
Kinematische Schnittmaße bei gegebener Schnittsituation in der Integralgeometrie

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität
Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Robert Sowada
geboren in Tübingen

Hauptberichter: Apl. Prof. Dr. Eberhard Teufel
Mitberichter: Priv.-Doz. Dr. Daniel Hug
Mitberichter: Prof. Dr. Wolfgang Kühnel
Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 2004

Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart
2004

Robert Sowada
Fachbereich Mathematik
Institut für Geometrie und Topologie
Lehrstuhl für Geometrie
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D-70569 Stuttgart
`sowada@mathematik.uni-stuttgart.de`

Diese Dissertation ist als PDF-Dokument auch als Online-Veröffentlichung erhältlich
unter der Adresse <http://elib.uni-stuttgart.de/opus>.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
Summary	13
1 Grundlegendes und Bezeichnungen	19
1.1 Kosinus und Sinus	19
1.1.1 Definition und Eigenschaften	19
1.1.2 Integrale	20
1.2 Modellräume	22
1.2.1 Euklidischer Raum	22
1.2.2 Sphärischer Raum	23
1.2.3 Hyperbolischer Raum	23
1.3 Sonstiges	25
2 Parallelfächen immersierter Flächen	27
2.1 Parallelfächen im euklidischen Raum	27
2.1.1 Normaleneinheitsbündel	27
2.1.2 Parallelfächen	30
2.1.3 Zwischen Fläche und Parallelfäche	35
2.1.4 Normalenfokalflächen	38
2.1.5 Seitenflächen	42
2.1.6 Windungszahl	44
2.2 Parallelfächen in nichteuklidischen Räumen	49
2.2.1 Normaleneinheitsbündel	49
2.2.2 Parallelfächen	50
2.2.3 Zwischen Fläche und Parallelfäche	53
2.2.4 Normalenfokalflächen	54
2.2.5 Seitenflächen	55
2.2.6 Windungszahl	56
3 Hyperebenen im Euklidischen	59
3.1 Vorbetrachtungen	59
3.1.1 Pedalfläche	59
3.1.2 Berührflächen	62
3.1.3 Hüllflächen	65

3.2	Hyperflächen	71
3.2.1	Formulierung der Aussagen	71
3.2.2	Wohldefiniertheit	74
3.2.3	Erläuterung der Beweisidee	78
3.2.4	Beweis der Aussagen	79
3.3	Flächen beliebiger Kodimension	86
3.3.1	Formulierung der Aussagen	86
3.3.2	Beweis der Aussagen	90
3.4	Anwendungen	96
3.4.1	Erwartungswert lokal konstanter Funktionen	96
3.4.2	Beispiele	99
4	Sphären im euklidischen Raum	105
4.1	Sphären	105
4.1.1	Berührflächen	105
4.1.2	Hüllflächen	107
4.1.3	Die Aussagen	108
4.1.4	Beweis der Aussagen	111
4.2	Grenzverhalten bei wachsendem Radius	112
4.2.1	Formulierung der Aussage	113
4.2.2	Erläuterung der Beweisidee	114
4.2.3	Verhalten der Terme auf der Mannigfaltigkeit selbst	116
4.2.4	Hüllflächen von Mehrfachberührhyperebenen	121
4.2.5	Von den Parallellflächen zu den Hüllflächen	125
4.2.6	Wohldefiniertheit	129
4.2.7	Trennung der Flächen	132
4.2.8	Die Bestimmung des Grenzwertes	135
5	Hyperebenen im Nichteuklidischen	137
5.1	Vorbetrachtungen	137
5.1.1	Pedalfäche	137
5.1.2	Berührflächen	141
5.1.3	Hüllflächen	144
5.1.4	Bezeichnungen	145
5.2	Hyperflächen	145
5.2.1	Formulierung der Aussage	146
5.2.2	Der Beweis des Satzes	147
5.3	Flächen beliebiger Kodimension	149
5.3.1	Formulierung der Aussage	150
6	Sphären im Nichteuklidischen	153
6.1	Sphären	153
6.1.1	Berührflächen	153
6.1.2	Hüllflächen	155
6.1.3	Formulierung der Aussagen	156

6.2	Horosphären	157
6.2.1	Pedalfläche	158
6.2.2	Berührflächen	162
6.2.3	Hüllflächen	165
6.3	Grenzverhalten bei wachsendem Radius für $K > 0$	167
6.3.1	Formulierung der Aussage	167
6.3.2	Verhalten der Terme auf der Mannigfaltigkeit selbst	168
6.3.3	Hüllflächen von Mehrfachberührhyperebenen	171
6.3.4	Von den Parallelfächen zu den Hüllflächen	172
6.3.5	Wohldefiniiertheit	172
6.3.6	Trennung der Flächen	173
6.3.7	Die Bestimmung des Grenzwertes	174
6.4	Grenzverhalten bei wachsendem Radius für $K < 0$	176
6.4.1	Formulierung der Aussage	176
6.4.2	Verhalten der Terme auf der Mannigfaltigkeit selbst	179
6.4.3	Hüllflächen von Mehrfachberührhorosphären	181
6.4.4	Von den Parallelfächen zu den Hüllflächen	183
6.4.5	Wohldefiniiertheit	184
6.4.6	Trennung der Flächen	185
6.4.7	Die Bestimmung des Grenzwertes	186
7	Bänder	191
7.1	Bänder bezüglich Hyperebenen im Euklidischen	191
7.1.1	Formulierung der Aussagen	192
7.1.2	Beweis der Aussagen	193
7.2	Bänder bezüglich Sphären im Euklidischen	196
7.2.1	Formulierung der Aussage	196
7.2.2	Beweis der Aussage	199
7.3	Bänder im Nichteuklidischen	201
7.3.1	Bänder bezüglich Hyperebenen	201
7.3.2	Bänder bezüglich Sphären	202
8	Geraden	205
8.1	Vorbetrachtungen	205
8.1.1	Tangentialeinheitsbündel	205
8.1.2	Erweiterte Pedalfläche	209
8.1.3	Berührflächen	215
8.1.4	Zwischenflächen	219
8.1.5	Eine Verallgemeinerung einer Minkowskischen Integralformel	222
8.2	Hyperflächen	225
8.2.1	Formulierung der Aussagen	226
8.2.2	Wohldefiniiertheit	229
8.2.3	Beweis der ortsabhängigen Aussage	231
8.2.4	Beweis der ortsunabhängigen Aussage	235

Symbolverzeichnis	239
Index	243
Literaturverzeichnis	247

Einleitung

Anhand einer bekannten Formel aus der Integralgeometrie als Beispiel soll die Problemstellung erläutert und motiviert werden, die dieser Arbeit zugrunde liegt: Sei C eine feste kompakte berandete d -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit \mathcal{C}^2 -differenzierbarem Rand) im d -dimensionalen euklidischen Raum. Wird diese mit beliebigen Hyperebenen ξ geschnitten, so gilt (vgl. [21, formula 14.79 in III.14.6.]; es sei $d \geq 2$)

$$\int_{\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}} \chi(C \cap \xi) d\xi = \int_{\partial C} \varphi_{d-2} dO.$$

Hierbei sei $\chi(C \cap \xi)$ die Euler-Charakteristik des Schnitts von C und ξ sowie $\mathcal{E}_{d-1,d}$ die Mannigfaltigkeit aller Hyperebenen; die rechte Seite ist das Oberflächenintegral über die $(d-2)$ -te mittlere Krümmung. Werden nur die Hyperebenen einer kompakten Teilmenge von $\mathcal{E}_{d-1,d}$ betrachtet, die alle C schneidenden Hyperebenen enthält, so drückt diese Formel somit das folgende aus: Bei geeigneter Normierung ist der Erwartungswert der Euler-Charakteristik des Schnitts einer beliebigen Hyperebene ξ mit C – bis auf einen konstanten von C unabhängigen Faktor – durch die rechte Seite gegeben, in die ausschließlich (differential-)geometrische Größen von ∂C eingehen. Es ist nun nahe liegend zu fragen, wie in obiger Situation eine Formel für die Verteilung aussieht, wie sich also das kinematische Maß derjenigen Hyperebenen ξ ausdrücken lässt, für die $\chi(C \cap \xi)$ einen festen vorgegebenen Wert annimmt.

Zur letzten Fragestellung lagen bis jetzt jedoch erst relativ wenige Ergebnisse vor, die sich zudem auf den ebenen Fall konzentrieren. So stellte J. J. Sylvester im Jahr 1890 für endlich viele paarweise disjunkte konvexe Mengen das Problem, dass das kinematische Maß derjenigen Geraden bestimmt werden soll, die alle diese Mengen zugleich schneiden bzw. die mindestens eine dieser Mengen schneiden. Für bis zu drei Mengen hat er explizite Formeln in Abhängigkeit von der gegenseitigen Lage der Mengen angegeben, für eine größere Anzahl von Mengen ein konstruktives Verfahren zur Gewinnung einer solchen Formel geliefert (vgl. [25]). Im Jahr 1966 beschäftigte sich R. Sulanke unter anderem mit der Existenz von Netzen aus endlich vielen beschränkten konvexen Kurvenbögen bei vorgegebenem Träger der Verteilung ihrer Schnittpunktzahl mit Geraden (vgl. [24]). Für reguläre geschlossene Kurven gab R. V. Ambarcumjan schließlich eine explizite Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Gerade mit der Kurve genau k Schnittpunkte besitzt (vgl. [1]) – ein vollständiger Beweis ist in der Literatur jedoch nicht vorhanden.

Von diesem Hintergrund ausgehend haben Annette Gauger und ich in unseren Diplomarbeiten (vergleiche [5, 23]) in den zweidimensionalen Räumen konstanter Krümmung

die kinematischen Maße von Geraden bzw. Kreisen bestimmt, die eine vorgegebene feste stückweise reguläre Kurve in k Punkten schneiden. Die hierfür verwendeten Methoden waren überwiegend differentialgeometrischer Natur, während die Vorgehensweise der oben erwähnten Arbeiten (d.h. [25], [24] sowie [1]) im wesentlichen kombinatorischen Charakters war.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, diese Ergebnisse einerseits auf Flächen in Räume beliebiger Dimension zu verallgemeinern, andererseits sollen auch möglichst viele Schnittsituationen abgedeckt werden. Dies geschieht zunächst im Euklidischen – anschließend im Nichteuklidischen – für Hyperebenen bzw. Sphären bezüglich Flächen beliebiger Kodimension. Die einzige Forderung, die dabei an die Menge von Hyperebenen bzw. Sphären, deren kinematisches Maß bestimmt werden soll, gestellt wird, wird sein, dass sie von an die gegebene Fläche tangentialen Hyperebenen bzw. Sphären berandet wird. Dies umfasst somit insbesondere die eingangs betrachtete Situation, dass das Maß derjenigen Hyperebenen ξ bestimmt werden soll, für die $\chi(\xi \cap C)$ einen vorgegebenen Wert besitzt. Es sind jedoch auch weitergehende Situationen abgedeckt, in denen zum Beispiel die Anzahl der Schnittkomponenten oder das Trennen von Zusammenhangskomponenten von Interesse sind. Schließlich wird im Euklidischen auch noch das Maß von Geraden mit entsprechendem Schnittverhalten bezüglich Hyperflächen bestimmt, so dass in den wichtigen Fällen des zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raums das Schneiden affiner Unterräume mit Flächen komplett abgedeckt ist.

In die dabei gewonnenen Formeln gehen neben Teilflächen der gegebenen Flächen (bzw. jeweils deren Normalenbündel) zusätzlich noch von mehrfach tangentialen Hyperebenen bzw. Sphären eingehüllte Flächen ein. Wird beispielsweise die eingangs betrachtete Situation auf die in der Abbildung 1 links befindliche Mannigfaltigkeit C angewendet, und ist das Maß der Menge \mathcal{D} derjenigen Hyperebenen ξ von Interesse, für die $\chi(C \cap \xi) = 1$

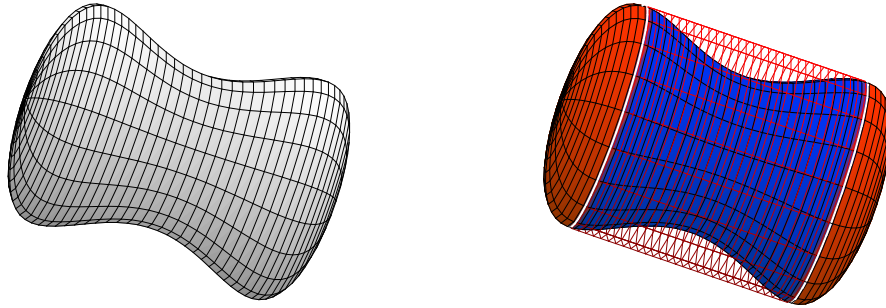


Abbildung 1: Die Mannigfaltigkeit C sowie die beteiligten Flächen im Fall $\chi(C \cap \xi) = 1$

erfüllt ist, so ist das kinematische Maß dieser Menge von Hyperebenen gegeben durch

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{M^+} \varphi_{d-2} dO - \int_{M^-} \varphi_{d-2} dO + \int_{\bar{M}^+} |\varphi_{d-2}| dO - \int_{\bar{M}^-} |\varphi_{d-2}| dO,$$

wobei M^+ die rechts in der Abbildung rot hervorgehobene Teilfläche von ∂C ist, M^- die blaue, sowie \bar{M}^+ die rot angedeutete Hüllfläche (die in diesem Beispiel mit dem Faktor zwei zu gewichten ist), \bar{M}^- ist hier die leere Menge, im allgemeinen jedoch auch eine Teilfläche der von doppelt tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen (vgl. Satz 3.27).

Auf der anderen Seite ergeben sich auch Formeln, in die diese Hüllflächen nicht eingehen, diese Formeln sind dann jedoch abhängig von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes, bezüglich dessen Stützabstände zu bestimmen sind. Im betrachteten Beispiel ist die Formel

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{p \in M^+} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO - \int_{p \in M^-} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO$$

erfüllt (hierbei ist φ_{d-1} die Gauß-Krümmung; vergleiche Satz 3.28). Die Aufteilung in die Teilflächen M^+ und M^- geschieht in beiden Formeln auf genau dieselbe Art und Weise. Der Übergang vom einen in den anderen Typ steht im Zusammenhang mit den Minkowskischen Integralformeln (vgl. Bemerkung 3.37).

Die beim Beweisen verwendeten Methoden sind wiederum differentialgeometrischer Natur und lassen sich in zwei Klassen teilen: Einerseits ist bei der Betrachtung der Hyperebenen bzw. Geraden die klassische kinematische Dichte dieser Objekte der Ausgangspunkt, ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweisen stellt die wiederholte Anwendung des Satzes von Stokes dar. Andererseits stellen bei der Betrachtung der Sphären (und damit auch der Hyperebenen bzw. Horosphären beim Grenzübergang) orientierte gewichtete Parallelvolumina und ihre Beziehung zu Integralen über die Windungszahl bezüglich der begrenzenden Flächen das wichtigste Hilfsmittel dar, wobei sich die bekannte Steiner-Formel für das Volumen von Parallelkörpern konvexer Körper als Spezialfall ergibt. Bei beiden Methoden erfolgt zunächst eine (mit Grafiken erläuterte) ausführliche Übersicht über die Beweisidee (vergleiche die Abschnitte 3.2.3 bzw. 4.2.2).

Aufbau der Arbeit

Im ersten Kapitel werden die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Modellräume für die *Räume konstanter Krümmung* behandelt, und die notwendigen Bezeichnungen eingeführt. Insbesondere werden die *Sinus-* und *Kosinus-Funktion* für diese Räume definiert, und die im weiteren Verlauf der Arbeit auftretenden Integrale über Potenzen dieser Funktionen berechnet.

Auch das folgende zweite Kapitel über *Parallelfächen* und ihre Eigenschaften dient weitestgehend der Vorbereitung. Parallelfächen stellen in den folgenden Kapiteln ein wichtiges Hilfsmittel dar, einerseits um Ergebnisse bezüglich Hyperflächen für Mannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension zu verallgemeinern, andererseits um tangentielle Sphären in den Griff zu bekommen. Der zweite Teil (jeweils im Euklidischen bzw. Nicht-euklidischen) ist einem Satz (vergleiche Satz 2.40 bzw. Satz 2.79) gewidmet, der das (orientierte und gewichtete) Volumen des Gebiets zwischen der Mannigfaltigkeit selbst und einer Teilfläche der Parallelfäche in Bezug zum Integral über die Windungszahl bezüglich dieser Flächen (sowie der „Seitenflächen“) setzt, und eine Verallgemeinerung der bekannten Steiner-Formel darstellt. Dieser Satz wird von entscheidender Bedeutung beim Beweis der Formeln bezüglich des Schnittverhaltens von Sphären sowie beim Bestimmen des Grenzverhaltens bei gegen unendlich strebendem Sphärenradius in Kapitel 4 bzw. Kapitel 6 sein.

Im dritten Kapitel wird schließlich die Untersuchung des Schnittverhaltens von Hyper-ebenen bezüglich der gegebenen festen Objekte im d -dimensionalen euklidischen Raum durchgeführt. Am Anfang des Kapitels wird mit den *Pedalflächen* ein Hilfsmittel bereitgestellt, mit Hilfe dessen sich die tangentialen Hyperebenen untersuchen lassen. Es folgen die für das Verständnis der Sätze notwendigen Definitionen sowie die Sätze selbst (vergleiche Satz 3.27 bzw. Satz 3.28). Nachdem die Beweisidee anhand eines grafischen Beispiels in der Ebene erläutert worden ist – diese überträgt sich auf das in späteren Kapiteln betrachtete Schnittverhalten von Hyperebenen im Nichteuklidischen bzw. von Geraden im Euklidischen –, erfolgen die Beweise selbst. Mit Hilfe der im vorangegangenen Kapitel betrachteten Parallellflächen werden sodann die Ergebnisse auf den Fall verallgemeinert, dass statt Hyperflächen Mannigfaltigkeiten allgemeiner Kodimension vorliegen (vergleiche Satz 3.44 bzw. Satz 3.46). Als Anwendung der im ersten Teil des Kapitels gewonnenen Formeln wird abschließend der Erwartungswert allgemeiner lokal konstanter Funktionen auf der Menge aller Hyperebenen berechnet. Insbesondere ergeben sich in zwei wichtigen Situationen auch Formeln für die höheren Momente (und damit natürlich auch die Varianz).

Im ersten Teil des vierten Kapitels werden mit Hilfe der in Kapitel 2 untersuchten Parallellflächen zunächst noch einige Hilfsmittel bereitgestellt, bevor die Aussagen über das Schnittverhalten von Sphären bezüglich Mannigfaltigkeiten formuliert und bewiesen werden können (vergleiche Satz 4.13 und Satz 4.14). Der zweite Teil ist dem Grenzverhalten bei gegen unendlich strebendem Radius gewidmet; bei geeigneter Normierung ergeben sich wieder die zuvor für die Hyperebenen gewonnenen Ergebnisse. Da der zugehörige Beweis etwas länger und technisch aufwendiger ist, ist ihm eine ausführliche Erläuterung der Beweisidee vorangestellt.

Das Vorgehen beim Untersuchen des Schnittverhaltens von Hyperebenen im Nichteuklidischen im fünften Kapitel entspricht demjenigen im Euklidischen – wobei sich die von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes unabhängigen Ergebnisse nicht direkt übertragen ließen. Im Sphärischen ergeben sich diese jedoch später durch Grenzübergang beim Betrachten des Schnittverhaltens von Sphären.

Das sechste Kapitel, in dem das Schnittverhalten von Sphären im Nichteuklidischen untersucht wird, entspricht im Aufbau dem vierten Kapitel, in dem dies im Euklidischen geschieht. Während das Schnittverhalten selbst noch gemeinsam untersucht werden kann (vergleiche Satz 6.10 bzw. Satz 6.11), muss bei der Bestimmung des Grenzwertes zwischen Sphärischem und Hyperbolischem unterschieden werden, es ergeben sich dann Formeln bezüglich des Schnittverhaltens von Hyperebenen bzw. Horosphären.

Da die Konstruktion der in den vorangegangenen Kapiteln benötigten Flächen teilweise etwas kompliziert ist, wird im siebten Kapitel die besonders „schöne“ Situation, dass die gegebenen Flächen konvex bezüglich der Hyperebenen bzw. Sphären sind, behandelt, in der sich auch besonders „schöne“ Flächen ergeben. Dieses Kapitel zeigt insbesondere auch den Zusammenhang der Resultate der vorigen Kapitel zu den oben erwähnten Ergebnissen von J. J. Sylvester aus [25].

Im achten Kapitel erfolgt schließlich die Untersuchung des Schnittverhaltens von Geraden und Hyperflächen, die entsprechend derjenigen bezüglich Hyperebenen in Kapitel 3 verläuft.

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Eberhard Teufel für die außerordentlich gute Betreuung, die er mir beim Erstellen dieser Dissertation zukommen ließ, bedanken. Ich danke auch Herrn Daniel Hug für seine insbesondere die Einleitung betreffenden Bemerkungen.

Außerdem gilt mein Dank Martin Bulach dafür, dass sein Büro in Zeiten großer Not (und manchmal auch ohne Not) stets eine offene Tür bot, und er immer die Zeit für intensive Gespräche erübrigen konnte. Weiterhin danke ich Annette Gauger für die gemeinsame Arbeit an unseren Diplomarbeiten, die die Grundlage für diese Arbeit geschaffen haben, und Oliver Weiser für das Korrekturlesen der englischen Zusammenfassung. Ferner danke ich Steffen Poppitz sowie Muhedeta Ikanović.

Schließlich möchte ich noch all den unzähligen „Kindern“ ganz herzlich danken, die mich mit ihren Problemen aufsuchten – oder auch mit glänzenden Augen von ihren Erfolgen berichteten –, und so für die immer wieder nötige Ablenkung gesorgt haben.

Summary

We will now consider a well known integral geometrical formula to give an example for the problem that is underlying this work. This problem shall now be exemplified and motivated: If a fixed compact d -dimensional manifold C (with \mathcal{C}^2 -differentiable boundary) embedded into the d -dimensional euclidean space is intersected by arbitrary hyperplanes ξ , the following formula holds (see [21, formula 14.79 in III.14.6.]; let $d \geq 2$)

$$\int_{\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}} \chi(C \cap \xi) d\xi = \int_{\partial C} \varphi_{d-2} dO.$$

Here $\chi(C \cap \xi)$ is the Euler characteristic of the intersection of C and ξ , $\mathcal{E}_{d-1,d}$ is the manifold of all hyperplanes; on the right side the $(d-2)$ -th mean curvature is integrated over the boundary of C . So this formula—normalised in a appropriate way—shows that the expectation of the Euler characteristic of the intersection of C with a random hyperplane ξ is given—up to a constant factor which is independent of C —by the right side of the formula. On this right side only (differential) geometrical properties of ∂C appear. This leads to the question how the corresponding distribution looks like, i.e. to ask for the kinematic measure of those hyperplanes ξ for which $\chi(C \cap \xi)$ is a fixed predetermined value.

There are only very few results to the last problem. Furthermore these just focus on the euclidean plane. In 1890 J. J. Sylvester examined the two situations that lines intersect all sets or alternatively at least one set of a given finite union of disjoint convex sets. For up to three sets explicit formulas depending on the mutual position of the sets are given. For more sets a constructive method to gain such a formula is specified (see [25]). In 1966 R. Sulanke studied nets of bounded convex curves with predetermined support of the probability distribution of its number of intersections with lines (see [24]). For regular closed curves R. V. Ambarcumjan finally gave a formula for the probability that a line has exactly k points of intersections (see [1])—but there is no complete proof given in his paper.

Starting from this background in our diploma theses (see [5, 23]) Annette Gauger and I calculated the kinematic measures of lines and circles respectively that intersect a fixed piecewise regular curve in k points. This was done in arbitrary spaces of constant curvature. In contrast to the above mentioned works an predominantly differential geometrical approach was chosen whereas in these works mostly combinatorial methods were used.

The aim of this work is to extend these results to arbitrary dimensions and to cover as many intersection situations as possible. At first this will be done in euclidean space—

subsequently in noneuclidean spaces—for hyperplanes and spheres, in respect of surfaces of arbitrary codimension. The sets of hyperplanes or spheres, whose measure we have to calculate, will only be restricted insofar that their boundary must be given by tangential (to the fixed surface M) hyperplanes or spheres. This includes the initially viewed example of the measure of all hyperplanes whose intersection with M has a predetermined Euler characteristic. However many more situations are covered by the number of components of the intersection or the partition of components of connection of M . Finally in similar situations formulas for the measure of lines in respect of hypersurfaces are established in euclidean space. So in the euclidean space of two and three dimensions all cases of affine subspaces intersecting a surface are covered completely.

Summary

Basics

In the first two chapters the necessary tools and definitions for the rest of this work are provided. In chapter 1 the models we use for the spaces of constant curvature are introduced. In particular the sine and cosine in these spaces are defined and the integrals of products of these functions are calculated.

In chapter 2 parallel surfaces in arbitrary distance $r > 0$ to an immersed manifold M are examined. This is first done in 2.1 for the euclidean space and then in 2.2 for noneuclidean spaces. Parallel surfaces are an important tool throughout the whole work. In particular a theorem is proven that establishes a relationship between the oriented volume of the region “between” M and the parallel surface in distance r (in respect of an open set \mathcal{N} of the unit normal bundle of M) and the winding number in respect of the “bordering” hypersurface $S_{\mathcal{N},r}$ (see Satz 2.40; in Satz 2.40 an equivalent formula is given for noneuclidean spaces):

Theorem. *The oriented volume of the region “between” M and the parallel surface in respect of \mathcal{N} can be expressed via*

$$\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r) = \int_{\mathbb{E}_d} w_{S_{\mathcal{N},r}} dV = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

The terms on the right side are well known from the Steiner integral formulas (see for instance [21, section III.1 3.3], [17, section 6.3.3] or [22, Satz 2.2.1]). So $\varphi_j(p, N)$ is the j -th mean curvature in p in respect of the normal N (for $j \in \{0, \dots, d-1\}$). Finally $(\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}})^{-1}$ is the usual factor we get by integrating over (subsets) of the normal bundle that is embedded in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$.

Hyperplanes in Euclidean Space

In chapter 3 formulas for the kinematic measure of a “suitable” set \mathcal{D} of hyperplanes in euclidean space \mathbb{E}_d are calculated (for $d \geq 2$). A “suitable” set of hyperplanes is given

by a union of bounded components of connection of the space of all hyperplanes $\mathcal{E}_{d-1,d}$ minus the set \mathcal{T} of hyperplanes that are tangential to fixed surfaces M .

This is first done in 3.2 for “generic” compact immersed orientable \mathcal{C}^3 -differentiable hypersurfaces M without boundary. So a normal vector field $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ can be chosen. Then the following theorem holds (see Satz 3.27 and Satz 3.28):

Theorem. *The kinematic measure of the set \mathcal{D} is given by*

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{p \in M^+} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO - \int_{p \in M^-} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO$$

and

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{M^+} \varphi_{d-2} \, dO - \int_{M^-} \varphi_{d-2} \, dO + \int_{\bar{M}^+} |\varphi_{d-2}| \, dO - \int_{\bar{M}^-} |\varphi_{d-2}| \, dO.$$

The scalar product $\langle p, -N(p) \rangle$ is the oriented distance of the hyperplane that is tangential to M in p to the origin. Again $\varphi_j(p)$ is the j -th mean curvature of the hypersurface M in p (for $j \in \{0, \dots, d-1\}$). In particular φ_{d-1} is the Gaussian curvature and dO is the area element. The surfaces M^+ and M^- are open subsets of M . A point $p \in M$ belongs to M^+ if the locally in direction of $\text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) \cdot N(p)$ translated tangential hyperplane in p is a member of \mathcal{D} , M^- has the same definition in respect of the opposite direction. The surfaces \bar{M}^+ and \bar{M}^- are subsurfaces of surfaces that are enveloped by hyperplanes that are tangential to M in exactly two points in the boundary of M^+ and M^- . Whether a subsurface belongs to \bar{M}^+ or \bar{M}^- can be decided by looking at a single point of $\partial M^+ \cup M^-$ (see Konstruktion 3.24).

So the first formula depends on the choice of a special point, whereas the second formula is independent of such a choice. On the other hand in this formula additional surfaces, that are no subsurfaces of M , have to be considered.

An example for the involved surfaces is given in figure 2. The left subpicture shows the set C , whose boundary is M . The set \mathcal{D} consists of those planes that satisfy $\chi(C \cap \xi) = 1$. Then the set M^+ is given by the red subsurface of M , M^- is given by the blue subsurface,

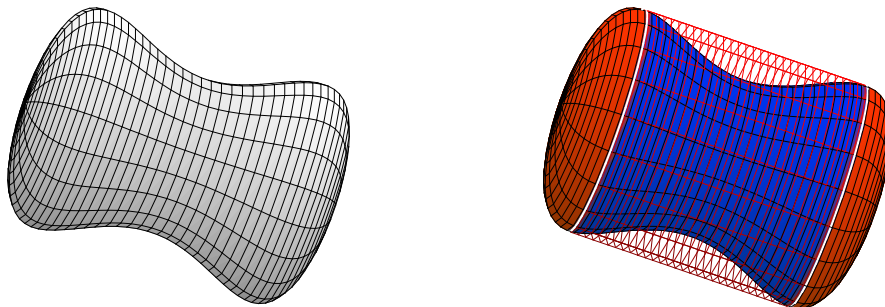


Figure 2: Manifold C and involved subsurfaces of ∂C for $\chi(C \cap \xi) = 1$

\bar{M}^+ is given by the red enveloped surface (weighted by factor two) as shown in the right subpicture (\bar{M}^- is empty).

The first formula is proven in section 3.2.4 by applying Stokes' Theorem for surfaces with singularities (see [13, chapter XVII, §3, Theorem 3.3]) to the set \mathcal{D} . This formula can be transformed into the second formula by again applying Stokes' Theorem twice (there is a close relationship to Minkowski integral formulas; see [8]). Initially in 3.1 pedal surfaces are examined to analyse the contact points of hyperplanes that are tangential to M in multiple points.

In 3.3 the results are generalised to “generic” manifolds M of arbitrary codimension by applying the formula for hypersurfaces to the parallel surface of M in the distance $\varepsilon > 0$ and considering the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ (see Satz 3.27 and Satz 3.28 for the results and section 3.3.1 for the proof). The formulas are basically the same—because of the higher codimension it is now necessary to integrate over the unit normal bundles of M and the enveloped surfaces.

Chapter 3 is completed in section 3.4 by calculating the expectation of general real functions $f: \mathcal{E}_{d-1,d} \rightarrow \mathbb{R}$ that are constant on the components of connections of $\mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}$. As an example the two situations of f being the number of intersection points of a hyperplane with a given curve and of f being the number of intersected convex bodies are considered.

Spheres in Euclidean Space

In chapter 4 spheres of constant radius $r > 0$ are used instead of hyperplanes. The “suitable” sets \mathcal{D}_r of spheres are constructed in a similar way to the “suitable” sets of hyperplanes in chapter 3: The set \mathcal{D}_r is given by a union of bounded components of connection of the space of all spheres minus the set \mathcal{T}_r of spheres that are tangential to fixed “generic” surfaces M .

In this situation the following theorem holds (see Satz 4.13 and Satz 4.14):

Theorem. *The kinematic measure of the set \mathcal{D}_r is given by*

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) + \int_{\mathbb{E}_d} w_{\hat{M}_r} dV$$

and

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) = & \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\check{M}_r} \sigma_r \varphi_j dO \right) \right) \\ & + \int_{\mathbb{E}_d} w_{\hat{M}_r} dV. \end{aligned}$$

Again \mathcal{N}_r^+ and \mathcal{N}_r^- are certain open subsets of the unit normal bundle of M defined by the local behaviour of the corresponding tangential spheres (see Definition 4.7) and \check{M}_r is a surface (usually with singularities) that is enveloped by spheres that are tangential to M in more than one point (see Konstruktion 4.9 and Konstruktion 4.10). The (generally non regular) hypersurfaces \hat{M}_r and \check{M}_r are constructed with the help of these surfaces

(see Konstruktion 4.8 and Konstruktion 4.12), $w_{\hat{M}_r}$ and $w_{\hat{M}_r^*}$ are the winding numbers in respect of the associated surface.

These two formulas are a direct conclusion of the results for the parallel volume in chapter 2 applied to the set of centres of the spheres in \mathcal{D}_r .

In the second part of chapter 4 (in 4.2) the limit $r \rightarrow \infty$ of the formulas is calculated (when proper normalised). The result is again one of the formulas of chapter 3. Calculating this limit is particularly of interest with regard to the situation in noneuclidean space where new formulas can be attained by this procedure. As the proof itself is rather complex a detailed geometric summary of its idea is given in section 4.2.2.

Hyperplanes and Spheres in Noneuclidean Space

In chapter 5 and 6 formulas for the kinematic measure of hyperplanes and spheres respectively are calculated in noneuclidean spaces of constant curvature in a similar way to the euclidean situation. Unfortunately this approach only leads to analogons of the formulas that depend on the choice of a special point in the case of hyperplanes (the terms in this formulas are now noticeably more complex than in the euclidean situation; see Satz 5.22 for hypersurfaces and Satz 5.28 for manifolds of arbitrary codimension). In the case of spheres the results can be transferred easily and the formulas are basically the same as in euclidean space (see chapter 6).

In the second part of chapter 6 the limit $r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ (in the spherical case) and $r \rightarrow \infty$ respectively (in the hyperbolic case) are calculated in the same way as in the euclidean space. Using this method, in the spherical space an analogon to the formula for hyperplanes, that does not depend on the choice of a fixed point, is obtained (see Satz 6.30). Again it is necessary to integrate over submanifolds of the normal bundle of surfaces which are enveloped by hyperplanes which in turn are tangential to the given surface M in more than one point. Additionally winding number terms appear in odd dimensions.

In hyperbolic space a formula for hyperplanes cannot be obtained with this procedure. Taking the limit results in a formula for the kinematic measure of a "suitable" set \mathcal{D}_∞ of horospheres (see Satz 6.69):

Theorem. *The kinematic measure of the set \mathcal{D}_∞ is given by*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}_\infty) = & \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \frac{\sqrt{-K}^{d-j-2}}{d-1} \left(\int_{\mathcal{N}_\infty^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_\infty^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ & + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \frac{\sqrt{-K}^{d-j-2}}{d-1} \left(\int_{\mathcal{N}_\infty^+} \sigma_\infty \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_\infty^-} \sigma_\infty \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Like before \mathcal{N}_∞^+ and \mathcal{N}_∞^- are open subsets of the normal bundle of M whose definition only depends on the local behaviour of the tangential horospheres in respect of the set \mathcal{D}_∞ . The sets $\bar{\mathcal{N}}_\infty^+$ and $\bar{\mathcal{N}}_\infty^-$ are submanifolds of the normal bundle of surfaces which are enveloped by horospheres which in turn are tangential to M in more than one point. Finally σ_∞ is +1 iff the number of principal curvatures less than $-\sqrt{-K}$ is even, otherwise σ_∞ is -1.

Bands

Up to now M was a closed surface but the surfaces that appear in the formulas were put together from several non-closed surfaces. In chapter 7 it is shown that in “good natured” situations formulas for the kinematic measure of hyperplanes and spheres (in euclidean, spherical and hyperbolic space) can be obtained in which the appearing surfaces are closed (but still may have singularities). This is done—in contrast to the rest of this work—by using combinatorial methods to reduce the problem to basic situations that can be solved by applying the formulas of the preceding chapters. “Good natured” means that M is a union of convex (in respect of hyperplanes or spheres) hypersurfaces. This is because terms consisting of the mean curvature and terms consisting of the absolute value of the mean curvature must be merged.

Lines in Euclidean Space

In the concluding chapter 8 the kinematic measure of a “suitable” set \mathcal{D} of lines in euclidean space is calculated. The set \mathcal{D} is again a union of components of connection of the space of all lines minus the set of lines that are tangential to a fixed compact orientable hypersurface M . This leads to the following theorem (see Satz 8.37 and Satz 8.38):

Theorem. *The kinematic measure of the set \mathcal{D} is given by*

$$\mu(D) = \frac{1}{2(d-1)} \left(\int_{(p,V) \in \mathcal{T}^+} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} - \int_{(p,V) \in \mathcal{T}^-} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} \right)$$

and

$$\mu(D) = \frac{1}{2(d-1)} \left(\int_{\mathcal{T}^+} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} - \int_{\mathcal{T}^-} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} + \int_{(p,V) \in \bar{\mathcal{T}}^+} f_{\bar{\mathcal{T}}} dO - \int_{(p,V) \in \bar{\mathcal{T}}^-} f_{\bar{\mathcal{T}}} dO \right).$$

Analogous to the definition of \mathcal{N}^+ and \mathcal{N}^- in chapter 8 (in reference to hyperplanes) \mathcal{T}^+ and \mathcal{T}^- are open subsets of the unit tangent bundle \mathcal{T}_M of M that are determined by the local behaviour of tangential lines in respect of \mathcal{D} (by translating in direction of the normal vector; see Definition 8.31). The surfaces $\bar{\mathcal{T}}^+$ and $\bar{\mathcal{T}}^-$ are related to those lines that are tangential to M in exactly two points (see Konstruktion 8.34). Finally $\kappa_n(p, V)$ is the normal curvature in $p \in M$ in direction of the vector $V \in \mathbb{S}_{d-1}$.

1 Grundlegendes und Bezeichnungen

In diesem Kapitel werden für den weiteren Verlauf der Arbeit grundlegende Definitionen und Bezeichnungen eingeführt. Dies sind zunächst die Sinus- bzw. Kosinus-Funktion für die Räume konstanter Krümmung. Anschließend erfolgt die explizite Berechnung der Integrale von Produkten der Potenzen dieser Funktionen. Diese Integrale sind Bestandteil der Konstanten in den Formeln, die in den späteren Kapiteln bewiesen werden. Schließlich werden die für die Räume konstanter Krümmung in dieser Arbeit verwendeten Modellräume sowie wichtige Bezeichnungen und Abbildungen in diesen Räumen eingeführt.

Vorab werden einige Bezeichnungen eingeführt: Mit $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ werde die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null, mit $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null, mit $\mathbb{Z} := \{p, -p | p \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der ganzen Zahlen und mit $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet. Weiterhin sei \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen sowie $]a, b[:= \{r \in \mathbb{R} | a < r < b\}$, $[a, b] := \{r \in \mathbb{R} | a \leq r \leq b\}$ und $[a, b[:= \{r \in \mathbb{R} | a \leq r < b\}$ das offene, abgeschlossene bzw. halboffene Intervall mit Endpunkten a und b (jeweils für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$). Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ (für nichtleere Mengen X, Y) sei $f^{-1}(Z)$ das volle Urbild der Menge $Z \subseteq Y$, d.h. es gilt $f^{-1}(Z) = \{x \in X | f(x) \in Z\}$.

1.1 Kosinus und Sinus

1.1.1 Definition und Eigenschaften

1.1 Definition. Es sei $K \in \mathbb{R}$. Definiere dann den *Kosinus* j_1 und *Sinus* j_2 des Raumes mit konstanter Krümmung K (vergleiche hierzu auch das folgende Unterkapitel 1.2) durch

$$j_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \cosh(\sqrt{-K} t) & \text{für } K < 0 \\ 1 & \text{für } K = 0 \\ \cos(\sqrt{K} t) & \text{für } K > 0 \end{cases}$$

sowie

$$j_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} t) & \text{für } K < 0 \\ t & \text{für } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} t) & \text{für } K > 0 \end{cases}$$

(vergleiche hierzu auch [9, Definition 1.6]).

1.2 Lemma. Die in Definition 1.1 definierten Funktionen j_1 und j_2 besitzen (für $K \in \mathbb{R}$) die folgenden Eigenschaften (es seien $s, t \in \mathbb{R}$):

- $j_1' = -K j_2$
- $j_2' = j_1$
- $j_1^2 + K j_2^2 \equiv 1$
- $j_1(-t) = j_1(t)$
- $j_2(-t) = -j_2(t)$
- $j_1(s+t) = j_1(s) j_1(t) - K j_2(s) j_2(t)$
- $j_2(s+t) = j_1(s) j_2(t) + j_2(s) j_1(t)$.
- Für $K \leq 0$ ist die Funktion $\frac{j_1}{j_2}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv, für $K > 0$ ist die Funktion $\frac{j_1}{j_2}:]-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv, es existiert also jeweils die Umkehrfunktion $(\frac{j_1}{j_2})^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $(\frac{j_1}{j_2})^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow]-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[\setminus \{0\}$.

Beweis. Dies ergibt sich alles direkt aus Definition 1.1 sowie den bekannten Eigenschaften der trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen (vergleiche hierzu beispielsweise [3, Kapitel 2.6 und 2.8]). ☺

1.1.2 Integrale

1.3 Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$ (für k gerade) bzw. $j \in \{0, \dots, \frac{k-1}{2}\}$ (für k ungerade) seien die Konstanten $c_{j,k}$ definiert durch

$$c_{j,k} := \begin{cases} \frac{1}{k} \prod_{l=j+1}^{\frac{k}{2}-1} \frac{2l+1}{2l} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma(j+1)}{\Gamma(\frac{k}{2}+1) \Gamma(j+\frac{3}{2})} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{2j+1} \prod_{l=j+1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{2l}{2l+1} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1) \Gamma(j+1)} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

(es sei $\Gamma: \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt$ die bekannte *Gamma-Funktion*; vergleiche beispielsweise [3, Abschnitt 8.2.5.7]). Ferner werde $c_{0,0} := 1$ gesetzt.

1.4 Lemma. Für die Stammfunktion der Potenzen von j_1 gilt (mit $K \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$)

$$\int (j_1(t))^k dt = \begin{cases} c_{0,k} t + j_2(t) \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} c_{j,k} (j_1(t))^{2j+1} & \text{für } k \text{ gerade} \\ j_2(t) \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} c_{j,k} (j_1(t))^{2j} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar durch Induktion aus der bekannten Rekursionsformel (vergleiche beispielsweise [3, Abschnitte 21.5.3.2 und 21.5.4.1]; es sei $k \geq 2$)

$$\int (j_1(t))^k dt = \frac{1}{k} j_2(t) (j_1(t))^{k-1} + \frac{k-1}{k} \int (j_1(t))^{k-2} dt. \quad \odot$$

1.5 Korollar. Für die in Definition 1.3 definierten Konstanten gilt

$$\sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} c_{j,k} + c_{0,k} = 1 \quad (\text{für } k \text{ gerade}) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} c_{j,k} = 1 \quad (\text{für } k \text{ ungerade}).$$

Beweis. Betrachte das Ergebnis von Lemma 1.4 speziell für $K = 0$, und die beiden Aussagen folgen unmittelbar. \odot

1.6 Definition. Es seien die Konstanten $c_{j,k,l}$ definiert durch (für $j, k, l \in \mathbb{N}_0$ so wie jeweils angegeben)

$$c_{j,k,l} := \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{\frac{k}{2}}{i} c_{j,2i+l} & \text{für } k, l \text{ gerade, } j \in \{0, \dots, \frac{l}{2} - 1\} \\ \sum_{i=j+1-\frac{l}{2}}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{\frac{k}{2}}{i} c_{j,2i+l} & \text{für } k, l \text{ gerade, } j \in \{\frac{l}{2}, \dots, \frac{k+l}{2} - 1\} \\ (-1)^j \frac{1}{2j+l+1} \binom{\frac{k-1}{2}}{j} & \text{für } k \text{ ungerade, } j \in \{0, \dots, \frac{k-1}{2}\} \end{cases}$$

Direkt aus dieser Definition ergibt sich nun das folgende Lemma:

1.7 Lemma. Die in Definition 1.6 definierten Konstanten erfüllen (für $j, k, l \in \mathbb{N}_0$ so wie jeweils angegeben) die folgenden Rekursionsformeln:

- Für k, l gerade und $j \in \{0, \dots, \frac{k+l}{2}\}$ gilt $c_{j,k+2,l} = c_{j,k,l} - c_{j,k,l+2}$.
- Für k ungerade und $j \in \{0, \dots, \frac{k-1}{2}\}$ gilt $c_{0,k,l} = c_{0,k+2,l}$, $c_{\frac{k-1}{2},k,l+2} = c_{\frac{k+1}{2},k+2,l}$ sowie $c_{j+1,k+2,l} = c_{j+1,k,l} - c_{j,k+2,l}$.

1.8 Lemma. Es sei $k, l \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für die Stammfunktion von Produkten der Potenzen von j_1 und j_2 für $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (j_2(t))^k (j_1(t))^l dt = \begin{cases} \frac{1}{K^{\frac{k}{2}}} \left(c_{0,k,l} t + j_2(t) \sum_{j=0}^{\frac{k+l}{2}-1} c_{j,k,l} (j_1(t))^{2j+1} \right) & \text{für } k, l \text{ gerade} \\ \frac{1}{K^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} c_{j,k,l} (j_1(t))^{2j+l+1} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \sum_{j=0}^{\frac{l-1}{2}} c_{j,l,k} K^j (j_2(t))^{2j+k+1} & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für $K = 0$ gilt

$$\int (j_2(t))^k (j_1(t))^l dt = \frac{1}{k+1} (j_2(t))^{k+1}.$$

Beweis. Für $K = 0$ ist dies klar. Ansonsten ergibt sich die Aussage mit Hilfe von $j_1^2 + K j_2^2 \equiv 1$ und Lemma 1.4 via Induktion direkt aus den Rekursionsformeln in Lemma 1.7. \odot

1.9 Lemma. Für $K > 0$ und $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}} (j_2(t))^k (j_1(t))^l dt = \frac{1}{2} \frac{1}{K^{\frac{k+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{l+1}{2}) \Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k+l+2}{2})}.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt unter Ausnutzung von $j_1^2 + K j_2^2 \equiv 1$, der Rekursionsformel aus dem Beweis von Lemma 1.4 sowie des Ergebnisses von Lemma 1.8 für $k = 1$ via vollständiger Induktionen nach k und l . \odot

1.2 Modellräume

1.2.1 Euklidischer Raum

Das Standardmodell eines d -dimensionalen Raumes mit konstanter Krümmung 0 ist der d -dimensionale *euklidische Raum* \mathbb{E}_d (mit $d \in \mathbb{N}$; vergleiche auch [16, chapter 1]), der gegeben ist durch den d -dimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{R}^d zusammen mit dem *euklidischen Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, das gegeben ist durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto p^\top \cdot q.$$

Weiterhin ist die *euklidische Norm* $\|\cdot\|: \mathbb{E}_d \rightarrow [0, \infty[$ gegeben durch

$$\|\cdot\|: \mathbb{E}_d \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

so dass der *euklidische Abstand* zweier Punkte $p, q \in \mathbb{E}_d$ gegeben ist durch $\|p - q\|$. Schließlich ist das *euklidische Vektorprodukt* $\times: (\mathbb{E}_d)^{d-1} \rightarrow \mathbb{E}_d$ diejenige alternierende multilineare Abbildung, die durch

$$\forall p_1, \dots, p_d \in \mathbb{E}_d: \langle p_1 \times \dots \times p_{d-1}, p_d \rangle = \det((p_1, \dots, p_d)) \quad (1.1)$$

eindeutig bestimmt ist.

Die (nichtorientierten) *Hyperebenen* des euklidischen Raumes sind gegeben durch die $(d-1)$ -dimensionalen affinen Unterräume von \mathbb{E}_d , die Mannigfaltigkeit aller Hyperebenen werde mit $\mathcal{E}_{d-1,d}$ bezeichnet. Speziell sei $\mathcal{L}_{d-1,d} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Untermannigfaltigkeit derjenigen Hyperebenen, die den Ursprung enthalten. Es sei $\xi: \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1} \rightarrow \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Abbildung, die $(p, N) \in \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ genau auf diejenige Hyperebene abbildet, deren Normalenvektor N ist, und die den Punkt p enthält.

Des Weiteren werde für $r > 0$ mit $\mathcal{S}_{d,r}$ die Menge aller in \mathbb{E}_d eingebetteten *Sphären* mit Radius r bezeichnet. Es sei $\zeta_r: \mathbb{E}_d \rightarrow \mathcal{S}_{d,r}$ die Abbildung, die den Punkt $p \in \mathbb{E}_d$ auf die Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt p abbildet.

Schließlich sind die (nichtorientierten) *Geraden* des euklidischen Raumes gegeben durch die 1-dimensionalen affinen Unterräume von \mathbb{E}_d , die Mannigfaltigkeit aller Geraden werde mit $\mathcal{E}_{1,d}$ bezeichnet. Speziell sei $\mathcal{L}_{1,d} \subseteq \mathcal{E}_{1,d}$ die Untermannigfaltigkeit derjenigen Geraden, die den Ursprung enthalten. Es sei $\eta: \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1} \rightarrow \mathcal{E}_{1,d}$ die Abbildung, die $(p, V) \in \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ genau auf diejenige Gerade abbildet, deren Richtung durch V gegeben ist, und die den Punkt p enthält.

1.2.2 Sphärischer Raum

Das Standardmodell eines d -dimensionalen Raumes mit konstanter strikt positiver Krümmung K ist der d -dimensionale in den $(d+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}_{d+1} eingebettete *sphärische Raum* $\mathbb{F}_{d,K}$, der gegeben ist als eine Sphäre mit Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$ und Ursprung als Mittelpunkt (mit $d \in \mathbb{N}$; vergleiche auch [16, chapter 2]). Speziell werde $\mathbb{S}_d := \mathbb{F}_{d,K}^1 := \mathbb{F}_{d,1}$ gesetzt. Für das Skalarprodukt und das Vektorprodukt werden die entsprechenden Abbildungen des umgebenden euklidischen Raumes herangezogen. Die Abbildung $\text{dist}: \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow [0, \infty[$, die den *sphärischen Abstand* zweier Punkte misst, ist nun gegeben durch

$$\text{dist}: \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow [0, \infty[, (p, q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{K}} \text{j}_1^{-1}(K \langle p, q \rangle).$$

Zwei Punkte $p, q \in \mathbb{F}_{d,K}$ heißen genau dann *antipodal*, wenn $p = -q$ erfüllt ist.

Die (nichtorientierten) *Hyperebenen* des sphärischen Raumes sind gegeben durch die Schnitte von d -dimensionalen Untervektorräumen von \mathbb{E}_d mit $\mathbb{F}_{d,K}$; die Mannigfaltigkeit aller Hyperebenen werde mit $\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ bezeichnet. Speziell sei $\mathcal{L}_{d-1,d}^{(K)} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ die Untermannigfaltigkeit derjenigen Hyperebenen, die einen fest gewählten Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ enthalten. Es sei

$$\xi: \{(p, N) \in \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{S}_d \mid \langle p, N \rangle = 0\} \rightarrow \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$$

die Abbildung, die (p, N) genau auf diejenige Hyperebene abbildet, deren Normalenvektor N ist, und die den Punkt p enthält.

Schließlich werde für $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ mit $\mathcal{S}_{d,K,r}$ die Menge aller in $\mathbb{F}_{d,K}$ eingebetteten *Sphären* mit Radius r bezeichnet; die Sphären selbst sind geeignete nichtleere Schnitte geeigneter affiner Hyperebenen des umgebenden \mathbb{E}_{d+1} mit $\mathbb{F}_{d,K}$. Es sei $\zeta_r: \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow \mathcal{S}_{d,K,r}$ die Abbildung, die den Punkt $p \in \mathbb{F}_{d,K}$ auf die Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt p abbildet.

1.2.3 Hyperbolischer Raum

Minkowski-Raum

Der d -dimensionale *Minkowski-Raum* bzw. *Lorentz-Raum* ist gegeben durch den reellen Vektorraum \mathbb{R}^d zusammen mit dem *Lorentz-Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $d > 1$;

vergleiche auch [16, section §3.1]), das gegeben ist durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto p^\top \cdot J \cdot q.$$

Die hierbei auftretende Matrix J ist dabei gegeben durch

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist das *Vektorprodukt im Minkowski-Raum* diejenige alternierende multilineare Abbildung $\times: (\mathbb{R}^d)^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, die durch die der Gleichung (1.1) entsprechende Eigenschaft (jetzt bezüglich des Lorentz-Skalarprodukts) eindeutig festgelegt ist.

Hyperbolischer Raum

Das Standardmodell eines d -dimensionalen Raumes konstanter strikt negativer Krümmung K ist der d -dimensionale in den $(d+1)$ -dimensionalen Minkowski-Raum \mathbb{R}^{d+1} eingebettete *hyperbolische Raum* $\mathbb{F}_{d,K}$, der gegeben ist als eine der beiden Zusammenhangskomponenten der Sphäre mit (imaginärem) Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$ und Ursprung als Mittelpunkt (mit $d > 1$; vergleiche auch [16, chapter 3]). Des Weiteren werde mit $\mathbb{F}_{d,K}^1$ die Sphäre vom Radius 1 und Ursprung als Mittelpunkt bezeichnet, mit $\mathbb{F}_{d,K}^0$ die Menge aller Vektoren, die bezüglich des Lorentz-Skalarprodukts orthogonal zu sich selbst sind.

Für das Skalarprodukt und das Vektorprodukt werden die Einschränkungen der entsprechenden Abbildungen des umgebenden Minkowski-Raumes herangezogen. Die Abbildung $\text{dist}: \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow [0, \infty[$, die den *hyperbolischen Abstand* zweier Punkte misst, ist gegeben durch

$$\text{dist}: \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow [0, \infty[, (p, q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{-K}} j_1^{-1}(K \langle p, q \rangle).$$

Die (nichtorientierten) *Hyperebenen* des hyperbolischen Raumes sind gegeben durch die nichtleeren Schnitte von d -dimensionalen Untervektorräumen des Minkowski-Raums mit $\mathbb{F}_{d,K}$; die Mannigfaltigkeit aller Hyperebenen werde mit $\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ bezeichnet. Speziell sei $\mathcal{L}_{d-1,d}^{(K)} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ die Untermannigfaltigkeit derjenigen Hyperebenen, die einen fest gewählten Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ enthalten. Es sei

$$\xi: \{(p, N) \in \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1 \mid \langle p, N \rangle = 0\} \rightarrow \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$$

die Abbildung, die (p, N) genau auf diejenige Hyperebene abbildet, deren Normalenvektor N ist, und die den Punkt p enthält.

Weiterhin werde für $r > 0$ mit $\mathcal{S}_{d,K,r}$ die Menge aller in $\mathbb{F}_{d,K}$ eingebetteten *Sphären* mit Radius r bezeichnet; die Sphären selbst sind geeignete nichtleere kompakte Schnitte geeigneter affiner Hyperebenen des umgebenden Minkowski-Raumes mit $\mathbb{F}_{d,K}$. Es sei

$\zeta_r: \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow \mathcal{S}_{d,K,r}$ die Abbildung, die den Punkt $p \in \mathbb{F}_{d,K}$ auf die Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt p abbildet.

Schließlich sei $\mathcal{H}_d^{(K)}$ die Menge aller in $\mathbb{F}_{d,K}$ eingebetteten *Horosphären*. Die Horosphären selbst sind durch nichtleere Schnitte affiner Hyperebenen des umgebenden Minkowski-Raumes, deren Normalenvektor orthogonal zu sich selbst ist, mit dem hyperbolischen Raum $\mathbb{F}_{d,K}$ gegeben. Es sei $\zeta_\infty: \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^0 \rightarrow \mathcal{H}_d^{(K)}$ die Abbildung, die $(p, b) \in \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^0$ auf diejenige Horosphäre durch den Punkt p abbildet, deren zugehörige Hyperebene (im Minkowski-Raum) den Normalenvektor b besitzt.

1.3 Sonstiges

Abschließend folgt noch ein kleines Lemma, das bei späteren Berechnungen benötigt wird. Es lässt sich leicht durch direktes Nachrechnen mit vollständiger Induktion nach der Dimension d beweisen.

1.10 Lemma. *Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ (mit $d \geq 1$) beliebig. Dann gilt*

$$\det(\mathbb{1} + a \cdot b^\top) = 1 + a^\top \cdot b.$$

2 Parallellflächen immersierter Flächen

Parallellflächen immersierter Flächen werden in den folgenden Kapiteln sowohl beim Bestimmen des Maßes von Hyperebenen als auch beim Bestimmen des Maßes von Sphären im Euklidischen wie im Nichteuklidischen ein entscheidendes Hilfsmittel darstellen. In diesem Kapitel sollen die dazu notwendigen Grundlagen bereitgestellt werden. Dies geschieht zunächst im Euklidischen, anschließend mit analogem Vorgehen im Nichteuklidischen.

Nach einem grundlegenden Abschnitt über das Normalenbündel erfolgt dann die Untersuchung der Parallellflächen in festem (aber sonst beliebigen) Abstand zur gegebenen Mannigfaltigkeit. Die restlichen Abschnitte dienen der Vorbereitung des Satzes über das orientierte gewichtete Volumen zwischen der gegebenen Mannigfaltigkeit und einer Teilfläche der Parallellfläche, mit dem dieses Kapitel im Euklidischen und Nichteuklidischen jeweils abschließt.

2.1 Parallellflächen im euklidischen Raum

Die Voraussetzungen in den folgenden Abschnitten (mit Ausnahme des abschließenden) sind stets dieselben:

2.1 Voraussetzung. In Abschnitt 2.1 sei M stets eine kompakte in den d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}_d immersierte unberandete \mathcal{C}^k -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$, $m \in \{0, \dots, d-1\}$ und $k > 2$). Weiterhin sei $r > 0$ fest gewählt.

2.1.1 Normaleneinheitsbündel

2.2 Definition. Das zu M gehörige *Normaleneinheitsbündel* \mathcal{N}_M sei definiert durch

$$\mathcal{N}_M := \{(p, N) \in M \times \mathbb{S}_{d-1} \mid N \text{ ist Normaleneinheitsvektor an } M \text{ in } p\}.$$

Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M besitzt folgende wohlbekannte Eigenschaften (vgl. [2, Theorem 2.7.7 and 6.7.26]):

2.3 Lemma. *Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M ist eine kompakte in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ immersierte orientierbare unberandete \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

2.4 Definition. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ ein beliebiger Punkt, und $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{N}_M nach *Bündelkoordinaten* (mit geeignetem offenen $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$), d.h. für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$ gilt

$$\frac{\partial x}{\partial u_j} = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial n}{\partial u_j} \right\rangle = 0.$$

Sei dann G_M die zur ersten Fundamentalform und H_M die zur zweiten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung $(u_1, \dots, u_m) \mapsto x(u_1, \dots, u_m)$ gehörige Matrix, d.h. für die zugehörigen Matrixeinträge gilt dann $g_{i,j} = \langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle$ bzw. $h_{i,j} = \langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, -\frac{\partial n}{\partial u_j} \rangle$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Die zur Weingartenabbildung $-dN$ gehörige Matrix W_M ist dann gegeben durch $W_M = (G_M)^{-1} \cdot H_M$, die m Eigenwerte $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ dieser Abbildung (in (p, N)) sind die *Hauptkrümmungen* von M in p bezüglich des Normalenvektors N , die Eigenvektoren die *Hauptkrümmungsrichtungen*. Diese Definition ist dann unabhängig von der Wahl obiger Parametrisierung (vergleiche hierzu jeweils auch [11, Abschnitt 3B bzw. 3F]).

2.5 Definition. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ und $l \in \{0, \dots, d-1\}$. Dann sei $\varphi_l(p, N)$ im Punkt p bezüglich der Normalen N gegeben durch

$$\varphi_l(p, N) := \frac{1}{\binom{d-1}{l}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m+l-(d-1)} \leq m} \prod_{j=1}^{m+l-(d-1)} \kappa_{i_j}(p, N).$$

Insbesondere gilt $\varphi_{d-1-m} \equiv 1$ und $\varphi_l \equiv 0$ für $l \in \{0, \dots, d-2-m\}$. Speziell ist φ_{d-1} die *Lipschitz-Killing-Krümmung*, im Fall $m = d-1$ die *Gauß-Kronecker-Krümmung* bzw. *Gauß-Krümmung*.

Ist M eine orientierbare Hyperfläche (also insbesondere $m = d-1$) mit gegebenem Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, so sei die Abbildung $\varphi_l: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $\varphi_l := \varphi_l(\cdot, N)$.

2.6 Bemerkung. Wird die *l-te mittlere Krümmung* $H_l(p, N)$ (für $l \in \{0, \dots, m\}$) von M im Punkt p bezüglich der Normalen N definiert als die *l-te elementarsymmetrische Funktion* der Hauptkrümmungen, d.h. durch

$$H_l(p, N) := \frac{1}{\binom{m}{l}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq m} \prod_{j=1}^l \kappa_{i_j}(p, N),$$

so gilt

$$\binom{d-1}{l} \varphi_l = \binom{m}{m+l-(d-1)} H_{m+l-(d-1)}.$$

Falls M eine Hyperfläche ist (also $m = d-1$ gilt), so fallen die beiden Definitionen zusammen, d.h. es gilt $\varphi_l = H_l$. Die Lipschitz-Killing-Krümmung ist gegeben durch H_m .

2.7 Definition. Die Projektion $\pi_M: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{E}_d$ des Normalenbündels \mathcal{N}_M auf die Mannigfaltigkeit M sei definiert durch

$$\pi_M: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{E}_d, (p, N) \mapsto p.$$

Weiterhin sei $K_{\mathcal{N}_M}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige Abbildung, die gegeben ist durch

$$K_{\mathcal{N}_M}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}, (p, N) \mapsto \prod_{j=1}^m (1 + \kappa_j^2(p, N)).$$

2.8 Lemma. Sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Teilfläche von \mathcal{N}_M nach Bündelkoordinaten (für offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$; vergleiche Definition 2.4). Es seien die Matrizen G_M und H_M so wie in Definition 2.4 definiert, G_n sei die zur ersten Fundamentalform der Parametrisierung $(u_{m+1}, \dots, u_{d-1}) \mapsto n(u_{m+1}, \dots, u_{d-1})$ gehörige Matrix. Schließlich sei noch $G_{\mathcal{N}_M}$ die zur ersten Fundamentalform bezüglich der gegebenen Parametrisierung von \mathcal{N}_M gehörige Matrix. Dann gilt

$$\det(G_{\mathcal{N}_M})|_u = \det(G_M)|_{(u_1, \dots, u_m)} \det(G_n)|_{(u_{m+1}, \dots, u_{d-1})} K_{\mathcal{N}_M}|_{(x, n)(u)}.$$

Beweis. OBdA sei die obige Parametrisierung so gewählt, dass die Matrix G_M durch eine Diagonalmatrix gegeben ist. Weiterhin sei ν_1, \dots, ν_{d+1} eine Orthonormalbasis des Normalenraums des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M im Punkt (x, n) . Definiere dann zur Abkürzung für $i \in \{1, \dots, m\}$ den Vektor v_i durch

$$v_i := \sum_{k=1}^m \frac{h_{i,k}}{g_{k,k}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_k}.$$

Damit ergibt sich die folgende Umformung

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(G_{\mathcal{N}_M})} &= |\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_m}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial n}{\partial u_{m+1}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial n}{\partial u_{d-1}} \end{pmatrix}, \nu_1, \dots, \nu_{d+1}\right)\right)| \\ &= |\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_m}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ v_m \end{pmatrix}, \nu_1, \dots, \nu_{d+1}\right)\right)| \end{aligned} \quad (2.1)$$

(beachte: Die Vektoren $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_m}$ bilden nach obigem „OBdA“ eine orthogonale Basis; der Anteil von $\frac{\partial n}{\partial u_i}$ in Richtung von $\frac{\partial n}{\partial u_j}$ kann für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$ vernachlässigt werden). Es sei B die Matrix, deren Determinante in Gleichung (2.1) bestimmt wird. Zur Abkürzung definiere noch $g_{i,j}^{(n)}$ (für $i, j \in \{1, \dots, m\}$) durch

$$g_{i,j}^{(n)} := \left\langle \frac{\partial n}{\partial u_i}, \frac{\partial n}{\partial u_j} \right\rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^m h_{i,k} \frac{h_{j,k}}{g_{k,k}} = \sum_{k=1}^m h_{i,k} \frac{h_{k,j}}{g_{k,k}}$$

(beachte die Symmetrie der zweiten Fundamentalform). Dann folgt

$$\begin{aligned} \det(G_{\mathcal{N}_M}) &= \det(B^\top \cdot B) \\ &= \det(G_n) \det\left(\begin{pmatrix} g_{1,1} + g_{1,1}^{(n)} & g_{1,2}^{(n)} & \cdots & g_{1,m}^{(n)} \\ g_{2,1}^{(n)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & g_{m-1,m}^{(n)} \\ g_{m,1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m-1}^{(n)} & g_{m,m} + g_{m,m}^{(n)} \end{pmatrix}\right) \\ &= \det(G_n) \det(G_M + H_M \cdot (G_M^{-1} \cdot H_M)) \\ &= \det(G_M) \det(G_n) \det(\mathbb{1} + (G_M^{-1} \cdot H_M)^2). \end{aligned}$$

Da die Hauptkrümmungen gerade die Eigenwerte der zur Matrix $G_M^{-1} \cdot H_M$ zugehörigen Weingartenabbildung sind, folgt die Aussage. ☺

2.1.2 Parallelflächen

2.9 Definition. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$. Dann ist die zu \mathcal{N} gehörige *Parallelfläche* zu M im Abstand ε definiert durch

$$M_{\mathcal{N},\varepsilon} := \{p - \varepsilon \cdot N \in \mathbb{E}_d \mid (p, N) \in \mathcal{N}\}.$$

Speziell werde die gesamte Parallelfläche zu M im Abstand ε mit M_ε bezeichnet, es gilt also $M_\varepsilon = M_{\mathcal{N}_M,\varepsilon}$.

2.10 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ sowie $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Parallelfläche M_ε erfüllt dann die folgenden Eigenschaften:

- Ein Normaleneinheitsvektor von M_ε im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ ist gegeben durch N .
- Ist $\varepsilon \neq -\frac{1}{\kappa_i(p, N)}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\kappa_i(p, N) \neq 0$, so ist M_ε lokal um $p - \varepsilon \cdot N$ eine reguläre Hyperfläche.
- Für betragsmäßig genügend kleines $\varepsilon \neq 0$ ist M_ε eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte orientierbare unberandete \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche.
- Die Hauptkrümmungen von M_ε im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ sind gegeben durch

$$\kappa_j^{(\varepsilon)}(p - \varepsilon \cdot N) = \begin{cases} \frac{\kappa_j(p, N)}{1 + \varepsilon \kappa_j(p, N)} & \text{für } j \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } j \in \{m+1, \dots, d-1\} \end{cases}.$$

Weiterhin stimmen die Hauptkrümmungsrichtungen auf M und M_ε für die ersten m Hauptkrümmungen überein.

- Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist das Normaleneinheitsbündel $\mathcal{N}_{M_\varepsilon}$ eine in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ immersierte orientierbare unberandete \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Orientierbarkeit der Fläche M_ε ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion, da dadurch auch ein eindeutiges Normaleneinheitsvektorfeld auf ganz M_ε gegeben ist.

Sei nun $U \rightarrow \mathcal{N}_M, u \mapsto (x(u), n(u))$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$) nach Bündelkoordinaten (vgl. Definition 2.4). Zusätzlich gelte im Punkt (p, N) (für $i \in \{1, \dots, m\}$)

$$\frac{\partial n}{\partial u_i} \Big|_{(p, N)} = -\kappa_i(p, N) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big|_{(p, N)}.$$

Somit lässt sich eine Umgebung von $p - \varepsilon \cdot N$ in M_ε parametrisieren durch

$$x_\varepsilon: U \rightarrow M_\varepsilon, u \mapsto x(u) - \varepsilon \cdot n(u).$$

Offensichtlich gilt nun, dass n orthogonal zu den partiellen Ableitungen von x_ε ist, also ist n ein Normaleneinheitsvektor im Punkt x_ε . Damit sind die zur ersten bzw. zweiten

Fundamentalform bezüglich obiger Parametrisierung gehörenden Matrizen $G^{(\varepsilon)}$ bzw. $H^{(\varepsilon)}$ im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ gegeben durch Diagonalmatrizen, deren Diagonaleinträge gegeben sind durch

$$\begin{aligned} g_{i,i}^{(\varepsilon)}|_{p-\varepsilon \cdot N} &= (1 + \varepsilon \kappa_i(p, N))^2 \left\| \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)} \right\|^2 && \text{für } i \in \{1, \dots, m\}, \\ g_{i,i}^{(\varepsilon)}|_{p-\varepsilon \cdot N} &= \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial n}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)} \right\|^2 && \text{für } i \in \{m+1, \dots, d-1\}, \\ h_{i,i}^{(\varepsilon)}|_{p-\varepsilon \cdot N} &= (1 + \varepsilon \kappa_i(p, N)) \kappa_i(p, N) \left\| \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)} \right\|^2 && \text{für } i \in \{1, \dots, m\} \text{ und} \\ h_{i,i}^{(\varepsilon)}|_{p-\varepsilon \cdot N} &= \varepsilon \left\| \frac{\partial n}{\partial u_j} \Big|_{(p,N)} \right\|^2 && \text{für } i \in \{m+1, \dots, d-1\}. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon \neq 0$ ist somit auch gezeigt, dass die Parametrisierung in $p - \varepsilon \cdot N$ regulär ist, falls $\varepsilon \neq -\frac{1}{\kappa_i(p,N)}$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\kappa_i(p, N) \neq 0$, insbesondere ist die Parallelfäche M_ε also (wegen der Kompaktheit von M) für betragsmäßig genügend kleines $\varepsilon \neq 0$ in \mathbb{E}_d immersiert. Weiterhin ist die zur Weingartenabbildung gehörige Abbildungsmatrix $W^{(\varepsilon)} = (G^{(\varepsilon)})^{-1} \cdot H^{(\varepsilon)}$ im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ ebenfalls gegeben durch eine Diagonalmatrix. Für deren Einträge in der Diagonalen gilt

$$\begin{aligned} w_{i,i}^{(\varepsilon)}|_{p-\varepsilon \cdot N} &= \frac{\kappa_i(p, N)}{1 + \varepsilon \kappa_i(p, N)} && \text{für } i \in \{1, \dots, m\} \text{ sowie} \\ w_{i,i}^{(\varepsilon)}|_{p-\varepsilon \cdot N} &= \frac{1}{\varepsilon} && \text{für } i \in \{m+1, \dots, d-1\}. \end{aligned}$$

Somit folgen die zu zeigenden Aussagen über die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen.

Es bleibt zu zeigen, dass das Normaleneinheitsbündel $\mathcal{N}_{M_\varepsilon}$ im Punkt $(p - \varepsilon \cdot N, N)$ regulär ist. Die partiellen Ableitungen des Normaleneinheitsbündels in diesem Punkt sind nach obigem gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ n \end{pmatrix} \right) \Big|_{(p-\varepsilon \cdot N, N)} &= \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon \kappa_i) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \\ -\kappa_i \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \end{pmatrix} \Big|_{(p,N)} && \text{für } i \in \{1, \dots, m\} \text{ und} \\ \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ n \end{pmatrix} \right) \Big|_{(p-\varepsilon \cdot N, N)} &= \begin{pmatrix} -\varepsilon \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i} \\ \frac{\partial n}{\partial u_i} \end{pmatrix} \Big|_{(p,N)} && \text{für } i \in \{m+1, \dots, d-1\}. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_m}, \frac{\partial n}{\partial u_{m+1}}, \dots, \frac{\partial n}{\partial u_{d-1}}$ nach Konstruktion linear unabhängig sind, und $(1 + \varepsilon \kappa_i)$ sowie $-\kappa_i$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ nicht zugleich verschwinden können, folgt auch diese Aussage. \odot

2.11 Korollar. Sei $U \rightarrow \mathcal{N}_M, u \mapsto (x, n)(u)$ eine Parametrisierung eines Teils des Normaleneinheitsbündels nach Bündelkoordinaten (vgl. Definition 2.4). Die zugehörige Teilfläche von M_ε (für $\varepsilon \in \mathbb{R}$) sei parametrisiert durch $u \mapsto x(u) - \varepsilon \cdot n(u)$. Es sei G_{M_ε} die zur ersten Fundamentalform bezüglich dieser Parametrisierung gehörige Matrix, die übrigen Bezeichnungen seien wie in Lemma 2.8.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \det(G_{M_\varepsilon})|_u \\ &= \det(G_M)|_{(u_1, \dots, u_m)} \det(G_n)|_{(u_{m+1}, \dots, u_{d-1})} \varepsilon^{2(d-1-m)} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j((x, n)(u)))^2 \\ &= \det(G_{N_M})|_u \frac{1}{K_{N_M}((x, n)(u))} \varepsilon^{2(d-1-m)} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j((x, n)(u)))^2. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.8 und dem Beweis von Lemma 2.10. \odot

2.12 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, und sei $l \in \{0, \dots, d-1\}$. Es sei $p - \varepsilon \cdot N$ ein regulärer Punkt der Parallelfäche M_ε .

Dann ist die l -te mittlere Krümmung $\varphi_l^{(\varepsilon)}$ der Parallelfäche M_ε im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ bezüglich des Normalenvektors N gegeben durch

$$\varphi_l^{(\varepsilon)}(p - \varepsilon \cdot N) = \frac{\sum_{j=l}^{d-1} \binom{d-1-l}{j-l} \varepsilon^{j-l} \varphi_j(p, N)}{\varepsilon^{d-1-m} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j(p, N))}.$$

Beweis. (i) Betrachte als ersten Schritt den Fall, dass M eine Hyperfläche ist, d.h. es gilt $m = d-1$. Nach Definition von $\varphi_l^{(\varepsilon)}$ in Definition 2.5 gilt mit Lemma 2.10

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{j=1}^{d-1} (1 + \varepsilon \kappa_j) \right) \binom{d-1}{l} \varphi_l^{(\varepsilon)} = \left(\prod_{j=1}^{d-1} (1 + \varepsilon \kappa_j) \right) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq d-1} \kappa_{i_1}^{(\varepsilon)} \cdots \kappa_{i_l}^{(\varepsilon)} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{d-1} (1 + \varepsilon \kappa_j) \right) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq d-1} \frac{\kappa_{i_1}}{1 + \varepsilon \kappa_{i_1}} \cdots \frac{\kappa_{i_l}}{1 + \varepsilon \kappa_{i_l}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq d-1} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_l} (1 + \varepsilon \kappa_{i_{l+1}}) \cdots (1 + \varepsilon \kappa_{i_{d-1}}) \end{aligned}$$

(dabei sei hier und in den nächsten zwei Umformungsschritten für eine feste Menge $\{i_1, \dots, i_l\}$ die Menge $\{i_{l+1}, \dots, i_{d-1}\}$ derart gewählt, dass $\{i_1, \dots, i_{d-1}\} = \{1, \dots, d-1\}$ gilt). Weiter folgt dann

$$\begin{aligned} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq d-1} \left(\kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_l} \sum_{k=0}^{d-1-l} \left(\varepsilon^k \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d-1 \\ \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{i_{l+1}, \dots, i_{d-1}\}}} \kappa_{j_1} \cdots \kappa_{j_k} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1-l} \left(\varepsilon^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq d-1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d-1 \\ \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{i_{l+1}, \dots, i_{d-1}\}}} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_l} \kappa_{j_1} \cdots \kappa_{j_k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1-l} \left(\varepsilon^k \frac{\binom{d-1}{l} \binom{d-1-l}{k}}{\binom{d-1}{k+l}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{l+k} \leq d-1} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_{l+k}} \right) \end{aligned}$$

(beachte: Aus Symmetriegründen reicht es zur Bestimmung des Vorfaktors der inneren Summe jeweils aus, die Anzahl der Summanden zu ermitteln). Mit der Definition von φ_l in Definition 2.5 folgt dann

$$= \binom{d-1}{l} \sum_{k=0}^{d-1-l} \left(\varepsilon^k \binom{d-1-l}{k} \varphi_{l+k} \right).$$

Somit ist die Aussage im Fall $m = d - 1$ gezeigt.

(ii) Betrachte schließlich den Fall, dass m beliebig ist. Es werde nun $\delta > 0$ so gewählt, dass nicht nur $p - \varepsilon \cdot N$ ein regulärer Punkt von M_ε ist, sondern auch $p - (\tilde{\delta} + \varepsilon) \cdot N$ für $0 \leq \tilde{\delta} \leq \delta$ (beachte: Dass dies geht, ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 2.10). Betrachte nun den Grenzwert der l -ten mittleren Krümmung $\varphi_l^{(\varepsilon+\delta)}$ der Hyperfläche $M_{\varepsilon+\delta}$ für $\delta \rightarrow 0$ zunächst für den Fall, dass $M_{\varepsilon+\delta}$ als Parallelfäche zu M_ε im Abstand δ aufgefasst wird. Dann gilt offensichtlich (vergleiche Lemma 2.10 und Definition 2.5)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_l^{(\varepsilon+\delta)} = \varphi_l^{(\varepsilon)}.$$

Andererseits lässt sich der Grenzwert von $\varphi_l^{(\varepsilon+\delta)}$ für $\delta \rightarrow 0$ auch mit dem Ergebnis aus (i) bestimmen, indem die Fläche $M_{\varepsilon+\delta}$ als die Parallelfäche zur Hyperfläche M_δ im Abstand ε aufgefasst wird. Da für $i \in \{1, \dots, m\}$ offensichtlich $\lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa_i^{(\delta)} = \kappa_i$ gilt (vgl. Lemma 2.10), folgt

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j) \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_l^{(\varepsilon+\delta)} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=l}^{d-1} \binom{d-1-l}{j-l} \varepsilon^{j-l} \varphi_j^{(\delta)}}{\prod_{j=m+1}^{d-1} (1 + \varepsilon \kappa_j^{(\delta)})} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=l}^{d-1} \left(\binom{d-1-l}{j-l} \varepsilon^{j-l} \frac{1}{\binom{d-1}{j}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d-1} \frac{\kappa_{i_1}^{(\delta)} \dots \kappa_{i_j}^{(\delta)}}{\prod_{i=m+1}^{d-1} (1 + \varepsilon \kappa_i^{(\delta)})} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wieder wegen $\lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa_i^{(\delta)} = \kappa_i$ für $i \in \{1, \dots, m\}$, und, da für $i \in \{m+1, \dots, d-1\}$ (beachte Lemma 2.10)

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\kappa_i^{(\delta)}}{1 + \varepsilon \kappa_i^{(\delta)}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\delta}}{1 + \frac{\varepsilon}{\delta}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta + \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \text{ sowie} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \varepsilon \kappa_i^{(\delta)}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\delta}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta + \varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung aus Gleichung (2.2). ☺

2.13 Korollar. *Es sei $\varepsilon > 0$ so, dass M_δ regulär ist für $\delta \in [0, \varepsilon]$ (vgl. Lemma 2.10). Weiterhin sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Teilmenge des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M .*

Für $l \in \{0, \dots, d-1\}$ gilt dann

$$\int_{M_{\mathcal{N}, \varepsilon}} \varphi_l^{(\varepsilon)} dO = \sum_{j=l}^{d-1} \binom{d-1-l}{j-l} \varepsilon^{j-l} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}},$$

insbesondere gilt

$$\int_{M_{\mathcal{N},\varepsilon}} dO = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \varepsilon^j \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 2.12 mit Hilfe von Korollar 2.11, die zweite Aussage ist der Spezialfall $l = 0$. \odot

Als direkte Folgerung ergibt sich die bekannte Steiner-Formel für das Volumen des Parallelkörpers (vergleiche beispielsweise [21, section III.1 3.3], [17, section 6.3.3] bzw. [22, Satz 2.2.1]):

2.14 Korollar (Steiner-Formel). *Mit den Bezeichnungen aus Korollar 2.13 gilt für das Volumen $V(\varepsilon)$ des Bereichs zwischen der Mannigfaltigkeit $\pi_M(\mathcal{N})$ und der Parallelfäche $M_{\mathcal{N},\varepsilon}$ – also für das Gebiet $\{p - \delta \cdot N \mid (p, N) \in \mathcal{N} \text{ und } \delta \in [0, \varepsilon]\}$ –, falls die Abbildung $\mathcal{N} \times]0, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{E}_d: (p, N, \delta) \mapsto p - \delta \cdot N$ injektiv ist,*

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \varepsilon^{j+1} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 2.13 durch Integration der Oberflächen der Parallelfächen im Abstand 0 bis ε . \odot

2.15 Lemma. *Es seien $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass $p - \varepsilon \cdot N$ ein regulärer Punkt von M_ε ist.*

Dann gilt

- *Es ist $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ eine Nullstelle der Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann, wenn $p - \varepsilon \cdot N \in M_\varepsilon$ eine Nullstelle der Abbildung $\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}: M_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ ist.*
- *Null ist ein regulärer Wert der Abbildung φ_{d-1} genau dann, wenn Null ein regulärer Wert der Abbildung $\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}$ ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.12 gilt für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$

$$\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}(p - \varepsilon \cdot N) = \frac{\varphi_{d-1}(p, N)}{\varepsilon^{d-1-m} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j(p, N))},$$

daher folgt bereits die erste Aussage.

Es gelte nun $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$. Sei dann $U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{N}_M (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$), so gilt für die partiellen Ableitungen von $\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}$ (es sei $i \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}}{\partial u_i} \right|_{p-\varepsilon \cdot N} &= \frac{\left. \frac{\partial \varphi_{d-1}}{\partial u_i} \right|_{(p,N)}}{\varepsilon^{d-1-m} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j(p, N))} - \frac{\varphi_{d-1}(p, N) \left. \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j) \right) \right|_{(p,N)}}{\varepsilon^{d-1-m} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j(p, N))^2} \\ &= \frac{\left. \frac{\partial \varphi_{d-1}}{\partial u_i} \right|_{(p,N)}}{\varepsilon^{d-1-m} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j(p, N))}. \end{aligned}$$

Somit verschwindet die partielle Ableitung von $\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}$ nach u_i im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ genau dann, wenn diejenige von φ_{d-1} nach u_i im Punkt (p, N) verschwindet, und es folgt auch die zweite Behauptung. \odot

2.1.3 Zwischen Fläche und Parallelfäche

2.16 Lemma. Sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ Parametrisierung einer offenen Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Dann ist die Parametrisierung

$$z: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_d, (u, \delta) \mapsto x(u) - \delta \cdot n(u)$$

genau für die Werte $(u, \delta) \in U \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ regulär, für die $-\frac{1}{\delta}$ keine Hauptkrümmung in $x(u)$ bezüglich der Normalen $n(u)$ ist. Für $\delta = 0$ ist die Parametrisierung genau dann regulär, wenn $m = d - 1$ ist.

Beweis. Die partiellen Ableitungen der Parametrisierung z sind gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, d - 1\}$)

$$\frac{\partial z}{\partial u_j} = \frac{\partial x}{\partial u_j} - \delta \cdot \frac{\partial n}{\partial u_j} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial z}{\partial \delta} = -n, \quad (2.3)$$

also folgt der zweite Teil der Aussage, der $\delta = 0$ betrifft, da die Dimension des von den Vektoren $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}}$ aufgespannten Untervektorraums gerade m ist. Im weiteren gelte $\delta \neq 0$.

Für die weitere Betrachtung kann oBdA von $m = d - 1$ ausgegangen werden, wenn man statt M die Parallelfäche M_ε für geeignetes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ betrachtet, da $\kappa_j^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{\delta - \varepsilon}$ in $(p - \varepsilon \cdot N, N)$ genau dann gilt, wenn $\kappa_j = -\frac{1}{\delta}$ in (p, N) gilt (für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, $j \in \{1, \dots, m\}$; vergleiche Lemma 2.10).

Definiere nun die Matrix A durch

$$A := \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}}, n \right)^\top \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \delta} \right).$$

Wird mit $G := (g_{j,k})_{j,k}$ die zur ersten Fundamentalform und mit $H := (h_{j,k})_{j,k}$ die zur zweiten Fundamentalform gehörige Matrix bezüglich der Parametrisierung x von M bezeichnet (jeweils mit $j, k \in \{1, \dots, d - 1\}$), so gilt

$$A = \begin{pmatrix} g_{1,1} + \delta h_{1,1} & \cdots & g_{1,d-1} + \delta h_{1,d-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{d-1,1} + \delta h_{d-1,1} & \cdots & g_{d-1,d-1} + \delta h_{d-1,d-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Hauptkrümmungen κ_i (für $i \in \{1, \dots, d - 1\}$) gerade die Eigenwerte der zur Weingartenabbildung gehörigen Matrix $G^{-1} \cdot H$ – also die Nullstellen des charakteristischen

Polynoms $\det(G^{-1} \cdot H - \lambda \cdot \mathbb{1})$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$) – sind, gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det(G + \delta \cdot H) = -\delta^{d-1} \det(G) \det(G^{-1} \cdot H + \frac{1}{\delta} \cdot \mathbb{1}) \\ &= -\delta^{d-1} \det(G) \prod_{i=1}^{d-1} \left(\frac{1}{\delta} + \kappa_i\right) = -\det(G) \prod_{i=1}^{d-1} (1 + \delta \kappa_i). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Also ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $-\frac{1}{\delta}$ eine Hauptkrümmung ist. Andererseits verschwindet $\det(A)$ nach Definition der Matrix A genau dann, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \delta}$ linear abhängig sind, somit folgt die Behauptung. \odot

2.17 Lemma. *Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Die Orientierung von (x, n) sei so gewählt, dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Parametrisierung*

$$z: U \times [0, r] \rightarrow \mathbb{E}_d, (u, \delta) \mapsto x(u) - \delta \cdot n(u)$$

für betragsmäßig kleines $\delta > 0$ positiv ist (beachte: Nach Lemma 2.16 ist z für betragsmäßig kleines $\delta \neq 0$ stets regulär).

Dann gilt für das orientierte und gewichtete Volumen $\text{vol}_{\text{or}}(z)$ des durch z parametrisierten Gebietes zwischen M und M_r (es sei $\mathcal{N} := (x, n)(U) \subseteq \mathcal{N}_M$)

$$\text{vol}_{\text{or}}(z) = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Das orientierte und gewichtete Volumen $\text{vol}_{\text{or}}(z)$ bezüglich der Parametrisierung z sei hierbei gegeben durch Integration über die Jacobi-Matrix der Parametrisierung z , wobei nicht der Absolutbetrag gebildet wird.

Beweis. Betrachte zunächst den Fall, dass $m = d - 1$ gilt, M also eine Hyperfläche ist. Dann gilt aufgrund der Voraussetzungen (vergleiche Gleichung (2.3) im Beweis von Lemma 2.16)

$$0 < \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \delta}\right)\right)\Big|_{\delta=0} = -\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}}, n\right)\right),$$

also folgt für die Determinante der Matrix $\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \delta}\right)$ (mit Gleichung (2.4) aus dem Beweis von Lemma 2.16)

$$\det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \delta}\right)\right) = \delta^{d-1} \sqrt{\det(G)} \prod_{i=1}^{d-1} \left(\frac{1}{\delta} + \kappa_i\right).$$

Da das Produkt gerade das charakteristische Polynom der Weingartenabbildung an der Stelle $-\frac{1}{\delta}$ ist (vergleiche den Beweis von Lemma 2.16), die Koeffizienten dieses Polynoms

aber gerade die (nicht-normierten) mittleren Krümmungen sind, lässt sich dies weiter umformen zu

$$= \sqrt{\det(G)} \left(\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{d-1-j} \varphi_j \right) \delta^{d-1} = \left(\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \delta^j \varphi_j \right) \sqrt{\det(G)}.$$

Um das gesuchte Volumen zu erhalten, muss dies jetzt noch über $U \times [0, r]$ integriert werden, es gilt also

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\text{or}}(z) &= \int_{U \times [0, r]} \left(\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \delta^j \varphi_j \right) \sqrt{\det(G)} \, du_1 \dots du_{d-1} \, d\delta \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \left(\frac{1}{d} \binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_U \varphi_j \sqrt{\det(G)} \, du_1 \dots du_{d-1} \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{x(U)} \varphi_j \, dO \right). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun mit Lemma 2.8.

Sei nun m beliebig. Nach Lemma 2.10 existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass sowohl die Parallellfläche M_ε als auch alle Parallellflächen M_δ für $\delta \in]0, \varepsilon[$ regulär sind. OBdA gelte $\varepsilon < r$. Mit dem bereits im ersten Teil für Hyperflächen gezeigten, sowie mit Korollar 2.14, folgt nun (es sei $\mathcal{N}^{(\varepsilon)} := \{(p - \varepsilon \cdot N, N) \mid (p, N) \in \mathcal{N}\}$)

$$\text{vol}_{\text{or}}(z) = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} \varepsilon^{j+1} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + (r - \varepsilon)^{j+1} \int_{\mathcal{N}^{(\varepsilon)}} \varphi_j^{(\varepsilon)} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_{M_\varepsilon}}} \right).$$

Da die linke Seite unabhängig von ε ist, kann auf der rechten Seite der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ betrachtet werden, dies führt zu

$$= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{N}^{(\varepsilon)}} \varphi_j^{(\varepsilon)} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_{M_\varepsilon}}} \right).$$

Mit Hilfe von Lemma 2.8 und Korollar 2.11 lässt sich dies weiter umformen zu

$$= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j^{(\varepsilon)} \varepsilon^{d-1-m} \prod_{j=1}^m (1 + \varepsilon \kappa_j) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right),$$

mit Lemma 2.12 weiter zu

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{N}} \sum_{i=j}^{d-1} \binom{d-1-j}{i-j} \varepsilon^{i-j} \varphi_i \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \sum_{i=j}^{d-1} \left(\binom{d-1-j}{i-j} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{i-j} \right) \int_{\mathcal{N}} \varphi_i \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right). \end{aligned}$$

Da nun alle Summanden der inneren Summe bis auf den ersten verschwinden, und dieser mit dem zugehörigen Binomialkoeffizienten eins ergibt, folgt die Aussage auch für Flächen höherer Kodimension. \odot

2.18 Definition. Die Menge $S_{\infty,r} \subseteq \mathbb{E}_d$ sei definiert als die Menge derjenigen Punkte $p \in \mathbb{E}_d$, für die unendlich viele $(p', N', \delta) \in \mathcal{N}_M \times [0, r]$ existieren, so dass $p = p' - \delta \cdot N'$ gilt.

2.19 Korollar. Das Maß der Menge $S_{\infty,r} \subseteq \mathbb{E}_d$ ist gleich Null.

Beweis. Wird entsprechend zu Lemma 2.17 das gewichtete aber nicht orientierte Volumen betrachtet, so ergibt sich (für offene Teilmenge \mathcal{N} des Normalenbündels \mathcal{N}_M wie in Lemma 2.17)

$$\sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{\mathcal{N}} |\varphi_j| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right).$$

Da die Mannigfaltigkeit M (und damit \mathcal{N}_M) kompakt ist, ist die stetige Funktion $|\varphi_j|$ beschränkt (für $j \in \{1, \dots, d-1\}$), also hat das Integral einen endlichen Wert. Wiederum wegen der Kompaktheit lässt sich \mathcal{N}_M mit endlich vielen offenen Teilmengen wie \mathcal{N} überdecken. Da sich somit immer noch eine endliche Summe ergibt, kann das Maß der Punkte, die unendlich oft überdeckt werden, nicht ungleich Null sein. \odot

2.1.4 Normalenfokalflächen

Ziel dieses Abschnittes ist die Untersuchung der zu M zugehörigen Normalenfokalflächen, da diese (bzw. eine Umgebung dieser Flächen) beim Beweis der Formel für das orientierte Volumen des Gebietes zwischen Fläche und Parallelfläche gesondert behandelt werden müssen. Für weitergehende Informationen über Normalenfokalflächen (für $d = 3$) vergleiche beispielsweise [2, section 10.6.8.] oder [15, chapter 10].

2.20 Definition. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, in denen eine weitere Hauptkrümmung mit $\kappa_j(p, N)$ übereinstimmt, also ein $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ existiert, so dass $\kappa_j(p, N) = \kappa_i(p, N)$ gilt. Offensichtlich ist $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$ kompakt.

Weiter sei $\mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$, für die die Richtungsableitung von κ_j im Punkt (p, N) in Richtung der zu $\kappa_j(p, N)$ gehörigen Hauptkrümmungsrichtung verschwindet (beachte: Diese Richtung ist bis auf einen Skalar eindeutig, da Punkte (p, N) , die in der Menge $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$ liegen, nicht betrachtet werden). Die Menge $\mathcal{N}_{M,2}^{(j)}$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$.

Ferner sei $\mathcal{N}_{M,3}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte in \mathcal{N}_M , die eine Umgebung besitzen, in der die Hauptkrümmung κ_j konstant ist. Offensichtlich ist die Menge $\mathcal{N}_{M,3}^{(j)}$ offen in \mathcal{N}_M .

Schließlich sei noch die (in \mathcal{N}_M) offene Menge $\tilde{\mathcal{N}}_M \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{N}}_M := \mathcal{N}_M \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m (\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \setminus \text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)})) \cup \bigcup_{j=1}^m (\mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \setminus \text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)})) \cup \bigcup_{j=1}^m (\overline{\mathcal{N}_{M,3}^{(j)}} \setminus \mathcal{N}_{M,3}^{(j)}) \right).$$

2.21 Definition. Für eine offene Menge $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_M$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ sei die zur j -ten Hauptkrümmung gehörige *Normalenfokalfläche* $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ definiert durch

$$\check{S}_{\mathcal{N},j} := \left\{ p + \frac{1}{\kappa_j(p, N)} \cdot N \mid (p, N) \in \mathcal{N} \text{ und } \kappa_j(p, N) \neq 0 \right\},$$

für $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$ setze $\check{S}_{\mathcal{N},j} := M$. Die Flächen $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ werden also genau aus denjenigen Punkten von $\tilde{\mathcal{N}}_M$ gebildet, in denen die Parametrisierung aus Lemma 2.16 nicht regulär ist, sie werden eingehüllt von den Normalen an die Fläche M (vergleiche den Beweis von Lemma 2.16).

2.22 Lemma. Es sei $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_M$. Weiterhin sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass die Parallelfäche M_ε zu M eine immensierte Hyperfläche ist (vgl. Lemma 2.10).

Dann gilt $\mathcal{N}_{M_\varepsilon} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_{M_\varepsilon}$. Für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ ist $\check{S}_{\mathcal{N}_\varepsilon, j} = \check{S}_{\mathcal{N}, j}$, insbesondere ist $\check{S}_{\mathcal{N}_\varepsilon, j} = M$ für $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$.

Beweis. Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$. Dann lassen sich aus Lemma 2.10 die folgenden Aussagen folgern: Es gilt $\kappa_i = \kappa_j$ in (p, N) genau dann, wenn $\kappa_i^{(\varepsilon)} = \kappa_j^{(\varepsilon)}$ in $(p - \varepsilon \cdot N, N)$ gilt (für $i, j \in \{1, \dots, m\}$). Für $m \in \{0, \dots, d-3\}$ und $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$ gilt $\mathcal{N}_{M_\varepsilon, 1}^{(j)} = \mathcal{N}_{M_\varepsilon}$ wegen $\kappa_j^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}$, für $m = d-2$ (und $j = d-1$) gilt $\mathcal{N}_{M_\varepsilon, 1}^{(d-1)} = \emptyset$, in beiden Fällen ist also insbesondere $\mathcal{N}_{M_\varepsilon, 1}^{(j)} = \text{Int}(\mathcal{N}_{M_\varepsilon, 1}^{(j)})$ erfüllt.

Eine Richtungsableitung von κ_j in (p, N) verschwindet genau dann, wenn die Richtungsableitung von $\kappa_j^{(\varepsilon)}$ in $(p - \varepsilon \cdot N, N)$ in die entsprechende Richtung verschwindet, da

$$\frac{\partial \kappa_j^{(\varepsilon)}}{\partial u_j} \Big|_{(p - \varepsilon \cdot N, N)} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \kappa_j(p, N))^2} \frac{\partial \kappa_j}{\partial u_j} \Big|_{(p, N)}$$

gilt (bezüglich Parametrisierungen wie im Beweis von Lemma 2.10; es sei $j \in \{1, \dots, m\}$). Da klar ist, dass $\kappa_j(p, N)$ in einer Umgebung konstant ist, genau dann wenn $\kappa_j^{(\varepsilon)}(p, N)$ konstant ist, folgt somit $\mathcal{N}_\varepsilon \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_{M_\varepsilon}$.

Sei nun $(p, N) \in \mathcal{N}$, dann folgen die weiteren Aussagen aus

$$p + \frac{1}{\kappa_j(p, N)} \cdot N = (p - \varepsilon \cdot N) + \frac{1}{\kappa_j^{(\varepsilon)}(p - \varepsilon \cdot N, N)} \cdot N$$

für $\kappa_j(p, N) \neq 0$ (beachte, dass $\kappa_j^{(\varepsilon)}(p - \varepsilon \cdot N, N) = 0$ genau dann gilt, wenn $\kappa_j(p, N) = 0$ erfüllt ist; es sei $j \in \{1, \dots, m\}$), bzw. aus

$$p = (p - \varepsilon \cdot N) + \frac{1}{\kappa_j^{(\varepsilon)}(p - \varepsilon \cdot N, N)} \cdot N$$

für $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$ (vergleiche jeweils Lemma 2.10). ⊙

2.23 Lemma. Für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ ist der $(d-1)$ -dimensionale Oberflächeninhalt sowohl der Fläche $\check{S}_{\text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)},j)}$ als auch der Fläche $\check{S}_{\text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)},j)}$ Null.

Beweis. Es reicht, den Fall $m = d-1$ zu betrachten, da sonst wegen Lemma 2.22 statt M die Parallelfläche M_ε für geeignetes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ betrachtet werden kann.

Es sei $(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)})$ oder $(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)})$. Dann gibt es (mit geeignetem offenen $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$) eine Parametrisierung $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$, so dass alle via (x, n) parametrisierten Punkte in der entsprechenden Menge liegen. Eine Teilfläche der Fläche $\check{S}_{\text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)},j}$ bzw. $\check{S}_{\text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)},j)}$ lässt sich damit dann parametrisieren durch

$$y: U \rightarrow \mathbb{E}_d, u \mapsto x(u) + \frac{1}{\kappa_j(x(u), n(u))} \cdot n(u),$$

die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind dann für $i \in \{1, \dots, d-1\}$ gegeben durch

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} - \frac{1}{\kappa_j^2} \frac{\partial \kappa_j}{\partial u_i} \cdot n + \frac{1}{\kappa_j} \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i}.$$

Betrachte zunächst den Fall, dass $(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}, j)$ gilt. Somit ist κ_j mindestens zweifache Hauptkrümmung, es gibt also (für $i \in \{1, \dots, d-1\}$ und $k \in \{1, 2\}$) geeignete Funktionen $\lambda_i^{(k)}: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^{(k)} \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i} = -\kappa_j \cdot \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^{(k)} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i}$$

und die Vektoren $(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{d-1}^{(1)})(u)$ und $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{d-1}^{(2)})(u)$ sind linear unabhängig für alle $u \in U$. Definiere dann die Funktionen $\mu^{(k)}: U \rightarrow \mathbb{R}$ durch (es sei $\{k, \tilde{k}\} = \{1, 2\}$)

$$u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^{(l)}(u) \cdot \frac{\partial \kappa_j}{\partial u_i} \Big|_u = 0 \text{ für } l \in \{1, 2\} \\ (-1)^k \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^{(\tilde{k})}(u) \cdot \frac{\partial \kappa_j}{\partial u_i} \Big|_u & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach Konstruktion ist dann $\sum_{i=1}^{d-1} (\sum_{k=1}^2 \mu^{(k)} \lambda_i^{(k)}) \cdot \frac{\partial y}{\partial u_i}$ eine nichttriviale Linearkombination der Null, die partiellen Ableitungen von y sind also stets linear abhängig, und es folgt der erste Teil der Aussage.

Betrachte nun den Fall, dass $(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)}, j)$ gilt, die Richtungsableitung von κ_j in Richtung der zugehörigen Hauptkrümmungsrichtung ist also Null, d.h. es gibt geeignete Funktionen $\lambda_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ (für $i \in \{1, \dots, d-1\}$) mit

$$\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i} = -\kappa_j \cdot \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \text{ sowie } \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial \kappa_j}{\partial u_i} = 0.$$

Damit ist dann eine nichttriviale Linearkombination der Null gegeben durch $\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial y}{\partial u_i}$, die partiellen Ableitungen von y sind also auch in diesem Fall stets linear abhängig, und es folgt der zweite Teil der Aussage. \odot

2.24 Lemma. Sei $j \in \{1, \dots, d-1\}$ und $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_M$ eine offene Menge, die weder mit $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$ noch mit $\mathcal{N}_{M,2}^{(j)}$ einen nichtleeren Schnitt besitzt.

Dann ist $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ eine reguläre \mathcal{C}^{k-2} -differenzierbare Hyperfläche (oder die leere Menge). Im Punkt $p + \frac{1}{\kappa_j(p,N)} \cdot N \in \check{S}_{\mathcal{N},j}$ ist ein Normalenvektor an die Fläche $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ gegeben durch die zur Hauptkrümmung κ_j gehörige Hauptkrümmungsrichtung (für $(p, N) \in \mathcal{N}$ mit $\kappa_j(p, N) \neq 0$).

Beweis. Es reicht auch hier wie im Beweis von Lemma 2.23, den Fall $m = d-1$ zu betrachten, da sonst wegen Lemma 2.22 statt M die Parallelfläche M_ε für geeignetes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ betrachtet werden kann.

Sei $(p, N) \in \mathcal{N}$ mit $\kappa_j(p, N) \neq 0$ ein beliebiger Punkt in \mathcal{N} (falls ein solcher Punkt nicht existiert, handelt es sich bei $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ um die leere Menge; vergleiche Definition 2.21). Sei dann $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) , so dass im Punkt (p, N) selbst Krümmungslinienparameter vorliegen (für eine geeignete offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Die partiellen Ableitungen der zugehörigen Parametrisierung y der Fläche $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ im Punkt (p, N) sind dann gegeben durch (vergleiche den Beweis von Lemma 2.23; es sei $i \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)} = \left(1 - \frac{\kappa_i(p, N)}{\kappa_j(p, N)}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)} - \frac{1}{\kappa_j^2(p, N)} \frac{\partial \kappa_j}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)} \cdot N,$$

insbesondere ist $\frac{\partial y}{\partial u_j} \Big|_{(p,N)}$ ein nichtverschwindendes Vielfaches des Normalenvektors N , da $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}_{M,2}^{(j)} = \emptyset$ gilt. Da $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}_{M,1}^{(j)} = \emptyset$ ist, verschwindet der Vorfaktor von $\frac{\partial x}{\partial u_i} \Big|_{(p,N)}$ für $i \in \{1, \dots, d-1\} \setminus \{j\}$ nicht, also sind die partiellen Ableitungen von y in (p, N) (und damit einer ganzen Umgebung von (p, N)) linear unabhängig, und der erste Teil der Aussage ist gezeigt.

Weiterhin ist $\frac{\partial x}{\partial u_j} \Big|_{(p,N)}$ offensichtlich ein Vektor, der zu allen partiellen Ableitungen von y in (p, N) orthogonal ist. Da dies jedoch die zu $\kappa_j(p, N)$ gehörige Hauptkrümmungsrichtung ist, folgt auch die zweite Aussage. \odot

2.25 Lemma. Für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{M,3}^{(j)}$ eine offene Teilmenge von \mathcal{N}_M mit konstanter nichtverschwindender Hauptkrümmung κ_j . Setze dann $r := -\frac{1}{\kappa_j(p,N)}$ (für beliebiges $(p, N) \in \mathcal{N}$).

Dann ist der $(d-1)$ -dimensionale Oberflächeninhalt der Fläche $M_{\mathcal{N}_{M,3,r}^{(j)}}$ gleich Null.

Beweis. Es reicht, den Fall $m = d-1$ zu betrachten, da sonst wegen Lemma 2.22 statt M die Parallelfläche M_ε für geeignetes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ betrachtet werden kann.

Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}$ und $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{N} (mit geeignetem offenen $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Eine Parametrisierung der Fläche $M_{(x,n)(U),r}$ in einer Umgebung von $p - r \cdot N$ ist somit gegeben durch

$$x_\varepsilon: U \rightarrow \mathbb{E}_d, u \mapsto x(u) - r \cdot n(u).$$

Da $-\frac{1}{r}$ eine Hauptkrümmung auf dem gesamten Gebiet $(x, n)(U)$ ist, gilt für geeignete Funktionen $\lambda_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ (für $i \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i} = -\left(-\frac{1}{r}\right) \cdot \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i},$$

die partiellen Ableitungen der Parametrisierung x_ε sind also stets linear abhängig, und es folgt die Aussage. \odot

2.1.5 Seitenflächen

2.26 Definition. Es sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M . Dann werde die *Seitenfläche* $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ definiert durch

$$\bar{S}_{\mathcal{B},r} := \{p - \delta \cdot N \in \mathbb{E}_d \mid (p, N) \in \mathcal{B} \text{ und } \delta \in [0, r]\}.$$

2.27 Lemma. Es sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M . Sei ferner $(p, N) \in \mathcal{B}$ und $\delta \in]0, r[$, so dass $-\frac{1}{\delta}$ keine Hauptkrümmung in (p, N) ist.

Dann ist die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ um den Punkt $p - \delta \cdot N$ eine reguläre \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche.

Beweis. Sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{B}$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{B} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Die zugehörige Parametrisierung der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ ist dann gegeben durch

$$y: U \times [0, r] \rightarrow \bar{S}_{\mathcal{B},r}, (u, \delta) \mapsto x(u) - \delta \cdot n(u).$$

Falls die partiellen Ableitungen der Parametrisierung y im Punkt $p - \delta \cdot N$ linear abhängig wären, so gäbe es Funktionen $\lambda_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ (für $j \in \{1, \dots, d-2\}$), so dass

$$\sum_{j=1}^{d-2} \lambda_j \cdot \frac{\partial n}{\partial u_j} = -\left(-\frac{1}{\delta}\right) \cdot \sum_{j=1}^{d-2} \lambda_j \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}$$

wäre (beachte: Die partielle Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \delta}$ ist orthogonal zu den anderen partiellen Ableitungen; vergleiche auch Gleichung (2.3) im Beweis von Lemma 2.16). Also wäre $-\frac{1}{\delta}$ Hauptkrümmung in (p, N) im Widerspruch zu den Voraussetzungen. \odot

2.28 Korollar. Es sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M . Sei ferner $(p, N) \in \mathcal{B}$, $\delta \in]0, r[$ und $-\frac{1}{\delta}$ eine Hauptkrümmung in (p, N) .

Ist für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (und damit nach Lemma 2.10 für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ bis auf endlich viele; im Fall $m = d-1$ auch für $\varepsilon = 0$) M_ε in $p - \varepsilon \cdot N$ regulär und die Hauptkrümmungsrichtungen zur Hauptkrümmung (der Fläche M_ε) $-\frac{1}{\delta + \varepsilon}$ transversal zu $\pi_{M_\varepsilon}(\mathcal{B})$ im Punkt $p - \varepsilon \cdot N$ (insbesondere ist also $-\frac{1}{\delta}$ keine mehrfache Hauptkrümmung in (p, N)); beachte: Nach Lemma 2.10 stimmen die Hauptkrümmungsrichtungen von M und M_ε überein), so ist die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ um den Punkt $p - \delta \cdot N$ eine reguläre \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche.

Beweis. Es kann aufgrund der Voraussetzungen oBdA von $m = d - 1$ ausgegangen werden (vergleiche auch den Beweis von Lemma 2.22). Dann folgt die Aussage aber direkt aus dem Beweis von Lemma 2.27, da im Fall der linearen Abhängigkeit der partiellen Ableitungen von y im Punkt $p - \delta \cdot N$ gilt, dass die zur Hauptkrümmung $-\frac{1}{\delta}$ zugehörige Hauptkrümmungsrichtung $\sum_{j=1}^{d-2} \lambda_j \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}$ im Tangentialraum von $\pi_M(\mathcal{B})$ im Punkt p liegt. \odot

2.29 Konstruktion. Es sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M von M und $(p, N) \in \mathcal{N}$ ein nichtsingulärer Punkt des Randes von \mathcal{N} . Der Rand von \mathcal{N} ist also in einer Umgebung von (p, N) eine $(d - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M , diese werde mit \mathcal{B} bezeichnet.

Es gelte zunächst $m = d - 1$, die Mannigfaltigkeit M ist also eine Hyperfläche. Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{B} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Die zugehörige Parametrisierung der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ ist dann gegeben durch

$$y: U \times]0, r[\rightarrow \bar{S}_{\mathcal{B},r}, (u, \delta) \mapsto x(u) - \delta \cdot n(u).$$

Es werde $\sigma := 1$ gesetzt, falls der Normalenvektor $\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}} \times n$ an $\pi_M(\mathcal{B})$ im Punkt (p, N) aus dem Gebiet $\pi_M(\mathcal{N})$ heraus zeigt, andernfalls setze $\sigma := -1$.

Im Punkt $p - \delta \cdot N$ der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ (für geeignetes $\delta \in]0, r[$, so dass $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ in $p - \delta \cdot N$ regulär ist; vergleiche Lemma 2.27) lässt sich somit ein Normaleneinheitsvektor $\bar{N}(p - \delta \cdot N)$ definieren durch (beachte: Es gilt $\frac{\partial y}{\partial \delta} = -n$)

$$\bar{N}(p - \delta \cdot N) := \left(\frac{\sigma}{\left\| \frac{\partial y}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}} \times n \right\|} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}} \times n \right) \right) \Big|_{(p,N)}.$$

Sei nun m beliebig und $\delta \in]0, r[$ so gewählt, dass $p - \delta \cdot N$ ein regulärer Punkt der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ ist (vgl. Lemma 2.27). Dann gibt es nach Lemma 2.10 ein $\varepsilon \in]0, \delta[$, so dass M_ε eine reguläre Hyperfläche ist. Offensichtlich ist $\bar{S}_{\mathcal{B}(\varepsilon),r-\varepsilon}$ eine Teilfläche von $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$, die den zu untersuchenden Punkt enthält, wenn $\mathcal{B}(\varepsilon) := \{(p - \varepsilon \cdot N, N) | (p, N) \in \mathcal{B}\}$ gesetzt wird. Daher lässt sich die Konstruktion des Normalenvektors $\bar{N}(p - \delta \cdot N)$ in der allgemeinen Situation auf den bereits behandelten Fall $m = d - 1$ zurückführen.

2.30 Lemma. *Es seien $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$, \mathcal{B} und $(p, N) \in \mathcal{B}$ so wie in Konstruktion 2.29 gegeben. Weiterhin sei $\delta \in [0, r]$ so gewählt, dass die Fläche M_δ um $p - \delta \cdot N$ regulär ist (vgl. Lemma 2.10).*

Im Punkt $p - \delta \cdot N \in \pi_{M_\delta}(\mathcal{B})$ zeigt der Normalenvektor $\bar{N}(p - \delta \cdot N)$ an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ genau dann ins Außengebiet (innerhalb der Fläche M_δ) der Menge $\pi_{M_\delta}(\mathcal{N})$, wenn die Anzahl der Hauptkrümmungen $\kappa_i(p, N)$, die kleiner als $-\frac{1}{\delta}$ sind, gerade ist.

Beweis. Aus den gleichen Gründen wie in Konstruktion 2.29 kann statt M die Parallelfläche M_ε für genügend kleines $\varepsilon > 0$ betrachtet werden, falls $m < d - 1$ ist, sei also im folgenden M oBdA eine Hyperfläche.

Es sei $(x, n): U' \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{N} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$), so dass \mathcal{B} (nach eventueller Verkleinerung) gerade gegeben

ist durch $(x, n)(U)$, wobei $U := \{u \in U' \mid u_{d-1} = 0\}$ gesetzt wird. OBdA sei die Ableitung $\frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \Big|_{(p, N)}$ so orientiert, dass sie aus der Menge $\pi_M(\mathcal{N})$ heraus zeigt. Nach Definition von σ in Konstruktion 2.29 gilt also

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{sign} \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}} \times n, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \right\rangle \Big|_{(p, N)} \right) \\ &= \text{sign} \left(\det \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}}, n, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \right) \Big|_{(p, N)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Parametrisierung $y: U \times [0, r] \rightarrow \mathbb{E}_d$ einer Teilmenge von $\bar{S}_{\mathcal{B}, r}$, sei nun so definiert wie in Konstruktion 2.29, die Parametrisierung $z: U' \times [0, r] \rightarrow \mathbb{E}_d$ so wie in Lemma 2.16.

Nach Wahl der Orientierung von $\frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \Big|_{(p, N)}$ ist ein nach außen weisender Vektor im Punkt $p - \delta \cdot N$ (innerhalb von M_δ bezüglich der Menge $\pi_{M_\delta}(\mathcal{N})$) gegeben durch $\frac{\partial z}{\partial u_{d-1}} \Big|_{(p, N)}$, es muss nun also nur noch untersucht werden, wann das Skalarprodukt $\langle \bar{N}(p - \delta \cdot N), \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}} \Big|_{(p, N)} \rangle$ positiv ist. Es gilt nach Definition von $\bar{N}(p - \delta \cdot N)$ in Konstruktion 2.29 (dort ist auch $\sigma \in \{-1, 1\}$ definiert)

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\langle \bar{N}(p - \delta \cdot N), \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}} \Big|_{(p, N)} \rangle \right) &= \sigma \text{sign} \left(\det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}}, n, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}} \right) \Big|_{(p, N)} \right) \right) \\ &= -\sigma \text{sign} \left(\det \left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-2}}, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, n \right) \Big|_{(p, N)} \right) \right) \end{aligned}$$

(beachte: Es gilt $\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial y}{\partial u_i}$ für $i \in \{1, \dots, d-2\}$). Mit Hilfe der Matrix A aus dem Beweis von Lemma 2.16 lässt sich dies weiter umformen zu

$$= -\sigma \text{sign}(\det(A \Big|_{(p, N)})) \text{sign} \left(\det \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}}, n \right) \Big|_{(p, N)} \right) \right),$$

mit Gleichung (2.5) und Gleichung (2.4) (aus dem Beweis von Lemma 2.16) folgt daraus dann

$$= \prod_{i=1}^{d-1} \text{sign}(1 + \delta \kappa_i(p, N)).$$

Dieses Produkt ist jedoch offensichtlich genau dann positiv, wenn die Anzahl derjenigen Hauptkrümmungen, die kleiner als $-\frac{1}{\delta}$ sind, gerade ist. \odot

2.1.6 Windungszahl

2.31 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M eine Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften aus Voraussetzung 2.1. Zusätzlich habe die in Definition 2.20 definierte offene Teilmenge $\tilde{\mathcal{N}}_M$ von \mathcal{N}_M endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Schließlich sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M , so dass die singulären Punkte des Randes von \mathcal{N} eine Teilmenge einer endlichen Vereinigung \mathcal{C}^1 -differenzierbarer Bilder von l -Rechtecken sind (mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$). Es sei \mathcal{B} die

$(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M , die die nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N} bildet, die endlich viele Zusammenhangskomponenten besitze. Außerdem sei $r > 0$ fest gegeben.

2.32 Definition. Die Abbildung $\sigma_r: \mathcal{N}_M \rightarrow \{-1, +1\}$ sei für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ definiert durch $\sigma_r(p, N) := +1$, falls die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p, N) , die kleiner als $-\frac{1}{r}$ sind, gerade ist, und durch $\sigma_r(p, N) := -1$, falls sie ungerade ist.

Gilt $m = d - 1$, und ist ein festes Normalenvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ausgezeichnet, so sei $\sigma_r: M \rightarrow \{-1, +1\}$ definiert durch $p \mapsto \sigma_r(p, N(p))$.

2.33 Konstruktion. Es sei die Hyperfläche $S_{\mathcal{N},r}$ definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell dabei auftretender Vielfachheiten) von $\pi_M(\mathcal{N})$, M_r und $\bar{S}_{B,r}$. In denjenigen Punkten von $S_{\mathcal{N},r}$, in deren Umgebung $S_{\mathcal{N},r}$ eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.10, Lemma 2.27 und Korollar 2.28) sei das folgende Normaleneinheitsvektorfeld $N: S_{\mathcal{N},r} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert (es sei $(p', N') \in \mathcal{N}$): In den regulären Punkten der Teilfläche $\bar{S}_{\partial\mathcal{N},r}$ stimme N mit dem in Konstruktion 2.29 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} überein. Gilt $m = d - 1$ (sonst bildet M keine der regulären Teilflächen von $S_{\mathcal{N},r}$), so sei der Normalenvektor in $p' = \pi_M(p', N')$ gegeben durch $N(p') := N'$ (beachte, dass M in einer Umgebung von p' zweimal als Teilfläche von $S_{\mathcal{N},r}$ jedoch mit entgegengesetzter Orientierung der Normalenvektoren auftritt, falls neben (p', N') auch $(p', -N') \in \mathcal{N}$ ist). Ist $p' - r \cdot N'$ ein regulärer Punkt von M_r (vergleiche Lemma 2.10 und Lemma 2.25), so setze $N(p' - r \cdot N') := \sigma_r(p', N') \cdot N'$.

2.34 Definition. Es sei S eine kompakte geschlossene orientierbare Hyperfläche, deren singuläre Punkte endliche Vereinigung \mathcal{C}^1 -differenzierbarer Bilder von l -Rechtecken sind (mit $l \in \{0, \dots, d-2\}$). Es sei $N: S \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf S , so dass $(p, N(p))$ für alle $p \in S$ stets in derselben der beiden Zusammenhangskomponenten des Normalenbündels \mathcal{N}_S liegt. Es sei $q \in \mathbb{E}_d$ ein Punkt, der in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}_d \setminus S$ liegt (beachte die Kompaktheit von S).

Es sei $p \in \mathbb{E}_d \setminus S$ ein beliebiger Punkt, und g sei ein beliebiger Streckenzug von p nach q , der S stets in regulären Punkten transversal schneidet. Es sei $w_{S,g}^+$ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte von g mit S , in denen der Richtungsvektor von g in die gleiche Richtung zeigt wie das gegebene Normalenvektorfeld N (d.h. das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren ist positiv). Andererseits sei $w_{S,g}^-$ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte, für die dies nicht der Fall ist (d.h. das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist negativ; beachte: Da stets ein transversaler Schnitt vorliegt, kann das Skalarprodukt nie verschwinden). Dann sei die *Windungszahl* $w_S(p)$ des Punktes p bezüglich der Fläche S definiert durch

$$w_S(p) := w_{S,g}^+ - w_{S,g}^-.$$

Die Windungszahl $w_S(p)$ ist also zunächst einmal abhängig von der Wahl (und der Existenz) des Streckenzugs g und des Punktes q . Für die Flächen bezüglich derer im folgenden die Windungszahl verwendet werden soll, muss also noch die Wohldefiniertheit von $w_S(p)$ gezeigt werden. Für $S = S_{\mathcal{N},r}$ geschieht dies beispielsweise in Lemma 2.35 und Lemma 2.39.

2.35 Lemma. *Es sei $q \in \mathbb{E}_d$ ein Punkt, dessen Abstand zu M größer als r ist (dieser existiert, da M kompakt ist).*

Dann existiert für alle $p \in \mathbb{E}_d \setminus S_{\mathcal{N},r}$ ein Streckenzug g von p nach q mit den für Definition 2.34 erforderlichen Eigenschaften.

Beweis. Sei $B \subseteq \mathbb{E}_d$ offene Umgebung von p , die $S_{\mathcal{N},r}$ nicht schneidet (beachte: Da M kompakt ist, ist auch S kompakt). Da die singulären Punkte in $S_{\mathcal{N},r}$ eine Menge vom $(d - 1)$ -dimensionalen Maß Null bilden (vergleiche hierzu Lemma 2.10, Definition 2.20, Lemma 2.25, Lemma 2.27 sowie Korollar 2.28), schneiden fast alle Verbindungsgeraden des Punktes q mit Punkten in B die Fläche $S_{\mathcal{N},r}$ nicht in einem dieser singulären Punkte, ebenso sind fast alle dieser Verbindungsgeraden keine Tangentialgeraden in regulären Punkten von $S_{\mathcal{N},r}$. Weiterhin ist das Maß der Geraden, die $S_{\mathcal{N},r}$ in unendlich vielen Punkten schneiden Null, da bekanntlich (vergleiche beispielsweise [21, formula 14.70 in III.1 4.5])

$$\int_{\eta \in \mathcal{E}_{1,d}} |\eta \cap S_{\mathcal{N},r}| d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_d} dO \int_{S_{\mathcal{N},r}} dO$$

gilt, die Oberfläche von $S_{\mathcal{N},r}$ als endliche Vereinigung von Flächen endlicher Oberfläche jedoch sicherlich endlich ist.

Es gibt also Punkte p' und q' beliebig nahe bei p bzw. q , so dass die Strecke von p' nach q' den geforderten Anforderungen genügt. Ein Streckenzug von p nach q ergibt sich dann mit p' und q' als Zwischenpunkten. ⊙

2.36 Beispiel. In Abbildung 2.1 ist für zwei Beispielsituationen in der euklidischen Ebene (also für $d = 2$) das gemäß Konstruktion 2.33 konstruierte Normaleneinheitsvektorfeld der Fläche $S_{\mathcal{N},r}$ (in grün) sowie die Windungszahlen bezüglich $S_{\mathcal{N},r}$ in den einzelnen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{E}_d \setminus S_{\mathcal{N},r}$ (in rot) eingetragen.

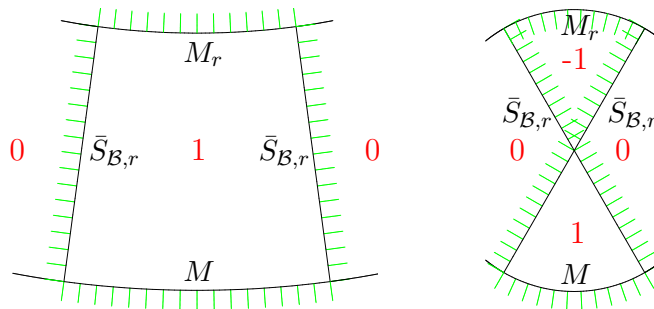


Abbildung 2.1: Normalenvektorfeld und Windungszahl

2.37 Definition. Es sei S eine kompakte Hyperfläche, deren singuläre Punkte endliche Vereinigung \mathcal{C}^1 -differenzierbarer Bilder von l -Rechtecken sind (mit $l \in \{0, \dots, d - 2\}$). Nun kann die Funktion $b_S: \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{Z}$, die für jeden Punkt von \mathbb{E}_d (mit einem Vorzeichen

gewichtet) angibt, wie oft er zwischen S und der Parallellfläche S_r enthalten ist, definiert werden via (vergleiche auch Definition 2.32)

$$b_S: \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{Z}, p \mapsto \sum_{\substack{(p', N', \delta) \in \mathcal{N}_S \times]0, r[\\ \text{mit } p = p' - \delta \cdot N'}} (-1)^{\sigma_\delta(p', N')}.$$

Offensichtlich ist b_S in fast allen Punkten von \mathbb{E}_d wohldefiniert.

2.38 Lemma. *Es sei $j \in \{1, \dots, d-1\}$, $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \cup \mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \cup S_{\infty,r})$ mit $\kappa_j(p, N) \neq 0$ und $p + \frac{1}{\kappa_j(p, N)} \cdot N \notin S_{\mathcal{N},r}$.*

Dann haben die Punkte einer (genügend kleinen) Umgebung von (p, N) in \mathcal{N}_M keinen Einfluss auf den Wert von $b_{S_{\mathcal{N},r}}$ in einer (genügend kleinen) Umgebung von $p + \frac{1}{\kappa_j(p, N)} \cdot N$.

Beweis. Es reicht, den Fall $m = d-1$ zu betrachten, da sonst wegen Lemma 2.22 statt M die Parallellfläche M_ε für geeignetes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ betrachtet werden kann.

Sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ Parametrisierung einer offenen Umgebung \mathcal{N}' von (p, N) , so dass für alle $(p', N') \in \mathcal{N}'$ ebenfalls $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \cup \mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \cup S_{\infty,r})$ und $\kappa_j(p', N') \neq 0$ gilt (beachte: Dies ist möglich, da das betreffende Gebiet offenbar offen ist). Sei nun $(p', N') \in \mathcal{N}'$ mit $p' + \frac{1}{\kappa_j(p', N')} \cdot N' \in \check{S}_{\mathcal{N}',j}$ beliebig. Weiterhin sei $c:]-s_0, s_0[\rightarrow M$ eine reguläre Parametrisierung der Krümmungslinie durch p' zur Hauptkrümmung κ_j mit $c(0) = p'$ (für geeignetes $s_0 > 0$). Für $\delta := -\frac{1}{\kappa_j(p', N')}$ sei $c_\delta:]-s_0, s_0[\rightarrow M_\delta$ die zugehörige Kurve auf der Parallellfläche M_δ , d.h. es gilt $c_\delta = (x - \delta \cdot n) \circ c$. Für den Tangentialvektor dieser Kurve gilt dann, da c Krümmungslinie ist,

$$\frac{\partial c_\delta}{\partial s} = (1 + \delta \kappa_j \circ c) \cdot \frac{\partial c}{\partial s}.$$

Da nach Voraussetzung $\frac{\partial \kappa_j}{\partial s} \Big|_{(p', N')} \neq 0$ ist, hat $(1 + \delta \kappa_j \circ c)$ in 0 einen Vorzeichenwechsel, somit gilt

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{1}{\|\frac{\partial c_\delta}{\partial s}\|} \cdot \frac{\partial c_\delta}{\partial s} = - \lim_{s \nearrow 0} \frac{1}{\|\frac{\partial c_\delta}{\partial s}\|} \cdot \frac{\partial c_\delta}{\partial s}.$$

Also liegt die Kurve c_δ (lokal) ganz auf einer Seite von $\check{S}_{\mathcal{N}',j}$. Da der Punkt (p', N') beliebig ist, liegt also ganz $z(U \times]0, r[)$ (lokal um (p, N)) auf einer Seite von $\check{S}_{\mathcal{N}',j}$ (dabei sei z die Parametrisierung aus Lemma 2.16), und jeder Punkt, der auf dieser Seite nahe genug an $\check{S}_{\mathcal{N}',j}$ liegt, wird genau zweimal durch $z(U \times]0, r[)$ parametrisiert (nach eventueller Verkleinerung der Menge U). Sei $p' - \delta' \cdot N'$ (für einen geeigneten Punkt $(p', N') \in \mathcal{N}'$ und $\delta' \in]0, r[$) ein solcher Punkt, und $(p'', N'') \in \mathcal{N}'$ und seien $\delta'' \in]0, r[$ derart gewählt, dass $p' - \delta' \cdot N' = p'' - \delta'' \cdot N''$ mit $(p', N') \neq (p'', N'')$ gilt. Nach obigem haben also $(1 + \delta' \kappa_j(p', N'))$ und $(1 + \delta'' \kappa_j(p'', N''))$ verschiedene Vorzeichen. Da alle anderen Hauptkrümmungen von κ_j verschieden sind, haben diese (lokal) keinen Einfluss auf die Bestimmung von $b(p', N', \delta')$ bzw. $b(p'', N'', \delta'')$, es gilt also (vgl. Definition 2.34)

$$|b(p', N', \delta') - b(p'', N'', \delta'')| = 1.$$

Damit heben sich die Beiträge von (p', N', δ') und (p'', N'', δ'') bei der Bestimmung von $b_{S_{\mathcal{N},r}}(p' - \delta' \cdot N')$ gerade gegenseitig auf.

Auf den Wert von $b_{S_{\mathcal{N},r}}$ in den Punkten der anderen Seite von $\check{S}_{\mathcal{N}',j}$ haben die Punkte von \mathcal{N}' nach obigem gar keinen Einfluss, auf den Wert von $b_{S_{\mathcal{N},r}}$ in den Punkten der Fläche $\check{S}_{\mathcal{N}',j}$ selbst nach Definition ebenfalls nicht (vgl. Definition 2.34). \odot

2.39 Lemma. *Es sei $p \in \mathbb{E}_d \setminus (S_{\mathcal{N},r} \cup S_{\infty,r})$ ein beliebiger Punkt.*

Dann gilt $w_{S_{\mathcal{N},r}}(p) = b_{S_{\mathcal{N},r}}(p)$, d.h. $w_{S_{\mathcal{N},r}}(p)$ ist wohldefiniert.

Beweis. Nach Definition von $w_{S_{\mathcal{N},r}}$ ist klar (vgl. Definition 2.34), dass es für je zwei Punkte derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}_d \setminus (S_{\mathcal{N},r} \cup S_{\infty,r})$ Streckenzüge zum Punkt q gibt, die die gleiche Anzahl (und Orientierung) von Schnittpunkten mit $S_{\mathcal{N},r}$ besitzen. Ebenso ist klar, dass es einen Streckenzug von q nach q gibt, der keinen Schnittpunkt mit $S_{\mathcal{N},r}$ besitzt. Andererseits folgt aus der Definition von $b_{S_{\mathcal{N},r}}$ (vgl. Definition 2.34) und Lemma 2.38, dass $b_{S_{\mathcal{N},r}}$ auf denselben Zusammenhangskomponenten konstant ist, und $b_{S_{\mathcal{N},r}}(q) = 0$ gilt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass sich das Schnittverhalten einer Strecke beim Übergang einer Komponente zur benachbarten genau gleich verhält wie die Veränderung von $b_{S_{\mathcal{N},r}}$. Sei also p' ein regulärer Punkt von $S_{\mathcal{N},r} \setminus S_{\infty,r}$, der Normalenvektor von $S_{\mathcal{N},r}$ in p' ist dann $N' := N(p')$. Es kann oBdA davon ausgegangen werden, dass p' auf genau einer der Teilflächen von $S_{\mathcal{N},r}$ liegt, da sich die Beiträge der einzelnen Flächen einfach addieren.

Betrachte zunächst den Fall, dass $p' \in M$ ist (insbesondere gilt also $m = d - 1$). Es sei $\delta > 0$. Wegen $(p', N') \in \mathcal{N}$ gilt $(p', -N') \notin \mathcal{N}$, also werden die Punkte von M in einer Umgebung von p' bei der Bestimmung von $b(p' - \delta \cdot (-N'))$ nicht berücksichtigt. Andererseits ist die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p', N') , die kleiner als $-\frac{1}{\delta}$ sind für genügend kleines δ sicherlich Null, der Beitrag der Punkte von M in einer Umgebung von p' bei der Bestimmung von $b(p' - \delta \cdot N')$ ist also gerade $(-1)^0$. Daher gilt (für genügend kleines $\delta > 0$)

$$b(p' - \delta \cdot N') - b(p' + \delta \cdot N') = 1.$$

Dies ist genau der Beitrag, den p' als Schnittpunkt eines Streckenzugs liefert, der von der Komponente des Punktes $p' - \delta \cdot N'$ in p' in die Komponente von $p' + \delta \cdot N'$ wechselt.

Als nächstes werde die Situation betrachtet, in der $p' \in M_r$ gilt, es sei $(p'', N'') \in \mathcal{N}$ der zugehörige Punkt mit $p' = p'' - r \cdot N''$ von \mathcal{N} . Da $-\frac{1}{r}$ keine Hauptkrümmung in (p'', N'') ist (weil p' regulärer Punkt von M_r ist; vergleiche den Beweis von Lemma 2.25), ändert sich die Anzahl der Hauptkrümmungen, die kleiner als $-\frac{1}{r}$ sind, entlang der Geraden $p'' - \delta \cdot N''$ (für $\delta > 0$) im Punkt p'' nicht. Somit folgt die Behauptung analog zum ersten Fall.

Gilt schließlich $p' \in \bar{S}_{\mathcal{B},r}$, so folgt das richtige Schnittverhalten des Streckenzugs im Punkt p' mit der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ unmittelbar aus Lemma 2.30. \odot

2.40 Satz. *Für das orientierte gewichtete Volumen $\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r)$ des Gebietes „zwischen“ der Mannigfaltigkeit M und der Parallelfäche $M_{\mathcal{N},r}$ gilt*

$$\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r) = \int_{\mathbb{E}_d} w_{S_{\mathcal{N},r}} dV = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right)$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.17, Korollar 2.19 und Lemma 2.39. \odot

2.41 Bemerkung. Eine integralgeometrische Formel, in der das orientierte gewichtete Volumen $\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r)$ als Integral über den gesamten euklidischen Raum ausgedrückt wird, findet sich beispielsweise in [12]: Für eine „zahme“ Menge $C \subseteq \mathbb{E}_d$ sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{\partial C}$ durch alle nach „innen“ gerichteten Normalenvektoren gegeben, dann gilt (vgl. [12, Theorem 6.3.4])

$$\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r) = \int_{p \in \mathbb{E}_d} \chi(\zeta_r^*(p) \cap C) \, dV$$

(hierbei sei χ die Euler-Charakteristik und $\zeta_r^*(p)$ der abgeschlossene Ball mit Mittelpunkt p und Radius r).

2.2 Parallellflächen in nichteuklidischen Räumen

Da sich die Aussagen über die Parallellflächen im Nicht-Euklidischen genauso beweisen lassen wie die jeweils entsprechende Aussage im Euklidischen, wird in diesem Abschnitt darauf verzichtet, Beweise anzugeben.

Wieder gibt es eine für den Rest des Abschnittes geltende allgemeine Voraussetzung:

2.42 Voraussetzung. In Abschnitt 2.2 sei M stets eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte unberandete \mathcal{C}^k -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$, $K \neq 0$, $m \in \{0, \dots, d-1\}$ und $k > 2$). Weiterhin sei $r > 0$ fest gewählt; im Fall $K > 0$ gelte zusätzlich $r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$.

2.2.1 Normaleneinheitsbündel

2.43 Definition. Das zu M gehörige in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ immersierte *Normaleneinheitsbündel* \mathcal{N}_M sei definiert durch

$$\mathcal{N}_M := \{(p, N) \in M \times \mathbb{F}_{d,K}^1 \mid N \text{ ist Normaleneinheitsvektor an } M \text{ in } p, \langle p, N \rangle = 0\}.$$

2.44 Lemma. Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M ist eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ immersierte orientierbare unberandete \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

2.45 Definition. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$. Die Definition von *Bündelkoordinaten* um (p, N) , der *Hauptkrümmungen* $\kappa_1, \dots, \kappa_m$, der *Hauptkrümmungsrichtungen* sowie der Matrizen G_M , H_M und W_M lässt sich ohne Änderung aus dem Euklidischen ins Nichteuklidische übertragen (vgl. Definition 2.4).

Ebenso überträgt sich für $l \in \{0, \dots, d-1\}$ die Definition von $\varphi_l(p, N)$ im Punkt p bezüglich der Normalen N , d.h. es gilt weiterhin

$$\varphi_l(p, N) := \frac{1}{\binom{d-1}{l}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m+l-(d-1)} \leq m} \prod_{j=1}^{m+l-(d-1)} \kappa_{i_j}(p, N).$$

Ist M eine orientierbare Hyperfläche (also insbesondere $m = d - 1$) mit gegebenem Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$, so sei die Abbildung $\varphi_l: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $\varphi_l := \varphi_l(\cdot, N)$.

Da diese Definition mit derjenigen in Definition 2.5 im Euklidischen übereinstimmt, treffen die Aussagen von Bemerkung 2.6 auch hier zu.

2.46 Definition. Die Projektion $\pi_M: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ des Normalenbündels \mathcal{N}_M auf die Mannigfaltigkeit M sei definiert durch

$$\pi_M: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}, (p, N) \mapsto p.$$

Weiterhin sei $K_{\mathcal{N}_M}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige Abbildung, die gegeben ist durch

$$K_{\mathcal{N}_M}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}, (p, N) \mapsto \prod_{j=1}^m (1 + \kappa_j^2(p, N)).$$

2.47 Lemma. Sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Teilfläche von \mathcal{N}_M (für offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$) mit (für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$)

$$\frac{\partial x}{\partial u_j} = 0 \text{ und} \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial n}{\partial u_j} \right\rangle = 0$$

also Bündelkoordinaten für \mathcal{N}_M . Sei dann G_M die zur ersten Fundamentalform von $(u_1, \dots, u_m) \mapsto x(u_1, \dots, u_m)$ gehörige Matrix, und G_n diejenige, die zur Parametrisierung $(u_{m+1}, \dots, u_{d-1}) \mapsto n(u_{m+1}, \dots, u_{d-1})$ gehört. Schließlich sei noch $G_{\mathcal{N}_M}$ die zur ersten Fundamentalform bezüglich der gegebenen Parametrisierung von \mathcal{N}_M gehörige Matrix. Dann gilt

$$\det(G_{\mathcal{N}_M})|_u = \det(G_M)|_{(u_1, \dots, u_m)} \det(G_n)|_{(u_{m+1}, \dots, u_{d-1})} K_{\mathcal{N}_M}|_{(x, n)(u)}.$$

2.2.2 Parallelflächen

2.48 Definition. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (und $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ für $K > 0$) sowie $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$. Dann ist die zu \mathcal{N} gehörige *Parallelfläche* zu M im Abstand ε definiert durch

$$M_{\mathcal{N}, \varepsilon} := \{j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N \in \mathbb{F}_{d,K} \mid (p, N) \in \mathcal{N}\}.$$

Speziell werde die gesamte Parallelfläche zu M im Abstand ε mit M_ε bezeichnet, es gilt also $M_\varepsilon = M_{\mathcal{N}_M, \varepsilon}$.

2.49 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ sowie $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (und $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ für $K > 0$). Die Parallelfläche M_ε erfüllt dann die folgenden Eigenschaften:

- Ein Normaleneinheitsvektor der Parallelfläche M_ε im Punkt $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ ist gegeben durch $K j_2(\varepsilon) \cdot p + j_1(\varepsilon) \cdot N$.
- Ist $\kappa_i(p, N) \neq -\frac{j_1(\varepsilon)}{j_2(\varepsilon)}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\kappa_i(p, N) \neq 0$, so ist M_ε lokal um $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ eine reguläre Hyperfläche.

- Für betragsmäßig genügend kleines $\varepsilon \neq 0$ ist M_ε eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte orientierbare unberandete \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche.
- Die Hauptkrümmungen von M_ε im Punkt $\mathbf{j}_1(\varepsilon) \cdot p - \mathbf{j}_2(\varepsilon) \cdot N$ (bezüglich des Normalenvektors $K \mathbf{j}_2(\varepsilon) \cdot p + \mathbf{j}_1(\varepsilon) \cdot N$) sind für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ gegeben durch

$$\kappa_j^{(\varepsilon)}(\mathbf{j}_1(\varepsilon) \cdot p - \mathbf{j}_2(\varepsilon) \cdot N) = \begin{cases} \frac{\mathbf{j}_1(\varepsilon) \kappa_j(p, N) - K \mathbf{j}_2(\varepsilon)}{\mathbf{j}_1(\varepsilon) + \mathbf{j}_2(\varepsilon) \kappa_j(p, N)} & \text{für } j \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{\mathbf{j}_1(\varepsilon)}{\mathbf{j}_2(\varepsilon)} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Weiterhin stimmen die Hauptkrümmungsrichtungen auf M und M_ε für die ersten m Hauptkrümmungen überein.

- Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist das Normaleneinheitsbündel $\mathcal{N}_{M_\varepsilon}$ eine in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ immersierte orientierbare unberandete \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

2.50 Korollar. Sei $U \rightarrow \mathcal{N}_M, u \mapsto (x, n)(u)$ eine Parametrisierung eines Teils des Normaleneinheitsbündels nach Bündelkoordinaten (vergleiche Definition 2.45). Die zugehörige Teilfläche von M_ε (für $\varepsilon \in \mathbb{R}$; es gelte $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ für $K > 0$) sei parametrisiert durch $u \mapsto \mathbf{j}_1(\varepsilon) \cdot x(u) - \mathbf{j}_2(\varepsilon) \cdot n(u)$. Es sei G_{M_ε} die zur ersten Fundamentalform bezüglich dieser Parametrisierung gehörige Matrix, die übrigen Bezeichnungen seien wie in Lemma 2.47.

Dann gilt (setze $\tilde{u} := (u_1, \dots, u_m)$ und $\hat{u} := (u_{m+1}, \dots, u_{d-1})$)

$$\begin{aligned} \det(G_{M_\varepsilon})|_u &= \det(G_M)|_{\tilde{u}} \det(G_n)|_{\hat{u}} (\mathbf{j}_2(\varepsilon))^{2(d-1-m)} \prod_{j=1}^m (\mathbf{j}_1(\varepsilon) + \mathbf{j}_2(\varepsilon) \kappa_j((x, n)(u)))^2 \\ &= \det(G_{\mathcal{N}_M})|_u \frac{1}{K_{\mathcal{N}_M}((x, n)(u))} (\mathbf{j}_2(\varepsilon))^{2(d-1-m)} \prod_{j=1}^m (\mathbf{j}_1(\varepsilon) + \mathbf{j}_2(\varepsilon) \kappa_j((x, n)(u)))^2. \end{aligned}$$

Es folgt die Definition der für die mittleren Krümmungen der Parallelfäche notwendigen Konstanten. Mit anderen Beweismethoden sind diese für Hyperflächen beispielsweise auch in [18, formula (2.10)] (für $K = 1$) bzw. in [18, formula (3.3)] (für $K = -1$) bestimmt worden.

2.51 Definition. Für $i, j \in \{0, \dots, d-1\}$ sei die Funktion $\bar{c}_{i,j,d}^{(K)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (für $K \leq 0$) bzw. $\bar{c}_{i,j,d}^{(K)}:] - \frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[\rightarrow \mathbb{R}$ (für $K > 0$) definiert durch

$$\bar{c}_{i,j,d}^{(K)}(\varepsilon) := \sum_{k=i-j}^i (-1)^k \binom{i}{k} \binom{d-1-i}{-i+j+k} (\mathbf{j}_1(\varepsilon))^{d-1-(-i+j+2k)} (\mathbf{j}_2(\varepsilon))^{-i+j+2k} K^k$$

(dabei sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ für $K \leq 0$ bzw. $\varepsilon \in] - \frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ für $K > 0$). Beachte, dass die Summanden mit $k < 0$ bzw. $k > d-1-j$ verschwinden, da in diesen Fällen einer der

beiden Binomialkoeffizienten verschwindet. Insbesondere für $K = 0$ gilt (es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$; vergleiche Definition 1.1)

$$\bar{c}_{i,j,d}^{(0)}(\varepsilon) = \binom{d-1-i}{j-i} \varepsilon^{j-i},$$

dies sind genau die in Lemma 2.12 im Euklidischen auftretenden Koeffizienten.

Im weiteren Verlaufe spielen insbesondere die Integrale einiger dieser Konstanten eine wichtige Rolle. Daher bekommen sie eine eigene Bezeichnung:

2.52 Definition. Sei $j \in \{0, \dots, d-1\}$ sowie $U := \mathbb{R}$ für $K < 0$ bzw. $U :=]-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ für $K > 0$. Dann sei die Funktion $\hat{c}_{j,d}^{(K)}: U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\hat{c}_{j,d}^{(K)}: U \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \int_0^\varepsilon \bar{c}_{0,j,d}^{(K)}(\delta) d\delta = \binom{d-1}{j} \int_0^\varepsilon (j_1(\delta))^{d-1-j} (j_2(\delta))^j d\delta$$

(für die explizite Berechnung des Integrals vergleiche Lemma 1.8).

2.53 Lemma. Es seien $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (zusätzlich gelte $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ im Fall $K > 0$) sowie $l \in \{0, \dots, d-1\}$ gegeben. Ferner sei $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ ein regulärer Punkt der Parallelfäche M_ε .

Die l -te mittlere Krümmung $\varphi_l^{(\varepsilon)}$ der Parallelfäche M_ε im Punkt $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ bezüglich des Normalenvektors $K j_2(\varepsilon) \cdot p + j_1(\varepsilon) \cdot N$ ist dann gegeben durch

$$\varphi_l^{(\varepsilon)}(j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N) = \left(\frac{1}{j_2(\varepsilon)}\right)^{d-1-m} \frac{\sum_{j=0}^{d-1} (\bar{c}_{l,j,d}^{(K)}(\varepsilon) \varphi_j(p, N))}{\prod_{j=1}^m (j_1(\varepsilon) + j_2(\varepsilon) \kappa_j(p, N))}.$$

2.54 Korollar. Es sei $\varepsilon > 0$ (mit $\varepsilon < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ für $K > 0$) so, dass M_δ regulär ist für $\delta \in [0, \varepsilon]$ (vgl. Lemma 2.49). Weiterhin sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Teilmenge des Normaleinheitsbündels \mathcal{N}_M , und A_ε die zugehörige Teilfläche der Parallelfäche, d.h. es gilt $A_\varepsilon = \{j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N \in M_\varepsilon \mid (p, N) \in \mathcal{N}\}$.

Für $l \in \{1, \dots, d-1\}$ gilt dann

$$\int_{A_\varepsilon} \varphi_l^{(\varepsilon)} dO = \sum_{j=0}^{d-1} \left(\bar{c}_{l,j,d}^{(K)}(\varepsilon) \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right).$$

Als direkte Folgerung ergibt sich die bekannte Steiner-Formel für das Volumen des Parallelepipedes im Nichteuklidischen (vergleiche beispielsweise [21, section IV.1 8.4]):

2.55 Korollar (Steiner-Formel). Mit den Bezeichnungen aus Korollar 2.54 gilt für das Volumen $V(\varepsilon)$ des Bereichs zwischen der Mannigfaltigkeit $\pi_M(\mathcal{N})$ und der Parallelfäche $M_{\mathcal{N},\varepsilon}$ – also für das Gebiet $\{j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N \mid (p, N) \in \mathcal{N} \text{ und } \delta \in [0, \varepsilon]\}$ –, falls die Abbildung $\mathcal{N} \times]0, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{F}_{d,K}: (p, N, \delta) \mapsto j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ injektiv ist,

$$V(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{d-1} \hat{c}_{j,d}^{(K)}(\varepsilon) \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

2.56 Lemma. Es seien $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (mit $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ für $K > 0$) und $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ so gegeben, dass $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ ein regulärer Punkt von M_ε ist.

Dann gilt

- Der Punkt (p, N) ist genau dann eine Nullstelle der Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot M \in M_\varepsilon$ eine Nullstelle der Abbildung $\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}: M_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ ist.
- Null ist ein regulärer Wert der Abbildung φ_{d-1} genau dann, wenn Null ein regulärer Wert der Abbildung $\varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}$ ist.

2.2.3 Zwischen Fläche und Parallelfläche

2.57 Lemma. Sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ Parametrisierung einer offenen Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Dann ist die Parametrisierung

$$z: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}, (u, \delta) \mapsto j_1(\delta) \cdot x(u) - j_2(\delta) \cdot n(u)$$

genau für diejenigen Werte $(u, \delta) \in U \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (im Fall $K < 0$) beziehungsweise $(u, \delta) \in U \times (\int -\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \setminus \{0\})$ (im Fall $K > 0$) regulär, für die $-\frac{j_1(\delta)}{j_2(\delta)}$ keine Hauptkrümmung in $x(u)$ bezüglich des Normalenvektors $n(u)$ ist. Für $\delta = 0$ ist die Parametrisierung genau dann regulär, wenn $m = d - 1$ erfüllt ist.

2.58 Lemma. Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Die Orientierung von (x, n) sei so gewählt, dass die zur Parametrisierung

$$z: U \times [0, r] \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}, (u, \delta) \mapsto j_1(\delta) \cdot x(u) - j_2(\delta) \cdot n(u)$$

zugehörige Determinante $\det(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \delta}, \sqrt{|K|} \cdot z)$ für betragsmäßig kleines $\delta > 0$ positiv ist (beachte: Nach Lemma 2.57 ist z für betragsmäßig kleines $\delta \neq 0$ stets regulär).

Dann ist das orientierte und gewichtete Volumen $\text{vol}_{\text{or}}(z)$ des durch z parametrisierten Gebietes zwischen M und M_r gegeben durch (es sei $\mathcal{N} := (x, n)(U) \subseteq \mathcal{N}_M$; das orientierte gewichtete Volumen sei wie im Euklidischen in Lemma 2.17 definiert)

$$\text{vol}_{\text{or}}(z) = \sum_{j=0}^{d-1} (\check{c}_{j,d}^{(K)}(\delta)) \int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}$$

(für die Definition der Funktionen $\check{c}_{j,d}^{(K)}$ vergleiche Definition 2.52).

2.59 Definition. Die Menge $S_{\infty,r} \subseteq \mathbb{F}_{d,K}$ sei definiert als die Menge derjenigen Punkte $p \in \mathbb{F}_{d,K}$, für die unendlich viele Werte $(p', N', \delta) \in \mathcal{N}_M \times [0, r]$ existieren, so dass $p = j_1(\delta) \cdot p' - j_2(\delta) \cdot N'$ erfüllt ist.

2.60 Korollar. Das Maß der Menge $S_{\infty,r} \subseteq \mathbb{F}_{d,K}$ ist gleich Null.

2.2.4 Normalenfokalflächen

2.61 Definition. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, in denen eine weitere Hauptkrümmung mit $\kappa_j(p, N)$ übereinstimmt, also ein $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ existiert, so dass $\kappa_j(p, N) = \kappa_i(p, N)$ gilt. Offensichtlich ist $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$ kompakt.

Weiter sei $\mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$, für die die Richtungsableitung von κ_j im Punkt (p, N) in Richtung der zu $\kappa_j(p, N)$ gehörigen Hauptkrümmungsrichtung verschwindet (beachte: Diese Richtung ist bis auf einen Skalar eindeutig, da Punkte (p, N) , die in der Menge $\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$ liegen, nicht betrachtet werden). Die Menge $\mathcal{N}_{M,2}^{(j)}$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_{M,1}^{(j)}$.

Ferner sei $\mathcal{N}_{M,3}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte in \mathcal{N}_M , die eine Umgebung besitzen, in der die Hauptkrümmung κ_j konstant ist. Offensichtlich ist die Menge $\mathcal{N}_{M,3}^{(j)}$ offen in \mathcal{N}_M .

Schließlich sei noch die (in \mathcal{N}_M) offene Menge $\tilde{\mathcal{N}}_M \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{N}}_M := \mathcal{N}_M \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m (\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \setminus \text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)})) \cup \bigcup_{j=1}^m (\mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \setminus \text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)})) \cup \bigcup_{j=1}^m (\overline{\mathcal{N}_{M,3}^{(j)}} \setminus \mathcal{N}_{M,3}^{(j)}) \right).$$

2.62 Definition. Für eine offene Menge $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_M$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ sei die zur j -ten Hauptkrümmung gehörige *Normalenfokalfläche* $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ definiert durch

$$\check{S}_{\mathcal{N},j} := \left\{ \frac{|\kappa_j(p, N)|}{\sqrt{\kappa_j^2(p, N) + K}} \cdot p + \frac{\text{sign}(\kappa_j(p, N))}{\sqrt{\kappa_j^2(p, N) + K}} \cdot N \mid (p, N) \in \mathcal{N}, \kappa_j^2(p, N) > -K \right\},$$

für $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$ setze $\check{S}_{\mathcal{N},j} := M$. Die Flächen $\check{S}_{\mathcal{N},j}$ werden also genau aus denjenigen Punkten von $\tilde{\mathcal{N}}_M$ gebildet, in denen die Parametrisierung aus Lemma 2.57 nicht regulär ist, sie werden eingehüllt von den Normalen an die Fläche M . Beachte: Die Forderung $\kappa_j^2(p, N) > -K$ ist für $K > 0$ natürlich stets erfüllt.

2.63 Lemma. Es sei $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_M$. Weiterhin sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (für $K < 0$) bzw. $\varepsilon \in]-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ (für $K > 0$) so gewählt, dass die Parallelfläche M_ε zu M eine immersierte Hyperfläche ist (vgl. Lemma 2.49).

Dann gilt $\mathcal{N}_{M_{N,\varepsilon}} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_{M_\varepsilon}$. Für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ ist $\check{S}_{\mathcal{N}_\varepsilon,j} = \check{S}_{\mathcal{N},j}$, insbesondere ist $\check{S}_{\mathcal{N}_\varepsilon,j} = M$ für $j \in \{m+1, \dots, d-1\}$.

2.64 Lemma. Für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ ist der $(d-1)$ -dimensionale Oberflächeninhalt sowohl der Fläche $\check{S}_{\text{Int}(\mathcal{N}_{M,1}^{(j)}),j}$ als auch der Fläche $\check{S}_{\text{Int}(\mathcal{N}_{M,2}^{(j)}),j}$ Null.

2.65 Lemma. Für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{M,3}^{(j)}$ eine offene Teilmenge von \mathcal{N}_M mit konstanter nichtverschwindender Hauptkrümmung κ_j . Setze dann $r := -\left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{-1}(\kappa_j(p, N))$ (für beliebiges $(p, N) \in \mathcal{N}$).

Dann ist der $(d-1)$ -dimensionale Oberflächeninhalt der Fläche $M_{\mathcal{N}_{M,3}^{(j)},r}$ gleich Null.

2.2.5 Seitenflächen

2.66 Definition. Es sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M . Dann werde die *Seitenfläche* $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ definiert durch

$$\bar{S}_{\mathcal{B},r} := \{j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N \in \mathbb{E}_d \mid (p, N) \in \mathcal{B} \text{ und } \delta \in [0, r]\}.$$

2.67 Lemma. Es sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M . Sei ferner $(p, N) \in \mathcal{B}$ und $\delta \in]0, r[$, so dass $-\frac{j_1(\delta)}{j_2(\delta)}$ keine Hauptkrümmung in (p, N) ist.

Dann ist die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ in einer Umgebung des Punktes $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ eine reguläre \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche.

2.68 Korollar. Es sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M . Sei ferner $(p, N) \in \mathcal{B}$, $\delta \in]0, r[$ und $-\frac{j_1(\delta)}{j_2(\delta)}$ eine Hauptkrümmung in (p, N) .

Ist für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (und damit nach Lemma 2.49 für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ bis auf endlich viele; im Fall $m = d-1$ auch für $\varepsilon = 0$) M_ε in $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ regulär und die Hauptkrümmungsrichtungen zur Hauptkrümmung (der Fläche M_ε) $-\frac{j_1(\delta+\varepsilon)}{j_2(\delta+\varepsilon)}$ transversal zu $\pi_{M_\varepsilon}(\mathcal{B})$ im Punkt $j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N$ (insbesondere ist also $-\frac{j_1(\delta)}{j_2(\delta)}$ keine mehrfache Hauptkrümmung), so ist die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ um den Punkt $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ eine reguläre \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche.

2.69 Konstruktion. Es sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M von M und $(p, N) \in \mathcal{N}$ ein nichtsingulärer Punkt des Randes von \mathcal{N} . Der Rand von \mathcal{N} ist also in einer Umgebung von (p, N) eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M , diese werde mit \mathcal{B} bezeichnet.

Es gelte zunächst $m = d-1$, die Mannigfaltigkeit M ist also eine Hyperfläche. Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{B} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Die zugehörige Parametrisierung der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ ist dann gegeben durch

$$y: U \times]0, r[\rightarrow \bar{S}_{\mathcal{B},r}, (u, \delta) \mapsto j_1(\delta) \cdot x(u) - j_2(\delta) \cdot n(u).$$

Falls der Normalenvektor $(\sqrt{-K} \cdot y) \times \frac{\partial x}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}} \times (K j_2(\delta) \cdot x + j_1(\delta) \cdot n)$ an $\pi_M(\mathcal{B})$ im Punkt (p, N) aus dem Gebiet $\pi_M(\mathcal{N})$ heraus zeigt, so setze $\sigma := +1$, andernfalls setze $\sigma := -1$.

Im Punkt $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ (für geeignetes $\delta \in]0, r[$, so dass $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ in $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ regulär ist; vergleiche Lemma 2.67) lässt sich somit ein Normaleneinheitsvektor $\bar{N}(j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N)$ definieren durch (beachte: Es gilt $\frac{\partial y}{\partial \delta} = -(K j_2(\delta) \cdot x + j_1(\delta) \cdot n)$)

$$\begin{aligned} & \bar{N}(j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N) \\ & := \left(\frac{-\sigma}{\|y \times \frac{\partial y}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}} \times \frac{\partial y}{\partial \delta}\|} \cdot \left(y \times \frac{\partial y}{\partial u_1} \times \cdots \times \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}} \times \frac{\partial y}{\partial \delta} \right) \right) \Big|_{(p,N)}. \end{aligned}$$

Sei nun m beliebig und $\delta \in]0, r[$ so gewählt, dass $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ ein regulärer Punkt der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ ist (vgl. Lemma 2.67). Dann gibt es nach Lemma 2.49 ein $\varepsilon \in]0, \delta[$, so

dass die Fläche M_ε eine reguläre Hyperfläche ist. Offensichtlich ist $\bar{S}_{\mathcal{B}(\varepsilon),r} = \bar{S}_{\mathcal{B},r}$ erfüllt, wenn $\mathcal{B}^{(\varepsilon)} := \{(j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N, K j_2(\delta) \cdot p + j_1(\delta) \cdot N) | (p, N) \in \mathcal{B}\}$ gesetzt wird. Daher lässt sich die Konstruktion des Normalenvektors $\bar{N}(j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N)$ in der allgemeinen Situation auf den bereits behandelten Fall $m = d - 1$ zurückführen.

2.70 Lemma. *Es seien $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$, \mathcal{B} und $(p, N) \in \mathcal{B}$ so wie in Konstruktion 2.69 gegeben. Weiterhin sei $\delta \in [0, r]$ so gewählt, dass die Fläche M_δ um $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N$ regulär ist (vgl. Lemma 2.49).*

Im Punkt $j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N \in \pi_{M_\delta}(\mathcal{B})$ zeigt der Normalenvektor $\bar{N}(j_1(\delta) \cdot p - j_2(\delta) \cdot N)$ an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$ genau dann ins Außengebiet (innerhalb der Fläche M_δ) der Menge $\pi_{M_\delta}(\mathcal{N})$, wenn die Anzahl der Hauptkrümmungen $\kappa_i(p, N)$, die kleiner als $-\frac{j_1(\delta)}{j_2(\delta)}$ sind, gerade ist.

2.2.6 Windungszahl

2.71 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M eine Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften aus Voraussetzung 2.42. Zusätzlich habe die in Definition 2.61 definierte offene Teilmenge $\tilde{\mathcal{N}}_M$ von \mathcal{N}_M endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Weiterhin sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M , so dass die singulären Punkte des Randes von \mathcal{N} eine Teilmenge einer endlichen Vereinigung von \mathcal{C}^1 -differenzierbaren Bildern von l -Rechtecken sind (mit $l \in \{0, \dots, d - 3\}$). Es sei \mathcal{B} die $(d - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M , die die nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N} bildet, die endlich viele Zusammenhangskomponenten besitze.

Schließlich sei $r > 0$ fest gegeben. Ist $K > 0$, so gelte zusätzlich $r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, außerdem gebe es Punkte, deren Abstand zu M größer als r ist. Es sei ein derartiger Punkt $q_r \in \mathbb{F}_{d,K}$ fest gewählt.

2.72 Definition. Die Abbildung $\sigma_r: \mathcal{N}_M \rightarrow \{-1, +1\}$ sei für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ definiert durch $\sigma_r(p, N) := +1$, falls die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p, N) , die kleiner als $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ sind, gerade ist, und durch $\sigma_r(p, N) := -1$, falls sie ungerade ist.

Gilt $m = d - 1$, und ist ein festes Normalenvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ ausgezeichnet, so sei $\sigma_r: M \rightarrow \{-1, +1\}$ definiert durch $p \mapsto \sigma_r(p, N(p))$.

2.73 Konstruktion. Es sei die Hyperfläche $S_{\mathcal{N},r}$ definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell dabei auftretender Vielfachheiten) von $\pi_M(\mathcal{N})$, M_r und $\bar{S}_{\mathcal{B},r}$. In denjenigen Punkten von $S_{\mathcal{N},r}$, in deren Umgebung $S_{\mathcal{N},r}$ eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.49, Lemma 2.67 und Korollar 2.68) sei das folgende Normaleneinheitsvektorfeld $N: S_{\mathcal{N},r} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert (es sei $(p', N') \in \mathcal{N}$): In den regulären Punkten der Teilfläche $\bar{S}_{\partial\mathcal{N},r}$ stimme N mit dem in Konstruktion 2.69 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} überein. Gilt $m = d - 1$ (sonst bildet M keine der regulären Teilflächen von $S_{\mathcal{N},r}$), so sei der Normalenvektor in $p' = \pi_M(p', N')$ gegeben durch $N(p') := N'$ (hierbei gelten dieselben Vielfachheitsüberlegungen wie in Konstruktion 2.33 im Euklidischen). Ist $j_1(r) \cdot p' - j_2(r) \cdot N'$ ein regulärer Punkt von M_r (vergleiche Lemma 2.49 und Lemma 2.65), so setze

$$N(j_1(r) \cdot p' - j_2(r) \cdot N') := \sigma_r(p', N') \cdot (K j_2(r) \cdot p' + j_1(r) \cdot N').$$

2.74 Definition. Es sei S eine kompakte geschlossene orientierbare Hyperfläche, deren singuläre Punkte endliche Vereinigung \mathcal{C}^1 -differenzierbarer Bilder von l -Rechtecken sind (mit $l \in \{0, \dots, d-2\}$). Es sei $N: S \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf S , bei dem $(p, N(p))$ für alle $p \in S$ stets in derselben der beiden Zusammenhangskomponenten des Normalenbündels \mathcal{N}_S liegt. Es sei $q \in \mathbb{F}_{d,K} \setminus S$ ein Punkt, der, falls $K < 0$ ist, in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{F}_{d,K} \setminus S$ liegt (beachte die Kompaktheit von S).

Es sei $p \in \mathbb{F}_{d,K} \setminus S$ ein beliebiger Punkt, und g sei ein beliebiger Streckenzug von p nach q , der S stets in regulären Punkten transversal schneidet. Es sei $w_{S,g}^+$ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte von g mit S , in denen der Richtungsvektor von g in die gleiche Richtung zeigt wie das gegebene Normalenvektorfeld N . Andererseits sei $w_{S,g}^-$ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte, für die dies nicht der Fall ist. Dann sei die *Windungszahl* $w_S(p)$ des Punktes p bezüglich der Fläche S definiert durch

$$w_S(p) := w_{S,g}^+ - w_{S,g}^-.$$

Die Windungszahl $w_S(p)$ ist also zunächst einmal abhängig von der Wahl (und Existenz) des Streckenzugs g und des Punktes q . Für die Flächen bezüglich derer im folgenden die Windungszahl verwendet werden soll, muss also noch die Wohldefiniertheit von $w_S(p)$ gezeigt werden. Für $S = S_{\mathcal{N},r}$ geschieht dies beispielsweise in Lemma 2.75 und Lemma 2.78 (für $K > 0$ ist dies jedoch nur bis auf die Wahl der Zusammenhangskomponente des Punktes q_r möglich).

2.75 Lemma. *Es sei $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ ein Punkt, dessen Abstand zu M größer als r ist, falls $K < 0$ ist (dieser existiert, da M kompakt ist), bzw. $q = q_r$, falls $K > 0$ ist.*

Dann existiert für alle $p \in \mathbb{E}_d \setminus S_{\mathcal{N},r}$ ein Streckenzug g von p nach q mit den für Definition 2.74 erforderlichen Eigenschaften.

2.76 Definition. Es sei S eine kompakte Hyperfläche, deren singuläre Punkte endliche Vereinigung \mathcal{C}^1 -differenzierbarer Bilder von l -Rechtecken sind (mit $l \in \{0, \dots, d-2\}$). Nun kann die Funktion $b_S: \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow \mathbb{Z}$, die für jeden Punkt von $\mathbb{F}_{d,K}$ (mit einem Vorzeichen gewichtet) angibt, wie oft er zwischen S und der Parallelfäche S_r enthalten ist, definiert werden via (vergleiche auch Definition 2.72)

$$b_S: \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{Z}, p \mapsto \sum_{\substack{(p', N', \delta) \in \mathcal{N}_S \times]0, r[\\ \text{mit } p = j_1(\delta) \cdot p' - j_2(\delta) \cdot N'}} (-1)^{\sigma_\delta(p', N')}.$$

Offensichtlich ist b_S in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$ wohldefiniert.

2.77 Lemma. *Es sei $j \in \{1, \dots, d-1\}$, $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{M,1}^{(j)} \cup \mathcal{N}_{M,2}^{(j)} \cup S_{\infty,r})$ mit $\kappa_j(p, N) \neq 0$ und $j_1(\left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{-1}(\kappa_j(p, N))) \cdot p + j_2(\left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{-1}(\kappa_j(p, N))) \cdot N \notin S_{\mathcal{N},r}$.*

Dann haben die Punkte einer (genügend kleinen) Umgebung von (p, N) in \mathcal{N}_M keinen Einfluss auf den Wert von $b_{S_{\mathcal{N},r}}$ in einer (genügend kleinen) Umgebung des Punktes $j_1(\left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{-1}(\kappa_j(p, N))) \cdot p + j_2(\left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{-1}(\kappa_j(p, N))) \cdot N$.

2.78 Lemma. *Es sei $p \in \mathbb{F}_{d,K} \setminus (S_{\mathcal{N},r} \cup S_{\infty,r})$ ein beliebiger Punkt.*

Dann gilt $w_{S_{\mathcal{N},r}}(p) = b_{S_{\mathcal{N},r}}(p)$, d.h. $w_{S_{\mathcal{N},r}}(p)$ ist wohldefiniert.

2.79 Satz. *Für das orientierte gewichtete Volumen $\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r)$ des Gebietes „zwischen“ der Mannigfaltigkeit M und der Parallelfäche $M_{\mathcal{N},r}$ gilt*

$$\text{vol}_{\text{or}}(\mathcal{N}, r) = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{S_{\mathcal{N},r}} dV = \sum_{j=0}^{d-1} \mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}M}}} \right)$$

(für die Definition der Funktionen $\mathring{c}_{j,d}^{(K)}$ vergleiche Definition 2.52).

3 Hyperebenen im Euklidischen

Nach den beiden vorangegangenen vorbereitenden Kapiteln richtet sich das Augenmerk nun endlich auf die Bestimmung des kinematischen Maßes einer Menge \mathcal{D} von Hyperebenen mit „geeignetem Schnittverhalten“ bezüglich der gegebenen Flächen im Euklidischen. „Geeignetes Schnittverhalten“ bedeutet hier – wie auch stets im folgenden –, dass sich die Menge als Vereinigung von Zusammenhangskomponenten des Raumes aller Hyperebenen $\mathcal{E}_{d-1,d}$ ohne die an die Fläche tangentialen Hyperebenen darstellen lässt. Ist also eine nichttangente Hyperebene in \mathcal{D} enthalten, so auch alle Hyperebenen in einer Umgebung.

Zunächst wird dies im Unterkapitel 3.2 für Hyperflächen durchgeführt werden. Darauf aufbauend werden die dort gewonnenen Ergebnisse im anschließenden Unterkapitel 3.3 auf die Situation, dass immersierte Mannigfaltigkeiten allgemeiner Kodimension vorliegen, verallgemeinert. Wichtiges Hilfsmittel stellen dabei die in Kapitel 2 betrachteten Parallellflächen dar. Jeweils werden zwei Typen von Formeln für das gesuchte Maß angegeben werden: Bei ersterem wird nur über Teilflächen der gegebenen Fläche integriert werden – allerdings unter Inkaufnahme der Wahl eines ausgezeichneten Punktes –, der zweite ist unabhängig von der Wahl eines Punktes, dafür gehen in diese Formeln zusätzlich die von mehrfach tangentialen Hyperebenen eingehüllten Hüllflächen ein.

Im abschließenden Unterkapitel 3.4 wird der Erwartungswert allgemeiner lokal konstanter Funktionen auf der Menge aller Hyperebenen bestimmt. Als Beispielanwendung wird für zwei konkrete Situationen – die Anzahl der Schnittpunkte bzw. Schnittkomponenten von Kurven bzw. konvexen Mengen mit Hyperebenen – der Erwartungswert beliebiger Potenzen dieser Funktion bestimmt.

Zuallererst werden im Unterkapitel 3.1 jedoch die von mehrfach berührenden Hyperebenen eingehüllten Flächen sowie die von den zugehörigen Berührungspunkten gebildeten Flächen untersucht.

3.1 Vorbetrachtungen

3.1.1 Pedalfläche

In diesem Abschnitt werden die von den Lotfußpunkten der an eine Mannigfaltigkeit tangentialen Hyperebenen gebildeten Flächen untersucht. Diese sind im folgenden Abschnitt ein wichtiges Hilfsmittel, um die Berührungspunkte von mehrfach tangentialen Hyperebenen im Normalenbündel in den Griff zu bekommen. Pedalflächen (konvexer Flächen) als Hilfsmittel sind beispielsweise auch in [6, sections 1 and 2] untersucht worden.

3.1 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine m -dimensionale in \mathbb{E}_d immerisierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$ und $l \geq 3$). Weiterhin sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. insbesondere ist $\mathcal{N}_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ eine \mathcal{C}^{l-2} -immersierte $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).

3.2 Definition. Es sei \mathcal{N} eine offene Teilmenge des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M .

Dann sei $\tilde{p}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{E}_d$ diejenige Abbildung, die jedem $(p, N) \in \mathcal{N}$ den *Pedalpunkt* (bzw. *Lotfußpunkt*) der in p an M tangentialen Hyperebene $\xi(p, N)$ zuweist, d.h. es gilt

$$\tilde{p}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{E}_d, (p, N) \mapsto \langle p, N \rangle \cdot N.$$

Weiterhin sei $\tilde{\mathcal{N}}$ die zu \mathcal{N} gehörige *Pedalfläche*, d.h. die Fläche, die von den Lotfußpunkten der an M tangentialen Hyperebenen $\xi(p, N)$ mit $(p, N) \in \mathcal{N}$ gebildet wird; es gilt also

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{p}(p, N) \mid (p, N) \in \mathcal{N}\}$$

(beachte: Diese Definitionen sind abhängig von der Wahl des Ursprungs).

3.3 Lemma. *Es sei \mathcal{N} eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M , so dass für alle $(p, N) \in \mathcal{N}$ die Lipschitz-Killing-Krümmung $\varphi_{d-1}(p, N)$ nicht verschwindet, und der Ursprung auf keiner der an M tangentialen Hyperebenen $\xi(p, N)$ liegt.*

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}$ eine $(d-1)$ -dimensionale in \mathbb{E}_d immerisierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiterhin ist ein Normaleneinheitsvektor von $\tilde{\mathcal{N}}$ im Punkt $\tilde{p}(p, N)$ (für $(p, N) \in \mathcal{N}$) gegeben durch

$$\tilde{N}(\tilde{p}(p, N)) := \frac{1}{\|p\|} \cdot (p - 2 \langle p, N \rangle \cdot N).$$

Beweis. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}$ beliebig. Es sei dann $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von (p, N) in \mathcal{N} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Dann ist eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von $\tilde{p}(p, N)$ in $\tilde{\mathcal{N}}$ gegeben durch

$$\tilde{x}: U \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}, u \mapsto \langle x(u), n(u) \rangle \cdot n(u).$$

Die partiellen Ableitungen von \tilde{x} sind somit gegeben durch (für $i \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_i} = \langle x, \frac{\partial n}{\partial u_i} \rangle \cdot n + \langle x, n \rangle \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i} \quad (3.1)$$

Da offensichtlich $\tilde{n} := \frac{1}{\|x\|} \cdot (x - 2 \langle x, n \rangle \cdot n)$ orthogonal zu $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_i}$ ist (für $i \in \{1, \dots, d-1\}$), und $\|\tilde{n}\| = 1$ gilt, ist damit bereits gezeigt, dass $\tilde{N}(p, N)$ ein Normaleneinheitsvektor in $\tilde{p}(p, N)$ ist.

Dass die Vektoren $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_{d-1}}$ linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus Gleichung (3.1), da nach Voraussetzung $\varphi_{d-1} \neq 0$ erfüllt ist, also die Vektoren $\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial n}{\partial u_{d-1}}$ linear unabhängig sind (und da n ein Einheitsvektor ist, auch orthogonal zu diesem sind; beachte weiterhin, dass nach Voraussetzung $\langle x, n \rangle \neq 0$ ist). Somit ist die erste Fundamentalform von $\tilde{\mathcal{N}}$ positiv definit, und es folgen die restlichen Behauptungen. \odot

3.4 Korollar. Sei M eine orientierbare Hyperfläche, d.h. insbesondere gilt $m = d - 1$, und $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ sei ein Normaleneinheitsvektorfeld auf M ; im Fall, dass d gerade ist, sei dieses so orientiert, dass $\langle p, -N \rangle > 0$ erfüllt ist. Weiterhin sei $p \in M$ ein Punkt der Mannigfaltigkeit M , dessen Tangentialhyperebene den Ursprung nicht enthält.

Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung \mathcal{N} von $(p, N(p))$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$), und \tilde{x} die zugehörige Parametrisierung von $\tilde{\mathcal{N}}$ (vergleiche den Beweis von Lemma 3.3). Ist $\tilde{N}' \in \mathbb{S}_{d-1}$ derjenige Normalenvektor der Pedalfläche $\tilde{\mathcal{N}}$ in $\tilde{p}(p, N(p))$ (vgl. Lemma 3.3), bezüglich dessen M und $\tilde{\mathcal{N}}$ bezüglich der gegebenen Parametrisierung gleichorientiert sind, so zeigen $\text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N(p))) \cdot N(p)$ und \tilde{N}' in die gleiche Richtung, d.h. es gilt

$$\langle \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N(p))) \cdot N(p), \tilde{N}' \rangle > 0.$$

Beweis. Mit Gleichung (3.1) aus dem Beweis von Lemma 3.3 folgt (es sei G_x die zur ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung x gehörige Matrix)

$$\begin{aligned} & \det\left(\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_{d-1}}, \text{sign}(\varphi_{d-1}(x, n)) \cdot n\right)\right) \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}}, n\right)\right) \\ &= (\langle x, -n \rangle)^{d-1} |\varphi_{d-1}(x, n)| \det(G_x). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite im Punkt p positiv ist, folgt die Behauptung. \odot

3.5 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ ein Punkt mit $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$, d.h. es gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_{(0)}$. Ferner sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Umgebung von (p, N) , so dass der Ursprung für alle $(p', N') \in \mathcal{N}$ nicht auf der zugehörigen Tangentialhyperebene $\xi(p, N)$ von M liegt.

Weiterhin sei die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}, (p', N') \mapsto N'$ eine Immersion. Für $(p', N') \in \mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N}$ sei $N_0(p', N') \in \mathbb{S}_{d-1}$ ein Normalenvektor der durch diese Abbildung immersiorten Fläche im Bildpunkt von (p', N') .

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}_{(0)} := \{\tilde{p}(p', N') \mid (p', N') \in \mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N}\}$ eine $(d - 2)$ -dimensionale in \mathbb{E}_d immensierte \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiterhin ist eine Orthonormalbasis des Normalenraums von $\tilde{\mathcal{N}}_{(0)}$ im Punkt $\tilde{p}(p, N)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(\tilde{p}(p, N)) &:= \frac{1}{\|p\|} \cdot (p - 2 \langle p, N \rangle \cdot N), \\ \tilde{N}_2(\tilde{p}(p, N)) &:= \frac{1}{\|p\| \sqrt{\|p\|^2 - \langle p, N_0 \rangle^2}} \cdot \left(\|p\|^2 \cdot N_0 - \langle p, N_0 \rangle \cdot (p - 2 \langle p, N \rangle \cdot N) \right). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_{(0)}$ eine \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in $\mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Dann ist eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von $\tilde{p}(p, N)$ in $\tilde{\mathcal{M}}_{(0)}$ wieder gegeben durch

$$\tilde{x}: U \rightarrow \tilde{M}, u \mapsto \langle x(u), n(u) \rangle \cdot n(u).$$

Offensichtlich sind die Vektoren $\tilde{N}_1(\tilde{p}(p, N))$ und $\tilde{N}_2(\tilde{p}(p, N))$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren, die orthogonal zu den partiellen Ableitungen von \tilde{x} im Punkt $\tilde{p}(p, N)$ sind (diese sind im Beweis von Lemma 3.3 explizit angegeben).

Dass die Vektoren $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_{d-2}}$ linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus der nach Voraussetzung gegebenen linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}$ (vergleiche hierzu auch den Beweis von Lemma 3.3). Somit ist die erste Fundamentalform von $\tilde{\mathcal{N}}_0$ positiv definit, und es folgen die restlichen Behauptungen. \odot

3.6 Bemerkung. Die Forderung in den Voraussetzungen von Lemma 3.5, dass die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, $(p, N) \mapsto N$ eine Immersion sei, ist äquivalent dazu, dass die Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung 0 transversal zur Untermannigfaltigkeit $\mathcal{N}_{(0)}$ ist.

3.1.2 Berührflächen

Mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt untersuchten Pedalflächen werden in diesem Abschnitt die von den Berührungspunkten mehrfach tangentialer Hyperebenen gebildeten Teilflächen des Normalenbündels untersucht. Insbesondere werden hinreichende Kriterien für die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze in den Abschnitten 3.2.1, 3.3.1 sowie 4.2.1 bereitgestellt.

3.7 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei (für $m \in \{0, \dots, d-1\}$) M_m stets eine m -dimensionale in \mathbb{E}_d immersierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $d \geq 2$ und $l \geq 3$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m gleichzeitig). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$ sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{E}_d$. Weiterhin sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. insbesondere ist $\mathcal{N}_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{N}$ eine \mathcal{C}^{l-2} -immersierte $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).

Schließlich sei eine Hyperebene $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}$ mit Normaleneinheitsvektor \hat{N} gegeben, die in den k verschiedenen Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ tangential an M sei (dabei sei $k \in \{2, \dots, d\}$). Gilt (für $i \in \{1, \dots, k\}$) $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) = 0$, so sei \mathcal{N} eine Umgebung von $(p^{(i)}, \hat{N})$ in \mathcal{N}_M so wie in Lemma 3.5, insbesondere sei die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, $(p, N) \mapsto N$ eine Immersion. Die Abbildung $N_0: \mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ sei ebenfalls so wie in Lemma 3.5 definiert.

3.8 Lemma. *Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien affin unabhängig.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{N})$, so dass $\mathcal{B}^{(i)}$ eine $(d-2)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}^{(i)}$ definiert durch

$$\mathcal{B}^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} : \xi(p, N) = \xi(p', N')\}.$$

Beweis. Es lässt sich (für $j \in \{1, \dots, k\}$) um $(p^{(j)}, N)$ in \mathcal{N}_M eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(j)}$ wählen, so dass die Killing-Lipschitz-Krümmung φ_{d-1} auf der ganzen Umgebung nicht verschwindet. Wähle jetzt den Ursprung so, dass er auf keiner der an M tangentialen Hyperebenen $\xi(p, N)$ mit $(p, N) \in \mathcal{N}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{N}^{(k)}$ liegt (dazu müssen diese Umgebungen eventuell oBdA verkleinert werden).

Für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ sind $p^{(i)}$ und $p^{(j)}$ Berührungspunkte derselben Hyperebene $\hat{\xi}$, daher gilt für die zugehörigen Pedalpunkte $\tilde{p}(p^{(i)}, \hat{N}) = \tilde{p}(p^{(j)}, \hat{N})$. Angenommen die Normalenvektoren $\hat{N}(\tilde{p}(p^{(i)}, \hat{N}))$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$) in diesem Punkt wären linear abhängig. Dann ließe sich die Null nichttrivial linear kombinieren, es existierten also $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$, so dass (vgl. Lemma 3.3)

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (p^{(i)} - 2 \langle p^{(i)}, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}) = 0 \quad (3.2)$$

erfüllt ist. Das Anwenden des Skalarprodukts mit \hat{N} auf diese Gleichung führt aufgrund von $\langle p^{(1)}, \hat{N} \rangle \neq 0$ zu $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$. Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (3.2) liefert

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot p^{(i)} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur affinen Unabhängigkeit der Berührungspunkte. Die Annahme, dass die Normalenvektoren nicht linear unabhängig sind, ist somit widerlegt; oBdA können obige Umgebungen so klein gewählt werden, dass dies stets der Fall ist.

Somit ist gezeigt, dass sich die k Flächen $\tilde{\mathcal{N}}^{(i)}$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$) transversal schneiden. Dieser Schnitt ist somit eine $(d - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)}$. Dies überträgt sich mit dem Diffeomorphismus \tilde{p} auf die Fläche $\mathcal{B}^{(j)}$ (für $j \in \{1, \dots, k\}$; vergleiche Lemma 3.3). \odot

3.9 Korollar. *Es sei für $j \in \{1, 2\}$ eine Folge von Punkten $(p_i^{(j)}, \hat{N}_i) \in \mathcal{N}_M$ mit $\varphi_{d-1}(p_i^{(j)}, \hat{N}_i) \neq 0$ (mit $i \in \mathbb{N}$; die Punkte $(p_i^{(1)}, \hat{N}_i)$ und $(p_i^{(2)}, \hat{N}_i)$ haben dieselben Eigenschaften wie $(p^{(1)}, \hat{N})$ und $(p^{(2)}, \hat{N})$ in Voraussetzung 3.7) gegeben, so dass*

$$(p, N) := \lim_{i \rightarrow \infty} (p_i^{(1)}, \hat{N}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (p_i^{(2)}, \hat{N}_i)$$

erfüllt ist.

Dann gilt $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$.

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre nicht richtig. Dann gäbe es eine Umgebung von (p, N) , so dass die zugehörige Pedalfläche eine Einbettung in \mathbb{E}_d wäre (vgl. Lemma 3.3). Dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Umgebung um $(p_i^{(1)}, \hat{N}_i)$ und $(p_i^{(2)}, \hat{N}_i)$ existiert, so dass sich die zugehörigen Pedalflächen transversal schneiden (vgl. Lemma 3.8). \odot

3.10 Lemma. *Erneut gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{2, \dots, k\}$, jetzt jedoch sei $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) = 0$. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien affin unabhängig, der Vektor $N_0(p^{(1)}, \hat{N})$ sei nicht in dem zur $(k - 1)$ -Ebene, in der diese Punkte liegen, zugehörigen Vektorraum enthalten.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{N})$, so dass $\mathcal{B}_0^{(i)}$ eine $(d - k - 1)$ -dimensionale C^{l-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei seien $\mathcal{B}_0^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ definiert durch (es werde $\mathcal{N}_0^{(1)} := \mathcal{N}^{(1)} \cap \mathcal{N}_{(0)}$ und $\mathcal{N}_0^{(i)} := \mathcal{N}^{(i)}$ für $i \neq 1$ gesetzt)

$$\mathcal{B}_0^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_0^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} \text{ mit } \xi(p, N) = \xi(p', N')\}.$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 3.8 reicht es auch hier zu zeigen, dass die Normalenvektoren an die zu $\mathcal{N}_0^{(i)}$ zugehörigen Pedalflächen (für $i \in \{1, \dots, k\}$) linear unabhängig sind. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Es gäbe also α_i (für $i \in \{0, \dots, k\}$), so dass (vergleiche Lemma 3.3 sowie Lemma 3.5)

$$\alpha_0 \cdot N_0(p^{(1)}, \hat{N}) + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (p^{(i)} - 2 \langle p^{(i)}, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}) = 0$$

eine nichttriviale Linearkombination der Null ist. Anwenden des Skalarprodukts mit \hat{N} auf diese Gleichung führt wie im Beweis von Lemma 3.8 zu einer Bedingung an die Skalare, die – in diese Gleichung eingesetzt – zu einem Widerspruch mit den Voraussetzungen führt. \odot

3.11 Lemma. *Es sei $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{\tilde{k}+1, \dots, k\}$ sowie $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ erfüllt (für geeignetes $\tilde{k} \in \{2, \dots, k\}$). Weiterhin seien die Vektoren $N_0(p^{(1)}, \hat{N}), \dots, N_0(p^{(\tilde{k})}, \hat{N})$ linear unabhängig, die Berührungspunkte $p^{(\tilde{k})}, \dots, p^{(k)}$ seien affin unabhängig. Der Schnitt des von den Vektoren $N_0(p^{(1)}, \hat{N}), \dots, N_0(p^{(\tilde{k})}, \hat{N})$ aufgespannten Vektorraums mit demjenigen zur $(k - \tilde{k})$ -Ebene, in der die Punkte $p^{(\tilde{k})}, \dots, p^{(k)}$ liegen, zugehörigen Vektorraum sei trivial.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{N})$, so dass $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ für $i \in \{\tilde{k}, \dots, k\}$ von einer $(d - k - 1)$ -dimensionalen \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M überdeckt werden kann. Dabei sei $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ definiert durch (es werde $\mathcal{N}_0^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)} \cap \mathcal{N}_{(0)}$ für $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ und $\mathcal{N}_0^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)}$ für $j \in \{\tilde{k} + 1, \dots, k\}$ gesetzt)

$$\mathcal{B}_{00}^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_0^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} \text{ mit } \xi(p, N) = \xi(p', N')\}.$$

Beweis. Es sei $(x^{(i)}, n^{(i)}): U \rightarrow \mathcal{N}_{(0)}$ (für $i \in \{1, \dots, \tilde{k} - 1\}$) eine Parametrisierung einer Umgebung von $(p^{(i)}, \hat{N})$ in $\mathcal{N}_{(0)}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Betrachte dann die Hilfsfläche, die gegeben ist durch die Parametrisierung

$$z^{(i)}: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_d, (u, \lambda) \mapsto \langle x^{(i)}(u), n^{(i)}(u) \rangle \cdot n^{(i)}(u) - \lambda \cdot n^{(i)}(u)$$

(dies ist eine Teilfläche der Vereinigungsfläche der Pedalflächen von $\varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ auf den Parallellflächen im Abstand λ zu M). Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, d-2\}$)

$$\frac{\partial z^{(i)}}{\partial u_j} = \langle x^{(i)}, \frac{\partial n^{(i)}}{\partial u_j} \rangle \cdot n^{(i)} + (\langle x^{(i)}(u), n^{(i)}(u) \rangle - \lambda) \cdot \frac{\partial n^{(i)}}{\partial u_j} \text{ sowie } \frac{\partial z}{\partial \lambda} = -n^{(i)}.$$

Aufgrund der Voraussetzungen sind diese Ableitungen in $\langle p^{(1)}, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}$ linear unabhängig, die Fläche ist also lokal um diesen Punkt eine reguläre Hyperfläche. Ein Normaleneinheitsvektor an diese Fläche in $\langle p^{(i)}, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}$ ist offensichtlich gegeben durch $N_0(p^{(i)}, \hat{N})$.

Nach Wahl der Voraussetzungen schneiden sich nun diese soeben definierten Flächen, die Pedalfläche von \mathcal{N}_0 (als Umgebung von $(p^{(\tilde{k})}, \hat{N})$; vergleiche Lemma 3.5) sowie die

Pedalflächen von Umgebungen der Punkte $p^{(k)}, \dots, p^{(k)}$ transversal (dies ergibt sich auf genau dieselbe Art und Weise wie im Beweis von Lemma 3.8), der Schnitt ist somit eine $(d - k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Pedalfläche von \mathcal{N}_0 . Die Aussage ergibt sich hieraus wie im Beweis von Lemma 3.8. \odot

Berührflächen bei Hyperflächen

Speziell für Hyperflächen ergeben sich aus Lemma 3.8, Lemma 3.10 bzw. Lemma 3.11 die folgenden drei Korollare, da in dieser Situation $\pi_{M_{d-1}}: \mathcal{N}_{M_{d-1}} \rightarrow M_{d-1}$ lokal ein Diffeomorphismus ist. Es wird nur der Fall $k = 2$ betrachtet, die mehrfach tangential Hyperebene $\hat{\xi}$ berührt M also genau in den zwei Punkten $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$.

3.12 Korollar. *Es sei sowohl $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) \neq 0$ als auch $\varphi_{d-1}(p^{(2)}, \hat{N}) \neq 0$. Ferner sei $p^{(1)} \in M_{d-1}$, d.h. $p^{(1)}$ liegt nun auf einer Hyperfläche.*

Dann ist die Menge $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$ der Punkte von M_{d-1} (in einer Umgebung von $p^{(1)}$), in denen die Tangentialhyperebene ebenso wie $\hat{\xi}$ in mehreren Punkten tangential an M ist, eine $(d - 2)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von M_{d-1} (dabei sei $\mathcal{B}^{(1)}$ so wie in Lemma 3.8 definiert).

3.13 Korollar. *Es seien dieselben Voraussetzungen wie in Lemma 3.10 erfüllt; zusätzlich gelte nun $p^{(1)} \in M_{d-1}$, d.h. $p^{(1)}$ liegt nun auf einer Hyperfläche.*

Dann ist die Menge $\pi_M(\mathcal{B}_0^{(1)})$ derjenigen Punkte von M_{d-1} (in einer Umgebung von $p^{(1)}$), in denen die Tangentialhyperebene ebenso wie $\hat{\xi}$ in mehreren Punkten tangential an M ist, und in denen die Gauß-Krümmung verschwindet, eine $(d - 3)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von M_{d-1} (dabei sei $\mathcal{B}_0^{(1)}$ so wie in Lemma 3.10 definiert).

3.14 Korollar. *Es seien dieselben Voraussetzungen wie in Lemma 3.11 erfüllt; zusätzlich gelte nun $p^{(1)} \in M_{d-1}$, d.h. $p^{(1)}$ liegt nun auf einer Hyperfläche.*

Dann kann die Menge $\pi_M(\mathcal{B}_{00}^{(1)})$ derjenigen Punkte von M_{d-1} (in einer Umgebung von $p^{(1)}$), in denen die Tangentialhyperebene ebenso wie $\hat{\xi}$ in mehreren Punkten mit verschwindender Gauß-Krümmung tangential an M ist, durch eine $(d - 3)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von M_{d-1} überdeckt werden (dabei sei $\mathcal{B}_{00}^{(1)}$ so wie in Lemma 3.11 definiert).

3.1.3 Hüllflächen

Im letzten vorbereitenden Abschnitt werden die von mehrfach tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen untersucht. Diese Hüllflächen (bzw. ihre Normaleneinheitsbündel) treten in den Formeln der nachfolgenden Sätze auf. Für das folgende sind zwei Spezialfälle von besonderem Interesse, die daher gesondert betrachtet werden: Es handelt sich dabei um die Situation, in denen M eine Hyperfläche bzw. eine Kurve ist.

In diesem Abschnitt seien dieselben Voraussetzungen erfüllt wie im vorangegangenen Abschnitt 3.1.2 (vgl. Voraussetzungen 3.7).

3.15 Lemma. *Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien affin unabhängig; eine Teilfläche des Normaleneinheitsbündels $\mathcal{N}_{\bar{M}}$ der von den Hyperebenen $\xi(p, N)$ mit $(p, N) \in \mathcal{B}^{(1)}$ (vgl. Lemma 3.8) eingehüllten Fläche ist gegeben durch*

$$\bar{\mathcal{N}} := \left\{ \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot p^{(j)}, N' \right) \mid \lambda_j \in [0, 1] \text{ und } (p^{(j)}, N') \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ für } j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit} \right. \\ \left. \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \text{ sowie } \xi(p^{(1)}, N') = \xi(p^{(j)}, N') \right\}.$$

Dann ist $\bar{\mathcal{N}}$ eine $(d-1)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei $(p^{(1)}, N) \in \mathcal{B}^{(1)}$ beliebig. Da $\mathcal{B}^{(1)}$ eine $(d-k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist (vgl. Lemma 3.8), existiert eine Parametrisierung $(x^{(1)}, n): U \rightarrow \mathcal{B}^{(1)}$ einer Umgebung von $(p^{(1)}, N)$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-k}$). Es sei $(x^{(j)}, n): U \rightarrow \mathcal{B}^{(j)}$ die Parametrisierung der zugehörigen Umgebung in $\mathcal{B}^{(j)}$ (für $j \in \{2, \dots, k\}$). Die Fläche $\bar{\mathcal{N}}$ lässt sich dann parametrisieren via

$$y: U \times [0, 1]^{k-1} \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, (u, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x^{(1)}(u) + \sum_{j=2}^k \lambda_{j-1} \cdot (x^{(j)}(u) - x^{(1)}(u)) \\ n(u) \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind somit für $i \in \{1, \dots, d-k\}$ und $j \in \{1, \dots, k-1\}$ gegeben durch

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial u_i} + \sum_{j=2}^k \lambda_{j-1} \cdot \left(\frac{\partial x^{(j)}}{\partial u_i} - \frac{\partial x^{(1)}}{\partial u_i} \right) \\ \frac{\partial n}{\partial u_i} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_j} = \begin{pmatrix} x^{(j)} - x^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da für alle $(p, N) \in \mathcal{B}^{(1)}$ gilt, dass $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ ist (vgl. Lemma 3.8), ist insbesondere die Menge $\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial n}{\partial u_{d-k}}$ linear unabhängig. Damit folgt die lineare Unabhängigkeit der obigen partiellen Ableitungen (und somit die Behauptung) aus der affinen Unabhängigkeit der Berührungspunkte. \odot

Hüllflächen bei Hyperflächen

Speziell soll nun die Situation untersucht werden, in der die Hüllflächen von Hyperebenen gebildet werden, die Hyperflächen in genau zwei Punkten berühren (es gilt also $k=2$).

3.16 Lemma. *Es sei $M = M_{d-1}$, d.h. M ist eine Hyperfläche. Es gelte wieder sowohl $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) \neq 0$ als auch $\varphi_{d-1}(p^{(2)}, \hat{N}) \neq 0$. Des Weiteren sei die Gerade durch die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ weder tangential an $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$ noch an $\pi_M(\mathcal{B}^{(2)})$ (vergleiche Korollar 3.12 und Korollar 3.9). Es sei \bar{M} die von den Doppeltangentialhyperebenen an $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$ bzw. $\pi_M(\mathcal{B}^{(2)})$ eingehüllte Fläche, d.h. es gilt*

$$\bar{M} = \{ \tilde{p}^{(1)} + \lambda \cdot (\tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)}) \mid \lambda \in [0, 1], (\tilde{p}^{(j)}, N) \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ für } j \in \{1, 2\} \\ \text{mit } \xi(\tilde{p}^{(1)}, N) = \xi(\tilde{p}^{(2)}, N) \}.$$

Dann ist \bar{M} (bis auf höchstens $d - 2$ Singularitäten entlang jeder Erzeugenden, die jedoch nicht auf der Mannigfaltigkeit M selbst liegen) eine $(d - 1)$ -dimensionale in \mathbb{E}_d immerisierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit (eventuell müssen noch die Umgebungen $\mathcal{B}^{(1)}$ bzw. $\mathcal{B}^{(2)}$ verkleinert werden).

Beweis. Es seien dieselben Parametrisierungen wie im Beweis von Lemma 3.15 gegeben. Dann lässt sich \bar{M} parametrisieren via

$$z: U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}_d, (u, \lambda) \mapsto x^{(1)}(u) + \lambda \cdot (x^{(2)}(u) - x^{(1)}(u)).$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind folglich gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, d - 2\}$)

$$\frac{\partial z}{\partial u_j} = (1 - \lambda) \cdot \frac{\partial x^{(1)}}{\partial u_j} + \lambda \cdot \frac{\partial x^{(2)}}{\partial u_j} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = x^{(2)} - x^{(1)}.$$

Nach Korollar 3.12 sind die Vektoren $\frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_{d-2}}$ für $i \in \{1, 2\}$ linear unabhängig; die Gerade durch die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ ist weder tangential an $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$ noch an $\pi_M(\mathcal{B}^{(2)})$ (hierzu müssen die Umgebungen eventuell verkleinert werden). Daher sind für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ (die so parametrisierten Punkte entsprechen den Berührungspunkten der einhüllenden Doppeltangentialhyperebenen auf M) diese partiellen Ableitungen linear unabhängig. Somit folgt die Aussage. \odot

3.17 Bemerkung. Ist (unter den sonstigen Voraussetzungen von Lemma 3.16) die Gerade durch die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ in einer ganzen Umgebung von $p^{(1)}$ tangential an die $(d - 2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$, so ist die Einschränkung der zweiten Fundamentalform von M eingeschränkt auf $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$ in $p^{(1)}$ ausgeartet.

Hüllflächen bei Kurven

Nachdem im vorhergehenden Unterabschnitt die von Hyperebenen eingehüllten Flächen, die Hyperflächen in genau zwei Punkten berühren, betrachtet worden sind, wird nun die Situation untersucht, in der dies bei Kurven der Fall ist.

3.18 Lemma. *Es sei $M = M_1$, d.h. M ist eine Kurve. Weiterhin sei $p \in M$ ein Punkt der Kurve. Es sei $\kappa(p)$ die erste Frenet-Krümmung der Kurve M in p (vgl. [11, Abschnitt 2D]). Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- Ist $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ für einen beliebigen Normalenvektor N an M in p , dann ist auch $\kappa(p) \neq 0$ erfüllt.
- Ist $\kappa(p) \neq 0$, so bilden die Normaleneinheitsvektoren N in p mit $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ eine $(d - 3)$ -dimensionale Sphäre innerhalb der $(d - 2)$ -dimensionalen Sphäre der Normaleneinheitsvektoren an M in p .

Beweis. Es sei $(x, n): U \rightarrow M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}$), oBdA sei dabei x eine Parametrisierung von M nach Bogenlänge. Dann gilt

$$\varphi_{d-1}(p, N) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, -\frac{\partial n}{\partial u} \right\rangle \Big|_{(p, N)} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^2} \Big|_{(p, N)}, N \right\rangle.$$

Ist $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$, so kann auch $\frac{\partial x}{\partial u^2} \Big|_{(p, N)}$ nicht verschwinden, und es folgt die erste Aussage. Ist dagegen $\kappa(p) \neq 0$, so auch $\frac{\partial x}{\partial u^2} \Big|_{(p, N)}$, und es folgt die zweite Behauptung. \odot

3.19 Lemma. *Es gelte $M = M_1$, d.h. die Mannigfaltigkeit M ist eine Kurve. Es gelte wieder sowohl $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) \neq 0$ als auch $\varphi_{d-1}(p^{(2)}, \hat{N}) \neq 0$. Es sei $e_1: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein Tangenteneinheitsvektorfeld auf M .*

Ist wie in Lemma 3.16 die Fläche \bar{M} als die von den Doppeltangentialhyperebenen $\xi(p, N)$ mit $(p, N) \in \mathcal{B}^{(1)}$ lokal eingehüllte Fläche gegeben, so gilt:

- *Ist $d = 2$, so ist \bar{M} die Gerade durch die beiden Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$.*
- *Ist $d = 3$, und liegen die Berührungspunkte nicht in der Schmiegeebene an die Kurve M im jeweils anderen Berührungspunkt, so ist \bar{M} (bis auf höchstens zwei Singularitäten entlang jeder Erzeugenden, die jedoch nicht in M liegen) eine zwei-dimensionale in \mathbb{E}_3 immersierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.*
- *Ist $d \geq 4$, und sind $e_1(p^{(1)}), e_1(p^{(2)}), p^{(2)} - p^{(1)}$ linear unabhängig, so ist \bar{M} ohne diejenigen Punkte, die auf M selbst liegen, eine drei-dimensionale in \mathbb{E}_d immersierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Die Aussage für $d = 2$ ist klar. Sei im folgenden also $d > 2$. Für $j \in \{1, 2\}$ sei $x^j: U^{(j)} \rightarrow M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von $p^{(j)}$ in M nach Bogenlänge mit $x^{(j)}(0) = p^{(j)}$ (für geeignetes offenes $U^{(j)} \subseteq \mathbb{R}$).

Betrachte zunächst den Fall $d = 3$. Nach Lemma 3.18 kann oBdA davon ausgegangen werden, dass in allen parametrisierten Kurvenpunkten die erste Frenet-Krümmung κ nicht verschwindet. Somit existiert das Hauptnormalenvektorfeld $e_2: x(U^{(j)}) \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ entlang der parametrisierten Kurvenstücke. Betrachte dann die Abbildung ψ , die definiert ist durch

$$\psi: U^{(1)} \times U^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}, (u_1, u_2) \mapsto \det((e_1(x^{(1)}(u_1)), e_1(x^{(2)}(u_1)), x^{(2)}(u_1) - x^{(1)}(u_1))).$$

Die partiellen Ableitungen dieser Abbildung sind gegeben durch (es sei $\{i, j\} = \{1, 2\}$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_j} = (-1)^j \kappa(x^{(j)}) \det((e_1(x^{(i)}), e_2(x^{(j)}), x^{(2)} - x^{(1)})).$$

Da κ nicht verschwindet, und aufgrund der Tatsache, dass die Schmiegeebene des einen Berührungspunktes nicht den anderen enthält, die Determinante in den Punkten $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ ebenfalls nicht Null ist, sind beide partiellen Ableitungen ungleich Null. Insbesondere ist $\psi^{-}(\{0\})$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ eine regulär parametrisierbare Kurve

$(u_1, u_2): U \rightarrow U^{(1)} \times U^{(2)}$ (vgl. [7, Theorem 3.2]; es sei die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ geeignet gewählt).

Da nach Konstruktion für $u \in U$ die Punkte $x^{(1)}(u_1(u))$ und $x^{(2)}(u_2(u))$ genau die Berührungspunkte der Doppeltangentialhyperebenen sind, kann \bar{M} definiert werden als

$$\bar{M} := \left\{ \tilde{p}^{(1)} + \lambda \cdot (\tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)}) \in \mathbb{E}_3 \mid \lambda \in [0, 1], (\tilde{p}^{(1)}, \tilde{p}^{(2)}) \in (x^{(1)}, x^{(2)})(\psi^{\leftarrow}(\{0\})) \right\}.$$

Eine zugehörige Parametrisierung von \bar{M} ist somit gegeben durch

$$z: U \times [0, 1] \rightarrow \bar{M}, (u, \lambda) \mapsto x^{(1)}(u_1(u)) + \lambda \cdot (x^{(2)}(u_2(u)) - x^{(1)}(u_1(u))).$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind also gegeben durch

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial u_1}{\partial u} (1 - \lambda) \cdot e_1(x^{(1)}(u_1)) + \frac{\partial u_2}{\partial u} \lambda \cdot e_1(x^{(2)}(u_2)) \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = x^{(2)}(u_2) - x^{(1)}(u_1).$$

Da $\frac{\partial u_1}{\partial u}$ und $\frac{\partial u_2}{\partial u}$ in 0 nach obigem nicht verschwinden, sind die beiden partiellen Ableitungen von z in $(0, 0)$ und $(0, 1)$ linear unabhängig. Nach eventueller Verkleinerung von U gilt dies in $(u, 0)$ bzw. $(u, 1)$ für alle $u \in U$. Damit folgt dann auch im Fall $d = 3$ die Aussage.

Betrachte schließlich noch den Fall, dass $d \geq 4$ gilt. Da $e_1(p^{(1)})$, $e_1(p^{(2)})$, $p^{(2)} - p^{(1)}$ linear unabhängig sind, kann oBdA davon ausgegangen werden, dass für alle Paare von parametrisierten Kurvenpunkten $e_1(x^{(1)})$, $e_1(x^{(2)})$, $x^{(2)} - x^{(1)}$ linear unabhängig sind. Für einen Vektor $N \in \mathbb{S}_{d-1}$, der im Orthogonalraum des von diesen drei Vektoren aufgespannten Vektorraums gewählt wird, ist die Hyperebene $\xi(x^{(1)}, N)$ tangential an M sowohl in $x^{(1)}$ als auch in $x^{(2)}$. Weiterhin ist auch klar, dass dies alle Hyperebenen ergibt, die sowohl in $x^{(1)}$ als auch in $x^{(2)}$ tangential sind. Somit kann \bar{M} definiert werden als

$$\bar{M} := \left\{ \tilde{p}^{(1)} + \lambda \cdot (\tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)}) \in \mathbb{E}_d \mid \lambda \in [0, 1], \tilde{p}^{(j)} \in x(U^{(j)}) \text{ für } j \in \{1, 2\} \right\}.$$

Somit ist eine Parametrisierung von \bar{M} gegeben durch

$$z: U^{(1)} \times U^{(2)} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}_d, (u_1, u_2, \lambda) \mapsto x^{(1)}(u_1) + \lambda \cdot (x^{(2)}(u_2) - x^{(1)}(u_1)). \quad (3.3)$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind dann

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} = (1 - \lambda) \cdot e_1(x^{(1)}), \quad \frac{\partial z}{\partial u_2} = \lambda \cdot e_1(x^{(2)}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = x^{(2)} - x^{(1)}. \quad (3.4)$$

Da nach Voraussetzung die Punkte mit $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ nicht betrachtet werden sollen, sind diese drei partiellen Ableitungen nach obigem linear unabhängig, und es folgt auch in diesem Fall die Aussage. \odot

3.20 Korollar. *Es gelte $M = M_1$, und M sei kompakt, d.h. M ist eine (geschlossene) Kurve. Die Menge \mathcal{A} der Punkte $p \in M$, in denen die erste Frenet-Krümmung verschwindet sei endlich. Es sei $e_1: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein Tangenteneinheitsvektorfeld auf M .*

Ist \bar{M} die Fläche, die von den Verbindungsstrecken der Berührungspunkte von Mehrfach-tangentialhyperebenen erzeugt wird, so gilt:

- Ist $d = 2$, und ist keiner der Punkte aus \mathcal{A} Berührungspunkt einer Mehrfachtangentialgerade, so ist \bar{M} die endliche Vereinigung der Verbindungsstrecken der Berührungspunkte von Mehrfachtangentialgeraden.
- Ist $d = 3$, und gibt es höchstens endlich viele Kurvenpunkte p , in deren Schmiegeebene die Tangente eines von p verschiedenen Kurvenpunktes liegt, so gilt

$$\bar{M} = \{\tilde{p}^{(1)} + \lambda \cdot (\tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)}) \mid \lambda \in [0, 1], \det((e_1(\tilde{p}^{(1)}), e_1(\tilde{p}^{(2)}), \tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)})) = 0\}.$$

Die Fläche \bar{M} ist, bis auf eine Menge vom Maß Null, eine zwei-dimensionale in \mathbb{E}_3 immensierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- Ist $d \geq 4$, und ist die Menge der Paare von Punkten $(\tilde{p}^{(1)}, \tilde{p}^{(2)}) \in M \times M$, für die die Vektoren $e_1(\tilde{p}^{(1)}), e_1(\tilde{p}^{(2)}), \tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)}$ linear abhängig sind, endlich, so gilt

$$\bar{M} = \{\tilde{p}^{(1)} + \lambda \cdot (\tilde{p}^{(2)} - \tilde{p}^{(1)}) \in \mathbb{E}_d \mid \lambda \in [0, 1] \text{ und } \tilde{p}^{(1)}, \tilde{p}^{(2)} \in M\}.$$

Die Fläche \bar{M} ist, bis auf eine Menge vom Maß Null, eine drei-dimensionale in \mathbb{E}_d immensierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von M folgt dies unmittelbar aus Lemma 3.19 (beachte auch den zugehörigen Beweis). \odot

3.21 Lemma. Sei $d \geq 4$, $p^{(1)}, p^{(2)} \in M$, $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $(p, N) \in \mathcal{N}_{\bar{M}}$ mit $p \in \text{convex}(p^{(1)}, p^{(2)})$. Es sei weiterhin $(p, N') \in \mathcal{N}_{\bar{M}}$ so gegeben, dass die Orthogonalprojektionen von N und N' auf den von den Hauptnormalenvektoren $e_2(p^{(1)})$ und $e_2(p^{(2)})$ aufgespannten Untervektorraum übereinstimmen.

Dann gilt

$$\varphi_j(p, N) = \varphi_j(p, N').$$

Beweis. Es sei eine Parametrisierung z einer Umgebung von p in \bar{M} gegeben wie im Beweis von Lemma 3.19 (vergleiche insbesondere Gleichung (3.3)). Da die erste Fundamentalform in (p, N) unabhängig von N ist, reicht es aus die zur zweiten Fundamentalform zugehörige Matrix H zu bestimmen. Sie ist gegeben durch (vergleiche auch Gleichung (3.4); es sei wieder $\kappa: M \rightarrow \mathbb{R}$ die erste Frenet-Krümmung)

$$H|_{(p, N)} = \begin{pmatrix} (1 - \lambda) \kappa(p^{(1)}) \langle e_2(p^{(1)}), N \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \kappa(p^{(2)}) \langle e_2(p^{(2)}), N \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt nun $H|_{(p, N)} = H|_{(p, N')}$. Damit folgt dann die zu zeigende Aussage. \odot

3.2 Hyperflächen

In diesem Unterkapitel erfolgt schließlich die Formulierung und der Beweis der Formeln für das kinematische Maß einer Menge \mathcal{D} von Hyperebenen, deren Schnittverhalten bezüglich einer gegebenen Hyperfläche „geeignet“ ist – mit einer nichttangentialen Hyperebene seien also auch sämtliche Hyperebenen einer Umgebung in \mathcal{D} enthalten. In Abschnitt 3.2.1 erfolgt die Angabe der Voraussetzungen, die Konstruktion der in den Formeln benötigten Teilflächen der gegebenen Fläche sowie der von den doppelt tangentialen Hyperebenen eingehüllten Hüllflächen sowie der Formeln selbst. Im darauf folgenden Abschnitt 3.2.2 wird die Wohldefiniertheit der Konstruktion des vorangegangenen Abschnitts gezeigt.

Abschnitt 3.2.3 ist der Erläuterung der hinter dem Beweis stehenden Idee gewidmet – dies ist auch im Hinblick auf spätere Kapitel von Interesse, da sich das hier vorliegende Vorgehen auch bei der Betrachtung von Hyperebenen im Nichteuklidischen bzw. von Geraden im Euklidischen wiederfinden wird. Die Erläuterung wird anhand eines einfachen Beispiels in der zweidimensionalen euklidischen Ebene durchgeführt – ein Beispiel in Dimension drei findet sich in der Einleitung (vergleiche auch die dortige Abbildung 1). Anschließend erfolgt im abschließenden Abschnitt 3.2.4 der Beweis selbst.

3.2.1 Formulierung der Aussagen

3.22 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 3.2 sei M stets eine kompakte in \mathbb{E}_d (mit $d \geq 2$) immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^3 -differenzierbare Hyperfläche mit den folgenden Eigenschaften (dabei sei $M_{(*)} \subseteq M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$):

- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$, d.h. die Selbstdurchdringungen von M seien transversal.
- Die Abbildung $\varphi_{d-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h. die Gauß-Kronecker-Krümmung der Fläche M) habe Null als regulären Wert, insbesondere ist somit $M_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).
- Die Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhyperebenen an M , die in einem Punkt mit verschwindender Gauß-Krümmung tangential an M sind, seien in $M_{(*)}$ enthalten (für hinreichende Kriterien vergleiche die Aussagen in Abschnitt 3.7).
- Ist die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte (mit nichtverschwindender Gauß-Krümmung) einer Doppeltangentialhyperebene an M tangential an die von Berührungspunkten gebildete $(d-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (vgl. Korollar 3.12), so seien diese beide in $M_{(*)}$ enthalten.
- Die Punkte nichtverschwindender Gauß-Krümmung von M , deren Tangentialhyperebene mindestens drei Berührungspunkte mit M besitzt, die allesamt kollinear sind, sei in $M_{(*)}$ enthalten (vergleiche hierzu auch Korollar 3.12).

Da M orientierbar ist, kann ein Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1} \subseteq \mathbb{E}_d$ von M gewählt werden. Im folgenden werden die mittleren Krümmungen von M stets bezüglich dieses fest gewählten N bestimmt (vergleiche auch Bemerkung 3.26).

Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ fest gewählt. Diese Menge von Hyperebenen sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}$ (dabei bezeichne $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Menge aller Hyperebenen, die tangential an die Mannigfaltigkeit M sind). Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D})$ das bewegungsinvariante Maß der Menge \mathcal{D} , d.h. es gilt (für die Hyperebenenendichte $d\xi$ vergleiche [21, section II.12.2.]

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\xi \in \mathcal{D}} d\xi.$$

3.23 Definition. Wird mit $M_{\geq 2} \subseteq M$ die Menge der Punkte der Mannigfaltigkeit M bezeichnet, in denen die Tangentialhyperebene noch in mindestens einem weiteren Punkt tangential an M ist, so sei $\mathcal{A} := M_{\geq 2} \cup M_{(0)}$.

Dann seien die Mengen $M^+ \subseteq M$ sowie $M^- \subseteq M$ definiert durch

$$\begin{aligned} M^+ &:= \{p \in M \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p + \text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) \delta \cdot N(p), N(p)) \in \mathcal{D}\} \setminus \mathcal{A}, \\ M^- &:= \{p \in M \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p - \text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) \delta \cdot N(p), N(p)) \in \mathcal{D}\} \setminus \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Also ist M^+ die Menge der Punkte von M (bis auf die in der Menge \mathcal{A} enthaltenen), deren in Richtung $\text{sign}(\varphi_{d-1}) \cdot N$ verschobene Tangentialhyperebene (lokal) in \mathcal{D} liegt; für die Menge M^- werden die in Richtung $-\text{sign}(\varphi_{d-1}) \cdot N$ verschobenen Tangentialhyperebenen betrachtet.

3.24 Konstruktion. Betrachte nun speziell diejenigen Punkte des Randes von M^+ sowie M^- , die nicht in $M_{(*)}$ enthalten sind und deren zugehörige Tangentialhyperebene in genau zwei Punkten tangential an M ist. Nach Korollar 3.12 bildet die Menge dieser Punkte eine $(d-2)$ -dimensionale \mathcal{C}^2 -differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M , die im folgenden mit B bezeichnet werde. Da nach Konstruktion klar ist, dass von einer Doppeltangentialhyperebene entweder beide oder keiner der Berührungspunkte zu B gehören, lassen sich die Zusammenhangskomponenten von B zu Paaren zusammenfassen, so dass die beiden Zusammenhangskomponenten eines Paares dieselbe Schar von Doppeltangentialhyperebenen berühren.

Sei nun \mathcal{Z} die Menge aller Tupel $(B^{(1)}, B^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)})$, wobei $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ die beiden zueinander gehörigen Zusammenhangskomponenten von B sind, und $M^{(j)}$ die Zusammenhangskomponente von M^+ bzw. M^- ist, zu deren Rand $B^{(j)}$ gehört (für $j \in \{1, 2\}$). Ist $B^{(1)}$ (und damit auch $B^{(2)}$) Teil des Randes mehrerer Zusammenhangskomponenten von M^+ bzw. M^- , so enthalte \mathcal{Z} auch die entsprechende Zahl an Tupeln. Bei der dabei nötigen Aufteilung der angrenzenden Teilflächen von M^+ bzw. M^- ist darauf zu achten, dass die lokal entlang der Normalen parallel verschobenen Tangentialhyperebenen an M^+ bzw. M^- (vgl. Definition 3.23) Element derselben Zusammenhangskomponente von \mathcal{D} sind, ansonsten kann die Aufteilung beliebig gewählt werden (vergleiche hierzu auch das noch folgende Lemma 3.30; beachte auch Bemerkung 3.25). Aufgrund der Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit M ist \mathcal{Z} endlich (vgl. Voraussetzung 3.22).

Betrachte nun ein festes solches Tupel $Z \in \mathcal{Z}$; es gelte $Z = (B^{(1)}, B^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)})$. Die von den Doppeltangentialhyperebenen an $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ eingehüllte „Hyperfläche“, die zwischen $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ liegt (beachte, dass diese im allgemeinen Singularitäten besitzt, ihr Normaleneinheitsbündel ist jedoch nach Lemma 3.15 regulär), werde mit \bar{M}_Z bezeichnet.

Für $j \in \{1, 2\}$ setze nun $s_Z^{(j)} := -1$, wenn die Hyperfläche \bar{M}_Z auf derselben Seite von $B^{(j)}$ liegt wie M^j ; wenn diese beiden Hyperflächen auf verschiedenen Seiten liegen, so setze $s_Z^{(j)} := +1$. Gilt $M^{(j)} \subseteq M^+$, so setze $\sigma_Z^{(j)} := +1$, ist dagegen $M^{(j)} \subseteq M^-$, so setze $\sigma_Z^{(j)} := -1$. Ferner wird noch das Vorzeichen $\text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{M}_Z^{(j)}))$ der $(d-2)$ -ten mittleren Krümmung von \bar{M}_Z entlang von $B^{(j)}$ betrachtet (dabei werde das Vorzeichen von φ_{d-2} bezüglich der Normaleneinheitsvektoren von \bar{M}_Z bestimmt, die sich durch lokales Fortsetzen von $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ auf \bar{M}_Z ergeben; beachte: Aus dem noch folgenden Lemma 3.29 folgt unter anderem, dass das Vorzeichen von φ_{d-2} entlang von $M^{(j)}$ konstant ist, da Punkte mit verschwindender Gauß-Krümmung nach Voraussetzung ausgeschlossen sind).

Sei nun \bar{M}^+ die Vereinigungsfläche (unter Beachtung der durch obige Auftrennungen entstandenen Vielfachheiten) aller derjenigen Hyperflächen \bar{M}_Z (für $Z \in \mathcal{Z}$), für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{M}_Z^{(j)})) = +1$ gilt, sowie \bar{M}^- die Vereinigungsfläche aller derjenigen Hyperflächen \bar{M}_Z , für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{M}_Z^{(j)})) = -1$ gilt (jeweils für $j \in \{1, 2\}$; dass dies wohldefiniert, also unabhängig von j , ist, wird in Lemma 3.30 gezeigt werden).

3.25 Bemerkung. Die in Definition 3.23 definierten Gebiete M^+ und M^- sind im allgemeinen nicht disjunkt. Die Überlappungsgebiete besitzen jedoch keinen Einfluss in den endgültigen Formeln für $\mu(\mathcal{D})$ (vergleiche Satz 3.27 und Satz 3.28; die Terme in den Überlappungsgebieten haben unterschiedliches Vorzeichen und heben sich somit gegenseitig auf). Weiterhin heben sich die Integrale über die an die Überlappungsgebiete angrenzenden Teilflächen von \bar{M}^+ bzw. \bar{M}^- ebenfalls gegenseitig auf (da ja das Vorzeichen von φ_{d-2} und die Seite auf der die zugehörigen Teilflächen von M^+ bzw. M^- liegen gleich sind, sich jedoch die Zugehörigkeit zu M^+ bzw. M^- unterscheidet; vergleiche Konstruktion 3.24). Somit kann man von vornherein oBdA M^+ und M^- disjunkt wählen.

Ferner ist es nicht nötig bei einer eventuell nötigen Aufteilung der Teilflächen von M^+ bzw. M^- auf gleiche Zusammenhangskomponentenzugehörigkeit von \mathcal{D} zu achten (vgl. Konstruktion 3.24), die beiden Zusammenhangskomponenten dürfen lediglich nicht direkt benachbart sein (vergleiche den Beweis von Lemma 3.30). Sind M^+ und M^- disjunkt, so ist dies stets der Fall.

3.26 Bemerkung (Einfluss der Orientierung von N). In Voraussetzung 3.22 wurde das Normaleneinheitsvektorfeld N als fest gewählt vorausgesetzt. In dieser Bemerkung soll nun untersucht werden, was passiert, wenn global oder lokal (auf einzelnen Zusammenhangskomponenten von M) die entgegengesetzte Orientierung gewählt wird. Dazu müssen die beiden Fälle, dass d gerade oder ungerade ist, unterschieden werden.

Betrachte zunächst den Fall, dass d gerade ist. Dann ändert sich bei der entgegengesetzten Orientierung von N das Vorzeichen der Gauß-Krümmung φ_{d-1} , während dasjenige

der $(d-2)$ -ten mittleren Krümmung φ_{d-2} unverändert bleibt. Insbesondere bleibt also $\text{sign}(\varphi_{d-1}) \cdot N$ invariant, und damit auch M^+ und M^- (vgl. Definition 3.23). Da sich sowohl M^+ und M^- als auch φ_{d-2} nicht geändert haben, gilt dies dann auch für \bar{M}^+ und \bar{M}^- (vgl. Konstruktion 3.24).

Ist dagegen d ungerade, so bleibt das Vorzeichen von φ_{d-1} bei entgegengesetzter Orientierung von N unverändert, während dasjenige von φ_{d-2} wechselt. Damit ändert sich die Orientierung von $\text{sign}(\varphi_{d-1}) \cdot N$, und als Folge tauschen M^+ und M^- ihre Rollen. Da sich somit sowohl M^+ und M^- als auch $\text{sign}(\varphi_{d-2})$ geändert haben, bleibt der Term $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{M}_Z^{(j)}))$ in Konstruktion 3.24 invariant (für $j \in \{1, 2\}$), und damit auch \bar{M}^+ und \bar{M}^- .

3.27 Satz. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{p \in M^+} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO - \int_{p \in M^-} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO.$$

3.28 Satz. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{M^+} \varphi_{d-2} \, dO - \int_{M^-} \varphi_{d-2} \, dO + \int_{\bar{M}^+} |\varphi_{d-2}| \, dO - \int_{\bar{M}^-} |\varphi_{d-2}| \, dO.$$

3.2.2 Wohldefiniertheit

In diesem Abschnitt wird die Wohldefiniertheit der Zuweisung von Vorzeichen für die von doppelt tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen in Konstruktion 3.24 gezeigt.

3.29 Lemma. *Es sei $Z \in \mathcal{Z}$ (es gelte $Z = (B^{(1)}, B^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)})$; vergleiche Konstruktion 3.24). Es sei $p^{(1)}$ ein Punkt von $B^{(1)}$, und $p^{(2)}$ der zugehörige Punkt von $B^{(2)}$, d.h. die Tangentialhyperebene in diesen beiden Punkten ist gleich. Es sei V ein normierter Richtungsvektor der Geraden durch diese beiden Punkte.*

Wird mit $\varphi_{d-1}^{(M)}(p^{(1)})$ die Gauß-Krümmung und mit $\kappa_n(p^{(1)}, V)$ die Normalkrümmung der Fläche M in Richtung V , sowie mit $\varphi_{d-2}^{(\bar{M})}(p^{(1)})$ die $(d-2)$ -te mittlere Krümmung der Hüllfläche \bar{M}_Z bezeichnet (jeweils im Punkt $p^{(1)}$ bezüglich des Normalenvektors $N(p^{(1)})$), so gilt

$$\text{sign}(\varphi_{d-1}^{(M)}(p^{(1)})) \text{sign}(\varphi_{d-2}^{(\bar{M})}(p^{(1)})) \text{sign}(\kappa_n(p^{(1)}, V)) = 1.$$

Beweis. Es seien die Parametrisierungen $(x, n): U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ und $v: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ so wie im Beweis von Lemma 3.15 bzw. von Lemma 3.16 definiert. Dann ist eine Parametrisierung $y: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_d$ der Hüllfläche \bar{M}_Z gegeben durch

$$y: U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_d, (u, \lambda) \mapsto x(u) + \lambda \cdot v(u)$$

(beachte: Diese Parametrisierung ist in einer Umgebung des Punktes $p^{(1)}$ nach Lemma 3.16 regulär). Da die Normalenvektoren entlang einer Erzeugenden dieser Fläche

nach Konstruktion konstant sind, hat die zur zweiten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung y gehörige Matrix $H_y = (h_{i,j})_{i,j}$ die Gestalt

$$H_y = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,d-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_{d-2,1} & \cdots & h_{d-2,d-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun \bar{H}_y der linke obere $(d-2) \times (d-2)$ -Block dieser Matrix, sowie \bar{G}_y der entsprechende Block der zur Inversen der ersten Fundamentalform gehörigen Matrix. Somit ist die $(d-2)$ -te mittlere Krümmung der Hyperfläche \bar{M}_Z in $p^{(1)}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} & ((d-1) (\det(\bar{G}_y)|_{p^{(1)}})^{-1} \varphi_{d-2}^{(\bar{M})}(p^{(1)})) \\ &= \det(\bar{H}_y)|_{p^{(1)}} \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}}\right)^\top \cdot \left(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}\right)\right)|_{p^{(1)}}, \end{aligned}$$

wegen $\langle n, \frac{\partial y}{\partial u_i} \rangle = 0$, $\langle v, \frac{\partial n}{\partial u_i} \rangle = 0$, $\langle \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial n}{\partial u_i} \rangle = 0$ sowie $\langle \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial n}{\partial \lambda} \rangle = 0$ für $i \in \{1, \dots, d-2\}$ lässt sich dies weiter umformen zu

$$\begin{aligned} &= \det\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)^\top \cdot \left(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)\right)|_{p^{(1)}} \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)\right)|_{p^{(1)}} \det\left(\left(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)\right)|_{p^{(1)}} \quad (3.5) \end{aligned}$$

Betrachte schließlich die Fläche M um den Punkt $p^{(1)}$. Mit geeigneten Funktionen $f, g: U \times J \rightarrow \mathbb{R}$ (mit geeignetem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$; eventuell ist U zu verkleinern) lässt sich M lokal um den Punkt $p^{(1)}$ dann regulär parametrisieren via (beachte: Die Gerade durch die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ ist transversal zu $B^{(1)}$)

$$z: U \times J \rightarrow \mathbb{E}_d, (u, \lambda) \mapsto x(u) + f(u, \lambda) \cdot v(u) + g(u, \lambda) \cdot n(u).$$

OBdA sei $p^{(1)}$ gegeben durch $z(0,0)$, d.h. es gilt $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Die partiellen Ableitungen von z sind gegeben durch (für $i \in \{1, \dots, d-2\}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u_i} &= \frac{\partial x}{\partial u_i} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot v + f \cdot \frac{\partial v}{\partial u_i} + \frac{\partial g}{\partial u_i} \cdot n + g \cdot \frac{\partial n}{\partial u_i} \text{ sowie} \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot v + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \cdot n. \end{aligned}$$

Betrachte die partiellen Ableitungen von z nun speziell im Punkt $p^{(1)} = z(0,0)$: Es gilt $\langle \frac{\partial z}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}, n \rangle = 0$, und damit ist auch $\frac{\partial g}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = 0$. Somit folgt $\frac{\partial f}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} \neq 0$, oBdA gelte $\frac{\partial f}{\partial \lambda}|_{(u,\lambda)=(0,0)} = 1$. Aus $\langle \frac{\partial z}{\partial u_i}|_{\lambda=0}, n \rangle = 0$ ergibt sich mit $f(0,0) = g(0,0) = 0$, dass $\frac{\partial g}{\partial u_i}|_{(u,\lambda)=(0,0)} = 0$ gilt. Damit sind die partiellen Ableitungen in $p^{(1)}$ gegeben durch

$$\frac{\partial z}{\partial u_i}|_{p^{(1)}} = \frac{\partial x}{\partial u_i}|_{p^{(1)}} + \frac{\partial f}{\partial u_i}|_{p^{(1)}} \cdot v(0) \text{ und } \frac{\partial z}{\partial \lambda}|_{p^{(1)}} = v.$$

Sei nun $\hat{n}: U \times J \rightarrow \mathbb{S}_{d-1} \subseteq \mathbb{E}_d$ die Fortsetzung der Parametrisierung $n: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ der Normalenvektoren an $x(U)$ zu einer Parametrisierung der Normalenvektoren auf ganz $z(U, J)$, d.h. es gilt dann $N(z(u, t)) = \hat{n}(u, t)$ (für $(u, t) \in U \times J$). Damit gilt (es sei G_z die zur 1. Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung z gehörende Matrix)

$$\begin{aligned} & (\det(G_z)|_{p^{(1)}} \varphi_{d-1}^{(M)}(p^{(1)})) \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-2}}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^\top \cdot \left(-\frac{\partial \hat{n}}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial \hat{n}}{\partial u_{d-2}}, -\frac{\partial \hat{n}}{\partial \lambda}\right)\right)|_{p^{(1)}} \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot v, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}} + \frac{\partial f}{\partial u_{d-2}} \cdot v, v\right)^\top \cdot \left(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, -\frac{\partial \hat{n}}{\partial \lambda}\right)\right)|_{p^{(1)}} \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)\right)|_{p^{(1)}} \det\left(\left(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, -\frac{\partial \hat{n}}{\partial \lambda}, n\right)\right)|_{p^{(1)}}, \end{aligned}$$

wegen $\langle v, n \rangle = 0$ und $\langle v, \frac{\partial n}{\partial u_i} \rangle = 0$ für $i \in \{1, \dots, d-2\}$ (vgl. oben) lässt sich dies weiter umformen zu

$$= \left\langle -\frac{\partial \hat{n}}{\partial \lambda}, v \right\rangle|_{p^{(1)}} \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)\right)|_{p^{(1)}} \det\left(\left(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, v, n\right)\right)|_{p^{(1)}}.$$

Zusammen mit Gleichung (3.5) ergibt sich damit

$$\text{sign}(\varphi_{d-1}^{(M)}(p^{(1)})) \text{sign}(\varphi_{d-2}^{(\bar{M})}(p^{(1)})) \text{sign}\left(\left\langle -\frac{\partial \hat{n}}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right\rangle|_{p^{(1)}}\right) = 1.$$

Da die Normalkrümmung im Punkt $p^{(1)}$ in Richtung v gerade (bis auf einen positiven Faktor) durch dieses Skalarprodukt gegeben ist, folgt die Behauptung. \odot

3.30 Lemma. *In Konstruktion 3.24 ist die Definition von \bar{M}^+ und \bar{M}^- wohldefiniert, d.h. für $Z \in \mathcal{Z}$ gilt (unter Verwendung der Bezeichnungen aus Konstruktion 3.24)*

$$s_Z^{(1)} \sigma_Z^{(1)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{M}_Z^{(1)})) = s_Z^{(2)} \sigma_Z^{(2)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{M}_Z^{(2)})).$$

Beweis. Wie in Konstruktion 3.24 gelte $Z = (B^{(1)}, B^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)})$. Sei dann $p^{(1)} \in B^{(1)}$ ein beliebiger Punkt der Komponente $B^{(1)}$, und sei $p^{(2)} \in B^{(2)}$ der zugehörige Punkt der anderen Komponente, d.h. sowohl $p^{(1)}$ als auch $p^{(2)}$ sind Berührungspunkte der gleichen Hyperebene $\xi_Z \in \mathcal{E}_{d-1, d}$ mit M . Sei E die zweidimensionale Ebene, in der die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ sowie der Normalenvektor $N(p^{(1)})$ (der gleich $\pm N(p^{(2)})$ ist) liegen. Weiterhin setze

$$n^{(j)} := \text{sign}(\varphi_{d-1}(p^{(j)})) \cdot N(p^{(j)})$$

(für $j \in \{1, 2\}$; dabei bezieht sich die Gauß-Krümmung φ_{d-1} hier und im folgenden immer auf die Mannigfaltigkeit M , die $(d-2)$ -te mittlere Krümmung φ_{d-2} stets auf die Fläche \bar{M}_Z).

Betrachte nun Parallelscharen von Hyperebenen „nahe bei ξ_Z “, die ebenfalls senkrecht auf E stehen. Es soll nun eine Fallunterscheidung dahingehend unternommen werden,

ob (lokal) eine solche Parallelschar existiert, in der es zwei verschiedene Hyperebenen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in \mathcal{E}_{d-1,d}$ gibt, so dass $\xi^{(j)}$ tangential an $M^{(j)}$ ist für $j \in \{1, 2\}$, oder ob es eine solche Parallelschar nicht gibt.

Zunächst werde derjenige Fall betrachtet, dass eine solche Parallelschar von Hyperebenen existiert. Dann liegen entweder alle Hyperebenen $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}$, die zwischen $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ liegen, in der Menge \mathcal{D} oder keine einzige. OBdA sei ersteres der Fall (sonst ändern sowohl $\sigma_Z^{(1)}$ als auch $\sigma_Z^{(2)}$ ihr Vorzeichen, die anderen Größen ändern sich nicht). In Abbildung 3.1 sind auf der linken Seite die Werte der untersuchten Größen für die jeweils noch zwei möglichen Lagen der angrenzenden Teilflächen in $p^{(1)}$ bzw. $p^{(2)}$ eingetragen (es gibt also noch vier mögliche Kombinationsmöglichkeiten), falls $n^{(1)} = n^{(2)}$ gilt, während auf

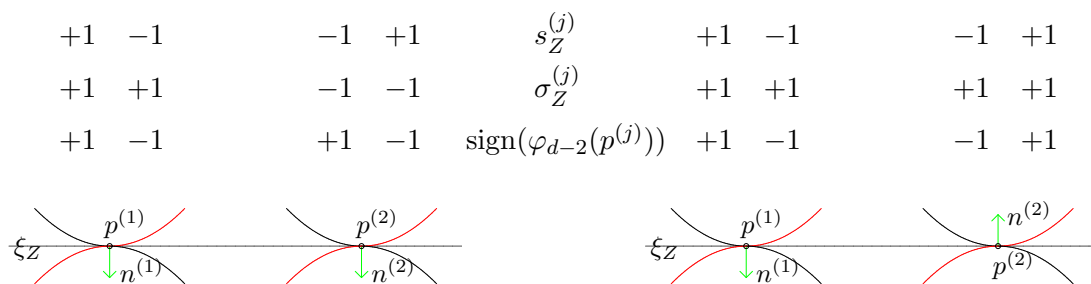


Abbildung 3.1: Der Fall, dass parallele Hyperebenen ξ_1 und ξ_2 existieren

der rechten Seite die Möglichkeiten eingetragen sind, für die $n^{(1)} = -n^{(2)}$ gilt (dargestellt ist jeweils eine geeignete Ansicht der Ebene E ; die möglichen Schnitte der Fläche $M^{(j)}$ mit E sind rot hervorgehoben; die Berührungspunkte von M mit $\xi^{(1)}$ bzw. $\xi^{(2)}$ befinden sich im allgemeinen außerhalb von E , bei geeigneter Wahl der Parallelschar ist ihr Abstand zur Ebene E jedoch beliebig klein). Wie sich leicht sehen lässt, gilt in beiden Fällen in den jeweils dann noch möglichen vier Kombinationsmöglichkeiten, dass

$$s_Z^{(1)} \sigma_Z^{(1)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(p^{(1)})) = s_Z^{(2)} \sigma_Z^{(2)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(p^{(2)})) = +1$$

gilt (das Vorzeichen von $\varphi_{d-2}(p^{(j)})$ für $j \in \{1, 2\}$ ergibt sich aus Lemma 3.29).

Schließlich werde noch derjenige Fall betrachtet, dass eine Parallelschar von Hyperebenen mit den oben geforderten Eigenschaften nicht existiert. OBdA seien die Hyperebenen, die durch (lokales) Verschieben der Hyperebene ξ_Z in Richtung von $n^{(1)}$ entstehen, Elemente der Menge \mathcal{D} (ansonsten ändern sowohl $\sigma_Z^{(1)}$ als auch $\sigma_Z^{(2)}$ ihr Vorzeichen, während die anderen Größen unverändert bleiben). Analog zum ersten Fall sind nun in Abbildung 3.2 alle restlichen Fälle dargestellt (oBdA seien dabei die möglichen Schnitte der Fläche $M^{(j)}$ mit E durch die rot hervorgehoben Kurven gegeben: Wären sie durch die schwarzen Kurven gegeben, so änderten sowohl $\sigma_Z^{(1)}$ als auch $\sigma_Z^{(2)}$ ihr Vorzeichen, die anderen Größen blieben unverändert). Wie oben lässt sich leicht sehen, dass in beiden Fällen in den jeweils noch möglichen vier Kombinationsmöglichkeiten gilt, dass

$$s_Z^{(1)} \sigma_Z^{(1)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(p^{(1)})) = s_Z^{(2)} \sigma_Z^{(2)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(p^{(2)})) = -1$$

erfüllt ist.

☺

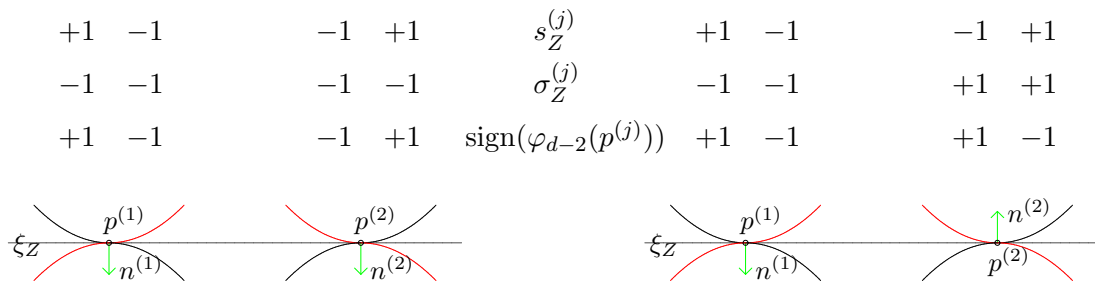


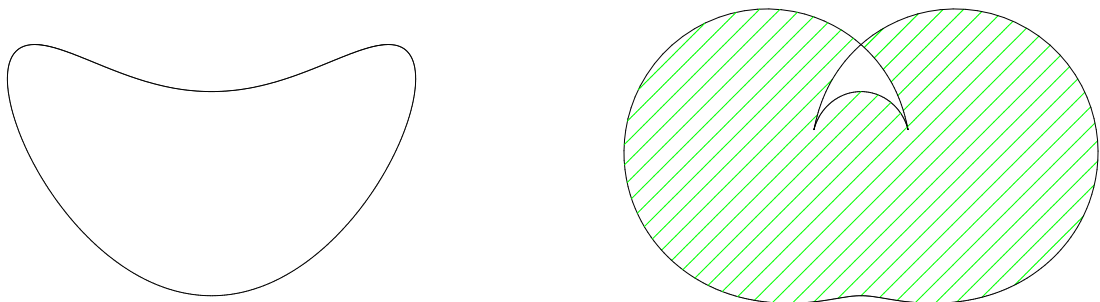
Abbildung 3.2: Die Möglichkeiten des zweiten Falles

3.31 Bemerkung. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird in Korollar 4.47 ein weiterer Beweis für die Wohldefiniertheit der Definitionen aus Konstruktion 3.24 mit Hilfe von Sphären erbracht werden (allerdings unter verschärften Voraussetzungen – dafür jedoch gleich für allgemeine Kodimension der Mannigfaltigkeit M).

3.2.3 Erläuterung der Beweisidee

Anhand eines Beispiels in der zweidimensionalen Ebene soll nun die hinter den Beweisen von Satz 3.27 und Satz 3.28 stehende Beweisidee erläutert werden. In den wesentlichen Grundzügen überträgt sich diese auch auf die in Kapitel 8 untersuchte Situation, in der statt Hyperebenen Geraden im euklidischen Raum betrachtet werden, und auf die in Kapitel 5 untersuchte Situation, in der statt des euklidischen Raumes die anderen Räume konstanter Krümmung betrachtet werden (wobei sich im letzteren Fall nur der erste Teil des Beweises übertragen ließ).

3.32 Beweisidee. Die Mannigfaltigkeit M , anhand derer die Beweisidee von Satz 3.27 und Satz 3.28 erläutert werden soll, ist in Abbildung 3.3 links eingetragen. Für das Gebiet \mathcal{D} sollen diejenigen Hyperebenen – im Fall $d = 2$ also Geraden – betrachtet werden, die M in genau zwei Punkten schneiden. Offensichtlich sind dann sowohl M als

Abbildung 3.3: Die Mannigfaltigkeit M und das Gebiet \mathcal{D}

auch \mathcal{D} von der in Voraussetzung 3.22 geforderten Gestalt. Zur Illustration des Gebietes \mathcal{D} werden die Hyperebenen mit ihren Pedalpunkten identifiziert (dies lässt sich für alle Hyperebenen, die den Ursprung nicht enthalten problemlos durchführen; beachte, dass

die eventuelle Nichtorientierbarkeit des Gebietes \mathcal{D} bei gerader Dimension d in dieser Illustration verloren geht): In Abbildung 3.3 rechts ist die zu M gehörige Pedalfläche eingetragen, die die grün schraffierte Menge der Pedalpunkte derjenigen Hyperebenen berandet, die in \mathcal{D} enthalten sind.

Im ersten Schritt, dem Beweis von Satz 3.27 (vgl. Folgerung 3.35) bei der Bestimmung des Maßes $\mu(\mathcal{D})$ wird der Satz von Stokes auf das Gebiet \mathcal{D} angewendet, aus dem Integral über \mathcal{D} wird also ein Integral über $\partial\mathcal{D}$, in der obigen Identifizierung also ein Integral über Teile der Pedalfläche von M . Es erfolgt dann der Übergang zu den zugehörigen Teilflächen von M . Je nachdem, ob dabei die Orientierung erhalten bleibt oder sich umkehrt, ist die entsprechende Teilfläche Teilmenge von M^+ oder M^- (vergleiche Abbildung 3.4 links).

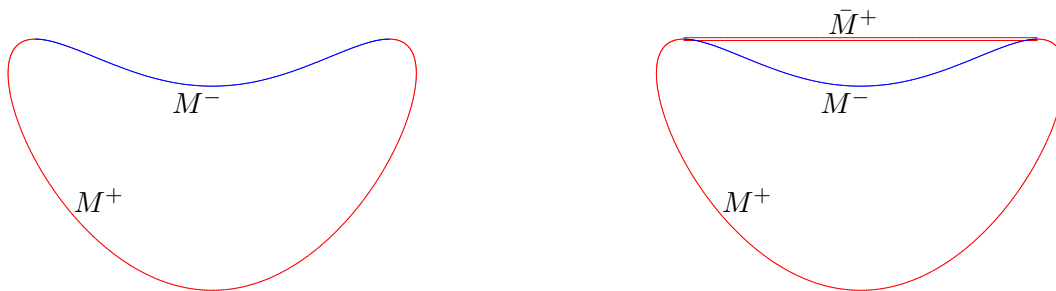


Abbildung 3.4: Die Flächen M^+ , M^- , \bar{M}^+ sowie \bar{M}^-

Von diesem Ergebnis ausgehend wird beim Beweis von Satz 3.28, auf die Flächen M^+ und M^- erneut der Satz von Stokes angewendet; dabei ergeben sich bereits die gesuchten Terme auf den Teilflächen von M jedoch auch zusätzliche Randterme (vgl. Lemma 3.36). Da der Rand von M^+ und M^- von den Berührungspunkten von doppelt berührenden tangentialen Hyperebenen gebildet wird, die ebenfalls die von diesen Hyperebenen eingehüllte Fläche beranden (vergleiche Abbildung 3.4 rechts; beachte, dass hier jeweils zwei Teilflächen ein gemeinsames Randstück teilen, daher die Hüllfläche doppelt zu gewichten ist), kann auf das dazwischenliegende Gebiet ein weiteres Mal der Satz von Stokes angewendet werden (beachte: In höheren Dimensionen besitzen diese Hüllflächen im allgemeinen Singularitäten), und es ergeben sich die restlichen Terme von Satz 3.28 auf den Flächen \bar{M}^+ sowie \bar{M}^- (vgl. Lemma 3.38).

3.2.4 Beweis der Aussagen

3.33 Definition. Es sei $B_{\geq 3}$ definiert als die Menge derjenigen Punkte nichtverschwindender Gauß-Krümmung von M , deren Tangentialhyperebene mindestens drei nichtkollineare Berührungspunkte mit M besitzt.

3.34 Lemma. Für die in Abschnitt 3.2.1 definierten Mengen gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Menge \mathcal{D} ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{E}_{d-1,d}$.

2. Die Mengen M^+ sowie M^- sind offene Teilmengen in M .
3. Die nichtsingulären Punkte des (topologischen) Randes von \mathcal{D} sind genau durch diejenigen Hyperebenen gegeben, die tangential an M in einem Punkt von M^+ oder M^- sind.
4. Die nichtsingulären Punkte des (topologischen) Randes von $M^+ \cup M^-$ (in M) sind gegeben durch B sowie offene Teilmengen von $M_{(0)}$ und $B_{\geq 3}$.
5. Die Menge derjenigen Punkte im Rand von \mathcal{D} , die nicht singulär sind, bildet eine \mathcal{C}^2 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{E}_{d-1,d}$.
6. Die Menge der singulären Punkte des (topologischen) Randes von \mathcal{D} ist endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken (mit $l \in \{0, \dots, d-2\}$).
7. Die Menge der singulären Punkte des (topologischen) Randes von M^+ und M^- ist endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken (mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$).

Beweis. 1. bis 4. folgen unmittelbar aus den Definitionen der Mengen \mathcal{D} , $M_{(0)}$, M^+ , M^- sowie B (vergleiche Voraussetzung 3.22, Definition 3.23 und Konstruktion 3.24).

5. bis 7. Indem man die Hyperebenen von $\mathcal{E}_{d-1,d}$ mit ihrem Lotfußpunkt identifiziert, lässt sich $\mathcal{E}_{d-1,d}$ (bei geeigneter Wahl des Ursprungs) lokal mit \mathbb{E}_d identifizieren. Die Aussagen folgen dann aus den Lemmas und Korollaren der Abschnitte 3.1.1 und 3.1.2 sowie direkt aus Voraussetzung 3.22. \odot

3.35 Folgerung. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{p \in M^+} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1} dO - \int_{p \in M^-} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1} dO,$$

d.h. Satz 3.27 ist richtig.

Beweis. Seien die Hyperebenen $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}$ gegeben durch ihren Normaleneinheitsvektor $e_d \in \mathbb{S}_{d-1}$, einen Punkt p auf ξ sowie eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_{d-1} , die den zu ξ gehörigen Untervektorraum aufspannen. Der Normalenvektor e_d sei für die Hyperebenen, die nicht den Ursprung enthalten, so orientiert, dass $\langle p, -e_d \rangle > 0$ erfüllt ist, für die Hyperebenen ξ , die den Ursprung enthalten, vergleiche den weiteren Verlauf des Beweises. Dann gilt (für die Hyperebenendichte $d\xi$ vergleiche [21, section II.12.2.], für die Maurer-Cartan-Formen ω_d sowie $\omega_{d,j}$ für $j \in \{1, \dots, d-1\}$ vergleiche [21, section II.12.1.]

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{\xi \in \mathcal{D}} d\xi = \int_{\xi \in \mathcal{D}} -\omega_d \wedge \omega_{d,1} \wedge \dots \wedge \omega_{d,d-1} \\ &= \int_{\xi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{L}_{d-1,d}} -\omega_d \wedge \omega_{d,1} \wedge \dots \wedge \omega_{d,d-1}. \end{aligned}$$

Da die Menge \mathcal{D} nach Entfernung der Ursprungshyperebenen sicherlich orientierbar ist, kann nun der Satz von Stokes für Flächen mit Singularitäten angewendet werden (vgl. [13,

chapter XVII, §3, Theorem 3.3]; beachte auch Lemma 3.34), und es folgt (beachte: Da der Integrand auf den Ursprungshyperebenen nach Anwendung des Satzes von Stokes verschwindet, müssen diese im weiteren nicht separat betrachtet werden)

$$\begin{aligned} &= \int_{\xi \in \partial \mathcal{D}} \langle p, -e_d \rangle \omega_{d,1} \wedge \cdots \wedge \omega_{d,d-1} \\ &= \int_{\xi \in \partial \mathcal{D}} \langle p, -e_d \rangle \det(-de_d, \dots, -de_d, e_d). \end{aligned}$$

Die Hyperebenen $\xi \in \partial \mathcal{D}$ sind alle tangential an die Mannigfaltigkeit M . Da aufgrund der Voraussetzungen die Menge derjenigen Hyperebenen mit mehreren Berührungspunkten das $(d-2)$ -dimensionale Maß Null besitzt, kann im folgenden davon ausgegangen werden, dass der zur Hyperebene ξ gehörige Punkt $p \in \xi$ der Berührungspunkt von ξ mit M ist. Es seien die offenen Teilmengen $M_{e_d}^+ \subseteq M \setminus M_O$ bzw. $M_{e_d}^- \subseteq M \setminus M_O$ so wie in Definition 3.23 definiert, jetzt aber nicht bezüglich des vorgegebenen Vektorfeldes N , sondern bezüglich des Normalenvektorfeldes $e_d: M \setminus M_O \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, das von den tangentialen Hyperebenen induziert wird (dabei sei $M_O \subseteq M$ die Menge derjenigen Punkte, deren Tangentialhyperebene den Ursprung enthält). Der Diffeomorphismus von $\partial \mathcal{D}$ auf M ist lokal genau dann orientierungserhaltend, wenn der Normalenvektor $\text{sign}(\varphi_{d-1}(p, e_d)) \cdot e_d$ ins Gebiet \mathcal{D} zeigt (dies entspricht nach Definition den Punkten der Menge $M_{e_d}^+$; vergleiche hierzu Korollar 3.4; beachte, dass die Menge der den Ursprung nicht enthaltenden Hyperebenen global mit ihren Lotfußpunkten identifiziert werden kann), somit folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \int_{p \in M_{e_d}^+} \langle p, -e_d \rangle \det(-de_d, \dots, -de_d, e_d) - \int_{p \in M_{e_d}^-} \langle p, -e_d \rangle \det(-de_d, \dots, -de_d, e_d) \\ &= \int_{p \in M_{e_d}^+} \langle p, -e_d \rangle \varphi_{d-1}(p, e_d) \det(dp, \dots, dp, e_d) \\ &\quad - \int_{p \in M_{e_d}^-} \langle p, -e_d \rangle \varphi_{d-1}(p, e_d) \det(dp, \dots, dp, e_d) \\ &= \int_{p \in M_{e_d}^+} \langle p, -e_d \rangle \varphi_{d-1}(p, e_d) dO - \int_{p \in M_{e_d}^-} \langle p, -e_d \rangle \varphi_{d-1}(p, e_d) dO. \end{aligned}$$

Für die Aussagen von Bemerkung 3.26 ist es nicht notwendig, dass das dort betrachtete Normaleneinheitsvektorfeld global stetig ist, sie können auch auf das Normalenvektorfeld e_d angewendet werden, daher lässt sich dies weiter umformen zu

$$= \int_{p \in M^+} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) dO - \int_{p \in M^-} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) dO. \quad \odot$$

3.36 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{M^+} \varphi_{d-2} dO + \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M^+} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &\quad - \int_{M^-} \varphi_{d-2} dO - \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M^-} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)). \end{aligned}$$

Beweis. Mit der in Folgerung 3.35 bewiesenen Formel für $\mu(\mathcal{D})$ aus Satz 3.27 folgt

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{D}) &= \int_{p \in M^+} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1} \, dO - \int_{p \in M^-} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1} \, dO \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \left(\int_{p \in M^+} -\det((-dN, \dots, -dN, p)) - \int_{p \in M^-} -\det((-dN, \dots, -dN, p)) \right).\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Folgerung 3.35 lässt sich dies mit dem Satz von Stokes für Flächen mit Singularitäten (vgl. [13, chapter XVII, §3, Theorem 3.3]; beachte auch wieder Lemma 3.34) weiter umformen zu

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(d-1)!} \int_{p \in M^+} \det((-dN, \dots, -dN, dp, N)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M^+} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &\quad - \frac{1}{(d-1)!} \int_{p \in M^-} \det((-dN, \dots, -dN, dp, N)) \\ &\quad - \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M^-} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= \int_{M^+} \varphi_{d-2} \, dO + \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M^+} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &\quad - \int_{M^-} \varphi_{d-2} \, dO - \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M^-} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)). \quad \oplus\end{aligned}$$

3.37 Bemerkung (Integralformel von Minkowski). Im Beweis von Lemma 3.36 wurde insbesondere eine der klassischen Integralformeln von Minkowski bewiesen: Für eine berandete $(d-1)$ -dimensionale in \mathbb{E}_d immersierte \mathcal{C}^3 -differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit Normaleneinheitsvektorfeld N gilt

$$\int_{p \in M} (\varphi_{d-2}(p) + \langle p, N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p)) \, dO = \frac{(-1)^d}{(d-1)!} \int_{p \in \partial M} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)),$$

insbesondere gilt also, falls M unberandet ist,

$$\int_{p \in M} (\varphi_{d-2}(p) + \langle p, N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p)) \, dO = 0.$$

Diese Integralformel wurde zuerst von C. C. Hsiung im Jahr 1954 in [8] bewiesen. Die Integralformeln von Minkowski sowie Beweise, die der Vorgehensweise im Beweis von Lemma 3.36 entsprechen, finden sich beispielsweise auch in [14, section 2].

3.38 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned}&\int_{p \in \partial M^+} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) - \int_{p \in \partial M^-} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= (-1)^{d-1} (d-1)! \left(\int_{M^+} |\varphi_{d-2}| \, dO - \int_{M^-} |\varphi_{d-2}| \, dO \right).\end{aligned} \quad (3.6)$$

Beweis. Nach Lemma 3.34 sind die Punkte von ∂M^+ bzw. ∂M^- gegeben durch B sowie offene Teilmengen von $M_{(0)}$ und $B_{\geq 3}$. Betrachte zunächst eine beliebige Zusammenhangskomponente $M_{(0)}^z$ der Menge $M_{(0)}$. Aufgrund der Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit M (vgl. Voraussetzung 3.22) befindet sich zu beiden Seiten von $M_{(0)}^z$ entweder die Menge M^+ oder die Menge M^- . Über die Fläche $M_{(0)}^z$ wird daher auf der linken Seite von Gleichung (3.6) zweimal integriert, jeweils im mit dem gleichen Vorzeichen versehenen Integral, jedoch hat $M_{(0)}^z$ in den beiden Fällen eine unterschiedliche Orientierung (festgelegt durch den Satz von Stokes; vergleiche den Beweis von Lemma 3.36). In der Summe ergibt sich also Null.

Betrachte nun die Integrale über $B_{\geq 3}$ (bzw. eine offene Teilmenge davon): Da $B_{\geq 3}$ gerade von denjenigen Punkten von M gebildet wird, deren Tangentialhyperebene in mindestens drei nichtkollinearen Punkten tangential an M ist, und die partiellen Ableitungen des Normaleneinheitsvektors N in Richtung der weiteren Berührungspunkte stets verschwinden, ist der Integrand (und damit das gesamte Integral) gleich Null.

Es reicht somit den von B gebildeten Teil von ∂M^+ bzw. ∂M^- zu betrachten. Für festes $Z \in \mathcal{Z}$ betrachte die beiden zugehörigen Zusammenhangskomponenten $B^{(1)}$ bzw. $B^{(2)}$ von B (es gelte $Z = (B^{(1)}, B^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)})$; vergleiche Konstruktion 3.24). In zwei Schritten soll nun das Integral auf der linken Seite von Gleichung (3.6) über $B^{(1)}$ bzw. $B^{(2)}$ bestimmt werden. Es sei $\bar{\sigma}_Z := +1$, wenn die Fläche \bar{M}_Z eine Teilfläche von \bar{M}^+ ist, ansonsten sei $\bar{\sigma}_Z := -1$ (vgl. Konstruktion 3.24).

(i) Es sei $K^{(1)}$ eine berandete $(d-2)$ -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $B^{(1)}$, und $K^{(2)}$ die zugehörige Untermannigfaltigkeit von $B^{(2)}$. Es sei $\bar{\mathcal{N}}_K$ definiert durch (vgl. Lemma 3.15)

$$\bar{\mathcal{N}}_K := \left\{ \left(p^{(1)} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p^{(2)} - p^{(1)} \\ N(p^{(1)}) \end{pmatrix} \mid \lambda \in [0, 1], p^{(j)} \in K^{(j)} \text{ für } j \in \{1, 2\} \right. \right. \\ \left. \left. \text{mit } \xi(p^{(1)}, N(p^{(1)})) = \xi(p^{(2)}, N(p^{(2)})) \right\},$$

d.h. $\bar{\mathcal{N}}_K$ ist ein Teil des zur Hüllfläche \bar{M}_Z gehörigen Normaleneinheitsbündels. Weiterhin sei $\mathcal{B}_K^{(j)}$ (für $j \in \{1, 2\}$) die zu $K^{(j)}$ zugehörige Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M , die Teil des Randes von $\bar{\mathcal{N}}_K$ ist, und bezüglich $\bar{\mathcal{N}}_K$ orientiert sei. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} \int_{p \in K^{(1)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(1)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \partial \bar{\mathcal{N}}_K \setminus \mathcal{B}_K^{(1)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ & \quad + \frac{1}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{N}}_K} \det((-dN, \dots, -dN, -dp, p)) \\ & \quad + \frac{1}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{N}}_K} \det((-dN, \dots, -dN, dp, N)) \end{aligned}$$

(beachte: Wie im Beweis von Lemma 3.36 wurde hier der Satz von Stokes für Flächen mit Singularitäten auf die Fläche $\bar{\mathcal{N}}_K$ angewendet). Da der Normalenvektor entlang einer Erzeugenden der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_K$ konstant ist, vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &\quad + \frac{1}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{N}}_K} \det((-dN, \dots, -dN, dp, N)). \end{aligned}$$

Der Integrand des zweiten Integrals ist sicherlich stetig, außerdem nimmt er nie den Wert Null an (da die Determinante der Matrix $(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, x^{(2)} - x^{(1)}, n)$ unter Verwendung der Parametrisierung von $\bar{\mathcal{N}}_K$ aus Lemma 3.15 nie verschwindet; vergleiche hierzu auch den Beweis von Lemma 3.15), also lässt sich dies unter Verwendung der Definition von $\bar{\sigma}_Z$ (vergleiche auch Konstruktion 3.24) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) + \bar{\sigma}_Z \int_{\bar{\mathcal{N}}_K} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \\ &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) + \bar{\sigma}_Z \int_{\pi_{\bar{M}_Z}(\bar{\mathcal{N}}_K)} |\varphi_{d-2}| dO \end{aligned}$$

(vgl. Lemma 2.8). Es ist also noch das erste Integral zu betrachten. Nach Definition von $\bar{\sigma}_Z$ gilt (vergleiche Konstruktion 3.24; beachte: Das Vorzeichen der $(d-2)$ -ten mittleren Krümmung φ_{d-2} der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_K$ ist auf ganz $B^{(j)}$ für $j \in \{1, 2\}$ nach Lemma 3.29 konstant)

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)} \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(B^{(1)})) \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(B^{(2)})) \\ &\quad \int_{(p,N) \in \mathcal{N}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Um dies weiter umformen zu können, ist nun eine Fallunterscheidung notwendig. Es muss unterschieden werden, ob die Normalenvektoren von $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ in zueinander gehörigen Punkten gleichorientiert oder entgegengesetzt orientiert sind.

Betrachte zunächst den Fall, dass die jeweiligen Normalenvektoren gleichorientiert sind. Da (vgl. oben) die Determinante der Matrix $(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, x^{(2)} - x^{(1)}, n)$ nicht verschwindet, ist in diesem Fall das Vorzeichen von $\varphi_{d-2}(B^{(1)})$ gleich demjenigen von $\varphi_{d-2}(B^{(2)})$. Somit lässt sich Gleichung (3.7) umformen zu

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} \int_{p \in K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \end{aligned}$$

(beachte: Die Orientierung von $\mathcal{B}_K^{(2)}$ und $K^{(2)}$ ist bezüglich unterschiedlicher Flächen gewählt).

Im anderen Fall, dass die jeweiligen Normalenvektoren entgegengesetzt orientiert sind, gilt nach vorigem folglich

$$\text{sign}(\varphi_{d-2}(B^{(1)})) = (-1)^{d-2} \text{sign}(\varphi_{d-2}(B^{(2)})).$$

Also lässt sich Gleichung (3.7) umformen zu

$$\begin{aligned} &= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-d(-N), \dots, -d(-N), p, -N)) \\ &= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} \int_{p \in K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \end{aligned}$$

(beachte, dass im Vergleich zum ersten Fall die an $B^{(2)}$ angrenzende Fläche nun entgegengesetzt orientiert ist).

Insgesamt ist nun also

$$\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sum_{j=1}^2 \sigma_Z^{(j)} \int_{p \in K^{(j)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) = \bar{\sigma}_Z \int_{\pi_{\bar{M}_Z}(\bar{N}_K)} |\varphi_{d-2}| dO \quad (3.8)$$

gezeigt worden.

(ii) Seien nun (für $j \in \{1, 2\}$ und $k \in \mathbb{N}$) kompakte berandete $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $K_k^{(j)}$ von $B^{(j)}$ so wie in (i) mit $K_k^{(j)} \subseteq K_{k+1}^{(j)}$ und $B^{(j)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k^{(j)}$. Dann lässt sich wegen der Positivität des Integranden der Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi 1906, vergleiche beispielsweise [4, Kapitel IV, §2, Satz 2.7]) anwenden, und es folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(j)} \int_{p \in B^{(j)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(j)} \int_{p \in B^{(j)}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\chi_{K_k^{(j)}(p)} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(j)} \int_{p \in K_k^{(j)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \right). \end{aligned}$$

Auf das Integral innerhalb des Limes lässt sich nun Gleichung (3.8) aus (i) anwenden, und es folgt weiter (dabei sei \bar{M}_k die Teilfläche von \bar{M}_Z , die von $K_k^{(1)}$ sowie $K_k^{(2)}$ begrenzt wird)

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_Z \int_{\bar{M}_k} |\varphi_{d-2}| dO = \bar{\sigma}_Z \int_{\bar{M}_Z} |\varphi_{d-2}| dO.$$

Da $\bar{\sigma}_Z$ gerade +1 ist, wenn \bar{M}_Z eine Teilfläche von \bar{M}^+ ist, und $\bar{\sigma}_Z = -1$ gilt, wenn \bar{M}_Z eine Teilfläche von \bar{M}^- ist (vergleiche jeweils Konstruktion 3.24), folgt somit die Behauptung. \odot

3.39 Folgerung. *Die Aussage von Satz 3.28 ist richtig.*

Beweis. Dies folgt nun mit Lemma 3.38 unmittelbar aus Lemma 3.36. \odot

3.3 Flächen beliebiger Kodimension

Nachdem im vorausgegangenen Unterkapitel 3.2 Hyperflächen betrachtet wurden, werden in diesem Unterkapitel die dort erlangten Resultate auf Flächen allgemeiner Kodimension verallgemeinert – Flächen unterschiedlicher Dimension dürfen dabei durchaus simultan betrachtet werden, auch die Orientierbarkeit der Flächen ist keine Voraussetzung mehr. Die Resultate entsprechen direkt denjenigen bei den Hyperflächen – es muss nun jedoch über das Normaleneinheitsbündel (bzw. Teilflächen davon) der gegebenen Flächen bzw. der von doppelt tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen integriert werden. Im Beweis in Abschnitt 3.3.2 wird die hier vorliegende Situation auf die bereits in 3.2 betrachteten Hyperflächen durch Übergang zur Parallellfläche und anschließenden Grenzübergang des Abstands gegen Null zurückgeführt.

3.3.1 Formulierung der Aussagen

3.40 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 3.3 sei M_m stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immertierte unberandete \mathcal{C}^4 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$ sowie $d \geq 2$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$.

Weiterhin seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (dabei sei $\mathcal{N}_{(*)} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$; mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ gemeint):

- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$.
- Die Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Lipschitz-Killing-Krümmung, habe Null als regulären Wert, insbesondere ist $\mathcal{N}_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).
- Verschwindet die Lipschitz-Killing-Krümmung in genau einem der beiden Berührungspunkte einer Doppeltangentialhyperebene, und ist in diesem Berührungspunkt die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}, (p, N) \mapsto N$ lokal keine Immersion oder der Normalenvektor an $\mathcal{N}_{(0)}$ (innerhalb von \mathcal{N}_M) linear abhängig zum Verbindungsvektor der beiden Berührungspunkte, so seien diese beide in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten.
- Verschwindet die Lipschitz-Killing-Krümmung in beiden Berührungspunkten einer Doppeltangentialhyperebene, und sind die Normalenvektoren (innerhalb von \mathcal{N}_M) an $\mathcal{N}_{(0)}$ in diesen Punkten linear abhängig, so seien diese beide in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten.

- Liegt der Verbindungsvektor der beiden Berührungspunkte (mit nichtverschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung) einer Doppeltangentialhyperebene an M im Tangentialraum der von Berührungspunkten gebildeten $(d-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in einem dieser beiden Punkte, so seien beide in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten.
- Die Punkte nichtverschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung von \mathcal{N}_M , deren zugehörige Tangentialhyperebene in mindestens drei Punkten tangential an M ist, die allesamt kollinear sind, sei in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten (vergleiche hierzu auch Lemma 3.8).

Aufgrund der Aussagen in Abschnitt 3.1.2 kann oBdA davon ausgegangen werden, dass alle Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhyperebenen an M , die in einem Punkt verschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung tangential an M sind, in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten seien.

Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ fest gewählt. Diese Menge von Hyperebenen sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}$ (dabei bezeichne $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Menge aller Hyperebenen, die tangential an M sind). Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D})$ das bewegungsinvariante Maß der Menge \mathcal{D} , d.h. es gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\xi \in \mathcal{D}} d\xi.$$

3.41 Definition. Es werde mit $\mathcal{N}_{\geq 2} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge der $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ bezeichnet, für die die Hyperebene $\xi(p, N)$ in mehr als einem Punkt tangential an M ist.

Dann seien die Mengen $\mathcal{N}^+ \subseteq \mathcal{N}_M$ sowie $\mathcal{N}^- \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch (es werde zur Abkürzung $\mathcal{N}' := \mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)}$ gesetzt)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) < 0 \wedge \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p - \delta \cdot N, N) \in \mathcal{D}\}, \\ \mathcal{N}^- &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) > 0 \wedge \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p - \delta \cdot N, N) \in \mathcal{D}\}. \end{aligned}$$

3.42 Konstruktion. Analog zu Konstruktion 3.24 sei die Menge \mathcal{Z} nun konstruiert als die Menge von Tupeln (via gemeinsamer Doppeltangentialhyperebenen) zusammengehörender Zusammenhangskomponenten des Randes (innerhalb des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M) von \mathcal{N}^+ bzw. \mathcal{N}^- und ihrer angrenzenden Teilflächen. Nach Wahl der Voraussetzungen ist die Menge \mathcal{Z} wiederum endlich (vgl. Voraussetzung 3.40).

Betrachte nun ein festes Tupel $Z \in \mathcal{Z}$; es gelte $Z = (\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \mathcal{N}^{(1)}, \mathcal{N}^{(2)})$. Die von den zugehörigen Doppeltangentialhyperebenen eingehüllte Fläche in \mathbb{E}_d werde mit \bar{M}_Z bezeichnet (beachte, dass diese im allgemeinen Singularitäten besitzt). Weiterhin sei die Teilmenge $\bar{\mathcal{N}}_Z$ des Normaleneinheitsbündels $\mathcal{N}_{\bar{M}_Z}$ von \bar{M}_Z definiert durch (vergleiche auch Lemma 3.15; hier sind die Normalenvektoren jedoch in beiden Orientierungen vorhanden)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}}_Z &:= \left\{ \left(p^{(1)} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p^{(2)} - p^{(1)} \\ N \end{pmatrix} \right) \mid \lambda \in [0, 1], (p^{(j)}, N) \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ oder } (p^{(j)}, -N) \in \mathcal{B}^{(j)} \right. \\ &\quad \left. \text{für } j \in \{1, 2\} \text{ mit } \xi(p^{(1)}, N) = \xi(p^{(2)}, N) \right\}. \end{aligned}$$

Als nächstes erfolgt die Übertragung der Definition von $s_Z^{(j)}$ (für $j \in \{1, 2\}$) auf die jetzige Situation: Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{B}^{(j)}$ ist sowohl Teil des Randes von $\mathcal{N}^{(j)}$ als auch Teil des Randes von $\bar{\mathcal{N}}_Z$, und somit jeweils kanonisch orientiert. Stimmen diese beiden Orientierungen überein, so setze $s_Z^{(j)} := -1$, sind sie dagegen nicht gleich, so setze $s_Z^{(j)} := +1$.

Die Übertragung der Definition von $\sigma_Z^{(j)}$ (für $j \in \{1, 2\}$) auf die jetzige Situation ist einfacher: Gilt $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^+$, so gilt $\text{sign}(\varphi_{d-1}) = -1$ entlang von $\mathcal{B}^{(j)}$, ist dagegen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^-$, so gilt $\text{sign}(\varphi_{d-1}) = +1$ entlang von $\mathcal{B}^{(j)}$ (vgl. Definition 3.41), daher setze $\sigma_Z^{(j)} := -\text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N))$ für einen beliebigen Punkt $(p, N) \in \mathcal{B}^{(j)}$.

Schließlich sei noch (für $j \in \{1, 2\}$) das Vorzeichen $\text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{\mathcal{N}}_Z^{(j)}))$ der Krümmung φ_{d-2} der Hüllfläche $\bar{\mathcal{N}}_Z$ entlang von $\mathcal{B}^{(j)}$ analog zur Definition in Konstruktion 3.24 definiert (sollte die Hüllfläche entlang des Randes singulär sein, so werde φ_{d-2} bezüglich der zur Menge $\mathcal{B}^{(j)}$ zugehörigen Punkte der Parallellfläche \bar{M}_ε für genügend kleine $\varepsilon > 0$ betrachtet, diese ist für diese ε regulär, da $\bar{\mathcal{N}}_Z$ nach Lemma 3.15 regulär ist).

Dann sei nun $\bar{\mathcal{N}}^+$ die Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung der entsprechenden Vielfachheiten) aller derjenigen oben definierten Flächen $\bar{\mathcal{N}}_Z$ (für $Z \in \mathcal{Z}$), für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{\mathcal{N}}_Z^{(j)})) = +1$ gilt, sowie $\bar{\mathcal{N}}^-$ die Vereinigungsfläche aller derjenigen Flächen $\bar{\mathcal{N}}_Z$, für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{\mathcal{N}}_Z^{(j)})) = -1$ gilt (jeweils für $j \in \{1, 2\}$; die Wohldefiniertheit dieser Definition wird in Korollar 3.55 gezeigt werden).

3.43 Bemerkungen. 1. Die Aussagen von Bemerkung 3.25 im Falle der Nichtdisjunktheit von \mathcal{N}^+ und \mathcal{N}^- übertragen sich direkt auch auf die jetzige Situation.

2. Die Definitionen der drei Vorzeichen, die in Konstruktion 3.42 zur Bestimmung der Zugehörigkeit des Normalenbündels der Hüllflächen benötigt werden, ergeben sich aus denjenigen für Hyperflächen durch Betrachten der Parallellflächen zu M (die nach Lemma 2.10 für genügend kleinen Abstand reguläre Hyperflächen sind) mit gegen Null strebendem Abstand (vergleiche hierzu auch Korollar 3.55).

3.44 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{(p,N) \in \mathcal{N}^+} \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \\ &\quad - \int_{(p,N) \in \mathcal{N}^-} \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}. \end{aligned}$$

3.45 Korollar. *Das Ergebnis aus Satz 3.44 lässt sich weiter umformen zu*

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{(p,N) \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-} \langle p, N \rangle |\varphi_{d-1}(p, N)| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}.$$

Beweis. Dies folgt wegen Definition 3.41 unmittelbar aus Satz 3.44. ☺

3.46 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{N}^+} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathcal{N}}^+} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_{\bar{M}}}}} - \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathcal{N}}^-} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_{\bar{M}}}}}. \end{aligned}$$

3.47 Korollar. *Das Ergebnis aus Satz 3.46 lässt sich umformen zu*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= - \int_{\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-} \text{sign}(\varphi_{d-1}) \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathcal{N}}^+} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_{\bar{M}}}}} - \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathcal{N}}^-} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_{\bar{M}}}}}. \end{aligned}$$

Beweis. Aus Satz 3.46 ergibt sich diese Umformung unmittelbar aus der Definition von \mathcal{N}^+ sowie \mathcal{N}^- (vgl. Definition 3.41). \odot

3.48 Definition. Für $m \in \{1, \dots, d-1\}$ sei \bar{M}_m die Vereinigungsfläche all derjenigen von Doppeltangentialhyperebenen eingehüllten Flächen \bar{M}_Z (für $Z \in \mathcal{Z}$), die m -dimensional sind. Die Fläche \bar{M} sei dann die Vereinigungsfläche von $\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_{d-1}$.

Sei wiederum $m \in \{1, \dots, d-1\}$. Dann sei $S_p \subseteq \mathbb{S}_{d-1}$ für $p \in M_m$ definiert durch

$$S_p := \{N \in \mathbb{S}_{d-1} \mid (p, N) \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-\},$$

S_p ist also in einer in \mathbb{S}_{d-1} geeignet eingebetteten $(d-1-m)$ -dimensionalen Einheitskugel enthalten. Für $p \in \bar{M}_m$ seien $\bar{S}_p^+ \subseteq \mathbb{S}_{d-1}$ und $\bar{S}_p^- \subseteq \mathbb{S}_{d-1}$ definiert durch (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten)

$$\bar{S}_p^+ := \{N \in \mathbb{S}_{d-1} \mid (p, N) \in \bar{\mathcal{N}}^+\} \text{ bzw. } \bar{S}_p^- := \{N \in \mathbb{S}_{d-1} \mid (p, N) \in \bar{\mathcal{N}}^-\}.$$

3.49 Korollar. *Das Ergebnis aus Satz 3.44 lässt sich (mit den Definitionen aus Definition 3.48) weiter umformen zu*

$$\mu(\mathcal{D}) = \sum_{m=0}^{d-1} \int_{p \in M_m} \int_{N \in S_p} \langle p, N \rangle |\varphi_{d-1}| dO dO.$$

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar mit Hilfe von Lemma 2.8 aus Korollar 3.45. \odot

3.50 Korollar. *Das Ergebnis aus Satz 3.46 lässt sich (mit den Definitionen aus Definition 3.48) weiter umformen zu*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \sum_{m=0}^{d-1} \left(- \int_{p \in M_m} \int_{N \in S_p} \text{sign}(\varphi_{d-1}) \varphi_{d-2} dO dO \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{p \in \bar{M}_m} \int_{N \in \bar{S}_p^+} |\varphi_{d-2}| dO dO - \frac{1}{2} \int_{p \in \bar{M}_m} \int_{N \in \bar{S}_p^-} |\varphi_{d-2}| dO dO \right). \end{aligned}$$

Beweis. Diese Umformung ergibt sich unmittelbar mit Hilfe von Lemma 2.8 aus Korollar 3.47. \odot

3.3.2 Beweis der Aussagen

Der Beweis der Formel, die ohne Hüllflächen auskommt, erfolgt durch Zurückführen auf die Situation, dass orientierte Hyperflächen vorliegen. Dies geschieht mit Hilfe der in Kapitel 2 untersuchten Parallelflächen, indem der Grenzwert des Abstandes der Parallelfläche gegen Null bestimmt wird. Die Formel mit den Hüllflächen wird wie bei den Hyperflächen auf dieses Ergebnis zurückgeführt.

3.51 Definition. Sei $\varepsilon > 0$. Dann sei M_ε die Parallelfläche zu M im Abstand ε , d.h. es gilt (vgl. Definition 2.9)

$$M_\varepsilon = \bigcup_{m=0}^{d-1} (M_m)_\varepsilon.$$

3.52 Lemma. *Es existiert ein $\varepsilon_M > 0$, so dass die Parallelfläche M_ε für jedes $\varepsilon \in]0, \varepsilon_M[$ eine kompakte in den d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}_d immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^3 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, die die Voraussetzung 3.22 erfüllt (sofern diese zur Anwendung von Satz 3.27 sowie Lemma 3.30 benötigt werden).*

Beweis. Da M kompakt ist, folgt mit Lemma 2.10, dass M_ε für kleine $\varepsilon > 0$ eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^3 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ eingebettetem Normalenbündel ist. Dass $\varphi_{d-1}: M_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ Null als regulären Wert hat, folgt aus Lemma 2.15.

Seien $(p^{(1)}, N), (p^{(2)}, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_{(*)}$ die Berührungspunkte einer Doppeltangentialhyperebene, so dass $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, N) = 0$ und $\varphi_{d-1}(p^{(2)}, N) \neq 0$ erfüllt ist. Die Pedalflächen der beiden Flächen $\mathcal{N}_{(0)}$ (um $(p^{(1)}, N)$) und \mathcal{N}_M (um $(p^{(2)}, N)$) schneiden sich dann transversal (vergleiche den Beweis von Lemma 3.10). Da die Pedalfläche \tilde{M}_ε zur Parallelfläche von M im Abstand ε gegeben ist durch

$$\tilde{M}_\varepsilon = \{(\langle p, N \rangle - \varepsilon) \cdot N \mid (p, N) \in \mathcal{N}_M\}, \quad (3.9)$$

schneiden sich auch die Pedalflächen der Parallelflächen für genügend kleines ε transversal, die dritte Bedingung aus Voraussetzung 3.22 ist somit lokal bereits erfüllt (vergleiche den Beweis von Lemma 3.10). Genauso lässt sich der Fall, dass in beiden Berührungspunkten die Lipschitz-Killing-Krümmung verschwindet, auf den Beweis von Lemma 3.11 zurückführen, und auch in diesem Fall ist die dritte Bedingung aus Voraussetzung 3.22 lokal erfüllt. Da die Menge der Punkte, deren Tangentialhyperebene in einem Punkt verschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung tangential an M ist, kompakt ist, lässt sich ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass die dritte Bedingung aus Voraussetzung 3.22 auch global erfüllt ist.

Die vierte Bedingung in Voraussetzung 3.22 wird zur Anwendung von Lemma 3.30 im Beweis von Korollar 3.55 nur lokal benötigt, daher reicht es aus, nur dies zu zeigen. Seien $(p^{(1)}, N), (p^{(2)}, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_{(*)}$ die Berührungspunkte einer Doppeltangentialhyperebene, in denen die Lipschitz-Killing-Krümmung nicht verschwindet, die Pedalflächen von M um diese Punkte schneiden sich somit transversal (vergleiche den Beweis von Lemma 3.8).

Dies gilt dann auch für die Pedalflächen der Parallellflächen (lokal um $p^{(1)} - \varepsilon \cdot N$ bzw. $p^{(2)} - \varepsilon \cdot N$) für genügend kleines $\varepsilon > 0$ (vergleiche auch Gleichung (3.9)). Da das Normalenbündel der Parallellfläche M_ε auf triviale Weise mit demjenigen von M selbst identifiziert werden kann, ergibt sich somit für $j \in \{1, 2\}$ eine \mathcal{C}^2 -Parametrisierung $(x^{(j)}, n): U \times U' \rightarrow \mathcal{N}_M$ (mit geeigneten offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$ und $U' \subseteq \mathbb{R}$), so dass zueinander gehörige Berührungspunkte derselben Doppeltangentialhyperebene an M_ε gegeben sind durch

$$x^{(1)}(u, \varepsilon) - \varepsilon \cdot n(u, \varepsilon) \text{ sowie} \quad x^{(2)}(u, \varepsilon) - \varepsilon \cdot n(u, \varepsilon).$$

Da der Vektor $(0, x^{(2)} - x^{(1)})(\cdot, 0)$ nach Voraussetzung nicht im Tangentialraum der durch $(x^{(j)}, n)(\cdot, 0)$ parametrisierten Untermannigfaltigkeit liegt, gilt dies aus Stetigkeitsgründen in einer ganzen Umgebung, und die gesuchte vierte Bedingung ist lokal erfüllt.

Die letzte Bedingung in Voraussetzung 3.22 wird nicht im Beweis von Satz 3.27 benötigt, sondern erst für den Beweis von Satz 3.28. \odot

3.53 Definition. Sei $\varepsilon \in]0, \varepsilon_M[$. Dann sei $\mathcal{T}_\varepsilon \subseteq \mathcal{E}_{d-1, d}$ die Menge all der Hyperebenen, die tangential an eine Parallellfläche von M sind, die höchstens den Abstand ε besitzt, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varepsilon &= \{ \xi \in \mathcal{E}_{d-1, d} \mid \exists \delta \in [0, \varepsilon]: \xi \text{ ist tangential an } M_\delta, \delta \neq 0 \} \\ &= \{ \xi(p - \delta \cdot N, N) \in \mathcal{E}_{d-1, d} \mid \exists \delta \in [0, \varepsilon], \delta \neq 0 \text{ und } (p, N) \in \mathcal{N}_M \}. \end{aligned}$$

Sei dann $\mathcal{D}_\varepsilon \subseteq \mathcal{E}_{d-1, d}$ die Menge der Hyperebenen, die zur Menge \mathcal{D} gehören, jedoch nicht zur Menge \mathcal{T}_ε , d.h. es gilt

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D} \setminus \mathcal{T}_\varepsilon.$$

Es seien dann M_ε^+ und M_ε^- als Teilflächen von M_ε (bezüglich der Menge \mathcal{D}_ε von Hyperebenen und bezüglich dem nach „innen“ gerichteten Normaleneinheitsvektorfeld, d.h. der Normalenvektor im Punkt $p - \varepsilon \cdot N \in M_\varepsilon$ sei für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ durch N gegeben) so definiert wie in Definition 3.23, ebenso die Hüllflächen \bar{M}_ε^+ und \bar{M}_ε^- (vgl. Konstruktion 3.24).

3.54 Lemma. *Es sei A_ε^+ diejenige Teilmenge des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M , für die gilt (es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ und $\varepsilon \in]0, \varepsilon_M[$)*

$$(p, N) \in A_\varepsilon^+ \iff p - \varepsilon \cdot N \in M_\varepsilon^+$$

(entsprechend sei A_ε^- bezüglich der Menge M_ε^- definiert).

Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{A_\varepsilon^+} = \chi_{\mathcal{N}^+} \text{ und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{A_\varepsilon^-} = \chi_{\mathcal{N}^-}$$

(dabei sei χ . die charakteristische Funktion der entsprechenden Teilmenge des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M).

Beweis. OBdA werde nur die erste Aussage gezeigt, die zweite wird offensichtlich genauso bewiesen. Nach Definition von \mathcal{N}^+ (vgl. Definition 3.41) ist klar, dass für jedes $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ ein $\varepsilon_{(p,N)}$ existiert, so dass $p - \varepsilon \cdot N \in M_\varepsilon^+$ für $\varepsilon \in]0, \varepsilon_{(p,N)}[$ ist. Insbesondere gilt also

$$\mathcal{N}^+ \subseteq \bigcup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_M} A_\varepsilon^+ \quad (3.10)$$

sowie (es gelte $\varepsilon_2 \in]\varepsilon_1, \varepsilon_M[$)

$$A_{\varepsilon_1}^+ \supseteq A_{\varepsilon_2}^+. \quad (3.11)$$

Andererseits ist ebenfalls klar, dass nach Konstruktion von \mathcal{D}_ε (vgl. Definition 3.53) gilt, dass für $\varepsilon \in]0, \varepsilon_M[$ die Menge A_ε^+ eine Teilmenge von \mathcal{N}^+ ist, insgesamt folgt also zusammen mit Gleichung (3.10)

$$\mathcal{N}^+ = \bigcup_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_M[} A_\varepsilon^+. \quad (3.12)$$

Aus dieser Gleichheit folgt dann die Aussage mit Gleichung (3.11). \odot

3.55 Korollar. *In Konstruktion 3.42 ist die Definition von $\bar{\mathcal{N}}^+$ und $\bar{\mathcal{N}}^-$ wohldefiniert, d.h. für $Z \in \mathcal{Z}$ gilt*

$$s_Z^{(1)} \sigma_Z^{(1)} \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{\mathcal{N}}_Z^{(1)})) = s_Z^{(2)} \sigma_Z^{(2)} \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{\mathcal{N}}_Z^{(2)})).$$

Beweis. Dass für genügend kleines $\varepsilon > 0$ (und $j \in \{1, 2\}$) $s_Z^{(j)}$ und $\sigma_Z^{(j)}$ mit dem entsprechenden Term der Hüllfläche an die zugehörigen Parallellflächen im Abstand ε übereinstimmen, folgt unmittelbar aus den Gleichungen (3.11) und (3.12) aus dem Beweis von Lemma 3.54. Für die Gleichheit des Vorzeichens von φ_{d-2} auf der Hüllfläche der Hyperebenen an $\bar{\mathcal{N}}_Z^{(1)}$ bzw. $\bar{\mathcal{N}}_Z^{(2)}$ mit dem entsprechenden Vorzeichen von φ_{d-2} auf den Hüllflächen an die zugehörigen Parallellflächen, reicht es aus zu zeigen, dass $\operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(\bar{\mathcal{N}}_Z^{(j)})) \neq 0$ ist. Da die Determinante der Matrix $(-\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}, x^{(2)} - x^{(1)}, n)$ unter Verwendung der Parametrisierung des Normalenbündels der Hüllflächen aus Lemma 3.15 nie verschwindet, ist dies jedoch klar. Damit folgt die Wohldefiniertheit der Definitionen aus Konstruktion 3.42 aus der Wohldefiniertheit der Definitionen der entsprechenden Terme für die Parallellflächen (vgl. Lemma 3.30). \odot

3.56 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) = & \int_{(p,N) \in \mathcal{N}^+} \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \\ & - \int_{(p,N) \in \mathcal{N}^-} \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}, \end{aligned}$$

d.h. die Aussage von Satz 3.44 ist richtig.

Beweis. Nach Definition von \mathcal{D}_ε (vgl. Definition 3.53) gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} d\xi = \int_{\mathcal{D}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{\mathcal{D}_\varepsilon} d\xi.$$

Da für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ sicherlich $\mathcal{D}_{\varepsilon_1} \supseteq \mathcal{D}_{\varepsilon_2}$ gilt, kann der Satz von der monotonen Konvergenz angewendet werden (B. Levi, vergleiche beispielsweise [4, Kapitel IV, §2, Satz 2.7]), und es folgt

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{D}_\varepsilon} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} d\xi.$$

Wegen Lemma 3.52 kann nun das Ergebnis für Hyperflächen aus Satz 3.27 angewendet werden, und es folgt

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{p_\varepsilon \in M_\varepsilon^+} \langle p_\varepsilon, -N(p_\varepsilon) \rangle \varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}(p_\varepsilon) dO - \int_{p_\varepsilon \in M_\varepsilon^-} \langle p_\varepsilon, -N(p_\varepsilon) \rangle \varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}(p_\varepsilon) dO \right).$$

Betrachte zunächst den Grenzwert des ersten Integrals. Wegen $p_\varepsilon = p - \varepsilon \cdot N$, Lemma 2.8, Korollar 2.11 sowie Lemma 2.12 folgt nun

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p_\varepsilon \in M_\varepsilon^+} \langle p_\varepsilon, -N(p_\varepsilon) \rangle \varphi_{d-1}^{(\varepsilon)}(p_\varepsilon) dO \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(p,N) \in A_\varepsilon^+} \langle p - \varepsilon \cdot N, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(p,N) \in \mathcal{N}_M} \chi_{A_\varepsilon^+}(p, N) (\langle p, -N \rangle + \varepsilon) \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}. \end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von M (und damit auch derjenigen des Normalenbündels \mathcal{N}_M) und wegen $K_{\mathcal{N}_M} \geq 1$ ist die Funktion $(|\langle p, N \rangle| + \varepsilon_M) |\varphi_{d-1}(p, N)|$ eine (integrierbare) Majorante für den Integranden, daher folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz (H. Lebesgue 1910, vergleiche beispielsweise [4, Kapitel IV, §5, Satz 5.2])

$$\begin{aligned} &= \int_{(p,N) \in \mathcal{N}_M} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\chi_{A_\varepsilon^+}(p, N) (\langle p, -N \rangle + \varepsilon) \varphi_{d-1}(p, N) \right) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \\ &= \int_{(p,N) \in \mathcal{N}_M} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{A_\varepsilon^+}(p, N) \right) \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 3.54 lässt sich dies weiter umformen zu

$$\begin{aligned} &= \int_{(p,N) \in \mathcal{N}_M} \chi_{\mathcal{N}^+}(p, N) \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \\ &= \int_{(p,N) \in \mathcal{N}^+} \langle p, -N \rangle \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}. \end{aligned}$$

Da sich der Grenzwert des Integrals über das Gebiet M_ε^- offensichtlich auf dieselbe Art und Weise ergibt, folgt damit die Behauptung. \odot

3.57 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{N}^+} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{(p,N) \in \partial \mathcal{N}^+} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &\quad - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{(p,N) \in \partial \mathcal{N}^-} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)). \end{aligned}$$

Beweis. Dies lässt sich mit Hilfe von Lemma 2.8 auf analoge Art und Weise zum Beweis von Lemma 3.36 aus Lemma 3.56 folgern. \odot

3.58 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned} &\int_{(p,N) \in \partial \mathcal{N}^+} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) - \int_{(p,N) \in \partial \mathcal{N}^-} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\ &= (-1)^{d-1} (d-1)! \left(\frac{1}{2} \int_{\bar{\mathcal{N}}^+} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathcal{N}}^-} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Wie in Lemma 3.38 genügt es, für festes $Z \in \mathcal{Z}$ die beiden zugehörigen Zusammenhangskomponenten $\mathcal{B}^{(1)}$ und $\mathcal{B}^{(2)}$ des (relativen) Randes von \mathcal{N}^+ bzw. \mathcal{N}^- zu betrachten (es gelte $Z = (\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \mathcal{N}^{(1)}, \mathcal{N}^{(2)})$; vergleiche auch Konstruktion 3.42). Die weitere Vorgehensweise ist analog zu derjenigen im Beweis von Lemma 3.38. Setze noch $\bar{\sigma}_Z := +1$, falls $\bar{\mathcal{N}}_Z$ eine Teilfläche von $\bar{\mathcal{N}}^+$ ist, ist sie dagegen eine Teilfläche von $\bar{\mathcal{N}}^-$, so setze $\bar{\sigma}_Z := -1$.

Sei zunächst $\mathcal{B}_K^{(1)}$ eine berandete $(d-2)$ -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{B}^{(1)}$, und $\mathcal{B}_K^{(2)}$ die zugehörige Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{B}^{(2)}$. Dann sei $\bar{\mathcal{N}}_K$ definiert durch (vgl. Lemma 3.15)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}}_K &:= \left\{ \left(p^{(1)} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p^{(2)} \\ N^{(1)} \end{pmatrix} - p^{(1)} \right) \mid \lambda \in [0, 1], (p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}_K^{(j)} \text{ für } j \in \{1, 2\} \right. \\ &\quad \left. \text{mit } \xi(p^{(1)}, N^{(1)}) = \xi(p^{(2)}, N^{(2)}) \right\}, \end{aligned}$$

d.h. $\bar{\mathcal{N}}_K$ ist eine Teilfläche von $\bar{\mathcal{N}}_Z$. Es sei noch $\bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}$ definiert durch

$$\bar{\mathcal{B}}_K^{(2)} := \left\{ \begin{pmatrix} p^{(2)} \\ N^{(1)} \end{pmatrix} \mid (p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}_K^{(j)} \text{ für } j \in \{1, 2\} \text{ mit } \xi(p^{(1)}, N^{(1)}) = \xi(p^{(2)}, N^{(2)}) \right\},$$

die Normalenvektoren zusammengehöriger Punkte besitzen also bei $\bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}$ dieselbe Orientierung wie bei $\mathcal{B}_K^{(1)}$, während dies bei $\mathcal{B}_K^{(2)}$ nicht notwendig der Fall sein muss.

Mit Hilfe des Satzes von Stokes für Flächen mit Singularitäten, angewendet auf die Fläche $\bar{\mathcal{N}}_K$, ergibt sich nun (vergleiche den Beweis von Lemma 3.36; beachte: Die Randstücke $\mathcal{B}_K^{(1)}$ und $\mathcal{B}_K^{(2)}$ sind nicht bezüglich des Gebietes $\bar{\mathcal{N}}_K$ orientiert, sondern bezüglich des Gebietes $\mathcal{N}^{(1)}$ bzw. $\mathcal{N}^{(2)}$; das Verhalten von $\bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}$ bezüglich $\bar{\mathcal{N}}_K$ entspricht demjenigen

von $\mathcal{B}_K^{(2)}$ bezüglich $\bar{\mathcal{N}}_Z$)

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} \int_{p \in \mathcal{B}_K^{(1)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\
&= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \partial \bar{\mathcal{N}}_K \setminus \mathcal{B}_K^{(1)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\
&\quad + \frac{1}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{N}}_K} \det((-dN, \dots, -dN, -dN, p)) \\
&\quad + \frac{1}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{N}}_K} \det((-dN, \dots, -dN, dp, N)) \\
&= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} s_Z^{(2)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\
&\quad + \frac{1}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{N}}_K} \det((-dN, \dots, -dN, dp, N))
\end{aligned}$$

(beachte: Entlang einer Erzeugenden von $\bar{\mathcal{N}}_K$ ist der Normalenvektor konstant). Mit der gleichen Begründung wie im Beweis von Lemma 3.38 lässt sich dies umformen zu

$$= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} s_Z^{(2)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) + \bar{\sigma}_Z \int_{\bar{\mathcal{N}}_K} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}$$

Es ist also nun noch das erste Integral zu betrachten. Wegen Korollar 3.55 gilt

$$\begin{aligned}
& -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} s_Z^{(2)} \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) \\
&= \frac{(-1)^d}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(\mathcal{B}_K^{(1)})) \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(\mathcal{B}_K^{(2)})) \int_{(p,N) \in \bar{\mathcal{B}}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)).
\end{aligned}$$

Analog zur Vorgehensweise im Beweis von Lemma 3.38 lässt sich dies durch eine Unterscheidung in zwei Fälle umformen in

$$= -\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sigma_Z^{(2)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(2)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)).$$

Insgesamt ist also wieder

$$\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sum_{j=1}^2 \sigma_Z^{(j)} \int_{(p,N) \in \mathcal{B}_K^{(j)}} \det((-dN, \dots, -dN, p, N)) = \bar{\sigma}_Z \int_{\bar{\mathcal{N}}_K} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}$$

gezeigt worden (beachte: Der Faktor $\frac{1}{2}$ in der zu zeigenden Aussage ergibt sich dadurch, dass dort über jede der beiden Orientierungen der Normalenvektoren integriert wird).

Das Zurückführen der allgemeinen Situation auf den soeben behandelten Fall erfolgt auf die genau gleiche Art und Weise wie in Schritt (ii) des Beweises von Lemma 3.38. ☺

3.59 Folgerung. *Die Aussage von Satz 3.46 ist richtig.*

Beweis. Dies folgt nun unmittelbar aus Lemma 3.57 mit Hilfe von Lemma 3.58 ☺

3.4 Anwendungen

Im ersten Abschnitt 3.4.1 dieses Unterkapitels wird als Anwendung der Ergebnisse der vorangegangenen Unterkapitel für allgemeine reelle Funktionen auf der Menge der Hyperebenen, die auf den durch Weglassen der tangentialen Hyperebenen entstehenden Zusammenhangskomponenten konstant sind, der Erwartungswert bestimmt. Da ausschließlich kompakte Flächen betrachtet werden, ist das Maß der „relevanten“ Hyperebenen endlich; dieses kann mit bekannten Formeln der Integralgeometrie (vergleiche beispielsweise [21, formula (14.2)]) oder Satz 3.46 bestimmt werden. Es ist somit möglich, die Hyperebenen-dichte $d\xi$ mit einer Konstante derart zu modifizieren, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß vorliegt; in den Formeln dieses Unterkapitels wird auf die Angabe der Normierung der Übersichtlichkeit wegen jedoch verzichtet.

Es zeigt sich, dass lediglich das „Sprungverhalten“ der Funktion entlang tangentialer Hyperebenen bzw. (auf den Hüllflächen) die Änderung dieses Sprungverhaltens bei doppelt tangentialen Hyperebenen Eingang in die Formeln findet.

Anschließend wird im darauf folgenden Abschnitt 3.4.2 in zwei konkreten Situationen – der Anzahl der Schnittkomponenten bzw. Schnittpunkte einer konvexen Menge bzw. beliebigen Kurve – der Erwartungswert einer beliebigen Potenz dieser Funktionen bestimmt.

3.4.1 Erwartungswert lokal konstanter Funktionen

3.60 Voraussetzung. Es sei M im d -dimensionalen euklidischen Raum wie in Voraussetzung 3.40 gegeben (für $d \geq 2$). Weiterhin sei $f: \mathcal{E}_{d-1,d} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die eingeschränkt auf die einzelnen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}$ konstant ist (dabei bezeichne $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ wieder die Menge aller Hyperebenen, die tangential an M sind). Schließlich verschwinde f auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}$.

3.61 Definition. Die Funktion $\tilde{c}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$ werde für $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)})$ definiert durch (für die Definition der Mengen $\mathcal{N}_{\geq 2}$ und $\mathcal{N}_{(0)}$ vergleiche Definition 3.41)

$$\tilde{c}(p, N) := \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) \lim_{\varepsilon \searrow 0} (f(\xi(p + \varepsilon \cdot N, N)) - (f(\xi(p - \varepsilon \cdot N, N)))).$$

Die Funktion \tilde{c} gibt also das lokale Sprungverhalten der Funktion f (gewichtet mit dem Vorzeichen der Lipschitz-Killing-Krümmung) an. Für $(p, N) \in \mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)}$ setze $\tilde{c}(p, N) := 0$ (beachte: Die Menge dieser Punkte hat nach Voraussetzung Maß Null). Offensichtlich sind die beiden Funktionen auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)})$ konstant.

Ist M speziell eine orientierbare Hyperfläche mit fest gewähltem Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, so setze für $p \in M \setminus (M_{\geq 2} \cup M_{(0)})$

$$\tilde{c}(p) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} (f(\xi(p + \text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) \varepsilon \cdot N, N)) - (f(\xi(p - \text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) \varepsilon \cdot N, N))).$$

Für $p \in M_{\geq 2} \cup M_{(0)}$ setze auch hier $\tilde{c}(p) := 0$.

3.62 Definition. Es sei $\bar{\mathcal{N}}$ das Normaleneinheitsbündel der Vereinigungsfläche aller von tangentialen Hyperebenen mit genau zwei Berührungspunkten eingehüllten Flächen (dabei werde bei den eingehüllten Flächen nur der Bereich zwischen den beiden Berührungspunkten betrachtet; vergleiche Konstruktion 3.42). Setze ferner $\bar{M} := \pi_M(\bar{\mathcal{N}})$, d.h. \bar{M} ist die Vereinigungsfläche selbst.

Ziel ist es nun, eine Funktion $\bar{c}: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ zu definieren, die die Gewichtung auf den Hüllflächen liefert. Sei dazu $(p, N) \in \mathcal{N}$. Es sei $\tilde{p} \in M$ einer der beiden Berührungspunkte der an M tangentialen Hyperebene $\xi(p, N)$. Gilt $\varphi_{d-1}(\tilde{p}, N) = 0$ (oder ist dies im anderen Berührungspunkt der Fall), so setze $\bar{c}(p, N) := 0$ (beachte: Nach Voraussetzung ist das Maß dieser Punkte gleich Null). Es gelte nun also $\varphi_{d-1}(\tilde{p}, N) \neq 0$. Um (\tilde{p}, N) bilden die Berührungspunkte der Doppeltangentialhyperebenen (lokal) eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit \mathcal{B} von \mathcal{N}_M (vgl. Lemma 3.8), die ebenfalls Teil des Randes von $\bar{\mathcal{N}}$ ist. Die Mannigfaltigkeit \mathcal{N}_M wird lokal von \mathcal{B} in zwei Komponenten geteilt, bezüglich derer \mathcal{B} als Rand kanonisch orientiert ist. Es sei $(\tilde{p}^+, \tilde{N}^+) \in \mathcal{N}_M$ ein Punkt derjenigen Komponente, bezüglich der die Orientierung von \mathcal{B} nicht mit derjenigen bezüglich der Fläche $\bar{\mathcal{N}}$ übereinstimmt, und $(\tilde{p}^-, \tilde{N}^-) \in \mathcal{N}_M$ ein Punkt der anderen (vergleiche hierzu auch die Definition von $s_Z^{(j)}$ in Konstruktion 3.42). Es sei dann $\bar{c}(p, N)$ definiert durch

$$\bar{c}(p, N) := \text{sign}(\varphi_{d-2}(\tilde{p}, N)) (\bar{c}(\tilde{p}^+, \tilde{N}^+) - \bar{c}(\tilde{p}^-, \tilde{N}^-))$$

(dabei werde $\varphi_{d-2}(\tilde{p}, N)$ bezüglich der Fläche $\bar{\mathcal{N}}$ bestimmt). Da \bar{c} lokal konstant ist (vgl. Definition 3.61), ist es klar, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von $(\tilde{p}^+, \tilde{N}^+)$ bzw. $(\tilde{p}^-, \tilde{N}^-)$ ist. Dass sie auch unabhängig von der Wahl des Berührungspunktes ist, wird im Beweis von Satz 3.63 gezeigt werden.

Ist M speziell eine orientierbare Hyperfläche mit fest gewähltem Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, so seien \tilde{p}, \tilde{p}^+ sowie \tilde{p}^- analog zu obigem gewählt. Gilt $\varphi_{d-1}(\tilde{p}) = 0$ (oder ist dies im anderen Berührungspunkt der Fall), so setze $\bar{c}(p) := 0$. Ansonsten setze

$$\bar{c}(p) := \text{sign}(\varphi_{d-2}(\tilde{p})) (\bar{c}(\tilde{p}^+) - \bar{c}(\tilde{p}^-))$$

(hierbei sei wieder $\varphi_{d-2}(\tilde{p})$ bezüglich der Fläche \bar{M} bezüglich des Normalenvektors $N(p)$ zu bestimmen).

3.63 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f \, d\xi &= \int_{\mathcal{N}_M} \frac{\bar{c}}{2} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\bar{\mathcal{N}}} \frac{\bar{c}}{2} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\bar{\mathcal{N}}}}} \\ &= \int_{(p,N) \in \mathcal{N}_M} \frac{\bar{c}(p, N)}{2} \varphi_{d-1}(p, N) \langle p, -N \rangle \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $\mathcal{X} := \{f(\xi) \mid \xi \in \mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}\}$ die Menge der Werte, die die Funktion f annimmt. Nach Voraussetzung ist \mathcal{X} eine endliche Teilmenge von \mathbb{R} . Für $x \in \mathcal{X}$ sei die Menge $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ definiert durch

$$\mathcal{D}_x := \{\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T} \mid f(\xi) = x\}.$$

Da f auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{d-1,d} \setminus \mathcal{T}$ konstant ist, erfüllt \mathcal{D}_x die in Voraussetzung 3.40 an \mathcal{D} gestellten Anforderungen. Bezüglich der Menge \mathcal{D}_x können also wie in Definition 3.41 und Konstruktion 3.42 die Flächen \mathcal{N}_x^+ , \mathcal{N}_x^- , $\bar{\mathcal{N}}_x^+$ sowie $\bar{\mathcal{N}}_x^-$ definiert werden. Anwenden von Satz 3.46 liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f \, d\xi &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mu(\mathcal{D}_x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \left(\int_{\mathcal{N}_x^+} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_x^-} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} x \left(\int_{\bar{\mathcal{N}}_x^+} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\bar{\mathcal{N}}_x^-} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)})$. Es sei dann $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass für $\delta \in]0, 2\varepsilon[$

$$\tilde{c}(p, N) = \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) \left(f(\xi(p + \delta \cdot N, N)) - f(\xi(p - \delta \cdot N, N)) \right).$$

erfüllt ist. Definiere noch zur Abkürzung

$$x^+(p, N) := f(\xi(p + \varepsilon \cdot N, N)) \text{ und } x^-(p, N) := f(\xi(p - \varepsilon \cdot N, N)).$$

Ist d gerade und $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$ (und damit $\varphi_{d-1}(p, -N) < 0$), so gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_{x^+}^+$ und $(p, -N) \in \mathcal{N}_{x^-}^-$ (vgl. Definition 3.41). Somit gilt (beachte: Da d gerade ist, gilt $\varphi_{d-2}(p, N) = \varphi_{d-2}(p, -N)$)

$$x^+(p, N) \varphi_{d-2}(p, N) - x^-(p, N) \varphi_{d-2}(p, -N) = \tilde{c}(p, N) \varphi_{d-2}(p, N). \quad (3.14)$$

Ist dagegen $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$ (und damit $\varphi_{d-1}(p, -N) > 0$), so gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_{x^+}^-$ und $(p, -N) \in \mathcal{N}_{x^-}^+$. Wie soeben folgt daher

$$-x^+(p, N) \varphi_{d-2}(p, N) + x^-(p, N) \varphi_{d-2}(p, -N) = \tilde{c}(p, N) \varphi_{d-2}(p, N). \quad (3.15)$$

Ist andererseits d ungerade und $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$ (und damit auch $\varphi_{d-1}(p, -N) > 0$), so gilt $(p, N), (p, -N) \in \mathcal{N}_{x^+}^+$ (vgl. Definition 3.41). Somit gilt (beachte: Da d ungerade ist, gilt $\varphi_{d-2}(p, N) = -\varphi_{d-2}(p, -N)$)

$$x^+(p, N) \varphi_{d-2}(p, N) + x^-(p, N) \varphi_{d-2}(p, -N) = \tilde{c}(p, N) \varphi_{d-2}(p, N). \quad (3.16)$$

Ist dagegen $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$ (und damit $\varphi_{d-1}(p, -N) < 0$), so gilt $(p, N), (p, -N) \in \mathcal{N}_{x^+}^-$. Wie soeben folgt daher

$$-x^+(p, N) \varphi_{d-2}(p, N) - x^-(p, N) \varphi_{d-2}(p, -N) = \tilde{c}(p, N) \varphi_{d-2}(p, N). \quad (3.17)$$

Integrieren der Gleichungen (3.14) und (3.15) (im Fall d gerade) bzw. (3.16) und (3.17) (im Fall d ungerade) über das gesamte Normalenbündel \mathcal{N}_M liefert dann (beachte: Die oben nicht betrachteten Punkte in $\mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)}$ haben Maß Null)

$$2 \sum_{x \in \mathcal{X}} x \left(\int_{\mathcal{N}_x^+} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_x^-} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) = \int_{\mathcal{N}_M} \tilde{c} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Zusammen mit Gleichung (3.13) liefert dies den ersten Summanden der ersten zu zeigenden Aussage, der zweite ergibt sich hieraus allerdings unmittelbar (insbesondere auch die Wohldefiniertheit der in Definition 3.62 definierten Funktion \bar{c}), da die Gewichtung der Hüllflächen genau die Differenz der Gewichte der angrenzenden Teilflächen von \mathcal{N}_M ist (multipliziert mit dem Vorzeichen von φ_{d-2} auf der Hüllfläche).

Die zweite Aussage ergibt sich genau auf dieselbe Art und Weise, indem beim zu Gleichung (3.13) führenden Schritt Satz 3.44 statt Satz 3.46 angewendet wird. \odot

3.64 Korollar. *Ist speziell M eine orientierbare Hyperfläche mit fest gewähltem Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, so gilt*

$$\int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f \, d\xi = \int_M \tilde{c} \varphi_{d-2} \, dO + \int_{\bar{M}} \bar{c} |\varphi_{d-2}| \, dO.$$

Beweis. Dies lässt sich entweder direkt aus Satz 3.63 folgern, oder analog zum Vorgehen im Beweis von Satz 3.63 auf Satz 3.28 zurückführen. \odot

3.4.2 Beispiele

Als Beispiel für die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts, wird jetzt einerseits die Situation betrachtet, dass die Hyperebenen konvexe Mengen schneiden, andererseits, dass sie Kurven schneiden. Die betrachtete Funktion f ist hierbei die Anzahl der Schnittkomponenten – im Fall der Kurven also die Anzahl der Schnittpunkte – und ihre höheren Potenzen (damit ergeben sich neben dem Erwartungswert in dieser Situation ebenfalls Formeln für die höheren Momente, insbesondere auch für die Varianz).

Zahl der Schnittkomponenten von Hyperebenen mit konvexen Mengen

3.65 Voraussetzung. Es seien m kompakte konvexe nichtleere Mengen C_1, \dots, C_m in \mathbb{E}_d gegeben (mit $m \in \mathbb{N}$ und $d \geq 3$), so dass

$$M := \bigcup_{i=1}^m \partial C_i$$

Voraussetzung 3.22 erfüllt. Es sei \bar{M}^+ diejenige Teilfläche von \bar{M} (vgl. Definition 3.62), bei der die beiden berührenden Mengen C_i und C_j (für geeignetes $i, j \in \{1, \dots, m\}$) auf derselben Seite der gemeinsamen Hyperebene liegen, und \bar{M}^- diejenige Teilfläche von \bar{M} , bei der sie auf verschiedenen Seiten liegen.

Weiterhin sei $f: \mathcal{E}_{d-1,d} \rightarrow \mathbb{N}_0$ diejenige Funktion, die einer Hyperebene ξ die Anzahl der Komponenten von $\xi \cap M$ zuweist (dabei sollen die Berührungspunkte tangentialer Hyperebenen *nicht* als eigenständige Komponente gezählt werden). Es seien die Funktionen $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch $\tilde{f}(p) := f(\xi(p, N(p)))$ (für $p \in M$) bzw. durch $\bar{f}(p) := f(\xi(p, N(p)))$ (für $p \in \bar{M}$; dabei ist es in beiden Fällen jeweils offensichtlich irrelevant, welche Orientierung der Normalenvektor $N(p)$ in p besitzt).

3.66 Satz. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f^k d\xi &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \int_M \tilde{f}^j |\varphi_{d-2}| dO \\ &+ \sum_{j=0}^{k-2} (2^{k-j} - 2) \binom{k}{j} \left(\int_{\bar{M}^+} \bar{f}^j |\varphi_{d-2}| dO - \int_{\bar{M}^-} \bar{f}^j |\varphi_{d-2}| dO \right). \end{aligned}$$

Beweis. Die Funktion f erfüllt offensichtlich Voraussetzung 3.60, daher kann diese Aussage auf Korollar 3.64 zurückgeführt werden. Wähle auf M das ins Innere der konvexen Mengen gerichtete Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ (dann sind auf M alle mittleren Krümmungen positiv). In einem Punkt $p \in M$, der nicht Berührungspunkt einer Mehrfachtangentialhyperebene ist, und für den $\varphi_{d-1}(p) \neq 0$ ist, gilt dann

$$\tilde{c}(p) = (f(\xi(p, N(p))) + 1)^k - (f(\xi(p, N(p))))^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (\tilde{f}(p))^j. \quad (3.18)$$

Seien nun $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ die beiden Berührungspunkte einer Hyperebene, die in genau diesen zwei Punkten tangential an M ist (und so dass sowohl $\varphi_{d-1}(p^{(1)}) \neq 0$ als auch $\varphi_{d-1}(p^{(2)}) \neq 0$ gilt. Da die Mengen C_1, \dots, C_m konvex sind, liegen die zu $p^{(1)}$ bzw. $p^{(2)}$ gehörigen Mengen jeweils ganz auf einer Seite der Hyperebene $\xi := \xi(p^{(1)}, N(p^{(1)}))$. Es

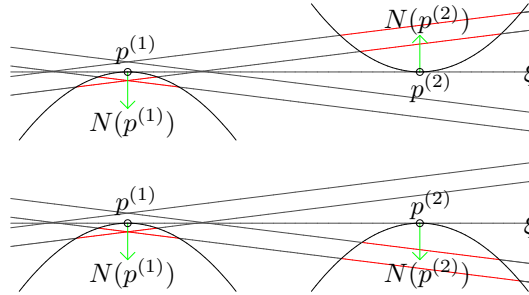


Abbildung 3.5: Die beiden möglichen Situationen (in der zweidimensionalen Ebene, in der $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ und $N(p^{(1)})$ liegen)

sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden, ob sie auf derselben Seite von ξ liegen oder nicht. Im ersten Fall gilt (vergleiche auch Abbildung 3.5 unten) nach Definition von \bar{c} in Definition 3.62 mit Hilfe von Gleichung (3.18) (für $p \in \text{convex}(p^{(1)}, p^{(2)})$)

$$\begin{aligned} \bar{c}(p) &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (\tilde{f}(p) + 1)^j - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (\tilde{f}(p))^j = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (\tilde{f}(p))^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \left(\sum_{j=i+1}^{k-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} \right) (\tilde{f}(p))^i = \sum_{i=0}^{k-2} (2^{k-i} - 2) \binom{k}{i} (\tilde{f}(p))^i. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Im zweiten Fall gilt offensichtlich bis auf das nun negative Vorzeichen dasselbe (vergleiche auch Abbildung 3.5 oben). Die zu zeigende Aussage folgt damit mit Hilfe der Gleichungen (3.18) sowie (3.19) direkt aus Korollar 3.64. \odot

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.66 ist das folgende Korollar:

3.67 Korollar. *Wird in Satz 3.66 speziell $k = 1$ oder $k = 2$ betrachtet, so ergibt sich*

$$\int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f \, d\xi = \int_M |\varphi_{d-2}| \, dO$$

sowie

$$\int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f^2 \, d\xi = \int_M |\varphi_{d-2}| \, dO + 2 \int_M \tilde{f} |\varphi_{d-2}| \, dO + 2 \int_{\bar{M}^+} |\varphi_{d-2}| \, dO - 2 \int_{\bar{M}^-} |\varphi_{d-2}| \, dO.$$

Zahl der Schnittpunkte von Hyperebenen mit Kurven

3.68 Voraussetzung. Es sei M eine geschlossene in \mathbb{E}_d (für $d \geq 2$) immersierte Kurve, die sowohl Voraussetzung 3.40 als auch die jeweils gültigen Voraussetzungen in Korollar 3.20 erfüllt. Es sei $\bar{\mathcal{N}}^+$ diejenige Teilmenge von $\bar{\mathcal{N}}$ (vergleiche Definition 3.62 und Korollar 3.20), bei der die Kurve M in den beiden Berührungspunkten der gemeinsamen tangentialen Hyperebene ξ lokal auf derselben Seite von ξ liegt. Es sei $\bar{\mathcal{N}}^-$ diejenige Teilmenge von $\bar{\mathcal{N}}$, bei der dies verschiedene Seiten sind. Schließlich werde noch $\bar{M}^+ := \pi_M(\bar{\mathcal{N}}^+)$ und $\bar{M}^- := \pi_M(\bar{\mathcal{N}}^-)$ gesetzt.

Weiterhin sei $f: \mathcal{E}_{d-1,d} \rightarrow \mathbb{N}_0$ diejenige Funktion, die einer Hyperebene $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Anzahl der Schnittpunkte von ξ mit M zuweist (dabei sollen die Berührungspunkte tangentialer Hyperebenen *einfach* gezählt werden).

3.69 Definition. Für $j \in \mathbb{N}_0$ sei die Funktion $\tilde{f}_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{f}_j: M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-2})} \int_{N \in \mathbb{S}_{d-1} \text{ mit } (p,N) \in \mathcal{N}_M} (f(\xi(p, N)))^j \, dO.$$

Für $p \in M$ gibt \tilde{f}_j also die mittlere Anzahl von Schnittpunkten (bzw. deren j -te Potenz) der in p an M tangentialen Hyperebenen mit M an.

Die Funktion $\bar{f}: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{N}_0$ sei definiert durch

$$\bar{f}: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}, (p, N) \mapsto f(\xi(p, N)).$$

Genau dann, wenn $d \in \{2, 3, 4\}$ erfüllt ist, ist \bar{M} eine Hyperfläche (eventuell mit Singularitäten; vergleiche Korollar 3.20). In diesen Fällen definiere die Funktion $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch (für $p \in \bar{M}$ sei $N(p) \in \mathbb{S}_{d-1}$ einer der beiden Normalenvektoren an \bar{M} in p)

$$\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(\xi(p, N(p))).$$

3.70 Satz. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f^k d\xi &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-2})}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (1 - (-1)^{k-j}) \int_M \tilde{f}_j dO \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-2} \left(2^{k-j-1} \binom{k}{j} (1 + (-1)^{k-j}) \int_{\mathcal{N}^+} \bar{f}^j |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{k-2} \left(2^{k-j-1} \binom{k}{j} (1 + (-1)^{k-j}) \int_{\mathcal{N}^-} \bar{f}^j |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Die Funktion f erfüllt offensichtlich Voraussetzung 3.60, daher kann diese Aussage auf Satz 3.63 zurückgeführt werden. Es sei $e_1: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein Tangenteneinheitsvektorfeld auf M und $e_2: M \setminus \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ die zugehörigen Hauptnormalenvektoren (wobei \mathcal{A} die Menge der Punkte p von M sei, in denen die erste Frenet-Krümmung $\kappa(p)$ verschwindet).

Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ mit $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$, so dass die Hyperebene $\xi(p, N)$ außer in p in keinem weiteren Punkt tangential an M ist. Sei dann $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von (p, N) (mit geeignetem offenem $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). OBdA sei u_1 der Bogenlängenparameter der Kurve M , und es gelte $U = U_1 \times U_2$ mit $U_1 \subseteq \mathbb{R}$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$. Dann gilt

$$\varphi_{d-1}(p, N) = \langle e_1(p), -\frac{\partial n}{\partial u_1} \Big|_{(p,N)} \rangle = \langle \frac{\partial e_1}{\partial u_1} \Big|_p, N \rangle = \kappa(p) \langle e_2(p), N \rangle.$$

Da $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ ist, zeigen also $\kappa(p) \cdot e_2(p)$ und $\text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) \cdot N$ in dieselbe Richtung (bezüglich der Hyperebene $\xi(p, e_2(p))$), d.h. es gilt

$$\langle \kappa(p) \cdot e_2(p), \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) \cdot N \rangle > 0.$$

Da die Kurve lokal um p gegeben ist durch (lokale Normalform einer Kurve; vergleiche beispielsweise [11, 2.9 in Abschnitt 2B]; es sei $X: U_1 \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ eine geeignete Abbildung)

$$u_1 \mapsto p + u_1 \cdot e_1(p) + \frac{u_1^2}{2} (\kappa(p) \cdot e_2(p)) + o(u_1^2) \cdot X(u_1),$$

ist damit das lokale Schnittverhalten der tangentialen Hyperebene $\xi(p, N)$ bei Parallelverschiebung genauso wie im Beweis von Satz 3.66 bei der Betrachtung von konvexen Mengen (bis auf den Faktor 2). Daher gilt (beachte das unterschiedliche Zählverhalten der Funktion f für tangentiale Hyperebenen in Bezug auf die Situation von Satz 3.66; vergleiche hierzu Voraussetzung 3.65 bzw. Voraussetzung 3.68)

$$\begin{aligned} \tilde{c}(p, N) &= (f(\xi(p, N)) + 1)^k - (f(\xi(p, N)) - 1)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (1 - (-1)^{k-j}) (f(\xi(p, N)))^j \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da das Schnittverhalten (im wesentlichen; vergleiche oben) so wie im Beweis von Satz 3.66 ist, gilt für $(p, N) \in \bar{\mathcal{N}}$

$$\begin{aligned} \bar{c}(p, N) &= (f(\xi(p, N)) + 2)^k - 2(f(\xi(p, N)))^k + (f(\xi(p, N)) - 2)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} 2^{k-j} \binom{k}{j} (1 + (-1)^{k-j} (f(\xi(p, N)))^j). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Aussage folgt jetzt mit Hilfe der Gleichungen (3.20) und (3.21) aus Satz 3.63, wobei in jedem Kurvenpunkt die Integration über alle Normalenvektoren durchgeführt wird (vergleiche hierzu auch Lemma 2.8; beachte: Auf \mathcal{N}_M gilt $\varphi_{d-2} \equiv 1$). \odot

3.71 Korollar. *Ist die Dimension des umgebenden euklidischen Raumes \mathbb{E}_d höchstens vier, d.h. gilt $d \in \{2, 3, 4\}$, so lässt sich das Ergebnis von Satz 3.70 vereinfachen zu*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f^k d\xi &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-2})}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (1 - (-1)^{k-j}) \int_M \tilde{f}_j dO \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-2} 2^{k-j} \binom{k}{j} (1 + (-1)^{k-j}) \left(\int_{\bar{M}^+} \bar{f}^j |\varphi_{d-2}| dO - \int_{\bar{M}^-} \bar{f}^j |\varphi_{d-2}| dO \right). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt mit Hilfe von Korollar 3.20 unmittelbar aus Satz 3.70. \odot

3.72 Bemerkung. Falls $d \geq 5$ ist, so lässt sich das Ergebnis aus Satz 3.70 nicht so schön vereinfachen wie in Korollar 3.71. Da φ_{d-2} nach Lemma 3.21 nur von der Orthogonalprojektion des Normalenvektors auf die von den beiden Hauptnormalenvektoren der Kurve (in den beiden Berührungspunkten der zugehörigen tangentialen Hyperebene) aufgespannten Ebene abhängt, wären jedoch auch für $d \geq 5$ „Vereinfachungen“ möglich.

3.73 Korollar. *Wird in Satz 3.70 speziell $k = 1$ oder $k = 2$ betrachtet, so ergibt sich*

$$\int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f d\xi = \text{vol}(\mathbb{S}_{d-2}) \int_M dO$$

sowie

$$\int_{\mathcal{E}_{d-1,d}} f^2 d\xi = 2 \text{vol}(\mathbb{S}_{d-2}) \int_M \tilde{f} dO + 4 \int_{\bar{N}^+} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - 4 \int_{\bar{N}^-} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Insbesondere für $d = 2$, d.h. für Kurven in der euklidischen Ebene \mathbb{E}_2 , gilt

$$\int_{\mathcal{E}_{1,2}} f^2 d\xi = 4 \int_M \tilde{f} dO + 8 \int_{\bar{M}^+} dO - 8 \int_{\bar{M}^-} dO.$$

4 Sphären im euklidischen Raum

Nachdem im vorigen Kapitel 3 das kinematische Maß einer „geeigneten“ Menge von Hyperebenen im Euklidischen bestimmt worden sind, erfolgt jetzt in Unterkapitel 4.1 die Bestimmung des kinematischen Maßes einer „geeigneten“ Menge von Sphären. Anschließend wird in Unterkapitel 4.2 gezeigt, dass (bei geeigneter Normierung) die Formel bei den Sphären bei gegen unendlich strebenden Sphärenradius in die Formel bei den Hyperebenen übergeht, wenn die entsprechende Schnittsituation vorliegt.

4.1 Sphären

In diesem Unterkapitel wird nun das kinematische Maß einer „geeigneten“ Menge von Sphären bestimmt – „geeignet“ bedeutet wie zuvor bei den Hyperebenen in Kapitel 3, dass sich die Menge als Vereinigung von Zusammenhangskomponenten des Raumes aller Sphären ohne die an die gegebene Fläche tangentialen Sphären darstellen lässt. Im Gegensatz zur Situation bei den Hyperebenen ist es diesmal nicht nötig, zuerst Hyperflächen separat zu betrachten, immersierte Mannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension können gleich direkt behandelt werden.

Zunächst werden wie bei den Hyperebenen die von mehrfach tangentialen Sphären eingehüllten Flächen sowie von den Berührungspunkten dieser Sphären gebildeten Flächen untersucht.

4.1.1 Berührflächen

In diesem Abschnitt werden die von den Berührungspunkten mehrfach tangentialer Sphären gebildeten Teilflächen des Normalenbündels untersucht. Als Hilfsmittel dienen die im Kapitel 2.1 behandelten Parallellflächen. Insbesondere ergeben sich hinreichende Kriterien für die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze in den Abschnitten 4.1.3 sowie 4.2.1.

4.1 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei (für $m \in \{0, \dots, d-1\}$) M_m stets eine m -dimensionale in \mathbb{E}_d immersierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $d \geq 2$ und $l \geq 3$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$ sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$. Weiterhin sei $r > 0$ fest gewählt.

Schließlich sei $\hat{\zeta} \in \mathcal{S}_{d,r}$ eine Sphäre mit Radius r , die in den k (verschiedenen) Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ tangential an M sei (für $k \in \{1, \dots, d\}$). Es sei $N^{(j)} \in \mathbb{S}_{d-1}$ derjenige Normalenvektor von M in $p^{(j)}$, für den $p^{(j)} - r \cdot N^{(j)}$ der Mittelpunkt der Sphäre $\hat{\zeta}$ ist, es gilt also $\hat{\zeta} = \zeta_r(p^{(j)} - r \cdot N^{(j)})$ (für $j \in \{1, \dots, k\}$).

4.2 Lemma. *Es sei $-\frac{1}{r}$ in keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ eine Hauptkrümmung (für $j \in \{1, \dots, k\}$). Ferner seien die Vektoren $N^{(1)}, \dots, N^{(k)}$ linear unabhängig.*

Dann gibt es (für $j \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$, so dass $\mathcal{B}^{(j)}$ eine $(d-k)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}^{(j)}$ definiert durch

$$\mathcal{B}^{(j)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}^{(j)} \mid \forall i \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(i)} \text{ mit } \zeta_r(p - r \cdot N) = \zeta_r(p' - r \cdot N')\}.$$

Beweis. Für $j \in \{1, \dots, k\}$ lässt sich um $(p^{(j)}, N^{(j)})$ eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ finden, so dass in der ganzen Umgebung $-\frac{1}{r}$ keine Hauptkrümmung ist. Da $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$ eine reguläre Hyperfläche mit Normalenvektor $N^{(j)}$ im Punkt $p^{(j)} - r \cdot N^{(j)}$ ist (vgl. Lemma 2.10), die beiden Normalenvektoren jedoch linear unabhängig sind, schneiden sich die beiden Hyperflächen $M_{\mathcal{N}^{(1)}, r}$ und $M_{\mathcal{N}^{(2)}, r}$ im Punkt $p^{(j)} - r \cdot N^{(j)}$ transversal. Der Schnitt ist also (lokal) eine $(d-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$ (oBdA sei $\mathcal{N}^{(j)}$ so klein gewählt, dass dies für den gesamten Schnitt gilt). Dies überträgt sich mit dem Diffeomorphismus $(p, N) \mapsto p - r \cdot N$ auf die Fläche $\mathcal{B}^{(j)}$. \odot

4.3 Lemma. *Es sei $-\frac{1}{r}$ in keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ eine Hauptkrümmung (für $j \in \{2, \dots, k\}$), jetzt jedoch sei genau eine der Hauptkrümmungen in $(p^{(1)}, N^{(1)})$ gleich $-\frac{1}{r}$, oBdA gelte $\kappa_1(p^{(1)}, N^{(1)}) = -\frac{1}{r}$. Ferner sei $(p^{(1)}, N^{(1)})$ ein regulärer Punkt der Abbildung $\kappa_1: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$; setze $\mathcal{N}_{(r)} := \kappa_1^{-1}(\{-\frac{1}{r}\})$.*

Weiterhin gebe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, für das die Parallelfläche M_ε in $p^{(1)} - \varepsilon \cdot N^{(1)}$ regulär ist, und die Hauptkrümmungsrichtungen zur Hauptkrümmung $-\frac{1}{r}$ transversal zu $\pi_{M_\varepsilon}(\mathcal{N}_{(r)})$ im Punkt $p^{(1)} - \varepsilon \cdot N^{(1)}$ sind (beachte: Existiert so ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, so gelten diese Eigenschaften nach Lemma 2.10 für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ bis auf endlich viele; die Hauptkrümmung $-\frac{1}{r}$ werde bezüglich $(p^{(1)}, N^{(1)})$ bestimmt). Insbesondere ist $-\frac{1}{r}$ keine mehrfache Hauptkrümmung in $(p^{(1)}, N^{(1)})$, und es gibt eine (bis auf die Wahl der Orientierung) eindeutige Hauptkrümmungsrichtung $V \in \mathbb{S}_{d-1}$. Schließlich seien die Vektoren $N^{(1)}, \dots, N^{(k)}$ und V linear unabhängig.

Dann gibt es (für $j \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$, so dass $\mathcal{B}^{(j)}$ eine $(d-k-1)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Hierbei sei $\mathcal{B}^{(j)}$ gegeben durch (es werde $\mathcal{N}_{(r)}^{(1)} := \mathcal{N}^{(1)} \cap \mathcal{N}_{(r)}$ und $\mathcal{N}_{(r)}^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)}$ für $j \neq 1$ gesetzt)

$$\mathcal{B}^{(j)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_{(r)}^{(j)} \mid \forall i \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(i)} \text{ mit } \zeta_r(p - r \cdot N) = \zeta_r(p' - r \cdot N')\}.$$

Beweis. Da $(p^{(1)}, N^{(1)})$ ein regulärer Punkt der Abbildung $\kappa_k: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, ist $\mathcal{N}_{(r)}$ in einer Umgebung $\mathcal{N}^{(1)}$ von $(p^{(1)}, N^{(1)})$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]). oBdA sei $\mathcal{N}^{(1)}$ so klein gewählt, dass keine weitere Hauptkrümmung gleich $-\frac{1}{r}$ ist. Für $j \in \{2, \dots, k\}$ sei $\mathcal{N}^{(j)}$ eine Umgebung von $(p^{(j)}, N^{(j)})$ in \mathcal{N}_M , in der keine Hauptkrümmung gleich $-\frac{1}{r}$ ist. Da $M_{\mathcal{B}^{(j)} \cap \mathcal{N}^{(1)}, r}$ um $p^{(1)} - r \cdot N^{(1)}$ eine $(d-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit V und $N^{(1)}$ als Basis des Normalenraums ist (dies folgt aus dem Beweis von Korollar 2.28), folgt die Aussage dann genauso wie im Beweis von Lemma 4.2. \odot

4.1.2 Hüllflächen

Nach der Untersuchung der Berührungspunkte von mehrfach tangentialen Sphären im vorausgegangenen Abschnitt 4.1.1, werden nun die von diesen Sphären eingehüllten Flächen (bzw. ihre Normaleneinheitsbündel) betrachtet. Diese Flächen treten in den Formeln der nachfolgenden Sätze in den Abschnitten 4.1.3 sowie 7.2.1 auf.

In diesem Abschnitt seien die gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 4.1.1 erfüllt (vgl. Voraussetzung 4.1).

4.4 Konstruktion. Für $j \in \{1, \dots, k\}$ sei $-\frac{1}{r}$ in keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ eine Hauptkrümmung. Ferner seien die Vektoren $N^{(1)}, \dots, N^{(k)}$ linear unabhängig.

Dann ist die von den Mehrfachtangentialhyperebenen mit k Berührungspunkten an M lokal um $p^{(1)}$ eingehüllte Fläche \check{M} gegeben durch (vergleiche Lemma 4.2 für die Definition von $\mathcal{B}^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$)

$$\check{M} := \{p^{(1)} - r \cdot N^{(1)} + r \cdot \check{N}(\lambda, N^{(1)}, \dots, N^{(k)}) \mid \lambda \in \mathbb{S}_{k-1} \text{ und } (p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ für } j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } \zeta_r(p^{(1)} - r \cdot N^{(1)}) = \zeta_r(p^{(j)} - r \cdot N^{(j)})\}.$$

Die Punkte $p^{(1)} - r \cdot N^{(1)}$ bilden die Mittelpunkte der k -fach berührenden Sphären, der Vektor \check{N} sei (für die jeweiligen Werte von λ und $N^{(1)}, \dots, N^{(k)}$ aus der Definition der Fläche \check{M}) definiert durch

$$\check{N}(\lambda, N^{(1)}, \dots, N^{(k)}) := \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot f^{(j)},$$

er ist also ein Normalenvektor im entsprechenden Punkt von \check{M} (hierbei sei $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ eine aus den Normalenvektoren $N^{(1)}, \dots, N^{(k)}$ – beispielsweise mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren – gewonnene Orthonormalbasis).

4.5 Lemma. *Es seien sowohl in $(p^{(1)}, N^{(1)})$ als auch in $(p^{(2)}, N^{(2)})$ sämtliche Hauptkrümmungen von $-\frac{1}{r}$ verschieden, die Normalenvektoren $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ seien linear unabhängig. Die Fläche \check{M} sei wie in Konstruktion 4.4 definiert.*

Dann ist das Normalenbündel $\mathcal{N}_{\check{M}}$ der Fläche \check{M} eine $(d-1)$ -dimensionale in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_d$ immensierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Es sei $(x^{(1)}, n^{(1)}): U \rightarrow \mathcal{B}^{(1)}$ eine Parametrisierung einer Umgebung des Punktes $(p^{(1)}, N^{(1)})$ in $\mathcal{B}^{(1)}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-k}$), und $(x^{(j)}, n^{(j)}): U \rightarrow \mathcal{B}^{(j)}$ die entsprechende Parametrisierung der zugehörigen Punkte von $\mathcal{B}^{(j)}$ (für $j \in \{2, \dots, k\}$; vergleiche auch Lemma 4.2). Für eine Parametrisierung $\lambda: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{S}_k$ einer offenen Teilmenge von \mathbb{S}_k (für eine geeignete offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$) sei $\check{n}: \tilde{U} \times U \rightarrow \mathbb{S}_d$ die Parametrisierung der zugehörigen Normalenvektoren (vgl. Konstruktion 4.4). Das Normalenbündel $\mathcal{N}_{\check{M}}$ lässt sich dann lokal parametrisieren via

$$z: \tilde{U} \times U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_d, (\tilde{u}, u) \mapsto \begin{pmatrix} x^{(1)}(u) - r \cdot n^{(1)}(u) + r \cdot \check{n}(\lambda(\tilde{u}), u) \\ \check{n}(\lambda(\tilde{u}), u) \end{pmatrix}.$$

Es seien nun $(\tilde{u}, u) \in \tilde{U} \times U$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, d-1\}$ gegeben mit

$$\sum_{i=1}^{d-k} \mu_i \cdot \frac{\partial z}{\partial u_i} \Big|_{(\tilde{u}, u)} + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_{i+d-k} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tilde{u}_i} \Big|_{(\tilde{u}, u)} = 0.$$

Insbesondere gilt also $\sum_{i=1}^{d-k} \mu_i \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} (x^{(1)} - r \cdot n^{(1)}) = 0$ in (\tilde{u}, u) . Aufgrund der Voraussetzungen an die Hauptkrümmungen in den Berührungspunkten, sind die partiellen Ableitungen von $x^{(1)} - r \cdot n^{(1)}$ jedoch linear unabhängig, die Koeffizienten μ_1, \dots, μ_{d-k} daher gleich Null. Da die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}_{k-1}}$ sicherlich linear unabhängig sind (vgl. Konstruktion 4.4), folgt, dass die Koeffizienten $\mu_{d-k-1}, \dots, \mu_{d-1}$ verschwinden. Somit sind die partiellen Ableitungen von z linear unabhängig. ☺

4.1.3 Die Aussagen

4.6 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 4.1.3 sei M_m stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immensierte unberandete \mathcal{C}^3 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$ sowie $d \geq 2$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$. Weiterhin sei $r > 0$ fest gewählt.

Es werde (für $k \in \mathbb{N}$) mit $\mathcal{B}_{r,k} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ bezeichnet, für die die tangentielle Sphäre $\zeta_r(p - r \cdot N)$ in genau k Punkten tangential an M ist. Weiterhin sei die Menge $\mathcal{B}_{(*),k} \subseteq \mathcal{B}_{r,k}$ eine geeignete Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-k-1\}$. Schließlich seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ gemeint):

- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$.
- Die offene Teilmenge $\tilde{\mathcal{N}}_M$ von \mathcal{N}_M habe endlich viele Zusammenhangskomponenten (vgl. Definition 2.20).
- Die singulären Punkte der Menge $\mathcal{B}_{r,2}$ seien Teilmenge einer endlichen Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von m -Rechtecken (mit $m \in \{0, \dots, d-3\}$). Vergleiche Abschnitt 4.1.1 für hinreichende Kriterien hierfür.
- Für $k \in \{3, \dots, d\}$ seien die singulären Punkte von $\mathcal{B}_{r,k}$ (als $(d-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit; insbesondere sei keine Sphäre in mehr als d Punkten tangential an M) in $\mathcal{B}_{(*),k}$ enthalten (vergleiche auch Abschnitt 4.1.1); $\mathcal{B}_{r,k} \setminus \mathcal{B}_{(*),k}$ besitze endlich viele Zusammenhangskomponenten.
- Die Berührungspunkte von Sphären, die in einem Punkt, in dem eine Hauptkrümmung gleich $-\frac{1}{r}$ ist, tangential an M sind oder die nicht affin unabhängig sind, seien in $\bigcup_{k=2}^d \mathcal{B}_{(*),k}$ enthalten.

Es werde mit $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{S}_{d,r}$ die Menge aller Sphären bezeichnet, die tangential an M sind. Dann sei eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}_{d,r}$ fest gewählt. Diese Menge von Sphären sei die

Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{S}_{d,r} \setminus \mathcal{T}_r$. Es sei $D \subseteq \mathbb{E}_d$ die Menge der Mittelpunkte der Sphären aus \mathcal{D} , d.h. es gilt

$$D = \{p \in \mathbb{E}_d \mid \zeta_r(p) \in \mathcal{D}\}.$$

Der Rand von D wird dann offensichtlich von einer Teilmenge der Parallellfläche M_r zu M im Abstand r gebildet. Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D})$ das bewegungsinvariante Maß der Menge \mathcal{D} , d.h. es gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\zeta \in \mathcal{D}} d\zeta = \int_D dV.$$

4.7 Definition. Es seien die offenen Mengen $\mathcal{N}_r^+ \subseteq \mathcal{N}_M$ sowie $\mathcal{N}_r^- \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch (setze zur Abkürzung $\mathcal{N}' := \mathcal{N}_M \setminus \bigcup_{k=3}^d \mathcal{B}_{r,k}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r^+ &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \exists \varepsilon \in]0, r[\forall \delta \in]0, \varepsilon[: \zeta_r(p - (r - \sigma_r(p, N) \delta) \cdot N) \in \mathcal{D}\}, \\ \mathcal{N}_r^- &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \exists \varepsilon \in]0, r[\forall \delta \in]0, \varepsilon[: \zeta_r(p - (r + \sigma_r(p, N) \delta) \cdot N) \in \mathcal{D}\} \end{aligned}$$

(für die Definition der Abbildung σ_r vergleiche Definition 2.32). Weiterhin sei \mathcal{B}_r^+ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_r^+ und \mathcal{B}_r^- die Menge der nicht-singulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_r^- .

4.8 Konstruktion. Es sei die Hyperfläche \hat{M}_r definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) von $\pi_M(\mathcal{N}_r^+)$, $\pi_M(\mathcal{N}_r^-)$, $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^+, r}$ sowie $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^-, r}$ (für letztere beiden Flächen vergleiche Definition 2.26). In denjenigen Punkten von \hat{M}_r , in deren Umgebung \hat{M}_r eine reguläre Hyperfläche ist (vgl. Lemma 2.27), sei das folgende Normaleneinheitsvektorfeld $\hat{N}: \hat{M}_r \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert: In den regulären Punkten von $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^-, r}$ stimme \hat{N} mit dem in Konstruktion 2.29 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} überein, in den regulären Punkten von $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^+, r}$ sei \hat{N} genau das zu dem in Konstruktion 2.29 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} entgegengesetzt orientierte Normalenvektorfeld. Ist $(p', N') \in \mathcal{N}_r^+ \cap \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, so sei der Normalenvektor in $p' = \pi_M(p', N')$ gegeben durch $\hat{N}(p') := -N'$, ist dagegen $(p', N') \in \mathcal{N}_r^- \cap \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, so gelte $\hat{N}(p') := +N'$.

4.9 Konstruktion. Analog zu Konstruktion 3.24 für Hyperebenen sei die Menge \mathcal{Z}_2 konstruiert als die Menge aller Paare (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten) via gemeinsamer Doppeltangentialsphären zusammengehörender Zusammenhangskomponenten der nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_r^+ und \mathcal{N}_r^- . Nach Wahl der Voraussetzungen (vgl. Voraussetzung 4.6) ist \mathcal{Z}_2 eine endliche Menge.

Sei nun $Z \in \mathcal{Z}_2$. Die beiden zu Z gehörigen Zusammenhangskomponenten seien $\mathcal{B}^{(1)}$ sowie $\mathcal{B}^{(2)}$. Es sei \dot{M}_Z die zugehörige Fläche der Mittelpunkte der Sphären, die M entlang von $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)} \cup \mathcal{B}^{(2)})$ berühren. Das Normalenbündel $\mathcal{N}_{\dot{M}_Z}$ lässt sich dann in zwei Mengen $\mathcal{N}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{N}_Z^{(2)}$ mit disjunktem Inneren aufteilen, so dass der gemeinsame Rand der Parallellflächen $\dot{M}_{\mathcal{N}_Z^{(1)}, r}$ und $\dot{M}_{\mathcal{N}_Z^{(2)}, r}$ von $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)} \cup \mathcal{B}^{(2)})$ gebildet wird. Wegen der (im folgenden Satz 4.13 bewiesenen) Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der

Fläche \hat{M}_r , stimmt bei genau einer der beiden Flächen $S_{\mathcal{N}_Z^{(1)},r}$ und $S_{\mathcal{N}_Z^{(2)},r}$ (vgl. Konstruktion 2.33) die Orientierung der Normalenvektoren mit derjenigen der Normalenvektoren auf der Fläche \hat{M}_r (auf den gemeinsamen Teilflächen) überein. Durch Vertauschung der Nummerierung lässt sich oBdA immer erreichen, dass dies bei $S_{\mathcal{N}_Z^{(1)},r}$ der Fall ist.

Dann sei die (im allgemeinen nicht singularitätenfreie) Hyperfläche $\check{M}_{2,r}$ definiert als die Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten; die Vereinigung werde über alle $Z \in \mathcal{Z}_2$ durchgeführt) der Parallelfäche an \dot{M}_Z bezüglich $\mathcal{N}_Z^{(1)}$ im Abstand r , die Fläche $\check{M}_{2,r}$ ist also eine Teilfläche der von den Doppeltangentialsphären eingehüllten Fläche. Schließlich sei noch \check{M}_2 die Vereinigungsfläche der \dot{M}_Z sowie $S_{2,r}$ die Vereinigungsfläche der $S_{\mathcal{N}_Z^{(1)},r}$ (jeweils wieder unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten; die Vereinigung werde über alle $Z \in \mathcal{Z}_2$ durchgeführt). Schließlich sei auf der Hüllfläche $\check{M}_{2,r}$ dasjenige Normaleneinheitsvektorfeld gegeben, das zu demjenigen entgegengesetzt orientiert ist, das sich durch Einschränkung desjenigen von $S_{2,r}$ ergibt.

4.10 Konstruktion. Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei \dot{M}_k die $(d-k)$ -dimensionale Fläche derjenigen Punkte, die Mittelpunkte von Sphären sind, die die Fläche M in genau k nicht zur Menge $\mathcal{B}_{(*),k}$ zugehörigen Punkten berühren, und die im Abschluss von \dot{M}_2 liegen (vgl. Konstruktion 4.9). Es sei dann \mathcal{Z}_k die Menge der Zusammenhangskomponenten von \dot{M}_k (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten, die von \dot{M}_2 übernommen werden). Nach Wahl der Voraussetzungen (vgl. Voraussetzung 4.6) handelt es sich bei \mathcal{Z}_k um eine endliche Menge. Im folgenden werde nun die Fläche $\check{M}_{k,r}$ ausgehend von der Fläche $\check{M}_{k-1,r}$ definiert (beachte: Die Fläche $\check{M}_{2,r}$ wurde bereits in Konstruktion 4.9 definiert).

Sei nun $k \in \{3, \dots, d\}$, $Z \in \mathcal{Z}_k$ sowie \dot{M}_Z die zugehörige Zusammenhangskomponente von \dot{M}_k . Der Rand der Fläche $\check{M}_{k-1,r}$ teilt die Parallelfäche zu \dot{M}_Z im Abstand r in zwei disjunkte Teilflächen (beachte, dass hierbei durchaus Selbstdurchdringungen auftreten können, das Innere dieser beiden Teilflächen ist daher im allgemeinen nicht zusammenhängend), die zugehörigen Teilflächen des Normalenbündels von \dot{M}_Z seien mit $\mathcal{N}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{N}_Z^{(2)}$ bezeichnet. Da die Windungszahl bezüglich der Vereinigungsfläche der Hyperflächen $S_{2,r}, \dots, S_{k-1,r}$ sowie \dot{M}_r wohldefiniert ist (vgl. Satz 4.13), stimmt auf den gemeinsamen Teilflächen das Normaleneinheitsbündel von $S_{k-1,r}$ mit demjenigen von genau einer der zwei nach Konstruktion 2.33 definierten Flächen $S_{\mathcal{N}_Z^{(1)},r}$ sowie $S_{\mathcal{N}_Z^{(2)},r}$ überein. Durch Vertauschung der Nummerierung lässt sich oBdA immer erreichen, dass dies bei $S_{\mathcal{N}_Z^{(2)},r}$ der Fall ist (beachte den Unterschied zu Konstruktion 4.9).

Dann sei die (im allgemeinen nicht singularitätenfreie) Hyperfläche $\check{M}_{k,r}$ definiert als die Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten; über alle $Z \in \mathcal{Z}_k$) der Parallelfäche an \dot{M}_Z bezüglich $\mathcal{N}_Z^{(1)}$ im Abstand r , die Fläche $\check{M}_{k,r}$ ist also eine Teilfläche der von denjenigen Sphären, die in genau k Punkten tangential an M sind, eingehüllten Fläche. Es sei $S_{k,r}$ die Vereinigungsfläche der $S_{\mathcal{N}_Z^{(1)},r}$ (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten; die Vereinigung werde über alle $Z \in \mathcal{Z}_2$ durchgeführt). Auf $\check{M}_{k,r}$ sei dasjenige Normaleneinheitsvektorfeld gegeben, das entgegengesetzt orientiert ist zu demjenigen, das sich durch Einschränkung desjenigen von $S_{k,r}$ ergibt.

Schließlich sei \check{M}_r die Vereinigungsfläche von $\check{M}_{2,r}, \dots, \check{M}_{d,r}$.

4.11 Bemerkung. Unter Inkaufnahme der Aufteilung von \check{M}_r in Teilflächen \check{M}_r^+ und \check{M}_r^- (mit dann unterschiedlichem Vorzeichen in den zugehörigen Termen in Satz 4.14) kann in Konstruktion 4.9 (und dann in konsistenter Weise fortgesetzt in Konstruktion 4.10) auch diejenige Fläche gewählt werden, bei der das Normaleneinheitsvektorfeld genau entgegengesetzt orientiert ist. Insbesondere für $d = 2$ lässt sich so erreichen, dass jeweils nur der kürzere Kreisbogen berücksichtigt werden muss (sofern die beiden Berührungspunkte nicht gerade antipodal bezüglich der Doppelberührsphäre zueinander liegen).

4.12 Konstruktion. Es sei die Hyperfläche \hat{M}_r definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) von $\pi_M(\mathcal{N}_r^+)$, $\pi_M(\mathcal{N}_r^-)$ sowie \check{M}_r (vergleiche Definition 4.7 bzw. Konstruktion 4.10). Auf \hat{M}_r sei das folgende Normaleneinheitsvektorfeld definiert: In den regulären Punkten von \hat{M}_r , die in $\pi_M(\mathcal{N}_r^+)$ bzw. $\pi_M(\mathcal{N}_r^-)$ liegen, stimme es mit demjenigen der Fläche \hat{M}_r auf denselben Teilflächen überein (vgl. Konstruktion 4.8), in den regulären Punkten, die in \check{M}_r liegen, stimme es mit demjenigen aus der Definition dieser Fläche überein. Insbesondere folgt aus der Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche \hat{M}_r (vgl. Satz 4.13) direkt aus der Konstruktion (vgl. Konstruktion 4.10) die Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche \hat{M}_r .

4.13 Satz. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) + \int_{\mathbb{E}_d} w_{\hat{M}_r} dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \hat{M}_r wohldefiniert.

4.14 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) = & \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\check{M}_r} \sigma_r \varphi_j dO \right) \right) \\ & + \int_{\mathbb{E}_d} w_{\hat{M}_r} dV. \end{aligned}$$

4.1.4 Beweis der Aussagen

Die Beweise der Aussagen des vorherigen Abschnitts 4.1.3 sind nach den umfangreichen Vorbereitungen in Kapitel 2 erfreulich kurz:

4.15 Lemma. *Die Aussage von Satz 4.13 ist korrekt.*

Beweis. Es sei B die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes von D . Aufgrund der Voraussetzungen gilt also (es sei $\chi_D: \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der Menge D , d.h. es gilt $\chi_D(p) = 1$ für $p \in D$ und $\chi_D(p) = 0$ für $p \notin D$)

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_D dV = \int_{\mathbb{E}_d} \chi_D dV = \int_{\mathbb{E}_d} w_B dV$$

(dabei sei w_B die Windungszahl bezüglich der Hyperfläche B mit dem bezüglich der Menge D nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektorfeld; offensichtlich ist w_B für alle Punkte, die nicht auf dem Rand von D liegen, wohldefiniert; letztere bilden jedoch aufgrund der Voraussetzungen eine Menge vom Maß Null). Mit Hilfe von Satz 2.40 (angewandt sowohl auf die Menge \mathcal{N}_r^+ als auch auf \mathcal{N}_r^-) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{E}_d} (w_B - w_{S_{\mathcal{N}_r^+, r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^-, r}}) dV + \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Es muss also nur $w_B - w_{S_{\mathcal{N}_r^+, r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^-, r}} = w_{\hat{M}_r}$ für fast alle Punkte von \mathbb{E}_d gezeigt werden. Dies ist jedoch nach Definition der Flächen B , $S_{\mathcal{N}_r^+, r}$ sowie $S_{\mathcal{N}_r^-, r}$ klar (vergleiche Konstruktion 2.33; beachte: Die Orientierungen von B , $S_{\mathcal{N}_r^+, r}$ und $S_{\mathcal{N}_r^-, r}$ sind gerade so gewählt, dass sie auf der Parallellfläche M_r unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Windungszahlterme genau entgegengesetzt orientiert sind, sich bei der Bestimmung der Windungszahl also gerade gegenseitig auslöschen). Insbesondere folgt aus der Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Flächen B , $S_{\mathcal{N}_r^+, r}$ und $S_{\mathcal{N}_r^-, r}$ die Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche \hat{M}_r (vgl. Lemma 2.39). \odot

4.16 Korollar. Die Aussage von Satz 4.14 ist korrekt.

Beweis. Durch rekursives Einsetzen ergibt sich direkt aus der Definition, dass die Windungszahlen bezüglich der entsprechenden Flächen für fast alle $p \in \mathbb{E}_d$ die Identität

$$w_{\hat{M}_r}(p) = w_{\hat{M}_r}(p) + \sum_{k=2}^d w_{S_{k,r}}(p)$$

erfüllen (vergleiche Konstruktion 4.8, Konstruktion 4.9, Konstruktion 4.10 sowie Konstruktion 4.12). Die Aussage ergibt sich dann aus Satz 4.13 mit Hilfe von Satz 2.40 und Lemma 2.8 (beachte den Wechsel der Bezugsfläche; vergleiche auch Lemma 2.30). \odot

4.2 Grenzverhalten bei wachsendem Radius

Ziel dieses Unterkapitels ist es, den Grenzübergang bei gegen unendlich strebendem Sphärenradius – mit geeigneter Normierung – der Ergebnisse für die Sphären durchzuführen. Es ergibt sich dann eine bereits aus dem vorangegangenen Kapitel bekannte Formel bezüglich des Schnittverhaltens von Hyperebenen. Das Interesse liegt hierbei vor allem darin, den Übergang der einzelnen Terme der Formeln für die Sphären in diejenigen bei den Hyperebenen darzustellen, da auf dieselbe Art und Weise in Kapitel 6 Formeln gewonnen werden, für die kein direkter Beweis zur Verfügung steht.

Nach der Formulierung der Voraussetzungen und Ergebnisse in Abschnitt 4.2.1 erfolgt in Abschnitt 4.2.2 eine ausführliche – mit Bildern versehene – Erläuterung der hinter dem Beweis stehenden Idee anhand eines Beispiels in der zweidimensionalen euklidischen Ebene. Die restlichen Abschnitte sind der Bestimmung des Grenzwertes selbst gewidmet.

4.2.1 Formulierung der Aussage

4.17 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 4.2 sei M_m stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte unberandete \mathcal{C}^3 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$ sowie $d \geq 2$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$.

Weiterhin seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (dabei sei $\mathcal{N}_{(*)} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$; mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ gemeint):

- Es seien die Anforderungen an M bzw. \mathcal{N}_M in der Aufzählung der Eigenschaften von Voraussetzung 3.40 erfüllt.
- Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei die Menge der Punkte von \mathcal{N}_M , deren zugehörige tangentielle Hyperebene M in genau k Punkten berührt, eine $(d-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche hierzu auch Lemma 3.8). Die Teilmenge dieser Punkte, bei denen zusätzlich in einem der Berührungspunkte die Lipschitz-Killing-Krümmung φ_{d-1} verschwindet oder die nicht affin unabhängig sind, sei geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von l -Rechtecken (mit $l \in \{0, \dots, d-1-k\}$).
- Das Supremum der Menge derjenigen Radien, für die M bzw. \mathcal{N}_M die Anforderungen in Voraussetzung 4.6 erfüllt, sei unendlich.

Schließlich seien die Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ sowie für $r > 0$ die Mengen $\mathcal{D}_r \subseteq \mathcal{S}_{d,r}$ so wie in Voraussetzung 3.40 bzw. Voraussetzung 4.6 fest gewählt, dass für alle $(p, N) \in \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ mit $\xi(p, N) \notin \mathcal{T}$ die Aussage

$$\exists r_0 > 0 \forall r > r_0: \zeta_r(p - r \cdot N) \in \mathcal{D}_r \iff \xi(p, N) \in \mathcal{D} \quad (4.1)$$

erfüllt ist.

4.18 Bemerkung. Die sich durch Gleichung (4.1) ergebende Bedingung ist trivialerweise erfüllt, wenn der Definition von \mathcal{D} bzw. \mathcal{D}_r eine geometrische Motivation zugrunde liegt, zum Beispiel, wenn für \mathcal{D} und \mathcal{D}_r diejenigen Hyperebenen bzw. Sphären (mit Radius $r > 0$) gewählt werden, die M in einer festen Anzahl von Schnittkomponenten schneiden.

4.19 Satz. *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2r^{d-1}} \mu(\mathcal{D}_r) \right) = \mu(\mathcal{D}).$$

(für explizite Formeln für $\mu(\mathcal{D})$ vergleiche Satz 3.46, bei $\mu(\mathcal{D}_r)$ vergleiche Satz 4.13 bzw. Satz 4.14).

4.2.2 Erläuterung der Beweisidee

Dass der Grenzwert (für $r \rightarrow \infty$) von $\mu(\mathcal{D}_r)$ (geeignet normiert) stets bis auf eine Konstante in $[0, \infty]$ mit dem bewegungsinvarianten Maß $\mu(\mathcal{D})$ übereinstimmt, ist klar. Diese Konstante kann dann für konkrete Wahl von \mathcal{D}_r bzw. \mathcal{D} anhand einer konkreten Fläche M bestimmt werden (vergleiche die Bestimmung der entsprechenden Konstanten in den Räumen echt positiver Krümmung in Lemma 6.57).

Hier soll das Hauptaugenmerk vor allem auf das Verhalten der einzelnen Terme von $\mu(\mathcal{D}_r)$ (vgl. Satz 4.13) beim Grenzübergang für $r \rightarrow \infty$ gerichtet sein, und wie sie in die Terme von $\mu(\mathcal{D})$ übergehen. Dies ist vor allem deshalb von Interesse, da auf genau demselben Weg in den Räumen konstanter positiver Krümmung aus der Formel für die Sphären eine Formel für die Hyperebenen gewonnen werden wird (vgl. Kapitel 6.3), für die in dieser Arbeit (im Gegensatz zur Situation im Euklidischen) kein direkter Beweis geliefert werden kann.

Im folgenden sollen die wichtigsten Schritte der Grenzwertberechnung für $r \rightarrow \infty$ anhand eines Beispiels in der zweidimensionalen euklidischen Ebene erläutert werden:

4.20 Beweisidee. Beim Bestimmen des Grenzübergangs (für $r \rightarrow \infty$) sind vor allem die Mehrfachberührhyperebenen sowie eine Umgebung der zugehörigen Berührungspunkte auf M von Interesse. Daher soll nun speziell die Umgebung einer Doppelberührhyperebene betrachtet werden (vgl. Abbildung 4.1). In diesem Beispiel seien in der Menge \mathcal{D} speziell diejenigen Hyperebenen enthalten, die M in der „Nähe“ beider Berührungspunkte schneiden, ebenso sei \mathcal{D}_r die Menge derjenigen Sphären vom Radius $r > 0$, für die dies der Fall ist.

In Abbildung 4.1 ist die in der Formulierung der Formel für $\mu(\mathcal{D})$ (vgl. Satz 4.13) auftretende Fläche \hat{M}_r (vgl. Konstruktion 4.8) schwarz hervorgehoben, das in den regulären Punkten dieser Fläche definierte Normaleneinheitsvektorfeld ist grün angedeutet.

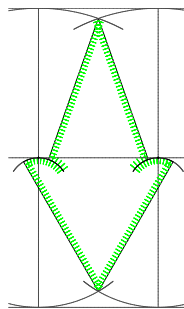


Abbildung 4.1: Die Ausgangsfläche \hat{M}_r

Ersichtlich ist, dass in den Bereichen der Mannigfaltigkeit M , die bereits „genügend weit“ von den Kontaktpunkten der Mehrfachberührhyperebenen entfernt sind, die Normalenvektoren zu $\mathcal{N}_r^+ \cup \mathcal{N}_r^-$ gehören, wenn dies für den jeweils entgegengesetzt orientierten Normalenvektor ebenfalls gilt. Bei gerader Dimension d sind die zugehörigen Normalenvektoren an \hat{M}_r dann entgegengesetzt orientiert, bei ungerader Dimension d besitzen sie die gleiche Orientierung. Allgemein wird dies in Lemma 4.23 (für d gerade) bzw. Lemma 4.27 (für d ungerade) gezeigt werden.

Da die Berechnung des Grenzwertes der bei der Mannigfaltigkeit M selbst auftretenden Terme einfacher ist, wenn das Integrationsgebiet unabhängig von r ist, wird im nächsten Schritt zu \hat{M}_r eine Fläche hinzugefügt (deren Normaleneinheitsvektorfeld ist im linken Teilbild von Abbildung 4.2 rot angedeutet), so dass sich die Fläche \bar{M}_r ergibt

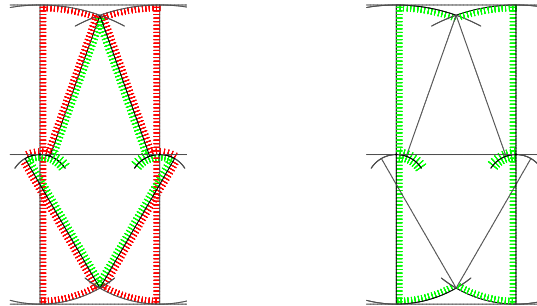


Abbildung 4.2: Der Weg zur Zwischenfläche \bar{M}_r sowie diese selbst

(vergleiche das rechte Teilbild von Abbildung 4.2; das Normaleneinheitsvektorfeld dieser Fläche ist wieder grün angedeutet). Die Teilflächen von \bar{M}_r auf der Mannigfaltigkeit M sind nun unabhängig von r . Da die Normalen auf diesen Teilflächen für gerade d gerade entgegengesetzt orientiert sind, haben diese Teilflächen bei der Bestimmung der Windungszahl bezüglich \bar{M}_r keinen Einfluss (im Gegensatz zur Situation, wenn d ungerade ist; zur Verdeutlichung sind sie im rechten Teilbild von Abbildung 4.2 dennoch eingetragen, auch wenn sie für gerade Dimension d in der späteren Definition von \bar{M}_r nicht mehr berücksichtigt werden). Allgemein wird der Übergang von \hat{M}_r (mit den hinzugefügten Flächen) zur Fläche \bar{M}_r in Lemma 4.41 (für d gerade) bzw. Lemma 4.43 (für d ungerade) durchgeführt werden.

Zur expliziten Berechnung des Grenzwertes wird es sich als nützlich erweisen, die Fläche \bar{M}_r in mehrere Teilflächen aufzuteilen (vergleiche die drei Teilbilder von Abbil-

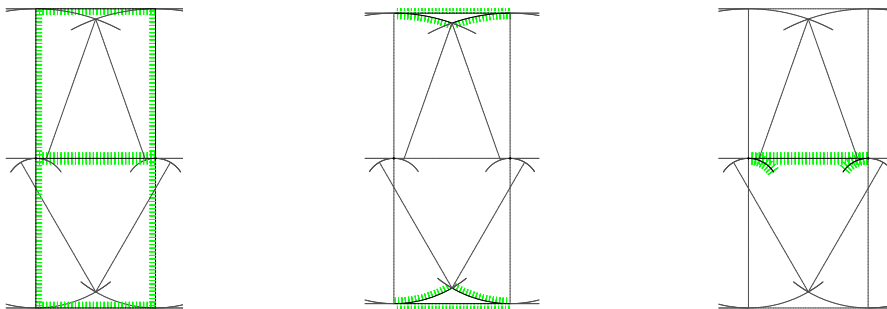


Abbildung 4.3: Die sich am Ende ergebenden Flächen S_r , \check{M}_r sowie (für d ungerade) $\overset{\circ}{M}$

(die entsprechenden Normaleneinheitsfelder sind wieder grün angedeutet). Dies geschieht allgemein in Lemma 4.52 (für d gerade) bzw. Lemma 4.54 (für d ungerade). Die dritte Fläche $\overset{\circ}{M}$ spielt nur in ungerader Dimension d eine Rolle (und ist daher in Abbildung 4.2 nur der Vollständigkeit halber aufgeführt) und ist unabhängig von r .

Der Grenzwert der auf der Mannigfaltigkeit anfallenden Terme wird dann in Lemma 4.55 bestimmt werden. Die Fläche S_r (vergleiche die linke Fläche in Abbildung 4.3) liefert die Terme, die sich über den Hüllflächen ergeben (vgl. Lemma 4.56), die Terme der Fläche \check{M}_r (vergleiche die mittlere Fläche in Abbildung 4.3) verschwinden im Grenzwert (vgl. Lemma 4.57). Dies gilt im Euklidischen auch für die Terme der Fläche \dot{M} (vergleiche die rechte Fläche in Abbildung 4.3), was in Lemma 4.58 gezeigt werden wird. In den Räumen konstanter positiver Krümmung ergibt sich bei letzteren Flächen jedoch ein gänzlich anderes Verhalten, so dass auch (zumindest für ungerades d) Windungszahlintegralterme in der Formel für Hyperebenen auftreten (vgl. Satz 6.30).

4.2.3 Verhalten der Terme auf der Mannigfaltigkeit selbst

Der erste den Beweis betreffende Abschnitt ist dem Verhalten der Terme auf der Fläche M selbst gewidmet, während sich die folgenden Abschnitte im wesentlichen den Hüllflächen zuwenden.

4.21 Lemma. *Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ gegeben, und $k \in \{0, \dots, d-1\}$ sei die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p, N) , die gleich Null sind.*

Dann existiert ein $r_0 > 0$, so dass $\sigma_r(p, N) = \text{sign}(\varphi_{d-1-k}(p, N))$ für alle $r > r_0$ erfüllt ist. Insbesondere gilt $\sigma_r(p, N) = \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N))$ für alle $r > r_0$, falls $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ ist.

Beweis. Da $\varphi_{d-1-k} \neq 0$ ist, existiert ein $r_0 > 0$, so dass jede nichtverschwindende Hauptkrümmung in (p, N) betragsmäßig größer als $\frac{1}{r_0}$ ist. Sei nun $r > r_0$. Nach Definition (vgl. Definition 4.7) ist $\sigma_r(p, N) = +1$ genau dann, wenn die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p, N) , die kleiner als $-\frac{1}{r}$ sind, gerade ist. Aufgrund der Wahl von r_0 ist dies jedoch genau dann der Fall, wenn die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p, N) , die negativ sind, gerade ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn das Produkt der nichtverschwindenden Hauptkrümmungen positiv ist. Letzteres ist jedoch genau dann der Fall, wenn $\text{sign}(\varphi_{d-1-k}(p, N)) = +1$ ist, da ja genau k Hauptkrümmungen in (p, N) gleich Null sind. \odot

4.22 Lemma. *Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ gilt, noch die Tangentialebene $\xi(p, N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $r_0 > 0$, so dass für alle $\delta \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$ und $r > r_0$ weder die Sphären $\zeta_r(p - (\delta + r) \cdot N)$ und $\zeta_r(p + (\delta + r) \cdot N)$ noch die Hyperebene $\xi(p + \delta \cdot N, N)$ tangential an M sind.*

Beweis. Zunächst einmal existiert $\varepsilon > 0$, so dass die zur Hyperebene $\xi(p, N)$ parallelen Hyperebenen, deren Abstand zu $\xi(p, N)$ höchstens ε ist, nicht tangential an M sind (außer $\xi(p, N)$ selbst natürlich).

Angenommen, es gebe für jeden Radius $r_0 > 0$ ein $r > r_0$, ein $s \in \{-1, 1\}$ und ein $\delta \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$, so dass die Sphäre $\zeta_r(p + s(\delta + r) \cdot N)$ tangential an M ist. Dann ließe sich also eine Folge $(\zeta_r^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ von solchen an M tangentialen Sphären mit gegen unendlich wachsenden Radien (für $i \rightarrow \infty$) konstruieren. Da \mathcal{N}_M kompakt ist, hätten die zugehörigen Berührungspunkte mit M einen Häufungspunkt (p', N') in \mathcal{N}_M , durch Übergang zu

einer Teilfolge kann oBdA davon ausgegangen werden, dass die Folge der Berührungspunkte gegen (p', N') konvergiert. Ebenso ist $[-\varepsilon, \varepsilon]$ kompakt, somit kann wieder oBdA davon ausgegangen werden, dass der Abstand der Sphären gegen $\delta' \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ konvergiert. Dann ist jedoch die Hyperebene $\xi(p - \delta' \cdot N', N')$ tangential an M im Punkt p' . Nach Konstruktion von ε muss also $\delta' = 0$ und $p' = p$ gelten, und N' mit N (bis auf eventuell die Orientierung) übereinstimmen.

Wegen $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ ist keine der Hauptkrümmungen in (p, N) gleich Null. Somit existiert $r_0 > 0$ und eine Umgebung \mathcal{N} um (p, N) , so dass alle Hauptkrümmungen in $(p', N') \in \mathcal{N}$ betragsmäßig größer als $\frac{1}{r_0}$ sind, und $\langle N, N' \rangle > 0$ gilt. Alle Hauptkrümmungen der Parallellfläche $M_{\mathcal{N}, r}$ bzw. $M_{\mathcal{N}, -r}$ besitzen dann für $r > r_0$ jeweils dasselbe Vorzeichen (vgl. Lemma 2.10), sind also strikt konvex, schneiden die Gerade η durch p mit Richtung N also in jeweils genau einem Punkt (wegen $\langle N, N' \rangle > 0$ für alle $(p', N') \in \mathcal{N}$) nämlich $p - r \cdot N$ bzw. $p + r \cdot N$. Somit kann auch keine Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt auf der Geraden η tangential an $\pi_M(\mathcal{N})$ in einem anderen Punkt als p selbst sein. Dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass die Berührungspunkte obiger Folge gegen p konvergieren. \odot

Gerade Dimension des umgebenden Raumes

4.23 Lemma. *Sei d gerade. Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ gilt, noch die Tangentialebene $\xi(p, N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist. Dann gibt es ein $r_0 > 0$, so dass die folgenden Aussagen für alle $r > r_0$ erfüllt sind:*

1. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^+$, so sind sowohl (p, N) als auch $(p, -N)$ in \mathcal{N}_r^+ enthalten.*
2. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^-$, so sind sowohl (p, N) als auch $(p, -N)$ in \mathcal{N}_r^- enthalten.*
3. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$, so gilt entweder $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^+$.*
4. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^-$, so gilt entweder $(p, N) \in \mathcal{N}^-$ oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^-$.*

Beweis. Es seien $\varepsilon > 0$ und $r_0 > 0$ so, dass sie größer wie die durch Lemma 4.21 und Lemma 4.22 vorgegebenen Konstanten sind. Es seien weiterhin $\delta \in]0, \varepsilon[$ und $r > r_0$ beliebig.

1. Da $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ ist, gilt $\xi(p - \delta \cdot N, N) \in \mathcal{D}$, und damit $\zeta_r(p - (r + \delta) \cdot N) \in \mathcal{D}_r$ und $\zeta_r(p + (r - \delta) \cdot N) \in \mathcal{D}_r$ (vgl. Lemma 4.22). Da $\sigma_r(p, N) = \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N))$ ist (vgl. Lemma 4.21), $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$ erfüllt ist (vergleiche Definition 3.41; beachte, dass $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ ist), und $\varphi_{d-1}(p, -N) = -\varphi_{d-1}(p, N)$ gilt (da d gerade ist), folgt daraus dann $(p, N), (p, -N) \in \mathcal{N}_r^+$ (vgl. Definition 4.7).

3. Da $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$ ist, gilt nach Definition von \mathcal{N}_r^+ (vergleiche Definition 4.7; beachte auch Lemma 4.21)

$$\zeta_r(p - (r - \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) \delta) \cdot N) \in \mathcal{D}_r.$$

Nach Wahl von \mathcal{D}_r (vgl. Gleichung (4.1)) und Lemma 4.22 folgt daraus dann

$$\xi(p - (-\text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) \delta) \cdot N, N) \in \mathcal{D}. \quad (4.2)$$

Ist $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$ (insbesondere gilt damit nach Definition von \mathcal{N}^+ in Definition 3.41 $(p, N) \notin \mathcal{N}^+$), so gilt nach Gleichung (4.2) $\xi(p + \delta \cdot N, N) \in \mathcal{D}$. Wird statt N der Normalenvektor $-N$ betrachtet, so gilt daher $\xi(p - \delta \cdot (-N), -N) \in \mathcal{D}$ und $\varphi_{d-1}(p, -N) < 0$ (da d gerade ist). Also gilt $(p, -N) \in \mathcal{N}^+$ (vgl. Definition 3.41).

Ist andererseits $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$ (insbesondere gilt dann $(p, -N) \notin \mathcal{N}^+$, weil, da d gerade ist, $\varphi_{d-1}(p, -N) > 0$ ist; vergleiche auch Definition 3.41), so gilt nach Gleichung (4.2) $\xi(p - \delta \cdot N, N) \in \mathcal{D}$, d.h. es gilt $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ (vgl. Definition 3.41).

2. und 4. werden völlig analog zu 1. bzw. 3. bewiesen. \odot

4.24 Definition. Sei d gerade. Dann seien für $r > 0$ die folgenden offenen Teilmengen von \mathcal{N}_M definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_r^{++} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^+) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^+ \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^+\}, \\ \mathcal{N}_r^{+-} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^+ \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^+ \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^+\}, \\ \mathcal{N}_r^{-+} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^-) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^- \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^-\} \text{ sowie} \\ \mathcal{N}_r^{--} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^- \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^- \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^-\}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.23 sind die Punkte von \mathcal{N}_r^{-+} also wieder diejenigen, die noch zu \mathcal{N}_r^- „hinzukommen“ müssen (für größere Werte für r), während die Punkte von \mathcal{N}_r^{--} diejenigen sind, die noch „zu viel“ in \mathcal{N}_r^- sind, für größere Werte für r also nicht mehr in \mathcal{N}_r^- enthalten sein sollten. Das gleiche gilt für \mathcal{N}_r^{++} und \mathcal{N}_r^{+-} in Bezug auf die Menge \mathcal{N}_r^+ .

4.25 Lemma. Sei d gerade, $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $r > 0$. Dann gilt

$$(1 + (-1)^j) \int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} = \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}$$

und

$$(1 + (-1)^j) \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} = \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{-+}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{--}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Beweis. Setze $\mathcal{A} := \mathcal{B}_{r, \geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)} \cup \mathcal{N}_{\geq 2}$ (vergleiche Definition 3.41 und Definition 4.7). Für $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{A}$ gilt dann nach Definition der beteiligten Mengen (vgl. Definition 4.24)

$$\chi_{\mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_r^{+-} \cup \mathcal{N}_r^{++}}(p, N) + \chi_{\mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_r^{+-} \cup \mathcal{N}_r^{++}}(p, -N) = 2(\chi_{\mathcal{N}^+}(p, N) + \chi_{\mathcal{N}^+}(p, -N)).$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\varphi_j(p, N)$ und anschließende Integration über ganz \mathcal{N}_M liefert dann die erste Aussage (beachte: Es gilt $\varphi_j(p, N) = (-1)^j \varphi_j(p, -N)$; die Menge \mathcal{A} hat Maß Null). Die zweite Aussage wird auf genau dieselbe Art und Weise bewiesen. \odot

4.26 Korollar. Sei d gerade und $r > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-2} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} (1 + (-1)^j) \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ & \quad + \int_{\mathbb{E}_d} (w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}}}) dV. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.25 mit Hilfe von Satz 2.40. \odot

Ungerade Dimension des umgebenden Raumes

4.27 Lemma. Sei d ungerade. Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ gilt, noch die Tangentialebene $\xi(p, N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist. Dann gibt es ein $r_0 > 0$, so dass die folgenden Aussagen für alle $r > r_0$ erfüllt sind:

1. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^+$, so ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$ und $(p, -N) \in \mathcal{N}_r^-$.
2. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^-$, so ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^-$ und $(p, -N) \in \mathcal{N}_r^+$.
3. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$, so gilt $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$) oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^-$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$).
4. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^-$, so gilt $(p, N) \in \mathcal{N}^-$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$) oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^+$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$).

Beweis. Dieses Lemma wird analog zu Lemma 4.23 in der entsprechenden Situation für gerades d bewiesen. Beachte, dass nun, da d ungerade ist, $\varphi_{d-1}(p, N) = \varphi_{d-1}(p, -N)$ gilt. \odot

4.28 Definition. Sei d ungerade. Dann seien für $r > 0$ die folgenden offenen Teilmengen von \mathcal{N}_M definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r^{++} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^+) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^+ \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^-\}, \\ \mathcal{N}_r^{+-} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^+ \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^+ \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^-\}, \\ \mathcal{N}_r^{-+} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^-) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^- \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^+\} \text{ sowie} \\ \mathcal{N}_r^{--} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^- \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^- \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^+\}. \end{aligned}$$

Es gelten die gleichen Bemerkungen wie im Anschluss an die Definitionen der entsprechenden Mengen für gerades d in Definition 4.24.

4.29 Lemma. Sei d ungerade, $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $r > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (1 - (-1)^j) \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &= \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{--}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \\ & \quad - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{-+}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}. \end{aligned}$$

Beweis. Setze wie im Beweis von Lemma 4.25 $\mathcal{A} := \mathcal{B}_{r, \geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)} \cup \mathcal{N}_{\geq 2}$. Betrachte zunächst den Fall, dass j ungerade ist. Für $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{A}$ gilt dann nach Definition der beteiligten Mengen (vgl. Definition 4.28)

$$\chi_{\mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_r^{+-} \cup \mathcal{N}_r^{++}}(p, N) + \chi_{\mathcal{N}_r^- \setminus \mathcal{N}_r^{--} \cup \mathcal{N}_r^{-+}}(p, -N) = 2 (\chi_{\mathcal{N}^+}(p, N) + \chi_{\mathcal{N}^-}(p, -N)).$$

Wegen $\varphi_j(p, N) = -\varphi_j(p, -N)$ folgt die Behauptung in diesem Fall nun analog zum Beweis von Lemma 4.25 für gerades d .

Betrachte nun den Fall, dass j gerade ist. Wiederum direkt aus der Definition (vgl. Definition 4.28) folgt für $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{A}$, dass $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}^{+-} \cup \mathcal{N}^{++}$ genau dann erfüllt ist, wenn $(p, -N) \in \mathcal{N}_r^- \setminus \mathcal{N}^{--} \cup \mathcal{N}^{-+}$ gilt. Wegen $\varphi_j(p, N) = \varphi_j(p, -N)$ ergibt sich somit durch Integrieren über das gesamte Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{--}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{-+}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \\ &= \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung, da in der zu zeigenden Aussage die linke Seite für gerades j verschwindet. \odot

4.30 Korollar. Sei d ungerade und $r > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-2} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} (1 - (-1)^j) \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ & \quad + \int_{\mathbb{E}_d} (w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}}}) dV. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.29 mit Hilfe von Satz 2.40. \odot

4.2.4 Hüllflächen von Mehrfachberührhyperebenen

Ziel dieses Abschnittes ist die Bereitstellung von Begriffen und Hilfsresultaten im Zusammenhang mit den von mehrfach tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen. Im Gegensatz zu Kapitel 3 sind hier auch die Hyperebenen, die in mehr als zwei Punkten berühren von Interesse; die zugehörigen Terme verschwinden zwar im Grenzwert, im Verlauf des Beweises werden sie nun jedoch benötigt.

4.31 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-))$. Dann existiert $r_0 > 0$, so dass*

$$(p, N) \notin \mathcal{N}_r^{-+} \cup \mathcal{N}_r^{--} \cup \mathcal{N}_r^{++} \cup \mathcal{N}_r^{+-}$$

für alle $r > r_0$ erfüllt ist.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.23 (für d gerade) bzw. Lemma 4.27 (für d ungerade). \odot

4.32 Definition. Es sei \mathcal{B}^+ die Menge der nichtsingulären Punkte von $\partial\mathcal{N}^+$, und \mathcal{B}^- entsprechend die Menge der nichtsingulären Punkte von $\partial\mathcal{N}^-$.

Weiterhin sei $\mathcal{N}_\pm^+ \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch

$$\mathcal{N}_\pm^+ := \{(p, N) \in \mathcal{N}_M \mid (p, N) \in \mathcal{N}^+ \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^+\}.$$

Entsprechend sei $\mathcal{N}_\pm^- \subseteq \mathcal{N}_M$ bezüglich \mathcal{N}^- definiert. Schließlich sei \mathcal{B}_\pm^+ die Menge der nichtsingulären Punkte von $\partial\mathcal{N}_\pm^+$, und \mathcal{B}_\pm^- sei entsprechend die Menge der nichtsingulären Punkte von $\partial\mathcal{N}_\pm^-$.

4.33 Konstruktion. Es sei $\bar{\mathcal{N}}_2^+$ die Fläche $\bar{\mathcal{N}}^+$ aus Konstruktion 3.42, und $\bar{\mathcal{N}}_2^-$ sei die Fläche $\bar{\mathcal{N}}^-$ ebenfalls aus Konstruktion 3.42 (beachte: Für die Wohldefiniertheit der dortigen Definition kann nun jeweils auch Korollar 4.47 herangezogen werden). Weiterhin werde $\bar{\mathcal{N}}_2 := \bar{\mathcal{N}}_2^+ \cup \bar{\mathcal{N}}_2^-$ gesetzt.

Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge der Punkte nichtverschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung φ_{d-1} , deren zugehörige tangential Hyperebene M in genau k affinen unabhängigen Punkten berührt. Dann sei \bar{M}_k die Teilmenge der von denjenigen Hyperebenen eingehüllten Fläche, die in genau k Punkten von $\mathcal{B}_k \cap \partial\bar{\mathcal{N}}_2$ an M tangential sind, die von der konvexen Hülle der Berührungspunkte erzeugt wird. Die zugehörige Teilmenge des Normaleneinheitsbündels $\mathcal{N}_{\bar{M}_k}$ dieser Fläche werde mit $\bar{\mathcal{N}}_k$ bezeichnet (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten; die Normalenvektoren seien in $\bar{\mathcal{N}}_k$ stets in beiden Orientierungen vorhanden).

So wie in Konstruktion 3.42 die Fläche $\bar{\mathcal{N}}_2$ in die beiden Teilflächen $\bar{\mathcal{N}}_2^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_2^-$ zerlegt worden ist, soll dies nun auch für die Fläche $\bar{\mathcal{N}}_k$ geschehen. Dies wird rekursiv durchgeführt, daher kann (die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_2^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_2^-$ sind ja bereits konstruiert) davon ausgegangen werden, dass die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_j^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_j^-$ für $j \in \{2, \dots, k-1\}$ bereits konstruiert sind. Es werde mit \mathcal{Z}_k die Menge der Zusammenhangskomponenten von $\bar{\mathcal{N}}_k$ bezeichnet (wie üblich unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten).

Sei nun $Z \in \mathcal{Z}_k$, $\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ die zugehörige Zusammenhangskomponente von $\bar{\mathcal{N}}_k$ und $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ eine der Zusammenhangskomponenten von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1}$ mit $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z} \cap \partial\bar{\mathcal{N}}_{k,Z} \neq \emptyset$ (beachte:

Aufgrund der Anforderungen an die Berührungspunkte von tangentialen Hyperebenen mit mindestens drei Berührungspunkten in Voraussetzung 4.17 ist die Existenz von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ gesichert).

Es sei (\bar{p}, \bar{N}) ein nichtsingulärer Punkt sowohl von $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ als auch von $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$. Ist $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ eine Teilmenge von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1}^+$, so setze $\bar{\sigma}_{k-1}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$, ist dagegen $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ eine Teilmenge von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1}^-$, so setze $\bar{\sigma}_{k-1}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$. Schließlich werde noch $\bar{s}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$ gesetzt, falls sich $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ und $\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ auf verschiedenen Seiten des gemeinsamen Randstückes befinden, ansonsten werde $\bar{s}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$ gesetzt. Dann wird $\bar{\sigma}_k$ im Punkt (\bar{p}, \bar{N}) definiert durch

$$\bar{\sigma}_k(\bar{p}, \bar{N}) := \bar{\sigma}_{k-1}(\bar{p}, \bar{N}) \bar{s}(\bar{p}, \bar{N}) \operatorname{sign}(\varphi_{d-(k-1)}^{(k-1)}(\bar{p}, \bar{N})) \operatorname{sign}(\varphi_{d-k}^{(k)}(\bar{p}, \bar{N}))$$

(hierbei sind die Krümmungen $\varphi_{d-(k-1)}^{(k-1)}$ und $\varphi_{d-k}^{(k)}$ bezüglich der Fortsetzung von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ bzw. $\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ zu bestimmen). Direkt aus der Definition folgt, dass $\bar{\sigma}_k(\bar{p}, \bar{N}) = \bar{\sigma}_k(\bar{p}, -\bar{N})$ genau für gerades k erfüllt ist (beachte: Für $k = 2$ folgt dies aus der bereits bekannten Wohldefiniertheit der Flächen $\bar{\mathcal{N}}_2^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_2^-$).

Setze dann $\bar{\sigma}_{k,Z} := \bar{\sigma}_k(\bar{p}, \bar{N})$. Die Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes (\bar{p}, \bar{N}) im Schnitt $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z} \cap \partial\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ ist klar; die Unabhängig von der Wahl der angrenzenden Zusammenhangskomponente von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1}$ wird in Lemma 4.49 gezeigt werden. Somit können die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_k^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_k^-$ definiert werden via (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten)

$$\bar{\mathcal{N}}_k^+ := \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}_k: \bar{\sigma}_{k,Z} = +1} \bar{\mathcal{N}}_{k,Z} \text{ bzw.} \quad \bar{\mathcal{N}}_k^- := \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}_k: \bar{\sigma}_{k,Z} = -1} \bar{\mathcal{N}}_{k,Z}.$$

Für $k \in \{2, \dots, d\}$ sei noch $\bar{\mathcal{B}}_k^+ \subseteq \partial\bar{\mathcal{N}}_k^+$ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_k^+$, entsprechend sei $\bar{\mathcal{B}}_k^- \subseteq \partial\bar{\mathcal{N}}_k^-$ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_k^-$. Weiterhin werde noch $\bar{\mathcal{B}}_k := \bar{\mathcal{B}}_k^+ \cup \bar{\mathcal{B}}_k^-$ gesetzt.

Schließlich seien noch die Flächen $\bar{\mathcal{N}}^+$, $\bar{\mathcal{N}}^-$ sowie $\bar{\mathcal{N}}$ definiert durch

$$\bar{\mathcal{N}}^+ := \bigcup_{k=2}^d \bar{\mathcal{N}}_k^+, \quad \bar{\mathcal{N}}^- := \bigcup_{k=2}^d \bar{\mathcal{N}}_k^- \text{ bzw.} \quad \bar{\mathcal{N}} := \bar{\mathcal{N}}^+ \cup \bar{\mathcal{N}}^-.$$

4.34 Bemerkung. Im Gegensatz zu den in Konstruktion 3.42 definierten Flächen gleicher Bezeichnung, enthalten die zu den Flächen $\bar{\mathcal{N}}^+$ und $\bar{\mathcal{N}}^-$ (nach Konstruktion 4.33) zugehörigen Hüllflächen auch von Hyperebenen mit mehr als zwei Berührungspunkten eingehüllte Teilflächen. Da auf den hinzugekommenen Teilflächen φ_{d-2} identisch Null ist, kann in den Aussagen, also insbesondere Satz 3.46, zwischen beiden Definitionen beliebig gewechselt werden. Innerhalb des noch folgenden Teils des Beweises von Satz 4.19 ist jedoch die erweiterte Definition aus Konstruktion 3.42 notwendig.

4.35 Konstruktion. Es sei $(p, N) \in \bar{\mathcal{N}}^+ \cup \bar{\mathcal{N}}^-$. Insbesondere ist also die Hyperebene $\xi(p, N)$ eine Mehrfachtangentialhyperebene an M , es seien $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ die zugehörigen Berührungspunkte (für geeignetes $k \in \{2, \dots, d\}$). Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(j)}, N) \neq 0$ für $j \in \{1, \dots, k\}$. Somit kann $r_0 > 0$ so gewählt werden, dass $\frac{1}{r_0}$ kleiner ist als die

betragsmäßig kleinste Hauptkrümmung von M in einem der Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$. Für $j \in \{1, \dots, k\}$ existieren dann offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass in allen Punkten von $\mathcal{N}^{(j)}$ die Hauptkrümmungen betragsmäßig größer sind als $\frac{1}{r_0}$. Dies gilt dann auch für die Punkte der offenen Umgebung $\mathcal{N}^{(j)'} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, -N)$, die definiert ist durch

$$\mathcal{N}^{(j)'} := \{(\tilde{p}, -\tilde{N}) \in \mathcal{N}_M \mid (\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}^{(j)}\}.$$

Nach Lemma 2.10 sind für $r > r_0$ die Parallellflächen $M_{\mathcal{N}_j, r}$ und $M_{\mathcal{N}^{(j)'}, r}$ reguläre Hyperflächen, deren Hauptkrümmungen allesamt jeweils dasselbe Vorzeichen besitzen (also konvex sind). Da $\varphi_{d-1}(p^{(j)}, N) \neq 0$ ist, existiert ein $r_j > r_0$, so dass für $r > r_j$ die Flächen $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$ und $M_{\mathcal{N}^{(j)'}, r}$ die Gerade $\eta(p^{(j)}, N)$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ schneiden.

Sei nun zunächst $r > r_j$. Nach obigem schneidet insbesondere die Gerade $\eta(p, N)$ die Parallellfläche $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$, d.h. es gibt $\delta_{j,r}(p, N) \in [0, r]$ mit $p - \delta_{j,r}(p, N) \cdot N \in M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$. Somit gibt es $(\tilde{p}_r, \tilde{N}_r) \in \mathcal{N}^{(j)}$ mit

$$\tilde{p}_r - r \cdot \tilde{N}_r = p - \delta_{j,r}(p, N) \cdot N. \quad (4.3)$$

Ist $r \leq r_j$ so setze $\delta_{j,r}(p, N) := 0$. Ebenso setze $\delta_{j,r}(p, N) := 0$, falls (im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen) φ_{d-1} in einem der zugehörigen Berührungspunkte der Mehrfach-tangentialhyperebene $\xi(p, N)$ mit M doch verschwindet.

Schließlich sei für $r > 0$ die Abbildung $\delta_r: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\delta_r: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}, (p, N) \mapsto \max(\{\delta_{1,r}(p, N), \dots, \delta_{k,r}(p, N)\}).$$

4.36 Lemma. *Es sei $(p, N) \in \bar{\mathcal{N}}$, so dass φ_{d-1} in keinem der zugehörigen Berührungspunkte der Hyperebene $\xi(p, N)$ mit M verschwindet. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r - \delta_r(p, N)) = 0.$$

Beweis. Ist k die Anzahl der Berührungspunkte der Hyperebene $\xi(p, N)$ mit M , so lässt sich für $j \in \{1, \dots, k\}$ Gleichung (4.3) in Konstruktion 4.35 umformen zu (mit den dortigen Bezeichnungen)

$$\tilde{p}_r - p = r \cdot \tilde{N}_r - \delta_{j,r}(p, N) \cdot N.$$

Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektor $\tilde{N}_r + N$ auf diese Gleichung liefert

$$\langle \tilde{p}_r - p, \tilde{N}_r + N \rangle = (\langle \tilde{N}_r, N \rangle + 1) (r - \delta_{j,r}(p, N)). \quad (4.4)$$

Nach Konstruktion gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} (\tilde{p}_r, \tilde{N}_r) = (p^{(j)}, N)$. Anwenden des Grenzwertes auf Gleichung (4.4) liefert daher die zu zeigende Aussage, da $p^{(j)} - p$ orthogonal zu N ist. \odot

4.37 Lemma. *Es sei ξ eine Hyperebene, die genau in den Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ tangential an M ist (für geeignetes $k \in \mathbb{N}$). Ein Normalenvektor der Hyperebene ξ sei N . Weiterhin seien für $j \in \{1, \dots, k\}$ offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N)$ gegeben. Schließlich werde noch $\mathcal{N} := \bigcup_{j=1}^k \mathcal{N}^{(j)}$ gesetzt.*

Dann gibt es für $j \in \{1, \dots, k\}$ offene Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass für $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kein $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{N}}^{(j)}$ für beliebiges $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $\xi(p', N') = \xi(\tilde{p}, \tilde{N})$.

Beweis. Es sei der Ursprung so gewählt, dass dieser nicht in der Hyperebene ξ liegt. Da für $j \in \{1, \dots, k\}$ die Punkte $p^{(j)}$ Berührungspunkte derselben tangentialen Hyperebene sind, fallen die Punkte $\langle p^{(j)}, N \rangle \cdot N$ allesamt zusammen. Da die Hyperebene ξ in keinem weiteren Punkt tangential an M ist, liegt $\langle p^{(1)}, N \rangle \cdot N$ nicht auf der Pedalfläche von $\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$. Da letztere jedoch kompakt ist, existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}_d$ um den Punkt $\langle p^{(1)}, N \rangle \cdot N$, die die Pedalfläche von $\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ nicht anschnidet. Da die Abbildung $\tilde{p}_j: \mathcal{N}^{(j)} \rightarrow \mathbb{E}_d, (p', N') \mapsto \langle p', N' \rangle \cdot N'$ stetig ist, kann also $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} := \tilde{p}_j^{-1}(\mathcal{U})$ gesetzt werden (für $j \in \{1, \dots, k\}$), so dass die geforderten Eigenschaften erfüllt sind. \odot

4.38 Lemma. *Es liege erneut dieselbe Situation wie in Lemma 4.37 vor.*

Dann gibt es $r_0 > 0$ und (für $j \in \{1, \dots, k\}$) offene Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass für $r > r_0$ und $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kein $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{N}}^j$ für beliebiges $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $\zeta_r(p' - r \cdot N') = \zeta_r(\tilde{p} - r \cdot \tilde{N})$.

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre nicht richtig. Dann gibt es für jede Wahl von Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N)$ (für $j \in \{1, \dots, k\}$) Folgen $(r_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $(p'_i, N'_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ sowie $(\tilde{p}_i, \tilde{N}_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \bigcup_{j=1}^k \tilde{\mathcal{N}}^{(j)}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty \text{ und} \quad \zeta_r(p'_i - r_i \cdot N'_i) = \zeta_r(\tilde{p}_i - r_i \cdot \tilde{N}_i) \quad (4.5)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kompakt ist, kann durch Übergang zu einer Teilfolge oBdA davon ausgegangen werden, dass $(p', N') := \lim_{i \rightarrow \infty} (p'_i, N'_i)$ existiert und in $\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ liegt. Wiederum durch Übergang zu einer Teilfolge und eventuelles Umnummerieren lässt sich oBdA erreichen, dass $(\tilde{p}_i, \tilde{N}_i) \in \tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Sicherlich lässt sich $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ so klein wählen, dass auch noch der Abschluss von $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ in $\mathcal{N}^{(1)}$ enthalten ist, da dieser jedoch kompakt ist, kann durch einen weiteren Übergang zu einer Teilfolge oBdA angenommen werden, dass $(\tilde{p}, \tilde{N}) := \lim_{i \rightarrow \infty} (\tilde{p}_i, \tilde{N}_i)$ existiert und in $\mathcal{N}^{(1)}$ liegt.

Nach Gleichung (4.5) gilt (für $i \in \mathbb{N}$) $p'_i - r_i \cdot N'_i = \tilde{p}_i - r_i \cdot \tilde{N}_i$, umformen ergibt

$$\frac{1}{r_i} \cdot (p'_i - \tilde{p}_i) = N'_i - \tilde{N}_i. \quad (4.6)$$

Anwenden des Grenzwertes $i \rightarrow \infty$ auf diese Gleichung ergibt $N' = \tilde{N}$. Andererseits führt das Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektor $N'_i + \tilde{N}_i$ auf Gleichung (4.6) zu

$$\langle p'_i - \tilde{p}_i, N'_i + \tilde{N}_i \rangle = 0.$$

Anwenden des Grenzwertes $i \rightarrow \infty$ auf diese Gleichung ergibt nun (mit Hilfe der Gleichheit $N' = \tilde{N}$), dass $\langle p' - \tilde{p}, N' \rangle = 0$ gilt. Es folgt also, dass die tangentialen Hyperebenen $\xi(p', N')$ und $\xi(\tilde{p}, \tilde{N})$ übereinstimmen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Lemma 4.37. \odot

4.39 Lemma. *Es gibt $r_0 > 0$, so dass für $r > r_0$ kein Berührungspunkt $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ einer Mehrfachtangentialhyperebene auch Berührungspunkt einer Mehrfachtangentialsphäre vom Radius r ist.*

Beweis. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ ein Berührungspunkt einer Mehrfachtangentialhyperebene ξ . Angenommen, es gibt für beliebig große Radien Mehrfachberührungssphären, die M in (p, N) berühren. Somit gibt es Folgen $(r_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $(p'_i, N'_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}_M$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty \text{ und} \quad p - r_i \cdot N = p'_i - r_i \cdot N'_i. \quad (4.7)$$

Analoges Vorgehen zum Beweis von Lemma 4.38 führt dazu, dass oBdA der Grenzwert $(p', N') := \lim_{i \rightarrow \infty} (p'_i, N'_i)$ existiert. Wie im dortigen Beweis ergibt sich auch hier $N = N'$ und $p' \in \xi$. Somit ist (p', N) ein Berührungspunkt der Hyperebene ξ . Da nach Voraussetzung (vgl. Voraussetzung 4.17) Hyperebenen die Fläche M in höchstens endlich vielen Punkten berühren, muss aufgrund der Konvergenz und wegen Gleichung (4.7) auch $p = p'$ gelten. Dies ergibt jedoch einen Widerspruch dazu, dass eine Umgebung $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ von (p, N) gewählt werden kann, so dass für genügend große Radien r die Parallelfläche $M_{\mathcal{N}, r}$ homöomorph zu \mathcal{N} ist (beachte: Gilt $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$, so sind diese beiden Flächen nach Lemma 2.10 sogar diffeomorph; im Fall $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ ergibt sich die Aussage aus der Regularität des Wertes 0 bezüglich der Abbildung φ_{d-1}). Somit gibt es $r_0 > 0$ und eine Umgebung \mathcal{N} um (p, N) , so dass in dieser Umgebung die Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhyperebenen nicht mit den Berührungspunkten von Mehrfachtangential-sphären vom Radius r (mit $r > r_0$) zusammenfallen.

Da die Menge der Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhyperebenen kompakt ist, reicht eine endliche Anzahl von obigen Umgebungen aus, um die gesamte Menge zu überdecken, es existiert also ein Maximum der zugehörigen Mindestradien. Der gesuchte Wert von r_0 muss dann größer als dieses Maximum gewählt werden. \odot

Da insgesamt der Grenzwert $r \rightarrow \infty$ berechnet werden soll, kann somit im folgenden stets davon ausgegangen werden, dass die betrachteten Radien r größer als der Radius r_0 aus Lemma 4.39 sind.

4.2.5 Von den Parallelflächen zu den Hüllflächen

Nachdem in Abschnitt 4.2.3 die Terme auf der Fläche M selbst betrachtet wurden, werden nun die dabei angefallenen Terme auf den Parallelflächen sowie die noch nicht betrachteten Terme als Windungszahlintegral bezüglich einer einzigen Fläche zusammengefasst. Wie zuvor muss auch hier nach gerader bzw. ungerader Dimension unterschieden werden, wobei das Vorgehen jeweils sehr ähnlich ist.

Gerade Dimension des umgebenden Raumes

4.40 Konstruktion. Sei d gerade und $r > 0$. Dann sei die Hyperfläche \bar{M}_r definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) von $M_{\mathcal{N}_r^{--}, r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{-+}, r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$, $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^+, r}$ sowie $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^-, r}$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 2.9, Definition 2.26 sowie Definition 4.7). In denjenigen Punkten von \bar{M}_r , in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.10 bzw. Lemma 2.27), wird nun das Normaleneinheitsvektorfeld $\bar{N}: \bar{M}_r \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert.

Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^{--} \cup \mathcal{N}_r^{++}$, d.h. es ist $p - r \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{--}, r}$ bzw. $p - r \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$, so setze $\bar{N}(p - r \cdot N) := +\sigma_r(p, N) \cdot N$; ist dagegen $(p, N) \in \mathcal{N}_r^{-+} \cup \mathcal{N}_r^{+-}$, d.h. es ist $p - r \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{-+}, r}$ bzw. $p - r \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$, so setze $\bar{N}(p - r \cdot N) := -\sigma_r(p, N) \cdot N$ (für die Definition der Abbildung σ_r vergleiche Definition 2.32).

Auf der Teilfläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^{\pm}, r}$ von \bar{M}_r sei \bar{N} genau entgegengesetzt orientiert zu dem in Konstruktion 2.29 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} auf $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^{\pm}, r}$ (bezüglich der Menge \mathcal{N}_{\pm}^{\pm} ; auf der Teilfläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^{\mp}, r}$ dagegen stimme \bar{N} mit dem in Konstruktion 2.29 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} überein (bezüglich der Menge \mathcal{N}_{\pm}^{\mp}).

4.41 Lemma. *Sei d gerade und $r > 0$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{E}_d} (w_{\hat{M}_r} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}}) dV = \int_{\mathbb{E}_d} w_{\bar{M}_r} dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \bar{M}_r in fast allen Punkten wohldefiniert.

Beweis. Es reicht aus zu zeigen, dass die Normalenvektoren in den regulären Punkten der einzelnen Teilflächen auf der linken und rechten Seite unter Beachtung der Gewichtung durch die Vorzeichen der einzelnen Terme übereinstimmen.

(i) Sei zunächst $(p, N) \in \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, denn nur dann ist $p = \pi_M(p, N)$ ein regulärer Punkt von M , wenn M als Hyperfläche betrachtet wird. Da die Fläche \bar{M}_r , bezüglich der im rechten Integral über die Windungszahl integriert wird, keine Teilflächen von M besitzt, müssen sich die entsprechenden Terme auf der linken Seite im Punkt p (sowohl bezüglich des Normalenvektors N als auch bezüglich $-N$) gegenseitig aufheben. Betrachte in (i) zunächst die Normalenvektoren, die im Punkt p aus der Zugehörigkeit von (p, N) und $(p, -N)$ zu den Mengen \mathcal{N}_r^+ , \mathcal{N}_r^{++} sowie \mathcal{N}_r^{+-} konstruiert werden; für die Mengen \mathcal{N}_r^- , \mathcal{N}_r^{-+} sowie \mathcal{N}_r^{--} vergleiche (ii).

Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$ und $(p, N) \in \mathcal{N}^+$, so folgt (vgl. Definition 4.24)

$$((p, -N) \in \mathcal{N}_r^+ \vee (p, -N) \in \mathcal{N}_r^{++}) \wedge (p, N) \notin \mathcal{N}_r^{++} \wedge (p, N) \notin \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (p, -N) \notin \mathcal{N}_r^{+-}$$

(wobei das „oder“ exklusiv ist). Also werden die Normalenvektoren N und $-N$ im Punkt p im linken Integral (bezüglich der hier betrachteten Flächen) jeweils genau einmal mit negativer Gewichtung berücksichtigt, und haben daher keinen Einfluss auf den Wert dieses Integrals.

Ist wiederum $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$, gilt jetzt aber $(p, N) \notin \mathcal{N}^+$, so folgt (vgl. Definition 4.24)

$$\left(((p, -N) \in \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (p, -N) \in \mathcal{N}_r^+) \vee ((p, -N) \notin \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (p, -N) \notin \mathcal{N}_r^+) \right) \\ \wedge (p, N) \in \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (p, -N) \notin \mathcal{N}_r^{++} \wedge (p, N) \notin \mathcal{N}_r^{++}$$

(wobei auch dieses „oder“ exklusiv ist). Der Normalenvektor N wird in dieser Situation also sowohl einmal mit positiver Gewichtung als auch einmal mit negativer Gewichtung berücksichtigt, in der Summe ergibt dies (bei den hier betrachteten Termen) keinen

Einfluss auf den Wert des linken Integrals. Beim Normalenvektor $-N$ trifft entweder dasselbe zu, oder er wird von vornherein gar nicht berücksichtigt.

Gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_r^{+-}$, so gilt insbesondere $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$, dieser Fall wurde also bereits behandelt. Gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_r^{++}$ und $(p, -N) \notin \mathcal{N}_r^+$ (letzteres kann oBdA angenommen werden, da diese Situation ansonsten durch einen der bereits behandelten Fälle abgedeckt wird), so folgt (vgl. Definition 4.24)

$$(p, N) \notin \mathcal{N}_r^+ \wedge (p, N) \notin \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (p, -N) \notin \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (p, -N) \in \mathcal{N}_r^{++}.$$

Somit werden sowohl der Normalenvektor N als auch der Normalenvektor $-N$ genau einmal mit negativer Gewichtung versehen berücksichtigt. Zusammengenommen haben sie (in den hier betrachteten Termen) keinen Einfluss auf den Wert des Integrals auf der linken Seite.

Insgesamt ist in (i) nun gezeigt worden, dass die Flächen $\pi_M(\mathcal{N}_r^+)$, $\pi_M(\mathcal{N}_r^{+-})$ und $\pi_M(\mathcal{N}_r^{++})$ weder auf der linken noch auf der rechten Seite irgendeinen Einfluss auf den Wert der Integrale besitzen.

(ii) Analog zum Vorgehen in (i) lässt sich zeigen, dass auch die Flächen $\pi_M(\mathcal{N}_r^-)$, $\pi_M(\mathcal{N}_r^{-+})$ und $\pi_M(\mathcal{N}_r^{--})$ weder den Wert des Integrals auf der linken Seite noch den Wert des Integrals auf der rechten Seite beeinflussen.

(iii) Dass die (mit den Vorzeichen gewichteten) Normalenfelder auf den Parallellflächen $M_{\mathcal{N}_r^{--},r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{-+},r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{+-},r}$ sowie $M_{\mathcal{N}_r^{++},r}$ sowohl als Teilfläche von \bar{M}_r als auch als Teilfläche der Flächen, bezüglich derer die Windungszahlen im linken Integranden bestimmt werden, übereinstimmen, ergibt sich unmittelbar aus der jeweiligen Definition (vergleiche Konstruktion 2.33 bzw. Konstruktion 4.40).

(iv) Sei $(p, N) \in \mathcal{B}_r^+$ und $\delta \in]0, r[$, so dass $p - \delta \cdot N$ ein regulärer Punkt der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^+,r}$ ist (vgl. Lemma 2.27). Aufgrund der Voraussetzungen an r kann oBdA davon ausgegangen werden, dass (p, N) nicht in $\partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-)$ liegt. Insbesondere gibt es noch eine ganze offene Umgebung \mathcal{N} von (p, N) in $\mathcal{N}_M \setminus \partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-)$. Es seien nun $(\tilde{p}, \tilde{N}), (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}$ genügend nahe bei (p, N) so gewählt, dass $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}_r^+$ und $(\tilde{p}', \tilde{N}') \notin \mathcal{N}_r^+$ erfüllt sind (beachte: Diese Punkte existieren, da \mathcal{B}_r^+ ja gerade von den regulären Punkten des Randes von \mathcal{N}_r^+ gebildet wird). Gilt $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ (und damit auch $(\tilde{p}, \tilde{N}), (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}^+$), so folgt also (vgl. Definition 4.24)

$$(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}_r^{++}.$$

Da sich somit \mathcal{N}_r^+ und \mathcal{N}_r^{++} auf verschiedenen Seiten von \mathcal{B}_r^+ befinden, sind die Normalenvektoren im Punkt $p - \delta \cdot N$ an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^+,r}$ unterschiedlich orientiert (unter Berücksichtigung der Vorzeichen im linken Integral), je nachdem, ob $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^+,r}$ als Teilfläche von \hat{M}_r oder als Teilfläche von $S_{\mathcal{N}_r^{++},r}$ angesehen wird. In der Summe haben sie also keinen Einfluss auf den Wert des linken Integrals. Gilt dagegen $(p, N) \notin \mathcal{N}^+$ (und damit auch $(\tilde{p}, \tilde{N}), (\tilde{p}', \tilde{N}') \notin \mathcal{N}^+$), so folgt wie gerade eben

$$(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (\tilde{p}', \tilde{N}') \notin \mathcal{N}_r^{++}.$$

Somit befinden sich die Teilflächen \mathcal{N}_r^+ und \mathcal{N}_r^{+-} auf derselben Seite von \mathcal{B}_r^+ , da sich die Vorzeichen des zur Fläche $S_{\mathcal{N}_r^{+-},r}$ und des zur Fläche $S_{\mathcal{N}_r^{++},r}$ gehörigen Terms des

linken Integranden jedoch unterscheiden, wird auch in diesem Fall der Wert des linken Integrals durch diese Teilflächen nicht beeinflusst.

Sei andererseits $(p, N) \in \partial(\mathcal{N}_r^{+-} \cup \mathcal{N}_r^{++}) \setminus (\mathcal{B}_\pm^+ \cup \mathcal{B}_\pm^-)$, und $\delta \in]0, r[$, so dass $p - \delta \cdot N$ ein regulärer Punkt der Fläche $S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$ bzw. $S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$ ist (vgl. Lemma 2.27). Da (p, N) nicht im Rand von \mathcal{N}^+ enthalten ist, folgt (vgl. Definition 4.24), dass die Gebiete \mathcal{N}_r^+ und \mathcal{N}_r^{+-} lokal um den Punkt (p, N) auf derselben Seite von $\partial\mathcal{N}_r^{+-}$ liegen (im ersten Fall), bzw. dass $\partial\mathcal{N}_r^{++}$ lokal um (p, N) die Gebiete $\mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_r^{+-}$ und \mathcal{N}_r^{++} trennt (im zweiten Fall). In jedem Fall liegt wieder die gerade eben betrachtete Situation vor.

Die in (iv) betrachteten Teilflächen haben also allesamt keinerlei Einfluss auf den Wert des linken oder (nach Definition von \bar{M}_r) des rechten Integrals.

(v) Völlig analog zu (iv) lässt sich zeigen, dass auch die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_r^-, r}$ und die zugehörigen Teilflächen von $S_{\mathcal{N}_r^{--}}$ bzw. $S_{\mathcal{N}_r^{-+}}$ den Wert keines der beiden Integrale beeinflussen.

(vi) Sei nun $(p, N) \in \mathcal{B}_\pm^+$ und $\delta \in]0, r[$ so, dass sowohl $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ ist, als auch $p - \delta \cdot N$ ein regulärer Punkt der Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^+, r}$ ist (vgl. Lemma 2.27). Wie in (iv) kann aufgrund der Voraussetzungen an r oBdA davon ausgegangen werden, dass (p, N) nicht in $\partial(\mathcal{N}_r^+ \cup \mathcal{N}_r^-)$ liegt. Insbesondere gibt es noch eine ganze offene Umgebung \mathcal{N} von (p, N) in $\mathcal{N}_M \setminus \partial(\mathcal{N}_r^+ \cup \mathcal{N}_r^-)$. Es seien nun $(\tilde{p}, \tilde{N}), (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}$ genügend nahe bei (p, N) so gewählt, dass $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}_\pm^+$ und $(\tilde{p}', \tilde{N}') \notin \mathcal{N}_\pm^+$ erfüllt sind. Gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$ (und damit auch $(\tilde{p}, \tilde{N}), (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}_r^+$), so folgt also (vgl. Definition 4.24)

$$(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_r^{+-} \wedge (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}_r^{+-}.$$

Somit befinden sich die Flächen \mathcal{N}_\pm^+ und \mathcal{N}_r^{+-} auf verschiedenen Seiten von \mathcal{B}_\pm^+ , die Orientierung der Normalenvektoren (bezüglich dieser beiden Flächen) im Punkt $p - \delta \cdot N$ gemäß Konstruktion 2.29 ist also genau entgegengesetzt. Da $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^+, r}$ als Teilfläche von \bar{M}_r jedoch mit genau der entgegengesetzten Orientierung versehen ist, stimmen die mit der korrekten Gewichtung versehenen Normalenvektoren überein. In beiden Integranden hat die zugehörige Teilfläche also den gleichen Einfluss auf den Wert des jeweiligen Integrals. Gilt dagegen $(p, N) \notin \mathcal{N}_r^+$ (und damit auch $(\tilde{p}, \tilde{N}), (\tilde{p}', \tilde{N}') \notin \mathcal{N}_r^+$), so folgt wie soeben (vgl. Definition 4.24)

$$(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}_r^{++} \wedge (\tilde{p}', \tilde{N}') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^{++}.$$

Die Flächen \mathcal{N}_\pm^+ und \mathcal{N}_r^{++} befinden sich also auf derselben Seite von \mathcal{B}_\pm^+ , da die Fläche $S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$ im linken Integranden jedoch mit einem anderen Vorzeichen gewichtet wird wie zuvor $S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$, wird auch in dieser Situation der Wert sowohl des linken als auch des rechten Integrals in der gleichen Art und Weise beeinflusst.

Sei andererseits $(p, N) \in \partial(\mathcal{N}_r^{+-} \cup \mathcal{N}_r^{++}) \cap (\mathcal{B}_\pm^+ \cup \mathcal{B}_\pm^-)$, und $\delta \in]0, r[$, so dass $p - \delta \cdot N$ ein regulärer Punkt der Fläche $S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$ bzw. $S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$ ist (vgl. Lemma 2.27). Da (p, N) nicht im Rand von \mathcal{N}_r^+ enthalten ist, folgt (vgl. Definition 4.24), dass $\partial\mathcal{N}_r^{+-}$ lokal um (p, N) die Gebiete \mathcal{N}_\pm^+ und \mathcal{N}_r^{+-} trennt (im ersten Fall), bzw. dass \mathcal{N}_\pm^+ und \mathcal{N}_r^{++} lokal um den Punkt (p, N) auf derselben Seite von $\partial\mathcal{N}_r^{++}$ liegen (im zweiten Fall). In beiden Fällen liegt also wieder die gerade eben betrachtete Situation vor.

(vii) Völlig analog zu (vi) lässt sich zeigen, dass auch die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^- \setminus \mathcal{N}_{(0)}, r}$ und die

zugehörigen Teilflächen von $S_{\mathcal{N}_r^{--}}$ bzw. $S_{\mathcal{N}_r^{+-}}$ den Wert keines der beiden Integrale beeinflussen.

(viii) Schließlich bleiben noch die Flächen $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^+ \cap \mathcal{N}_{(0),r}}$ und $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^- \cap \mathcal{N}_{(0),r}}$. Da jedoch zu beiden Seiten von $\mathcal{B}_\pm^+ \cap \mathcal{N}_{(0)}$ das Gebiet \mathcal{N}_\pm^+ liegt, sind die jeweiligen Normalenvektoren trivialerweise entgegengesetzt orientiert, und die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^+ \cap \mathcal{N}_{(0),r}}$ hat somit keinerlei Einfluss auf den Wert des rechten Integrals (ebenso wie die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^- \cap \mathcal{N}_{(0),r}}$, für die dies aus den entsprechenden Gründen gilt). \odot

Ungerade Dimension des umgebenden Raumes

4.42 Konstruktion. Sei d ungerade und $r > 0$. Dann sei die Hyperfläche \bar{M}_r definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) von $M_{\mathcal{N}_r^{--},r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{-+},r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{+-},r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{++},r}$, $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^+,r}$, $\bar{S}_{\mathcal{B}_\pm^-,r}$ sowie (mit jeweils doppelter Gewichtung) $\pi_M(\mathcal{N}^+)$ und $\pi_M(\mathcal{N}^-)$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 2.9, Definition 2.26, Definition 3.41 sowie Definition 4.7). In denjenigen Punkten von \bar{M}_r , in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.10 bzw. Lemma 2.27), wird nun das Normaleneinheitsvektorfeld $\bar{N}: \bar{M}_r \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert.

Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, d.h. es gilt $p \in \pi_M(\mathcal{N}^+) \cap M_{d-1}$, so werde $\bar{N}(p) := -N$ gesetzt; ist $(p, N) \in \mathcal{N}^- \cap \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, d.h. es gilt $p \in \pi_M(\mathcal{N}^-) \cap M_{d-1}$, so werde $\bar{N}(p) := -N$ gesetzt.

Das Normaleneinheitsvektorfeld \bar{N} auf den restlichen Teilflächen von \bar{M}_r werde genau auf die gleiche Art und Weise wie in Konstruktion 4.40 bei gerader Dimension des umgebenden \mathbb{E}_d konstruiert.

4.43 Lemma. *Sei d ungerade und $r > 0$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{E}_d} (w_{\hat{M}_r} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+},r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{--},r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++},r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-},r}}) dV = \int_{\mathbb{E}_d} w_{\bar{M}_r} dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \bar{M}_r in fast allen Punkten wohldefiniert.

Beweis. Dies wird völlig analog zum Beweis von Lemma 4.41 für die entsprechende Aussage bei gerader Dimension des umgebenden Raumes \mathbb{E}_d gezeigt, also im wesentlichen auf Definition 4.28 zurückgeführt. \odot

4.2.6 Wohldefiniertheit

In diesem Abschnitt wird die Wohldefiniertheit der Vorzeichenverteilung bei den in Abschnitt 4.2.4 definierten Teilflächen, die von mehrfach tangentialen Hyperebenen eingehüllt sind, gezeigt. Weiterhin erfolgt die Vorbereitung der endgültigen Aufteilung der betrachteten Flächen, bei der dann die explizite Bestimmung des Grenzwertes erfolgen kann.

4.44 Lemma. *Es sei $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}$ eine Hyperebene, die in genau k Punkten an M tangential ist (für $k \in \{2, \dots, d\}$). Die Berührungspunkte seien gegeben durch $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$, es sei $N \in \mathbb{S}_{d-1}$ ein Normalenvektor von ξ , es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(j)}, N) \neq 0$ für $j \in \{1, \dots, k\}$. Es gelte $(p^{(1)}, N) \in \partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-)$ (damit ist auch $(p^{(2)}, N), \dots, (p^{(k)}, N) \in \partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-)$ erfüllt).*

Dann gibt es $r_0 > 0$, so dass für $r > r_0$ und $\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)} \in \text{convex}(p^{(1)}, \dots, p^{(k)})$ sowohl (vergleiche Konstruktion 4.35)

$$\bar{p}^{(1)} - \delta_r(\bar{p}^{(1)}, N) \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{--}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{-+}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$$

erfüllt ist, als auch, dass die Normalenvektoren in den Punkten $\bar{p}^{(1)} - \delta_r(\bar{p}^{(1)}, N) \cdot N$ und $\bar{p}^{(2)} - \delta_r(\bar{p}^{(2)}, N) \cdot N$ (jeweils bezüglich der Fläche \bar{M}_r ; vergleiche Konstruktion 4.40 für gerades d bzw. Konstruktion 4.42 für ungerades d) in die gleiche Richtung zeigen, d.h. es gilt

$$\langle \bar{N}(\bar{p}^{(1)} - \delta_r(\bar{p}^{(1)}, N) \cdot N), \bar{N}(\bar{p}^{(2)} - \delta_r(\bar{p}^{(2)}, N) \cdot N) \rangle > 0.$$

Beweis. Dass diejenigen Punkte $\bar{p}^{(1)} - \delta_r(\bar{p}^{(1)}, N) \cdot N$, die in derselben Zusammenhangskomponente von $M_r \setminus \partial(\mathcal{N}_r^+ \cup \mathcal{N}_r^-)$ liegen wie einer der Punkte $p^{(j)} - r \cdot N$ (für geeignetes $j \in \{1, \dots, k\}$) für genügend großes r die erste geforderte Eigenschaft besitzen, ist klar. Nach Lemma 4.37 haben jedoch für genügend großes r alle zu untersuchenden Punkte diese Eigenschaft. Die zweite Aussage folgt damit dann unmittelbar aus der Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche \bar{M}_r (vergleiche Lemma 4.41 für gerades d bzw. Lemma 4.43 für ungerades d). \odot

4.45 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ mit $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$. Ist $(p, N) \in \mathcal{B}^+$, so setze $\sigma := +1$, ist $(p, N) \in \mathcal{B}^-$, so setze $\sigma := -1$ (beachte: Ist (p, N) in beiden Mengen enthalten, so kann gewählt werden, ob (p, N) bezüglich \mathcal{N}^+ oder \mathcal{N}^- betrachtet werden soll). Weiterhin sei $s := +1$, falls die (kanonische) Orientierung von \mathcal{B}^+ bzw. \mathcal{B}^- um (p, N) bezüglich der angrenzenden Fläche \mathcal{N}^+ bzw. \mathcal{N}^- mit derjenigen bezüglich der angrenzenden Teilfläche von \bar{N} nicht übereinstimmt, ansonsten sei $s := -1$ (vergleiche auch Konstruktion 3.42).*

Für betragsmäßig genügend kleines $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zeigt dann der Normalenvektor an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}^+_\pm}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}^-_\pm}$ (jeweils als Teilfläche von \bar{M}_r für $r > |\delta|$; vergleiche Konstruktion 4.40 für gerades d bzw. Konstruktion 4.42 für ungerades d) im Punkt $p - \delta \cdot N$ in die Parallelfläche $\bar{M}_{\bar{N}, \delta}$ genau dann, wenn $s\sigma = -1$ ist.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Wahl der Orientierung der Normalenvektoren auf den Flächen $\bar{S}_{\mathcal{B}^+_\pm}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}^-_\pm}$ in Konstruktion 4.40 (für d gerade) bzw. Konstruktion 4.42 (für d ungerade). \odot

4.46 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ mit $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$. Setze dann (mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.45)*

$$\bar{\sigma} := s\sigma \text{sign}(\varphi_{d-2}(p, N))$$

(beachte: Die Krümmung φ_{d-2} werde bezüglich der Fläche \bar{N} bestimmt; sollte p ein singulärer Punkt der zugehörigen Hüllfläche sein, so ist stattdessen $\varphi_{d-2}(p - \delta \cdot N, N)$ bezüglich der zugehörigen Parallelfläche im Abstand δ für genügend kleines $\delta > 0$ zu betrachten; da nach Lemma 3.15 \bar{N} in (p, N) regulär ist, gilt dies im Punkt $p - \delta \cdot N$ dann auch für fast alle Parallelflächen).

Es gibt dann $r_0 > 0$, so dass der Normalenvektor im Punkt $p - r \cdot N$ an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^+}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}_{\pm}^-}$ (jeweils als Teilfläche von \bar{M}_r ; vergleiche Konstruktion 4.40 für gerades d bzw. Konstruktion 4.42 für ungerades d) für $r > r_0$ genau dann in die angrenzende Parallelfläche $\bar{M}_{\bar{N}, r}$ zeigt, wenn $\bar{\sigma} = -1$ ist.

Beweis. Sei r_0 zumindest einmal so groß gewählt, dass sämtliche der $d-2$ nichtverschwindenden Hauptkrümmungen in (p, N) (bezüglich der Fläche \bar{N}) betragsmäßig größer als $\frac{1}{r_0}$ sind (beachte: Da die Hüllfläche in p eine Singularität besitzen kann, können „Hauptkrümmungen“ in (p, N) auch betragsmäßig „gleich“ ∞ werden). Die Aussage folgt dann unmittelbar aus Lemma 2.30, Lemma 4.21 sowie Lemma 4.45. \odot

4.47 Korollar. Die Definition von \bar{N}_2^+ und \bar{N}_2^- in Konstruktion 4.33 ist wohldefiniert.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.44 und Lemma 4.46 wegen der Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche \bar{M}_r (vergleiche Lemma 4.41 für gerades d bzw. Lemma 4.43 für ungerades d). \odot

4.48 Konstruktion. Es sei $r > 0$ und $k \in \{2, \dots, d\}$ gegeben. Die Hyperfläche $S_{k,r}$ sei nun definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) der Flächen $\pi_{\bar{M}}(\bar{N}_k)$, $\bar{M}_{\bar{N}_k, r}$ sowie $\bar{S}_{\mathcal{B}_{k,r}}$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 2.9, Definition 2.26 sowie Konstruktion 4.33). Dies entspricht im Prinzip der Definition der Fläche „ $S_{\bar{N}_k, r}$ “ nach Konstruktion 2.33, hier jedoch ist die zugrunde liegende „Grundfläche“ nicht notwendigerweise regulär. In denjenigen Punkten von $S_{k,r}$, in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.10 bzw. Lemma 2.27), wird nun das Normaleneinheitsvektorfeld $N: S_{k,r} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert.

Sei $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{N}_k$. Ist $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{N}_k^+$ erfüllt, so setze $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$, ansonsten setze $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$. Ist \bar{p} ein regulärer Punkt der Fläche $\pi_{\bar{M}}(\bar{N}_k)$ (als Hyperfläche), so sei in \bar{p} der Normalenvektor N gegeben durch

$$N(\bar{p}) := \bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) \operatorname{sign}(\varphi_{d-k}(\bar{p}, \bar{N})) \cdot \bar{N}.$$

Ist $\bar{p} - r \cdot \bar{N}$ ein regulärer Punkt der Parallelfläche $\bar{M}_{\bar{N}_k, r}$, so sei in diesem Punkt der Normalenvektor an die Fläche $S_{k,r}$ gegeben durch

$$N(\bar{p} - r \cdot \bar{N}) := -\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) \operatorname{sign}(\varphi_{d-k}(\bar{p}, \bar{N})) \sigma_r(\bar{p}, \bar{N}) \cdot \bar{N}$$

(vergleiche auch Definition 2.32 für die Definition der Abbildung σ_r).

Somit bleibt noch das Normalenvektorfeld N auf den Teilflächen $\bar{S}_{\mathcal{B}_{k,r}}$ von $S_{k,r}$ zu definieren. Sei also $\delta \in]0, r[$ und $(\bar{p}, \bar{N}) \in \mathcal{B}_k$, so dass $\bar{p} - \delta \cdot \bar{N}$ ein regulärer Punkt von $\bar{S}_{\mathcal{B}_{k,r}}$ ist (vgl. Lemma 2.27). Wie oben werde $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$ gesetzt, falls $(\bar{p}, \bar{N}) \in \mathcal{B}_k^+$

gilt, ansonsten gelte $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$. Dann stimme die Orientierung des Normalenvektors $N(\bar{p} - \delta \cdot \bar{N})$ an die Fläche $S_{k,r}$ genau dann mit derjenigen des in Konstruktion 2.29 (bezüglich der Fläche \bar{N}_k) definierten Normalenvektors überein, wenn

$$\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) \operatorname{sign}(\varphi_{d-k}(\bar{p}, \bar{N})) = +1$$

erfüllt ist (die Krümmung φ_{d-k} ist dabei bezüglich der Fortsetzung der Fläche \bar{N}_k zu bestimmen; hierbei ist zu beachten: Ist der Punkt \bar{p} eine Singularität der Hüllfläche, so ist zur Bestimmung des Wertes von σ_r bzw. φ_{d-k} statt des Punktes (\bar{p}, \bar{N}) der Punkt $(\bar{p} - \delta \cdot \bar{N}, \bar{N})$ für genügend kleines $\delta > 0$ zu nehmen. Dieser ist dann nach Lemma 2.10 ein regulärer Punkt der Parallellfläche zur Hüllfläche im Abstand δ).

4.49 Lemma. *Es sei $r > 0$ und $k \in \{2, \dots, d\}$. Dann ist die Definition von \bar{N}_k^+ und \bar{N}_k^- in Konstruktion 4.33 ebenso wohldefiniert wie die Windungszahl $w_{S_{k,r}}$ bezüglich der Fläche $S_{k,r}$ in fast allen Punkten von \mathbb{E}_d .*

Beweis. Der Beweis der Wohldefiniertheit von \bar{N}_2^+ und \bar{N}_2^- wurde bereits in Korollar 4.47 erbracht. Da das Normaleneinheitsvektorfeld auf $S_{2,r}$ entsprechend demjenigen in Konstruktion 2.33 definiert worden ist (auch wenn die „Grundfläche“ hier im Gegensatz zur dort vorliegenden Situation im allgemeinen nicht regulär ist), überträgt sich der Beweis der Wohldefiniertheit der Windungszahl aus Lemma 2.39 auch auf die Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche $S_{2,r}$.

Das Normalenvektorfeld der Fläche $\bar{S}_{\bar{B}_{3,r}}$ als Teilfläche von $S_{3,r} \cap S_{2,r}$ in Konstruktion 4.48 ist gerade so definiert worden, dass es entgegengesetzt orientiert zu jenem von $\bar{S}_{\bar{B}_{2,r}}$ auf diesen Teilflächen ist. Weiterhin ist das Normalenvektorfeld auf den restlichen Teilflächen von $S_{3,r}$ zu diesem konsistent (in Hinblick auf die Bestimmung der Windungszahl bezüglich dieser Fläche; vergleiche hierzu auch Konstruktion 2.33). Somit überträgt sich die Wohldefiniertheit von \bar{N}_2^+ und \bar{N}_2^- auf die Flächen \bar{N}_3^+ bzw. \bar{N}_3^- (beachte, dass auf \bar{N}_3 weder die Krümmung φ_{d-4} nicht in „allzu vielen Punkten“ verschwindet, da diejenigen der zugehörigen Berührungspunkte der Mehrfachtangentialhyperebenen an M , in denen die Lipschitz-Killing-Krümmung φ_{d-1} verschwindet, oder die affin abhängig sind nach Voraussetzung 4.17 in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten sind). Die Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich dieser beiden Flächen ergibt sich wie bei \bar{N}_2^+ und \bar{N}_2^- .

So wie soeben die Wohldefiniertheit von \bar{N}_3^+ und \bar{N}_3^- auf diejenige der Flächen \bar{N}_2^+ bzw. \bar{N}_2^- zurückgeführt worden ist, kann auf dieselbe Art und Weise die Wohldefiniertheit von \bar{N}_j^+ und \bar{N}_j^- für $j \in \{4, \dots, d\}$ auf diejenige der Flächen \bar{N}_{j-1}^+ bzw. \bar{N}_{j-1}^- zurückgeführt werden, und es folgt insgesamt die Behauptung. \odot

4.2.7 Trennung der Flächen

Nachdem in Abschnitt 4.2.5 alle noch nicht versorgten Terme zu einem Integral über die Windungszahl bezüglich einer einzigen Fläche zusammengefasst wurden, erfolgt nun die Aufteilung dieses Integrals in zwei bzw. drei (je nachdem ob die Dimension gerade oder ungerade ist) Windungszahlintegrale, deren Grenzwert sich im folgenden Abschnitt 4.2.8 leicht bestimmen lässt.

4.50 Definition. Es sei $r > 0$. Dann sei S_r die Vereinigungsfläche (unter Beachtung eventueller Vielfachheiten) der Flächen $S_{2,r}, \dots, S_{d,r}$. Das Normalenvektorfeld auf S_r sei auf der Teilfläche $S_{j,r}$ (für $j \in \{2, \dots, r\}$) gegeben durch das in Konstruktion 4.48 definierte Normalenvektorfeld für die Fläche $S_{j,r}$. Insbesondere ergibt sich damit aus Lemma 4.49, dass die Windungszahl bezüglich der Fläche S_r in fast allen Punkten von \mathbb{E}_d wohldefiniert ist.

4.51 Konstruktion. Für $r > 0$ sei die Hyperfläche \check{M}_r definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) der Parallellflächen $M_{\mathcal{N}_r^{--},r}, M_{\mathcal{N}_r^{-+},r}, M_{\mathcal{N}_r^{+-},r}, M_{\mathcal{N}_r^{++},r}, \bar{M}_{\check{\mathcal{N}}^+,r}$ sowie $\bar{M}_{\check{\mathcal{N}}^-,r}$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 2.9, Definition 4.24 sowie Konstruktion 4.33). In denjenigen Punkten von \check{M}_r , in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist (vgl. Lemma 2.10), wird jetzt das Normaleneinheitsvektorfeld $\check{N}: \check{M}_r \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert.

Auf den Teilflächen $M_{\mathcal{N}_r^{--},r}, M_{\mathcal{N}_r^{-+},r}, M_{\mathcal{N}_r^{+-},r}$ und $M_{\mathcal{N}_r^{++},r}$, die bereits Teil der Fläche \bar{M}_r sind (vergleiche Konstruktion 4.40 für d gerade bzw. Konstruktion 4.42 für d ungerade), stimme \check{N} mit dem bereits für die Fläche \bar{M}_r definierten Normalenvektorfeld \bar{N} überein.

Auf den Teilflächen $\bar{M}_{\check{\mathcal{N}}^+,r}$ und $\bar{M}_{\check{\mathcal{N}}^-,r}$, die bereits Teil der in Konstruktion 4.48 konstruierten Fläche $S_{k,r}$ sind, sei \check{N} genau entgegengesetzt orientiert zu dem dort auf diesen Teilflächen definierten Normaleneinheitsvektorfeld N .

Gerade Dimension des umgebenden Raumes

4.52 Lemma. Sei d gerade und $r > 0$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{E}_d} w_{\bar{M}_r} dV = \int_{\mathbb{E}_d} (w_{S_r} + w_{\check{M}_r}) dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \check{M}_r in fast allen Punkten von \mathbb{E}_d wohldefiniert.

Beweis. Die Vorgehensweise ist dieselbe wie im Beweis von Lemma 4.41.

(i) Betrachte zunächst für $k \in \{2, \dots, d-1\}$ die Teilfläche $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{k,r}} \cap \bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{k+1,r}}$ der Fläche S_r . In den regulären Punkten dieser Fläche bezüglich $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{k,r}}$ sind die Normalenvektoren nach Definition in Konstruktion 4.49 genau entgegengesetzt orientiert zu den Normalenvektoren bezüglich der Fläche $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{k+1,r}}$. Daher hebt sich der Einfluss dieser Teilflächen bei der Bestimmung der Windungszahl bezüglich der Fläche S_r gegenseitig auf. Da diese Flächen keine Teilflächen von \bar{M}_r oder \check{M}_r sind, ist ihr Einfluss auf beide Seiten der zu zeigenden Gleichheit also gleich groß.

(ii) Betrachte als nächstes die Teilfläche $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{2,r}} \cap (\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{\pm}^+} \cup \bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_{\pm}^-})$. Wegen Lemma 4.45 und Lemma 4.46 stimmen die Normalenvektoren an diese Fläche als Teilfläche von S_r (vgl. Konstruktion 4.49) mit denjenigen an diese Fläche als Teilfläche von \bar{M}_r (vgl. Konstruktion 4.40) überein. Der Einfluss dieser Teilflächen ist in beiden Integralen gleich groß.

(iii) Auf den Flächen $M_{\mathcal{N}_r^-,r}$, $M_{\mathcal{N}_r^+,r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{+-},r}$ sowie $M_{\mathcal{N}_r^{++},r}$ stimmt das Normalenvektorfeld als Teilfläche von \bar{M}_r mit demjenigen als Teilfläche von \check{M}_r direkt nach Definition überein (vgl. Konstruktion 4.51).

(iv) Auf den Flächen $\bar{M}_{\check{\mathcal{N}}^+,r}$ und $\bar{M}_{\check{\mathcal{N}}^-,r}$ ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus den jeweiligen Definitionen, dass das Normalenvektorfeld dieser Fläche als Teilfläche von \check{M}_r genau entgegengesetzt orientiert ist zu jenem als Teilfläche von S_r (vergleiche Konstruktion 4.51). \odot

Ungerade Dimension des umgebenden Raumes

4.53 Konstruktion. Für d ungerade sei die Hyperfläche \mathring{M} definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) der Flächen $\pi_M(\mathcal{N}^+)$, $\pi_M(\mathcal{N}^-)$, $\pi_{\bar{M}}(\bar{\mathcal{N}}^+)$ sowie $\pi_{\bar{M}}(\bar{\mathcal{N}}^-)$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 3.41 und Konstruktion 4.33). In denjenigen Punkten von \mathring{M} , in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist, wird jetzt das Normaleneinheitsvektorfeld $\mathring{N}: \mathring{M} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ definiert.

Ist p für $(p, N) \in \pi_M(\mathcal{N}^+)$ ein regulärer Punkt von \mathring{M} (als Hyperfläche), so werde $\mathring{N}(p) := -N$ gesetzt, ist p für $(p, N) \in \pi_M(\mathcal{N}^-)$ ein regulärer Punkt von \mathring{M} , so werde $\mathring{N}(p) := +N$ gesetzt.

Ist p für $(p, N) \in \pi_{\bar{M}}(\bar{\mathcal{N}}_k^+ \cup \bar{\mathcal{N}}_k^-)$ ein regulärer Punkt von \mathring{M} (wiederum als Hyperfläche; es sei $k \in \{2, \dots, d\}$), so werde $\mathring{N}(p)$ definiert durch

$$\mathring{N}(p) := -\bar{\sigma}(p, N) \operatorname{sign}(\varphi_{d-k}(p, N)) \cdot N$$

(hierbei werde wie üblich $\bar{\sigma}(p, N) := +1$ gesetzt, falls $(p, N) \in \bar{\mathcal{N}}^+$ erfüllt ist, ansonsten $\bar{\sigma}(p, N) := -1$; beachte: Beim Betrachten der Vielfachheiten darf das Paar (p, N) und $(p, -N)$ jeweils nur einmal gezählt werden, der Faktor 2 wird in der Formel in Lemma 4.54 separat berücksichtigt).

4.54 Lemma. Sei d ungerade und $r > 0$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{E}_d} w_{\bar{M}_r} dV = \int_{\mathbb{E}_d} (2w_{\mathring{M}} + w_{S_r} + w_{\check{M}_r}) dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl sowohl bezüglich der Fläche \mathring{M} als auch bezüglich der Fläche \check{M}_r in fast allen Punkten von \mathbb{E}_d wohldefiniert.

Beweis. Dies wird völlig analog zu Lemma 4.52 in der entsprechenden Situation für d gerade gezeigt. Ist r größer als der Durchmesser von M (beachte: Die Fläche M ist kompakt, der Durchmesser also endlich), so sind die Flächen \mathring{M} und \check{M}_r voneinander getrennt. Daher folgt dann die Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich beider Flächen für diese r . Da \mathring{M} jedoch unabhängig von r ist (vgl. Konstruktion 4.53), folgt damit auch die Wohldefiniertheit bezüglich der Fläche \check{M}_r für allgemeines $r > 0$. \odot

4.2.8 Die Bestimmung des Grenzwertes

Mit der im vorangegangenen Abschnitt 4.2.7 durchgeführten Trennung in mehrere Windungszahlintegrale, ist es nun kein Problem mehr für alle auftretenden Terme – auch derjenigen aus Abschnitt 4.2.3 auf der Fläche M selbst – den Grenzwert zu bestimmen.

4.55 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2r^{d-1}} \left(\frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{\mathbb{E}_d} (w_{S_{\mathcal{N}_r^+, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^-, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}}) dV \right) \right) \\ & = \int_{\mathcal{N}^+} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_{d-2} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 4.26 (für d gerade) bzw. aus Korollar 4.30 (für d ungerade). \odot

4.56 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2r^{d-1}} \int_{\mathbb{E}_d} w_{S_r} dV \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{N}_2^+} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{N}_2^-} |\varphi_{d-2}| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Beweis. Aus den gleichen Gründen wie im Beweis von Lemma 4.49 lässt sich (für $r > 0$) Satz 2.40 auch bezüglich der Fläche S_r anwenden, und es folgt (beachte: Aufgrund der in Konstruktion 4.48 gewählten Orientierung der Normalenvektoren ergibt sich hier nun der zusätzliche Faktor σ_r im Integranden)

$$\int_{\mathbb{E}_d} w_{S_r} dV = \frac{1}{d} \sum_{k=2}^d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_k^+} \sigma_r \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_k^-} \sigma_r \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right).$$

Da auf den Hüllflächen die „letzten“ Krümmungen verschwinden, lässt sich dies vereinfachen zu

$$= \frac{1}{d} \sum_{k=2}^d \sum_{j=0}^{d-k} \binom{d}{j+1} r^{j+1} \left(\int_{\mathcal{N}_k^+} \sigma_r \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_k^-} \sigma_r \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right).$$

Durch Normieren und Bilden des Grenzwertes ergibt sich nun die Aussage mit Lemma 4.21 aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue 1910; vergleiche beispielsweise [4, Satz 5.2 in IV. §5]; beachte: Da das Produkt von φ_j mit dem Oberflächenelement stets beschränkt ist, selbst wenn die Hüllfläche Singularitäten besitzen sollte, und $K_{\mathcal{N}_M} \geq 1$ gilt, existiert eine integrierbare Majorante). \odot

4.57 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2r^{d-1}} \int_{\mathbb{E}_d} w_{\tilde{M}_r} dV = 0.$$

Beweis. Da die Menge der Berührungspunkte von Hyperebenen, die in mindestens zwei Punkten tangential an M sind, kompakt ist, und die Krümmung φ_{d-1} nach Wahl der Voraussetzungen in Voraussetzung 4.17 nicht zugleich in allen Berührungspunkten einer Mehrfachberührungsebene verschwindet, gibt es $r_0 > 0$, so dass die in Konstruktion 4.35 definierte Funktion δ_r für $r > r_0$ auf ganz \mathcal{N} echt positiv ist. Analog zur Vorgehensweise im Beweis von Lemma 2.17 ergibt sich dann

$$\left| \int_{\mathbb{E}_d} w_{\check{M}_r} dV \right| \leq \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \int_{\mathcal{N}} (r^{j+1} - \delta_r^{j+1}) |\varphi_j| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}}}}.$$

Da φ_{d-1} auf den Hüllflächen verschwindet, lässt sich dies weiter umformen zu

$$= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-2} \binom{d}{j+1} \int_{\mathcal{N}} (r - \delta_r) \left(\sum_{i=0}^j r^i \delta_r^{j-i} \right) |\varphi_j| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}}}}.$$

Zusammen mit dem angegebenen Normierungsfaktor gilt also

$$\frac{1}{2r^{d-1}} \left| \int_{\mathbb{E}_d} w_{\check{M}_r} dV \right| \leq \frac{1}{2d} \sum_{j=0}^{d-2} \binom{d}{j+1} \int_{\mathcal{N}} \frac{r - \delta_r}{r} \frac{\sum_{i=0}^j r^i \delta_r^{j-i}}{r^{d-2}} |\varphi_j| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}}}}.$$

Aufgrund der eventuell vorhandenen Singularitäten ist φ_j selber (für $j \in \{2, \dots, d-2\}$) im allgemeinen nicht beschränkt, das Produkt von φ_j mit dem Oberflächenelement jedoch sehr wohl, es gilt stets $K_{\mathcal{N}} \geq 1$ (vgl. Definition 2.7), die anderen beiden Quotienten sind beide sicherlich nicht größer als 1, daher ist der Integrand (unabhängig von r !) beschränkt, es gibt also eine integrierbare Majorante. Beim Bilden des Grenzwertes $r \rightarrow \infty$ kann somit nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue 1910; vergleiche beispielsweise [4, Satz 5.2 in IV. §5]) auf der rechten Seite dieser Gleichung die Reihenfolge der Grenzwertbildung und des Integrierens vertauscht werden, und die Aussage folgt direkt aus Lemma 4.36. \odot

4.58 Lemma. *Für ungerades d gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2r^{d-1}} \int_{\mathbb{E}_d} w_{\check{M}}^* dV = 0.$$

Beweis. Da die Fläche $\overset{\circ}{M}$ unabhängig von r ist (vgl. Konstruktion 4.53), ist dies klar. \odot

4.59 Folgerung. *Die Aussage von Satz 4.19 ist richtig, d.h. es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2r^{d-1}} \mu(\mathcal{D}_r) \right) = \mu(\mathcal{D}).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.28 und Satz 4.13 mit Hilfe von Lemma 4.55, Lemma 4.56, Lemma 4.57 sowie Lemma 4.58 wegen Lemma 4.41 und Lemma 4.52, falls d gerade ist, bzw. Lemma 4.43 und Lemma 4.54, falls d ungerade ist. \odot

5 Hyperebenen im Nichteuklidischen

Nachdem in Kapitel 3 das kinematische Maß einer Menge von Hyperebenen mit „geeignetem Schnittverhalten“ bezüglich einer gegebenen Fläche im Euklidischen bestimmt worden ist, wird dies nun auch im Nichteuklidischen durchgeführt.

Die Vorgehensweise zur Erlangung der von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes abhängigen Formeln ist völlig analog zur Vorgehensweise in der entsprechenden Situation im Euklidischen: Nach Vorbetrachtungen in Unterkapitel 5.1 werden in 5.2 orientierte Hyperflächen betrachtet, im abschließenden Unterkapitel 5.3 werden Mannigfaltigkeiten allgemeiner Kodimension betrachtet.

Auf direktem Weg ließen sich diese Formeln nicht derart umformen, dass sie unabhängig von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes sind – im Euklidischen war hierzu eine der Minkowskischen Integralformeln von Nutzen (vgl. Bemerkung 3.37), die bekannten Verallgemeinerungen dieser Formeln ins Nichteuklidische (vergleiche beispielsweise [10]) führen hier jedoch nicht zum Erfolg. Im Sphärischen ergibt sich die gesuchte Formel (vgl. Satz 6.30) in Kapitel 6.3 via Grenzübergang von den Sphären ausgehend mit Hilfe der in Kapitel 2.2 untersuchten Parallellflächen. Im Hyperbolischen sollte sich dieselbe Formel via Grenzübergang von den Abstandsflächen mit Hilfe der Parallellflächen der zu M zugehörigen Polarfläche ergeben.

5.1 Vorbetrachtungen

5.1.1 Pedalfläche

Wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Abschnitt 3.1.1) dienen die Lotfußpunktflächen auch im Nichteuklidischen als wichtiges Hilfsmittel, um die Berührungspunkte von mehrfach tangentialen Hyperebenen im Normalenbündel in den Griff zu bekommen.

5.1 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine m -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$, $l \geq 3$ und $K \neq 0$). Weiterhin sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. insbesondere ist durch $\mathcal{N}_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ eine \mathcal{C}^{l-2} -immersierte $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M gegeben (vgl. [7, Theorem 3.2]).

Schließlich sei noch ein Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ fest gewählt.

5.2 Lemma. *Es sei $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ eine Hyperebene mit Normaleneinheitsvektor N . Die Vektoren q und N seien linear unabhängig.*

Dann ist der Pedalpunkt \tilde{p} der Hyperebene ξ bezüglich des Punktes q gegeben durch

$$\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{1 - K \langle q, N \rangle^2}} \cdot (q - \langle q, N \rangle \cdot N).$$

Beweis. Der Punkt q muss auf der Geodätischen durch \tilde{p} mit Startvektor N liegen, daher gilt (mit geeigneten Konstanten $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$)

$$q = \mu_0 \cdot \tilde{p} + \mu_1 \cdot N.$$

Anwenden des Skalarprodukts mit N auf diese Gleichung führt zu $\mu_1 = \langle q, N \rangle$ (beachte: Der Punkt \tilde{p} liegt in ξ , daher gilt $\langle \tilde{p}, N \rangle = 0$). Somit gilt

$$\tilde{p} = \frac{1}{\mu_0} \cdot (q - \langle q, N \rangle \cdot N).$$

Die Konstante μ_0 ergibt sich nun aus der Tatsache, dass \tilde{p} in $\mathbb{F}_{d,K}$ liegt, also $\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle = \frac{1}{K}$ gilt. Aufgrund des Satzes von Cauchy-Schwarz gilt $\mu_0 \neq 0$, da nach Voraussetzung q und N nicht linear abhängig sind. Es gilt $\mu_0 > 0$, da der Lotfußpunkt den Abstand von Punkten auf ξ zum Punkt q minimieren soll. \odot

5.3 Definition. Es sei \mathcal{N} eine offene Teilmenge des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M . Für alle $(p, N) \in \mathcal{N}$ gelte, dass q und N nicht linear abhängig seien.

Dann sei $\tilde{p}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ diejenige Abbildung, die jedem $(p, N) \in \mathcal{N}$ den *Pedalpunkt* (bzw. *Lotfußpunkt*) der in p an M tangentialen Hyperebene $\xi(p, N)$ zuweist, nach Lemma 5.2 gilt also

$$\tilde{p}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}, (p, N) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - K \langle q, N \rangle^2}} \cdot (q - \langle q, N \rangle \cdot N).$$

Weiterhin sei $\tilde{\mathcal{N}}$ die zu \mathcal{N} gehörige , d.h. die Fläche, die von den Lotfußpunkten der an M tangentialen Hyperebenen $\xi(p, N)$ mit $(p, N) \in \mathcal{N}$ gebildet wird. Es gilt also

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{p}(p, N) \mid (p, N) \in \mathcal{N}\}.$$

(beachte: Diese Definitionen sind abhängig von der Wahl des Punktes $q \in \mathbb{F}_{d,K}$).

5.4 Definition. Es sei die Hyperfläche \mathcal{F} in \mathbb{R}^{d+1} definiert via

$$\mathcal{F} := \{q - \langle q, p \rangle \cdot p \mid p \in \mathbb{F}_{d,K}^1\} = \{p \in \mathbb{R}^{d+1} \mid K \langle 2 \cdot p - q, 2 \cdot p - q \rangle = 1\}.$$

Also ist \mathcal{F} eine Sphäre mit Mittelpunkt $\frac{1}{2} \cdot q$ und (für $K < 0$ imaginärem) Radius $\frac{1}{2\sqrt{K}}$. Ferner sei $\pi_{\mathcal{F}}: \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow \mathcal{F}$ die Projektion von $\mathbb{F}_{d,K}$ auf \mathcal{F} , die definiert sei durch

$$\pi_{\mathcal{F}}: \mathbb{F}_{d,K} \rightarrow \mathcal{F}, p \mapsto K \langle q, p \rangle \cdot p.$$

5.5 Lemma. *Es sei $p \in \mathbb{F}_{d,K}$ ein beliebiger Punkt mit $\langle q, p \rangle \neq 0$. Dann ist $\pi_{\mathcal{F}}$ lokal um p ein Diffeomorphismus. Falls $K \langle q, p \rangle > 0$ ist, so ist er orientierungserhaltend.*

Beweis. Sei $x: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ Parametrisierung einer Umgebung von p (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^d$), so dass für alle $u \in U$ noch $\langle q, x(u) \rangle > 0$ gilt. Für die partiellen Ableitungen von $\pi_{\mathcal{F}} \circ x$ gilt dann (es sei $j \in \{1, \dots, d\}$)

$$\frac{\partial(\pi_{\mathcal{F}} \circ x)}{\partial u_j} = K \langle q, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle \cdot x + K \langle q, x \rangle \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}.$$

Wegen $\langle x, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle = 0$ folgt somit die Aussage. \odot

5.6 Lemma. *Es sei \mathcal{N} eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M , so dass für alle $(p, N) \in \mathcal{N}$ die Lipschitz-Killing-Krümmung $\varphi_{d-1}(p, N)$ nicht verschwindet, der Punkt q auf keiner der an M tangentialen Hyperebenen $\xi(p, N)$ liegt, sowie stets $\langle q, p \rangle \neq 0$ gilt.*

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}$ eine $(d-1)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immensierte C^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Weiterhin ist ein (im allgemeinen nicht normierter) Normalenvektor von $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}})$ (innerhalb von \mathcal{F}) im Punkt $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))$ (für $(p, N) \in \mathcal{N}$) gegeben durch

$$\tilde{N}(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))) := p - K \langle q, p \rangle \cdot (q - 2 \langle q, N \rangle \cdot N).$$

Beweis. Wegen Lemma 5.5 reicht es aus, die Fläche $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}})$ zu betrachten. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}$ beliebig, und $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ sei eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von (p, N) in \mathcal{N} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Dann ist eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))$ in $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}})$ gegeben durch

$$\tilde{x}: U \rightarrow \pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}}), u \mapsto q - \langle q, n(u) \rangle \cdot n(u).$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind folglich gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_j} = - \left(\langle q, \frac{\partial n}{\partial u_j} \rangle \cdot n + \langle q, n \rangle \cdot \frac{\partial n}{\partial u_j} \right). \quad (5.1)$$

Offensichtlich ist nun der Vektor $\tilde{n} := x - K \langle q, x \rangle \cdot (q - 2 \langle q, N \rangle \cdot N)$ orthogonal zu diesen Ableitungen; außerdem ist $\langle \tilde{n}, \tilde{x} - \frac{1}{2} \cdot q \rangle = 0$ erfüllt, d.h. \tilde{n} liegt im Tangentialraum von \mathcal{F} in \tilde{x} . Weiterhin ist $\tilde{n} \neq 0$, da $\langle \tilde{n}, n \rangle = K \langle q, x \rangle \langle q, n \rangle \neq 0$ gilt, falls $\langle q, x \rangle \neq 0$ ist, und $\tilde{n} = x$ ist, falls $\langle q, x \rangle = 0$ gilt. Somit ist \tilde{n} ein Normalenvektor mit den gesuchten Eigenschaften.

Dass die Vektoren $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_{d-1}}$ linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus Gleichung (5.1), da nach Voraussetzung $\varphi_{d-1} \neq 0$ gilt, also die Vektoren $\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial n}{\partial u_{d-1}}$ linear unabhängig sind (und da n ein Einheitsvektor ist, auch orthogonal zu diesem sind; beachte weiterhin, dass nach Voraussetzung $\langle q, n \rangle \neq 0$ gilt). Also folgen auch die restlichen Behauptungen. \odot

5.7 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ ein Punkt mit $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$, d.h. es gilt $(p, N) \in \mathcal{N}_{(0)}$, und es sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Umgebung von (p, N) , so dass für alle $(p', N') \in \mathcal{N}$*

der Punkt q nicht auf der zugehörigen Tangentialhyperebene $\xi(p', N')$ von M liegt, und weder $\langle q, p \rangle = 0$ noch $\langle q, N \rangle = 0$ gilt, noch die Vektoren q und N linear abhängig sind.

Weiterhin sei die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1, (p', N') \mapsto N'$ eine Immersion. Für $(p', N') \in \mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N}$ sei $N_0(p', N') \in \mathbb{F}_{d,K}^1$ ein Normalenvektor der durch diese Abbildung immersierten Fläche im Bildpunkt von (p', N') .

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}_{(0)} := \{\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p', N')) | (p', N') \in \mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N}\}$ eine $(d-2)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiterhin ist eine Basis des Normalenraums von $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}}_{(0)})$ (innerhalb von \mathcal{F} im Punkt $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))$) gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))) &:= p - K \langle q, p \rangle \cdot (q - 2 \langle q, N \rangle \cdot N), \\ \tilde{N}_2(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))) &:= N_0(p, N) - K \langle q, N_0(p, N) \rangle \cdot (q - 2 \langle q, N \rangle \cdot N).\end{aligned}$$

Beweis. Wegen Lemma 5.5 reicht es wieder aus, die Fläche $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}}_{(0)})$ zu betrachten. Es sei $(x, n): U \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{(0)}$ eine \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbare Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in $\mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Dann ist eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))$ in $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{M}}_{(0)})$ wieder gegeben durch

$$\tilde{x}: U \rightarrow \pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}}), u \mapsto q - \langle q, n(u) \rangle \cdot n(u).$$

Offensichtlich sind nun $\tilde{N}_1(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N)))$ und $\tilde{N}_2(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N)))$ Normalenvektoren (innerhalb von \mathcal{F}) an $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{N}})$ im Punkt $\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p, N))$ (für die partiellen Ableitungen von \tilde{x} vergleiche Gleichung (5.1) im Beweis von Lemma 5.6; beachte, dass nach Konstruktion $\langle N_0, N \rangle = 0$ und $\langle N_0, \frac{\partial n}{\partial u_j} \Big|_{(p, N)} = 0$ für $j \in \{1, \dots, d-2\}$ und $N_0 := N_0(p, N)$ gilt).

Zeige nun, dass diese beiden Normalenvektoren auch linear unabhängig sind. Wie im Beweis von Lemma 5.6 ergibt sich, dass $\tilde{N}_1 \neq 0$ ist. Da $\langle \tilde{N}_2, N \rangle = K \langle q, N_0 \rangle \langle q, N \rangle \neq 0$ für $\langle q, N_0 \rangle \neq 0$ und $\tilde{N}_2 = N_0$ für $\langle q, N_0 \rangle = 0$ ist, gilt auch $\tilde{N}_2 \neq 0$. Gilt $\langle q, N_0 \rangle = 0$, so sind \tilde{N}_1 und \tilde{N}_2 orthogonal zueinander, und somit liegt nach dem soeben gezeigten lineare Unabhängigkeit vor. Falls die beiden Vektoren für $\langle q, N_0 \rangle \neq 0$ linear abhängig wären, gäbe es (da keiner nach obigem ein Nullvektor ist) einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\tilde{N}_1 = \lambda \cdot \tilde{N}_2$, d.h. es gilt

$$p - K \langle q, p \rangle \cdot (q - 2 \langle q, N \rangle \cdot N) = \lambda \cdot (N_0 - K \langle q, N_0 \rangle \cdot (q - 2 \langle q, N \rangle \cdot N)). \quad (5.2)$$

Anwenden des Skalarprodukts mit N auf diese Gleichung führt zu (beachte: Es gilt sowohl $\langle q, N_0 \rangle \neq 0$ als auch $\langle q, N \rangle \neq 0$)

$$\lambda = \frac{\langle q, p \rangle}{\langle q, N_0 \rangle}.$$

Wird auf Gleichung 5.2 jetzt das Skalarprodukt mit N_0 angewendet, so ergibt sich mit diesem Wert von λ , dass $\langle q, p \rangle = 0$ gelten muss. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Dass die Vektoren $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_{d-2}}$ linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus der nach Voraussetzung gegebenen linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\frac{\partial n}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial n}{\partial u_{d-2}}$ (vergleiche hierzu auch den Beweis von Lemma 5.6). Somit folgen dann die restlichen Behauptungen. \odot

5.1.2 Berührflächen

Mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt untersuchten Pedalflächen werden in diesem Abschnitt – analog zum Vorgehen im Euklidischen (vgl. Abschnitt 3.1.2) – die von den Berührungspunkten mehrfach tangentialer Hyperebenen gebildeten Teilflächen des Normalenbündels untersucht. Insbesondere werden wieder hinreichende Kriterien für die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze in den Abschnitten 5.2.1, 5.3.1 sowie 6.3.1 bereitgestellt.

5.8 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei (für $m \in \{0, \dots, d-1\}$) M_m stets eine m -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $d \geq 2$, $l \geq 3$ und $K \neq 0$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m gleichzeitig). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$ sei eingebettet in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$. Weiterhin sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. insbesondere ist $\mathcal{N}_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{N}$ eine \mathcal{C}^{l-2} -immersierte $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).

Für $k \in \{1, \dots, d\}$ sei schließlich $\hat{\xi} \in \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ eine Hyperebene mit Normaleneinheitsvektor \hat{N} , die in den k verschiedenen paarweise nicht zueinander antipodalen Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ tangential an M sei. Gilt (für $i \in \{1, \dots, k\}$) $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) = 0$, so sei \mathcal{N} eine Umgebung von $(p^{(i)}, \hat{N})$ in \mathcal{N}_M so wie in Lemma 5.7, insbesondere sei die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$, $(p, N) \mapsto N$ eine Immersion. Die Abbildung $N_0: \mathcal{N}_{(0)} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$ sei ebenfalls so wie in Lemma 5.7 definiert.

5.9 Lemma. *Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}), sie liegen also nicht in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Ursprungsebene von $\mathbb{F}_{d,K}$.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{N})$, so dass $\mathcal{B}^{(i)}$ eine $(d-k)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}^{(i)}$ definiert durch

$$\mathcal{B}^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} : \xi(p, N) = \xi(p', N')\}.$$

Beweis. Es sei der Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ so gewählt, dass $\langle q, p^{(j)} \rangle \neq 0$ ist, und q weder auf $\xi(p^{(j)}, \hat{N})$ liegt, noch ein Vielfaches des Vektors \hat{N} ist. Dann existieren offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)}$ um $(p^{(j)}, N)$ in \mathcal{N}_M , so dass auf ganz $\mathcal{N}^{(j)}$ die Lipschitz-Killing-Krümmung φ_{d-1} nicht verschwindet, und für alle $(p, N) \in \mathcal{N}^{(j)}$ der Punkt q weder auf einer der an M tangentialen Hyperebenen $\xi(p, N)$ liegt noch ein Vielfaches des Vektors \hat{N} ist (stets für $j \in \{1, \dots, k\}$).

Wie im Beweis von Lemma 3.8 in der entsprechenden Situation im Euklidischen reicht es aus zu zeigen, dass die Normalenvektoren $\tilde{N}(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{p}(p^{(j)}, \hat{N})))$ linear unabhängig sind (vergleiche hierzu Lemma 5.6; beachte auch Lemma 5.5; es sei $j \in \{1, \dots, k\}$). Angenommen, sie wären linear abhängig. Dann gäbe es für $j \in \{1, \dots, k\}$ Skalare $\alpha_j \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot \left(p^{(j)} - K \langle q, p^{(j)} \rangle \cdot (q - 2 \langle q, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}) \right) = 0 \quad (5.3)$$

eine nichttriviale Linearkombination der Null ist (vgl. Lemma 5.6). Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektor \hat{N} auf diese Gleichung führt zu (beachte: Es gilt $\langle p^{(j)}, \hat{N} \rangle = 0$ für $j \in \{1, \dots, k\}$)

$$K \langle q, \hat{N} \rangle \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle q, p^{(j)} \rangle = 0.$$

Da $\langle q, \hat{N} \rangle \neq 0$ erfüllt ist, liefert das Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (5.3)

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot p^{(j)} = 0,$$

dies ergibt jetzt jedoch einen Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ im umgebenden \mathbb{R}^{d+1} . \odot

Auf dieselbe Art und Weise wie im Euklidischen (vgl. Korollar 3.9) ergibt sich nun folgendes Korollar:

5.10 Korollar. *Es sei für $j \in \{1, 2\}$ eine Folge von Punkten $(p_i^{(j)}, \hat{N}_i) \in \mathcal{N}_M$ mit $\varphi_{d-1}(p_i^{(j)}, \hat{N}_i) \neq 0$ (mit $i \in \mathbb{N}$; die Punkte $(p_i^{(1)}, \hat{N}_i)$ und $(p_i^{(2)}, \hat{N}_i)$ haben dieselben Eigenschaften wie $(p^{(1)}, \hat{N})$ und $(p^{(2)}, \hat{N})$ in Voraussetzung 5.8) gegeben, so dass*

$$(p, N) := \lim_{i \rightarrow \infty} (p_i^{(1)}, \hat{N}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (p_i^{(2)}, \hat{N}_i)$$

erfüllt ist.

Dann gilt $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$.

5.11 Lemma. *Erneut gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{2, \dots, k\}$, jetzt jedoch sei $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) = 0$. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}), der Vektor $N_0(p^{(1)}, \hat{N})$ sei nicht in dem von diesen Punkten aufgespannten Vektorraum enthalten.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{N})$, so dass $\mathcal{B}_0^{(i)}$ eine $(d - k - 1)$ -dimensionale \mathcal{C}^{1-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei seien $\mathcal{B}_0^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ definiert durch (es werde $\mathcal{N}_0^{(1)} := \mathcal{N}^{(1)} \cap \mathcal{N}_{(0)}$ und $\mathcal{N}_0^{(i)} := \mathcal{N}^{(i)}$ für $i \neq 1$ gesetzt)

$$\mathcal{B}_0^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_0^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} \text{ mit } \xi(p, N) = \xi(p', N')\}.$$

Beweis. Es sei der Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ so wie im Beweis von Lemma 5.9 gewählt. Zusätzlich gelte nun aber noch, dass auch die Vektoren q und $N_0(p^{(1)}, \hat{N})$ nicht linear abhängig seien.

Wie im Beweis von Lemma 3.10 in der entsprechenden Situation im Euklidischen reicht es, dass die Normalenvektoren an die zu $\mathcal{N}_0^{(i)}$ gehörigen Pedalflächen (für $i \in \{1, \dots, k\}$)

linear unabhängig sind. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Somit gibt es Skalare $\alpha_j \in \mathbb{R}$ (für $j \in \{0, \dots, k\}$), so dass

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \cdot \left(N_0(p^{(1)}, \hat{N}) - K \langle q, N_0(p^{(1)}, \hat{N}) \rangle \cdot (q - 2 \langle q, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot \left(p^{(j)} - K \langle q, p^{(j)} \rangle \cdot (q - 2 \langle q, \hat{N} \rangle \cdot \hat{N}) \right) \end{aligned}$$

eine nichttriviale Linearkombination der Null ist (vergleiche hierzu Lemma 5.6 sowie Lemma 5.7; beachte auch Lemma 5.5). Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektor \hat{N} auf diese Gleichung führt (mit $\langle q, \hat{N} \rangle \neq 0$ und $K \neq 0$) wie im Beweis von Lemma 5.9 zu einer Bedingung, die – in diese Gleichung eingesetzt – einen Widerspruch zu der in den Voraussetzungen geforderten linearen Unabhängigkeit ergibt. \odot

Mit entsprechenden Beweismethoden wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen ergibt sich schließlich auch das folgende Lemma (vgl. Lemma 3.11):

5.12 Lemma. *Es sei $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{\tilde{k}+1, \dots, k\}$ sowie $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ erfüllt (für geeignetes $\tilde{k} \in \{2, \dots, k\}$). Weiterhin seien die Vektoren $N_0(p^{(1)}, \hat{N}), \dots, N_0(p^{(\tilde{k})}, \hat{N}), p^{(\tilde{k})}, \dots, p^{(k)}$ linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}).*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{N})$, so dass $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ für $i \in \{\tilde{k}, \dots, k\}$ von einer $(d - k - 1)$ -dimensionalen \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M überdeckt werden kann. Dabei sei $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ definiert durch (es werde $\mathcal{N}_0^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)} \cap \mathcal{N}_{(0)}$ für $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ und $\mathcal{N}_0^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)}$ für $j \in \{\tilde{k}+1, \dots, k\}$ gesetzt)

$$\mathcal{B}_{00}^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_0^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} \text{ mit } \xi(p, N) = \xi(p', N')\}.$$

Berührflächen bei Hyperflächen

Speziell für Hyperflächen ergeben sich aus Lemma 5.9, Lemma 5.11 bzw. Lemma 5.12 die folgenden drei Korollare, da in dieser Situation $\pi_{M_{d-1}}: \mathcal{N}_{M_{d-1}} \rightarrow M_{d-1}$ lokal ein Diffeomorphismus ist.

5.13 Korollar. *Es sei sowohl $\varphi_{d-1}(p^{(1)}, \hat{N}) \neq 0$ als auch $\varphi_{d-1}(p^{(2)}, \hat{N}) \neq 0$ erfüllt; zusätzlich gelte nun $p^{(1)} \in M_{d-1}$, d.h. $p^{(1)}$ liegt nun auf einer Hyperfläche.*

Dann ist die Menge $\pi_M(\mathcal{B}^{(1)})$ der Punkte von M_{d-1} (in einer Umgebung von $p^{(1)}$), in denen die Tangentialhyperebene wie $\hat{\xi}$ in mehreren Punkten tangential an M ist, eine $(d - 2)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von M_{d-1} (dabei sei $\mathcal{B}^{(1)}$ so wie in Lemma 3.8 definiert).

5.14 Korollar. *Es sei wieder $\varphi_{d-1}(p^{(2)}) \neq 0$ und $\varphi_{d-1}(p^{(1)}) = 0$ erfüllt; zusätzlich gelte nun $p^{(1)} \in M_{d-1}$, d.h. $p^{(1)}$ liegt nun auf einer Hyperfläche.*

Dann ist die Menge $\pi_M(\mathcal{B}_0^{(1)})$ der Punkte von M_{d-1} (in einer Umgebung von $p^{(1)}$), in denen die Tangentialhyperebene wie $\hat{\xi}$ in mehreren Punkten tangential an M ist, und in

denen die Gauß-Krümmung verschwindet, eine $(d-3)$ -dimensionale C^{l-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von M_{d-1} (dabei sei $\mathcal{B}_0^{(1)}$ so wie in Lemma 5.11 definiert).

5.15 Korollar. *Es seien dieselben Voraussetzungen wie in Lemma 5.12 erfüllt; zusätzlich gelte nun $p^{(1)} \in M_{d-1}$, d.h. $p^{(1)}$ liegt nun auf einer Hyperfläche.*

Dann kann die Menge $\pi_M(\mathcal{B}_{00}^{(1)})$ der Punkte von M_{d-1} (in einer Umgebung von $p^{(1)}$), in denen die Tangentialhyperebene wie $\hat{\xi}$ in mehreren Punkten mit verschwindender Gauß-Krümmung tangential an M ist, durch eine $(d-3)$ -dimensionale C^{l-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von M_{d-1} überdeckt werden (dabei sei $\mathcal{B}_{00}^{(1)}$ so wie in Lemma 5.12 definiert).

5.1.3 Hüllflächen

Es seien wieder dieselben Voraussetzungen erfüllt wie im vorhergehenden Abschnitt 5.1.2 (vgl. Voraussetzung 5.8). Mit elementaren geometrischen Überlegungen ergibt sich dann das folgende Lemma:

5.16 Lemma. *Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}).*

Dann ist die von den Mehrfachtangentialhyperebenen mit k Berührungspunkten an M lokal um $p^{(1)}$ eingehüllte Fläche \bar{M} gegeben durch (vergleiche Lemma 5.9 für die Definition von $\mathcal{B}^{(1)}$)

$$\bar{M} := \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot f^{(j)}(p^{(1)}, \dots, p^{(k)}) \mid \lambda \in \mathbb{F}_{k,K}^1 \text{ und } (p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ für } \right. \\ \left. j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } \xi(p^{(1)}, N^{(1)}) = \xi(p^{(j)}, N^{(j)}) \right\}$$

(hierbei sei durch $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ eine aus den Vektoren $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ – beispielsweise mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren – gewonnene Orthogonalbasis mit $\langle f^{(k)}, f^{(k)} \rangle = \frac{1}{K}$ und $\langle f^{(i)}, f^{(i)} \rangle = \frac{1}{|K|}$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ gegeben; beachte, dass hier im Gegensatz zum Euklidischen in Lemma 3.15 nun die gesamte eingehüllte Fläche angegeben ist, nicht nur diejenige Teilfläche „zwischen“ den Berührungspunkten, auf die sich das spätere Interesse konzentriert).

5.17 Lemma. *Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(i)}, \hat{N}) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien affin unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}).*

Dann ist das Normalenbündel $\mathcal{N}_{\bar{M}}$ der in Lemma 3.15 definierten Fläche \bar{M} eine $(d-1)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ immersierte C^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Dies lässt sich auf die gleiche Art und Weise wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen beweisen (vgl. Lemma 4.5), da auch nun der Normalenvektor im Punkt $\sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot f^{(j)}(p^{(1)}, \dots, p^{(k)})$ für $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)}$ (mit $j \in \{1, \dots, k\}$; es werden die Bezeichnungen aus Lemma 5.16 verwendet) gegeben ist durch $N^{(1)}$. ©

5.1.4 Bezeichnungen

Für die Beweise der Sätze des folgenden Abschnitts 5.2.1 ist es sinnvoll noch einige Bezeichnungen einzuführen, die die Lotgeodätischen von Hyperebenen betreffen:

5.18 Lemma. *Es sei $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ (mit $d \geq 2$ und $K \neq 0$). Weiterhin sei $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ eine beliebige Hyperebene mit Normaleneinheitsvektor $N \in \mathbb{F}_{d,K}^1$, so dass der Punkt q weder in ξ liegt noch orthogonal zu ξ ist. Es sei $\tilde{p} \in \xi$ der Lotfußpunkt der Hyperebene ξ , und $\varrho \in \mathbb{R}$ der (bezüglich des Normalenvektors N) orientierte Abstand von ξ zum Punkt q . Es sei $Y \in \mathbb{F}_{d,K}^1$ der Tangentialeinheitsvektor der Lotgeodätischen η an ξ im Punkt q (mit der gleichen Orientierung wie der Vektor N in \tilde{p} ; vergleiche auch Abbildung 5.1).*

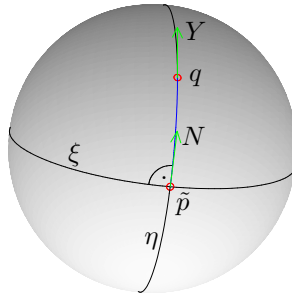


Abbildung 5.1: Die beschriebene Situation für $K > 0$ und $d = 2$

Dann gilt

$$q = j_1(\varrho) \cdot \tilde{p} + j_2(\varrho) \cdot N, \quad (5.4)$$

$$Y = -K j_2(\varrho) \cdot \tilde{p} + j_1(\varrho) \cdot N, \quad (5.5)$$

$$N = K j_2(\varrho) \cdot q + j_1(\varrho) \cdot Y \text{ sowie} \quad (5.6)$$

$$\tilde{p} = j_1(\varrho) \cdot q + j_2(\varrho) \cdot Y. \quad (5.7)$$

Beweis. Gleichung (5.4) gilt nach Definition von ϱ , Gleichung (5.5) ergibt sich daraus durch Ableiten nach ϱ , die Gleichungen (5.6) sowie (5.7) sind Linearkombinationen der ersten beiden (beachte jeweils Lemma 1.2). ☺

5.19 Korollar. *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 5.18 gilt*

$$j_2(\varrho) = \langle q, N \rangle \text{ sowie} \quad j_1(\varrho) = \sqrt{1 - K \langle q, N \rangle^2}.$$

Beweis. Diese Gleichungen ergeben sich unmittelbar aus Lemma 5.18 mit Hilfe von Lemma 5.2. ☺

5.2 Hyperflächen

Nun erfolgt die Formulierung und der Beweis der Formeln für das kinematische Maß einer Menge \mathcal{D} von Hyperebenen, deren Schnittverhalten bezüglich einer gegebenen Hyperfläche „geeignet“ ist – mit einer nichttangentialen Hyperebene seien also auch sämtliche

Hyperebenen einer Umgebung in \mathcal{D} enthalten. In Abschnitt 5.2.1 erfolgt die Angabe der Voraussetzungen, die Konstruktion der in der Formel benötigten Teilflächen der gegebenen Fläche sowie der Formel selbst. Im Gegensatz zum Euklidischen ergibt sich hier auf direktem Weg lediglich ein Analogon zu derjenigen Formel, die noch abhängig von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes ist. Im anschließenden Abschnitt 5.2.2 erfolgt der Beweis analog zum Vorgehen im Euklidischen (vgl. Abschnitt 3.2.3).

5.2.1 Formulierung der Aussage

5.20 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 5.2 sei $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ ein fest gewählter Punkt, und M sei eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ (mit $d \geq 2$ und $K \neq 0$) immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^3 -differenzierbare Hyperfläche mit den folgenden Eigenschaften (dabei sei $M_{(*)} \subseteq M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{1, \dots, d-3\}$):

- Es gelte $q \notin M$. Für alle $p \in M$ sei $K \langle q, p \rangle > 0$ erfüllt (insbesondere gilt dann auch $|\langle q, N(p) \rangle| < \sqrt{|K|}$). Beachte: Ist $K < 0$, so ist die zweite Eigenschaft stets erfüllt, ist $K > 0$, so ist sie genau dann erfüllt, wenn M in der Hemisphäre mit Mittelpunkt q liegt).
- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$, d.h. die Selbstdurchdringungen von M seien transversal.
- Die Abbildung $\varphi_{d-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ habe Null als regulären Wert, insbesondere ist somit $M_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).
- Die Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhyperebenen an M , die in einem Punkt mit verschwindender Gauß-Krümmung tangential an M sind, seien in $M_{(*)}$ enthalten (für hinreichende Kriterien vergleiche die Aussagen in Abschnitt 5.1.2).

Da M orientierbar ist, kann ein Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{F}_{d,P}^1$ von M gewählt werden. Im folgenden werden die mittleren Krümmungen von M stets bezüglich dieses fest gewählten N bestimmt (vergleiche hierzu auch Bemerkung 3.26 über den Einfluss dieser Wahl im Euklidischen, die sinngemäß auch für $K \neq 0$ gilt).

Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ fest gewählt. Diese Menge von Hyperebenen sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)} \setminus \mathcal{T}$ (dabei bezeichne $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ die Menge aller Hyperebenen, die tangential an die Mannigfaltigkeit M sind). Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D})$ das bewegungsinvariante Maß der Menge \mathcal{D} , d.h. es gilt (für die Hyperebenenendichte $d\xi$ vergleiche [21, section IV.17.3.]

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\xi \in \mathcal{D}} d\xi.$$

5.21 Definition. Wird mit $M_{\geq 2} \subseteq M$ die Menge der Punkte der Mannigfaltigkeit M bezeichnet, in denen die Tangentialhyperebene noch in mindestens einem weiteren Punkt tangential an M ist, so sei $\mathcal{A} := M_{\geq 2} \cup M_{(0)}$.

Dann seien die Mengen $M^+ \subseteq M$ sowie $M^- \subseteq M$ definiert durch (es werde zur Abkürzung $p_\delta(p) := j_1(\delta) \cdot p + \text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) j_2(\delta) \cdot N(p)$ für $p \in M$ und $\delta \in \mathbb{R}$ gesetzt)

$$M^+ := \{p \in M \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p_\delta(p), \frac{\partial p_\delta}{\partial \delta} \Big|_p) \in \mathcal{D}\} \setminus \mathcal{A},$$

$$M^- := \{p \in M \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p_{-\delta}(p), \frac{\partial p_{-\delta}}{\partial \delta} \Big|_p) \in \mathcal{D}\} \setminus \mathcal{A}.$$

Also ist M^+ die Menge der Punkte $p \in M$ (bis auf Berührungspunkte von Mehrfachberührungsebenen und Punkte verschwindender Gauß-Krümmung), deren „entlang“ der in p zu M orthogonalen Geodätischen in Richtung $\text{sign}(\varphi_{d-1}) \cdot N$ verschobene Tangentialebene (lokal) in \mathcal{D} liegt; entsprechend werde für die Menge M^- die in Richtung $-\text{sign}(\varphi_{d-1}) \cdot N$ verschobenen Tangentialebenen betrachtet.

5.22 Satz. *Es werde für $p \in M$ mit $\varrho(p) \in \mathbb{R}$ wie in Lemma 5.18 der (orientierte) Abstand der Tangentialhyperebene $\xi(p, N(p))$ an M zum Punkt q bezeichnet. Für $K > 0$ sei $\hat{\xi} \in \mathcal{E}_{d-1,d}K$ diejenige Hyperebene, deren Normalenvektor durch q gegeben ist.*

Dann gilt (im Fall $K > 0$ für $\hat{\xi} \notin \mathcal{D}$)

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{p \in M^+} \frac{j_1(\text{dist}(q, p))}{(j_1(\varrho(p)))^d} \left(\int_0^{\varrho(p)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \varphi_{d-1}(p) dO \\ &\quad - \int_{p \in M^-} \frac{j_1(\text{dist}(q, p))}{(j_1(\varrho(p)))^d} \left(\int_0^{\varrho(p)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \varphi_{d-1}(p) dO \end{aligned}$$

(das hierbei auftretende „innere“ Integral wurde in Lemma 1.4 explizit bestimmt). Der Fall $\xi \in \mathcal{D}$ für $K > 0$ lässt sich wegen

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_d)}{2\sqrt{K}^d} - \mu(\mathcal{E}_{d-1,d}K \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{T}))$$

auf den ersten zurückführen.

5.2.2 Der Beweis des Satzes

Die hinter dem Beweis stehende Idee ist genau dieselbe wie im Euklidischen (vergleiche hierzu auch die Erläuterungen in Abschnitt 3.2.3). Wegen der bereits in der Formulierung von Satz 5.22 gelieferten Begründung werde der Sonderfall für $K > 0$ oBdA nicht betrachtet.

5.23 Lemma. *Für die in Abschnitt 5.2.1 definierten Mengen gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Die Menge \mathcal{D} ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$.*
2. *Die Mengen M^+ sowie M^- sind offene Teilmengen in M .*

3. Die nichtsingulären Punkte des (topologischen) Randes von \mathcal{D} sind genau durch diejenigen Hyperebenen gegeben, die tangential an M in einem Punkt von M^+ oder M^- sind.
4. Die Menge der singulären Punkte des (topologischen) Randes von \mathcal{D} ist endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von m -Rechtecken (mit $m \in \{0, \dots, d-2\}$). Insbesondere bilden die Punkte nichtverschwindender Gauß-Krümmung, deren Tangentialhyperebene genau zwei Berührungspunkte mit M besitzt, eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M .
5. Die Menge derjenigen Punkte im Rand von \mathcal{D} , die nicht singulär sind, bilden eine \mathcal{C}^2 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 3.34 für die entsprechende Situation im Euklidischen lassen sich diese Aussage alle auf Voraussetzung 5.20, Definition 5.21 sowie die Lemmas und Korollare der Abschnitte 5.1.1 und 5.1.2 zurückführen. \odot

5.24 Lemma. Für $p \in M^+ \cup M^-$ sei der Vektor $Y(p)$ sowie der (orientierte) Abstand $\varrho(p)$ von \tilde{p} zu q so wie in Lemma 5.18 definiert (bezüglich der Hyperebene $\xi(p, N(p))$). Dann gilt

$$\det(dY, \dots, dY, Y, q) = (-1)^{d-1} \frac{j_1(\text{dist}(q, p))}{(j_1(\varrho(p)))^d} \varphi_{d-1}(p) \det(dp, \dots, dp, N, p).$$

Beweis. Mit Hilfe von Gleichung (5.6) aus Lemma 5.18 lässt sich die linke Seite umformen zu

$$\det(dY, \dots, dY, Y, q) = \frac{1}{j_1(\varrho(p))} \det(dY, \dots, dY, N, q)$$

Wiederum mit Gleichung (5.6) folgt daraus weiter

$$= \frac{1}{(j_1(\varrho(p)))^d} \det(dN, \dots, dN, N, q).$$

Da p sowohl orthogonal zu $N(p)$ als auch orthogonal zu den partiellen Ableitungen von N in p ist, und all diese Vektoren eine Basis des Gesamtraumes bilden (beachte: Die Gauß-Krümmung in p verschwindet nicht) lässt sich dies weiter umformen zu

$$\begin{aligned} &= \frac{K \langle q, p \rangle}{(j_1(\varrho(p)))^d} \det(dN, \dots, dN, N, p) = \frac{j_1(\text{dist}(q, p))}{(j_1(\varrho(p)))^d} \det(dN, \dots, dN, N, p) \\ &= (-1)^{d-1} \frac{j_1(\text{dist}(q, p))}{(j_1(\varrho(p)))^d} \varphi_{d-1}(p) \det(dp, \dots, dp, N, p). \end{aligned} \quad \odot$$

5.25 Folgerung. Die Aussage von Satz 5.22 ist richtig.

Beweis. Die Hyperebenen $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$, die nicht den Punkt q enthalten, sind eindeutig gegeben durch ihren Abstand ϱ zum Punkt q sowie die Geodätische η , die durch den Lotfußpunkt von ξ und den Punkt q bestimmt ist. Mit Hilfe der Formel für die Hyperebendichte $d\xi$ in Abhängigkeit von ϱ und η gilt dann (vgl. [21, formula (17.41) in IV.17.3])

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\xi \in \mathcal{D}} d\xi = \int_{\xi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{L}_{d-1,d}^{(K)}} d\xi = \int_{\xi(\varrho,\eta) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{L}_{d-1,d}^{(K)}} (j_1(\varrho))^{d-1} d\varrho \wedge d\eta$$

Da die Menge \mathcal{D} nach Entfernung aller Hyperebenen, die den Punkt q enthalten, sicherlich orientierbar ist, kann nun – wie in Folgerung 3.35 für die entsprechende Situation im Euklidischen – der Satz von Stokes für Flächen mit Singularitäten angewendet werden (beachte Lemma 5.23), und es folgt (beachte: Da der Integrand auf den Ursprungshyperebenen nach Anwendung des Satzes von Stokes nach Lemma 1.4 auch hier verschwindet, müssen diese im folgenden nicht separat betrachtet werden)

$$= \int_{\xi(\eta) \in \partial\mathcal{D}} \left(\int_0^{\varrho(\eta)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) d\eta.$$

Wird jetzt jede Geodätische η mit ihrem (normierten) „Startvektor“ $Y(\eta)$ in q identifiziert (vgl. Lemma 5.18), so gilt weiter

$$= \frac{1}{(d-1)!} \int_{\xi(Y) \in \partial\mathcal{D}} \left(\int_0^{\varrho(Y)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \det(-dY, \dots, -dY, Y, \sqrt{|K|} \cdot q).$$

Nach Definition der Teilflächen M^+ und M^- von M (vgl. Definition 5.21) und Lemma 5.23 ergibt sich nun (beachte: Die Orientierung von $\partial\mathcal{D}$ ist durch den Satz von Stokes vorgegeben, die Gewichtung der jeweils zugehörigen Teilflächen von M ergibt sich dann hieraus wie im Euklidischen im Beweis von Folgerung 3.35)

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in M^+} \left(\int_0^{\varrho(p)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \det(dY, \dots, dY, Y, \sqrt{|K|} \cdot q) \\ &\quad - \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{p \in M^-} \left(\int_0^{\varrho(p)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \det(dY, \dots, dY, Y, \sqrt{|K|} \cdot q). \end{aligned}$$

Anwenden von Lemma 5.24 führt nun zur zu zeigenden Aussage. ☺

5.3 Flächen beliebiger Kodimension

In diesem abschließenden Unterkapitel wird das Ergebnis für orientierbare Hyperflächen auf Mannigfaltigkeiten allgemeiner Dimension verallgemeinert. Die Vorgehensweise hierbei ist identisch – für die hier betrachteten von einem gewählten Punkt abhängigen Formeln – zu derjenigen im Euklidischen in Unterkapitel 3.3.

5.3.1 Formulierung der Aussage

5.26 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 5.3 sei $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ ein fest gewählter Punkt, und M_m sei eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$ und $K \neq 0$) immersierte unberandete \mathcal{C}^4 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit, oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$.

Weiterhin seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (dabei sei $\mathcal{N}_{(*)} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$; mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ gemeint):

- Es gelte $q \notin M$. Für alle $p \in M$ sei $K \langle q, p \rangle > 0$ erfüllt (insbesondere gilt dann auch $|\langle q, N(p) \rangle| < \sqrt{|K|}$). Beachte: Ist $K < 0$, so ist die zweite Eigenschaft stets erfüllt, ist $K > 0$, so ist sie genau dann erfüllt, wenn M in der Hemisphäre mit Mittelpunkt q liegt).
- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$.
- Die Abbildung $\varphi_{d-1}: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Lipschitz-Killing-Krümmung, habe Null als regulären Wert, insbesondere ist $\mathcal{N}_{(0)} := \varphi_{d-1}^{-1}(\{0\})$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).
- Verschwindet die Lipschitz-Killing-Krümmung in genau einem der beiden Berührungspunkte einer Doppeltangentialhyperebene, und ist in diesem Berührungspunkt die Abbildung $\mathcal{N}_{(0)} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$, $(p, N') \mapsto N'$ lokal keine Immersion, so seien beide Berührungspunkte in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten.

Aufgrund der Aussagen in Abschnitt 5.1.2 kann oBdA davon ausgegangen werden, dass alle Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhyperebenen an M , die in einem Punkt verschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung tangential an M sind, in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten seien.

Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ fest gewählt. Diese Menge von Hyperebenen sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)} \setminus \mathcal{T}$ (dabei bezeichne $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ die Menge aller Hyperebenen, die tangential an die Mannigfaltigkeit M sind). Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D})$ das bewegungsinvariante Maß der Menge \mathcal{D} , d.h. es gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\xi \in \mathcal{D}} d\xi.$$

5.27 Definition. Es werde mit $\mathcal{N}_{\geq 2} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge der $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ bezeichnet, für die die Hyperebene $\xi(p, N)$ in mehr als einem Punkt tangential an M ist. Dann ist $\mathcal{N}' := \mathcal{N}_M \setminus (\mathcal{N}_{\geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)})$ das Normalenbündel ohne die Ausnahmepunkte.

Dann seien die Mengen $\mathcal{N}^+ \subseteq \mathcal{N}_M$ sowie $\mathcal{N}^- \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch (es werde zur Abkürzung $p_\delta := \mathbf{j}_1(\delta) \cdot p + \text{sign}(\varphi_{d-1}(p)) \mathbf{j}_2(\delta) \cdot N$ für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ und $\delta \in \mathbb{R}$ gesetzt)

$$\mathcal{N}^+ := \left\{ (p, N) \in \mathcal{N}' \mid \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) < 0 \wedge \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p_\delta, \frac{\partial p_\delta}{\partial \delta}) \in \mathcal{D} \right\},$$

$$\mathcal{N}^- := \left\{ (p, N) \in \mathcal{N}' \mid \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N)) > 0 \wedge \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \xi(p_{-\delta}, \frac{\partial p_{-\delta}}{\partial \delta}) \in \mathcal{D} \right\}.$$

5.28 Satz. *Es werde für $(p, N) \in M$ mit $\varrho(p, N) \in \mathbb{R}$ wie in Lemma 5.18 der (orientierte) Abstand der Tangentialhyperebene $\xi(p, N)$ an M zum Punkt q bezeichnet. Für $K > 0$ sei $\hat{\xi} \in \mathcal{E}_{d-1, d} K$ diejenige Hyperebene, deren Normalenvektor durch q gegeben ist.*

Dann gilt (im Fall $K > 0$ für $\hat{\xi} \notin \mathcal{D}$)

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) = & \int_{(p, N) \in \mathcal{N}^+} \frac{\mathbf{j}_1(\text{dist}(q, p))}{(\mathbf{j}_1(\varrho(p, N)))^d} \left(\int_0^{\varrho(p, N)} (\mathbf{j}_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \\ & - \int_{(p, N) \in \mathcal{N}^-} \frac{\mathbf{j}_1(\text{dist}(q, p))}{(\mathbf{j}_1(\varrho(p, N)))^d} \left(\int_0^{\varrho(p, N)} (\mathbf{j}_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \varphi_{d-1}(p, N) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}} \end{aligned}$$

(das hierbei auftretende „innere“ Integral wurde in Lemma 1.4 explizit bestimmt). Der Sonderfall $\hat{\xi} \in \mathcal{D}$ für $K > 0$ lässt sich wie in Satz 5.22 auf diesen Fall zurückführen.

Beweis. Diese Aussage lässt sich mit Hilfe der Aussagen über Parallelfächen in Abschnitt 2.2.2 genauso auf Satz 5.22 zurückführen wie dies in der entsprechenden Situation im Euklidischen in Abschnitt 3.3.2 durchgeführt worden ist. \odot

5.29 Korollar. *Das Ergebnis von Satz 5.28 lässt sich weiter umformen zu*

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{(p, N) \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-} \frac{\mathbf{j}_1(\text{dist}(q, p))}{(\mathbf{j}_1(\varrho(p, N)))^d} \left(\int_0^{\varrho(p, N)} (\mathbf{j}_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) |\varphi_{d-1}(p, N)| \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}(p, N)}}$$

(der Sonderfall $\hat{\xi} \in \mathcal{D}$ lässt sich wie zuvor auf dieses Ergebnis zurückführen).

Beweis. Dies folgt wegen der Definition von \mathcal{N}^+ und \mathcal{N}^- (vgl. Definition 5.27) unmittelbar aus Satz 5.28. \odot

6 Sphären im Nichteuklidischen

Nachdem im vorigen Kapitel 5 das kinematische Maß einer „geeigneten“ Menge von Hyperebenen in den nichteuklidischen Räumen konstanter Krümmung bestimmt worden ist, wird nun in Unterkapitel 6.1 entsprechend der Vorgehensweise im Euklidischen (vgl. Unterkapitel 4.1) das kinematische Maß einer „geeigneten“ Menge von Sphären bestimmt.

In den abschließenden beiden Unterkapiteln wird das Grenzverhalten der Formeln für die Sphären bei wachsendem Radius betrachtet: Im Sphärischen (in 6.3) ergibt sich die in Kapitel 5 nicht erhaltene Formel für Hyperebenen, die unabhängig von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes ist, im Hyperbolischen (in 6.4) ergibt sich eine Formel bezüglich des Schnittverhaltens von Horosphären. Zuvor werden jedoch in Unterkapitel 6.2 Vorbetrachtungen zu den Horosphären durchgeführt.

6.1 Sphären

In diesem Unterkapitel wird – völlig analog zum Vorgehen im Euklidischen in 4.1 – das kinematische Maß einer „geeigneten“ Menge von Sphären bestimmt. Zuvor werden wieder die von mehrfach tangentialen Sphären eingehüllten Flächen sowie von den Berührungspunkten dieser Sphären gebildeten Flächen untersucht.

6.1.1 Berührflächen

Wie im Euklidischen (vgl. Abschnitt 4.1.1) werden auch nun im Nichteuklidischen in diesem Abschnitt zunächst die von den Berührungspunkten mehrfach tangentialer Sphären gebildeten Teilflächen des Normalenbündels untersucht. Insbesondere werden damit hinreichende Kriterien für die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze in den Abschnitten 6.7, 6.3.1 sowie 6.4.1 bereitgestellt.

6.1 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M_m stets eine m -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immensierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$, $l \geq 3$ und $K \neq 0$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$ sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{F}_{d,K}^1$. Weiterhin sei $r > 0$ fest gewählt; ist $K > 0$, so gelte zusätzlich $r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$.

Schließlich sei $\hat{\zeta} \in \mathcal{S}_{d,K,r}$ eine Sphäre mit Radius r , die in den k (verschiedenen) Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ tangential an M sei (für $k \in \{1, \dots, d\}$). Es sei $N^{(j)} \in \mathbb{S}_{d-1}$ derjenige Normalenvektor von M in $p^{(j)}$, für den $j_1(r) \cdot p^{(j)} - j_2(r) \cdot N^{(j)}$ der Mittelpunkt der Sphäre $\hat{\zeta}$ ist, es gilt also $\hat{\zeta} = \zeta_r(j_1(r) \cdot p^{(j)} - j_2(r) \cdot N^{(j)})$ (für $j \in \{1, \dots, k\}$).

Um die im weiteren Verlauf des Kapitels auftretenden Terme übersichtlicher gestalten zu können, erfolgt die folgende Definition:

6.2 Definition. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dann sei $p_\varepsilon: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ diejenige Abbildung, die jedem Punkt des Normalbündels den zugehörigen Punkt der Parallellfläche M_ε zuordnet, es gilt also

$$p_\varepsilon: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}, (p, N) \mapsto j_1(\varepsilon) \cdot p - j_2(\varepsilon) \cdot N.$$

Weiter sei $N_\varepsilon: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$ diejenige Abbildung, die jedem Punkt des Normalbündels den (kanonischen – im Falle der Nichtregularität der Parallellfläche) Normalenvektor im zugehörigen Punkt der Parallellfläche M_ε zuordnet, es gilt also (vgl. Lemma 2.49)

$$N_\varepsilon: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1, (p, N) \mapsto -(K j_2(\varepsilon) \cdot p + j_1(\varepsilon) \cdot N).$$

Die folgenden beiden Lemmas entsprechen den jeweiligen Aussagen im Euklidischen (vergleiche Lemma 4.2 bzw. Lemma 4.3); die Beweise übertragen sich jeweils unmittelbar, die Aussagen können also wieder auf die Eigenschaften der Parallellflächen, die in Kapitel 2.2 untersucht worden sind, zurückgeführt werden.

6.3 Lemma. Es sei $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ in keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ eine Hauptkrümmung (für $j \in \{1, \dots, k\}$), die Vektoren $K j_2(r) \cdot p^{(1)} + j_1(r) \cdot N^{(1)}, \dots, K j_2(r) \cdot p^{(k)} + j_1(r) \cdot N^{(k)}$ seien linear unabhängig.

Dann gibt es (für $j \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$, so dass $\mathcal{B}^{(j)}$ eine $(d - k)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}^{(j)}$ definiert durch

$$\mathcal{B}^{(j)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}^{(j)} \mid \forall i \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(i)} \text{ mit } \zeta_r(p_r(p, N)) = \zeta_r(p_r(p', N'))\}.$$

6.4 Lemma. Es sei $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ in keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ eine Hauptkrümmung (für $j \in \{2, \dots, k\}$), jetzt jedoch sei genau eine der Hauptkrümmungen in $(p^{(1)}, N^{(1)})$ gleich $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$, oBdA gelte $\kappa_1(p^{(1)}, N^{(1)}) = -\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$. Ferner sei $(p^{(1)}, N^{(1)})$ ein regulärer Punkt der Abbildung $\kappa_1: \mathcal{N}_M \rightarrow \mathbb{R}$; setze $\mathcal{N}_{(r)} := \kappa_k^{-1}(\{-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}\})$.

Es gebe ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, für das die Parallellfläche M_ε im Punkt $j_1(\varepsilon) \cdot p^{(1)} - j_2(\varepsilon) \cdot N^{(1)}$ regulär ist, und die Hauptkrümmungsrichtungen zur Hauptkrümmung $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ transversal zu $\pi_{M_\varepsilon}(\mathcal{N}_{(r)})$ im Punkt $j_1(\varepsilon) \cdot p^{(1)} - j_2(\varepsilon) \cdot N^{(1)}$ sind (beachte: Existiert so ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, so gelten diese Eigenschaften nach Lemma 2.49 für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ bis auf endlich viele; die Hauptkrümmung $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ werde bezüglich $(p^{(1)}, N^{(1)})$ bestimmt). Insbesondere ist $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ keine mehrfache Hauptkrümmung in $(p^{(1)}, N^{(1)})$, und es gibt eine (bis auf die Orientierung) eindeutige Hauptkrümmungsrichtung $V \in \mathbb{F}_{d,K}$. Schließlich seien die Vektoren $K j_2(r) \cdot p^{(1)} + j_1(r) \cdot N^{(1)}, \dots, K j_2(r) \cdot p^{(k)} + j_1(r) \cdot N^{(k)}$ sowie V linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}).

Dann gibt es (für $j \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$, so dass $\mathcal{B}^{(j)}$ eine $(d - k - 1)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Hierbei sei $\mathcal{B}^{(j)}$ gegeben durch (es werde $\mathcal{N}_{(r)}^{(1)} := \mathcal{N}^{(1)} \cap \mathcal{N}_{(r)}$

und $\mathcal{N}_{(r)}^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)}$ für $j \neq 1$ gesetzt)

$$\mathcal{B}^{(j)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_{(r)}^{(j)} \mid \forall i \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(i)} \text{ mit } \zeta_r(p_r(p, N)) = \zeta_r(p_r(p', N'))\}.$$

6.1.2 Hüllflächen

Mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt 6.1.1 untersuchten Flächen, die von den Berührungspunkten von mehrfach tangentialen Sphären gebildet werden, werden in diesem Abschnitt die von diesen Sphären eingehüllten Flächen betrachtet. Diese Flächen treten in den Formeln der nachfolgenden Sätze in den Abschnitten 6.1.3 sowie 7.3.2 auf.

In diesem Abschnitt seien dieselben Voraussetzungen wie in Abschnitt 6.1.1 erfüllt (vgl. Voraussetzung 6.1).

6.5 Konstruktion. In keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ sei $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ eine Hauptkrümmung (für $j \in \{1, \dots, k\}$), die Vektoren $N_r(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, N_r(p^{(k)}, N^{(k)})$ seien linear unabhängig.

Dann ist die von den Mehrfachtangentialsphären mit k Berührungspunkten an M lokal um $p^{(1)}$ eingehüllte Fläche \check{M} gegeben durch (vergleiche Lemma 6.3 für die Definition von $\mathcal{B}^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$)

$$\check{M} := \{p_r(p_r(p^{(1)}, N^{(1)}), \check{N}(\lambda, (p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)}))) \mid (p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ für } j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } \zeta_r(p_r(p^{(1)}, N^{(1)})) = \zeta_r(p_r(p^{(j)}, N^{(j)})) \text{ und } \lambda \in \mathbb{S}_{k-1}\}.$$

Hierbei sei der Vektor \check{N} (für die jeweiligen Werte von λ und $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})$) aus der Definition der Fläche \check{M} definiert durch

$$\check{N}(\lambda, (p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})) := \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot f^{(j)},$$

wobei $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ eine aus den Vektoren $N_r(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, N_r(p^{(k)}, N^{(k)})$ gewonnene Orthonormalbasis ist.

Ein Normalenvektor an die von den k -fach berührenden Sphären eingehüllte Fläche im Punkt $p_r(p_r(p^{(1)}, N^{(1)}), \check{N}(\lambda, (p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})))$ ist dann gegeben durch (es seien jeweils $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ und $\lambda \in \mathbb{S}_{k-1}$ so wie in der Definition von \check{M} gewählt)

$$\check{N}_r := -(K j_2(r) \cdot p_r(p^{(1)}, N^{(1)}) + j_1(r) \cdot \check{N}(\lambda, N^{(1)}, N^{(2)})).$$

Wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Lemma 4.5) ergibt sich nun, dass das Normalenbündel der eingehüllten Flächen regulär ist:

6.6 Lemma. In keinem der Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ sei $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ eine Hauptkrümmung (für $j \in \{1, \dots, k\}$), die Vektoren $N_r(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, N_r(p^{(k)}, N^{(k)})$ seien linear unabhängig.

Dann ist das Normaleneinheitsbündel $\mathcal{N}_{\check{M}}$ der in Konstruktion 6.5 definierten Fläche \check{M} eine $(d-1)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ immensierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

6.1.3 Formulierung der Aussagen

6.7 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 6.1 sei M_m stets eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte unberandete \mathcal{C}^3 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$ sowie $K \neq 0$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$. Weiterhin sei $r > 0$ fest gewählt; ist $K > 0$, so gelte zusätzlich $r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$.

Es werde (für $k \in \mathbb{N}$) mit $\mathcal{B}_{r,k} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen Punkte $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ bezeichnet, für die die tangentielle Sphäre $\zeta_r(j_1(r) \cdot p - j_2(r) \cdot N)$ in genau k Punkten tangential an M ist. Weiterhin sei $\mathcal{B}_{(*),k} \subseteq \mathcal{B}_{r,k}$ eine geeignete Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-k-1\}$. Schließlich seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ gemeint):

- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$.
- Die offene Teilmenge $\tilde{\mathcal{N}}_M$ von \mathcal{N}_M habe endlich viele Zusammenhangskomponenten (vgl. Definition 2.61).
- Die singulären Punkte der Menge $\mathcal{B}_{r,2}$ seien Teilmenge einer endlichen Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von m -Rechtecken (mit $m \in \{0, \dots, d-3\}$). Vergleiche Abschnitt 6.1.1 für hinreichende Kriterien hierfür.
- Für $k \in \{3, \dots, d\}$ seien die singulären Punkte von $\mathcal{B}_{r,k}$ (als $(d-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit; insbesondere sei keine Sphäre in mehr als d Punkten tangential an M) in $\mathcal{B}_{(*),k}$ enthalten (vergleiche auch Abschnitt 6.1.1; $\mathcal{B}_{r,k} \setminus \mathcal{B}_{(*),k}$ besitze endlich viele Zusammenhangskomponenten).
- Die Berührungspunkte von Sphären, die in einem Punkt, in dem eine Hauptkrümmung gleich $-\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ ist, tangential an M sind oder die nicht affin unabhängig sind, seien in $\bigcup_{k=2}^d \mathcal{B}_{(*),k}$ enthalten.
- Ist $K > 0$ so gebe es einen Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$, dessen Abstand zu M größer als r ist. Dieser spiele die Rolle des Punktes q_r in Abschnitt 2.2.6 beim Berechnung der Windungszahlen.

Es werde mit $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{S}_{d,r}$ die Menge aller Sphären bezeichnet, die tangential an M sind. Dann sei eine Menge $\mathcal{D}_r \subseteq \mathcal{S}_{d,r}$ fest gewählt. Diese Menge von Sphären sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten (im Fall $K < 0$) bzw. den Punkt q nicht enthaltenden (im Fall $K > 0$) Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{S}_{d,r} \setminus \mathcal{T}_r$. Es sei $D \subseteq \mathbb{F}_{d,K}$ die Menge der Mittelpunkte der Sphären aus \mathcal{D}_r , d.h. es gilt

$$D = \{p \in \mathbb{F}_{d,K} \mid \zeta_r(p) \in \mathcal{D}_r\}.$$

Der Rand von D wird dann offensichtlich von einer Teilmenge der Parallelfläche M_r zu M im Abstand r gebildet. Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D}_r)$ das bewegungsinvariante Maß der

Menge \mathcal{D}_r , d.h. es gilt

$$\mu(\mathcal{D}_r) = \int_{\zeta \in \mathcal{D}_r} d\zeta = \int_D dV.$$

6.8 Definition. Es seien die offenen Mengen $\mathcal{N}_r^+ \subseteq \mathcal{N}_M$ sowie $\mathcal{N}_r^- \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch (setze zur Abkürzung $\mathcal{N}' := \mathcal{N}_M \setminus \bigcup_{k=3}^d \mathcal{B}_{r,k}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r^+ &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \exists \varepsilon \in]0, r[\forall \delta \in]0, \varepsilon[: \zeta_r(p_{r-\sigma_r(p,N)} \delta(p, N)) \in \mathcal{D}_r\}, \\ \mathcal{N}_r^- &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \exists \varepsilon \in]0, r[\forall \delta \in]0, \varepsilon[: \zeta_r(p_{r+\sigma_r(p,N)} \delta(p, N)) \in \mathcal{D}_r\} \end{aligned}$$

(für die Definition der Abbildung σ_r vergleiche Definition 2.72, für die Definition von p Definition 6.2). Weiterhin sei \mathcal{B}_r^+ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_r^+ und \mathcal{B}_r^- die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_r^- .

6.9 Konstruktion. Die Definitionen der (im allgemeinen nicht regulären) Hyperflächen \hat{M}_r (vgl. Konstruktion 4.8), $\check{M}_{k,r}$ und \check{M}_r (für $k \in \{2, \dots, d\}$; vergleiche Konstruktion 4.9 bzw. Konstruktion 4.10), sowie \mathring{M}_r (vgl. Konstruktion 4.12) überträgt sich wortwörtlich aus dem Euklidischen in die hier vorliegende Situation mit $K \neq 0$.

Wie im Euklidischen ergeben sich nun die folgenden beiden Sätze (vergleiche Satz 4.13 bzw. Satz 4.14). Die Beweise übertragen sich jeweils direkt auf die hier vorliegende Situation (vergleiche Lemma 4.15 bzw. Korollar 4.16).

6.10 Satz. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}_r) = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\hat{M}_r} dV + \sum_{j=0}^{d-1} \check{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right),$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \hat{M}_r wohldefiniert (für die Definition der Funktion $\check{c}_{j,d}^{(K)}$ vergleiche Definition 2.52).

6.11 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}_r) &= \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\mathring{M}_r} dV - \sum_{j=0}^{d-1} \check{c}_{j,d}^{(K)}(r) \int_{\check{M}_r} \sigma_r \varphi_j dO \\ &\quad + \sum_{j=0}^{d-1} \check{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

6.2 Horosphären

Die Untersuchung der Pedalflächen bezüglich Horosphären, der von den Berührungspunkten von Mehrfachtangentialhorosphären gebildeten Flächen sowie der zugehörigen Hüllflächen in diesem Unterkapitel erfolgt weitestgehend analog zur Vorgehensweise bei den Hyperebenen im Euklidischen bzw. Nichteuklidischen (vergleiche Unterkapitel 3.1 bzw. 5.1).

6.2.1 Pedalfläche

Wie bereits zuvor bei den Hyperebenen (vergleiche Abschnitt 3.1.1 bzw. Abschnitt 5.1.1) dienen die in diesem Abschnitt untersuchten von den Lotfußpunkten von tangentialen Horosphären gebildeten Flächen als Hilfsmittel für die Untersuchung der Berührungspunkte von mehrfach tangentialen Horosphären im nächsten Abschnitt.

6.12 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine m -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$, $l \geq 3$ und $K < 0$). Schließlich sei noch der Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ fest gewählt.

6.13 Lemma. *Es sei $\zeta_\infty \in \mathcal{H}_d^{(K)}$ eine Horosphäre. Es sei $p \in \zeta_\infty$ und b ein Normalenvektor der zu ζ_∞ zugehörigen Hyperebene, d.h. es gilt $\zeta_\infty = \zeta_\infty(p, b)$.*

Dann ist der Lotfußpunkt $\tilde{p}(p, b)$ der Horosphäre ζ_∞ bezüglich des Punktes q gegeben durch

$$\tilde{p}(p, b) = \frac{1}{2K} \frac{1}{\langle q, b \rangle^2} \frac{1}{\langle p, b \rangle} \cdot \left(2K \langle q, b \rangle \langle p, b \rangle^2 \cdot q - (\langle p, b \rangle^2 - \langle q, b \rangle^2) \cdot b \right).$$

Beweis. Sei $x: U \rightarrow \zeta_\infty$ eine Parametrisierung der Horosphäre ζ_∞ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$). Da im Lotfußpunkt \tilde{p} der Abstand von Punkten von ζ_∞ zu q minimiert wird, gilt (für $i \in \{1, \dots, d-2\}$)

$$\frac{\partial}{\partial u_i} (\langle q, x \rangle) \Big|_{\tilde{p}} = \langle q, \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big|_{\tilde{p}} = 0.$$

Somit liegt q in der linearen Hülle von \tilde{p} und b , da die Vektoren $\frac{\partial x}{\partial u_1} \Big|_{\tilde{p}}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-2}} \Big|_{\tilde{p}}, \tilde{p}, b$ eine Basis bilden, und $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ für $i \in \{1, \dots, d-2\}$ orthogonal zu \tilde{p} und b ist. Mit geeigneten Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$q = \alpha \cdot \tilde{p} + \beta \cdot b. \quad (6.1)$$

Anwenden des Skalarprodukts mit b auf Gleichung (6.1) führt zu $\langle q, b \rangle = \alpha \langle \tilde{p}, b \rangle$. Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (6.1) liefert dann (beachte: Es gilt $\langle \tilde{p}, b \rangle = \langle p, b \rangle \neq 0$, da \tilde{p} und p in ζ_∞ liegen)

$$\langle p, b \rangle \cdot q = \langle q, b \rangle \cdot \tilde{p} + \beta \langle p, b \rangle \cdot b. \quad (6.2)$$

Bestimmen der Quadrate der Längen der Vektoren auf beiden Seiten von Gleichung (6.2) ergibt (beachte: Es gilt $\langle b, b \rangle = 0$)

$$\frac{1}{K} \langle p, b \rangle^2 = \frac{1}{K} \langle q, b \rangle^2 + 2\beta \langle q, b \rangle \langle p, b \rangle^2.$$

Auflösen nach β und Einsetzen in Gleichung (6.2) liefert dann das gesuchte Ergebnis. \odot

6.14 Korollar. Sei $p \in \mathbb{F}_{d,K}$ und $N \in \mathbb{F}_{d,K}^1$ mit $\langle p, N \rangle = 0$.

Dann sind die beiden Horosphären durch p mit Normalenvektor N in p gegeben durch $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p + N)$ sowie $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N)$. Für den Lotfußpunkt $\tilde{p}(p, b)$ dieser Horosphären gilt dann (mit $b := \sqrt{-K} \cdot p + N$ bzw. $b := \sqrt{-K} \cdot p - N$)

$$\tilde{p}(p, b) = \frac{1}{2\sqrt{-K}} \frac{1}{K} \frac{1}{\langle q, b \rangle^2} \cdot \left(-2K \langle q, b \rangle \cdot q + (1 + K \langle q, b \rangle^2) \cdot b \right).$$

Beweis. Setze $b := \sqrt{-K} \cdot b + s \cdot N$ (für $s \in \{-1, +1\}$). Die Vektoren $v_1, \dots, v_{d-1} \in \mathbb{F}_{d,K}^1$ seien so gewählt, dass $v_1, \dots, v_{d-1}, \sqrt{-K} \cdot p, N$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^{d+1} bilden. Sei nun $y \in \zeta_\infty(p, b)$. Mit geeigneten Skalaren $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$y = p + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot v_i + \lambda_d \sqrt{-K} \cdot p + \lambda_{d+1} \cdot N.$$

Aus $\langle y - p, b \rangle = 0$ folgt $\lambda_{d+1} = s \lambda_d$. Damit ergibt sich dann aus $K \langle y, y \rangle = 1$, dass

$$\lambda_d = \frac{\sqrt{-K}}{2} \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^2$$

gilt, die Horosphäre $\zeta_\infty(p, b)$ lässt sich somit parametrisieren via

$$y: \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \zeta_\infty(p, b), (\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}) \mapsto p + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \cdot v_i + \frac{\sqrt{-K}}{2} \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^2 \cdot b.$$

Die partiellen Ableitungen im Punkt p sind gegeben durch die Vektoren v_1, \dots, v_{d-1} , die allesamt orthogonal zu N sind. Also sind $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p + N)$ sowie $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N)$ die beiden gesuchten Horosphären. Die Formel für den Lotfußpunkt \tilde{p} ergibt sich dann direkt aus Lemma 6.13. \odot

6.15 Definition. Es sei \mathcal{N} eine offene Teilmenge des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M . Dann sei $\tilde{\mathcal{N}}$ die zu \mathcal{N} gehörige *Pedalfläche*, d.h. die Fläche, die von den Lotfußpunkten (bezüglich des Punktes q) der an M tangentialen Horosphären gebildet wird. Es gilt also (vergleiche auch Korollar 6.14)

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{ \tilde{p}(p, \sqrt{-K} \cdot p + N) \mid (p, N) \in \mathcal{N} \}$$

(beachte: Diese Definition ist abhängig von der Wahl des Punktes $q \in \mathbb{F}_{d,K}$).

6.16 Lemma. Es sei $s \in \{-1, +1\}$ und \mathcal{N} eine offene Teilmenge des Normalenbündels \mathcal{N}_M , so dass für alle $(p, N) \in \mathcal{N}$ die Hauptkrümmungen $\kappa_i(p, N) \neq s \sqrt{-K}$ erfüllen (für $i \in \{1, \dots, m\}$). Weiterhin liege der Punkt q nicht auf einer der Horosphären $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p + s \cdot N)$.

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}$ eine $(d-1)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ferner ist für $(p, N) \in \mathcal{N}$ ein (im allgemeinen nicht normierter) Normalenvektor der Fläche $\tilde{\mathcal{N}}$ im Punkt $\tilde{p}(p, b)$ gegeben durch (es sei $b := \sqrt{-K} \cdot p + s \cdot N$)

$$\tilde{N}(\tilde{p}(p, b)) = -\frac{s}{\sqrt{-K}} \cdot b + K \langle q, b \rangle \cdot (\langle q, N \rangle \cdot p - \langle q, p \rangle \cdot N) + \frac{s}{2} (1 - K \langle q, b \rangle^2) \cdot \tilde{p}(p, b).$$

Beweis. Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}$ und $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in \mathcal{N} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$). Es sei $b: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0$ die zugehörige Parametrisierung der Normalenvektoren der zu den tangentialen Horosphären zugehörigen Hyperebenen von \mathbb{R}^{d+1} , d.h. es gilt

$$b: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0, u \mapsto \sqrt{-K} \cdot x(u) + s \cdot n(u).$$

Eine Parametrisierung der Pedalfläche $\tilde{\mathcal{N}}$ in einer Umgebung von $\tilde{p}(p, \sqrt{-K} \cdot p + s \cdot N)$ ist dann gegeben durch (vgl. Korollar 6.14)

$$y: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}, u \mapsto \tilde{p}(x(u), b(u)).$$

Somit sind für $i \in \{1, \dots, d-1\}$ die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung gegeben durch

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{1}{2\sqrt{-K}} \frac{1}{K} \frac{1}{\langle q, b \rangle^2} \cdot \left(2 \langle q, \frac{\partial b}{\partial u_i} \rangle \cdot \left(K \cdot q - \frac{1}{\langle q, b \rangle} \cdot b \right) + \left(1 + K \langle q, b \rangle^2 \right) \cdot \frac{\partial b}{\partial u_i} \right).$$

Da nach Voraussetzung alle Hauptkrümmungen von $s\sqrt{-K}$ verschieden sind, sind die Vektoren $\frac{\partial b}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial b}{\partial u_{d-1}}$ linear unabhängig. Da q nicht in der linearen Hülle der Vektoren $b, \frac{\partial b}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial b}{\partial u_{d-1}}$ liegt (wegen $q \in \mathbb{F}_{d,K}$), und da $1 + K \langle q, b \rangle^2 \neq 0$ ist (sonst läge der Punkt q auf der zugehörigen Horosphäre), folgt daraus die lineare Unabhängigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{d-1}}$.

Es ist also noch zu zeigen, dass der angegebene Vektor $\tilde{N}(\tilde{p}(p, b))$ Normalenvektor an die Fläche $\tilde{\mathcal{N}}$ im Punkt $\tilde{p}(p, b)$ ist. Aufgrund von (es sei $i \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial y}{\partial u_i}, x \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{1}{K} \frac{\langle q, \frac{\partial b}{\partial u_i} \rangle}{\langle q, b \rangle^3} \left(K \langle q, b \rangle \langle q, x \rangle + \frac{1}{\sqrt{-K}} \right) \text{ sowie} \\ \left\langle \frac{\partial y}{\partial u_i}, n \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{1}{K} \frac{\langle q, \frac{\partial b}{\partial u_i} \rangle}{\langle q, b \rangle^3} \left(K \langle q, b \rangle \langle q, n \rangle - s \right) \end{aligned}$$

ist ein Vektor, der orthogonal zu allen partiellen Ableitungen und ungleich \tilde{p} ist, gegeben durch

$$\hat{n} := -\frac{s}{\sqrt{-K}} \cdot b + K \langle q, b \rangle \cdot (\langle q, n \rangle \cdot x - \langle q, x \rangle \cdot n).$$

Für das Skalarprodukt dieses Vektors mit \tilde{p} gilt

$$\langle \hat{n}, \tilde{p} \rangle = -\frac{s}{2K} (1 - K \langle q, b \rangle^2),$$

daher folgt die Aussage, da der gesuchte Normalenvektor jetzt (bis auf die Orientierung) gegeben ist durch $\hat{n} - K \langle \hat{n}, \tilde{p} \rangle \cdot \tilde{p}$. \odot

6.17 Lemma. *Es sei $s \in \{-1, +1\}$ und $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ ein Punkt, so dass genau eine Hauptkrümmung κ_j in (p, N) gleich $s\sqrt{-K}$ ist (für geeignetes $j \in \{1, \dots, m\}$). Weiterhin sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine offene Umgebung von (p, N) , so dass für alle $(p', N') \in \mathcal{N}$ der Punkt q nicht auf einer der Horosphären $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p' + s \cdot N')$ liegt.*

Ferner sei $s\sqrt{-K}$ ein regulärer Wert der Abbildung $\kappa_j|_{\mathcal{N}}$, d.h. insbesondere ist durch $\mathcal{N}_{(0)} := \mathcal{N} \cap \kappa_j^{-1}(\{s\sqrt{-K}\})$ eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M gegeben (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]). Schließlich sei noch die Abbildung $b: \mathcal{N}_{(0)} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0, (p', N') \mapsto \sqrt{-K} \cdot p' + s \cdot N'$ eine Immersion. Für $(p', N') \in \mathcal{N}_{(0)}$ sei $N_0(p', N') \in \mathbb{F}_{d,K}^1$ ein Normalenvektor der durch b immersierte Fläche in $b(p', N')$ (vergleiche hierzu auch die folgende Bemerkung 6.18).

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}_{(0)}$ eine $(d-2)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immensierte \mathcal{C}^{1-2} -differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Ein weiterer Normalenvektor (neben \tilde{N} aus Lemma 6.16) ist gegeben durch

$$\tilde{N}_0(\tilde{p}(p, b)) := (1 + K \langle q, b \rangle^2) \cdot N_0 - 2K \langle q, N_0 \rangle \cdot q - 2\sqrt{-K} K \langle q, N_0 \rangle \langle q, b \rangle \cdot \tilde{p}(p, b).$$

Es gibt eine offene Teilmenge von $\mathbb{F}_{d,K}$, in der der Punkt q gewählt werden kann, so dass die Vektoren \tilde{N} und \tilde{N}_0 sogar eine Basis des Normalenraums bilden.

Beweis. Es sei $(x, n): U \rightarrow \mathcal{N}_M$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, N) in $\mathcal{N}_{(0)}$, $b: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0$ die zugehörige Parametrisierung der Normalenvektoren der zu den tangentialen Horosphären zugehörigen Hyperebenen von \mathbb{R}^{d+1} und $y: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ die Parametrisierung der Lotfußpunkte dieser Horosphären (beachte: Die Abbildungsvorschriften sind jeweils im Beweis von Lemma 6.16 angegeben; es sei ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$ geeignet gewählt). Dann sind die partiellen Ableitungen der Parametrisierung y linear unabhängig, da nach Voraussetzung die Abbildung $b: \mathcal{N}_{(0)} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0$ eine Immersion ist (vergleiche den Beweis von Lemma 6.16), und es folgt die erste Behauptung.

Es ist also noch zu zeigen, dass der angegebene Vektor $\tilde{N}_0(\tilde{p}(p, b))$ Normalenvektor an die Fläche $\tilde{\mathcal{N}}_{(0)}$ im Punkt $\tilde{p}(p, b)$ ist. Wegen (es sei $i \in \{1, \dots, d-2\}$; für die Gestalt der partiellen Ableitungen von y vergleiche den Beweis von Lemma 6.16)

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial u_i}, N_0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\langle q, \frac{\partial b}{\partial u_i} \rangle}{\langle q, b \rangle^2} \langle q, N_0 \rangle \text{ sowie } \left\langle \frac{\partial y}{\partial u_i}, q \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\langle q, \frac{\partial b}{\partial u_i} \rangle}{\langle q, b \rangle^2} \frac{1 + K \langle q, b \rangle^2}{2K}$$

ist ein Vektor, der orthogonal zu allen partiellen Ableitungen und ungleich \tilde{p} ist, gegeben durch

$$\hat{n} := (1 + K \langle q, b \rangle^2) \cdot N_0 - 2K \langle q, N_0 \rangle \cdot q.$$

Für das Skalarprodukt von \hat{n} mit \tilde{p} gilt

$$\langle \hat{n}, \tilde{p} \rangle = 2\sqrt{-K} \langle q, N_0 \rangle \langle q, b \rangle,$$

der Vektor \tilde{N}_0 ist dann gegeben durch $\hat{n} - K \langle \hat{n}, \tilde{p} \rangle \cdot \tilde{p}$. Wird q so gewählt, dass $\langle q, N_0 \rangle = 0$ ist (vergleiche hierzu auch nachstehende Bemerkung 6.18), so gilt

$$\langle \tilde{N}, q \rangle = -\frac{s}{4\sqrt{-K}K} \frac{(1 + K \langle q, b \rangle^2)^2}{\langle q, b \rangle} \text{ sowie } \langle \tilde{N}_0, q \rangle = 0,$$

wegen $1 + K \langle q, b \rangle^2 \neq 0$ (da q auf keiner der beteiligten Horosphären liegt) sind die Vektoren \tilde{N} und \tilde{N}_0 also linear unabhängig. Die letzte Behauptung folgt dann, da diese beiden Vektoren offensichtlich stetig von der Wahl des Punktes q abhängen. \odot

6.18 Bemerkung. Da in Lemma 6.17 die Abbildung $b: \mathcal{N}_{(0)} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0$ eine Immersion ist, wird in $\mathbb{F}_{d,K}^0$ eine $(d-2)$ -dimensionale Fläche parametrisiert. Diese besitzt somit einen zweidimensionalen Normalenraum. Die Einschränkung des Skalarprodukts des umgebenden \mathbb{R}^{d+1} auf den Tangentialraum von $\mathbb{F}_{d,K}^0$ in $b(p', N')$ (für $(p', N') \in \mathcal{N}_{(0)}$) ist positiv semidefinit, genau die Vielfachen von $b(p', N')$ selbst besitzen die Länge Null. Daher kann ein (bis auf die Orientierung eindeutiger) Normalenvektor $N_0(p', N')$ mit $\langle N_0(p', N'), N_0(p', N') \rangle = +1$ an $b(\mathcal{N}_{(0)})$ in $b(\mathcal{N}_M)$ gewählt werden. Insbesondere ist der Orthogonalraum von N_0 eine Hyperebene in \mathbb{R}^{d+1} , die $\mathbb{F}_{d,K}$ stets in einer Hyperebene von $\mathbb{F}_{d,K}$ schneidet. Dies wird in den Beweisen des folgenden Abschnitts 6.2.2 von Bedeutung sein.

6.2.2 Berührflächen

Durch die in diesem Abschnitt untersuchten Flächen, die von den Berührungspunkten der mehrfach tangentialen Flächen gebildet, werden wieder hinreichende Kriterien für die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze im Abschnitt 6.4.1 bereitgestellt. Die Vorgehensweise entspricht derjenigen bei der Untersuchung derselben Flächen bezüglich Hyperebenen (vergleiche Abschnitt 3.1.2 bzw. 5.1.2).

6.19 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M_m stets eine m -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K}$ immensierte \mathcal{C}^l -differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$, $l \geq 3$ und $K < 0$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m gleichzeitig). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$. Weiterhin sei die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$ eingebettet in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$.

Schließlich sei eine Horosphäre $\hat{\zeta}_\infty \in \mathcal{H}_d^{(K)}$ gegeben, die in den k verschiedenen Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ tangential an M sei (für $k \in \{1, \dots, d\}$). Ein Normaleneinheitsvektor von $\hat{\zeta}_\infty$ im Punkt $p^{(j)}$ sei für $j \in \{1, \dots, k\}$ gegeben durch $N^{(j)} \in \mathbb{F}_{d,K}^1$. OBdA seien diese so orientiert, dass

$$\hat{b} := \sqrt{-K} \cdot p^{(1)} - N^{(1)} = \dots = \sqrt{-K} \cdot p^{(k)} - N^{(k)}$$

erfüllt ist, \hat{b} ist also ein Normalenvektor der zur Horosphäre $\hat{\zeta}_\infty$ zugehörigen Hyperebene in \mathbb{R}^{d+1} .

6.20 Lemma. *Sämtliche Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})$ seien von $-\sqrt{-K}$ verschieden. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}), sie liegen also nicht in einer $(k-1)$ -Ursprungsebene von $\mathbb{F}_{d,K}$.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, N^{(i)})$, so dass $\mathcal{B}^{(i)}$ eine $(d-k)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare immensierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}^{(i)}$ definiert durch

$$\mathcal{B}^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} : \zeta_\infty(p, b) = \zeta_\infty(p', b')\},$$

wobei $b := \sqrt{-K} \cdot p - N$ und $b' := \sqrt{-K} \cdot p' - N'$ gesetzt werde.

Beweis. Es sei der Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ so gewählt, dass er nicht auf der Horosphäre $\hat{\zeta}_\infty$ liegt. Wie im Beweis von Lemma 3.8 reicht es auch hier aus zu zeigen, dass die Normalenvektoren $\tilde{N}(\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{b})), \dots, \tilde{N}(\tilde{p}(p^{(k)}, \hat{b}))$ linear unabhängig sind (vgl. Lemma 6.16). Angenommen, sie wären linear abhängig. Dann gäbe es Skalare $\alpha_j \in \mathbb{R}$ (für $j \in \{1, \dots, k\}$), so dass

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot \tilde{N}(\tilde{p}(p^{(j)}, \hat{b})) = 0 \quad (6.3)$$

eine nichttriviale Linearkombination der Null ist. Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektor q auf diese Gleichung führt zu

$$\frac{1}{4\sqrt{-K}K} \frac{(1 + K \langle q, \hat{b} \rangle^2)^2}{\langle q, \hat{b} \rangle} \sum_{j=1}^k \alpha_j = 0.$$

Der Punkt q ist so gewählt worden, dass er nicht auf der Horosphäre $\hat{\zeta}_\infty$ liegt, insbesondere ist er ungleich dem Lotfußpunkt von $\hat{\zeta}_\infty$, damit gilt $(1 + K \langle q, \hat{b} \rangle) \neq 0$ (vgl. Lemma 6.14). Somit muss $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 0$ gelten.

Einsetzen von $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 0$ in Gleichung (6.3) führt zu

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (\langle q, N^{(j)} \rangle \cdot p^{(j)} - \langle q, p^{(j)} \rangle \cdot N^{(j)}) = 0.$$

Mit Hilfe von $\hat{b} = \sqrt{-K} \cdot p^{(j)} - N^{(j)}$ (für $j \in \{1, \dots, k\}$) lässt sich dies umformen in

$$\langle q, \hat{b} \rangle \cdot \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot p^{(j)} = \langle q, \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot p^{(j)} \rangle \cdot \hat{b}.$$

Da der Vektor \hat{b} die Länge Null hat, der Vektor $\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot p^{(j)}$ aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Punkt jedoch positive Länge und $\langle q, \hat{b} \rangle$ nach Wahl von q nicht verschwindet, liegt ein Widerspruch zur Annahme vor. Die Normalenvektoren sind also wie gewünscht linear unabhängig. \odot

6.21 Lemma. *Es sei für $j \in \{1, 2\}$ eine Folge von Punkten $(p_i^{(j)}, N_i^{(j)}) \in \mathcal{N}_M$ gegeben, so dass in all diesen Punkten sämtliche Hauptkrümmungen von $-\sqrt{-K}$ verschieden sind (mit $i \in \mathbb{N}$; die Punkte $(p_i^{(1)}, N_i^{(1)})$ und $(p_i^{(2)}, N_i^{(2)})$ sollen dieselben Eigenschaften wie $(p^{(1)}, N^{(1)})$ und $(p^{(2)}, N^{(2)})$ in Voraussetzung 6.19 erfüllen. Weiterhin gelte*

$$(p, N) := \lim_{i \rightarrow \infty} (p_i^{(1)}, N_i^{(1)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (p_i^{(2)}, N_i^{(2)}).$$

Dann ist im Punkt $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ mindestens eine Hauptkrümmung gleich $-\sqrt{-K}$.

Beweis. Dies lässt sich analog zur entsprechenden Situation für Hyperebenen im Euklidischen (vgl. Korollar 3.9) auf Lemma 6.20 zurückführen. \odot

6.22 Lemma. *Sämtliche Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(2)}, N^{(2)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})$ seien von $-\sqrt{-K}$ verschieden, jetzt jedoch sei genau eine der Hauptkrümmungen im Punkt $(p^{(1)}, N^{(1)})$ gleich $-\sqrt{-K}$, und es seien die Voraussetzungen von Lemma 6.17 erfüllt. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}), sie liegen also nicht in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Ursprungsebene von $\mathbb{F}_{d,K}$, der Vektor $N_0(p^{(1)}, N^{(1)})$ sei nicht in der linearen Hülle dieser Punkte enthalten.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, N^{(i)})$, so dass $\mathcal{B}_0^{(i)}$ eine $(d-k-1)$ -dimensionale \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}_0^{(i)}$ definiert durch (es werde $\mathcal{N}_0^{(1)} := \mathcal{N}^{(1)} \cap \mathcal{N}_{(0)}$ und $\mathcal{N}_0^{(i)} := \mathcal{N}^{(i)}$ für $i \neq 1$ gesetzt)

$$\mathcal{B}_0^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_0^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}_0^{(j)} : \zeta_\infty(p, b) = \zeta_\infty(p', b')\},$$

wobei $b := \sqrt{-K} \cdot p - N$ und $b' := \sqrt{-K} \cdot p' - N'$ gesetzt werde.

Beweis. Es sei der Punkt $q \in \mathbb{F}_{d,K}$ so gewählt, dass er zum einen nicht auf der Horosphäre $\hat{\zeta}_\infty$ liegt, zum anderen $\langle q, N_0 \rangle = 0$ erfüllt (vergleiche Lemma 6.17 für die Definition von N_0 und Bemerkung 6.18 zur Wahl von q , insbesondere kann zusätzlich noch erreicht werden, dass $\langle q, \hat{b} \rangle$ gewisse Werte nicht annimmt). Wie im Beweis von Lemma 3.10 reicht es aus zu zeigen, dass die Normalenvektoren $\tilde{N}(\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{b})), \dots, \tilde{N}(\tilde{p}(p^{(k)}, \hat{b}))$ sowie $\tilde{N}_0(\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{b}))$ linear unabhängig sind (vergleiche Lemma 6.16 und Lemma 6.17). Angenommen, sie wären linear abhängig, dann gäbe es Skalare $\alpha_j \in \mathbb{R}$ (für $j \in \{0, \dots, k\}$), so dass eine nichttriviale Linearkombination der Null gegeben ist durch

$$\alpha_0 \cdot \tilde{N}_0(\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{b})) + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \tilde{N}(\tilde{p}(p^{(i)}, \hat{b})) = 0. \quad (6.4)$$

Anwenden des Skalarprodukts mit q auf diese Gleichung liefert (wegen $\langle q, N_0 \rangle = 0$) $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$. Wäre $\alpha_0 = 0$, so könnte man Gleichung (6.4) wie im Beweis von Lemma 6.20 zum Widerspruch führen, es kann somit oBdA $\alpha_0 := (1 + K \langle q, \hat{b} \rangle^2)^{-1}$ gesetzt werden (beachte: Es gilt $1 + K \langle q, \hat{b} \rangle^2 \neq 0$, da q nicht gleich dem Lotfußpunkt von $\hat{\zeta}_\infty$ ist).

Einsetzen von $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ in Gleichung (6.4) und Umformen analog zur Vorgehensweise im Beweis von Lemma 6.20 ergibt

$$N_0 + K \langle q, \hat{b} \rangle \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (\langle q, \hat{b} \rangle \cdot p^{(i)} - \langle q, p^{(i)} \rangle \cdot \hat{b}) = 0.$$

Umformen dieser Gleichung führt direkt zu

$$N_0 + K \langle q, \hat{b} \rangle^2 \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot p^{(i)} = K \langle q, \hat{b} \rangle \cdot \langle q, \sum_{i=1}^k p^{(i)} \rangle \cdot \hat{b}. \quad (6.5)$$

Ist $\langle q, \hat{b} \rangle = 0$, so liegt direkt ein Widerspruch vor, da N_0 sicherlich nicht gleich dem Nullvektor ist (vgl. Lemma 6.17). Sei dies im folgenden also nicht der Fall. Wegen $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$

liegt der Vektor $\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot p^{(i)}$ genauso in der Hyperebene mit Normalenvektor \hat{b} wie die Vektoren N_0 und \hat{b} . Nach Voraussetzung sind $\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot p^{(i)}$ und N_0 linear unabhängig, wie zu Beginn des Beweises festgestellt kann der Punkt q somit derart gewählt werden, dass $\langle q, \hat{b} \rangle$ einen Wert annimmt, für den die linke Seite von Gleichung (6.5) kein Vielfaches des Vektors \hat{b} ist. Damit liegt ein Widerspruch zur obigen Annahme vor. \odot

6.23 Lemma. *Für alle $i \in \{\tilde{k}+1, \dots, k\}$ sei keine der Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(i)}, N^{(i)})$ gleich $-\sqrt{-K}$, für alle $i \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ dagegen sei genau eine der Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(i)}, N^{(i)})$ gleich $-\sqrt{-K}$ (für geeignetes $\tilde{k} \in \{2, \dots, k\}$). Weiterhin seien die Vektoren $N_0(p^{(1)}, \hat{N}), \dots, N_0(p^{(\tilde{k})}, \hat{N}), \tilde{p}^{(\tilde{k})}, \dots, p^{(k)}$ linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}). Schließlich seien für $i \in \{1, \dots, k\}$ in den Punkten $(p^{(i)}, N^{(i)})$ die Voraussetzungen von Lemma 6.17 erfüllt.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, \dots, k\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{N}^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(i)}, N^{(i)})$, so dass $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ von einer $(d-k-1)$ -dimensionalen \mathcal{C}^{l-2} -differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M überdeckt werden kann. Dabei sei $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ definiert durch (zur Abkürzung werde $\mathcal{N}_0^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)} \cap \mathcal{N}_{(0)}$ für $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ und $\mathcal{N}_0^{(j)} := \mathcal{N}^{(j)}$ für $j \in \{\tilde{k}+1, \dots, k\}$ gesetzt)

$$\mathcal{B}_{00}^{(i)} := \{(p, N) \in \mathcal{N}_0^{(i)} \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} \exists (p', N') \in \mathcal{N}^{(j)} \text{ mit } \zeta_\infty(p, b) = \zeta_\infty(p', b')\},$$

wobei $b := \sqrt{-K} \cdot p - N$ und $b' := \sqrt{-K} \cdot p' - N'$ gesetzt werde.

Beweis. Es sei $(x^{(i)}, n^{(i)}): U \rightarrow \mathcal{N}_{(0)}$ (für $i \in \{1, \dots, \tilde{k}-1\}$) eine Parametrisierung einer Umgebung von $(p^{(i)}, N^{(i)})$ in $\mathcal{N}_{(0)}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$); weiterhin sei die Parametrisierung $b: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0, u \mapsto \sqrt{-K} \cdot x^{(i)}(u) - n^{(i)}(u)$ gegeben (beachte: Diese ist unabhängig von i). Betrachte dann die entsprechend dem Vorgehen in der entsprechenden Situation im Euklidischen konstruierten Hilfsflächen (vgl. Lemma 3.11), die durch die Parametrisierung $z^{(i)}: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ via

$$z^{(i)}: (u, \lambda) \mapsto \tilde{p}(j_1(\lambda) \cdot x^{(i)}(u) - j_2(\lambda) \cdot n^{(i)}(u), (j_1(\lambda) + \sqrt{-K} j_2(\lambda)) \cdot b)$$

gegeben sind (vgl. Korollar 6.14). Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung speziell für $\lambda = 0$ sind gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, d-2\}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^{(i)}}{\partial u_j} \Big|_{\lambda=0} &= \frac{1}{2\sqrt{-K} K} \frac{1}{\langle q, b \rangle^2} \cdot \left(2 \langle q, \frac{\partial b}{\partial u_j} \rangle \cdot \left(K \cdot q - \frac{1}{\langle q, b \rangle} \cdot b \right) + (1 + K \langle q, b \rangle^2) \cdot \frac{\partial b}{\partial u_j} \right), \\ \frac{\partial z^{(i)}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= -\sqrt{-K} \cdot \tilde{p}(x^{(i)}(u), b(u)) + b(u). \end{aligned}$$

Da $\tilde{p}(x^{(i)}(u), b(u))$ orthogonal zu $\frac{\partial z^{(i)}}{\partial u_j}$ ist, sind diese Ableitungen im Punkt $\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{b})$ linear unabhängig. Die zu zeigende Aussage ergibt sich jetzt hiermit auf genau die gleiche Art und Weise wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Lemma 3.11). \odot

6.2.3 Hüllflächen

In diesem Abschnitt seien dieselben Voraussetzungen erfüllt wie in Abschnitt 6.2.2 (vgl. Voraussetzung 6.19). Durch elementare geometrische Überlegungen ergibt sich dann das folgende Lemma:

6.24 Lemma. *Sämtliche Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})$ seien von $-\sqrt{-K}$ verschieden. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}), sie liegen also nicht in einer $(k-1)$ -Ursprungsebene von $\mathbb{F}_{d,K}$.*

Dann ist die von den Mehrfachtangentialhorosphären mit k Berührungspunkten an M lokal um $p^{(1)}$ eingehüllte Fläche \bar{M} gegeben durch (vergleiche Lemma 6.20 für die Definition von $\mathcal{B}^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$)

$$\bar{M} := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot p^{(i)} + \frac{1 - K \langle \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot p^{(i)}, \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot p^{(i)} \rangle}{2K \langle p^{(1)}, b' \rangle} \cdot b' \mid (p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)} \text{ und} \right. \\ \left. \lambda_j \in [0, 1] \text{ für } j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \text{ sowie } \zeta_\infty(p^{(1)}, b') = \zeta_\infty(p^{(j)}, b') \right\},$$

wobei der Vektor b' für die entsprechenden Punkte $(p^{(j)}, N^{(j)}) \in \mathcal{B}^{(j)}$ gegeben sei durch $b' := \sqrt{-K} \cdot p^{(j)} - N^{(j)}$ (beachte: Dies ist unabhängig von $j \in \{1, \dots, k\}$).

6.25 Lemma. *Sämtliche Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)})$ seien von $-\sqrt{-K}$ verschieden. Die Berührungspunkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ seien linear unabhängig (im umgebenden \mathbb{R}^{d+1}), sie liegen also nicht in einer $(k-1)$ -Ursprungsebene von $\mathbb{F}_{d,K}$.*

Dann ist das Normalenbündel $\mathcal{N}_{\bar{M}}$ der in Lemma 6.24 definierten Fläche \bar{M} eine $(d-1)$ -dimensionale in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ immersierte \mathcal{C}^{l-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Es sei $(x^{(1)}, n^{(1)}): U \rightarrow \mathcal{B}^{(1)}$ eine Parametrisierung einer Umgebung des Punktes $(p^{(1)}, N^{(1)})$ in $\mathcal{B}^{(1)}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-k}$; vergleiche Lemma 6.20), und $(x^{(j)}, n^{(j)}): U \rightarrow \mathcal{B}^{(j)}$ sei die zugehörige Parametrisierung der entsprechenden Umgebung von $(p^{(j)}, N^{(j)})$ (für $j \in \{2, \dots, k\}$). Ferner sei $b: U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^0$ die Parametrisierung der Normalenvektoren der zu den (mehrfach) tangentialen Horosphären zugehörigen Hyperebenen von \mathbb{R}^{d+1} , es gilt also $b := \sqrt{-K} \cdot x^{(j)} - n^{(j)}$ (unabhängig von der Wahl von $j \in \{1, \dots, k\}$).

Eine Parametrisierung $y: [0, 1]^{k-1} \times U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}$ der Fläche \bar{M} ist dann lokal gegeben durch

$$y: (\lambda, u) \mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^{(i)}(u) + \frac{1 - K \langle \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^{(i)}(u), \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^{(i)}(u) \rangle}{2K \langle x^{(1)}(u), b(u) \rangle} \cdot b(u),$$

wobei $\lambda_k := 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$ gesetzt werde. Mit Hilfe von y lässt sich dann das zugehörige Normaleneinheitsbündel $\mathcal{N}_{\bar{M}}$ parametrisieren via

$$z: [0, 1]^{k-1} \times U \rightarrow \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1, (\lambda, u) \mapsto \begin{pmatrix} y(\lambda, u) \\ b(u) - \sqrt{-K} \cdot y(\lambda, u) \end{pmatrix}.$$

Dass die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung stets linear unabhängig sind, lässt sich genauso wie in der entsprechenden Situation für Sphären im Euklidischen beweisen (vergleiche den Beweis von Lemma 4.5). \odot

6.3 Grenzverhalten bei wachsendem Radius für $K > 0$

Mit Hilfe des Grenzübergangs $r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ des Radius der betrachteten Sphären ergibt sich aus dem Ergebnis des vorherigen Unterkapitels die in Kapitel 5 nicht auf direktem Weg erlangte Formel für das kinematische Maß einer „geeigneten“ Menge von Hyperebenen, die unabhängig von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes ist. Die Vorgehensweise entspricht hierbei völlig derjenigen im Euklidischen (vgl. Unterkapitel 4.2), insbesondere überträgt sich die in Abschnitt 4.2.2 erläuterte Beweisidee unmittelbar. Erst bei der endgültigen Bestimmung des Grenzwertes im abschließenden Abschnitt 6.3.7 ergibt sich insofern ein Unterschied, als im Sphärischen einige Terme im Grenzwert nicht verschwinden.

6.3.1 Formulierung der Aussage

6.26 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 6.3 sei M_m stets eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte unberandete \mathcal{C}^3 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$ sowie $K > 0$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$.

Weiterhin seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (dabei sei $\mathcal{N}_{(*)} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$; mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{S}_d$ gemeint):

- Es seien die Anforderungen an M bzw. \mathcal{N}_M in der Aufzählung der Eigenschaften von Voraussetzung 5.26 erfüllt.
- Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei die Menge der Punkte von \mathcal{N}_M , deren zugehörige tangentielle Hyperebene M in genau k Punkten berührt, eine $(d-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche hierzu auch Lemma 5.9). Die Teilmenge dieser Punkte, bei denen zusätzlich in einem der Berührungspunkte die Lipschitz-Killing-Krümmung φ_{d-1} verschwindet oder die nicht affin unabhängig sind, sei geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^2 -Bildern von l -Rechtecken (mit $l \in \{0, \dots, d-1-k\}$).
- Das Supremum der Menge derjenigen Radien, für die M bzw. \mathcal{N}_M die Anforderungen in Voraussetzung 4.6 erfüllt, sei $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$.

Schließlich seien noch die Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ von Hyperebenen sowie für $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ die Mengen $\mathcal{D}_r \subseteq \mathcal{S}_{d,r,K}$ von Sphären so wie in Voraussetzung 5.26 bzw. Voraussetzung 6.7 fest gewählt, so dass für alle $(p, N) \in \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{S}_d$ mit $\xi(p, N) \notin \mathcal{T}$ die Aussage

$$\exists r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[\forall r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[: \zeta_r(j_1(r) \cdot p - j_2(r) \cdot N) \in \mathcal{D}_r \iff \xi(p, N) \in \mathcal{D}$$

erfüllt ist. Auch für $K > 0$ treffen dieselben Bemerkungen bezüglich der Wahl von \mathcal{D} und \mathcal{D}_r zu wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Bemerkung 4.18).

6.27 Konstruktion. Es sei $k \in \{2, \dots, d\}$. Dann seien die Teilmengen $\tilde{\mathcal{N}}_k^+$ und $\tilde{\mathcal{N}}_k^-$ der Normaleneinheitsbündel der von den mehrfach an M tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen für $K > 0$ genauso konstruiert wie im Euklidischen (vergleiche Konstruktion 3.42 für $k = 2$ bzw. Konstruktion 4.33 für $k \in \{3, \dots, d\}$). Die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion ergibt sich nun aus Korollar 6.51 (im Fall $k = 2$) und Lemma 6.53 (im Fall $k \in \{3, \dots, d\}$).

Entsprechend sei auch für ungerade Dimension d die Hyperfläche \mathring{M} sowie das auf dieser Fläche definierte Normaleneinheitsvektorfeld analog zur Vorgehensweise im Euklidischen konstruiert (vgl. Konstruktion 4.53). Die Wohldefiniertheit der Windungszahl bezüglich der Fläche \mathring{M} ergibt sich für $K > 0$ aus Lemma 6.56.

6.28 Definition. Für $j \in \{0, \dots, d-1\}$ setze

$$\bar{c}_{j,d}^{(K)} := \sqrt{K}^{d-1-j} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1 + (-1)^{j+d}}{2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-j+1}{2}) \Gamma(\frac{j}{2} + 1)}.$$

Die Konstante $\sqrt{K}^{j+1-d} \bar{c}_{j,d}^{(K)}$ liegt in $\pi \mathbb{Q}$ (für j gerade und d ungerade) bzw. in \mathbb{Q} (in den sonstigen Fällen).

6.29 Satz. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \sqrt{K}^{d-1} \lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \mu(\mathcal{D}_r).$$

6.30 Satz. *Für gerade Dimension d gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \sum_{j=0}^{d-2} \bar{c}_{j,d}^{(K)} \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^d \sum_{j=0}^{d-k} \bar{c}_{j,d}^{(K)} \left(\int_{\tilde{\mathcal{N}}_k^+} \text{sign}(\varphi_{d-k}) \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\tilde{\mathcal{N}}_k^-} \text{sign}(\varphi_{d-k}) \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right), \end{aligned}$$

für ungerade Dimension d gilt

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \sqrt{K}^{d-1} \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\mathring{M}} dV + \sum_{j=0}^{d-2} \bar{c}_{j,d}^{(K)} \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^d \sum_{j=0}^{d-k} \bar{c}_{j,k,d}^{(K)} \left(\int_{\tilde{\mathcal{N}}_k^+} \text{sign}(\varphi_{d-k}) \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\tilde{\mathcal{N}}_k^-} \text{sign}(\varphi_{d-k}) \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

6.3.2 Verhalten der Terme auf der Mannigfaltigkeit selbst

6.31 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ und $k \in \{0, \dots, d-1\}$ die Anzahl der im Punkt (p, N) verschwindenden Hauptkrümmungen.*

Dann existiert ein $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, so dass $\sigma_r(p, N) = \text{sign}(\varphi_{d-1-k}(p, N))$ für sämtliche $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ erfüllt ist. Insbesondere gilt $\sigma_r(p, N) = \text{sign}(\varphi_{d-1}(p, N))$ für alle $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, falls $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$ ist.

6.32 Lemma. *Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ gilt, noch die Tangentialebene $\xi(p, N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist.*

Dann gibt es ein $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ und $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, so dass für alle $\delta \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$ und $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ weder die Sphären $\zeta_r(p_r(p, -N))$ und $\zeta_r(p_r(p, N))$ noch die Hyperebene $\xi(p + \delta \cdot N, N)$ tangential an M sind.

Gerade Dimension des umgebenden Raumes

6.33 Lemma. *Sei d gerade. Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ gilt, noch die Tangentialebene $\xi(p, N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist. Dann gibt es ein $r_0 > 0$, so dass die folgenden Aussagen für alle $r > r_0$ erfüllt sind:*

1. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^+$, so sind sowohl (p, N) als auch $(p, -N)$ in \mathcal{N}_r^+ enthalten.*
2. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^-$, so sind sowohl (p, N) als auch $(p, -N)$ in \mathcal{N}_r^- enthalten.*
3. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$, so gilt entweder $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^+$.*
4. *Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^-$, so gilt entweder $(p, N) \in \mathcal{N}^-$ oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^-$.*

6.34 Definition. Sei d gerade. Dann seien für $r > 0$ die folgenden offenen Teilmengen von \mathcal{N}_M definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r^{++} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^+) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^+ \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^+\}, \\ \mathcal{N}_r^{+-} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^+ \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^+ \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^+\}, \\ \mathcal{N}_r^{-+} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^-) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^- \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^-\} \text{ sowie} \\ \mathcal{N}_r^{--} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^- \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^- \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^-\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.33 sind die in \mathcal{N}_r^{-+} enthaltenen Punkte also diejenigen, die noch zur Menge \mathcal{N}_r^- „hinzukommen“ müssen (für größere Werte von r), während die Punkte der Menge \mathcal{N}_r^{--} diejenigen sind, die noch „zu viel“ in \mathcal{N}_r^- sind, für größere Werte von r also nicht mehr in \mathcal{N}_r^- enthalten sein sollten. Das gleiche gilt für \mathcal{N}_r^{++} und \mathcal{N}_r^{+-} in Bezug auf die Menge \mathcal{N}_r^+ .

6.35 Lemma. *Sei d gerade, $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $r > 0$. Dann gilt*

$$(1 + (-1)^j) \int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} = \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}$$

sowie

$$(1 + (-1)^j) \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} = \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{-+}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{--}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

6.36 Korollar. Sei d gerade und $r > 0$. Dann gilt (für die Definition der Funktion $\mathring{c}_{j,d}^{(K)}$ vergleiche Definition 2.52)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{d-2} \left(\mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) (1 + (-1)^j) \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \left(\mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ & \quad + \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}}}) dV. \end{aligned}$$

Ungerade Dimension des umgebenden Raumes

6.37 Lemma. Sei d ungerade. Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder $\varphi_{d-1}(p, N) = 0$ gilt, noch die Tangentialebene $\xi(p, N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist. Dann gibt es ein $r_0 > 0$, so dass die folgenden Aussagen für alle $r > r_0$ erfüllt sind:

1. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^+$, so ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$ und $(p, -N) \in \mathcal{N}_r^-$.
2. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}^-$, so ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^-$ und $(p, -N) \in \mathcal{N}_r^+$.
3. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+$, so gilt $(p, N) \in \mathcal{N}^+$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$) oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^-$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$).
4. Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^-$, so gilt $(p, N) \in \mathcal{N}^-$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) < 0$) oder $(p, -N) \in \mathcal{N}^+$ (falls $\varphi_{d-1}(p, N) > 0$).

6.38 Definition. Sei d ungerade. Dann seien für $r > 0$ die folgenden offenen Teilmengen von \mathcal{N}_M definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r^{++} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^+) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^+ \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^-\}, \\ \mathcal{N}_r^{+-} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^+ \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^+ \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^-\}, \\ \mathcal{N}_r^{-+} &:= \{(p, N) \in \text{Int}(\mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}_r^-) \mid (p, N) \in \mathcal{N}^- \text{ oder } (p, -N) \in \mathcal{N}^+\} \text{ sowie} \\ \mathcal{N}_r^{--} &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}_r^- \mid (p, N) \notin \mathcal{N}^- \text{ und } (p, -N) \notin \mathcal{N}^+\}. \end{aligned}$$

Es gelten die gleichen Bemerkungen wie im Anschluss an die Definitionen der entsprechenden Mengen für gerades d in Definition 6.34.

6.39 Lemma. Sei d ungerade, $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $r > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (1 - (-1)^j) \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \\ &= \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{--}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \\ & \quad - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{-+}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}. \end{aligned}$$

6.40 Korollar. Sei d ungerade und $r > 0$. Dann gilt (für die Definition der Funktion $\dot{c}_{j,d}^{(K)}$ vergleiche Definition 2.52)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{d-2} \left(\dot{c}_{j,d}^{(K)}(r) (1 - (-1)^j) \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \left(\dot{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ & \quad + \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}}}) dV. \end{aligned}$$

6.3.3 Hüllflächen von Mehrfachberührhyperebenen

6.41 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-))$. Dann existiert $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, so dass

$$(p, N) \notin \mathcal{N}_r^{-+} \cup \mathcal{N}_r^{--} \cup \mathcal{N}_r^{++} \cup \mathcal{N}_r^{+-}$$

für alle $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ erfüllt ist.

6.42 Konstruktion. Es sei $(p, N) \in \bar{\mathcal{N}}^+ \cup \bar{\mathcal{N}}^-$. Insbesondere ist also die Hyperebene $\xi(p, N)$ eine Mehrfachtangentialhyperebene an M , es seien $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ die zugehörigen Berührungspunkte (für geeignetes $k \in \{2, \dots, d\}$). Es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(j)}, N) \neq 0$ für $j \in \{1, \dots, k\}$. Somit kann $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ so gewählt werden, dass $\frac{j_1(r_0)}{j_2(r_0)}$ kleiner ist als die betragsmäßig kleinste Hauptkrümmung von M in einem der Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$. Für $j \in \{1, \dots, k\}$ existieren dann offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass in allen Punkten von $\mathcal{N}^{(j)}$ die Hauptkrümmungen betragsmäßig größer sind als $\frac{j_1(r_0)}{j_2(r_0)}$. Dies gilt dann auch für die Punkte der offenen Umgebung $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, -N)$, die definiert ist durch

$$\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} := \{(\tilde{p}, -\tilde{N}) \in \mathcal{N}_M \mid (\tilde{p}, \tilde{N}) \in \mathcal{N}^{(j)}\}.$$

Nach Lemma 2.49 sind für $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ die Parallelflächen $M_{\mathcal{N}_j, r}$ und $M_{\tilde{\mathcal{N}}^{(j)}, r}$ reguläre Hyperflächen. Da $\varphi_{d-1}(p^{(j)}, N) \neq 0$ ist, existiert ein $r_j \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, so dass für $r \in]r_j, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ die Flächen $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$ und $M_{\tilde{\mathcal{N}}^{(j)}, r}$ die Geodätische $\eta(p^{(j)}, N)$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ schneiden.

Sei nun zunächst $r \in]r_j, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$. Nach obigem schneidet insbesondere die Geodätische $\eta(p, N)$ die Parallelfläche $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$, d.h. es gibt $\delta_{j,r}(p, N) \in [0, r]$ mit $p_{\delta_{j,r}}(p, N) \in M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$. Somit gibt es $(\tilde{p}(r), \tilde{N}(r)) \in \mathcal{N}^{(j)}$ mit

$$j_1(r) \cdot \tilde{p}(r) - j_2(r) \cdot \tilde{N}(r) = j_1(\delta_{j,r}) \cdot p - j_2(\delta_{j,r}) \cdot N. \quad (6.6)$$

Ist $r \in [0, r_j]$ so setze $\delta_{j,r}(p, N) := 0$. Ebenso setze $\delta_{j,r}(p, N) := 0$, falls (im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen) φ_{d-1} in einem der zugehörigen Berührungspunkte der Mehrfachtangentialhyperebene $\xi(p, N)$ mit M doch verschwindet.

Schließlich sei für $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ die Abbildung $\delta_r: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\delta_r: \bar{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}, (p, N) \mapsto \max(\{\delta_{1,r}(p, N), \dots, \delta_{k,r}(p, N)\}).$$

6.43 Lemma. *Es sei ξ eine Hyperebene, die genau in den Punkten $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$ tangential an M ist (für geeignetes $k \in \mathbb{N}$). Ein Normalenvektor der Hyperebene ξ sei N . Weiterhin seien für $j \in \{1, \dots, k\}$ offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N)$ gegeben. Schließlich werde noch $\mathcal{N} := \bigcup_{j=1}^k \mathcal{N}^{(j)}$ gesetzt.*

Dann gibt es für $j \in \{1, \dots, k\}$ offene Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass für $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kein $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{N}}^{(j)}$ für beliebiges $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $\xi(p', N') = \xi(\tilde{p}, \tilde{N})$.

6.44 Lemma. *Es liege erneut dieselbe Situation wie in Lemma 6.43 vor.*

Dann gibt es $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ und (für $j \in \{1, \dots, k\}$) offene Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass für $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ und $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kein $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{N}}^{(j)}$ für beliebiges $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $\zeta_r(j_1(r) \cdot p' - j_2(r) \cdot N') = \zeta_r(j_1(r) \cdot \tilde{p} - j_2(r) \cdot \tilde{N})$.

6.45 Lemma. *Es gibt ein $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, so dass für $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ kein Berührungspunkt $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ einer Mehrfachtangentialhyperebene auch Berührungspunkt einer Mehrfachtangentialsphäre vom Radius r ist.*

Wie im Euklidischen kann also im folgenden davon ausgegangen werden, dass die betrachteten Radien r größer als r_0 aus Lemma 6.45 sind.

6.3.4 Von den Parallelfächen zu den Hüllflächen

6.46 Konstruktion. Es sei $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$. Dann sei die Hyperfläche \bar{M}_r sowie das Normaleneinheitsvektorfeld $\bar{N}: \bar{M}_r \rightarrow \mathbb{S}_d$ für $K > 0$ völlig analog zur Vorgehensweise im Euklidischen konstruiert (vergleiche hierzu Konstruktion 4.40 für d gerade bzw. Konstruktion 4.42 für d ungerade).

6.47 Lemma. *Für $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ gilt*

$$\int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{\hat{M}_r} + w_{S_{\mathcal{N}_r^-, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^-, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}}) dV = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\bar{M}_r} dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \bar{M}_r in fast allen Punkten wohldefiniert.

6.3.5 Wohldefiniertheit

6.48 Lemma. *Es sei $\xi \in \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ eine Hyperebene, die in genau k Punkten an M tangential ist (für $k \in \{2, \dots, d\}$). Die Berührungspunkte seien gegeben durch $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in M$, es sei $N \in \mathbb{S}_d$ ein Normalenvektor von ξ , es gelte $\varphi_{d-1}(p^{(j)}, N) \neq 0$ für $j \in \{1, \dots, k\}$. Weiterhin gelte $(p^{(1)}, N) \in \partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-)$ (damit ist auch $(p^{(2)}, N), \dots, (p^{(k)}, N) \in \partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-)$ erfüllt).*

Dann gibt es $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}[$, so dass für $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}[$ sowie $\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)} \in \text{convex}(p^{(1)}, \dots, p^{(k)})$ sowohl (vgl. Konstruktion 6.42)

$$p_{\delta_r(\bar{p}^{(1)}, N)}(\bar{p}^{(1)}, N) \in M_{\mathcal{N}_r^-, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^+, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$$

erfüllt ist, als auch, dass die Normalenvektoren in den Punkten $p_{\delta_r(\bar{p}^{(1)}, N)}(\bar{p}^{(1)}, N)$ und $p_{\delta_r(\bar{p}^{(2)}, N)}(\bar{p}^{(2)}, N)$ (jeweils bezüglich der Fläche \bar{M}_r ; vergleiche Konstruktion 6.46 in die gleiche Richtung zeigen, d.h. es gilt

$$\langle \bar{N}(p_{\delta_r(\bar{p}^{(1)}, N)}(\bar{p}^{(1)}, N)), \bar{N}(p_{\delta_r(\bar{p}^{(2)}, N)}(\bar{p}^{(2)}, N)) \rangle > 0.$$

6.49 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ mit $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$. Ist $(p, N) \in \mathcal{B}^+$, so setze $\sigma := +1$, ist $(p, N) \in \mathcal{B}^-$, so setze $\sigma := -1$ (beachte: Ist (p, N) in beiden Mengen enthalten, so kann gewählt werden, ob (p, N) bezüglich \mathcal{N}^+ oder \mathcal{N}^- betrachtet werden soll). Weiterhin sei $s := +1$, falls die (kanonische) Orientierung von \mathcal{B}^+ bzw. \mathcal{B}^- um (p, N) bezüglich der angrenzenden Fläche \mathcal{N}^+ bzw. \mathcal{N}^- mit derjenigen bezüglich der angrenzenden Teilfläche von \bar{N} nicht übereinstimmt, ansonsten sei $s := -1$.

Für betragsmäßig genügend kleines $\delta \in]-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[\setminus \{0\}$ zeigt dann der Normalenvektor an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}^+_\pm}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}^-_\pm}$ (jeweils als Teilfläche von \bar{M}_r für $r \in]|\delta|, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$; vergleiche Konstruktion 6.46) im Punkt $p_\delta(p, N)$ in die Parallelfäche $\bar{M}_{\bar{N}, \delta}$ genau dann, wenn $s\sigma = -1$ ist.

6.50 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ mit $\varphi_{d-1}(p, N) \neq 0$. Setze dann (mit den Bezeichnungen aus Lemma 6.49)

$$\bar{\sigma} := s\sigma \operatorname{sign}(\varphi_{d-2}(p, N))$$

(hierbei ist φ_{d-2} bezüglich \bar{N} zu bestimmen; für die Bestimmung von φ_{d-2} in singulären Punkten gelten dieselben Bemerkungen wie in Lemma 4.46 im Euklidischen).

Es gibt dann $r_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$, so dass der Normalenvektor im Punkt $p_r(p, N)$ an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}^+_\pm}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}^-_\pm}$ (jeweils als Teilfläche der Fläche \bar{M}_r ; vergleiche Konstruktion 6.46) für $r \in]r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ genau dann in die angrenzende Parallelfäche $\bar{M}_{\bar{N}, r}$ zeigt, wenn $\bar{\sigma} = -1$ ist.

6.51 Korollar. Die Definition von \bar{N}_2^+ und \bar{N}_2^- in Konstruktion 6.27 ist wohldefiniert.

6.52 Konstruktion. Es sei $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ und $k \in \{2, \dots, d\}$ gegeben. Dann sei die Hyperfläche $S_{k,r}$ sowie das Normaleneinheitsvektorfeld auf dieser Fläche für $K > 0$ völlig analog zur Vorgehensweise im Euklidischen konstruiert (vgl. Konstruktion 4.48).

6.53 Lemma. Es sei $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ und $k \in \{2, \dots, d\}$. Dann ist die Definition von \bar{N}_k^+ und \bar{N}_k^- in Konstruktion 6.27 ebenso wohldefiniert wie die Windungszahl $w_{S_{k,r}}$ bezüglich der Fläche $S_{k,r}$ in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$.

6.3.6 Trennung der Flächen

6.54 Konstruktion. Es sei $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$. Dann seien die Hyperflächen S_r und \check{M}_r sowie die auf diesen Flächen definierten Normaleneinheitsvektorfelder für $K > 0$ völlig analog zur Vorgehensweise im Euklidischen konstruiert (vergleiche Definition 4.50 bzw. Konstruktion 4.51).

Insbesondere ergibt sich auch für $K > 0$ (direkt aus Lemma 6.53), dass die Windungszahl bezüglich der Fläche S_r in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$ wohldefiniert ist.

6.55 Lemma. Sei d gerade und $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\bar{M}_r} dV = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{S_r} + w_{\check{M}_r}) dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \check{M}_r in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$ wohldefiniert.

6.56 Lemma. Sei d ungerade und $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\bar{M}_r} dV = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (2w_{\dot{M}} + w_{S_r} + w_{\check{M}_r}) dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl sowohl bezüglich der Fläche \dot{M} aus Konstruktion 6.27 als auch bezüglich der Fläche \check{M}_r in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$ wohldefiniert.

6.3.7 Die Bestimmung des Grenzwertes

6.57 Lemma. Die Aussage von Satz 6.29 ist richtig, d.h es gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \sqrt{K}^{d-1} \lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \mu(\mathcal{D}_r).$$

Beweis. Dass der Grenzwert von $\mu(\mathcal{D}_r)$ für $r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ existiert, wird in Lemma 6.59, Lemma 6.60 sowie Lemma 6.61 gezeigt werden, er muss dann bis auf eine Konstante in $[0, \infty]$ mit dem bewegungsinvarianten Maß $\mu(\mathcal{D})$ von \mathcal{D} übereinstimmen. Zur Bestimmung dieser Konstanten kann nun speziell für M eine in $\mathbb{F}_{d,K}$ eingebettete Sphäre vom Radius $R \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$ und für \mathcal{D} bzw. \mathcal{D}_r (für $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}[$) die Menge derjenigen Hyper-ebenen bzw. Sphären betrachtet werden, die M schneiden. Es gilt dann (vergleiche [21, IV.17.4. formula (17.54)] und Satz 6.10; beachte die Symmetrie von M)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \frac{\mu(\mathcal{D})}{\mu(\mathcal{D}_r)} &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-1}) \int_0^R (j_1(\rho))^{d-1} d\rho}{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-1}) \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}-R}^{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}+R} (j_2(\rho))^{d-1} d\rho} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^R (j_1(\rho))^{d-1} d\rho}{\int_{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}-R}^{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}+R} (j_2(\rho))^{d-1} d\rho} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\int_0^R (j_1(\rho))^{d-1} d\rho}{\int_R^0 (j_2(\frac{\pi}{2\sqrt{K}} - \rho))^{d-1} d\rho} = \frac{1}{2} \sqrt{K}^{d-1} \end{aligned}$$

(beachte: Für $\rho \in \mathbb{R}$ gilt $j_2(\frac{\pi}{2\sqrt{K}} - \rho) = -\sqrt{K}^{d-1} j_1(\rho)$). ☺

6.58 Lemma. Für $j \in \{0, \dots, d-1\}$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \hat{c}_{j,d}^{(K)}(r) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{K}^j} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-j+1}{2}) \Gamma(\frac{j}{2} + 1)}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition der Funktion $\overset{\circ}{c}_{j,d}^{(K)}$ (vgl. Definition 2.52) sowie Lemma 1.9. Beachte, dass die Identität

$$\binom{d-1}{j} \frac{\Gamma(\frac{d-j}{2}) \Gamma(\frac{j+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{d-j}{2}) \Gamma(\frac{j+1}{2}) \Gamma(d)}{\Gamma(d-j) \Gamma(j+1) \Gamma(\frac{d+1}{2})} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-j+1}{2}) \Gamma(\frac{j}{2} + 1)}$$

erfüllt ist. \odot

6.59 Lemma. *Mit den in Definition 6.28 definierten Konstanten $\bar{\bar{c}}_{j,d}^{(K)}$ gilt*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{K}^{d-1}}{2} \lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \left(\sum_{j=0}^{d-1} \left(\overset{\circ}{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{S_{\mathcal{N}_r^+,r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^-,r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++},r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-},r}}) dV \right) \right) \\ & = \sum_{j=0}^{d-2} \bar{\bar{c}}_{j,d}^{(K)} \left(\int_{\mathcal{N}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 6.36 (für d gerade) bzw. aus Korollar 6.40 (für d ungerade) sowie Lemma 6.58. \odot

6.60 Lemma. *Mit den in Definition 6.28 definierten Konstanten $\bar{\bar{c}}_{j,d}^{(K)}$ gilt*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{K}^{d-1}}{2} \lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{S_r} dV \\ & = \sum_{k=2}^d \sum_{j=0}^{d-k} \bar{\bar{c}}_{j,d}^{(K)} \left(\int_{\mathcal{N}_k^+} \text{sign}(\varphi_{d-k}) \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_k^-} \text{sign}(\varphi_{d-k}) \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Diese Aussage wird genauso wie die entsprechende Aussage im Euklidischen bewiesen (vgl. Lemma 4.56), der Grenzwert der Konstanten ergibt sich wieder aus Lemma 6.58. \odot

6.61 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\check{M}_r} dV = 0.$$

Beweis. Da die „Grenzfläche“ (für $r \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$) von \check{M}_r (höchstens) $(d-2)$ -dimensional ist, ist es klar, dass das Integral über die Windungszahl bezüglich dieser Fläche verschwinden muss. \odot

6.62 Folgerung. *Die Aussage von Satz 6.30 ist richtig.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 6.10 und Satz 6.29 mit Hilfe von Lemma 6.57, Lemma 6.59, Lemma 6.60 sowie Lemma 6.61 wegen Lemma 6.47 sowie (für d gerade) Lemma 6.55 bzw. (für d ungerade) Lemma 6.56. \odot

6.4 Grenzverhalten bei wachsendem Radius für $K < 0$

Durch Bilden des Grenzwertes der Sphärenradien gegen unendlich ergibt sich (bei geeigneter Normierung) aus den in Unterkapitel 6.1 gewonnenen Formeln für die Sphären jetzt eine Formel für das kinematische Maß einer „geeigneten“ (im üblichen Sinn) Menge von Horosphären. Diese Formel ist unabhängig von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes, es treten wieder von mehrfach tangentialen Horosphären eingehüllte Flächen als Teilflächen auf, über die integriert wird.

Die Vorgehensweise beim Bestimmen des Grenzwertes entspricht hierbei weitestgehend derjenigen beim Bestimmen der Hyperebenenformel durch Grenzübergang ausgehend von der Sphärenformel im Euklidischen (vgl. Unterkapitel 4.2), die Situation gestaltet sich insofern etwas einfacher, als die Horosphären nur von „einer Seite“ durch Sphären approximiert werden, während die Hyperebenen von „beiden Seiten“ approximiert wurden. Die in Abschnitt 4.2.2 im Euklidischen erläuterte Beweisidee überträgt sich dennoch ziemlich direkt, der einzige wesentliche Unterschied ist, dass die Fläche \hat{M} nun in beliebiger Dimension (und einfacher Gewichtung) auftritt anstatt wie zuvor im Euklidischen und Sphärischen nur in ungeraden Dimensionen.

6.4.1 Formulierung der Aussage

6.63 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 6.4 sei M_m stets eine kompakte in $\mathbb{F}_{d,K}$ immersierte unberandete \mathcal{C}^3 -differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$ sowie $K < 0$), oder es gelte $M_m = \emptyset$ (jedoch nicht für alle m zugleich). Setze dann $M := \bigcup_{m=0}^{d-1} M_m$ und $\mathcal{N}_M := \bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{N}_{M_m}$.

Weiterhin seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (dabei sei $\mathcal{N}_{(*)} \subseteq \mathcal{N}_M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, d-3\}$; mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt mit Normalenvektor in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ gemeint):

- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$.
- Für $m \in \{0, \dots, d-1\}$ sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\mathcal{N}_{M_m} \rightarrow \mathbb{R}$, $(p, N) \mapsto \prod_{j=1}^m (\kappa_j(p, N) + \sqrt{-K})$; insbesondere ist $\mathcal{N}_{(0)}$, das volle Urbild der Null unter dieser Abbildung, eine $(d-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).
- Ist in den beiden Berührungspunkten einer Doppeltangentialhorosphäre eine Hauptkrümmung gleich $-\sqrt{-K}$, und sind die Normalenvektoren (innerhalb von \mathcal{N}_M an $\mathcal{N}_{(0)}$ linear abhängig, so seien diese beide in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten.
- Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei $\mathcal{B}_{k,\infty}$ die Menge der Punkte von \mathcal{N}_M , deren zugehörige tangentielle Horosphäre M in genau k affin unabhängigen Punkten berührt, in denen keine Hauptkrümmung gleich $-\sqrt{-K}$ ist, eine $(d-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_M (vergleiche hierzu auch Lemma 6.20).

- Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei die Menge derjenigen Punkte von \mathcal{N}_M , deren zugehörige tangentielle Horosphäre M in genau k Punkten berührt, die aber nicht zu $\mathcal{B}_{k,\infty}$ gehören, Teilmenge einer geeigneten Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken (mit $l \in \{0, \dots, d-1-k\}$).
- Das Supremum der Menge derjenigen Radien, für die M bzw. \mathcal{N}_M die Anforderungen in Voraussetzung 4.6 erfüllt, sei ∞ .

Aufgrund der Aussagen in Abschnitt 6.2.2 kann somit oBdA davon ausgegangen werden, dass alle Berührungspunkte von Mehrfachtangentialhorosphären an M , die in einem Punkt mit einer Hauptkrümmung $-\sqrt{-K}$ tangential an M sind, in $\mathcal{N}_{(*)}$ enthalten seien.

Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{D}_\infty \subseteq \mathcal{H}_d^{(K)}$ fest gewählt. Diese Menge von Horosphären sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{H}_d^{(K)} \setminus \mathcal{T}_\infty$ (dabei bezeichne \mathcal{T}_∞ die Menge aller an M tangentialen Horosphären). Schließlich seien für $r > 0$ die Mengen $\mathcal{D}_r \subseteq \mathcal{S}_{d,r,K}$ so wie Voraussetzung 6.7 fest gewählt, so dass für alle $(p, N) \in \mathbb{F}_{d,K} \times \mathbb{F}_{d,K}^1$ mit $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N) \notin \mathcal{T}_\infty$ die Aussage

$$\exists r_0 > 0 \forall r > r_0: \zeta_r(j_1(r) \cdot p - j_2(r) \cdot N) \in \mathcal{D}_r \iff \zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N) \in \mathcal{D}_\infty \quad (6.7)$$

erfüllt ist. Auch für $K < 0$ treffen dieselben Bemerkungen bezüglich der Wahl von \mathcal{D}_∞ und \mathcal{D}_r zu wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Bemerkung 4.18).

6.64 Definition. Die Abbildung $\sigma_\infty: \mathcal{N}_M \rightarrow \{-1, +1\}$ sei für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ definiert durch $\sigma_\infty(p, N) := +1$, falls die Anzahl der Hauptkrümmungen in (p, N) , die kleiner als $-\sqrt{-K}$ sind, gerade ist, und durch $\sigma_\infty(p, N) := -1$, falls sie ungerade ist (vergleiche auch die Definition von σ_r in Definition 2.72). Für $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ ist trivialerweise $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r(p, N) = \sigma_\infty(p, N)$ erfüllt.

6.65 Definition. Es werde mit $\mathcal{N}_{\infty, \geq 2} \subseteq \mathcal{N}_M$ die Menge derjenigen $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, für die $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N)$ in mindestens zwei Punkten tangential an M ist.

Dann seien die offenen Mengen $\mathcal{N}_\infty^+ \subseteq \mathcal{N}_M$ sowie $\mathcal{N}_\infty^- \subseteq \mathcal{N}_M$ definiert durch (hierbei werde zur Abkürzung $\mathcal{N}' := \mathcal{N}_{\infty, \geq 2} \cup \mathcal{N}_{(0)}$ gesetzt)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty^+ &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \zeta_\infty(p_{-\sigma_\infty(p,N)} \delta(p, N), b(-1, p, N)) \in \mathcal{D}_\infty\}, \\ \mathcal{N}_\infty^- &:= \{(p, N) \in \mathcal{N}' \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \zeta_\infty(p_{\sigma_\infty(p,N)} \delta(p, N), b(1, p, N)) \in \mathcal{D}_\infty\}. \end{aligned}$$

Dabei seien die Normalenvektoren der zu den Horosphären zugehörigen Hyperebenen in \mathbb{R}^{d+1} definiert durch (es sei $s \in \{-1, 1\}$, $(p, N) \in \mathcal{N}_M$)

$$b(s, p, N) := \sqrt{-K} \cdot p_{s\sigma_\infty(p,N)} \delta(p, N) - N_{s\sigma_\infty(p,N)} \delta(p, N)$$

(für die Definition der Funktionen p und N vergleiche Definition 6.2). Weiterhin sei \mathcal{B}_∞^+ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_∞^+ und \mathcal{B}_∞^- die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes von \mathcal{N}_∞^- .

6.66 Konstruktion. Analog zu Konstruktion 3.24 im Euklidischen sei die Menge \mathcal{Z} konstruiert als die Menge von Tupeln (via gemeinsamer Doppeltangentialhorosphären) zusammengehörender Zusammenhangskomponenten des Randes (innerhalb des Normaleneinheitsbündels \mathcal{N}_M) von \mathcal{N}_∞^+ bzw. \mathcal{N}_∞^- und ihrer angrenzenden Teilflächen. Nach Wahl der Voraussetzungen in Voraussetzungen 6.63 ist die Menge \mathcal{Z} wiederum endlich.

Betrachte nun ein festes Tupel $Z \in \mathcal{Z}$; es gelte $Z = (\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \mathcal{N}^{(1)}, \mathcal{N}^{(2)})$. Die von den zu $\mathcal{B}^{(1)}$ bzw. $\mathcal{B}^{(2)}$ gehörigen Doppeltangentialhorosphären eingehüllte Fläche (zwischen den beiden Berührungspunkten) werde mit \bar{M}_Z bezeichnet (vgl. Lemma 6.24), die zugehörige Teilmenge (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten) des Normaleneinheitsbündels $\mathcal{N}_{\bar{M}_Z}$ dieser Teilfläche mit $\bar{\mathcal{N}}_Z$ (dabei seien die Normalenvektoren derart orientiert, dass für alle $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{\mathcal{N}}_Z$ die doppelt berührende Horosphäre gegeben ist durch $\zeta_\infty(\bar{p}, \sqrt{-K} \cdot \bar{p} - \bar{N})$; vergleiche auch den Beweis von Lemma 6.25).

Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{B}^{(j)}$ ist für $j \in \{1, 2\}$ jeweils Teil des Randes von $\mathcal{N}^{(j)}$ und $\bar{\mathcal{N}}_Z$. Stimmt die kanonische Orientierung von $\mathcal{B}^{(j)}$ bezüglich dieser beiden Flächen überein, so setze $s_Z^{(j)} := -1$, im anderen Fall setze $s_Z^{(j)} := +1$. Gilt $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_\infty^+$, so setze $\sigma_Z^{(j)} := +1$, gilt dagegen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_\infty^-$, so setze $\sigma_Z^{(j)} := -1$.

Schließlich sei $\sigma_\infty^{(j)}$ (für $j \in \{1, 2\}$) der Wert der Funktion σ_∞ auf (der Fortsetzung) der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_Z$ entlang von $\mathcal{B}^{(j)}$ (in eventuellen Singularitäten werde wie im Euklidischen in Konstruktion 3.24 verfahren).

Dann sei $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^+$ die Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten) all derjenigen Flächen $\bar{\mathcal{N}}_Z$ (für $Z \in \mathcal{Z}$), für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \sigma_\infty^{(j)} = +1$ erfüllt ist, sowie $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^-$ die Vereinigungsfläche all derjenigen Flächen $\bar{\mathcal{N}}_Z$, für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} \sigma_\infty^{(j)} = -1$ erfüllt ist (jeweils für $j \in \{1, 2\}$; die Wohldefiniertheit dieser Definition wird in Korollar 6.87 gezeigt werden). Abschließend werde noch $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty} := \bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^+ \cup \bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^-$ gesetzt.

6.67 Konstruktion. Für $k \in \{3, \dots, d\}$ sei $\bar{M}_{k,\infty}$ die Teilmenge der von denjenigen Horosphären eingehüllten Fläche, die in genau k Punkten von $\mathcal{B}_{k,\infty} \cap \partial \bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}$ an M tangential sind, die von der konvexen Hülle der Berührungspunkte erzeugt wird (hierbei ist „konvex“ bezüglich Horosphären gemeint). Die zugehörige Teilmenge des Normaleneinheitsbündels $\mathcal{N}_{\bar{M}_{k,\infty}}$ dieser Fläche werde mit $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$ bezeichnet (unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten; die Normalenvektoren seien wie in Konstruktion 6.66 derart orientiert, dass für alle $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$ die k -fach berührende Horosphäre gegeben ist durch $\zeta_\infty(\bar{p}, \sqrt{-K} \cdot \bar{p} - \bar{N})$).

So wie zuvor in Konstruktion 6.66 die Fläche $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}$ in $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^-$ aufgeteilt worden ist, soll dies nun mit $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$ geschehen. Dies wird rekursiv durchgeführt werden, daher kann (die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_{2,\infty}^-$ sind ja bereits konstruiert) davon ausgegangen werden, dass die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_{j,\infty}^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_{j,\infty}^-$ für $j \in \{2, \dots, k-1\}$ bereits konstruiert sind. Es werde mit \mathcal{Z}_k die Menge der Zusammenhangskomponenten von $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$ bezeichnet (wie üblich unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten).

Sei nun $Z \in \mathcal{Z}_k$, $\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ die zugehörige Zusammenhangskomponente von $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$ und $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ eine der Zusammenhangskomponenten von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,\infty}$ mit $\partial \bar{\mathcal{N}}_{k,Z} \cap \partial \bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z} \neq \emptyset$ (beachte: Aufgrund der Anforderungen an die Berührungspunkte von tangentialen Horosphären mit mindestens drei Berührungspunkten in Voraussetzung 6.63 ist die Existenz von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ gesichert).

Es sei (\bar{p}, \bar{N}) ein nichtsingulärer Punkt sowohl von $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ als auch von $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$. Ist $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ eine Teilmenge von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,\infty}^+$, so setze $\bar{\sigma}_{k-1}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$, ist dagegen $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ eine Teilmenge von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,\infty}^-$, so setze $\bar{\sigma}_{k-1}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$. Schließlich werde noch $\bar{s}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$ gesetzt, falls sich $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ und $\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ auf verschiedenen Seiten des gemeinsamen Randstückes befinden, ansonsten werde $\bar{s}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$ gesetzt. Dann wird $\bar{\sigma}_k$ im Punkt (\bar{p}, \bar{N}) definiert durch

$$\bar{\sigma}_k(\bar{p}, \bar{N}) := \bar{\sigma}_{k-1}(\bar{p}, \bar{N}) \bar{s}(\bar{p}, \bar{N}) \sigma_\infty^{(k-1)}(\bar{p}, \bar{N}) \sigma_\infty^{(k)}(\bar{p}, \bar{N})$$

(hierbei sind $\varphi_{d-(k-1)}^{(k-1)}$ und $\varphi_{d-k}^{(k)}$ bezüglich der Fortsetzung von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z}$ bzw. $\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ zu bestimmen).

Setze dann $\bar{\sigma}_{k,Z} := \bar{\sigma}_k(\bar{p}, \bar{N})$. Die Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes (\bar{p}, \bar{N}) im Schnitt $\partial\bar{\mathcal{N}}_{k-1,Z} \cap \partial\bar{\mathcal{N}}_{k,Z}$ ist klar; die Unabhängigkeit von der Wahl der angrenzenden Zusammenhangskomponente von $\bar{\mathcal{N}}_{k-1}$ wird in Lemma 6.89 gezeigt werden. Somit können jetzt die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^-$ definiert werden via (wie üblich unter Berücksichtigung eventueller Vielfachheiten)

$$\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^+ := \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}_k: \bar{\sigma}_{k,Z} = +1} \bar{\mathcal{N}}_{k,Z} \text{ bzw.} \quad \bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^- := \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}_k: \bar{\sigma}_{k,Z} = -1} \bar{\mathcal{N}}_{k,Z}.$$

Für $k \in \{2, \dots, d\}$ sei noch $\bar{\mathcal{B}}_{k,\infty}^+ \subseteq \partial\bar{\mathcal{N}}_k^+$ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^+$, entsprechend sei $\bar{\mathcal{B}}_{k,\infty}^- \subseteq \partial\bar{\mathcal{N}}_k^-$ die Menge der nichtsingulären Punkte des Randes der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^-$. Weiterhin werde noch $\bar{\mathcal{B}}_{k,\infty} := \bar{\mathcal{B}}_{k,\infty}^+ \cup \bar{\mathcal{B}}_{k,\infty}^-$ gesetzt.

Schließlich seien noch die Flächen $\bar{\mathcal{N}}_\infty^+$, $\bar{\mathcal{N}}_\infty^-$ sowie $\bar{\mathcal{N}}_\infty$ definiert durch

$$\bar{\mathcal{N}}_\infty^+ := \bigcup_{k=2}^d \bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^+, \quad \bar{\mathcal{N}}_\infty^- := \bigcup_{k=2}^d \bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^- \text{ bzw.} \quad \bar{\mathcal{N}}_\infty := \bar{\mathcal{N}}_\infty^+ \cup \bar{\mathcal{N}}_\infty^-.$$

6.68 Satz. *Es gilt*

$$\mu(\mathcal{D}_\infty) = (2\sqrt{-K})^{d-1} \lim_{r \rightarrow \infty} (\exp(-\sqrt{-K}(d-1)r) \mu(\mathcal{D}_r)).$$

6.69 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}_\infty) = & \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \frac{\sqrt{-K}^{d-j-2}}{d-1} \left(\int_{\bar{\mathcal{N}}_\infty^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\bar{\mathcal{N}}_M}}} - \int_{\bar{\mathcal{N}}_\infty^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\bar{\mathcal{N}}_M}}} \right) \\ & + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \frac{\sqrt{-K}^{d-j-2}}{d-1} \left(\int_{\bar{\mathcal{N}}_\infty^+} \sigma_\infty \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\bar{\mathcal{N}}_M}}} - \int_{\bar{\mathcal{N}}_\infty^-} \sigma_\infty \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\bar{\mathcal{N}}_M}}} \right). \end{aligned}$$

6.4.2 Verhalten der Terme auf der Mannigfaltigkeit selbst

6.70 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass in (p, N) sämtlich Hauptkrümmungen von $-\sqrt{-K}$ verschieden sind.*

Dann existiert ein $r_0 > 0$, so dass $\sigma_r(p, N) = \sigma_\infty(p, N)$ für alle $r > r_0$ erfüllt ist.

6.71 Lemma. *Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder eine Hauptkrümmung in (p, N) gleich $-\sqrt{-K}$ ist, noch die Tangentialhorosphäre $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist.*

Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $r_0 > 0$, so dass für alle $\delta \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$ und $r > r_0$ weder die Sphären $\zeta_r(p_r(p, N))$ noch die Horosphären $\zeta_\infty(p_\delta(p, N), \sqrt{-K} \cdot p_\delta(p, N) - N_\delta(p, N))$ tangential an M sind.

6.72 Korollar. *Es sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M$, so dass weder eine Hauptkrümmung in (p, N) gleich $-\sqrt{-K}$ ist, noch die Tangentialhorosphäre $\zeta_\infty(p, \sqrt{-K} \cdot p - N)$ in einem weiteren Punkt als p tangential an M ist.*

Dann gibt es ein $r_0 > 0$, so dass die folgenden Aussagen für alle $r > r_0$ erfüllt sind:

- $(p, N) \in \mathcal{N}_r^+ \iff (p, N) \in \mathcal{N}_\infty^+$
- $(p, N) \in \mathcal{N}_r^- \iff (p, N) \in \mathcal{N}_\infty^-$

Beweis. Dies folgt mit Lemma 6.70 und Lemma 6.71 unmittelbar aus der Definition von \mathcal{N}_∞^+ bzw. \mathcal{N}_∞^- (vgl. Definition 6.65). \odot

6.73 Definition. Es seien für $r > 0$ die folgenden offenen Teilmengen von \mathcal{N}_M definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r^{++} &:= \text{Int}(\mathcal{N}_\infty^+ \setminus \mathcal{N}_r^+), & \mathcal{N}_r^{+-} &:= \text{Int}(\mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_\infty^+), \\ \mathcal{N}_r^{-+} &:= \text{Int}(\mathcal{N}_\infty^- \setminus \mathcal{N}_r^-) \text{ sowie} & \mathcal{N}_r^{--} &:= \text{Int}(\mathcal{N}_r^- \setminus \mathcal{N}_\infty^-). \end{aligned}$$

Nach Korollar 6.72 sind die Punkte von \mathcal{N}_r^{++} also diejenigen, die noch zu \mathcal{N}_r^+ „hinzukommen“ müssen (für größere Werte für r), während die Punkte von \mathcal{N}_r^{+-} diejenigen sind, die noch „zu viel“ in \mathcal{N}_r^+ sind, für größere Werte für r also nicht mehr in \mathcal{N}_r^+ enthalten sein sollten. Das entsprechende gilt für \mathcal{N}_r^{-+} und \mathcal{N}_r^{--} in Bezug auf die Menge \mathcal{N}_r^- .

6.74 Lemma. *Für $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $r > 0$ gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}_\infty^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} &= \int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \text{ sowie} \\ \int_{\mathcal{N}_\infty^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} &= \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} + \int_{\mathcal{N}_r^{-+}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{--}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Definition der beteiligten Mengen in Definition 6.73 gilt

$$\int_{\mathcal{N}_r^{++}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^{+-}} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} = \int_{\mathcal{N}_\infty^+ \setminus \mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^+ \setminus \mathcal{N}_\infty^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}}.$$

Zu den Integrationsgebieten in den Integralen auf der rechten Seite kann nun (wegen des unterschiedlichen Vorzeichens) jeweils $\mathcal{N}_r^+ \cap \mathcal{N}_\infty^+$ hinzugefügt werden, und es ergibt sich die erste der beiden gesuchten Formeln. Die zweite wird genauso gezeigt. \odot

6.75 Korollar. Für $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{d-1} \left(\dot{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_{\infty}^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_{\infty}^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \left(\dot{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \\ & \quad + \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}}}) dV. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 6.74 mit Hilfe von Satz 2.79. \odot

6.4.3 Hüllflächen von Mehrfachberührhorosphären

6.76 Lemma. Sei $(p, N) \in \mathcal{N}_M \setminus (\partial(\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-))$. Dann existiert $r_0 > 0$, so dass

$$(p, N) \notin \mathcal{N}_r^{-+} \cup \mathcal{N}_r^{--} \cup \mathcal{N}_r^{++} \cup \mathcal{N}_r^{+-}$$

für alle $r > r_0$ erfüllt ist.

6.77 Konstruktion. Sei $(p, N) \in \tilde{\mathcal{N}}_{\infty}^+ \cup \tilde{\mathcal{N}}_{\infty}^-$. Insbesondere ist die Horosphäre $\zeta_{\infty}(p, b)$ (wobei $b := \sqrt{-K} \cdot p - N$ der Normalenvektor der zugehörigen Hyperebene in \mathbb{R}^{d+1} ist) eine Mehrfachtangentialhorosphäre an M , es seien $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)}) \in \mathcal{N}_M$ die zugehörigen Berührungspunkte (für geeignetes $k \in \{2, \dots, d\}$; die Orientierung der Normalenvektoren sei so gewählt, dass $b = \sqrt{-K} \cdot p^{(j)} - N^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ erfüllt ist). Keine der Hauptkrümmungen in den Punkten $(p^{(j)}, N^{(j)})$ sei gleich $-\sqrt{-K}$, und es sei $r_0 > 0$ so gewählt, dass keine dieser Hauptkrümmungen im Intervall $] -\frac{j_1(r_0)}{j_2(r_0)}, -\sqrt{-K}[$ liegen. Für $j \in \{1, \dots, k\}$ existieren dann offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$, so dass die Hauptkrümmungen in allen Punkten dieser Umgebungen diese Eigenschaft besitzen.

Nach Lemma 2.49 ist für $r > r_0$ die Parallellfläche $M_{\mathcal{N}_j, r}$ eine reguläre Hyperfläche. Da keine der Hauptkrümmungen in $(p^{(j)}, N^{(j)})$ gleich $-\sqrt{-K}$ ist, existiert ein $r_j > r_0$, so dass für $r > r_j$ die Parallellfläche $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$ die Geodätische $\eta(p^{(i)}, N^{(i)})$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ schneidet.

Sei nun zunächst $r > r_j$. Nach obigem schneidet insbesondere die Geodätische $\eta(p, N)$ die Parallellfläche $M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$, d.h. es gibt $\delta_{j,r}(p, N) < r$ mit $p_{\delta_{j,r}}(p, N) \in M_{\mathcal{N}^{(j)}, r}$. Somit gibt es $(\tilde{p}(r), \tilde{N}(r)) \in \mathcal{N}^{(j)}$ mit

$$j_1(r) \cdot \tilde{p}(r) - j_2(r) \cdot \tilde{N}_r = j_1(\delta_{j,r}) \cdot p - j_2(\delta_{j,r}) \cdot N. \quad (6.8)$$

Ist $r \leq r_j$ so setze $\delta_{j,r}(p, N) := 0$. Ebenso setze $\delta_{j,r}(p, N) := 0$, falls (im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen) die Krümmungsvoraussetzungen in den Berührungspunkten von $\zeta_{\infty}(p, b)$ doch nicht erfüllt sein sollten.

Schließlich sei für $r > 0$ die Abbildung $\delta_r: \tilde{\mathcal{N}}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\delta_r: \tilde{\mathcal{N}}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}, (p, N) \mapsto \max(\{\delta_{1,r}(p, N), \dots, \delta_{k,r}(p, N)\}).$$

6.78 Lemma. *Es sei $(p, N) \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty$, so dass in keinem der zugehörigen Berührungspunkte der Horosphäre $\zeta_\infty(p, b)$ mit M eine Hauptkrümmung gleich $-\sqrt{-K}$ ist (hierbei sei $b := \sqrt{-K} \cdot p - N$; die Normalenvektoren, bezüglich derer diese Hauptkrümmungen bestimmt werden, seien so wie in Konstruktion 6.77 orientiert). Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r - \delta_r(p, N)) = 0.$$

Beweis. Sei k die Anzahl der Berührungspunkte von $\zeta_\infty(p, b)$ mit M und $j \in \{1, \dots, k\}$. Umformen von Gleichung (6.8) aus Konstruktion 6.77 führt dann (mit den dortigen Bezeichnungen) zu

$$\tilde{p}_r - \frac{j_2(r)}{j_1(r)} \cdot \tilde{N}_r = \frac{j_1(\delta_{j,r})}{j_1(r)} \cdot p - \frac{j_2(\delta_{j,r})}{j_1(r)} \cdot N.$$

Nach Konstruktion gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} (\tilde{p}_r, \tilde{N}_r) = (p^{(j)}, N^{(j)})$, daher ergibt Bilden des Grenzwertes $r \rightarrow \infty$

$$\sqrt{-K} \cdot b = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{j_1(\delta_{j,r})}{j_1(r)} \cdot p - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{j_2(\delta_{j,r})}{j_1(r)} \cdot N. \quad (6.9)$$

Für den ersten der beiden noch zu berechnenden Grenzwerte gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{j_1(\delta_{j,r})}{j_1(r)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(\sqrt{-K} \delta_{j,r}) + \exp(-\sqrt{-K} \delta_{j,r})}{\exp(\sqrt{-K} r) + \exp(-\sqrt{-K} r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(\sqrt{-K} (\delta_{j,r} - r)) + \exp(-\sqrt{-K} (\delta_{j,r} + r))}{1 + \exp(-2\sqrt{-K} r)} \\ &= \exp(\sqrt{-K} \lim_{r \rightarrow \infty} (\delta_{j,r} - r)) \end{aligned}$$

(beachte, dass stets $\delta_{j,r} > 0$ erfüllt ist). Da sich der zweite Grenzwert genauso umformen lässt, ergibt sich aus Gleichung (6.9) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\sqrt{-K} \cdot b = \sqrt{-K} \exp(\sqrt{-K} \lim_{r \rightarrow \infty} (\delta_{j,r} - r)) \cdot b. \quad \odot$$

Die folgenden drei Lemmas ergeben sich nun wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vergleiche Lemma 4.37, Lemma 4.38 bzw. Lemma 4.39) durch Zurückführen auf die Pedalfläche (nun von den tangentialen Horosphären; vergleiche Abschnitt 6.2.1) und das jeweils vorhergehende Lemma:

6.79 Lemma. *Es sei ζ_∞ eine Horosphäre, deren Berührungspunkte mit M genau durch $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)}) \in \mathcal{N}_M$ gegeben sind (für geeignetes $k \in \mathbb{N}$), ein Normalenvektor der zugehörigen Hyperebene von \mathbb{R}^{d+1} sei gegeben durch b . Weiterhin seien für $j \in \{1, \dots, k\}$ offene Umgebungen $\mathcal{N}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}_M$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$ gegeben, und $N^{(j)}$ sei so orientiert, dass $b = \sqrt{-K} \cdot p^{(j)} - N^{(j)}$ erfüllt ist. Schließlich werde noch $\mathcal{N} := \bigcup_{j=1}^k \mathcal{N}^{(j)}$ gesetzt.*

Dann gibt es für $j \in \{1, \dots, k\}$ offene Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N^{(j)})$, so dass für $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kein $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{N}}^{(j)}$ für beliebiges $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $\zeta_\infty(p', \sqrt{-K} \cdot p' - N') = \zeta_\infty(\tilde{p}, \sqrt{-K} \cdot \tilde{p} - \tilde{N})$.

6.80 Lemma. *Es liege erneut dieselbe Situation wie in Lemma 6.79 vor.*

Dann gibt es $r_0 > 0$ und (für $j \in \{1, \dots, k\}$) offene Umgebungen $\tilde{\mathcal{N}}^{(j)} \subseteq \mathcal{N}^{(j)}$ von $(p^{(j)}, N)$, so dass für $r > r_0$ und $(p', N') \in \mathcal{N}_M \setminus \mathcal{N}$ kein $(\tilde{p}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{N}}^j$ für beliebiges $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $\zeta_r(j_1(r) \cdot p' - j_2(r) \cdot N') = \zeta_r(j_1(r) \cdot \tilde{p} - j_2(r) \cdot \tilde{N})$.

6.81 Lemma. *Es gibt ein $r_0 > 0$, so dass für $r > r_0$ kein Berührungspunkt $(p, N) \in \mathcal{N}_M$ einer Mehrfachtangentialhorosphäre auch Berührungspunkt einer Mehrfachtangentialsphäre vom Radius r ist.*

Wie bereits im Euklidischen und Sphärischen kann also im folgenden davon ausgegangen werden, dass die betrachteten Radien r größer als r_0 aus Lemma 6.81 sind.

6.4.4 Von den Parallelfächern zu den Hüllflächen

6.82 Konstruktion. Es sei $r > 0$. Dann sei die Hyperfläche \bar{M}_r definiert als der Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) von $M_{\mathcal{N}_r^{--}, r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{-+}, r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$, $M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$, $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^+, r}$, $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^-, r}$ sowie $\pi_M(\mathcal{N}_\infty^+)$ und $\pi_M(\mathcal{N}_\infty^-)$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 2.48, Definition 2.66, Definition 6.8 sowie Definition 6.65). In denjenigen Punkten von \bar{M}_r , in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.49 bzw. Lemma 2.67), wird nun das Normaleneinheitsvektorfeld $\bar{N}: \bar{M}_r \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$ definiert.

Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_\infty^+ \cap \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, d.h. es gilt $p \in \pi_M(\mathcal{N}_\infty^+) \cap M_{d-1}$, so werde $\bar{N}(p) := -N$ gesetzt; ist $(p, N) \in \mathcal{N}_\infty^- \cap \mathcal{N}_{M_{d-1}}$, d.h. es gilt $p \in \pi_M(\mathcal{N}_\infty^-) \cap M_{d-1}$, so werde $\bar{N}(p) := +N$ gesetzt.

Ist $(p, N) \in \mathcal{N}_r^{--} \cup \mathcal{N}_r^{++}$, d.h. es gilt $j_1(r) \cdot p - j_2(r) \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{--}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$, so setze $\bar{N}(p - r \cdot N) := +\sigma_r(p, N) \cdot N$; ist dagegen $(p, N) \in \mathcal{N}_r^{-+} \cup \mathcal{N}_r^{+-}$, d.h. es gilt $j_1(r) \cdot p - j_2(r) \cdot N \in M_{\mathcal{N}_r^{-+}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}$, so setze $\bar{N}(p - r \cdot N) := -\sigma_r(p, N) \cdot N$ (für die Definition der Abbildung σ_r vergleiche Definition 2.72).

Auf der Teilfläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^+, r}$ von \bar{M}_r sei \bar{N} genau entgegengesetzt orientiert zu dem in Konstruktion 2.69 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} von $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^+, r}$ (bezüglich der Menge \mathcal{N}_∞^+ ; auf der Teilfläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^-, r}$ dagegen stimme \bar{N} mit dem in Konstruktion 2.69 definierten Normalenvektorfeld \bar{N} überein (bezüglich der Menge \mathcal{N}_∞^-).

6.83 Lemma. *Für $r > 0$ gilt*

$$\int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{\bar{M}_r} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{-+}, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{--}, r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++}, r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-}, r}}) dV = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\bar{M}_r} dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl bezüglich der Fläche \bar{M}_r in fast allen Punkten wohldefiniert.

Beweis. Dies erfolgt wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vergleiche Lemma 4.41 bzw. Lemma 4.43) durch Vergleichen der Orientierungen und Vielfachheiten der Normalenvektoren auf den zu den jeweiligen Integranden zugehörigen Flächen. Da die zugrunde liegende Definition (vgl. Definition 6.73) für $K < 0$ jedoch deutlich „angenehmer“ ist als diejenige im Euklidischen (vergleiche Definition 4.24 bzw. Definition 6.73), ist dies nun deutlich weniger aufwendig. \odot

6.4.5 Wohldefiniertheit

6.84 Lemma. *Es sei $\zeta_\infty \in \mathcal{H}_d^{(K)}$ eine Horosphäre, die in genau k Punkten an M tangential ist, die Berührungspunkte seien gegeben durch $(p^{(1)}, N^{(1)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)}) \in \mathcal{N}_M$ (für $k \in \{2, \dots, d\}$); die Orientierung der Normalenvektoren sei dabei wie üblich, vergleiche beispielsweise Lemma 6.79). In keinem der Berührungspunkte von ζ_∞ sei eine der Hauptkrümmungen gleich $-\sqrt{-K}$. Weiterhin gelte $(p^{(1)}, N^{(1)}) \in \partial(\mathcal{N}_\infty^+ \cup \mathcal{N}_\infty^-)$ (und damit ist auch $(p^{(2)}, N^{(2)}), \dots, (p^{(k)}, N^{(k)}) \in \partial(\mathcal{N}_\infty^+ \cup \mathcal{N}_\infty^-)$ erfüllt). Schließlich seien Punkte $\bar{p}^{(1)}$ und $\bar{p}^{(2)}$ in der konvexen (bzgl. Horosphären) Hülle der Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$ gegeben. Es sei (für $j \in \{1, 2\}$) $\bar{N}^{(j)}$ so gewählt, dass $\sqrt{-K} \cdot p^{(1)} - N^{(1)} = \sqrt{-K} \cdot \bar{p}^{(j)} - \bar{N}^{(j)}$ erfüllt ist.*

Dann gibt es $r_0 > 0$, so dass für $r > r_0$ sowohl (vgl. Konstruktion 6.77)

$$p_{\delta_r(\bar{p}^{(1)}, \bar{N}^{(1)})}(\bar{p}^{(1)}, \bar{N}^{(1)}) \in M_{\mathcal{N}_r^{--}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{-+}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{+-}, r} \cup M_{\mathcal{N}_r^{++}, r}$$

erfüllt ist, als auch, dass die Normalenvektoren in den Punkten $p_{\delta_r(\bar{p}^{(1)}, \bar{N}^{(1)})}(\bar{p}^{(1)}, \bar{N}^{(1)})$ und $p_{\delta_r(\bar{p}^{(2)}, \bar{N}^{(2)})}(\bar{p}^{(2)}, \bar{N}^{(2)})$ (jeweils bezüglich der Fläche \bar{M}_r ; vergleiche Konstruktion 6.82) in die gleiche Richtung zeigen, d.h. es gilt

$$\langle \bar{N}(p_{\delta_r(\bar{p}^{(1)}, \bar{N}^{(1)})}(\bar{p}^{(1)}, \bar{N}^{(1)})), \bar{N}(p_{\delta_r(\bar{p}^{(2)}, \bar{N}^{(2)})}(\bar{p}^{(2)}, \bar{N}^{(2)})) \rangle > 0.$$

6.85 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{B}_\infty^+ \cup \mathcal{B}_\infty^-$, so dass keine der Hauptkrümmungen in (p, N) gleich $-\sqrt{-K}$ ist. Ist $(p, N) \in \mathcal{B}_\infty^+$, so setze $\sigma := +1$, ist dagegen $(p, N) \in \mathcal{B}_\infty^-$, so setze $\sigma := -1$ (beachte: Ist (p, N) in beiden Mengen enthalten, so kann gewählt werden, ob (p, N) bezüglich \mathcal{N}_∞^+ oder \mathcal{N}_∞^- betrachtet werden soll). Weiterhin werde $s := +1$ gesetzt, falls die (kanonische) Orientierung von \mathcal{B}_∞^+ bzw. \mathcal{B}_∞^- um (p, N) bezüglich der angrenzenden Fläche \mathcal{N}_∞^+ bzw. \mathcal{N}_∞^- mit derjenigen bezüglich der angrenzenden Teilfläche von \bar{N}_∞ nicht übereinstimmt, ansonsten setze $s := -1$.*

Für betragsmäßig genügend kleines $\delta > 0$ zeigt dann der Normalenvektor an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^+}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^-}$ (jeweils als Teilfläche von \bar{M}_r für $r > \delta$; vergleiche Konstruktion 6.82) im Punkt $p_\delta(p, N)$ in die Parallelfläche $\bar{M}_{\bar{N}_\infty, \delta}$ genau dann, wenn $s\sigma = -1$ ist.

6.86 Lemma. *Sei $(p, N) \in \mathcal{B}_\infty^+ \cup \mathcal{B}_\infty^-$, so dass in (p, N) keine Hauptkrümmung gleich $-\sqrt{-K}$ ist. Setze dann (mit den Bezeichnungen aus Lemma 6.85)*

$$\bar{\sigma} := s\sigma\sigma_\infty(p, N)$$

(hierbei ist σ_∞ in (p, N) bezüglich \bar{N}_∞ zu bestimmen; für die Bestimmung von σ_∞ in singulären Punkten gelten dieselben Bemerkungen wie in Lemma 4.46 im Euklidischen).

Es gibt dann $r_0 > 0$, so dass der Normalenvektor im Punkt $p_r(p, N)$ an die Fläche $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^+}$ bzw. $\bar{S}_{\mathcal{B}_\infty^-}$ (jeweils als Teilfläche der Fläche \bar{M}_r ; vergleiche Konstruktion 6.82) für $r > r_0$ genau dann in die angrenzende Parallelfläche $\bar{M}_{\bar{N}_\infty, r}$ zeigt, wenn $\bar{\sigma} = -1$ ist.

6.87 Korollar. *Die Definition von $\bar{N}_{2, \infty}^+$ und $\bar{N}_{2, \infty}^-$ in Konstruktion 6.66 ist wohldefiniert.*

6.88 Konstruktion. Es sei $r > 0$ und $k \in \{2, \dots, d\}$ gegeben. Die Hyperfläche $S_{k,r}$ wird nun entsprechend der Vorgehensweise in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Konstruktion 4.48) als Abschluss der Vereinigungsfläche (unter Berücksichtigung eventuell auftretender Vielfachheiten) der Flächen $\pi_{\bar{M}}(\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty})$, $\bar{M}_{\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty},r}$ sowie $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_k,r}$ (für die Definitionen der beteiligten Flächen vergleiche Definition 2.48, Definition 2.66 sowie Konstruktion 6.66 bzw. Konstruktion 6.67) definiert. In denjenigen Punkten von $S_{k,r}$, in deren Umgebung diese Fläche eine reguläre Hyperfläche ist (vergleiche Lemma 2.49 bzw. Lemma 2.67), wird nun das Normaleneinheitsvektorfeld $N: S_{k,r} \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$ definiert.

Sei $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$. Gilt $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^+$, so setze $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$, ansonsten setze $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$. Ist \bar{p} ein regulärer Punkt der Fläche $\pi_{\bar{M}}(\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty})$ (als Hyperfläche), so sei in \bar{p} der Normalenvektor N gegeben durch $N(\bar{p}) := \bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) \sigma_\infty(\bar{p}, \bar{N}) \cdot \bar{N}$. Ist $p_r(\bar{p}, \bar{N})$ ein regulärer Punkt der Parallellfläche $\bar{M}_{\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty},r}$, so sei in diesem Punkt der Normalenvektor an die Fläche $S_{k,r}$ gegeben durch

$$N(j_1(r) \cdot \bar{p} - j_2(r) \cdot \bar{N}) := -\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) \sigma_\infty(\bar{p}, \bar{N}) \sigma_r(\bar{p}, \bar{N}) \cdot \bar{N}.$$

Somit bleibt noch das Normalenvektorfeld N auf den Teilflächen $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_k,r}$ von $S_{k,r}$ zu definieren. Sei also $\delta \in]0, r[$ und $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{\mathcal{B}}_k$, so dass $p_\delta(\bar{p}, \bar{N})$ ein regulärer Punkt von $\bar{S}_{\bar{\mathcal{B}}_k,r}$ ist (vgl. Lemma 2.67). Wie oben werde $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := +1$ gesetzt, falls $(\bar{p}, \bar{N}) \in \bar{\mathcal{B}}_k^+$ gilt, ansonsten gelte $\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) := -1$. Dann stimme die Orientierung des Normalenvektors $N(p_\delta(\bar{p}, \bar{N}))$ an die Fläche $S_{k,r}$ genau dann mit derjenigen des in Konstruktion 2.69 (bezüglich der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$) definierten Normalenvektors überein, wenn

$$\bar{\sigma}(\bar{p}, \bar{N}) \sigma_\infty(\bar{p}, \bar{N}) = +1$$

erfüllt ist (die Hauptkrümmungen in (\bar{p}, \bar{N}) , die zur Bestimmung von σ_∞ benötigt werden, sind dabei bezüglich der Fortsetzung der Fläche $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$ zu bestimmen).

Wie in der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Lemma 4.49) ergibt sich jetzt das folgende Lemma:

6.89 Lemma. *Es sei $r > 0$ und $k \in \{2, \dots, d\}$. Dann ist die Definition von $\bar{\mathcal{N}}_k^+$ und $\bar{\mathcal{N}}_k^-$ in Konstruktion 6.67 ebenso wohldefiniert wie die Windungszahl $w_{S_{k,r}}$ bezüglich der Fläche $S_{k,r}$ in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$.*

6.4.6 Trennung der Flächen

6.90 Definition. Für $r > 0$ übertragen sich die Definitionen der Flächen S_r , \check{M}_r und \check{M} (jetzt auch für gerade Dimension $d!$) sowie der auf diesen Flächen definierten Normalenvektorfelder direkt aus dem Euklidischen (vergleiche Definition 4.50 bzw. Konstruktion 4.53). Insbesondere ergibt sich die Wohldefiniertheit der Windungszahl (in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$) bezüglich der Fläche S_r aus Lemma 6.89.

Wie im Euklidischen ergibt sich mit diesen Flächen das folgende Lemma (vergleiche Lemma 4.52 bzw. Lemma 4.54)

6.91 Lemma. Für $r > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\bar{M}_r} dV = \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{\dot{M}} + w_{S_r} + w_{\check{M}_r}) dV,$$

insbesondere ist die Windungszahl sowohl bezüglich der Fläche \dot{M} als auch bezüglich der Fläche \check{M}_r in fast allen Punkten von $\mathbb{F}_{d,K}$ wohldefiniert.

6.4.7 Die Bestimmung des Grenzwertes

6.92 Lemma. Sei $q \in \mathbb{F}_{d,K}$. Eine den Punkt q nicht enthaltende Horosphäre $\zeta_\infty \in \mathcal{H}_d^{(K)}$ sei dann gegeben durch ihren Abstand ϱ zum Punkt q , ihren Lotfußpunkt p und den Normalenvektor $b \in \mathbb{F}_{d,K}^0$ der zugehörigen Hyperebene von \mathbb{R}^{d+1} (vergleiche auch Lemma 6.13 bzw. Korollar 6.14; setze $N := \sqrt{-K} \cdot p - b$).

Es sei $\mathcal{H}_{d,+}^{(K)} \subseteq \mathcal{H}_d^{(K)}$ die Menge derjenigen Horosphären ζ_∞ , in deren „Inneren“ der Punkt q enthalten ist, d.h. $q = p_\varrho(p, N)$ erfüllt ist, und $\mathcal{H}_{d,-}^{(K)} \subseteq \mathcal{H}_d^{(K)}$ die Menge derjenigen Horosphären ζ_∞ , in deren „Außengebiet“ der Punkt q enthalten ist, d.h. $q = p_\varrho(p, -N)$ erfüllt ist.

Dann sind die bewegungsinvariante Dichte $d\zeta_\infty^+$ und $d\zeta_\infty^-$ der Horosphären aus $\mathcal{H}_{d,+}^{(K)}$ bzw. $\mathcal{H}_{d,-}^{(K)}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d\zeta_\infty^+ &= \exp(\sqrt{-K} (d-1) \varrho) d\varrho \wedge dO \text{ sowie} \\ d\zeta_\infty^- &= \exp(-\sqrt{-K} (d-1) \varrho) d\varrho \wedge dO, \end{aligned}$$

wobei das Oberflächenelement dO zur Einheitssphäre im Tangentialraum von q an $\mathbb{F}_{d,K}$ gehöre (via Tangentialvektoren der Geodätischen durch den Lotfußpunkt und q).

Beweis. Für $d = 2$ und $K = -1$ ist dies in [19, section 2], für $d = 3$ und $K = -1$ in [20, section 3] gezeigt worden. Letzterer Beweis überträgt sich jedoch unmittelbar auf beliebige Dimension d und beliebiges $K < 0$. ☺

6.93 Lemma. Die Aussage von Satz 6.68 ist richtig, d.h. es gilt

$$\mu(\mathcal{D}_\infty) = (2\sqrt{-K})^{d-1} \lim_{r \rightarrow \infty} (\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \mu(\mathcal{D}_r)).$$

Beweis. Wie in der entsprechenden Situation für $K > 0$ (vgl. Lemma 6.57) reicht es auch hier aus, für M Sphären vom Radius $R > 0$ zu betrachten, und für \mathcal{D}_∞ bzw. \mathcal{D}_r (für $r > 0$) diejenigen Horosphären bzw. Sphären zu nehmen, die M schneiden.

Es gilt dann (vergleiche Satz 6.10 und Lemma 6.92; beachte die Symmetrie von M)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-1})} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \mu(\mathcal{D}_r) \right) \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \int_{r-R}^{r+R} (j_2(\varrho))^{d-1} d\varrho \right) \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \int_{-R}^R (j_2(\varrho+r))^{d-1} d\varrho \right) \\
&= \int_{-R}^R \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} r) \frac{\exp(\sqrt{-K}(\varrho+r)) - \exp(-\sqrt{-K}(\varrho+r))}{2\sqrt{-K}} \right) \right)^{d-1} d\varrho \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{-K})^{d-1}} \int_{-R}^R \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(\sqrt{-K} \varrho) - \exp(-\sqrt{-K}(\varrho+2r)) \right) \right)^{d-1} d\varrho \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{-K})^{d-1}} \int_{-R}^R \exp(\sqrt{-K} (d-1) \varrho) d\varrho \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{-K})^{d-1}} \left(\int_0^R \exp(\sqrt{-K} (d-1) \varrho) d\varrho + \int_0^R \exp(-\sqrt{-K} (d-1) \varrho) d\varrho \right) \\
&= \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}_{d-1})} \frac{1}{(2\sqrt{-K})^{d-1}} \mu(\mathcal{D}_\infty). \quad \odot
\end{aligned}$$

6.94 Lemma. Für $j \in \{0, \dots, d-1\}$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) \right) = \frac{1}{d-1} \frac{1}{2^{d-1}} \binom{d-1}{j} \frac{1}{\sqrt{-K}^{j+1}}.$$

Beweis. Aus der Definition der Funktion $\mathring{c}_{j,d}^{(K)}$ (vgl. Definition 2.52) ergibt sich für $r > 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\binom{d-1}{j}} \sqrt{-K}^j 2^{d-1} \mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) \\
&= \sqrt{-K}^j 2^{d-1} \int_0^r (j_1(\delta))^{d-1-j} (j_2(\delta))^j d\delta \\
&= \int_0^r \left(\exp(\sqrt{-K} \delta) + \exp(-\sqrt{-K} \delta) \right)^{d-1-j} \left(\exp(\sqrt{-K} \delta) - \exp(-\sqrt{-K} \delta) \right)^j d\delta.
\end{aligned}$$

Mit geeignet gewählten Konstanten $\gamma_{i,j,d}^{(K)}$ bzw. $\tilde{\gamma}_{i,j,d}^{(K)}$ (jeweils für $i \in \{1-d, \dots, d-2\}$) sowie $\tilde{\gamma}_{j,d}^{(K)}$ lässt sich dies umformen zu

$$\begin{aligned}
&= \int_0^r \exp(\sqrt{-K} (d-1) \delta) d\delta + \sum_{i=1-d}^{d-2} \gamma_{i,j,d}^{(K)} \int_0^r \exp(\sqrt{-K} i \delta) d\delta \\
&= \frac{1}{d-1} \frac{1}{\sqrt{-K}} \exp(\sqrt{-K} (d-1) r) + \sum_{i=1-d}^{d-2} \tilde{\gamma}_{i,j,d}^{(K)} \exp(\sqrt{-K} i r) + \tilde{\gamma}_{j,d}^{(K)} r.
\end{aligned}$$

Multiplizieren mit $\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r)$ und anschließendes Bilden des Grenzwertes für $r \rightarrow \infty$ liefert nun die Aussage. \odot

6.95 Lemma. *Es gilt (für die Konstanten $\bar{c}_{j,d}^{(K)}$ vergleiche Definition 6.28)*

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \left(\sum_{j=0}^{d-1} \left(\bar{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_r^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_r^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{\mathbb{F}_{d,K}} (w_{S_{\mathcal{N}_r^+,r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^-,r}} - w_{S_{\mathcal{N}_r^{++},r}} + w_{S_{\mathcal{N}_r^{+-},r}}) dV \right) \right) \\ &= \frac{1}{d-1} \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \frac{1}{\sqrt{-K}^{j+1}} \left(\int_{\mathcal{N}_\infty^+} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_\infty^-} \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 6.75 sowie Lemma 6.94. \odot

6.96 Lemma. *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{S_r} dV \right) \\ &= \frac{1}{d-1} \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \frac{1}{\sqrt{-K}^{j+1}} \left(\int_{\mathcal{N}_\infty^+} \sigma_r \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_\infty^-} \sigma_r \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Entsprechend der Vorgehensweise im Euklidischen (vgl. Lemma 4.56) ergibt sich

$$\int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{S_r} dV = \sum_{j=0}^{d-1} \left(\bar{c}_{j,d}^{(K)}(r) \left(\int_{\mathcal{N}_\infty^+} \sigma_\infty \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} - \int_{\mathcal{N}_\infty^-} \sigma_\infty \varphi_j \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{N}_M}}} \right) \right).$$

Die Aussage folgt nun aus Lemma 6.94. \odot

6.97 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\check{M}_r} dV \right) = 0.$$

Beweis. Analog zur Vorgehensweise im Beweis der entsprechenden Aussage im Euklidischen (vgl. Lemma 4.57), ergibt sich

$$\left| \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\check{M}_r} dV \right| \leq \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \int_{\check{N}} \left(\int_{\delta_{j,r}}^r (j_1(\varrho))^{d-1-j} (j_2(\varrho))^j d\varrho \right) |\varphi_j| \frac{dO}{\sqrt{K_{\check{N}}}}.$$

Wie im Euklidischen kann (nach dem Normieren) das Bilden des Grenzwertes $r \rightarrow \infty$ mit der (äußeren) Integration vertauscht werden. Es reicht also aus, zu zeigen, dass das normierte innere Integral (für $j \in \{0, \dots, d-1\}$) im Grenzwert verschwindet. Vorgehen wie im Beweis von Lemma 6.94 führt zu (mit den entsprechenden Konstanten)

$$\begin{aligned} & \sqrt{-K}^j 2^{d-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \int_{\delta_r}^r (j_1(\varrho))^{d-1-j} (j_2(\varrho))^j d\varrho \right) \\ &= \sum_{i=1-d}^{d-1} \tilde{\gamma}_{i,j,d}^{(K)} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(\sqrt{-K} (i+1-d) r) - \exp(\sqrt{-K} (i\delta_r - (d-1)r)) \right) \\ & \quad + \tilde{\gamma}_{j,d}^{(K)} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) (r - \delta_r) \right). \end{aligned}$$

Wegen $\delta_r \in [0, r]$ verschwinden im Grenzwert alle bis auf einen der Summanden, und es folgt

$$= \frac{1}{d-1} \frac{1}{\sqrt{-K}} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \exp(\sqrt{-K} (d-1) (\delta_r - r)) \right).$$

Die Aussage ergibt sich dann aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion mit Lemma 6.78. \odot

6.98 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\exp(-\sqrt{-K} (d-1) r) \int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{\overset{\circ}{M}} dV \right) = 0.$$

Beweis. Da die Fläche $\overset{\circ}{M}$ unabhängig von r ist (vgl. Konstruktion 6.90), ist dies klar. \odot

6.99 Folgerung. *Die Aussage von Satz 6.69 ist richtig.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 6.10 und Satz 6.68 mit Hilfe von Lemma 6.95, Lemma 6.96, Lemma 6.97 sowie Lemma 6.98 wegen Lemma 6.83 und Lemma 6.91. \odot

7 Bänder

Bei den Teilflächen, die in den Formeln der vorangegangenen Kapiteln auftreten, war es durch lokale Überlegungen immer sehr einfach festzustellen, ob die jeweilige Teilfläche in der Formel auftritt oder nicht, und wenn sie auftritt, ob sie positiv oder negativ gewichtet wird. Insgesamt können sich jedoch auf diese Weise ziemlich komplizierte Gebilde ergeben.

In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, dass es bei besonders „schöner“ Ausgangssituation möglich ist, stets eine einfache Darstellung aller beteiligter Flächen zu finden. Dabei werden Teilflächen jedoch im allgemeinen mehrmals sowohl positiv als auch negativ gewichtet werden, wobei es nicht direkt durch lokale Überlegungen klar ist, wie diese Gewichtung aussieht. „Schön“ wird in diesem Zusammenhang stets bedeuten, dass die Zusammenhangskomponenten der betrachteten Mannigfaltigkeit M konvex bezüglich der bewegten Objekte – also Hyperebenen bzw. Sphären – seien.

In zwei speziellen Situationen in der zweidimensionalen euklidischen Ebene wurden Formeln von der in diesem Kapitel betrachteten Art bereits im Jahr 1890 von J. J. Sylvester bewiesen (vergleiche den nachfolgenden Satz 7.3 sowie [25]). Sowohl dort als auch hier werden die Beweise – im Gegensatz zum Rest dieser Arbeit – hauptsächlich nicht differentialgeometrischer Natur sein, sondern sie werden mit kombinatorischen Mitteln auf einfache Grundsituationen zurückgeführt, in denen die in den vorangegangenen Kapiteln erlangten Formeln angewendet werden können.

In Unterkapitel 7.1 wird dies für Hyperebenen im Euklidischen durchgeführt werden, in 7.2 für Sphären im Euklidischen, im abschließenden Unterkapitel 7.3 im Nichteuklidischen sowohl für Hyperebenen als auch für Sphären.

7.1 Bänder bezüglich Hyperebenen im Euklidischen

Die Untersuchung der Schnittformeln bezüglich konvexer Zusammenhangskomponenten der gegebenen Mannigfaltigkeit M gliedert sich in zwei Abschnitte. In 7.1.1 erfolgt die Definition der aus Teilen von M und der Hüllflächen gebildeten „Basisflächen“, die in den nachfolgenden Formeln Verwendung finden, sowie die Formulierung der Aussagen selbst.

Im zweiten Abschnitt 7.1.2 werden die Aussagen bewiesen. Dies erfolgt durch Zurückführen auf einfache Schnittsituationen, in denen die Ergebnisse aus Kapitel 3 angewendet werden können, und sich die gesuchten „Basisflächen“ direkt ergeben. Dieses Zurückführen erfolgt mit rein kombinatorischen Mitteln, so dass sich der Beweis ohne Probleme ins Nichteuklidische überträgt (vgl. Abschnitt 7.3.1).

7.1.1 Formulierung der Aussagen

7.1 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 7.1 seien m kompakte konvexe nichtleere Mengen C_1, \dots, C_m in \mathbb{E}_d gegeben (mit $m \in \mathbb{N}$ und $d \geq 2$), so dass

$$M := \bigcup_{i=1}^m \partial C_i$$

die Voraussetzungen 3.22 erfüllt. Aufgrund der Konvexität lässt sich das Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ jetzt so wählen, dass alle Normalenvektoren ins Innere der zugehörigen konvexen Menge zeigen; insbesondere sind nun alle mittleren Krümmungen $\varphi_0, \dots, \varphi_{d-1}$ positiv. Die Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ sei wie in Voraussetzungen 3.22 fest gewählt.

7.2 Definition. Es sei B eine kompakte unberandete orientierbare \mathcal{C}^1 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Teilfläche der Vereinigungsfläche von M mit den von den Mehrfachberührhyperebenen eingehüllten Hüllflächen. Dann heißt B *Band*, wenn B außer in den Singularitäten der Hüllflächen stets regulär ist, und ein stetiges Normaleneinheitsvektorfeld besitzt (beachte: Dieses Normalenvektorfeld wird im allgemeinen keine Fortsetzung von $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ sein).

7.3 Satz (Sylvester, 1890). *Es sei $\mathcal{D}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Menge derjenigen Hyperebenen, die mindestens eine der gegebenen m Mengen schneiden, sowie $\mathcal{D}^{(2)} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}$ die Menge derjenigen Hyperebenen, die alle der gegebenen Mengen schneiden.*

Dann gibt es für $j \in \{1, 2\}$ Konstanten $c_i^{(j)} \in \mathbb{Z}$ sowie Bänder $B_i^{(j)}$ (mit $i \in \{1, \dots, i^{(j)}\}$ für geeignetes $i^{(j)} \in \mathbb{N}$), so dass sich das bewegungsinvariante Maß $\mu(\mathcal{D}^{(j)})$ der Hyperebenen aus $\mathcal{D}^{(j)}$ ausdrücken lässt als

$$\mu(\mathcal{D}^{(j)}) = \sum_{i=1}^{i^{(j)}} c_i^{(j)} \int_{B_i^{(j)}} |\varphi_{d-2}| \, dO.$$

Beweis. Für $d = 2$ (und paarweise disjunkte Mengen) ist diese Aussage von Sylvester in [25] bewiesen worden, die allgemeine Aussage folgt unmittelbar aus dem noch folgenden Satz 7.5. \odot

7.4 Definition. Sei $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine nichtleere Menge. Dann sei die konvexe Menge $C_J \subseteq \mathbb{E}_d$ definiert durch

$$C_J := \text{convex} \left(\bigcup_{j \in J} C_j \right).$$

Der Rand von C_J ist ein Band gemäß Definition 7.2, das im folgenden mit B_J° bezeichnet werde.

Seien $J_1, J_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei nichtleere disjunkte Mengen. Gilt $C_{J_1} \cap C_{J_2} = \emptyset$, so gibt es für $d > 2$ zwei Scharen von Hyperebenen, die sowohl tangential an C_{J_1} als auch tangential an C_{J_2} sind. Durch Fortsetzung der dabei eingehüllten Flächen auf den Rand von C_{J_1} bzw. C_{J_2} ergeben sich zwei Bänder. Bei dem einen handelt es sich um $B_{J_1 \cup J_2}^\circ$, das andere werde im folgenden mit B_{J_1, J_2}^\times bezeichnet. Die beiden entsprechenden Bänder im Fall $d = 2$ werden analog bezeichnet (vgl. Abbildung 7.1). Sind dagegen C_{J_1} und C_{J_2} nicht disjunkt, so definiere $B_{J_1, J_2}^\times := B_{J_1}^\circ \cup B_{J_2}^\circ$.

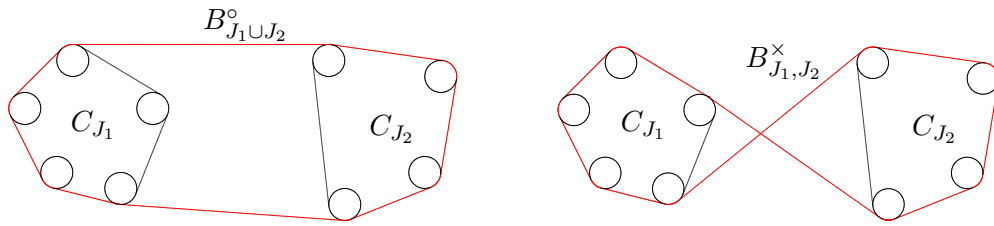


Abbildung 7.1: Die Bänder $B_{J_1 \cup J_2}^\circ$ und B_{J_1, J_2}^\times in der euklidischen Ebene \mathbb{E}_2

7.5 Satz. *Es existieren Konstanten $c_i \in \mathbb{Z}$ sowie Bänder B_i (mit $i \in I$ für eine geeignete endliche Indexmenge I), so dass sich das bewegungsinvariante Maß $\mu(\mathcal{D})$ der Hyperebenen aus \mathcal{D} ausdrücken lässt als*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \sum_{i \in I} c_i \int_{p \in B_i} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO \\ &= \sum_{i \in I} c_i \int_{B_i} |\varphi_{d-2}| \, dO. \end{aligned}$$

Insbesondere lassen sich die Bänder so wählen, dass sie jeweils einem der zwei Typen von Bändern aus Definition 7.4 entsprechen.

7.1.2 Beweis der Aussagen

7.6 Definition. Es seien $J_1, J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ drei disjunkte (nicht notwendig nichtleere) Mengen. Dann sei $\mathcal{D}_{J_1} \subseteq \mathcal{E}_{d-1, d}$ die Menge derjenigen Hyperebenen, die die konvexe Menge C_{J_1} schneiden und nicht tangential an M sind, d.h. es gilt

$$\mathcal{D}_{J_1} = \{ \xi \in \mathcal{E}_{d-1, d} \mid \xi \cap C_{J_1} \neq \emptyset \} \setminus \mathcal{T}$$

(dabei sei \mathcal{T} so wie in Voraussetzung 3.22 als Menge der an M tangentialen Hyperebenen definiert). Weiterhin sei $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3} \subseteq \mathcal{E}_{d-1, d}$ die Menge derjenigen (nicht an M tangentialen) Hyperebenen, die für alle $j \in J_3$ die konvexe Menge C_j schneiden, und die konvexen Mengen C_{J_1} und C_{J_2} trennen (bzw. nicht schneiden, falls J_1 oder J_2 leer sein sollte). Die Lage der übrigen konvexen Mengen sei dabei in beiden Definitionen beliebig.

7.7 Korollar. *Es seien J_1, J_2, J_3 so wie in Definition 7.6, dann gilt $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3} = \mathcal{D}_{J_2, J_1}^{J_3}$ sowie $\mu(\mathcal{D}_{\emptyset, J_2}^\emptyset) = \infty$.*

Beweis. Dies folgt jeweils unmittelbar aus Definition 7.6. ☺

7.8 Lemma. *Es sei $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ nichtleer. Dann gilt*

$$\mu(\mathcal{D}_J) = \int_{p \in B_J^\circ} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO = \int_{B_J^\circ} |\varphi_{d-2}| \, dO.$$

Beweis. Da die konvexe Menge C_J genau dann von einer Hyperebene geschnitten wird, wenn eine Menge C_j (mit $j \in J$) geschnitten wird oder zwei Mengen C_{j_1} und C_{j_2} (mit $j_1, j_2 \in J$) getrennt werden, ist die Menge \mathcal{D}_J von der in Voraussetzungen 3.22 geforderten Gestalt. Somit lässt sich Satz 3.28 anwenden, und die Aussage folgt unmittelbar (beachte: Eingeschränkt auf M ist nach Wahl der Orientierung der Normalenvektoren φ_{d-2} positiv, es gilt daher dort $\varphi_{d-2} = |\varphi_{d-2}|$; weiterhin verschwindet φ_{d-1} auf den Hüllflächen). \odot

7.9 Lemma. *Es seien $J_1, J_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei disjunkte nichtleere Mengen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}_{J_1, J_2}^\emptyset) &= \int_{p \in B_{J_1, J_2}^\times} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO - \int_{p \in B_{J_1}^\circ \cup B_{J_2}^\circ} \langle p, -N(p) \rangle \varphi_{d-1}(p) \, dO \\ &= \int_{B_{J_1, J_2}^\times} |\varphi_{d-2}| \, dO - \int_{B_{J_1}^\circ} |\varphi_{d-2}| \, dO - \int_{B_{J_2}^\circ} |\varphi_{d-2}| \, dO. \end{aligned}$$

Beweis. Da eine Hyperebene die konvexen Mengen C_{J_1} und C_{J_2} genau dann trennt, wenn sie alle Mengen C_{j_1} (für $j_1 \in J_1$) von allen Mengen C_{j_2} (mit $j_2 \in J_2$) trennt, ist die Menge $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^\emptyset$ wieder von der in Voraussetzungen 3.22 geforderten Gestalt. Somit lässt sich wie im Beweis von Lemma 7.8 Satz 3.28 anwenden, und die Aussage folgt unmittelbar. \odot

7.10 Lemma. *Es seien $J_1, J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ drei disjunkte nichtleere Mengen.*

Dann ist die Aussage von Satz 7.5 für $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Der Beweis wird mit Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 durchgeführt. Der Induktionsanfang ist durch Lemma 7.9 gegeben. Es kann nun also davon ausgegangen werden, dass die Behauptung bereits für kleinere Mengen als J_3 gezeigt ist. Sei j_3 in J_3 fest gewählt. Dann gibt es für die Lage einer Hyperebene ξ , die zur Menge $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3 \setminus \{j_3\}}$ gehört, bezüglich der Menge C_{j_3} genau drei sich ausschließende Möglichkeiten, es gilt daher

$$\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3 \setminus \{j_3\}} = \mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3} \cup \mathcal{D}_{J_1 \cup \{j_3\}, J_2}^{J_3 \setminus \{j_3\}} \cup \mathcal{D}_{J_1, J_2 \cup \{j_3\}}^{J_3 \setminus \{j_3\}}.$$

Da diese Zerlegung disjunkt ist, gilt für die Maße der beteiligten Mengen

$$\mu(\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3}) = \mu(\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3 \setminus \{j_3\}}) + \mu(\mathcal{D}_{J_1 \cup \{j_3\}, J_2}^{J_3 \setminus \{j_3\}}) + \mu(\mathcal{D}_{J_1, J_2 \cup \{j_3\}}^{J_3 \setminus \{j_3\}}).$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite lassen sich nach Induktionsvoraussetzung in der geforderten Gestalt darstellen, somit folgt die Behauptung. \odot

7.11 Lemma. *Es seien $J_1, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei disjunkte nichtleere Mengen.*

Dann ist die Aussage von Satz 7.5 für $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{J_1, \emptyset}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 7.10 wird eine Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 durchgeführt. Sei also zunächst $J_3 = \{j_3\}$, und ξ sei eine beliebige Hyperebene, die die konvexe Hülle von C_{J_1} und C_{j_3} schneidet. Dann gibt es für die Lage

von ξ die folgenden drei (sich untereinander ausschließenden) Fälle: Die Hyperebene ξ schneidet C_{j_3} aber nicht C_{J_1} , sie schneidet C_{J_1} oder sie trennt C_{J_1} und C_{j_3} . Somit gilt

$$\mathcal{D}_{J_1 \cup J_3} = \mathcal{D}_{J_1, \emptyset}^{J_3} \dot{\cup} \mathcal{D}_{J_1} \dot{\cup} \mathcal{D}_{J_1, J_3}^{\emptyset},$$

also folgt

$$\mu(\mathcal{D}_{J_1, \emptyset}^{J_3}) = \mu(\mathcal{D}_{J_1, J_3}^{\emptyset}) - \mu(\mathcal{D}_{J_1}) - \mu(\mathcal{D}_{J_1 \cup J_3}).$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite lassen sich nach Lemma 7.8 und Lemma 7.9 in der geforderten Gestalt schreiben, somit folgt die Aussage für $J_3 = \{j_3\}$.

Betrachte nun den Fall, dass J_3 mehr als ein Element besitzt. Die Aussage sei für kleinere Mengen bereits bewiesen. Es sei j_3 in J_3 fest gewählt. Dann gibt es für die Lage einer Hyperebene ξ , die zur Menge $\mathcal{D}_{J_1, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}$ gehört, bezüglich der Menge C_{j_3} genau drei sich ausschließende Möglichkeiten, es gilt also

$$\mathcal{D}_{J_2, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}} = \mathcal{D}_{J_2, \emptyset}^{J_3} \dot{\cup} \mathcal{D}_{J_2 \cup \{j_3\}, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}} \dot{\cup} \mathcal{D}_{J_2, \{j_3\}}^{J_3 \setminus \{j_3\}}.$$

Da die Mengen auf der rechten Seite paarweise disjunkt sind, folgt somit

$$\mu(\mathcal{D}_{J_2, \emptyset}^{J_3}) = \mu(\mathcal{D}_{J_2, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}) - \mu(\mathcal{D}_{J_2 \cup \{j_3\}, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}) - \mu(\mathcal{D}_{J_2, \{j_3\}}^{J_3 \setminus \{j_3\}}).$$

Da sich die Ausdrücke auf der rechten Seite nach Induktionsvoraussetzung sowie Lemma 7.10 in der geforderten Gestalt schreiben lassen, ist damit das Lemma bewiesen. \odot

7.12 Lemma. *Es sei $J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine nichtleere Menge.*

Dann ist die Aussage von Satz 7.5 für $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Wie in den Beweisen von Lemma 7.10 und Lemma 7.12 wird eine Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 durchgeführt. Der Induktionsanfang (für $|J_3| = 1$) ist gegeben durch Lemma 7.8. Es kann nun also davon ausgegangen werden, dass die Behauptung bereits für kleinere Mengen als J_3 gezeigt ist. Sei j_3 in J_3 fest gewählt. Dann gibt es für die Lage einer Hyperebene ξ , die zur Menge $\mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}$ gehört bezüglich der Menge C_{j_3} genau zwei sich ausschließende Möglichkeiten: Es gilt

$$\mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}} = \mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3} \dot{\cup} \mathcal{D}_{\{j_3\}, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}.$$

Da die Mengen auf der rechten Seite paarweise disjunkt sind, folgt somit

$$\mu(\mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3}) = \mu(\mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}) - \mu(\mathcal{D}_{\{j_3\}, \emptyset}^{J_3 \setminus \{j_3\}}).$$

Da sich die Ausdrücke auf der rechten Seite nach Induktionsvoraussetzung sowie Lemma 7.11 in der geforderten Gestalt schreiben lassen, ist damit das Lemma bewiesen. \odot

7.13 Folgerung. *Die Aussage von Satz 7.5 ist richtig.*

Beweis. Da C_i konvex ist für alle $i \in \{1, \dots, m\}$, ist jede Zusammenhangskomponente von \mathcal{D} gegeben durch eine der Mengen $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3}$ (mit geeigneten disjunkten Mengen $J_1, J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$; es gilt dann $J_1 \dot{\cup} J_2 \dot{\cup} J_3 = \{1, \dots, m\}$). Somit folgt die Aussage direkt aus Lemma 7.9, Lemma 7.10, Lemma 7.11 und Lemma 7.12. \odot

7.2 Bänder bezüglich Sphären im Euklidischen

In diesem Unterkapitel erfolgt – völlig analog zum Vorgehen bei den Hyperebenen im vorherigen Unterkapitel 7.2 – die Bestimmung von Schnittformeln bezüglich Sphären, in denen die beteiligten konstruierten Flächen aus „Bändern“ bestehen. Auch der Beweis in 7.2.2 erfolgt wie bei den Formeln mit Bändern bei den Hyperebenen in Abschnitt 7.1.2 durch Zurückführen der allgemeinen Situation auf spezielle einfache Schnittsituationen mit kombinatorischen Mitteln.

7.2.1 Formulierung der Aussage

7.14 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 7.2 seien m kompakte konvexe nicht-leere Mengen C_1, \dots, C_m in \mathbb{E}_d gegeben (mit $m \in \mathbb{N}$ und $d \geq 2$), so dass

$$M := \bigcup_{i=1}^m \partial C_i$$

die Voraussetzungen 4.6 erfüllt. Es sei $r > 0$ so gewählt, dass einerseits alle auftretenden Hauptkrümmungen betragsmäßig stets größer als $\frac{1}{r}$ sind, dass andererseits keine der Tangentialsphären antipodale Berührungspunkte besitzt (beachte: Aufgrund der Konvexitätsvoraussetzungen gibt es höchstens $m(m-1)$ derartige Sphären).

7.15 Definition. Es seien $J_1, J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ drei disjunkte (nicht notwendig nicht-leere) Mengen. Dann sei $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3} \subseteq \mathcal{S}_{d,r}$ die Menge derjenigen nicht an M tangentialen Sphären $\zeta_r(p) \in \mathcal{S}_{d,r}$ (für geeignete Punkte $p \in \mathbb{E}_d$), die die folgenden drei Eigenschaften erfüllen (dabei sei $\zeta_r^*(p)$ der offene Ball mit Mittelpunkt p und Radius r):

- Für alle $j \in J_1$ gelte $C_j \subseteq \zeta_r^*(p)$.
- Für alle $j \in J_2$ gelte $C_j \cap \zeta_r^*(p) = \emptyset$.
- Für alle $j \in J_3$ gelte $C_j \cap \zeta_r(p) \neq \emptyset$.

Die Sphären aus $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3}$ sind also genau diejenigen, die die zu J_3 zugehörigen konvexen Mengen schneiden, die zu J_2 gehörigen konvexen Mengen liegen „außerhalb“ und die zu J_1 gehörigen „innerhalb“ dieser Sphären. Die Lage der übrigen konvexen Mengen sei dabei beliebig.

7.16 Definition. Es sei B eine kompakte unberandete orientierbare \mathcal{C}^1 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Teilfläche der Vereinigungsfläche von M mit den von den Mehrfachberührungssphären eingehüllten Flächen. Dann heißt B *Band*, wenn B außer in den Singularitäten der Hüllflächen stets regulär ist, ein stetiges Normalenbündel besitzt, und auf B ein Normaleneinheitsvektorfeld definiert ist, bezüglich dessen die Windungszahl gemäß Definition 2.34 wohldefiniert ist.

7.17 Definition. Sei $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine nichtleere Teilmenge der Indexmenge der gegebenen konvexen Mengen. Dann seien die Flächen B_J° und B_J^\sphericalangle folgendermaßen definiert (wieder sei $\zeta_r^*(p)$ der offene Ball mit Mittelpunkt p und Radius r): Die Fläche B_J° sei diejenige Fläche, die eingehüllt wird von denjenigen Sphären, die alle der Mengen C_j für $j \in J$ enthalten, die Fläche B_J^\sphericalangle sei diejenige Fläche, die eingehüllt wird von denjenigen Sphären, die keine einzige der Mengen C_j für $j \in J$ enthalten, wobei stets das kleinere Segment der einhüllenden Sphären für die Hüllfläche herangezogen werde. Beachte, dass für „kleine“ Radien r die Fläche B_J° auch leer sein kann, und die Fläche B_J^\sphericalangle im allgemeinen nicht zusammenhängend ist und Selbstdurchdringungen besitzen kann. Ist die Fläche B_J^\sphericalangle selbstdurchdringungsfrei, so gilt (für B_J° sind keine zusätzlichen Forderungen notwendig)

$$B_J^\circ = \partial \left(\bigcap_{\substack{p \in \mathbb{E}_d \text{ mit } C_j \subseteq \zeta_r^*(p) \\ \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}}} \zeta_r^*(p) \right) \text{ sowie } B_J^\sphericalangle = \partial \left(\bigcup_{\substack{p \in \mathbb{E}_d \text{ mit } C_j \subseteq \mathbb{E}_d \setminus \zeta_r^*(p) \\ \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}}} \zeta_r^*(p) \right).$$

In Abbildung 7.2 sind die beiden Flächen B_J° und B_J^\sphericalangle für eine Beispielsituation (mit $|J| = 5$) in der euklidischen Ebene hervorgehoben.

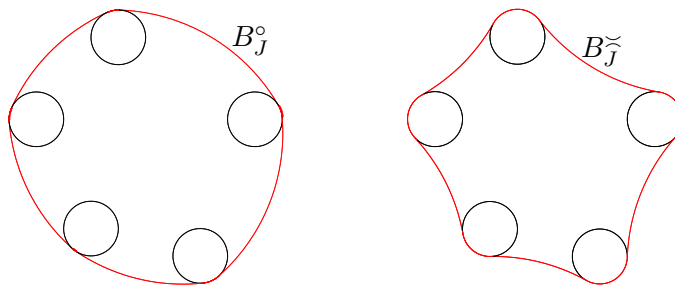


Abbildung 7.2: Die Bänder B_J° und B_J^\sphericalangle in der euklidischen Ebene \mathbb{E}_2

Um Bänder gemäß Definition 7.16 zu erhalten, ist es noch notwendig, geeignete Normalenvektorfelder auf diesen Flächen zu definieren (sofern sie nicht eh gleich der leeren Menge sind): Es sei $B_J^{\sphericalangle,+}$ dasjenige Band, das sich aus der Fläche B_J^\sphericalangle zusammen mit dem nach „innen“ gerichteten Normaleneinheitsvektorfeld ergibt („Innen“ auf den Teilflächen von M , auf den Hüllflächen kann es aufgrund von Selbstdurchdringungen durchaus nach „außen“ gerichtet sein), und $B_J^{\sphericalangle,-}$ dasjenige Band, das sich mit dem entgegengesetzt orientierten Normaleneinheitsvektorfeld ergibt. Die Bänder $B_J^{\circ,+}$ und $B_J^{\circ,-}$ seien bezüglich der Fläche B_J° genauso definiert.

7.18 Konstruktion. Es seien $J_1, J_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei disjunkte nichtleere Teilmengen der Indexmenge. Die Teilflächen $A_1 \subseteq B_{J_1}^\circ$ und $A_2 \subseteq B_{J_1}^\sphericalangle$ seien definiert durch

$$A_1 := \{p \in B_{J_1}^\circ \mid \zeta_r(p + r \cdot N(p)) \in \partial \mathcal{D}_{J_1, J_2}^\emptyset\} \text{ sowie } A_2 := \{p \in B_{J_1}^\sphericalangle \mid \zeta_r(p - r \cdot N(p)) \in \partial \mathcal{D}_{J_1, J_2}^\emptyset\}$$

(hierbei sei $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ das nach „innen“ gerichtete Normaleneinheitsvektorfeld auf $B_{J_1}^\circ$ bzw. $B_{J_2}^\times$; vergleiche auch die Bemerkungen in Definition 7.17). Es sei \check{M} die von den Sphären in $\partial\mathcal{D}_{J_1, J_2}^\emptyset$, die also die zu J_1 gehörigen Mengen in ihrem „Innengebiet“ und die zu J_2 gehörigen Mengen in ihrem „Außengebiet“ haben, eingehüllte Fläche, wobei stets das kleinere Segment für die Hüllfläche herangezogen werden soll (beachte: Nach Wahl der Voraussetzungen gibt es keine antipodalen Berührungspunkte). Dann sei die Fläche B_{J_1, J_2}^\times definiert via

$$B_{J_1, J_2}^\times := \overline{(B_{J_1}^\circ \setminus A_1) \cup (B_{J_2}^\times \setminus A_2) \cup \check{M}}.$$

Beachte, dass die Fläche B_{J_1, J_2}^\times einfach die Vereinigung der Flächen $B_{J_1}^\circ$ und $B_{J_2}^\times$ ist, falls $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^\emptyset$ gleich der leeren Menge sein sollte. In Abbildung 7.3 ist die Fläche B_{J_1, J_2}^\times

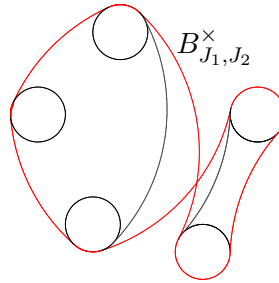


Abbildung 7.3: Das Band B_{J_1, J_2}^\times in der euklidischen Ebene \mathbb{E}_2

für eine Beispielsituation (mit $|J_1| = 3$ und $|J_2| = 2$) in der euklidischen Ebene rot hervorgehoben.

Um ein Band gemäß Definition 7.16 zu erhalten, ist es noch notwendig, ein geeignetes Normalenvektorfeld auf B_{J_1, J_2}^\times zu definieren: Auf denjenigen Teilflächen, die auch Teilflächen von $B_{J_2}^\times$ sind, stimme die Orientierung der Normalenvektoren mit derjenigen von $B_{J_2}^{\times,+}$ überein, auf den Teilflächen, die auch Teilflächen von $B_{J_1}^\circ$ sind, stimme die Orientierung der Normalenvektoren genau dann mit derjenigen von $B_{J_1}^{\circ,+}$ überein, wenn d ungerade ist (vergleiche jeweils Definition 7.17). Auf die Teilflächen, die zur Fläche \check{M} gehören, lassen sich die Normalenvektoren dann entsprechend der Vorgehensweise in Konstruktion 4.9 bzw. Konstruktion 4.10 fortsetzen.

7.19 Satz. *Es sei \mathcal{D} Vereinigung von Mengen der Form $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3}$ für Tripel (J_1, J_2, J_3) wie in Definition 7.15.*

Dann gilt $\mu(\mathcal{D}) = \infty$, oder es existieren Konstanten $c_i \in \mathbb{Z}$ sowie Bänder B_i (mit $i \in I$ für eine geeignete endliche Indexmenge I), so dass sich das bewegungsinvariante Maß $\mu(\mathcal{D})$ der Sphären aus \mathcal{D} ausdrücken lässt als

$$\mu(\mathcal{D}) = \sum_{i \in I} c_i \left(\int_{\mathbb{E}_d} w_{B_i} dV - \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} r^{j+1} \int_{B_i} \sigma_r \varphi_j dO \right)$$

(die Krümmungen sind dabei jeweils bezüglich des auf dem Band gegebenen Normalenvektorfeldes zu bestimmen). Insbesondere lassen sich die Bänder so wählen, dass sie jeweils einem der Typen von Bändern aus Definition 7.17 bzw. Konstruktion 7.18 entsprechen.

7.20 Bemerkung. Im Unterschied zur Situation bei den Hyperebenen (vergleiche Voraussetzung 7.1 bzw. Satz 7.5) sind in Satz 7.19 nicht alle möglichen Vereinigungen von Zusammenhangskomponenten für die Menge \mathcal{D} zugelassen.

Sind beispielsweise C_1 und C_2 zwei Bälle mit Radius 1, so zerfällt $\mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{\{1,2\}}$ für $r > \frac{d}{2} + 1$ in zwei Zusammenhangskomponenten, die einzeln nicht von den Voraussetzungen abgedeckt sind (dabei sei d der Mittelpunktsabstand der beiden Bälle).

7.2.2 Beweis der Aussage

7.21 Definition. Es sei $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine nichtleere Menge. Dann sei \mathcal{D}_J die Menge derjenigen Sphären $\zeta \in \mathcal{S}_{d,r}$, die die Fläche $B_{\tilde{J}}$ schneiden. Es sei \mathcal{J}_J die Menge derjenigen Teilmengen von J , die den Zusammenhangskomponenten der Fläche $B_{\tilde{J}}$ entsprechen.

7.22 Lemma. Es seien $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine nichtleere Menge bzw. $J_1, J_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei disjunkte nichtleere Mengen. Weiterhin sei $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}_{J, \emptyset}^{\emptyset}, \mathcal{D}_J, \mathcal{D}_{\emptyset, J}^{\emptyset}, \mathcal{D}_{J_1, J_2}^{\emptyset}\}$.

Dann ist die Aussage von Satz 7.19 für \mathcal{D} richtig. Genauer gilt, dass die folgenden Bänder und Konstanten gewählt werden können, um die Aussage von Satz 7.19 zu erhalten:

1. Ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{J, \emptyset}^{\emptyset}$ so kann das Band $B_1 := B_J^{\circ, -}$ mit $c_1 := (-1)^d$ gewählt werden.
2. Ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_J$, so können die Bänder $B_1 := B_{\tilde{J}}^{\succ, +}$ und $B_K := B_K^{\circ, -}$ für $K \in \mathcal{J}_J$ zusammen mit $c_1 := -1$ und $c_K := (-1)^{d+1}$ gewählt werden.
3. Ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\emptyset, J}^{\emptyset}$, so gilt $\mu(\mathcal{D}_{\emptyset, J}^{\emptyset}) = \infty$.
4. Ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{J_1, J_2}^{\emptyset}$, so können die Bänder $B_1 := B_{J_1, J_2}^{\times}$, $B_2 := B_{J_2}^{\succ, +}$ sowie $B_3 := B_{J_2}^{\circ, -}$ zusammen mit $c_1 := c_2 := 1$ und $c_3 := (-1)^d$ gewählt werden.

Beweis. Da die Menge \mathcal{D} (in den nicht-trivialen Fällen) jeweils von der in Voraussetzungen 4.6 geforderten Gestalt ist, lässt sich Satz 4.14 anwenden, und die Aussage folgt unmittelbar. ☺

7.23 Lemma. Es seien $J_1, J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ drei disjunkte nichtleere Mengen.

Dann ist die Aussage von Satz 7.19 für $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Dies lässt sich wie in der entsprechenden Situation bei den Hyperebenen (vgl. Lemma 7.10) via Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 auf Lemma 7.22, 4. zurückführen. ☺

7.24 Lemma. Es seien $J_1, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei disjunkte nichtleere Mengen.

Dann ist die Aussage von Satz 7.19 für $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{J_1, \emptyset}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Dies lässt sich genauso wie in der entsprechenden Situation für Hyperebenen (vgl. Lemma 7.11) via Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 auf Lemma 7.22 (2. und 4.) sowie Lemma 7.23 zurückführen (beachte, dass es hier bei den Sphären im Unterschied zu den Hyperebenen wegen der Beschränktheit von $\mathcal{D}_{J_2, \emptyset}^\emptyset$ auch möglich wäre, Lemma 7.22 1. als Induktionsanfang heranzuziehen). \odot

7.25 Lemma. *Es seien $J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ zwei disjunkte nichtleere Mengen.*

Dann ist die Aussage von Satz 7.19 für $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\emptyset, J_2}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Dieses Lemma lässt sich wie Lemma 7.24 via Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 beweisen. Während sich der Induktionsschritt einfach durch Vertauschen der unteren beiden Indizes direkt aus der entsprechenden Situation für Hyperebenen überträgt (vgl. Lemma 7.11) und auf Lemma 7.23 zurückgeführt werden kann, gilt dies nicht für den Induktionsanfang.

Sei also $J_3 = \{j_3\}$. Werden die Sphären betrachtet, die die Fläche $B_{J_2 \cup J_3}^\sim$ schneiden, so gibt es mehrere (abhängig von der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $B_{J_2}^\sim$) sich gegenseitig ausschließende Fälle für die Lage dieser Sphären bezüglich der Fläche C_{j_3} und der Zusammenhangskomponenten von $B_{J_2}^\sim$: Es gilt (beachte, dass im Inneren der betrachteten Sphären nach Konstruktion höchstens eine Zusammenhangskomponente von $B_{J_2}^\sim$ sein kann)

$$\mathcal{D}_{J_2 \cup J_3} = \mathcal{D}_{J_2} \dot{\cup} \mathcal{D}_{\emptyset, J_2}^{J_3} \dot{\cup} \mathcal{D}_{J_3, J_2}^\emptyset \dot{\cup} \bigcup_{K \in \mathcal{J}_{J_2}} \left(\mathcal{D}_{K, J_2 \setminus K \cup J_3}^\emptyset \dot{\cup} \mathcal{D}_{K \cup J_3, J_2 \setminus K}^\emptyset \dot{\cup} \mathcal{D}_{K, J_2 \setminus K}^{J_3} \right).$$

Da die Mengen auf der rechten Seite paarweise disjunkt sind, folgt somit

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}_{\emptyset, J_2}^{J_3}) &= \mu(\mathcal{D}_{J_2 \cup J_3}) - \mu(\mathcal{D}_{J_2}) - \mu(\mathcal{D}_{J_3, J_2}^\emptyset) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{J}_{J_2}} \left(\mu(\mathcal{D}_{K, J_2 \setminus K \cup J_3}^\emptyset) + \mu(\mathcal{D}_{K \cup J_3, J_2 \setminus K}^\emptyset) + \mu(\mathcal{D}_{K, J_2 \setminus K}^{J_3}) \right). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite lassen sich nach Lemma 7.22 (2. und 4.; ist $B_{J_2}^\sim$ zusammenhängend auch 1.) und Lemma 7.23 (bzw. Lemma 7.24, falls $B_{J_2}^\sim$ zusammenhängend ist) in der geforderten Gestalt schreiben. \odot

7.26 Lemma. *Es sei $J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine nichtleere Menge.*

Dann ist die Aussage von Satz 7.19 für $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\emptyset, \emptyset}^{J_3}$ richtig.

Beweis. Dieses Lemma lässt sich wie in der entsprechenden Situation bei den Hyperebenen (vgl. Lemma 7.12) via Induktion nach der Anzahl der Elemente von J_3 auf Lemma 7.22 1. sowie Lemma 7.24 und Lemma 7.25 zurückführen (beachte, dass nun keine Symmetrie in den beiden unteren Indizes vorliegt, daher beide Fälle berücksichtigt werden müssen). \odot

7.3 Bänder im Nichteuklidischen

Da die Beweise in den Abschnitten 7.1 (für Hyperebenen) und 7.2 (für Sphären) rein kombinatorischer Natur waren, übertragen sich die dortigen Aussagen direkt auf die entsprechende Situation im Nichteuklidischen durch Zurückführen auf die entsprechenden Aussagen in den Kapiteln 5 und 6.

7.3.1 Bänder bezüglich Hyperebenen

7.27 Voraussetzung. Es seien m kompakte konvexe nichtleere Mengen C_1, \dots, C_m in $\mathbb{F}_{d,K}$ gegeben (mit $m \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ und $K \neq 0$), so dass

$$M := \bigcup_{i=1}^m \partial C_i$$

die Voraussetzungen 5.20 erfüllt. Aufgrund der Konvexität lässt sich das Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{F}_{d,K}^1$ jetzt so wählen, dass alle Normalenvektoren ins Innere der zugehörigen konvexen Menge zeigen; insbesondere sind nun alle mittleren Krümmungen $\varphi_0, \dots, \varphi_{d-1}$ positiv. Die Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$ sei wie in Voraussetzungen 5.20 fest gewählt.

Der Begriff „Band“ lässt sich aus dem Euklidischen unmittelbar aus Definition 7.2 übernehmen, und es gelten die folgenden Sätze:

7.28 Satz. *Es existieren Konstanten $c_i \in \mathbb{Z}$ sowie Bänder B_i (mit $i \in I$ für eine geeignete endliche Indexmenge I), so dass sich das bewegungsinvariante Maß $\mu(\mathcal{D})$ der Hyperebenen aus \mathcal{D} ausdrücken lässt als*

$$\mu(\mathcal{D}) = \sum_{i \in I} c_i \int_{p \in B_i} \frac{j_1(\text{dist}(q, p))}{(j_1(\varrho(p)))^d} \left(\int_0^{\varrho(p)} (j_1(\rho))^{d-1} d\rho \right) \varphi_{d-1}(p) dO,$$

falls $K < 0$, oder für $K > 0$ diejenige Hyperebene, deren Normalenvektor q ist, nicht in \mathcal{D} enthalten ist; ist letzteres der Fall, so ist noch $\frac{\text{vol}(\mathbb{S}_d)}{2\sqrt{K}^d}$ hinzu zu addieren.

7.29 Definition. Für $K > 0$ und $r := \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ sei die Abbildung $\sigma_r: \mathcal{N}_M \cup \mathcal{N}_{\bar{M}} \rightarrow \{-1, +1\}$ für $(p', N') \in \mathcal{N}_M \cup \mathcal{N}_{\bar{M}}$ definiert durch $\sigma_r(p', N') := +1$, falls die Anzahl der negativen Hauptkrümmungen in (p', N') gerade ist, und durch $\sigma_r(p', N') := -1$, falls sie ungerade ist (vergleiche auch Definition 2.72 und Lemma 6.31).

7.30 Konstruktion. Sei $K > 0$ und d ungerade. Um bezüglich der im nachfolgenden Satz 7.31 in dieser Situation auftretenden Bänder B_i (für $i \in I$) eine Windungszahl bestimmen zu können, werden jetzt für die gemäß Definition 7.4 im Euklidischen definierten elementaren Bänder Normaleneinheitsvektorfelder definiert.

Für eine nichtleere Menge $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ sei auf dem Band B_J° das nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektorfeld gegeben, das Integral über die Windungszahl bezüglich dieses Bandes ergibt demnach genau das Volumen von C_J .

Für zwei nichtleere disjunkte Mengen $J_1, J_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ sei auf dem Band B_{J_1, J_2}^\times dasjenige Normaleneinheitsvektorfeld $N^\times: B_{J_1, J_2}^\times \rightarrow \mathbb{S}_d$ gegeben, das sich durch „Fortsetzen“ der Normalenvektorfelder von $B_{J_1}^\circ$ und $B_{J_2}^\circ$ ergibt (vergleiche das Vorgehen beim Definieren der Normalenvektoren der Fläche M in Konstruktion 6.27): Auf den Teilflächen von B_{J_1, J_2}^\times , die ebenfalls zu $B_{J_1}^\circ$ bzw. $B_{J_2}^\circ$ gehören, seien die Normalenvektoren gleichorientiert wie diejenigen von $B_{J_1}^\circ$ bzw. $B_{J_2}^\circ$. Es sei nun \bar{p} ein regulärer Punkt der zu einer Hüllfläche gehörenden Teilfläche von B_{J_1, J_2}^\times , die zugehörige mehrfach tangentielle Hyperlebene berühre M in genau k Punkten, einer dieser Berührungspunkte sei gegeben durch p . Dann werde der Normalenvektor im Punkt \bar{p} definiert durch

$$N^\times(\bar{p}) := \sigma_{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}}(\bar{p}, N(p)) \sigma_{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}}(p, N(p)) \cdot N(p),$$

es gilt also $N^\times(\bar{p}) = \text{sign}(\varphi_{d-k}(\bar{p}, N(p))) \text{sign}(\varphi_{d-k}(p, N(p))) \cdot N(p)$.

7.31 Satz. *Es sei $K > 0$ und $\xi \in \mathcal{E}_{d-1, d}^{(K)}$ die Hyperebene, deren Normalenvektor q ist. Im Fall, dass $\xi \notin \mathcal{D}$ erfüllt ist, gilt für gerade Dimension d*

$$\mu(\mathcal{D}) = \sum_{i \in I} \left(c_i \sum_{j=0}^{d-2} (\bar{c}_{j, d}^{(K)} \int_{p \in B_i} \sigma_{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \varphi_j \, dO) \right)$$

(für die Konstanten $\bar{c}_{j, d}^{(K)}$ vergleiche Definition 6.28), für ungerade Dimension d

$$\mu(\mathcal{D}) = \sqrt{K}^{d-1} \sum_{i \in I} \left(c_i \int_{\mathbb{F}_{d, K}} w_{B_i} \, dV \right) + \sum_{i \in I} \left(c_i \sum_{j=0}^{d-2} (\bar{c}_{j, d}^{(K)} \int_{p \in B_i} \sigma_{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}} \varphi_j \, dO) \right).$$

Ist dagegen $\xi \in \mathcal{D}$ erfüllt, so ist jeweils $\frac{\text{vol}(\mathbb{S}_d)}{2\sqrt{K}^d}$ zur jeweiligen Formel zu addieren.

7.3.2 Bänder bezüglich Sphären

7.32 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 7.3.2 seien m kompakte konvexe nichtleere Mengen C_1, \dots, C_m in $\mathbb{F}_{d, K}$ gegeben (mit $m \in \mathbb{N}$, $K \neq 0$ und $d \geq 2$), so dass

$$M := \bigcup_{i=1}^m \partial C_i$$

die Voraussetzungen 6.7 erfüllt. Es sei $r > 0$ so gewählt (zusätzlich gelte $r < \frac{2}{\pi\sqrt{K}}$ im Fall $K > 0$), dass einerseits alle auftretenden Hauptkrümmungen betragsmäßig stets größer als $\frac{j_1(r)}{j_2(r)}$ sind, dass andererseits keine der Tangentialsphären antipodale Berührungspunkte besitzt.

Die Definition der Mengen $\mathcal{D}_{J_1, J_2}^{J_3} \subseteq \mathcal{S}_{d, r, K}$ für drei disjunkte (nicht notwendig nichtleere) Mengen $J_1, J_2, J_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ überträgt sich direkt aus der entsprechenden Situation im Euklidischen (vgl. Definition 7.15), es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}_{d, r, K}$ eine Vereinigung derartiger Mengen.

Der Begriff „Band“ lässt sich aus dem Euklidischen unmittelbar aus Definition 7.16 übernehmen, ebenso die Definitionen der „Elementarbänder“ aus Definition 7.17 und Konstruktion 7.18. Damit gilt dann der Satz 7.19 im Euklidischen entsprechende Satz:

7.33 Satz. *Es existieren Konstanten $c_i \in \mathbb{Z}$ sowie Bänder B_i (mit $i \in I$ für eine geeignete endliche Indexmenge I), so dass sich das bewegungsinvariante Maß $\mu(\mathcal{D})$ der Sphären aus \mathcal{D} im Fall, dass $\mathcal{D}_{\emptyset, \{1, \dots, m\}}^\emptyset$ keine Teilmenge von \mathcal{D} ist, ausdrücken lässt als*

$$\mu(\mathcal{D}) = \sum_{i \in I} c_i \left(\int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{B_i} dV - \sum_{j=0}^{d-1} (\mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) \int_{B_i} \sigma_r \varphi_j dO) \right).$$

Ist dagegen $\mathcal{D}_{\emptyset, \{1, \dots, m\}}^\emptyset \subseteq \mathcal{D}$ erfüllt, so gilt $\mu(\mathcal{D}) = \infty$ für $K < 0$, während sich \mathcal{D} für $K > 0$ ausdrücken lässt als

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_d)}{\sqrt{K}^d} + \sum_{i \in I} c_i \left(\int_{\mathbb{F}_{d,K}} w_{B_i} dV - \sum_{j=0}^{d-1} (\mathring{c}_{j,d}^{(K)}(r) \int_{B_i} \sigma_r \varphi_j dO) \right).$$

8 Geraden

In diesem abschließenden Kapitel erfolgt nun die Bestimmung des kinematischen Maßes einer Menge \mathcal{D} von Geraden mit „geeignetem Schnittverhalten“, bezüglich einer gegebenen orientierbaren Hyperfläche im Euklidischen (mit „geeignetem Schnittverhalten“ sei auch hier wieder gemeint, dass mit einer nichttangentialen Geraden auch alle Geraden in ihrer Umgebung in \mathcal{D} enthalten sind). Insbesondere sind damit im dreidimensionalen euklidischen Raum (fast) alle Schnittsituationen affiner Unterräume abgedeckt (der fehlende Fall des Schnittverhaltens von Geraden bezüglich Flächen mit Kodimension 2 ließe sich wie bei den Hyperebenen in 3.3 mit Hilfe der in Kapitel 2 untersuchten Parallellflächen ohne Probleme auf obige Situation zurückführen).

Das Vorgehen entspricht weitestgehend der Vorgehensweise bei den Hyperebenen in Kapitel 3: Nach Vorbetrachtungen in Unterkapitel 8.1, insbesondere wird in 8.1.5 eine verallgemeinerte Minkowskische Integralformel bereitgestellt, erfolgt in 8.2 die Konstruktion der in den Formeln beteiligten Flächen, die Formulierung der Aussagen sowie deren Beweise.

8.1 Vorbetrachtungen

8.1.1 Tangentialeinheitsbündel

Das Verhalten tangentialer Geraden ist für die Formeln in Abschnitt 8.2.1 von entscheidender Bedeutung; auch wird dort über Teilflächen des Tangentialeinheitsbündels integriert werden. Daher werden nun die entsprechenden Bezeichnungen sowie die Eigenschaften einer konkreten Immersion des Tangentialeinheitsbündels in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ bereitgestellt.

8.1 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^k -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$ und $k > 2$).

Es sei $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein fest gewähltes Normaleneinheitsvektorfeld auf M , bezüglich dessen im folgenden auch alle Krümmungen bestimmt werden sollen.

8.2 Definition. Das zu M gehörige in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ immersierte *Tangentialeinheitsbündel* \mathcal{T}_M sei definiert durch

$$\mathcal{T}_M := \{(p, V) \in \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1} \mid p \in M, V \in \mathbb{S}_{d-1}, V \text{ ist in } p \text{ tangential an } M\},$$

die zugehörige Projektion π_M von \mathcal{T}_M auf M durch

$$\pi_M: \mathcal{T}_M \rightarrow M, (p, V) \mapsto p.$$

8.3 Definition. Für $p \in M$ sei $f_1(p), \dots, f_{d-1}(p)$ eine Orthonormalbasis aus Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt p . Die zu $f_k(p)$ gehörige Hauptkrümmung sei $\kappa_k(p)$ (für $k \in \{1, \dots, d-1\}$). Dann sei die Abbildung $K_{\mathcal{T}_M}$ definiert durch

$$K_{\mathcal{T}_M}: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{R}, (p, V) \mapsto 1 + \sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k(p) \rangle^2 \kappa_k^2(p).$$

8.4 Konstruktion. Sei $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ gegeben. Es sei $x: U \rightarrow M$ eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von p in M (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$), so dass im Punkt p nach Krümmungslinien parametrisiert ist und die partiellen Ableitungen von x normiert sind. Es sei $n: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}, u \mapsto N(x(u))$ die zugehörige Parametrisierung der Normalenvektoren. Mit dem Schmidtschen Orthonomierungsverfahren ergibt sich aus der Basis $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}}$ des Tangentialraums in x die Orthonormalbasis $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d-1}$, d.h. es gilt (für $k \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\tilde{f}_k = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, \tilde{f}_i \right\rangle \cdot \tilde{f}_i \right\|^{-1} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, \tilde{f}_i \right\rangle \cdot \tilde{f}_i \right).$$

Weiterhin ist mit

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{d-2} \mid \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k^2 < 1 \right\} \text{ sowie} \quad \lambda_{d-1} := \left(1 - \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

eine reguläre Parametrisierung von Tangentialeinheitsvektoren im Punkt $x(u)$ (für $u \in U$) gegeben durch (beachte auch Korollar 8.6)

$$v(u, \cdot): \Lambda \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}, \lambda \mapsto \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k \cdot \tilde{f}_k(u).$$

Somit erhält man eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, V) in \mathcal{T}_M durch (falls V eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so gelte oBdA $V = \tilde{f}_{d-1}(p)$)

$$y: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, (u, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x(u) \\ v(u, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Sei nun im folgenden stets $G_{\mathcal{T}_M}$ die zur ersten Fundamentalform von \mathcal{T}_M gehörige Matrix bezüglich der Parametrisierung y , $G_M := (g_{i,j})_{i,j}$ die zur ersten Fundamentalform von M gehörige Matrix bezüglich der Parametrisierung x sowie $G_v := (g_{i,j}^{(v)})_{i,j}$ die zur ersten Fundamentalform gehörige Matrix bezüglich der Parametrisierung v .

Schließlich werde noch der (später in Lemma 8.8 auftretende) Vektor N_3 – bis auf den dortigen Normierungsfaktor – parametrisiert durch

$$n_3: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}, (u, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{d-1} \langle v(u, \lambda), f_k(x(u)) \rangle \kappa_k(x(u)) \cdot f_k(x(u)) \\ -N(x(u)) \end{pmatrix}.$$

Dann werde einerseits die Matrix B definiert durch

$$B := \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_{d-2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, -n_3 \right),$$

andererseits sei die Matrix \hat{B} definiert durch

$$\hat{B} := \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_{d-2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \right).$$

8.5 Lemma. Für die Determinante der in Konstruktion 8.4 definierten Matrizen B und \hat{B} gilt

$$\det(B) = \det(\hat{B}) = +\sqrt{\det(G_M)} \sqrt{\det(G_v)}.$$

Beweis. Dass die Determinanten der beiden Matrizen übereinstimmen, ist klar, ebenso, dass der Betrag von $\det(\hat{B})$ die rechte Seite ergibt. Das Vorzeichen von $\det(B)$ ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned} & \det(\hat{B}^\top \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u_{d-1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \right)) \\ &= +\frac{1}{\lambda_{d-1}} (\sqrt{\det(G_M)})^3 \end{aligned}$$

(beachte: Die an \hat{B} von rechts hinmultiplizierte Matrix hat offensichtlich positive Determinante). \odot

8.6 Korollar. Die Abbildung $v(u, \cdot): \Lambda \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ aus Konstruktion 8.4 ist regulär.

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Beweis von Lemma 8.5. \odot

8.7 Lemma. Für $i, j \in \{1, \dots, d-1\}$ gilt

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_i} \Big|_p, N(p) \right\rangle = \delta_{i,j} \kappa_j(p) \quad \text{sowie} \quad \left\langle \frac{\partial v}{\partial u_i} \Big|_p, N(p) \right\rangle = \lambda_i \kappa_i(p).$$

Beweis. Nach Definition von \tilde{f}_k in Konstruktion 8.4 gilt

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_i}, n \right\rangle = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_j} - \sum_{l=1}^{j-1} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \tilde{f}_l \right\rangle \cdot \tilde{f}_l \right\|^{-1} \left(\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_i}, n \right\rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \tilde{f}_l \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial u_i}, n \right\rangle \right).$$

Da im Punkt p selbst $\tilde{f}_l = \frac{\partial x}{\partial u_l}$ gilt, folgt

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_i} \Big|_p, N(p) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_i} \Big|_p, N(p) \right\rangle.$$

Die erste Aussage folgt nun aus der Tatsache, dass im Punkt p Krümmungslinienparameter vorliegen. Die zweite folgt aus der ersten direkt aus der Definition der Abbildung v (vgl. Konstruktion 8.4). \odot

8.8 Lemma. Sei $(p, V) \in \mathcal{T}_M$. Dann sind (mit den Bezeichnungen aus Konstruktion 8.4)

$$N_1(p, V) := \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix},$$

$$N_2(p, V) := \begin{pmatrix} N(p) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

$$N_3(p, V) := \frac{1}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k(p) \rangle \kappa_k(p) \cdot f_k(p) \\ -N(p) \end{pmatrix}$$

paarweise zueinander orthogonale Normaleneinheitsvektoren von \mathcal{T}_M im Punkt (p, V) (sie bilden sogar eine Orthonormalbasis des Normalenraums; vergleiche Korollar 8.10).

Beweis. Sei $y: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, V) wie in Konstruktion 8.4. Die partiellen Ableitungen von y sind dann gegeben durch (es sei $i \in \{1, \dots, d-1\}$ sowie $j \in \{1, \dots, d-2\}$)

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} \\ \frac{\partial v}{\partial u_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} \\ \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial u_i} \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f}_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_{d-1}} \tilde{f}_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Also sind N_1 , N_2 und N_3 im Punkt (p, V) normal an die Fläche \mathcal{T}_M (beachte: Im Punkt p ist nach Krümmungslinien parametrisiert; vergleiche auch Lemma 8.7). \odot

8.9 Lemma. Für die in Konstruktion 8.4 definierten Größen gilt

$$\det(G_{\mathcal{T}_M})|_{(u,\lambda)} = \det(G_M)|_u \det(G_v)|_{(u,\lambda)} K_{\mathcal{T}_M}(x(u), v(u, \lambda)),$$

insbesondere ist die Parametrisierung y regulär.

Beweis. Es gilt (beachte: Für die partiellen Ableitungen von y vergleiche den Beweis von Lemma 8.8)

$$\begin{aligned} & \sqrt{K_{\mathcal{T}_M}} \det\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial d-1}, \frac{\partial y}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial \lambda_{d-1}}, N_1, N_2, N_3\right)\right) \det(B) \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial d-1}, \frac{\partial y}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial \lambda_{d-1}}, N_1, N_2, \sqrt{K_{\mathcal{T}_M}} \cdot N_3\right)^\top \cdot B\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,d-1} & * & \cdots & * & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{d-1,1} & \cdots & g_{d-1,d-1} & * & \cdots & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g_{1,1}^{(v)} & \cdots & g_{1,d-2}^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{d-2,1}^{(v)} & \cdots & g_{d-2,d-2}^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -K_{\mathcal{T}_M} \end{pmatrix}\right) \\ &= -K_{\mathcal{T}_M} \det(G_M) \det(G_v). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann mit Lemma 8.5, Korollar 8.6 sowie Lemma 8.8. \odot

Unmittelbar aus Lemma 8.9 ergibt sich nun das folgende Korollar:

8.10 Korollar. *Das in Definition 8.2 definierte Tangentialeinheitsbündel \mathcal{T}_M ist eine unberandete orientierbare \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare $(2d-3)$ -dimensionale in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ immersierte Mannigfaltigkeit.*

8.1.2 Erweiterte Pedalfläche

Wie in der entsprechenden Situation bei den Hyperebenen (vgl. Abschnitt 3.1.1) dienen die Lotfußpunktflächen auch jetzt als wichtiges Hilfsmittel, um die Berührungspunkte von doppelt tangentialen Geraden im Tangentialbündel in den Griff zu bekommen.

8.11 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^k -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$ und $k > 2$).

Es sei $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein fest gewähltes Normaleneinheitsvektorfeld auf M . Weiterhin sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\kappa_n: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{T}_{(0)} := \kappa_n^{-1}(\{0\})$ ist eine $(2d-4)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).

8.12 Lemma und Definition. *Es sei die Menge \mathcal{G} definiert durch*

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} p \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1} \mid \langle p, V \rangle = 0 \text{ und } p \neq 0 \right\}.$$

Dann ist \mathcal{G} eine $(2d-2)$ -dimensionale orientierbare unberandete \mathcal{C}^∞ -differenzierbare in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ eingebettete Mannigfaltigkeit. Im Punkt (p, V) ist eine Orthonormalbasis des Normalenraums von \mathcal{G} gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \text{ sowie } \frac{1}{\sqrt{1 + \|p\|^2}} \cdot \begin{pmatrix} V \\ p \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist die Abbildung $\eta|_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_{1,d}$ eine surjektive differenzierbare Abbildung, es gilt $\eta|_{\mathcal{G}}(\{(p, V)\})^\leftarrow = \{(p, V), (p, -V)\}$ (für $(p, V) \in \mathcal{G}$). Die lokal existierende Umkehrabbildung ist ebenfalls differenzierbar.

8.13 Definition. Es sei $\tilde{p}: \mathcal{T}_M \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ die Abbildung, die $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ auf das Paar, das von dem Lotfußpunkt der Geraden $\eta(p, V)$ und dem Vektor V gebildet wird, abbildet, es gilt somit

$$\tilde{p}: \mathcal{T}_M \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}, (p, V) \mapsto \begin{pmatrix} p - \langle p, V \rangle \cdot V \\ V \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $\tilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{G}$ die von den an M tangentialen Geraden gebildete Fläche in \mathcal{G} , d.h. es gilt

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{p}(p, V) \in \mathcal{G} \mid (p, V) \in \mathcal{T}_M\}$$

(beachte: Diese Definition ist abhängig von der Wahl des Ursprungs). Die Fläche $\tilde{\mathcal{M}}$ heiße *erweiterte Pedalfläche* von M . Schließlich sei $\tilde{\mathcal{M}}_{(0)}$ diejenige Teilfläche der erweiterten Pedalfläche, die zu denjenigen Punkten korrespondiert, in denen die Normalkrümmung verschwindet, d.h. es gilt

$$\tilde{\mathcal{M}}_{(0)} = \{ \tilde{p}(p, V) \in \mathcal{G} \mid (p, V) \in \mathcal{T}_M \text{ und } \kappa_n(p, V) = 0 \}.$$

8.14 Satz. *Sei $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ ein Punkt mit nichtverschwindender Normalkrümmung, d.h. es gilt $\kappa_n(p, V) \neq 0$.*

Dann ist für fast jede Wahl des Ursprungs die Fläche $\tilde{\mathcal{M}}$ in einer Umgebung um den Punkt $\tilde{p}(p, V)$ eine \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare reguläre Hyperfläche in \mathcal{G} – es handelt sich also um eine $(2d - 3)$ -dimensionale immensierte Mannigfaltigkeit –, d.h. es gibt eine offene dichte Teilmenge von \mathbb{E}_d , in der der Ursprung gewählt werden kann, so dass die Behauptung erfüllt ist.

Weiterhin ist eine Basis des Normalenraums in dem zu $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ zugehörigen Punkt $\tilde{p}(p, V)$ von $\tilde{\mathcal{M}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(p, V) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}, \\ \tilde{N}_2(p, V) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + \|p\|^2 - \langle p, V \rangle^2}} \cdot \begin{pmatrix} V \\ p - \langle p, V \rangle \cdot V \end{pmatrix} \text{ sowie} \\ \tilde{N}_3(p, V) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + \langle p, V \rangle^2}} \cdot \begin{pmatrix} N(p) \\ \langle p, V \rangle \cdot N(p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 8.15 sowie Lemma 8.17, die beide im folgenden bewiesen werden. \odot

8.15 Lemma. *Sei $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ ein Punkt mit nichtverschwindender Normalkrümmung, d.h. es gilt $\kappa_n(p, V) \neq 0$. Sind weiterhin p und $N(p)$ linear abhängig, und ist p nicht der Ursprung, so ist die Fläche $\tilde{\mathcal{M}}$ in einer Umgebung um den Punkt $\tilde{p}(p, V)$ eine reguläre \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Hyperfläche in \mathcal{G} .*

Beweis. Es sei $y: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, V) in \mathcal{T}_M wie in Konstruktion 8.4. Weiterhin sei $n: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ die zugehörige Parametrisierung der Normaleneinheitsvektoren. Dann ist eine Parametrisierung einer Umgebung von $\tilde{p}(p, V)$ in $\tilde{\mathcal{M}}$ gegeben durch

$$z: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, (u, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x(u) - \langle x(u), v(u, \lambda) \rangle \cdot v(u, \lambda) \\ v(u, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Die partiellen Ableitungen von z sind gegeben durch (es sei $i \in \{1, \dots, d-1\}$ sowie

$j \in \{1, \dots, d-2\}$; es werde noch nicht die spezielle Lage des Ursprungs ausgenutzt)

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} - \langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, v \rangle \cdot v - \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_i} \rangle \cdot v - \langle x, v \rangle \cdot \frac{\partial v}{\partial u_i} \\ \frac{\partial v}{\partial u_i} \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_j} = \begin{pmatrix} -\langle x, \frac{\partial v}{\partial \lambda_j} \rangle \cdot v - \langle x, v \rangle \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda_j} \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_j} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist somit bewiesen, dass die in Satz 8.14 angegebenen Vektoren wirklich Normalenvektoren an $\tilde{\mathcal{M}}$ im Punkt $\tilde{p}(p, V)$ sind (unabhängig von der speziellen Lage des Punktes p in diesem Lemma). Da die Lage des Ursprungs hier speziell gewählt worden ist, lassen sich diese partiellen Ableitungen im Punkt $\tilde{p}(p, V)$ weiter vereinfachen zu

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} \Big|_{\tilde{p}(p, V)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} - \lambda_i (1 + \langle p, N(p) \rangle \kappa_i(p)) \cdot v \\ \frac{\partial v}{\partial u_i} \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{p}(p, V)} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial \lambda_j} \Big|_{\tilde{p}(p, V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \lambda_j} \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{p}(p, V)}.$$

Des Weiteren seien die Matrizen $(\tilde{g}_{i,j})_{i,j}$ und $(\tilde{\hat{g}}_{i,j})_{i,j}$ definiert durch (beachte: Nach Voraussetzung gilt $\langle p, N(p) \rangle \neq 0$; es sei $i, j \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\tilde{g}_{i,j} := \delta_{i,j} - \lambda_i \lambda_j (1 + \kappa_i(p) \langle p, N(p) \rangle) \text{ sowie}$$

$$\tilde{\hat{g}}_{i,j} := \delta_{i,j} - \lambda_i \lambda_j (1 + \kappa_i(p) \frac{\langle p, N(p) \rangle^2 + 1}{\langle p, N(p) \rangle}).$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \|p\|^2} \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \lambda_{d-2}}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3\right)\right) \det(\hat{B}) \Big|_{\tilde{p}(p, V)} \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{d-1}}, \frac{\partial z}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \lambda_{d-2}}, \tilde{N}_1, \sqrt{1 + \|p\|^2} \tilde{N}_2, \tilde{N}_3\right)^\top \cdot \hat{B}\right) \Big|_{\tilde{p}(p, V)} \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \tilde{g}_{1,1} & \cdots & \tilde{g}_{1,d-1} & * & \cdots & * & 0 & 0 & \lambda_1 \kappa_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{g}_{d-1,1} & \cdots & \tilde{g}_{d-1,d-1} & * & \cdots & * & 0 & 0 & \lambda_{d-1} \kappa_{d-1} \\ 0 & \cdots & 0 & g_{1,1}^{(v)} & \cdots & g_{1,d-2}^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{d-2,1}^{(v)} & \cdots & g_{d-2,d-2}^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{d-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \langle p, N(p) \rangle \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \Big|_{\tilde{p}(p, V)} \end{aligned}$$

$$= -\det(G_v) \det\left(\begin{pmatrix} \hat{g}_{1,1} & \cdots & \hat{g}_{1,d-1} & \lambda_1 \kappa_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{g}_{d-1,d-1} & \cdots & \hat{g}_{d-1,d-1} & \lambda_{d-1} \kappa_{d-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \langle p, N(p) \rangle \end{pmatrix}\right)\Big|_{\tilde{p}(p,V)}.$$

Mit Hilfe von Lemma 1.10 lässt sich die letzte Determinante bestimmen, und das ganze weiter umformen zu

$$\begin{aligned} &= -\langle p, N(p) \rangle \left(1 - \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^2 \left((1 + \kappa_k(p) \frac{\langle p, N(p) \rangle^2 + 1}{\langle p, N(p) \rangle})\right)\right) \det(G_v)\Big|_{\tilde{p}(p,V)} \\ &= (\langle p, N(p) \rangle^2 + 1) \left(\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^2 \kappa_k(p)\right) \det(G_v)\Big|_{\tilde{p}(p,V)} \\ &= (\langle p, N(p) \rangle^2 + 1) \kappa_n(p, V) \det(G_v)\Big|_{\tilde{p}(p,V)} \neq 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

(beachte: Nach Voraussetzung verschwindet die Normalkrümmung in p in Richtung V nicht; vergleiche weiterhin auch Korollar 8.6). Insbesondere sind also auch die Spalten der Ausgangsmatrizen linear unabhängig, und somit ist die zur ersten Fundamentalform gehörige Matrix der Parametrisierung z im Punkt $\tilde{p}(p, V)$ positiv definit. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies dann für eine ganze Umgebung. \odot

8.16 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 8.15 ist die Orientierungserhaltung beim Übergang von M zu \tilde{M} (in einer Umgebung von (p, V)) ausschließlich abhängig von $\text{sign}(\kappa_n(p, V))$.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (8.2) im Beweis von Lemma 8.15 und der Definition von \hat{B} (bzw. B) in Konstruktion 8.4, da alle von $\kappa_n(p, V)$ verschiedenen Terme stets dasselbe Vorzeichen besitzen (beachte auch Lemma 8.5 und Lemma 8.8). \odot

8.17 Lemma. *Sei $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ ein Punkt mit nichtverschwindender Normalkrümmung, d.h. es gilt $\kappa_n(p, V) \neq 0$. Sei weiterhin die Fläche \tilde{M} in einer Umgebung um den Punkt $\tilde{p}(p, V)$ eine reguläre Hyperfläche. Schließlich sei $T \in \mathbb{S}_{d-1}$ ein fest gewählter Vektor, und für $t \in \mathbb{R}$ sei M_t die um den Vektor $t \cdot T$ translatierte Mannigfaltigkeit M .*

Dann ist bis auf endlich viele $t \in \mathbb{R}$ auch die zur Fläche M_t zugehörige Fläche \tilde{M}_t (nach Definition 8.13) in einer Umgebung des Punktes $\tilde{p}(p + t \cdot T, V) \in \tilde{M}_t$ eine reguläre Hyperfläche. Die Werte t , für die dies nicht der Fall ist, hängen stetig von der Wahl von T ab.

Beweis. Es seien die Parametrisierungen $y: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$, $n: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ sowie $z: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ so wie in Lemma 8.17 gegeben. Dann ist (für $t \in \mathbb{R}$) eine Parametrisierung einer Umgebung von $\tilde{p}(p + t \cdot T, V)$ in \tilde{M}_t gegeben durch (vergleiche auch Gleichung (8.1))

$$z_t: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, (u, \lambda) \mapsto z(u, \lambda) + t \cdot \begin{pmatrix} T - \langle T, v(u, \lambda) \rangle \cdot v(u, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix},$$

deren partielle Ableitungen sind dann gegeben durch (setze hier und im folgenden an den Stellen, an denen keine weitere Unterscheidung notwendig ist, $u_j := \lambda_{j+1-d}$ für $j \in \{d, \dots, 2d-3\}$; es sei $i \in \{1, \dots, 2d-3\}$)

$$\frac{\partial z_t}{\partial u_i} = \frac{\partial z}{\partial u_i} - t \cdot \left(\langle T, \frac{\partial v}{\partial u_i} \rangle \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \langle T, v \rangle \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial u_i} \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dann wird die Matrix $A := (a_{i,j})_{i,j}$ unabhängig vom Parameter t definiert durch (hierbei sei $i, j \in \{1, \dots, 2d-3\}$)

$$a_{i,j} := \langle T, \frac{\partial v}{\partial u_i} \rangle \left\langle \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial z}{\partial u_j} \right\rangle + \langle T, v \rangle \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial u_i} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial z}{\partial u_j} \right\rangle.$$

Somit gilt (es sei G_z die zur ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung z gehörige Matrix; beachte: Nach Voraussetzung ist G_z in einer Umgebung von $\tilde{p}(p, V)$ invertierbar)

$$\begin{aligned} & \det \left(\left(\frac{\partial z_t}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z_t}{\partial u_{2d-3}} \right)^\top \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-3}} \right) \right) \Big|_{\tilde{p}(p+T, V)} \\ &= \det(G_z - t \cdot A) \Big|_{\tilde{p}(p, V)} = \det(G_z) \det(\mathbb{1} - t \cdot G_z^{-1} \cdot A) \Big|_{\tilde{p}(p, V)}. \end{aligned}$$

Also sind die partiellen Ableitungen von z_t in $\tilde{p}(p, V)$ genau dann linear unabhängig (und damit die Fläche $\tilde{\mathcal{M}}_t$ in diesem Punkt regulär), wenn $\frac{1}{t}$ kein Eigenwert von $G_z^{-1} \cdot A$ ist. Da letztere Matrix höchstens $2d-3$ verschiedene Eigenwerte besitzen kann, die nach Definition von A stetig von T abhängen, folgt die Aussage. \odot

8.18 Lemma. Sei $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ ein Punkt mit verschwindender Normalkrümmung, d.h. es gilt $\kappa_n(p, V) = 0$. Ferner sei der Vektor $(V, 0)$ nicht im Tangentialraum von $\mathcal{T}_{(0)}$ im Punkt (p, V) enthalten.

Dann ist für fast jede Wahl des Ursprungs die Fläche $\tilde{\mathcal{M}}_{(0)}$ in einer Umgebung des Punktes $\tilde{p}(p, V)$ eine in \mathcal{G} immersierte $(2d-4)$ -dimensionale \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit, d.h. es gibt eine offene dichte Teilmenge von \mathbb{E}_d , in der der Ursprung gewählt werden kann, so dass dies der Fall ist.

Weiterhin ist eine Basis des Normalenraums von $\tilde{\mathcal{M}}_{(0)}$ in dem zu $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ zugehörigen Punkt $\tilde{p}(p, V) \in \tilde{\mathcal{M}}_{(0)}$ gegeben durch $\tilde{N}_1(p, V), \tilde{N}_2(p, V), \tilde{N}_3(p, V), \tilde{N}_4(p, V)$ (vergleiche Satz 8.14 für die Definition der ersten drei Normalenvektoren), wobei \tilde{N}_4 definiert sei durch (für die Bezeichnungen vergleiche Definition 8.3)

$$\tilde{N}_4(p, V) := \left(\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k(p) \rangle \kappa_k(p) \cdot f_k(p) \\ \langle p, V \rangle \cdot \sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k(p) \rangle \kappa_k(p) \cdot f_k(p) - N(p) \end{array} \right).$$

Beweis. Es sei $y = (x, v): U \rightarrow \mathcal{T}_{(0)}$ eine Parametrisierung einer Umgebung von (p, V) (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$) und $n: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}, u \mapsto N(x(u))$ die zugehörige Parametrisierung der Normalenvektoren. Dann ist eine Parametrisierung einer Umgebung von $\tilde{p}(p, V)$ in $\tilde{\mathcal{M}}_{(0)}$ gegeben durch

$$z: U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, u \mapsto \begin{pmatrix} x(u) - \langle x(u), v(u) \rangle \cdot v(u) \\ v(u) \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind somit gegeben durch (es sei $i \in \{1, \dots, 2d-4\}$)

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} - \langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, v \rangle \cdot v - \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_i} \rangle \cdot v - \langle x, v \rangle \cdot \frac{\partial v}{\partial u_i} \\ \frac{\partial v}{\partial u_i} \end{pmatrix}.$$

Somit gilt (mit dem Normalenvektor N_3 der Fläche \mathcal{T}_M aus Lemma 8.8)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial z}{\partial u_i}, \tilde{N}_4 \right\rangle \Big|_{(p,V)} &= \left(\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} \\ \frac{\partial v}{\partial u_i} \end{pmatrix}, \sqrt{K_{\mathcal{T}_M}} \cdot N_3 \right\rangle + \langle x, v \rangle \sum_{k=1}^{d-1} \langle v, f_k \rangle \kappa_k \left\langle \frac{\partial v}{\partial u_i}, f_k \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, v \right\rangle + \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_i} \rangle \right) \kappa_n - \langle x, v \rangle \sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k \rangle \kappa_k \left\langle \frac{\partial v}{\partial u_i}, f_k \right\rangle \right) \Big|_{(p,V)} \\ &= - \left(\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, v \right\rangle + \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_i} \rangle \right) \kappa_n \right) \Big|_{(p,V)} = 0 \end{aligned}$$

(beachte: Nach Voraussetzung gilt $\kappa_n(p, V) = 0$), also ist \tilde{N}_4 ein Normalenvektor an die erweiterte Pedalfläche von $\mathcal{T}_{(0)}$. Dass die Vektoren \tilde{N}_1 , \tilde{N}_2 und \tilde{N}_3 ebenfalls Normalenvektoren sind, wurde bereits in Satz 8.14 gezeigt. Es muss also noch gezeigt werden, dass diese vier Vektoren linear unabhängig sind, dies folgt aber aus (setze zur Abkürzung $c := \sqrt{1 + \|p\|^2 - \langle p, V \rangle^2} \sqrt{1 + \langle p, V \rangle^2}$)

$$\begin{aligned} &\det((\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3, \tilde{N}_4)^\top \cdot \left(\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \right)) \Big|_{(p,V)} \\ &= \frac{1}{c} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \langle p, N(p) \rangle \\ 0 & 1 & 0 & \langle p, V \rangle \\ \kappa_n(p, V) & 0 & \langle p, V \rangle \kappa_n(p, V) & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c} \end{aligned}$$

(beachte: Nach Voraussetzung gilt $\kappa_n(p, V) = 0$).

Um die restlichen Aussagen zu zeigen, betrachte wie in Lemma 8.15 den Fall, dass p und $N(p)$ linear abhängig sind, die Verallgemeinerung lässt sich dann analog zur Vorgehensweise in Lemma 8.17 durchführen. Die obigen partiellen Ableitungen der Parametrisierung z lassen sich in diesem Fall vereinfachen zu (es sei $i \in \{1, \dots, 2d-4\}$)

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial y}{\partial u_i} \Big|_{(p,V)} - \frac{\partial}{\partial u_i} (\langle x, v \rangle) \Big|_{(p,V)} \cdot \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung ist der Vektor $(V, 0)$ nicht im Tangentialraum von $\mathcal{T}_{(0)}$ enthalten, daher sind diese partiellen Ableitungen von z linear unabhängig, da es diejenigen von y sind, und es folgen die restlichen Behauptungen. \odot

8.1.3 Berührflächen

Mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt untersuchten (erweiterten) Pedalflächen werden in diesem Abschnitt – analog zum Vorgehen bei den Hyperebenen (vgl. Abschnitt 3.1.2) – die von den Berührungspunkten doppelt tangentialer Geraden gebildeten Teilflächen des Tangentialbündels untersucht. Insbesondere werden wieder hinreichende Kriterien für die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze in Abschnitt 8.2.1 bereitgestellt.

8.19 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^k -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$ und $k > 2$). Es sei $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein fest gewähltes Normaleneinheitsvektorfeld auf M . Ferner sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\kappa_n: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{T}_{(0)} := \kappa_n^{-1}(\{0\})$ ist eine $(2d-4)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).

Schließlich sei eine Gerade $\hat{\eta}$ gegeben, die in den beiden Punkten $p^{(1)}, p^{(2)} \in M$ tangential an die Mannigfaltigkeit M ist. Falls die beiden Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ zusammenfallen, so seien die zugehörigen Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ sowie $N(p^{(2)})$ linear unabhängig. Ein Richtungseinheitsvektor der Geraden $\hat{\eta}$ sei \hat{V} .

8.20 Lemma. *Es gelte sowohl $\kappa_n(p^{(1)}, \hat{V}) \neq 0$ als auch $\kappa_n(p^{(2)}, \hat{V}) \neq 0$.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, 2\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{T}^{(i)} \subseteq \mathcal{T}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{V})$, so dass $\mathcal{B}^{(i)}$ eine $(2d-4)$ -dimensionale \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}^{(i)}$ definiert durch (es sei $\{i, j\} = \{1, 2\}$)

$$\mathcal{B}^{(i)} := \{(p, V) \in \mathcal{T}^{(i)} \mid \exists (p', V) \in \mathcal{T}^{(j)} \text{ mit } \eta(p, V) = \eta(p', V)\}.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 8.14 ist für fast jede Wahl des Ursprungs die Fläche $\tilde{\mathcal{M}}$ sowohl in einer Umgebung $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ von $\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{V})$ als auch in einer Umgebung $\tilde{\mathcal{M}}^{(2)}$ von $\tilde{p}(p^{(2)}, \hat{V})$ eine $(2d-3)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Da $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ die Berührungspunkte der Geraden $\hat{\eta}$ (mit Richtung \hat{V}) sind, gilt $\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{V}) = \tilde{p}(p^{(2)}, \hat{V})$. Die Flächen $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ und $\tilde{\mathcal{M}}^{(2)}$ schneiden sich also in einer Umgebung dieses Punktes. Zeige nun, dass sich diese Flächen in $\tilde{p}(p^{(1)}, \hat{V})$ transversal schneiden, indem die lineare Unabhängigkeit der Normalenvektoren (innerhalb von \mathcal{G} gezeigt wird).

Betrachte also die auf den Tangentialraum von \mathcal{G} projizierten Vektoren $\tilde{N}_3(p^{(1)}, \hat{V})$, $\tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V})$ (vgl. Satz 8.14). Angenommen, diese Vektoren wären nicht linear unabhängig, dann ließe sich die Null nichttrivial linear kombinieren. Anwenden des Skalarprodukts mit $(\hat{V}, 0)$ auf diese Linearkombination der Null zeigt, dass oBdA auf das Projizieren verzichtet werden kann. Somit gibt es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{1 + \langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle^2} \cdot \tilde{N}_3(p^{(1)}, \hat{V}) = \alpha \sqrt{1 + \langle p^{(2)}, \hat{V} \rangle^2} \cdot \tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V}) \quad (8.4)$$

(beachte: Beide Vektoren sind ungleich Null). Anwenden des Skalarprodukts mit den Vektoren $(N(p^{(1)}), 0)$ sowie $(N(p^{(2)}), 0)$ auf diese Gleichung ergibt

$$1 = \alpha \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle \text{ sowie} \quad \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = \alpha,$$

insgesamt folgt damit $\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle^2 = 1$, und somit die lineare Abhängigkeit von $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$. Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektoren $(0, N(p^{(1)}))$ und Einsetzen des Wertes von α in Gleichung (8.4) ergibt $\|p^{(2)} - p^{(1)}\| = 0$. Somit gilt $p^{(2)} = p^{(1)}$, was im Widerspruch dazu steht, dass bereits die Vektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ linear abhängig sind.

Der Schnitt der beiden obigen Umgebungen ist also transversal (nach eventuellem Verkleinern), und damit eine $(2d - 4)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer jeden dieser Umgebungen. Dies überträgt sich dann mit dem Diffeomorphismus \tilde{p} auf die Fläche $\mathcal{B}^{(i)}$ (für $i \in \{1, 2\}$). \odot

8.21 Korollar. Für $j \in \{1, 2\}$ sei eine Folge von Punkten $(p_k^{(j)}, \hat{V}_k)$ mit $\kappa_n(p_k^{(j)}, \hat{V}_k) \neq 0$ (mit $k \in \mathbb{N}$; die Punkte $(p_k^{(1)}, \hat{V}_k)$ und $(p_k^{(2)}, \hat{V}_k)$ haben dieselben Eigenschaften wie $(p^{(1)}, \hat{V})$ und $(p^{(2)}, \hat{V})$ in Voraussetzung 8.19) gegeben, so dass

$$(p, V) := \lim_{k \rightarrow \infty} (p_k^{(1)}, \hat{V}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_k^{(2)}, \hat{V}_k) \text{ sowie } \lim_{k \rightarrow \infty} N(p_k^{(1)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} N(p_k^{(2)})$$

erfüllt ist.

Dann gilt $\kappa_n(p, V) = 0$.

Beweis. Dies lässt sich wie in der entsprechenden Situation bei Hyperebenen (vgl. Korollar 3.9) direkt auf Lemma 8.14 und Lemma 8.20 zurückführen. \odot

8.22 Lemma. Es sei $d > 2$, und wiederum gelte $\kappa_n(p^{(2)}, \hat{V}) \neq 0$, jetzt jedoch sei $\kappa_n(p^{(1)}, \hat{V}) = 0$. Der Vektor $(\hat{V}, 0)$ sei nicht im Tangentialraum von $\mathcal{T}_{(0)}$ im Punkt $(p^{(1)}, \hat{V})$ enthalten. Sind die Vektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ linear abhängig, so sei \hat{V} keine Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung 0.

Dann gibt es (für $i \in \{1, 2\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{T}^{(i)} \subseteq \mathcal{T}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{V})$, so dass $\mathcal{B}_{(0)}^{(i)}$ eine $(2d - 5)$ -dimensionale \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M ist. Dabei sei $\mathcal{B}_{(0)}^{(i)}$ definiert durch (es sei $\mathcal{T}_{(0)}^{(1)} := \mathcal{T}^{(1)} \cap \mathcal{T}_{(0)}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(0)}^{(1)} &:= \{(p, V) \in \mathcal{T}_{(0)}^{(1)} \mid \exists (p', V') \in \mathcal{T}^{(2)} \text{ mit } \eta(p, V) = \eta(p', V')\} \text{ sowie} \\ \mathcal{B}_{(0)}^{(2)} &:= \{(p, V) \in \mathcal{T}^{(2)} \mid \exists (p', V') \in \mathcal{T}_{(0)}^{(1)} \text{ mit } \eta(p, V) = \eta(p', V')\}. \end{aligned}$$

Beweis. Analog zum Vorgehen im Beweis von Lemma 8.20 lässt sich diese Aussage auf das Zeigen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\tilde{N}_3(p^{(1)}, \hat{V})$, $\tilde{N}_4(p^{(1)}, \hat{V})$ und $\tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V})$ zurückführen. Angenommen, diese Vektoren wären linear abhängig, dann gäbe es Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{N}_4(p^{(1)}, \hat{V}) = \alpha_1 \sqrt{1 + \langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle^2} \cdot \tilde{N}_3(p^{(1)}, \hat{V}) + \alpha_2 \sqrt{1 + \langle p^{(2)}, \hat{V} \rangle^2} \cdot \tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V}) \quad (8.5)$$

(beachte die lineare Unabhängigkeit von $\tilde{N}_3(p^{(1)}, \hat{V})$ und $\tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V})$, die im Beweis von Lemma 8.20 gezeigt worden ist). Anwenden des Skalarprodukts mit den Vektoren $(-\langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle N(p^{(1)}), N(p^{(1)}))$ sowie $(-\langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle N(p^{(2)}), N(p^{(2)}))$ auf diese Gleichung ergibt

$$-1 = \alpha_2 \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle \|p^{(2)} - p^{(1)}\| \text{ und } -\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = \alpha_2 \|p^{(2)} - p^{(1)}\|$$

(dabei sei oBdA \hat{V} so orientiert, dass $p^{(2)} = p^{(1)} + \|p^{(2)} - p^{(1)}\| \cdot \hat{V}$ erfüllt ist), insbesondere folgt aus der ersten Gleichheit, dass die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ verschieden sind. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt $\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle^2 = 1$ und damit die lineare Abhängigkeit der Normalenvektoren in diesen Punkten. Anwenden des Skalarprodukts mit dem Vektor $(N(p^{(1)}), 0)$ auf Gleichung (8.5) liefert $\alpha_1 + \alpha_2 \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = 0$, damit ergibt sich mit dem bereits gezeigten

$$\alpha_1 = \frac{1}{\|p^{(2)} - p^{(1)}\|} \text{ sowie} \quad \alpha_2 = -\frac{\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle}{\|p^{(2)} - p^{(1)}\|}.$$

Einsetzen dieser Werte in Gleichung (8.5) führt in der ersten Komponente zu

$$\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)}) = 0.$$

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass \hat{V} im Falle der linearen Abhängigkeit von $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ keine Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung 0 ist. \odot

8.23 Lemma. *Es sei $d > 2$, und es gelte sowohl $\kappa_n(p^{(1)}, \hat{V}) = 0$ als auch $\kappa_n(p^{(2)}, \hat{V}) = 0$. Sind $\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)})$ und $\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(2)}) \rangle \kappa_k(p^{(2)}) \cdot f_k(p^{(2)})$ linear abhängig, so seien die Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ linear unabhängig.*

Dann gibt es (für $i \in \{1, 2\}$) eine offene Umgebung $\mathcal{T}^{(i)} \subseteq \mathcal{T}_M$ von $(p^{(i)}, \hat{V})$, so dass $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ eine von einer $(2d - 5)$ -dimensionalen \mathcal{C}^{k-2} -differenzierbaren immersierten Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M überdeckt werden kann. Dabei sei $\mathcal{B}_{00}^{(i)}$ definiert durch (es sei $\{i, j\} = \{1, 2\}$)

$$\mathcal{B}_{00}^{(i)} := \{(p, V) \in \mathcal{T}^{(i)} \cap \mathcal{T}_{(0)} \mid \exists (p', V') \in \mathcal{T}^{(j)} \text{ mit } \eta(p, V) = \eta(p', V')\}.$$

Beweis. (i) Für $i \in \{1, 2\}$ sei $(x^{(i)}, v^{(i)}): U^{(i)} \rightarrow \mathcal{T}_{(0)}$ eine Parametrisierung einer Umgebung von $(p^{(i)}, \hat{V})$ (für geeignete offene Mengen $U^{(i)} \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$) und $n^{(i)}: U^{(i)} \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, $u \mapsto N(x^{(i)}(u))$ die zugehörige Parametrisierung der Normalenvektoren. Weiterhin sei $z: U^{(i)} \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ die Parametrisierung aus dem Beweis von Lemma 8.18 (vgl. Gleichung (8.3)) bezüglich des Punktes $(p^{(i)}, \hat{V})$. Betrachte dann die Hilfsfläche, die durch die Parametrisierung

$$\tilde{z}: U^{(1)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, (u, \lambda) \mapsto z(u) + \lambda \cdot \begin{pmatrix} n^{(1)}(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist (dies ist eine Teilfläche der erweiterten Pedalflächen von $\kappa_n^{\leftarrow}(\{0\})$ auf den Parallellflächen im Abstand λ zu M).

Angenommen, die partiellen Ableitungen der Parametrisierung \tilde{z} im Punkt $(p^{(1)}, \hat{V})$ wären linear abhängig. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}$ in $(p^{(1)}, \hat{V})$ (vergleiche den Beweis von Lemma 8.18) folgt dann insbesondere, dass es Konstanten $\mu_j \in \mathbb{R}$ (für $j \in \{1, \dots, 2d - 4\}$) gibt mit

$$N(p^{(1)}) = \sum_{j=1}^{2d-4} \mu_j \cdot \frac{\partial}{\partial u_j} (x^{(1)} - \langle x^{(1)}, v^{(1)} \rangle \cdot v^{(1)}) \Big|_{(p^{(1)}, \hat{V})}.$$

Anwenden des Skalarprodukts mit $N(p^{(1)})$ auf diese Gleichung führt zu

$$1 = -\langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle \sum_{j=1}^{2d-4} \mu_j \left\langle \frac{\partial v^{(1)}}{\partial u_j} \Big|_{\hat{V}}, N(p^{(1)}) \right\rangle = -\langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle \left\langle \sum_{j=1}^{2d-4} \mu_j \frac{\partial v^{(1)}}{\partial u_j} \Big|_{\hat{V}}, N(p^{(1)}) \right\rangle = 0.$$

Offensichtlich liegt nun ein Widerspruch vor. Durch \tilde{z} wird also eine $(2d-3)$ -dimensionale Fläche parametrisiert. Normalenvektoren im Punkt $\tilde{z}|_{(p^{(1)}, \hat{V})}$ sind nun gegeben durch $\tilde{N}_1(p^{(1)}, \hat{V})$, $\tilde{N}_2(p^{(1)}, \hat{V})$ und $\tilde{N}_4(p^{(1)}, \hat{V})$ (vergleiche Satz 8.14 bzw. Lemma 8.18).

(ii) Zeige als zweiten Schritt, dass die auf den Tangentialraum von \mathcal{G} projizierten Vektoren $\tilde{N}_4(p^{(1)}, \hat{V})$, $\tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V})$ und $\tilde{N}_4(p^{(2)}, \hat{V})$ linear unabhängig sind; dann kann wie in der entsprechenden Situation bei den Hyperebenen (vgl. Lemma 3.11) auf die zu zeigende Aussage geschlossen werden. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es eine nichttriviale Linearkombination dieser Vektoren, die Null ergibt. Anwenden des Skalarprodukts mit $(\hat{V}, 0)$ auf diese Linearkombination der Null zeigt, dass oBdA auf das Projizieren verzichtet werden kann. Somit gibt es Konstanten $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{N}_4(p^{(1)}, \hat{V}) = \alpha_3 \sqrt{1 + \langle p^{(2)}, \hat{V} \rangle^2} \cdot \tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V}) + \alpha_4 \cdot \tilde{N}_4(p^{(2)}, \hat{V}) \quad (8.6)$$

(beachte die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\tilde{N}_3(p^{(2)}, \hat{V})$ und $\tilde{N}_4(p^{(2)}, \hat{V})$ nach Lemma 8.18). Anwenden des Skalarprodukts mit $(-\langle p^{(2)}, \hat{V} \rangle \cdot N(p^{(1)}), N(p^{(1)}))$ bzw. mit $(-\langle p^{(1)}, \hat{V} \rangle \cdot N(p^{(2)}), N(p^{(2)}))$ auf Gleichung (8.6) führt zu

$$-1 = -\alpha_4 \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle \text{ sowie } -\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = \alpha_3 \|p^{(2)} - p^{(1)}\| - \alpha_4.$$

Für $\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = 0$ führt dies sofort zum Widerspruch, sei dies im folgenden also nicht der Fall. Auflösen ergibt dann

$$\alpha_3 = \frac{1}{\|p^{(2)} - p^{(1)}\|} \frac{1 - \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle^2}{\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle} \text{ sowie } \alpha_4 = \frac{1}{\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle}. \quad (8.7)$$

Betrachte als erstes den Fall, dass die Vektoren $\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)})$ und $\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(2)}) \rangle \kappa_k(p^{(2)}) \cdot f_k(p^{(2)})$ linear abhängig sind. Anwenden des Skalarprodukts mit $(-\langle p^{(2)}, \hat{V} \rangle \cdot N(p^{(2)}), N(p^{(2)}))$ auf Gleichung (8.6) führt dann mit dem Ergebnis für α_4 aus Gleichung (8.7) zu $\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle^2 = 1$, die Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ sind somit linear abhängig; ferner folgt $\alpha_3 = 0$ aus Gleichung (8.7). Aus Gleichung (8.6) folgt damit zunächst

$$\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)}) = \sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(2)}) \rangle \kappa_k(p^{(2)}) \cdot f_k(p^{(2)}),$$

und daraus dann

$$\left(\langle p^{(2)} - \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle \cdot p^{(1)}, \hat{V} \rangle \right) \cdot \sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)}) = 0.$$

Aufgrund der Wahl der Voraussetzungen ist die Summe nicht Null (da $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ bereits als linear abhängig erkannt sind), daher muss der erste Term verschwinden. Für $\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = 1$ kann dies wegen $p^{(1)} \neq p^{(2)}$ nicht der Fall sein, für $\langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle = -1$ ist dieser Term abhängig von der Wahl des Ursprungs, bei geeigneter Wahl desselben ergibt sich auch hier ein Widerspruch.

Betrachte somit nun den Fall, dass die Vektoren $\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)})$ und $\sum_{k=1}^{d-1} \langle \hat{V}, f_k(p^{(2)}) \rangle \kappa_k(p^{(2)}) \cdot f_k(p^{(2)})$ linear unabhängig sind, es existiert also ein Vektor $W \in \mathbb{S}_{d-1}$, der orthogonal zum ersten, nicht jedoch orthogonal zum zweiten ist. Anwenden des Skalarprodukts mit $(-\langle p^{(2)}, \hat{V} \rangle \cdot W, W)$ auf Gleichung (8.6) führt dann mit dem Ergebnis für α_4 aus Gleichung (8.7) zu $\langle N(p^{(2)}), W \rangle = \langle N(p^{(1)}), N(p^{(2)}) \rangle^2$. Die rechte Seite ist echt positiv (der Orthogonalitätsfall ist ja bereits ausgeschlossen), die linke Seite (eventuell nach Übergang zu $-W$) kleinergleich Null. Somit ergibt sich auch in diesem Fall ein Widerspruch. \odot

8.1.4 Zwischenflächen

So wie bezüglich der Hyperebenen die von doppelt tangentialen Hyperebenen eingehüllten Flächen von Interesse waren (vgl. Abschnitt 3.1.3), sind bezüglich der Geraden ebenfalls Flächen „zwischen“ den Berührungspunkten doppelt berührender Geraden in der gewählten Immersion des Tangentialeinheitsbündels von Interesse.

8.24 Voraussetzung. In diesem Abschnitt sei M stets eine kompakte in \mathbb{E}_d immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^k -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$ und $k > 2$). Es sei $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ ein fest gewähltes Normaleneinheitsvektorfeld auf M . Ferner sei Null ein regulärer Wert der Abbildung $\kappa_n: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{T}_{(0)} := \kappa_n^{-1}(\{0\})$ ist eine $(2d-4)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).

Schließlich sei eine Gerade $\hat{\eta}$ gegeben, die in den beiden Punkten $p^{(1)}, p^{(2)} \in M$ tangential an die Mannigfaltigkeit M ist. Falls die beiden Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ zusammenfallen, so seien die zugehörigen Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ sowie $N(p^{(2)})$ linear unabhängig. Ein Richtungseinheitsvektor der Geraden $\hat{\eta}$ sei \hat{V} .

8.25 Lemma. *Es gelte sowohl $\kappa_n(p^{(1)}, \hat{V}) \neq 0$ als auch $\kappa_n(p^{(2)}, \hat{V}) \neq 0$. Weiterhin sei $y := (x, v): U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$) eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge von $\mathcal{B}^{(1)}$ (oder $\mathcal{B}^{(2)}$), und $e_d: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ eine Abbildung mit $\langle v, e_d \rangle = 0$. Schließlich sei noch für eine differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung $z_f: U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ definiert durch*

$$z_f: U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, u \mapsto y(u) + f(u) \cdot \begin{pmatrix} v(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \det\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \det\left(\left(\frac{\partial z_f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z_f}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix}\right)\right). \end{aligned}$$

Beweis. Wähle für $u \in U$ eine Orthonormalbasis $\{e_1(u), \dots, e_d(u)\}$ (mit $e_1 := v$), und definiere die Matrix E durch

$$E := \left(\begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{d-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ e_{d-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix} \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \det(E^\top \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix} \right)) \\ &= \det \left(\begin{array}{ccc} \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-4}}, e_2 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-4}}, e_{d-1} \rangle \\ \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-4}}, e_2 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-4}}, e_{d-1} \rangle \end{array} \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Die partiellen Ableitungen von $x + f \cdot v$ sind gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, 2d-4\}$)

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(x + f \cdot v) = \frac{\partial x}{\partial u_j} + \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot v + f \cdot \frac{\partial v}{\partial u_j},$$

also lässt sich Gleichung (8.8) durch geeignetes Addieren von Zeilen weiter umformen zu (beachte: Der Vektor v ist orthogonal zu e_2, \dots, e_d)

$$\begin{aligned} &= \det \left(\begin{array}{ccc} \langle \frac{\partial}{\partial u_1}(x + f \cdot v), e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial}{\partial u_{2d-4}}(x + f \cdot v), e_2 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial}{\partial u_1}(x + f \cdot v), e_{d-1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial}{\partial u_{2d-4}}(x + f \cdot v), e_{d-1} \rangle \\ \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-4}}, e_2 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-4}}, e_{d-1} \rangle \end{array} \right) \\ &= \det(E^\top \cdot \left(\frac{\partial z_f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z_f}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix} \right)). \end{aligned}$$

Da offensichtlich $\det(E) = 1$ ist, folgt die Aussage. \odot

8.26 Lemma. *Es gelte sowohl $\kappa_n(p^{(1)}, \hat{V}) \neq 0$ als auch $\kappa_n(p^{(2)}, \hat{V}) \neq 0$. Weiterhin sei $p^{(1)} \neq p^{(2)}$, und $(\hat{V}, 0)$ sei transversal zu $\mathcal{B}^{(i)}$ innerhalb von \mathcal{T}_M (für $i \in \{1, 2\}$). Es sei die Fläche $\bar{\mathcal{T}} \subseteq \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ definiert durch*

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{T}} := \left\{ \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ V \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} p^{(2)} - p^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in [0, 1], \begin{pmatrix} p^{(i)} \\ V \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(i)} \text{ (für } i \in \{1, 2\}) \right. \\ \left. \text{mit } \eta(p^{(1)}, V) = \eta(p^{(2)}, V) \right\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\bar{\mathcal{T}}$ eine $(2d-3)$ -dimensionale \mathcal{C}^{k-1} -differenzierbare in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ immersierte Mannigfaltigkeit. Weiterhin ist (für $\mu \in \mathbb{R}$; gilt $N(p^{(1)}) = N(p^{(2)})$, so sei $\mu \neq \frac{1}{2}$, vergleiche auch die nachstehende Bemerkung 8.27) eine Basis des Normalenraums im Punkt $(p, \hat{V}) := (p^{(1)} + \mu \cdot (p^{(2)} - p^{(1)}), \hat{V}) \in \bar{\mathcal{T}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(p, \hat{V}) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{V} \end{pmatrix}, \\ \bar{N}_2(p, \hat{V}) &:= \begin{pmatrix} N(p^{(1)}) \\ -\mu \|p^{(2)} - p^{(1)}\| \cdot N(p^{(1)}) \end{pmatrix} \text{ sowie} \\ \bar{N}_3(p, \hat{V}) &:= \begin{pmatrix} N(p^{(2)}) \\ -(1-\mu) \|p^{(2)} - p^{(1)}\| \cdot N(p^{(2)}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Beweis. OBdA sei der Vektor \hat{V} so orientiert, dass $p^{(1)} + \|p^{(2)} - p^{(1)}\| \cdot \hat{V} = p^{(2)}$ gilt (dies lässt sich durch Vertauschen der beiden Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ erreichen). Es sei dann $y^{(i)} := (x^{(i)}, v) : U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{E}_d$ eine Parametrisierung von $\mathcal{B}^{(i)}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$, $i \in \{1, 2\}$; vergleiche auch Lemma 8.20), so dass zueinander gehörige Punkte durch denselben Parameter gegeben sind, d.h. es gilt $x^{(1)} + \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \cdot v = x^{(2)}$. Dann lässt sich die Fläche $\bar{\mathcal{T}}$ parametrisieren via

$$z : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}, (u, \mu) \mapsto y^{(1)}(u) + \mu \|x^{(2)}(u) - x^{(1)}(u)\| \cdot \begin{pmatrix} v(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung sind somit gegeben durch (es sei $i \in \{1, \dots, 2d-4\}$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u_i} &= \frac{\partial y^{(1)}}{\partial u_i} + \mu \frac{\partial}{\partial u_i} (\|x^{(2)} - x^{(1)}\|) \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial u_i} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und} \\ \frac{\partial z}{\partial \mu} &= \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Somit ist sofort ersichtlich, dass \bar{N}_1 und \bar{N}_2 Normalenvektoren an $\bar{\mathcal{T}}$ sind. Aus Symmetriegründen gilt dies dann auch für \bar{N}_3 . Diese drei Vektoren sind (außer in dem angegebenen Spezialfall) stets linear unabhängig, bilden also (die noch nicht bewiesenen Aussagen vorausgesetzt) eine Basis des Normalenraums.

Es sei $n^{(i)} : U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, $u \mapsto N(x^{(i)})$ (für $i \in \{1, 2\}$) die zu obiger Parametrisierung zugehörige Parametrisierung der Normalenvektoren. Für (geeignetes) $\nu \in \mathbb{R}$ definiere dann den Vektor e_d durch

$$e_d := \frac{1}{\|n^{(1)} + \nu \cdot n^{(2)}\|} \cdot (n^{(1)} + \nu \cdot n^{(2)}).$$

Weiter sei die Matrix A definiert durch

$$A := \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix} \right),$$

sowie die Matrix $G = (g_{i,j})_{i,j}$ durch

$$G := \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right)^\top \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgrund der Voraussetzungen ist $\det(G) \neq 0$ (eventuell nach Verkleinern des Parametergebietes U). Dann gilt

$$\begin{aligned} & \det(A|_{\mu=0}^\top \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(2)} \\ -\|x^{(2)} - x^{(1)}\| \cdot n^{(2)} \end{pmatrix} \right)) \\ &= \det \left(\begin{array}{cccccc} g_{1,1} & \cdots & g_{1,2d-3} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{2d-3,1} & \cdots & g_{2d-3,2d-3} & 0 & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & \frac{1+\nu \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle}{\|n^{(1)} + \nu \cdot n^{(2)}\|} & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & 0 & \frac{-\|x^{(2)} - x^{(1)}\| \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle + \nu}{\|n^{(1)} + \nu \cdot n^{(2)}\|} \end{array} \right) \\ &= -\det(G) \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{\|n^{(1)} + \nu \cdot n^{(2)}\|^2} (1 + \nu \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle) (\langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle + \nu). \end{aligned}$$

Für geeignete Wahl von ν ist dies offensichtlich ungleich Null, und damit gilt dann auch $\det(A|_{\mu=0}) \neq 0$. Mit Lemma 8.25 folgt dann $\det(A) \neq 0$, insbesondere sind also die Spalten der Matrix A linear unabhängig, und somit auch die partiellen Ableitungen der Parametrisierung z von \bar{T} . \odot

8.27 Bemerkung. Falls in Lemma 8.26 $N(p^{(1)}) = N(p^{(2)})$ gilt, so ist eine Orthonormalbasis des Normalenraums von \bar{T} in (p, \hat{V}) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hat{V} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N(p^{(1)}) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ N(p^{(1)}) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Betrachte den Grenzwert der (normierten) Vektoren $\bar{N}_2 + \bar{N}_3$ sowie $\bar{N}_2 - \bar{N}_3$. \odot

8.1.5 Eine Verallgemeinerung einer Minkowskischen Integralformel

Beim Umformen der von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes abhängigen Formel in eine von einer solchen Wahl unabhängigen Formel war bei der Betrachtung des Schnittverhaltens bezüglich Hyperebenen eine der Minkowskischen Integralformeln hilfreich (vgl. Abschnitt 3.2.4). Da die Beweisidee nun bei den Geraden derjenigen bei den Hyperebenen entspricht, wird dies jetzt ebenfalls der Fall sein. Die hierfür nötige Verallgemeinerung einer der Minkowskischen Integralformeln auf Integration über das Tangentialeinheitsbündel erfolgt in diesem Abschnitt.

8.28 Satz. *Es sei M eine kompakte in \mathbb{E}_d immensierte unberandete \mathcal{C}^3 -differenzierbare $(d-1)$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit (mit $d > 1$) mit Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$. Weiterhin sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_M$ eine Menge, auf die der Satz von Stokes angewendet werden darf (vergleiche beispielsweise [13, chapter XVII]).*

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{(p,V) \in \mathcal{T}} (1 + \langle p, N(p) \rangle \kappa_n(p, V)) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} \\ &= \frac{1}{(2d-4)!} \int_{(p,V) \in \partial \mathcal{T}} \langle p, V \rangle \det\left(\left(\frac{dp}{dV}\right), \dots, \left(\frac{dp}{dV}\right), \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $(p, V) \in \mathcal{T}$ ein beliebiger Punkt, und $y := (x, v): U \rightarrow \mathcal{T}_M$ eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von (p, V) in \mathcal{T} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-3}$). Betrachte im folgenden auf $(x, n)(U)$ die Differentialform

$$\langle x, v \rangle (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,d-1}). \quad (8.9)$$

Dabei sei das zugehörige Orthonormalbein in (x, v) gegeben durch den Punkt x selbst, den Richtungsvektor $e_1 := v$, den Normalenvektor $e_d := N(x)$ sowie eine Orthonormalbasis e_2, \dots, e_{d-1} aus Tangentialvektoren, so dass e_1, \dots, e_d eine Orthonormalbasis von \mathbb{E}_d ist. Die für den weiteren Verlauf des Beweises relevanten Maurer-Cartan-Formen sind dann gegeben durch (es sei $j \in \{1, \dots, d-1\}$)

$$\begin{aligned} \omega_j &= \langle dx, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{2d-3} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, e_j \right\rangle du_k, \\ \omega_d &= \langle dx, e_d \rangle = \sum_{k=1}^{2d-3} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, N(x) \right\rangle du_k = 0 \text{ sowie} \\ \omega_{1,j} &= -\langle de_1, e_j \rangle = -\sum_{k=1}^{2d-3} \left\langle \frac{\partial v}{\partial u_k}, e_j \right\rangle du_k. \end{aligned}$$

Im folgenden werde die äußere Ableitung der in Gleichung (8.9) definierten Differentialform betrachtet: Mit Hilfe des noch folgenden Lemma 8.43 (beachte: Nach obigem ist $\omega_d = 0$) gilt

$$\begin{aligned} & d\left(\langle x, v \rangle (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,d-1})\right) \\ &= \langle dx, v \rangle \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,d-1}) \\ &\quad + \langle x, dv \rangle \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,d-1}). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Betrachte zunächst den ersten Term der rechten Seite von Gleichung (8.10): Mit den bereits berechneten Maurer-Cartan-Formen ergibt sich (beachte: Wegen $e_1 = v$ gilt

$\langle dx, v \rangle = \omega_1$; setze zur Abkürzung $\omega := du_1 \wedge \cdots \wedge du_{2d-3}$)

$$\begin{aligned}
& (-1)^d (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d-1}) \\
&= \left| \begin{array}{cccccc} \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_1 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-3}}, e_1 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-3}}, e_{d-1} \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}}, e_{d-1} \rangle \end{array} \right| \omega \\
&= \left(\det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N(x) \end{pmatrix} \right) \right) \\
&\quad \det \left(\left(\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{d-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ e_{d-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix} \right) \right) \right) \omega \\
&= - \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N(x) \end{pmatrix} \right) \right) \omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(x, v)}} \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, N_1(x), N_2(x), N_3(x) \right) \right) \omega \tag{8.11}
\end{aligned}$$

(für die Definition der Vektoren N_1 , N_2 sowie N_3 vergleiche Lemma 8.8).

Betrachte nun den zweiten Term der rechten Seite von Gleichung (8.10). Zunächst einmal gilt

$$\langle x, dv \rangle = \sum_{i=1}^d \langle x, e_i \rangle \langle e_i, de_1 \rangle = - \sum_{i=1}^d \langle x, e_i \rangle \omega_{1,i}.$$

Daher ergibt sich mit den bereits berechneten Maurer-Cartan-Formen

$$\begin{aligned}
& (-1)^d \langle x, dv \rangle \wedge (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d-1}) \\
&= (-1)^{d+1} \langle x, N(x) \rangle \omega_{1,d} \wedge (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d-1}) \\
&= (-1)^{d+1} \langle x, N(x) \rangle (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d}) \\
&= \langle x, N(x) \rangle \left| \begin{array}{cccccc} \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_d \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-3}}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-3}}, e_{d-1} \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}}, e_d \rangle \end{array} \right| \omega \\
&= \langle x, N(x) \rangle \left(\det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&\quad \det \left(\left(\begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{d-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \omega \\
&= \langle x, N(x) \rangle \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \omega \\
&= \langle x, N(x) \rangle \frac{\kappa_n(x, v)}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(x, v)}} \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, N_1(x), N_2(x), N_3(x) \right) \right) \omega \tag{8.12}
\end{aligned}$$

(für die Definition der Vektoren N_1 , N_2 sowie N_3 vergleiche wieder Lemma 8.8).

Schließlich betrachte noch die in Gleichung (8.9) definierte Differentialform direkt. Es sei nun $(p, V) \in \partial\mathcal{T}$ ein beliebiger nichtsingulärer Punkt des Randes von \mathcal{T} , und $y := (x, v): U \rightarrow \mathcal{T}_M$ eine Parametrisierung einer offenen Umgebung von (p, V) in $\partial\mathcal{T}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$). Mit den analog zu oben bestimmten Maurer-Cartan-Formen gilt dann

$$\begin{aligned}
& (-1)^d \langle x, v \rangle (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{d-1}) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d-1}) \\
&= \langle x, v \rangle \left| \begin{array}{cccccc} \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_{d-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-4}}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-4}}, e_{d-1} \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-4}}, e_2 \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-4}}, e_{d-1} \rangle \end{array} \right| \omega \\
&= \langle x, v \rangle \det\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N(x) \end{pmatrix}\right)\right) \omega \\
&= \frac{\langle x, v \rangle}{(2d-4)!} \det\left(\left(\frac{dx}{dv}, \dots, \frac{dx}{dv}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N(x) \end{pmatrix}\right)\right). \quad (8.13)
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich nun die Aussage mit Hilfe des Satzes von Stokes (vergleiche beispielsweise [13, chapter XVII]) direkt aus den Gleichungen (8.10), (8.11), (8.12) sowie (8.13) (beachte auch Lemma 8.9). ☺

8.29 Bemerkung. Als direkte Folgerung aus Satz 8.28 ergibt sich für eine Mannigfaltigkeit M mit den dortigen Eigenschaften die bekannte Integralformel von Minkowski (vgl. [8, Theorem 1])

$$\int_{p \in M} (1 + \langle p, N(p) \rangle) \varphi_1(p) \, dO = 0,$$

da die über alle Tangentialeinheitsvektoren in einem Punkt gemittelte Normalkrümmung gerade φ_1 in diesem Punkt ergibt.

8.2 Hyperflächen

In diesem Unterkapitel werden nun die Aussagen bezüglich des Maßes einer Menge \mathcal{D} von Geraden mit „geeignetem“ Schnittverhalten bezüglich einer gegebenen Hyperfläche formuliert sowie die für die zugehörigen Formeln notwendigen Hilfsflächen konstruiert (jeweils in Abschnitt 8.2.1). Anschließend erfolgt in 8.2.2 der Beweis der Wohldefiniertheit der gemachten Definitionen.

Der eigentliche Beweis gliedert sich in zwei Teile: In Abschnitt 8.2.3 wird die noch von der Wahl eines ausgezeichneten Punktes abhängige Formel bewiesen, im abschließenden Abschnitt 8.2.4 wird die davon unabhängige – jedoch die Zwischenflächen aus Abschnitt 8.1.4 enthaltende – Formel auf erstere zurückgeführt. Die hinter dem Beweis stehende Idee ist im wesentlichen dieselbe wie bei in Kapitel 3 bei den Hyperebenen (vgl. Abschnitt 3.2.3).

8.2.1 Formulierung der Aussagen

8.30 Voraussetzung. Für den Rest von Abschnitt 8.2 sei M stets eine kompakte in \mathbb{E}_d (mit $d \geq 2$) immersierte unberandete orientierbare \mathcal{C}^3 -differenzierbare Hyperfläche.

Weiterhin seien die folgenden Eigenschaften erfüllt (dabei sei $\mathcal{T}_{(*)} \subseteq \mathcal{T}_M$ eine geeignete endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken mit $l \in \{0, \dots, 2d - 5\}$; mit „Berührungspunkten“ sei jeweils das Tupel aus Punkt und Richtungsvektor der Geraden in \mathcal{T}_M gemeint)

- Das Normaleneinheitsbündel \mathcal{N}_M sei eingebettet in $\mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$.
- Die Abbildung $\kappa_n: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Normalkrümmung, habe Null als regulären Wert, insbesondere ist $\mathcal{T}_{(0)} := \kappa_n^{-1}(\{0\})$ eine $(2d - 4)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M (vergleiche beispielsweise [7, Theorem 3.2]).
- Verschwindet die Normalkrümmung in genau einem der beiden Berührungspunkte einer Doppeltangentialgeraden, ist die Geradenrichtung in diesem Punkt Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung Null und sind die Normalenvektoren in den beiden Berührungspunkten linear abhängig, so seien beide Berührungspunkte in $\mathcal{T}_{(*)}$ enthalten.
- Ist die Normalkrümmung in den beiden Berührungspunkten $(p^{(1)}, V), (p^{(2)}, V) \in \mathcal{T}_M$ einer Doppeltangentialgeraden Null, und sind sowohl die Normalenvektoren in den Punkten $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ als auch die Vektoren $\sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k(p^{(1)}) \rangle \kappa_k(p^{(1)}) \cdot f_k(p^{(1)})$ und $\sum_{k=1}^{d-1} \langle V, f_k(p^{(2)}) \rangle \kappa_k(p^{(2)}) \cdot f_k(p^{(2)})$ linear abhängig, so seien beide Berührungspunkte in $\mathcal{T}_{(*)}$ enthalten.
- Die Berührungspunkte einer Doppeltangentialgeraden, in denen die Normalkrümmung verschwindet, und in denen diese Doppeltangentialgerade ebenfalls tangential an $\mathcal{T}_{(0)}$ ist, seien in $\mathcal{T}_{(*)}$ enthalten.
- Verschwindet die Normalkrümmung in keinem der beiden Berührungspunkte einer Doppeltangentialgeraden, und ist diese Gerade tangential an die von Berührungspunkten gebildete $(2d - 4)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M in einem dieser Punkte, so seien diese beide in $\mathcal{T}_{(*)}$ enthalten.
- Die Berührungspunkte von Geraden, die in mindestens drei Punkten tangential an M sind, seien in $\mathcal{T}_{(*)}$ enthalten (vergleiche hierzu auch Lemma 8.20).

Da M orientierbar ist, kann ein Normaleneinheitsvektorfeld $N: M \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$ von M gewählt werden. Im folgenden werden die Krümmungen von M stets bezüglich dieses fest gewählten N bestimmt (vergleiche hierzu auch Bemerkung 8.33 bei der Betrachtung von Hyperebenen statt Geraden).

Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}_{1,d}$ fest gewählt. Diese Menge von Hyperebenen sei die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{E}_{1,d} \setminus \mathcal{T}$ (dabei bezeichne $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}_{1,d}$ die Menge aller Geraden, die tangential an die Mannigfaltigkeit

M sind). Schließlich sei noch $\mu(\mathcal{D})$ das bewegungsinvariante Maß der Menge \mathcal{D} , d.h. es gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\eta \in \mathcal{D}} d\eta.$$

Es sei $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ die zu \mathcal{D} zugehörige Teilmenge von \mathcal{G} , d.h. es gilt $\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \eta|_{\mathcal{G}}^{-1}(\mathcal{D})$.

8.31 Definition. Es werde mit $\mathcal{T}_{\geq 2} \subseteq \mathcal{T}_M$ die Menge der $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ bezeichnet, für die die Gerade $\eta(p, V)$ in mehr als einem Punkt tangential an M ist.

Dann seien die Mengen $\mathcal{T}^+ \subseteq \mathcal{T}_M$ sowie $\mathcal{T}^- \subseteq \mathcal{T}_M$ definiert durch (zur Abkürzung werde $\mathcal{T}' := \mathcal{T}_M \setminus (\mathcal{T}_{\geq 2} \cup \mathcal{T}_{(0)})$ gesetzt)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^+ &:= \{(p, V) \in \mathcal{T}' \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \eta(p + \delta \operatorname{sign}(\kappa_n(p, V)) \cdot N(p), V) \in \mathcal{D}\}, \\ \mathcal{T}^- &:= \{(p, V) \in \mathcal{T}' \mid \exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in]0, \varepsilon[: \eta(p - \delta \operatorname{sign}(\kappa_n(p, V)) \cdot N(p), V) \in \mathcal{D}\}. \end{aligned}$$

Es ist also \mathcal{T}^+ die Menge der „Tangentialgeraden“ von \mathcal{T}_M (bis auf die explizit herausgenommenen), die bei (lokaler) Translation in Richtung des (mit dem Vorzeichen der Normalkrümmung κ_n signierten) Normalenvektors im Gebiet \mathcal{D} liegen; bei \mathcal{T}^- ist dies bei entgegengesetzter Translationsrichtung genauso.

8.32 Bemerkung. Für $(p, V) \in \mathcal{T}_M$ betrachte die um ε in Richtung der Normalen $N(p)$ verschobene Tangentialgerade $\eta(p, V)$. Dann ist der zu dieser verschobenen Geraden zugehörige Punkt von \mathcal{G} gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p + \varepsilon \cdot N(p) - \langle p, V \rangle \cdot V \\ V \end{pmatrix} = \tilde{p}(p, V) + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} N(p) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $(N(p), 0)$ zeigt im Punkt $\tilde{p}(p, V)$ auf dieselbe Seite der Fläche \tilde{M} (als Hyperfläche in \mathcal{G}) wie der Normalenvektor $\tilde{N}_3(p, V)$ (vgl. Satz 8.14).

8.33 Bemerkung. Die Definition von \mathcal{T}^+ bzw. \mathcal{T}^- in Definition 8.31 ist unabhängig von der Wahl des Normaleneinheitsvektorfeldes N auf M , da bei entgegengesetzter Orientierung von N auch die Normalkrümmung κ_n ihr Vorzeichen ändert.

8.34 Konstruktion. Betrachte nun speziell diejenigen Punkte (p, V) des (relativen) Randes von \mathcal{T}^+ sowie \mathcal{T}^- , für die die Normalkrümmung $\kappa_n(p, V)$ nicht verschwindet, und für die die zugehörige Tangentialgerade $\eta(p, V)$ in genau zwei verschiedenen Punkten tangential an M ist. Wie in Lemma 8.20 bewiesen, bildet die Menge dieser Punkte eine $(2d - 4)$ -dimensionale \mathcal{C}^2 -differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathcal{T}_M , die im folgenden mit \mathcal{B}^* bezeichnet werde. Wie in Konstruktion 3.24 lassen sich die Zusammenhangskomponenten von \mathcal{B}^* zu Paaren zusammenfassen, so dass die zu den beiden Zusammenhangskomponenten eines Paares zugehörigen Doppeltangentialgeraden dieselbe Schar von gleichorientierten Geraden bilden. Die Menge dieser Paare sei \mathcal{Z} . Aufgrund der Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit M ist \mathcal{Z} endlich.

Betrachte nun ein festes solches Paar $Z \in \mathcal{Z}$; die beiden zugehörigen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{B}^* seien $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ sowie $\mathcal{B}_Z^{(2)}$. Falls zu „beiden Seiten“ von $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ (und

damit nach Konstruktion auch von $\mathcal{B}_Z^{(2)}$) die Fläche $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ liegt, so verfähre analog zu Konstruktion 3.24). Weiterhin sei noch die „zwischen“ $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ liegende Fläche $\bar{\mathcal{T}}_Z$ definiert durch (vgl. Lemma 8.26)

$$\bar{\mathcal{T}}_Z := \left\{ \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ V \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} p^{(2)} - p^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in [0, 1], \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ V \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_Z^{(1)}, \begin{pmatrix} p^{(2)} \\ V \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_Z^{(2)} \right. \\ \left. \text{mit } \eta(p^{(1)}, V) = \eta(p^{(2)}, V) \right\}.$$

Für $j \in \{1, 2\}$ definiere nun $s_Z^{(j)}$: Sei dazu $(p^{(j)}, V) \in \mathcal{B}_Z^{(j)}$ ein beliebiger Punkt. Es sei $N_{\mathcal{B}_Z^{(j)}}(p^{(j)}, V)$ der nach außen orientierte Normalenvektor der Hyperfläche $\mathcal{B}_Z^{(j)}$ in \mathcal{T}_M („außen“ bezüglich des Gebietes $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$). Dann setze (es sei $i \in \{1, 2\}$ so gewählt, dass $\{i, j\} = \{1, 2\}$ gilt)

$$s_Z^{(j)} := \text{sign}(\langle \begin{pmatrix} p^{(i)} - p^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}, N_{\mathcal{B}_Z^{(j)}}(p^{(j)}, V) \rangle)$$

(es sei $(p^{(i)}, V) \in \mathcal{B}_Z^{(i)}$ der zu $(p^{(j)}, V)$ zugehörige Punkt von $\mathcal{B}_Z^{(i)}$; beachte: Diese Definition ist offensichtlich unabhängig von der Wahl des Punktes $(p^{(j)}, V)$ in $\mathcal{B}_Z^{(j)}$). Weiterhin setze $\sigma_Z^{(j)} := +1$, falls $\mathcal{B}_Z^{(j)}$ eine Teilmenge des Randes von \mathcal{T}^+ ist, ansonsten setze $\sigma_Z^{(j)} := -1$.

Schließlich sei $\bar{\mathcal{T}}^+$ die Vereinigungsmannigfaltigkeit (unter Beachtung von eventuellen Vielfachheiten) aller derjenigen Flächen $\bar{\mathcal{T}}_Z$ (für $Z \in \mathcal{Z}$), für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} = +1$ gilt, sowie $\bar{\mathcal{T}}^-$ die Vereinigung aller derjenigen Flächen $\bar{\mathcal{T}}_Z$, für die $s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)} = -1$ ist (jeweils für $j \in \{1, 2\}$; dass dies wohldefiniert, also unabhängig von j , ist, wird in Lemma 8.40 gezeigt werden).

8.35 Definition. Definiere nun die Funktion $f_{\bar{\mathcal{T}}}: \bar{\mathcal{T}}^+ \cup \bar{\mathcal{T}}^- \rightarrow \mathbb{R}$ durch Vorgabe der Funktionswerte auf den einzelnen Teilflächen $\bar{\mathcal{T}}_Z$ für $Z \in \mathcal{Z}$. Für $\mu \in [0, 1]$ sowie $(p^{(i)}, V) \in \mathcal{B}_Z^{(i)}$ (für $i \in \{1, 2\}$) mit $\eta(p^{(1)}, V) = \eta(p^{(2)}, V)$ sei der Funktionswert von $f_{\bar{\mathcal{T}}}$ im Punkt $(p, V) := ((1 - \mu) \cdot p^{(1)} + \mu \cdot p^{(2)}, V)$ definiert durch (für die Definition von \bar{N}_2 bzw. \bar{N}_3 vergleiche Lemma 8.26)

$$f_{\bar{\mathcal{T}}}(p, V) := \frac{|2\mu - 1| |\langle N(p^{(2)}), N(p^{(1)}) \rangle| \|p^{(2)} - p^{(1)}\|}{\sqrt{\det((\bar{N}_2(p, V), \bar{N}_3(p, V))^\top \cdot (\bar{N}_2(p, V), \bar{N}_3(p, V)))}}.$$

Hierbei gilt

$$\det((\bar{N}_2(p, V), \bar{N}_3(p, V))^\top \cdot (\bar{N}_2(p, V), \bar{N}_3(p, V))) \\ = (2\mu - 1)^2 \|p^{(2)} - p^{(1)}\|^2 + (1 - \langle N(p^{(2)}), N(p^{(1)}) \rangle)^2 (1 + \mu(1 - \mu) \|p^{(2)} - p^{(1)}\|^2)^2.$$

8.36 Bemerkung. Für $d = 2$, d.h. für den Fall, dass in der euklidischen Ebene \mathbb{E}_2 das Schnittverhalten von Kurven mit Geraden untersucht wird, stimmen die Definitionen hier aus Abschnitt 8.2.1 offensichtlich mit denjenigen aus Abschnitt 3.2.1 überein (beachte: Für $d = 2$ sind die Hyperebenen gerade durch die Geraden gegeben; weiterhin gilt in diesem Fall $\varphi_{d-2} = \varphi_0 \equiv +1$). Insbesondere gilt $f_{\bar{\mathcal{T}}} \equiv +1$, da in den Endpunkten die Normalenvektoren (eventuell bis auf die Orientierung) stets übereinstimmen.

8.37 Satz. *Es gilt*

$$\mu(D) = \frac{1}{2(d-1)} \left(\int_{(p,V) \in \mathcal{T}^+} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} - \int_{(p,V) \in \mathcal{T}^-} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} \right).$$

8.38 Satz. *Es gilt*

$$\mu(D) = \frac{1}{2(d-1)} \left(\int_{\mathcal{T}^+} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} - \int_{\mathcal{T}^-} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} + \int_{(p,V) \in \bar{\mathcal{T}}^+} f_{\bar{\mathcal{T}}} dO - \int_{(p,V) \in \bar{\mathcal{T}}^-} f_{\bar{\mathcal{T}}} dO \right).$$

8.2.2 Wohldefiniertheit

In diesem Abschnitt wird die Wohldefiniertheit der Zuweisung von Vorzeichen für die von den zwischen den Berührungspunkten von Doppeltangenten liegenden Teilflächen aus Konstruktion 8.34 gezeigt.

8.39 Lemma. *Sei $Z \in \mathcal{Z}$. Es seien für $j \in \{1, 2\}$ die Punkte $(p^{(j)}, V) \in \mathcal{B}_Z^{(j)}$ so gegeben, dass $\eta(p^{(1)}, V) = \eta(p^{(2)}, V)$ gilt. Es seien die beiden Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ linear unabhängig. Somit ist der Vektor \bar{N} , definiert durch*

$$\bar{N} := \sum_{j=1}^2 \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\kappa_n(p^{(j)}, V)) \cdot N(p^{(j)}),$$

ungleich dem Nullvektor. Dann sei E die (zweidimensionale) Ebene, die von den Vektoren \bar{N} und V aufgespannt wird, und in der die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ liegen. Weiterhin sei (für $j \in \{1, 2\}$) c_j die bogenlängenparametrisierte Schnittkurve von M mit E in einer Umgebung von $p^{(j)}$.

Dann gilt (für $j \in \{1, 2\}$)

$$\sigma_Z^{(j)} = \text{sign}(\langle c_j''|_{p^{(j)}}, \bar{N} \rangle).$$

Beweis. Da c ganz in E liegt, $c'|_{p^{(j)}} = \pm V$ gilt, und V orthogonal zu \bar{N} ist, ist c_j'' parallel zu \bar{N} , also gilt

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\kappa_n(p^{(j)}, V)) \\ &= \text{sign}(\langle c_j''|_{p^{(j)}}, N(p^{(j)}) \rangle) \\ &= \text{sign}(\langle \langle c_j''|_{p^{(j)}}, \bar{N} \rangle \cdot \bar{N}, N(p^{(j)}) \rangle) \\ &= \text{sign}(\langle c_j''|_{p^{(j)}}, \bar{N} \rangle) \text{sign}(\langle \bar{N}, N(p^{(j)}) \rangle) \\ &= \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\kappa_n(p^{(j)}, V)) \text{sign}(\langle c_j''|_{p^{(j)}}, \bar{N} \rangle) \text{sign}(\langle \bar{N}, \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\kappa_n(p^{(j)}, V)) \cdot N(p^{(j)}) \rangle). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung der Vektor \bar{N} nicht verschwindet, folgt aus dem Satz von Cauchy-Schwarz, dass $\text{sign}(\langle \bar{N}, \sigma_Z^{(j)} \text{sign}(\kappa_n(p^{(j)}, V)) \cdot N(p^{(j)}) \rangle) > 0$ ist, also folgt die Aussage (beachte: Nach Definition verschwindet die Normalkrümmung in den Punkten von $\mathcal{B}_Z^{(j)}$ nicht). \odot

8.40 Lemma. In Konstruktion 8.34 ist die Definition von $\bar{\mathcal{T}}^+$ und $\bar{\mathcal{T}}^-$ wohldefiniert, d.h. für $Z \in \mathcal{Z}$ gilt (unter Verwendung der Bezeichnungen aus Konstruktion 8.34)

$$\sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} = \sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)}.$$

Beweis. Es seien für $j \in \{1, 2\}$ die Punkte $(p^{(j)}, V) \in \mathcal{B}_Z^{(j)}$ so gewählt, dass für die zugehörigen Tangentialgeraden $\eta(p^{(1)}, V) = \eta(p^{(2)}, V)$ gilt.

(i) Betrachte zunächst den Fall, dass die Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ linear unabhängig sind. Es seien die Bezeichnungen so wie in der Formulierung von Lemma 8.39 gewählt. Es sei $\sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} = +1$. Ist $s_Z^{(1)} = +1$ erfüllt, so muss also auch $\sigma_Z^{(1)} = +1$ gelten, und damit sind c_1'' und \bar{N} gleichorientiert (vgl. Lemma 8.39). Ist dagegen $s_Z^{(1)} = -1$, so muss nun $\sigma_Z^{(1)} = -1$ gelten, also sind c_1'' und \bar{N} entgegengesetzt orientiert (vergleiche dazu auch Abbildung 8.1 links: Die erste Situation ist „unten“, die zweite „oben“ dargestellt; setze $\eta := \eta(p^{(1)}, V) = \eta(p^{(2)}, V)$). Es sei $\hat{\mathcal{T}}^{(j)}$ die Teilfläche von $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$, die an $\mathcal{B}_Z^{(j)}$

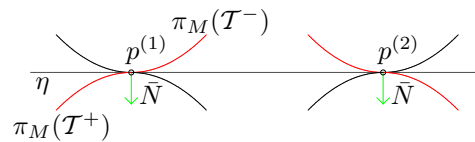


Abbildung 8.1: Mögliche Schnittsituationen der Ebene E mit M

angrenzt. Dann gilt (für $\{i, j\} = \{1, 2\}$) nach Konstruktion des Vektors \bar{N} für genügend nahe bei $(p^{(j)}, V)$ liegende Punkte $(\hat{p}, \hat{V}) \in \hat{\mathcal{T}}^{(j)}$, dass für (genügend kleines) $\varepsilon > 0$ die Gerade $\eta(\hat{p} + \varepsilon \cdot \bar{N}, \hat{V})$ im Gebiet \mathcal{D} enthalten ist, aber der Punkt $(\hat{p} + \varepsilon \cdot \bar{N}, \hat{V})$ kann nicht in $\hat{\mathcal{T}}^{(i)}$ beliebig nahe beim Punkt $(p^{(i)}, V)$ liegen (falls er überhaupt in $\hat{\mathcal{T}}^{(i)}$ liegen sollte). Daher kommen für $\pi_M(\hat{\mathcal{T}}^{(j)})$ nur die beiden in Abbildung 8.1 rechts rot hervorgehobenen Situationen in Betracht. Mit Hilfe von Lemma 8.39 ergibt sich in beiden Situationen, dass auch $\sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)} = +1$ gilt.

Aus Symmetriegründen folgt analog zu obigem ebenfalls aus $\sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)} = +1$, dass $\sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} = +1$ gilt. Also ist gezeigt, dass $\sigma_Z^{(1)} s_Z^{(1)} = +1$ genau dann erfüllt ist, wenn $\sigma_Z^{(2)} s_Z^{(2)} = +1$ erfüllt ist. Somit folgt die Behauptung.

(ii) Betrachte nun den Fall, dass die beiden Normalenvektoren $N(p^{(1)})$ und $N(p^{(2)})$ linear abhängig sind. Es sei E die (zweidimensionale) Ebene, die von den Vektoren $N(p^{(1)})$ (und damit auch $N(p^{(2)})$) und V aufgespannt wird, und in der die Punkte $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ liegen. Wieder sei (für $j \in \{1, 2\}$) c_j die bogenlängenparametrisierte Schnittkurve von M mit E in einer Umgebung von $p^{(j)}$. Es sei nun (für $i \in \{0, 1\}$) $\varphi_i^{(E)}$ die i -te mittlere Krümmung der Kurve c_j als Hyperfläche in der Ebene E . Dann gilt $\varphi_1^{(E)}(c_j) = \kappa_n(c_j, c_j')$ und $\varphi_0^{(E)}(c_j) = +1$. Die Aussage folgt in diesem Fall somit aus Lemma 3.30 für $d = 2$. \odot

8.2.3 Beweis der ortsabhängigen Aussage

8.41 Schreibweise. Um die Formeln in den Aussagen dieses Abschnittes kurz und übersichtlich zu halten, werde „ \widehat{k} “ (für geeignetes $k \in \mathbb{N}_0$) geschrieben, um auszudrücken, dass bei den Termen in „ \dots “ genau der k -te Term wegzulassen ist. Wird „ \widehat{k} “ über einen Term gesetzt, so soll genau der k -te Term durch den Term unter „ \widehat{k} “ ersetzt werden, die restlichen Terme sollen unverändert bleiben.

8.42 Lemma. Für die in Abschnitt 8.2.1 definierten Mengen gilt:

1. Die Menge \mathcal{D} ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{E}_{1,d}$, die Menge $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ eine offene Teilmenge von \mathcal{G} .
2. Die Mengen \mathcal{T}^+ sowie \mathcal{T}^- sind offene Teilmengen in \mathcal{T}_M .
3. Die nichtsingulären Punkte des (topologischen) Randes von \mathcal{D} sind genau durch die Tangentialgeraden $\eta(p, V)$ mit $(p, V) \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ gegeben; die nichtsingulären Punkte des Randes von $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ sind genau durch diejenigen Punkte (p', V') gegeben, für die ein $(p, V) \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ existiert mit $(p', V') = (p - \langle p, V \rangle \cdot V, V)$.
4. Die nichtsingulären Punkte des (topologischen) Randes von $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ (in \mathcal{T}_M) sind gegeben durch \mathcal{B}^* und eine offene Teilmenge von $\mathcal{T}_{(0)}$.
5. Die Menge der singulären Punkte des Randes sowohl von \mathcal{D} und $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ als auch von \mathcal{T}^+ sowie \mathcal{T}^- ist endliche Vereinigung von \mathcal{C}^1 -Bildern von l -Rechtecken (mit $l \in \{0, \dots, 2d - 4\}$).
6. Die nichtsingulären Punkte des Randes der Menge \mathcal{D} bilden eine \mathcal{C}^2 -differenzierbare $(2d - 3)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{E}_{1,d}$; dasselbe gilt für die nichtsingulären Punkte des Randes von $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ bezüglich \mathcal{G} .

Beweis. Diese Aussagen lassen sich wie bereits in der entsprechenden Situation bei den Hyperebenen (vgl. Lemma 3.34), einerseits direkt auf die Definitionen der beteiligten Mengen (vergleiche Voraussetzung 8.30, Definition 8.31 sowie Konstruktion 8.34) bzw. andererseits auf die Aussagen in den Abschnitten 8.1.2 und 8.1.3 zurückführen. \odot

8.43 Lemma. Es gilt

$$d \left(\sum_{k=2}^d (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{k} \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}) \right) = 0.$$

Beweis. Ausrechnen der äußeren Ableitung auf der linken Seite ergibt

$$\begin{aligned}
& d\left(\sum_{k=2}^d (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d})\right) \\
&= -\sum_{k=2}^d \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^d (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (-\omega_k \wedge \widehat{\omega_{k,j}}^j \wedge \omega_{1,j}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^d \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^d (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (-\omega_j \wedge \widehat{\omega_{1,k}}^j \wedge \omega_{k,j}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}).
\end{aligned}$$

Wegen $\omega_{k,k} = 0$ ist die Einschränkung $j \neq k$ nicht nötig, und Verändern der Reihenfolge ergibt

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^d \sum_{j=2}^d (\omega_k \wedge \omega_{k,j} \wedge \omega_{1,j}) \wedge (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^{j,k} \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}) \\
&\quad - \sum_{k=2}^d \sum_{j=2}^d (\omega_j \wedge \omega_{1,k} \wedge \omega_{k,j}) \wedge (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^{j,k} \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}).
\end{aligned}$$

Nach Vertauschen von j und k in einer der beiden Doppelsummen, ist klar, dass sich diese gegenseitig aufheben, und es folgt die Behauptung. \odot

8.44 Korollar. *Es gilt*

$$(\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \cdots \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}) = \frac{1}{d-1} d\left(\sum_{k=2}^d \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d})\right).$$

Beweis. Ausrechnen der äußeren Ableitung auf der rechten Seite ergibt (beachte auch Lemma 8.43)

$$\begin{aligned}
& d\left(\sum_{k=2}^d \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d})\right) \\
&= \sum_{k=2}^d (-\omega_k \wedge \omega_{k,1}) \wedge (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}) \\
&= (d-1) (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \cdots \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}).
\end{aligned}$$

\odot

8.45 Korollar. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
& (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d}) \\
&= \frac{(-1)^d}{d-1} d\left(\sum_{k=2}^d (\omega_1 \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \widehat{\cdots}^k \wedge \omega_{1,d})\right).
\end{aligned}$$

Beweis. Umformen der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} & d\left(\sum_{k=2}^d (\omega_1 \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot k} \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot k} \wedge \omega_{1,d})\right) \\ &= (-1)^{\frac{(d-3)(d-2)}{2}} d\left(\sum_{k=2}^d \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot k} \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d})\right). \end{aligned}$$

Nun lässt sich Korollar 8.44 anwenden, und es folgt

$$\begin{aligned} &= (-1)^{\frac{(d-3)(d-2)}{2}} (d-1) (\omega_2 \wedge \omega_{1,2}) \wedge \cdots \wedge (\omega_d \wedge \omega_{1,d}) \\ &= (-1)^{\frac{(d-3)(d-2)}{2}} (-1)^{\frac{(d-2)(d-1)}{2}} (d-1) (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d}) \\ &= (-1)^{(d-2)^2} (d-1) (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \cdots \wedge \omega_{1,d}). \end{aligned}$$

Da $(d-2)^2$ genau dann gerade ist, wenn d gerade ist, folgt somit die Behauptung. \odot

8.46 Lemma. Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_M$ offene Teilmenge. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (-1)^d \int_{\eta \in \eta(\mathcal{T})} \sum_{k=2}^d (\omega_1 \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot k} \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot k} \wedge \omega_{1,d}) \\ &= \int_{(p,V) \in \mathcal{T}} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $y = (x, v): U \rightarrow \mathcal{T}_M$ eine Parametrisierung von \mathcal{T} (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-3}$; beachte: Nach Lemma 8.9 ist \mathcal{T}_M insbesondere eine $(2d-3)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit). Das zu den Geraden $\eta(x, v)$ (für $(x, v) \in \mathcal{T}$) gehörige Orthonormalbein sei gegeben durch den Lotfußpunkt $x - \langle x, v \rangle \cdot v$, den Richtungsvektor $e_1 := v$ sowie eine Orthonormalbasis e_2, \dots, e_d des Orthonormalraums von $\eta(x, v)$. Dann gilt für diejenigen Maurer-Cartan-Formen, die hier von Interesse sind (es sei $j \in \{2, \dots, d\}$; beachte: Die partiellen Ableitungen der Lotfußpunktparametrisierung sind u.a. dem Beweis von Lemma 8.15 zu entnehmen)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \langle d(x - \langle x, v \rangle \cdot v), e_1 \rangle = - \sum_{k=1}^{2d-3} \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_k} \rangle du_k, \\ \omega_{1,j} &= - \langle de_1, e_j \rangle = - \sum_{k=1}^{2d-3} \langle \frac{\partial v}{\partial u_k}, e_j \rangle du_k \text{ sowie} \\ \omega_j &= \langle d(x - \langle x, v \rangle \cdot v), e_j \rangle = \sum_{k=1}^{2d-3} \langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, e_j \rangle du_k + \langle x, v \rangle \omega_{1,j}. \end{aligned}$$

Für $k \in \{1, \dots, d\}$ gilt dann (setze $\omega := du_1 \wedge \dots \wedge du_{2d-3}$)

$$\begin{aligned}
& (-1)^d (\omega_1 \wedge \widehat{\dots} \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \widehat{\dots} \wedge \omega_{1,d}) \\
&= - \left| \begin{array}{cccccc} \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_1} \rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \widehat{\dots} & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, e_d \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_2 \rangle & \widehat{\dots} & \langle \frac{\partial v}{\partial u_1}, e_d \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x, \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}} \rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-3}}, e_2 \rangle & \widehat{\dots} & \langle \frac{\partial x}{\partial u_{2d-3}}, e_d \rangle & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}}, e_2 \rangle & \widehat{\dots} & \langle \frac{\partial v}{\partial u_{2d-3}}, e_d \rangle \end{array} \right| \omega \\
&= - \left(\det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \det \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\dots}, \begin{pmatrix} e_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \widehat{\dots}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \omega \\
&= - \langle x, e_k \rangle \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \omega.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich durch Summieren über k

$$\begin{aligned}
& (-1)^d \sum_{k=2}^d (\omega_1 \wedge \widehat{\dots} \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \widehat{\dots} \wedge \omega_{1,d}) \\
&= - \sum_{k=2}^d \langle x, e_k \rangle \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \omega \\
&= - \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^d \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \omega.
\end{aligned}$$

Da e_1, \dots, e_d eine Orthonormalbasis ist, folgt weiter (beachte: Es gilt $e_1 = v$)

$$= - \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \omega,$$

mit der Orthogonalbasis N_1, N_2, N_3 des Normalenraums von \mathcal{T}_M aus Lemma 8.8 lässt sich dies weiter umformen zu

$$= - \langle x, N(x) \rangle \kappa_n(x, v) \frac{1}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M(x,v)}}} \det \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial u_{2d-3}}, N_1, N_2, N_3 \right) \right) \omega.$$

Die Behauptung folgt nun durch Integration (vergleiche auch Lemma 8.9). \odot

8.47 Korollar. Die Aussage von Satz 8.37 ist richtig.

Beweis. Es seien die Geraden $\eta \in \mathcal{E}_{1,d}$ gegeben durch ihren Richtungsvektor $e_1 \in \mathbb{S}_{d-1}$, einen Punkt p auf η sowie eine Orthonormalbasis e_2, \dots, e_d des Orthogonalraums von η . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{D}) &= \int_{\eta \in \mathcal{D}} d\eta = \int_{\eta \in \mathcal{D}} (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,d}) \\
&= \frac{1}{2} \int_{(p, e_1) \in \mathcal{D}_G} (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,d}).
\end{aligned}$$

Anwenden des Satzes von Stokes liefert nun (vgl. [13, chapter XVII, §3, Theorem 3.3]; beachte auch Lemma 8.42 sowie Korollar 8.45)

$$= \frac{1}{2} \frac{(-1)^d}{d-1} \int_{(p, e_1) \in \partial \mathcal{D}_G} \sum_{k=2}^d (\omega_1 \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot} \wedge \omega_d) \wedge (\omega_{1,2} \wedge \widehat{\cdot \cdot \cdot} \wedge \omega_{1,d}).$$

Der Rand des Gebietes \mathcal{D}_G ist durch den Satz von Stokes orientiert, daher folgt nach Definition der Teilmengen \mathcal{T}^+ und \mathcal{T}^- (vergleiche Definition 8.31; beachte auch Korollar 8.16), und mit Lemma 8.46

$$= \frac{1}{2(d-1)} \left(\int_{(p,V) \in \mathcal{T}^+} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} - \int_{(p,V) \in \mathcal{T}^-} \langle p, -N(p) \rangle \kappa_n(p, V) \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}(p, V)}} \right). \quad \odot$$

8.2.4 Beweis der ortsunabhängigen Aussage

8.48 Korollar. *Es gilt*

$$\begin{aligned} & 2(d-1)(2d-4)! \mu(\mathcal{D}) \\ &= (2d-4)! \left(\int_{(p,V) \in \mathcal{T}^+} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} - \int_{(p,V) \in \mathcal{T}^-} \frac{dO}{\sqrt{K_{\mathcal{T}_M}}} \right) \\ & \quad - \int_{(p,V) \in \partial \mathcal{T}^+} \langle p, V \rangle \det \left(\left(\frac{dp}{dV}, \dots, \frac{dp}{dV}, \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \right) \right) \\ & \quad + \int_{(p,V) \in \partial \mathcal{T}^-} \langle p, V \rangle \det \left(\left(\frac{dp}{dV}, \dots, \frac{dp}{dV}, \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 8.47 mit Hilfe von Satz 8.28. \odot

8.49 Lemma. *Es sei $Z \in \mathcal{Z}$. Weiterhin sei $y^{(i)} := (x^{(i)}, v): U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ (für geeignetes offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$) eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge von $\mathcal{B}_Z^{(i)}$, so dass zusammengehörige Punkte von $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ denselben Parameter haben, und $n^{(i)}: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, $u \mapsto N(x^{(i)})$ die zugehörige Parametrisierung der Normaleneinheitsvektoren. Für $i \in \{1, 2\}$ setze*

$$B^{(i)} := \left(\frac{\partial y^{(i)}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y^{(i)}}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n^{(i)} \end{pmatrix} \right).$$

Dann gilt $\det(B^{(1)}) = \det(B^{(2)})$.

Beweis. Wegen Lemma 8.25 kann statt $y^{(1)}$ bzw. $y^{(2)}$ oBdA die zugehörige Parametrisierung $z: U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ der erweiterten Pedalfläche betrachtet werden (setze in Lemma 8.25 $f := -\langle y^{(i)}, v \rangle$ und $e_d := n^{(i)}$ für $i \in \{1, 2\}$; vergleiche auch den Beweis von Lemma 8.15). Definiere noch die Matrix $G = (g_{i,j})_{i,j}$ durch

$$G := \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right)^\top \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Für $i \in \{1, 2\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ \langle x^{(1)}, v \rangle \cdot n^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(2)} \\ \langle x^{(2)}, v \rangle \cdot n^{(2)} \end{pmatrix}\right)^\top \cdot B^{(i)}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,2d-3} & * & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{2d-3,1} & \cdots & g_{2d-3,2d-3} & * & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \langle n^{(1)}, n^{(i)} \rangle & 0 & \langle x^{(1)}, v \rangle \langle n^{(1)}, n^{(i)} \rangle \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle n^{(2)}, n^{(i)} \rangle & 0 & \langle x^{(2)}, v \rangle \langle n^{(2)}, n^{(i)} \rangle \end{pmatrix}\right) \\ &= \det(G) \langle n^{(1)}, n^{(i)} \rangle \langle n^{(2)}, n^{(i)} \rangle \langle x^{(2)} - x^{(1)}, v \rangle. \end{aligned}$$

Aufgrund der Vereinbarung über die Orientierung von v im Beweis von Lemma 8.26, lässt sich dies weiter umformen zu

$$= \det(G) \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle \|x^{(2)} - x^{(1)}\|,$$

die Determinante der Matrix $B^{(i)}$ lässt sich also darstellen als

$$\frac{\det(G) \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle \|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{\det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ \langle x^{(1)}, v \rangle \cdot n^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n^{(2)} \\ \langle x^{(2)}, v \rangle \cdot n^{(2)} \end{pmatrix}\right)} ,$$

ist also insbesondere unabhängig von der Wahl von $i \in \{1, 2\}$. \odot

8.50 Lemma. *Es liege wieder die gleiche Situation wie in Lemma 8.49 vor. Weiterhin sei $z: U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ die Parametrisierung der „zwischen“ $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ liegenden Fläche \bar{T}_Z so wie im Beweis von Lemma 8.26, und es sei $G_z = (g_{i,j}^{(z)})_{i,j}$ die zur ersten Fundamentalform bezüglich dieser Parametrisierung gehörige Matrix.*

Dann gilt

$$|\det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n^{(1)} \end{pmatrix}\right)\right)| = f_{\bar{T}} \sqrt{\det(G_z)}.$$

Beweis. Definiere zunächst die Matrix A durch (es sei $x := x^{(1)} + \mu \cdot (x^{(2)} - x^{(1)})$); vergleiche Lemma 8.26)

$$A := \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \bar{N}_2(x, v), \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \bar{N}_3(x, v)\right).$$

Mit der Matrix A gilt dann

$$\det(A^\top \cdot \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n^{(1)} \end{pmatrix}\right)\right))$$

$$\begin{aligned}
&= \det \left(\begin{array}{cccccc} g_{1,1}^{(z)} & \cdots & g_{1,2d-3}^{(z)} & * & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{2d-3,1}^{(z)} & \cdots & g_{2d-3,2d-3}^{(z)} & * & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -\mu \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle & 0 & -(1-\mu) \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \end{array} \right) \\
&= \det(G_z) (2\mu - 1) \langle n^{(1)}, n^{(2)} \rangle \|x^{(2)} - x^{(1)}\|.
\end{aligned}$$

Andererseits ergibt das (entsprechende) Ausrechnen von $\det(A^\top \cdot A)$ (also $(\det(A))^2$) gerade das Produkt von $\det(G_z)$ mit dem Quadrat des Nenners von $f_{\bar{T}}$, und somit folgt die Aussage. \odot

8.51 Lemma. *Es sei $Z \in \mathcal{Z}$. Weiterhin setze $\bar{\sigma}_Z := s_Z^{(j)} \sigma_Z^{(j)}$ (vgl. Konstruktion 8.34; die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl von $j \in \{1, 2\}$ wurde in Lemma 8.40 gezeigt).*

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 \sigma_Z^{(j)} \int_{(p,V) \in \mathcal{B}_Z^{(j)}} \langle p, V \rangle \det \left(\left(\frac{dp}{dV} \right), \dots, \left(\frac{dp}{dV} \right), \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \right) \\
&= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \int_{\bar{T}_Z} f_{\bar{T}} dO.
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $j \in \{1, 2\}$. Dann sei $y^{(j)} := (x^{(j)}, v): U \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ (für geeignetes $U \subseteq \mathbb{R}^{2d-4}$) eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge von $\mathcal{B}_Z^{(j)}$, so dass zusammengehörige Punkte von $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ denselben Parameter haben, insbesondere gilt also $\eta(x^{(1)}, v) = \eta(x^{(2)}, v)$. Weiterhin sei $n^{(j)}: U \rightarrow \mathbb{S}_{d-1}$, $u \mapsto N(x^{(j)})$ die zugehörige Parametrisierung der Normaleneinheitsvektoren. Falls $d \geq 3$ ist, seien diese Parametrisierungen oBdA so gewählt, dass $\det(B^{(j)}) > 0$ erfüllt ist (vergleiche Lemma 8.49 für die Definition der Matrix $B^{(j)}$; wegen Lemma 8.49 ist diese Forderung auch simultan für $j \in \{1, 2\}$ erfüllbar; das Parametergebiet U sei ferner oBdA so klein gewählt, dass kein Vorzeichenwechsel dieser Determinante auftritt; beachte: Für $d = 2$ gilt $\det(B^{(j)}) = +1$). Schließlich sei v oBdA so orientiert, dass $x^{(1)} + \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \cdot v = x^{(2)}$ gilt (dies lässt sich durch eventuelles Vertauschen der Rollen von $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ erreichen).

Nach Definition von $B^{(j)}$ (für $j \in \{1, 2\}$; vergleiche Lemma 8.49) gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 \sigma_Z^{(j)} \int_{(p,V) \in y^{(j)}(U)} \langle p, V \rangle \det \left(\left(\frac{dp}{dV} \right), \dots, \left(\frac{dp}{dV} \right), \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \right) \\
&= (2d-4)! \sum_{j=1}^2 \sigma_Z^{(j)} \int_{y^{(j)}(U)} \langle x^{(j)}, v \rangle \det(B^{(j)}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{2d-4}.
\end{aligned}$$

Die Orientierung von $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ ist durch den Satz von Stokes vorgegeben (vergleiche Korollar 8.48 sowie Satz 8.28). Nach Definition von $s_Z^{(j)}$ lässt sich dies daher weiter

umformen zu (beachte, dass bei der Definition von $s_Z^{(j)}$ in Konstruktion 8.34 die Orientierung des Verbindungsvektors der Doppelberührungspunkte jeweils in Bezug auf den jeweils anderen Punkt gewählt wurde, während hier der Vektor v unabhängig von den beiden Berührungspunkten gewählt worden ist)

$$= (2d-4)! \sum_{j=1}^2 ((-1)^j s_Z^{(j)}) \sigma_Z^{(j)} \int_U \langle x^{(j)}, v \rangle \det(B^{(j)}) du_1 \dots du_{2d-4}.$$

Nach Definition von $\bar{\sigma}_Z$ und mit Lemma 8.49 folgt weiter

$$\begin{aligned} &= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \int_U \langle x^{(2)} - x^{(1)}, v \rangle \det(B^{(1)}) du_1 \dots du_{2d-4} \\ &= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \int_U \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \det(B^{(1)}) du_1 \dots du_{2d-4} \\ &= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \int_U \int_{[0,1]} \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \det(B^{(1)}) d\mu du_1 \dots du_{2d-4}. \end{aligned}$$

Es sei nun eine Parametrisierung $z: U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}_d \times \mathbb{S}_{d-1}$ der „zwischen“ $\mathcal{B}_Z^{(1)}$ und $\mathcal{B}_Z^{(2)}$ liegenden Fläche \bar{T}_Z gegeben wie im Beweis von Lemma 8.26. Dann lässt sich dies weiter umformen zu (unter Anwendung von Lemma 8.25 mit $f := \mu \|x^{(2)} - x^{(1)}\|$ und $e_d := n^{(1)}$)

$$\begin{aligned} &= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \\ &\quad \int_U \int_{[0,1]} \det\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_{2d-4}}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n^{(1)} \end{pmatrix}\right)\right) d\mu du_1 \dots du_{2d-4}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 8.50 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \int_U \int_{[0,1]} f_{\bar{T}} \sqrt{\det(G_z)} d\mu du_1 \dots du_{2d-4} \\ &= (2d-4)! \bar{\sigma}_Z \int_{z(U)} f_{\bar{T}} dO. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit dann die Aussage (beachte: Die Funktion $f_{\bar{T}}$ ist genau dann Null, wenn $\det(B^{(1)}) = 0$ gilt). \odot

8.52 Folgerung. Die Aussage von Satz 8.38 ist richtig

Beweis. Dies folgt nun unmittelbar aus Korollar 8.48 mit Lemma 8.51. \odot

Symbolverzeichnis

Die Liste der Symbole ist in allgemein verwendete Symbole, im Euklidischen, Sphärischen bzw. Hyperbolischen verwendete Symbole sowie die Bezeichnungen für Flächen im Euklidischen bzw. Nichteuklidischen unterteilt. Bei Flächen, die sowohl in „+“- als auch in „-“-Varianten auftreten, ist jeweils nur die erstere in das Symbolverzeichnis aufgenommen, die andere wird stets in derselben Definition bzw. Konstruktion definiert. Die angegebenen Seitenzahlen verweisen jeweils auf diejenige Seite, auf der das Symbol definiert ist.

Allgemeine Symbole		$\eta(p, V)$	Gerade durch den Punkt p mit Richtung V , 23
$\cdot \times \cdot$	Vektorprodukt		
j_1	Kosinus-Funktion, 19		
j_2	Sinus-Funktion, 19		
$\ \cdot\ $	Norm		
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt		
$c_{j,k}$	Integrationskonstanten, 20		
$c_{j,k,l}$	Integrationskonstanten, 21		
$\bar{c}_{i,j,d}^{(K)}(\varepsilon)$	Integrationskonstanten, 51		
$\check{c}_{j,d}^{(K)}(\varepsilon)$	Integrationskonstanten, 52		
$\bar{\bar{c}}_{j,d}^{(K)}$	Konstanten ($K > 0$), 168		
Symbole im Euklidischen			
\mathbb{E}_d	Euklidischer Raum, 22		
$\mathcal{E}_{d-1,d}$	Menge aller Hyperebenen, 22		
$\mathcal{L}_{d-1,d}$	Menge aller Ursprungshyperebenen, 22		
$\xi(p, N)$	Hyperebene mit Normalenvektor N im Punkt p , 22		
$\mathcal{S}_{d,r}$	Menge aller Sphären vom Radius r , 23		
$\zeta_r(p)$	Sphäre mit Mittelpunkt p und Radius r , 23		
$\mathcal{E}_{1,d}$	Menge aller Geraden, 23		
$\mathcal{L}_{1,d}$	Menge aller Ursprungsgeraden, 23		
		$\mathbb{F}_{d,K}$	Sphärischer Raum, 23
		$\mathbb{F}_{d,K}^1$	Einheitssphäre, 23
		\mathbb{S}_d	Einheitssphäre, 23
		$\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$	Menge aller Hyperebenen, 23
		$\mathcal{L}_{d-1,d}^{(K)}$	Menge aller Ursprungshyperebenen, 23
		$\xi(p, N)$	Hyperebene mit Normalenvektor N im Punkt p , 23
		$\mathcal{S}_{d,K,r}$	Menge aller Sphären vom Radius r , 23
		$\zeta_r(p)$	Sphäre mit Mittelpunkt p und Radius r , 23
		Symbole im Hyperbolischen	
		$\mathbb{F}_{d,K}$	Hyperbolischer Raum, 24
		$\mathbb{F}_{d,K}^1$	Einheitssphäre, 24
		$\mathbb{F}_{d,K}^0$	Selbstorthogonale Vektoren, 24
		$\mathcal{E}_{d-1,d}^{(K)}$	Menge aller Hyperebenen, 24
		$\mathcal{L}_{d-1,d}^{(K)}$	Menge aller Ursprungshyperebenen, 24
		$\xi(p, N)$	Hyperebene mit Normalenvektor N im Punkt p , 24
		$\mathcal{S}_{d,K,r}$	Menge aller Sphären vom

- $\zeta_r(p)$ Radius r , **24**
 Sphäre mit Mittelpunkt p und Radius r , **25**
 $\mathcal{H}_d^{(K)}$ Menge aller Horosphären, **25**
 $\zeta_\infty(p, b)$ Horosphäre in p mit b als Normalenvektor der zugehörigen Hyperebene, **25**
- Flächen im Euklidischen**
- \mathcal{N}_M Normalenbündel, **27**
 $M_{\mathcal{N}, \varepsilon}$ Parallelfäche im Abstand ε , **30**
 M_r Parallelfäche im Abstand ε , **30**
 $\tilde{\mathcal{N}}_M$ „Gutartige“ Punkte, **39**
 $\check{S}_{\mathcal{N}, j}$ Normalenfokalfäche, **39**
 $\bar{S}_{\mathcal{B}, r}$ Seitenfläche, **42**
 $S_{\mathcal{N}, r}$ Grenzfläche des Gebietes zwischen Fläche und Parallelfäche, **45**
 $M_{(0)}$ Punkte mit verschwindender Gauß-Krümmung, **71**
 M^+ Teilfläche von M aus Hyperebenenformel, **72**
 \bar{M}^+ Hüllfläche aus Hyperebenenformel, **73**
 $\mathcal{N}_{(0)}$ Punkte verschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung, **86**
 \mathcal{N}^+ Teilfläche von \mathcal{N}_M aus Hyperebenenformel, **87**
 $\bar{\mathcal{N}}^+$ Hüllfläche aus Hyperebenenformel, **88**
 \mathcal{N}_r^+ Teilfläche von \mathcal{N}_M aus Sphärenformel, **109**
 \hat{M}_r Fläche aus Sphärenformel, **109**
 $\hat{M}_{k, r}$ Von k -fach tangentialen Sphären eingehüllte Fläche, **110**
 \check{M}_r Hüllfläche aus Sphärenformel, **110**
 \mathring{M}_r Fläche aus Sphärenformel, **111**
 \mathcal{N}_r^{++} Hilfsfläche (d gerade), **118**
 \mathcal{N}_r^{+-} Hilfsfläche (d ungerade), **119**
 \mathcal{B}_\pm^+ „Rand“ von $\partial\mathcal{N}^+$, **121**
 $\bar{\mathcal{N}}_k^+$ Hüllfläche k -fach tangentialer Hyperebenen, **121**
 $\bar{\mathcal{N}}^+$ Vereinigungsfläche der $\bar{\mathcal{N}}_k^+$, **122**
- \bar{M}_r Hilfsfläche (d gerade), **125**
 \bar{M}_r Hilfsfläche (d ungerade), **129**
 $S_{k, r}$ Hilfsflächen, **131**
 S_r Vereinigungsfläche der $S_{k, r}$, **133**
 \mathring{M}_r Hilfsfläche, **133**
 \mathring{M} Hilfsfläche (d ungerade), **134**
 B_J° konvexes Band bezüglich Hyperebenen, **192**
 B_{J_1, J_2}^\times gekreuztes Band bezüglich Hyperebenen, **192**
 B_J° konvexes Band bezüglich Sphären, **197**
 $B_J^{\succ, +}$ weiteres Band bezüglich Sphären, **197**
 B_{J_1, J_2}^\times gekreuztes Band bezüglich Sphären, **198**
 \mathcal{T}_M Tangentialeinheitsbündel, **205**
 \mathcal{T}^+ Teilfläche von \mathcal{T}_M aus Geradenformel, **227**
 $\bar{\mathcal{T}}^+$ Zwischenfläche aus Geradenformel, **228**
- Flächen im Nichteuklidischen**
- \mathcal{N}_M Normalenbündel, **49**
 $M_{\mathcal{N}, \varepsilon}$ Parallelfäche im Abstand ε , **50**
 M_r Parallelfäche im Abstand ε , **50**
 $\tilde{\mathcal{N}}_M$ „Gutartige“ Punkte, **54**
 $\check{S}_{\mathcal{N}, j}$ Normalenfokalfäche, **54**
 $\bar{S}_{\mathcal{B}, r}$ Seitenfläche, **55**
 $S_{\mathcal{N}, r}$ Grenzfläche des Gebietes zwischen Fläche und Parallelfäche, **56**
 $M_{(0)}$ Punkte mit verschwindender Gauß-Krümmung, **146**
 M^+ Teilfläche von M aus Hyperebenenformel, **147**
 $\mathcal{N}_{(0)}$ Punkte verschwindender Lipschitz-Killing-Krümmung, **150**
 \mathcal{N}^+ Teilfläche von \mathcal{N}_M aus Hyperebenenformel, **151**
 \mathcal{N}_r^+ Teilfläche von \mathcal{N}_M aus Sphärenformel, **157**
 \hat{M}_r Fläche aus Sphärenformel, **157**

$\check{M}_{k,r}$	Von k -fach tangentialen Sphären eingehüllte Fläche, 157	\mathcal{N}_∞^+	Teilfläche von \mathcal{N}_M aus Horosphärenformel, 177
\check{M}_r	Hüllfläche aus Sphärenformel, 157	$\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}$	Fläche aus Horosphärenformel, 178
\check{M}_r	Fläche aus Sphärenformel, 157	$\bar{\mathcal{N}}_\infty^+$	Vereinigungsfläche der $\bar{\mathcal{N}}_{k,\infty}^+$ ($K < 0$), 179
$\bar{\mathcal{N}}_k^+$	Fläche aus Hyperebenenformel ($K > 0$), 168	\mathcal{N}_r^{++}	Hilfsfläche ($K < 0$), 180
\check{M}	Fläche aus Hyperebenenformel (d ungerade, $K > 0$), 168	\bar{M}_r	Hilfsfläche ($K < 0$), 183
\mathcal{N}_r^{++}	Hilfsfläche (d gerade, $K > 0$), 169	$S_{k,r}$	Hilfsflächen ($K < 0$), 185
\mathcal{N}_r^{++}	Hilfsfläche (d ungerade, $K > 0$), 170	S_r	Vereinigungsfläche der $S_{k,r}$ ($K < 0$), 185
\bar{M}_r	Hilfsfläche ($K > 0$), 172	\check{M}_r	Hilfsfläche ($K < 0$), 185
$S_{k,r}$	Hilfsflächen ($K > 0$), 173	\check{M}	Hilfsfläche ($K < 0$), 185
S_r	Vereinigungsfläche der $S_{k,r}$ ($K > 0$), 173	B_J°	gekreuztes Band bezüglich Hyperebenen ($K > 0$), 201
\check{M}_r	Hilfsfläche ($K > 0$), 173	B_{J_1, J_2}^\times	gekreuztes Band bezüglich Hyperebenen ($K > 0$), 201

Index

Alle fett hervorgehobenen Seitenzahlen sind Referenzen auf die Definition des jeweiligen Begriffs. Demgegenüber geben normal gedruckte Seitenzahlen die Seiten der Verwendung des jeweiligen Begriffs in Aussagen und Konstruktionen wieder.

— A —

Abstand, **22–24**
antipodal, **23**

— B —

Bündelkoordinaten
~ des Normalenbündels, **27, 49, 50**
Band
~ bzgl. Hyperebenen
~ im Euklidischen, 192, **192**
~ im Nichteuklidischen, **201**
~ bzgl. Sphären
~ im Euklidischen, **196, 197**
~ im Nichteuklidischen, **203**

Berührfläche
~ bzgl. Geraden
~ im Euklidischen, 215–217
~ bzgl. Horosphären, 162–165
~ bzgl. Hyperebenen
~ bei Hyperflächen, 65, 143, 144
~ im Euklidischen, 62–65
~ im Nichteuklidischen, 141–144
~ bzgl. Sphären
~ im Euklidischen, 105–107
~ im Nichteuklidischen, 153–155

— D —

Dichte
~ von Horosphären, 186
~ von Hyperebenen
~ im Euklidischen, 80

\approx im Nichteuklidischen, 149

— E —

Euklidisch
~e Norm, **22**
~er Abstand, **22**
~er Raum, **22**
~es Skalarprodukt, **22**
~es Vektorprodukt, **22**

— G —

Gamma-Funktion, **20**
Gauß-Krümmung, **28, 34, 53**
Gerade, **23**
~n im Euklidischen
Pedalpunkt von \approx , 209
Schnittverhalten von \approx , 226, 227, 229

— H —

Hauptkrümmungen, **28, 49**
~ der Parallelfäche, 30, 50
Hauptkrümmungsrichtungen, **28, 49**
~ der Parallelfäche, 30, 50
Horosphäre, **25**
~ndichte, 186
Pedalpunkt von \sim n, 158, 159
Schnittverhalten von \sim n, 176–183
Hüllfläche
~ bzgl. Horosphären, 165, 166, 178, 181, 185
~ bzgl. Hyperebenen

- \approx bei Hyperflächen, 66, 67
 \approx bei Kurven, 67–70
 \approx im Euklidischen, 65–70, 72, 87, 121, 122, 131
 \approx im Nichteuklidischen, 144
 \approx im Sphärischen, 168, 171
 \sim bzgl. Sphären
 \approx im Euklidischen, 107, 109–111
 \approx im Nichteuklidischen, 155, 157
- Hyperbolisch
 \sim er Abstand, **24**
 \sim er Raum, **24**, 145
 \sim es Skalarprodukt, 24
 \sim es Vektorprodukt, 24
- Hyperebene
 \sim n im Euklidischen, **22**
 Pedalpunkt von \approx , 60
 Schnittverhalten von \approx , 71–74, 86–89, 96, 97, 99, 113, 114, 117–124, 192, 193
 \sim n im Hyperbolischen, **24**
 \sim n im Nichteuklidischen
 Pedalpunkt von \approx , 137, 138
 Schnittverhalten von \approx , 146, 147, 150, 151, 201
 \sim n im Sphärischen, **23**
 Schnittverhalten von \approx , 167–172, 202
 \sim ndichte
 \approx im Euklidischen, 80
 \approx im Nichteuklidischen, 149
- I —
- Integralformel
 Verallg. \sim von Minkowski, 222
 \sim von Minkowski, 82, 225
- K —
- Kosinus, **19**
 Krümmung
 Gauß- \sim , **28**
 Lipschitz-Killing- \sim , **28**
 Mittlere \sim , **28**, **49**
- L —
- Lipschitz-Killing-Krümmung, **28**
 Lorentz
 \sim -Raum, **23**
 \sim -Skalarprodukt, **23**
- M —
- Minkowski
 Integralformel von \sim , 82, 225
 \sim -Raum, **23**
 Vektorprodukt im \sim -Raum, **24**
 Verallg. Integralformel von \sim , 222
- Mittlere Krümmung, **28**, **49**
 \sim en der Hüllfläche bei Kurven, 70
 \sim en der Parallellfläche, 32, 33, 51, 52
- N —
- Norm, **22**
 Normaleneinheitsbündel
 \sim der Parallellfläche, 30
 \sim im Euklidischen, 27, **27**, 28, 29
 \sim im Nichteuklidischen, 49, **49**, 50
 \sim von Hüllflächen
 \approx bzgl. Horosphären, 166
 \approx bzgl. Hyperebenen, 66, 144
 \approx bzgl. Sphären, 107, 155
- Normalenfokalfläche
 \sim im Euklidischen, 38, 39, **39**, 40, 41, 47
 \sim im Nichteuklidischen, 54, **54**, 57
- P —
- Parallellfläche
 Hauptkrümmungen der \sim , 30
 \sim im Euklidischen, 30, **30**, 31–34, 39, 41, 45, 122, 125, 129, 131, 133
 \sim im Hyperbolischen, 181, 183, 185
 \sim im Nichteuklidischen, 50, **50**, 51–54, 56, 154
 \sim im Sphärischen, 171
 Mittlere Krümmungen der \sim , 32, 33, 51, 52
 Normaleneinheitsbündel der \sim , 30
- Parallelvolumen

- ~ im Euklidischen, 34–36, 38, 48, 49
- ~ im Nichteuklidischen, 52, 53, 58
- Pedalfläche
 - ~ bzgl. Geraden
 - \approx im Euklidischen, 209, 210, 212, 213
 - ~ bzgl. Horosphären, 158, 159, **159**, 161
 - ~ bzgl. Hyperebenen
 - \approx im Euklidischen, 59, 60, **60**, 61
 - \approx im Nichteuklidischen, 137–139
- Pedalpunkt
 - ~ bzgl. Horosphären, 158, 159
 - ~ bzgl. Hyperebenen
 - \approx im Euklidischen, **60**
 - \approx im Nichteuklidischen, **138**
- S —
- Seitenfläche
 - ~ im Euklidischen, 42, **42**, 43, 45, 46, 109, 125, 129, 131
 - ~ im Hyperbolischen, 183, 185
 - ~ im Nichteuklidischen, 55, **55**, 56, 157
- Sinus, **19**
- Skalarprodukt, **22**, 23, **23**, 24
- Sphäre, **23**, **24**
 - ~n im Euklidischen
 - Radius gegen unendlich, 113, 114, 116–121, 124, 135, 136
 - Schnittverhalten von \approx , 108–111, 113, 114, 117–121, 124, 196, 198, 199
 - ~n im Hyperbolischen
 - Radius gegen unendlich, 176, 179–181, 183, 186, 188, 189
 - Schnittverhalten von \approx , 176, 179–181, 183
 - ~n im Nichteuklidischen
 - Schnittverhalten von \approx , 156, 157, 202, 203
 - ~n im Sphärischen
 - Radius gegen unendlich, 167–172, 174, 175
 - Schnittverhalten von \approx , 167–172
- Sphärisch
 - ~er Abstand, **23**
 - ~er Raum, **23**, 145
 - ~es Skalarprodukt, 23
 - ~es Vektorprodukt, 23
- Steiner-Formel
 - ~ im Euklidischen, 34
 - ~ im Nichteuklidischen, 52
- Sylvester, 192
- T —
- Tangentialeinheitsbündel, **205**
- V —
- Vektorprodukt, **22**, 23, 24
 - ~ im Minkowski-Raum, **24**
- Verallg. Integralformel von Minkowski, 222
- W —
- Weingartenabbildung, **28**
- Windungszahl
 - ~ im Euklidischen, 44, **45**, 46, 48
 - ~ im Nichteuklidischen, 56, **57**, 58
- Z —
- Zwischenflächen
 - ~ bzgl. Geraden
 - \approx im Euklidischen, 219, 220, 222, 227

Literaturverzeichnis

- [1] AMBARCUMJAN, RUBEN V.: *Intersections of complex curves and random straight lines*. Soviet Math. Dokl., 10(4):865–868, 1969.
- [2] BERGER, M. and B. GOSTIAUX: *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*. Number 115 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [3] BRONSTEIN, I. N., K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 3. Auflage, 1997.
- [4] ELSTRODT, JÜRGEN: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch: Grundwissen Mathematik. Springer Verlag, 1996.
- [5] GAUGER, ANNETTE: *Das Maß von Kreisen, die eine feste Kurve in k Punkten schneiden*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 2001.
- [6] GEORGIU, CHR., TH. HASANIS, and D. KOUTROFIOTIS: *On the Caustic of a Convex Mirror*. Geometriae Dedicata, 28:153–169, 1988.
- [7] HIRSCH, MORRIS W.: *Differential Topology*. Number 33 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 5. edition, 1994.
- [8] HSIUNG, CHUAN-CHIH: *Some Integral Formulas for closed Hypersurfaces*. Math. Scand., 2:286–294, 1954.
- [9] KOHLMANN, PETER: *Curvature Measures and Steiner Formulae in Space Forms*. Geometriae Dedicata, 40:191–211, 1991.
- [10] KOHLMANN, PETER: *Minkowski Integral Formulas for Compact Convex Bodies in Standard Space Forms*. Mathematische Nachrichten, 166:217–228, 1994.
- [11] KÜHNEL, WOLFGANG: *Differentialgeometrie, Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. vieweg studium - Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2. Auflage, 2003.
- [12] KUPPE, MARTIN DANIEL JOACHIM: *Integralgeometrie Whitney-stratifizierbarer Mengen*. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1999.

- [13] LANG, SERGE: *Fundamentals of Differential Geometry*. Number 191 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [14] LEICHTWEISS, KURT: *Convexity and differential geometry*. In GRUBER, P.M. and J.M. WILLS (editors): *Handbook of Convex Geometry*, volume II, chapter 4.1, pages 1045–1080. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
- [15] PORTEOUS, IAN R.: *Geometric Differentiation for the intelligence of curves and surfaces*. Cambridge University Press, 1994.
- [16] RATCLIFFE, JOHN G.: *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1994.
- [17] REN, DE-LIN: *Topics in Integral Geometry*. Number 19 in *Series in Pure Mathematics*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [18] SANTALÓ SORS, LUIS ANTONIO: *On Parallel Hypersurfaces in the Elliptic and Hyperbolic n -dimensional Space*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1:325–330, 1950.
- [19] SANTALÓ SORS, LUIS ANTONIO: *Horocycles and Convex Sets in Hyperbolic Plane*. Archiv der Mathematik, 18:529–533, 1967.
- [20] SANTALÓ SORS, LUIS ANTONIO: *Horospheres and Convex Bodies in Hyperbolic Space*. Proceedings of the American Mathematical Society, 19:390–395, 1968.
- [21] SANTALÓ SORS, LUIS ANTONIO: *Integral Geometry and Geometric Probability*, volume 1 of *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1976.
- [22] SCHNEIDER, ROLF und WOLFGANG WEIL: *Integralgeometrie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [23] SOWADA, ROBERT: *Das Maß von Geraden, die eine feste Kurve in k Punkten schneiden*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 2001.
- [24] SULANKE, ROLF: *Integralgeometrie ebener Kurvennetze*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 17:233–261, 1966.
- [25] SYLVESTER, JAMES JOSEPH: *On a funicular solution of Buffon's "Problem of the Needle" in its most general form*. Acta Mathematica, 14:185–205, 1890.

Lebenslauf

Persönliche Daten

geboren am 12.5.1976 in Tübingen
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch

Schule

23.6.1995 Abitur am Herzog-Christoph-Gymnasium in Beilstein

Studium

10/1995–6/2001 Diplomstudium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Stuttgart
5.9.1997 Vordiplom
7/2000–2/2001 Diplomarbeit „Das Maß von Geraden, die eine feste Kurve in k Punkten schneiden“ bei Apl. Prof. Dr. E. Teufel
12.6.2001 Diplom

Promotion

9/2001–7/2004 Promotion „Kinematische Schnittmaße bei gegebener Schnittsituation in der Integralgeometrie“ in Mathematik an der Universität Stuttgart bei Apl. Prof. Dr. E. Teufel
22.7.2004 Promotion

Tätigkeiten

10/1997–9/2004 Studentische bzw. wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Stuttgart: Betreuung von Übungsgruppen als Tutor zu mathematischen Vorlesungen in Mathematik, Informatik und Softwaretechnik sowie Luft- und Raumfahrttechnik

Sonstiges

ab 9/2001 Förderung der Promotion durch ein Landesgraduiertenstipendium des Landes Baden-Württemberg