Princeton University Press, Princeton; New Jersey, 1970. [73](#)
- [60] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint. Based on notes by David W. Weaver*. Princeton landmarks in mathematics. Princeton University Press, Princeton; New Jersey, 1997. [76](#)
- [61] Emil Molnár. Minimal presentation of the 10 compact euclidean space forms by fundamental domains. *Studia Scient. Math. Hungarica*, 22:19–51, 1987. [24](#)
- [62] Marston Morse and Stewart S. Cairns. *Critical point theory in global analysis and differential topology*, volume 33 of *Pure and applied mathematics*. Academic Press, New York; London, 1969. [73](#)
- [63] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press, London; New York, 1983. [66](#)
- [64] Erich Ossa. *Topologie*, volume 42 of *Vieweg Studium; Aufbaukurs Mathematik*. Verlag Vieweg, Braunschweig; Wiesbaden, 1992. [70](#), [93](#)
- [65] Marc-Oliver Otto. Tight surfaces in three-dimensional compact Euclidean space forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(12):4847–4863, 2003. [41](#), [53](#)
- [66] Ulrich Pinkall. Tight surfaces and regular homotopy. *Topology*, 25 No. 4:475–481, 1986. [64](#)
- [67] Lucio L. Rodríguez. The two-piece property and convexity for surfaces with boundary. *J. Diff. Geom.*, 11 (2):235–250, 1976. [5](#), [86](#)
-

- 
- [68] Vladimir A. Sharafutdinov. Relative Euler class and the Gauss-Bonnet theorem. *Siber. Math. J.*, 14 (1973):930–940, 1974. [105](#)
- [69] Gudlaugur Thorbergsson. Smooth tight immersions. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 100:23–35, 1998. [4](#)
- [70] James H. White. Minimal total absolute curvature for orientable surfaces with boundary. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:361–362, 1974. [5](#), [16](#), [113](#), [114](#)
- [71] Tom J. Willmore. Tight immersions and total absolute curvature. *Bull. London Math. Soc.*, 3:129–151, 1971. [4](#)
- [72] Tom J. Willmore and B. A. Saleemi. The total absolute curvature of immersed manifolds. *J. London Math. Soc.*, 41:153–160, 1966. [101](#)
- [73] J. P. Wilson. The total absolute curvature of an immersed manifold. *J. London Math. Soc.*, 40:362–366, 1965. [78](#)
- [74] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish, Berkeley, 1977. [21](#), [67](#), [69](#), [93](#)
-



# Index

<b>Symbols</b>	
2-Jet .....	86
4-Cube .....	119
<b>B</b>	
Blätterzahl	
einer Überlagerung .....	93
<b>C</b>	
charakteristische Untergruppe .....	92
<b>D</b>	
Deckbewegung .....	92
Deckbewegungsgruppe .....	92
Diskumgebung .....	97
Diskumgebung $Star(p)$ .....	80
dreidimensionale, kompakte euklidische Raumformen .....	19
<b>E</b>	
$ERF$ .....	19
Einheitsnormalenbündel .....	102, 118
Envelope .....	60
euklidische Bewegungsgruppe .....	19
<b>F</b>	
flache Metrik .....	66
Fläche .....	31
glatte .....	31
polyedrische .....	31
eingebettete .....	31
immersierte .....	31
mit Rand .....	102
substantielle .....	117
Fundamentalebene .....	19
<b>G</b>	
Gauß-Abbildung .....	75
Gaußsches Normalenbild .....	75
Geschlecht	
einer Fläche mit Rand .....	109
Gradientenvektorfeld .....	94
Gruppe	
kristallografische	
Fundamentalebene .....	27
torsionsfreie .....	19
torsionsfreie .....	69
<b>H</b>	
Hesse-Matrix .....	74
Hopfcher Indexsatz .....	89
Höhenfunktion	
glatte .....	75
lokale	
polyedrische .....	97
glatte .....	14, 84
in allgemeiner Lage .....	98
polyedrische .....	80
<b>I</b>	
Immersion	
glatte .....	31
polyedrische .....	32

substantielle .....	118	regulärer Punkt .....	80
Index		regulärer Wert .....	74
eines singulären Punktes .....	89		
einer Ecke .....	81	<b>S</b>	
einer Funktion .....	74	<i>Star</i> ( $p$ ) .....	97
Inneres einer Fläche .....	102	Satz von Brown .....	76
		Satz von Sard .....	76
<b>J</b>		Shape-Operator .....	118
Jacobi-Matrix .....	88	straffes Glätten .....	35, 38
		Straffheit	
<b>K</b>		in $\mathbb{R}^n/\Gamma$ .....	118
Kleinsche Flasche .....	42	einer Fläche mit Rand .....	105
kritische Punkte bzgl. $h_e$ .....	81	in ERF .....	34
kritischer Punkt .....	74		
degenerierter .....	74	<b>T</b>	
nichtdegenerierter .....	74	tight smoothing .....	35
kritischer Wert .....	74	tight surgery .....	35
Krümmung		totale Absolutkrümmung	
polyedrische .....	32	einer Fläche mit Rand .....	102
absolute .....	33	polyedrische .....	33
negative .....	32	glatter Flächen .....	31
positive .....	32	in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ .....	118
		totale Krümmung	
<b>L</b>		einer Fläche mit Rand .....	102
Lemma von Morse .....	74	polyedrischer Flächen .....	32
Lipschitz-Killing-Krümmung .....	118	in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ .....	118
		TPP Zwei-Stück-Eigenschaft .....	3
<b>M</b>		Twist .....	44
Mittellecke .....	81		
Morse-Funktion .....	75	<b>U</b>	
Möbiusband .....	109	Überlagerung	
		normale .....	92
<b>N</b>		Riemannsche .....	65
$n$ -Torus .....	117		
nichtdegenerierte Funktion .....	75	<b>V</b>	
		Vektorfeld	
<b>R</b>		nichtdegeneriertes .....	88
Rand einer Fläche .....	102		

reguläres ..... 88  
vollständig ..... 66

**W**

Weingarten-Abbildung ..... 102

**Z**

Zylinder ..... 66  
Zylinderband ..... 106

---





# Lebenslauf

Name	Marc-Oliver Otto
Geburtsdatum	27.10.1971
Geburtsort	Stuttgart
Eltern	Jürgen Otto Margarete Otto, geb. Nanz
Schulbildung	allgemeine Hochschulreife 06/1991
Zivildienst	09/1991-11/1992
Studium	Mathematik (Diplom) mit Nebenfach Informatik an der Universität Stuttgart Diplom 06/1999 08/1996-01/1997 an der Uppsala universitet, Schweden, gefördert durch das Erasmus-Programm der Europäischen Union
Berufstätigkeit	03/2000-dato wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart.

Stuttgart, Juli 2003