

BETI–Gebietszerlegungsmethoden mit schnellen Randelementverfahren und Anwendungen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl.–Math. Günther Of

aus Schorndorf

Hauptberichter:	Prof. Dr. O. Steinbach
Mitberichter:	Prof. Dr.–Ing. Dr. h.c. W. L. Wendland Prof. Dr. S. Rjasanow

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Januar 2006

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation
Universität Stuttgart

2006

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation im Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 404 "Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik", Teilprojekt C10 "Gebietszerlegungsmethoden". Ich danke der Deutsche Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung dieses Projektes.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. O. Steinbach und Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. W. L. Wendland für die Förderung seit meiner Diplomarbeit und die Betreuung dieser Arbeit.

Bei Herrn Prof. Dr. S. Rjasanow bedanke ich mich für die Bereitschaft, die Aufgabe des Mitberichters zu übernehmen.

Für die Zusammenarbeit bei den BETI-Methoden und der algebraischen Mehrgittervorkonditionierung bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. U. Langer, Herrn Prof. Dr. W. Zulehner und Herrn Dipl.-Ing. D. Pusch.

Ich danke dem Johann Radon Institut (RICAM) an der Johannes Kepler Universität Linz für die Möglichkeit, am Special Radon Semester 2005 on Computational Mechanics teilnehmen zu können. Während dieser Zeit konnte ich auch diese Arbeit fertigstellen.

Für die interessanten Beispielgeometrien aus industriellen Anwendungen danke ich Herrn R. Sonnenschein (DaimlerChrysler, Dornier), Herrn PD Dr. H. Andrä (Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik), Herrn Dr.-Ing. W. Volk, Herrn Dr.-Ing. M. Wagner und Herrn S. Wittig (BMW Forschungszentrum).

Frau Prof. Dr. B. Wohlmuth danke ich für die Möglichkeit, den Cluster der Abteilung Simulation großer Systeme und des Lehrstuhl für Numerische Mathematik für Höchstleistungsrechner für meine numerischen Simulationen nutzen zu können.

Ich möchte mich auch bei meinen Kollegen am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die gemeinsamen Diskussionen bedanken, insbesondere bei Jens Breuer für die Anregungen und intensiven Diskussionen seit dem Studium.

Zum Schluß geht mein Dank an meine Eltern und meine Schwester, die mich die ganze Zeit liebevoll unterstützt haben.

Stuttgart, im Februar 2006

Günther Of

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	7
Abstract	11
Einleitung	17
1 Grundlagen	23
1.1 Randwertprobleme	23
1.2 Sobolev-Räume	27
1.3 Randintegralgleichungen	30
1.4 Variationsmethoden und symmetrische Formulierung	34
1.5 Diskretisierung der symmetrischen Formulierung	36
1.6 Approximation des Steklov-Poincaré-Operators	40
2 Behandlung von Neumann-Randwertproblemen	43
2.1 Die hypersinguläre Randintegralgleichung und der Operator entgegengesetzter Ordnung	43
2.2 Spektraläquivalenzungleichungen von D_E und V_L	45
2.3 Stabilisierung des hypersingulären Operators	49
2.4 Konstruktion der Basisvektoren der Stabilisierung	51
2.5 Wahl der Skalierungsparameter	51
2.6 Diskretisierung der Vorkonditionierung	54
2.7 Stabilisierung und Vorkonditionierung des Steklov-Poincaré-Operators	55
2.8 Numerisches Beispiel für das Neumann-Randwertproblem	56
3 Die Multipolmethode für die Laplace-Gleichung	59
3.1 Beschreibung der Multipolmethode	59
3.2 Eine Multilevel-Vorkonditionierung	66
3.3 Ein multipolbasiertes algebraisches Mehrgitterverfahren	70
3.4 Numerische Beispiele	76
4 Symmetrische Multipolmethode für die lineare Elastostatik	83
4.1 Realisierung des Einfachschichtpotentials	83
4.2 Realisierung des Doppelschichtpotentials	87

4.3	Das adjungierte Doppelschichtpotential	90
4.4	Die Bilinearform des hypersingulären Operators	91
4.5	Fehleranalyse der approximierten Operatoren	94
4.6	Numerische Beispiele	100
5	BETI-Gebietszerlegungsmethoden	105
5.1	Dirichlet-Gebietszerlegungsmethoden	105
5.2	Die Standardformulierung der BETI-Methode	110
5.3	Die Allfloating-Formulierung	113
5.4	Projektionsverfahren	116
5.5	Beschreibung von Operationen der BETI-Methode	119
5.5.1	Paralleler iterativer Löser	119
5.5.2	Realisierung der BETI-Vorkonditionierung	121
5.5.3	Realisierung der Projektion	124
5.6	Lösen der Sattelpunktprobleme	126
5.6.1	Die Behandlung von Sattelpunktproblemen	127
5.6.2	Lineare Gleichungssysteme der Gebietszerlegungsmethoden . . .	132
6	Beispiele zur BETI-Methode	137
6.1	Numerische Tests für die Potentialgleichung	139
6.1.1	Dirichlet-Randwertproblem und BPX-Vorkonditionierung	139
6.1.2	Dirichlet-Randwertproblem und Mehrgitterverfahren	145
6.1.3	Gemischtes Randwertproblem und Mehrgitterverfahren	148
6.2	Numerische Tests für die lineare Elastostatik	150
6.2.1	Dirichlet-Randwertproblem der linearen Elastostatik	151
6.2.2	Gemischtes Randwertproblem der linearen Elastostatik	153
6.2.3	Ein Beispiel mit springenden Koeffizienten	155
6.3	Abschließende Bemerkungen	158
	Literaturverzeichnis	161

Symbolverzeichnis

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Gamma)}$	$L_2(\Gamma)$ -Skalarprodukt
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$	Dualitätsprodukt
α_i	Koeffizient der Potentialgleichung für das Teilgebiet Ω_i
Γ	Rand des Gebietes Ω
γ_0	Spuroperator
γ_0^i	Spuroperator des Teilgebietes Ω_i
γ_1	Konormalenableitung, Spuroperator
γ_1^i	Spuroperator des Teilgebietes Ω_i
Γ_D	Dirichlet-Rand
Γ_i	Rand des Teilgebietes Ω_i
Γ_{ij}	Koppelrand der Teilgebiete Ω_i und Ω_j
Γ_N	Neumann-Rand
λ	Lamésche Elastizitätskonstante
$\underline{\lambda}$	Vektor der Lagrange-Multiplikatoren der BETI-Methode
μ	Lamésche Elastizitätskonstante
ν	Poisson-Zahl, Querkontraktionszahl, $\nu \in (0, 1/2)$
Ω	beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3
Ω_i	Teilgebiet
ω_i^λ	Cluster i des Levels λ
$\sigma(u)$	Spannungstensor der linearen Elastostatik
τ_ℓ	Randelement der Randdiskretisierung
A_i	Zugehörigkeitsmatrix, bildet einen globalen Vektor auf den lokalen Vektor des Gebietes Ω_i ab
B_i	Matrix der Nebenbedingungen der BETI-Methode für das Teilgebiet Ω_i
\tilde{B}_i	modifizierte Nebenbedingungsmatrix der Allfloating-Formulierung
c_1^A	Elliptizitätskonstante des Operators A
c_2^A	Beschränktheitskonstante des Operators A

C_α^{-1}	Diagonalmatrix zur Skalierung der BETI-Vorkonditionierung C_{BETI}^{-1}
C_{BETI}^{-1}	Vorkonditionierungsmatrix der BETI-Methode
\tilde{C}_D	Vorkonditionierungsmatrix des hypersingulären Operators
c_E	Konstante, $c_E := \frac{E}{1-2\nu} \frac{1-\nu}{1+\nu}$
C_i^λ	Mittelpunkt des Clusters i des Levels λ
curl_Γ	Oberflächenrotation
C_V^{-1}	Vorkonditionierungsmatrix des Einfachschichtpotentials
\underline{d}	Vektor der rechten Seite des linearen Gleichungssystems der BETI-Methode
d	Nahbereichsparameter der Multipolapproximation
D	hypersingulärer Operator
D_h	Galerkin-Matrix des hypersingulären Operators
\tilde{D}	Approximation des hypersingulären Operators
\hat{D}	modifizierter hypersingulärer Operator
DoF	Anzahl der Freiheitsgrade
E	Elastizitätsmodul, $E > 0$
$e(u)$	Verzerrungstensor der linearen Elastostatik
F	Schur-Komplement-Matrix der BETI-Methode
$\text{FF}(\ell)$	Fernfeld des Randlements τ_ℓ
$\underline{\gamma}$	Vektor der Koeffizienten der Starrkörperbewegungen für die lokalen Teilgebetslösungen
g_D	Dirichlet-Randdaten
\hat{g}_D	Fortsetzung der gegebenen Dirichlet-Daten
g_N	Neumann-Randdaten
\hat{g}_N	Fortsetzung der gegebenen Neumann-Daten
h	globale Maschenweite
H	Maximum der lokalen Teilgebetsdurchmesser
$H_{\mathcal{R}}^{-1/2}(\Gamma)$	Teilraum von $H^{-1/2}(\Gamma)$ der auf den Starrkörperbewegungen orthogonalen Funktionen
$H_L^{1/2}(\Gamma)$	Teilraum von $H^{1/2}(\Gamma)$ der bezüglich des durch das inverse Einfachschichtpotential des Laplace-Operators induzierten Skalarproduktes auf den Starrkörperbewegungen orthogonalen Funktionen
$H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma)$	Teilraum des $SH^{1/2}(\Gamma)$ der auf den Starrkörperbewegungen orthogonalen Funktionen

$H_*^{1/2}(\Gamma)$	Teilraum des $H^{1/2}(\Gamma)$ der bezüglich des durch das inverse Einfachschichtpotential induzierten Skalarproduktes auf den Starrkörperbewegungen orthogonalen Funktionen
$H^s(\Gamma)$	Sobolev-Raum auf dem Rand Γ
$H^s(\Gamma_0)$	Sobolev-Raum auf dem Teilrand Γ_0
$\tilde{H}^s(\Gamma_0)$	Sobolev-Raum der Funktionen mit Träger auf dem Teilrand Γ_0
$H_{pw}^s(\Gamma)$	Sobolev-Raum der stückweise glatten Funktionen
$H^s(\Omega)$	Sobolev-Raum im Gebiet
It	Anzahl der benötigten Iterationsschritte für die relative Genauigkeit 10^{-8}
K	Doppelschichtpotential
K_h	Galerkin-Matrix des Doppelschichtpotentials
\tilde{K}	Approximation des Doppelschichtpotentials
K'	adjungiertes Doppelschichtpotential
K'_h	Galerkin-Matrix des adjungierten Doppelschichtpotentials
\tilde{K}'	Approximation des adjungierten Doppelschichtpotentials
L	Differentialoperator
$L_2(\Omega)$	Raum aller auf dem Gebiet Ω Lebesgue-messbaren und quadratintegrierbaren Funktionen
$L_n^m(O, k)$	lokale Koeffizienten der Multipolentwicklung
$\tilde{L}_n^m(\cdot, \cdot)$	Approximation der lokalen Koeffizienten L_n^m
$\tilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell))$	Summe der lokalen Koeffizienten des Fernfeldes
M	Anzahl der Knoten des Randelementnetzes
M_h	Massematrix
$M_n^m(O, \ell)$	Multipolkoeffizienten des Randelementes τ_ℓ
$\dot{M}_n^m(\cdot, \cdot)$	Multipolkoeffizienten für die Funktion $t = 1$ für das Mehrgitterverfahren
$\check{M}_n^m(\cdot, \cdot)$	Multipolkoeffizienten für die Auswertung der Randintegraloperatoren
$\widehat{M}_n^m(O, k)$	Koeffizienten für die Initialisierung der Multipolentwicklung des Randelements τ_k
$\widetilde{M}_n^m(\cdot, \cdot)$	Approximation der Multipolkoeffizienten M_n^m
N	Anzahl der Randelemente
$\text{NF}(\ell)$	Nahfeld des Randelementes τ_ℓ
$n(x)$	äußerer Normalenvektor für $x \in \Gamma$
P	Projektion zur Eliminierung der lokalen Starrkörperbewegungen aus dem linearen Gleichungssystem der BETI-Methode

p	Entwicklungsgrad der Multipolapproximation
P_n	Legendre–Polynome
$P(\omega_j^\lambda)$	zum Cluster ω_j^λ gehörende Randelemente
Q	Term oder Operator, der je nach Randintegraloperator für die Multipolkoefizienten gewählt wird
Q	Diagonalmatrix zur Skalierung der Projektion der BETI–Methode
\mathcal{R}	Raum der Starrkörperbewegungen
r_i^λ	Radius des Clusters i des Levels λ
R_n^m	modifizierte harmonische Kugelfunktionen
S	Steklov–Poincaré–Operator
\tilde{S}	Approximation des Steklov–Poincaré–Operators
$S_h^0(\Gamma)$	Ansatzraum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen
$S_h^1(\Gamma)$	Ansatzraum der stückweise linearen und stetigen Ansatzfunktionen
S_n^m	modifizierte harmonische Kugelfunktionen
t_1	Zeit zum Erstellen des linearen Gleichungssystems
t_2	Zeit zum Lösen des linearen Gleichungssystems
t_h	Ansatzfunktion für den Fluß t oder die Randspannungen t
t_i	lokale Funktion des Flusses bzw. der Randspannungen des Teilgebietes Ω_i
\underline{t}	Vektor der Koeffizienten der Ansatzfunktion t_h
u	skalarwertiges Potential oder vektorwertige Verschiebungen
$U^*(x, y)$	Fundamentallösung des Laplace–Operators oder der Kelvinsche Lösungstensor je nach Zusammenhang
u_h	Ansatzfunktion für das Potential u oder die Verschiebungen u
u_i	lokale Funktion des Potentials bzw. der Verschiebungen des Teilgebietes Ω_i
\underline{u}	Vektor der Koeffizienten der Ansatzfunktion u_h
V	Einfachschichtpotential
\tilde{V}	Approximation des Einfachschichtpotentials
V_h	Galerkin–Matrix des Einfachschichtpotentials
v_k	Basisvektoren der Starrkörperbewegungen
\tilde{v}_k	bezüglich des inversen Einfachschichtpotentials orthogonalisierte Basisvektoren der Starrkörperbewegungen
w_{eq}	natürliche Dichte
\tilde{w}_k	$\tilde{w}_k := V^{-1}\tilde{v}_k$

Abstract

The challenges for computer simulations are increasingly changing since more and more parts of the product design are shifted to computer simulation. In many cases, the efficient solution of a single model problem is not sufficient anymore, but multifield problems have to be considered. For example, materials with different material parameters or different model problems for the single subdomains have to be treated.

Domain decomposition methods offer a comfortable treatment of such coupled problems and provide efficient tools for the numerical simulation. Different model problems for each subdomain can be treated, as for example the heat transfer and the cooling of electrically driven devices such as transformers [17], the sound radiation from vibrating structures [36], the fluid structure interaction and the magnetomechanics. The use of different model problems is not always related to hard physical boundaries. It can also be motivated by an effort to reduce the numerical complexity of the simulation, which may be very large in industrial and engineering problems. Therefore one might use model problems, which are easier to solve, in some parts of the domain and still achieve a sufficient accuracy in the simulation. These simpler model problems have to be coupled to the more complex models in the subdomains of higher complexity. Also, the domain decomposition methods provide efficient techniques for the treatment of different material parameters within one structure.

Today's complex problems cannot be solved on one computer sufficiently fast or with sufficient accuracy in many cases. Therefore, parallelization is an important issue in numerical simulations. Domain decomposition methods offer the possibility to distribute the computations to many computers with rather low communication. This enables the solution of more detailed discretizations and reduces the computational time. Using a partitioning of the computational domain, the problem is reduced to local subproblems with appropriate transmission conditions across the interfaces. The local subproblems are in general easier to solve. This leads to an acceleration of the whole simulation. If the subdivision of the domain ends up with geometrically simpler subdomains, the method will get even faster. The domain decomposition methods also allow the use of different discretization techniques for individual subdomains. The simplest example is to use a boundary element method for the exterior problem, while the structure itself is treated by a finite element method. Other possible applications are the coupling of nonconforming meshes or of different basis functions for each subdomain.

There exist many publications related to domain decomposition methods. For detailed descriptions and wide collections of references see the books [103, 120, 132], the

survey article [80] and the proceedings [71, 136] of the conferences on domain decomposition methods. The first known domain decomposition method is the alternating method of Schwarz [118]. Since that time, the additive [81, 85] and multiplicative Schwarz methods [13] have been developed. The mathematical development of primal domain decomposition methods has been started in [12]. These methods use formulations in the degrees of freedom of the physical variables on the boundaries. As well, there exist domain decomposition methods using formulations in Lagrange multipliers as dual variables. Such kind of methods are Mortar methods [9, 138], hybrid methods [3], three-field methods [20] and FETI methods [34].

There exist early publications [18, 19, 41, 65, 134, 142, 143] on the coupling of finite and boundary element methods. The symmetric coupling of finite and boundary element methods is considered in [27, 73]. Symmetric domain decomposition methods based on boundary element methods are presented in [23, 61, 62, 122]. In [2, 56, 57, 126] domain decomposition methods using the Steklov–Poincaré operator are described.

The Boundary Element Tearing and Interconnecting (BETI) method is one of the main aspects in this thesis. It was introduced in [78] as the counterpart of the boundary element method to the well-known Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) methods [34, 35]. The main idea of these methods is the tearing of the global trial functions into local ones and the subsequent interconnecting of the local trial functions across the interfaces by means of constraints and Lagrange multipliers. The coupling of FETI and BETI methods is discussed in [79]. For the FETI methods, new versions called FETI–DP [32] have been developed. The FETI methods are widely used in engineering applications, see for example [31, 32, 33, 37, 101, 121], and there exist many papers on the analysis of these methods [16, 15, 67, 70, 83, 84].

The main goal of this thesis is the development and preparation of efficient methods for the numerical simulation of complex coupled structures as described above. Besides the domain decomposition method itself, efficient discretization methods for solving the local subproblems are essential for the performance of the method. Therefore, efficient tools have to be provided for the solution of the local subproblems.

The most commonly used numerical method is the finite element method (FEM). Starting from the variational formulation of the considered boundary value problem, the problem is discretized by an appropriate decomposition of the domain into so-called finite elements and the use of corresponding finite dimensional trial spaces. The matrix of the associated system of linear equations is sparse and can usually be assembled easily. As an advantage, the finite element method can be applied to a large variety of problems. In the boundary element method (BEM), the variational formulation of the partial differential equation is transferred into a boundary integral equation via integration by parts. Therefore, it is sufficient to construct a mesh for the boundary of the domain instead of a mesh for the domain itself, which might get rather complicated and time consuming. Since the transformation to the boundary integral equation requires the related fundamental solution, the boundary element method is mainly restricted to partial differential equations with (piecewise) constant coefficients. Advantages of the boundary element method are the already mentioned simpler construction of the boun-

dary element mesh, the comfortable treatment of exterior boundary value problems and the immediately available Cauchy data in the case of using direct methods. In the case of moving bodies, no remeshing is needed in contrast to finite element methods. A disadvantage of the boundary element method is that the boundary integral operators lose the local character of the partial differential operator. In fact, the discretization of boundary integral operators results in fully populated matrices in the systems of linear equations. Therefore, the memory requirements and the computational costs grow at least quadratically in the number of boundary elements or degrees of freedom.

There exist several fast boundary element methods reducing the memory requirements and the computational costs for one matrix times vector multiplication to almost linear complexity. Most of these methods rely on a clustering of the boundary elements. This leads to a clustering of the considered matrix, too. Then low rank approximations are used for an appropriate choice of such kind of matrix blocks. The methods mainly differ in the construction and the realization of the low rank approximations. Among them there are the fast multipole method [106, 44, 45] and the panel clustering method [50] which both perform the low rank approximation by an approximation of the kernel by appropriate series expansions providing a separation of the variables. The panel clustering method uses the Taylor series expansion whereas the fast multipole method uses spherical harmonics. The adaptive cross approximation (ACA) method [8, 6] is an algebraic approach to construct low rank approximations. The \mathcal{H} -matrices [48, 43] provide a complete arithmetic for the class of matrices with low rank approximations. The \mathcal{H}^2 -matrices [49, 22] use hierarchical basis functions for the low rank approximations. The wavelet approximation methods [29, 114, 52] construct special nested trial spaces which enable a sparse approximation of the matrix due to the rapid decay of the kernel.

In this thesis, a fast multipole method for linear elastostatics is developed starting from an existing implementation of the fast multipole method for the Laplace equation. It turns out that many parts of the implementation can be re-used. Some fast multipole methods are known for linear elastostatics from literature. The fast multipole method of [38] rewrites the kernel of linear elastostatics in terms of the kernel of the Laplacian and its derivatives. Therefore, the implementation of the Laplacian can be used as black box. In [102], a fast multipole method based on the Taylor series expansion is presented. Starting from the expansion of the fundamental solution of the Laplacian, a new expansion of the fundamental solution of linear elastostatics and the related translations are derived in [139, 140]. This expansion of the kernel of linear elastostatics in terms of spherical harmonics is also derived in [53] for the panel clustering method without the translations which are necessary for the fast multipole method.

In addition to fast discretization techniques, good preconditioners are needed for the efficient iterative solution of the local subproblems. There are a lot of methods available. Some of them are additive or multiplicative methods [54, 66, 82, 130], BPX-like preconditioners [14, 39, 124], multigrid methods [76, 77, 133], boundary integral operators of opposite orders [128] and the application of an approximation of the inverse by means of the \mathcal{H} -matrix arithmetics [7, 48].

This script starts with an introduction to boundary element methods which summari-

zes well-known results needed in the thesis. For more detailed informations see for example [63, 64, 87, 108, 125]. In particular, mixed boundary value problems of the Poisson equation and of linear elastostatics are considered. The boundary integral equations are briefly derived. Thereafter, the symmetric boundary integral formulation is considered in a variational formulation and the required Sobolev spaces are introduced. Moreover, the properties of the discretization using piecewise linear continuous and piecewise constant trial spaces are listed. Finally, the realization of the Steklov–Poincaré operator which is a key figure in domain decomposition methods is described.

Next, the treatment of Neumann boundary value problems of the Laplace equation and of linear elastostatics is discussed. The hypersingular boundary integral equation is used to determine the missing Dirichlet datum on the boundary. The hypersingular operator is not invertible due to its kernel built by the rigid body motions. Therefore, one would need to solve the equation in the subset excluding this kernel. Another possibility is to solve a stabilized variational formulation, as presented in [96, 125]. The boundary integral operator of opposite order, the single layer potential, can be used to construct a preconditioner [128] for the associated system of linear equations. In this combination, the stabilization terms can be scaled in such a way that the stabilization does not worsen the condition number of the system. This scaling is very simple since the maximum eigenvalue of the preconditioned system is explicitly known from theory. This approach works for the Laplace equation and for linear elastostatics. Here, the single layer potential of the Laplacian is used as a blockwise preconditioner for the hypersingular operator of linear elastostatics for $\nu < 1/2$. Therefore, the stabilization terms of the hypersingular operator have to be modified. The condition number of the preconditioned system is estimated. As expected, this condition number is worse than the one of the system using the single layer potential of linear elastostatics. However, it is still bounded. The worse condition number results in some extra iterations of the iterative method, but the preconditioner works still fine. The advantages of using the single layer potential of the Laplacian compared to the one of linear elastostatics are the faster set up and application of the preconditioner. Numerical tests are in good agreement with the theoretical results. This stabilization and preconditioning technique will be important for the Steklov–Poincaré operators in the domain decomposition methods.

Next, the fast multipole method [106, 44, 45] for the Laplacian is briefly described. The results of an analysis [95, 97] of the boundary element method using the fast multipole method are summarized. A preconditioning [124] using BPX techniques and an artificial hierarchy of nested trial spaces is described and extended to adaptive boundary element meshes. Also an algebraic multigrid method [76, 77] for the preconditioning of the single layer potential is transferred and adapted to the fast multipole method for the case of piecewise constant trial functions. The analysis of the method shows that this multigrid preconditioner can be set up and applied with an effort of $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ which is the typical effort for fast multipole methods. Also the memory requirements are of this order. The efficiencies of these preconditioners are compared in a test example of a Dirichlet boundary value problem. Both preconditioners work comparably fine in the case of the Laplace equation. Some complex, adaptive examples show the efficient use

of the fast multipole method and the preconditioners for industrial applications.

Also, a fast multipole method for linear elastostatics is described. For the single layer potential a realization based on the fast multipole method for the kernel of the Laplacian and its derivatives is used. In comparison to [38], the used realization is a little more expensive but preserves the symmetry of the Galerkin matrix. Representations [51, 72] by the double layer potential of the Laplacian and both single layer potentials are used for the realization of the double layer potential and the bilinear forms of the adjoint double layer potential and the hypersingular operator of linear elastostatics. Mainly, the single layer potential and the double layer potential of the Laplacian are needed for the boundary integral operators in linear elastostatics. Therefore, main parts of the implementation of the fast multipole method for the Laplace equation can be used for linear elastostatics. The effort for evaluating the nearfield integrals is significantly reduced by this approach. A consistency analysis shows that the presented fast multipole approximations of the boundary integral operators in linear elastostatics preserve the main properties of the matrices and do not harm the optimal convergence rate. Again, numerical examples show the efficiency of the described fast multipole realization and the used preconditioners as well as the applicability of the method to industrial examples.

Since the tools required for solving the local subproblems are now available, the domain decomposition methods are considered. First, a general formulation for domain decomposition methods is derived using transmission conditions across the interfaces. A strong coupling of the Dirichlet data and a weak coupling of the Neumann data leads to the Dirichlet domain decomposition method [57, 126]. Then the Boundary Element Tearing and Interconnecting (BETI) method and the most important related results of [78] are described. The FETI and BETI methods use Lagrange multipliers as dual variables to enforce the continuity of the local variables across the interfaces. Subdomains without sufficient Dirichlet boundary conditions are called floating subdomains and have to be treated separately by the modified hypersingular operator described above. The extra degrees of freedom related to the local rigid body motions have to be eliminated by the use of an appropriate orthogonal projection. In the case of linear elastostatics, this may become rather complicated since the number of involved rigid body motions may differ from subdomain to subdomain. The so-called FETI-DP methods [32] introduce primal variables by global nodes to overcome this problems. The selection of this global nodes is important for the performance of the method and seems to be rather involved for linear elastostatics [68]. Therefore, a new version of the BETI method, called "all-floating" formulation, is introduced. This formulation unifies the treatment of the subdomains, since all subdomains are considered as floating subdomains. Therefore, the implementation is simplified. Also the preconditioning of the local Steklov-Poincaré operators is improved [88]. This leads to a better asymptotic runtime behavior of the all-floating formulation which is close to optimal. A big advantage of the BETI and FETI methods is that the condition numbers of their systems of linear equations are independent of jumping coefficients of the underlying partial differential equation. The used projection, the main ideas of the parallelization and the efficient realization of the occurring matrices are described for both the standard BETI method and the

all-floating formulation. Finally, several systems of linear equations are considered for these methods. An efficient iterative scheme is described for solving these saddle point problems using a transformation [11, 144] to a symmetric and positive definite system. Using the presented preconditioners and the CG method, this iterative scheme needs not more than $\mathcal{O}((1 + \log(H/h))^2)$ iterations for the standard BETI method and not more than $\mathcal{O}(1 + \log(H/h))$ iterations in the case of the all-floating formulation. These iteration numbers are independent of jumps in the coefficients of the partial differential equation. H denotes the diameter of a subdomain and h is the mesh-size. Since the fast multipole method is of $\mathcal{O}((H/h)^2(1 + \log(H/h))^2)$, the standard BETI method requires not more than $\mathcal{O}((H/h)^2(1 + \log(H/h))^4)$ arithmetical operations. In the case of the all-floating formulation the arithmetical complexity decreases to $\mathcal{O}((H/h)^2(1 + \log(H/h))^3)$. The memory requirements are in both cases of $\mathcal{O}((H/h)^2 \log^2(H/h)^2)$.

Finally, several numerical tests with Dirichlet and mixed boundary value problems of the Laplace equation and of linear elastostatics are executed and compared to each other. If the multigrid preconditioner is used, the twofold saddle point formulation of the BETI method is faster than the primal domain decomposition method in most examples. The primal domain decomposition method is only faster than the BETI method for the example of a Dirichlet boundary value problem in linear elastostatics. This is due to the surprising fact that the corresponding global system is solved in less iteration steps than a local system of the Steklov–Poincaré operator. The BETI method is always faster in the case of a mixed boundary value problem or in the case of jumping coefficients. In the examples with jumping coefficients, the iteration numbers of the BETI method are even a little bit better than for uniform coefficients. This is in agreement with the theoretical result that the condition number is independent of the coefficients.

The numerical tests show the better asymptotic behavior of the all-floating formulation compared to the standard BETI method, as expected from the theoretical results. Therefore the all-floating formulation is at least for large numbers of unknowns the fastest one of the domain decomposition methods presented and tested in this thesis. In the last numerical test of a piece of steel in some concrete with linear elastostatics, the BETI method is about twice as fast as the primal domain decomposition method and the all-floating formulation is almost three times faster for the finest discretization level.

The case of a Poisson ratio $\nu \rightarrow 1/2$ in linear elastostatics has not been considered yet. In this case, the single layer potential of the Laplacian cannot be used for the preconditioning of the Steklov–Poincaré operator anymore. Further, the techniques of [123] have to be used to guarantee the robustness of the boundary element method. The properties of the BETI preconditioner are unknown for this case so far.

The next step would be the application of BETI methods to more complex structures than the academic examples that have been considered yet. As all local preconditioners have been tested for complex structures successfully, this should work straightforward. Also the coupling of boundary and finite element methods should be used to profit of the advantages of both methods. The use of the BETI methods would also be interesting for coupled field problems, as considered in the projects B4 and B5 of the SFB 404 “Multifield problems in solid and fluid mechanics” for example.

Einleitung

Die Herausforderungen für die numerische Simulation ändern sich zunehmend, da immer größere Teile der Entwicklung neuer Produkte auf die Computersimulation verlagert werden. Die effiziente Lösung einer einzelnen Modellgleichung ist dabei oft nicht mehr ausreichend. Vielmehr müssen zunehmend gekoppelte Problemstellungen betrachtet werden. Dabei müssen beispielsweise Materialien mit unterschiedlichen Materialparametern oder verschiedene Modellgleichungen für die einzelnen Teilbereiche des Simulationsgebietes betrachtet werden.

Gebietszerlegungsmethoden ermöglichen die Behandlung solcher gekoppelten Probleme und stellen geeignete Werkzeuge für die effiziente numerische Simulation zur Verfügung. Sie ermöglichen die Simulation von Problemen mit unterschiedlichen Modellgleichungen für die einzelnen Bereiche des Simulationsgebietes. Beispiele hierfür sind die Wärmeabstrahlung und Kühlung elektromagnetischer Geräte wie beispielsweise Transformatoren [17], die Schallabstrahlung von schwingenden Strukturen [36], die Fluid-Struktur-Interaktion und die Magnetomechanik. Der Einsatz verschiedener Modellgleichungen muß nicht unbedingt durch feste physikalische Begrenzungen bedingt sein. Er kann auch durch den Versuch motiviert sein, den in Industrie- oder Ingenieuranwendungen oft sehr hohen Simulationaufwand zu reduzieren. Dabei wird in Bereichen mit weniger Relevanz das Problem oft durch eine einfachere Modellgleichung beschrieben, die dort das Verhalten immer noch gut wiedergibt. Außerdem bieten Gebietszerlegungsmethoden auch effiziente Techniken für die Behandlung von unterschiedlichem Materialverhalten innerhalb einer Struktur, bedingt durch wechselnde Materialparameter.

Da komplexe Problemstellungen oft nicht auf einem einzelnen Computer hinreichend schnell und genau behandelt werden können, ist die Parallelisierung der numerischen Simulation von großer Bedeutung. Hier bieten die Gebietszerlegungsmethoden eine relativ einfache Möglichkeit, die Rechnungen bei eher geringen Kommunikationskosten auf viele Computer zu verteilen. Dies ermöglicht zunächst die Behandlung größerer Problemstellungen und führt darüberhinaus meist zu einer Verkürzung der Rechenzeiten. Bei einer geeigneten Aufteilung des Rechengebietes wird das Gesamtproblem unter geeigneten Übergangsbedingungen an den Koppelrändern in kleinere lokale Teilprobleme überführt. Diese lassen sich meist wesentlich besser und schneller lösen, was zur Beschleunigung des Gesamtverfahrens beiträgt. Erfolgt die Zerlegung des Gesamtgebietes in geometrisch wesentlich einfachere Teilgebiete, so kann dies zu einer weiteren Beschleunigung führen. Desweiteren ermöglichen die Gebietszerlegungsmethoden

auch den Einsatz verschiedener Diskretisierungsverfahren für die einzelnen Teilgebiete. So kann beispielsweise der Außenraum mit einer Randelementmethode behandelt werden, während für die eigentliche Struktur eine Finite Element Methode eingesetzt wird. Weitere Einsatzmöglichkeiten sind die Kopplung unterschiedlicher, nicht konformer Netze oder verschiedener Ansatzfunktionen für die Teilgebiete.

Zum Thema Gebietszerlegungsmethoden existiert eine Vielzahl an Arbeiten. Für detaillierte Darstellungen und umfangreiche Literaturangaben wird auf die Bücher [103, 120, 132], den Übersichtsartikel [80] und die Proceedings [71, 136] der Konferenzen zu den Gebietszerlegungsmethoden verwiesen. Die wohl erste Arbeit zu Gebietszerlegungsmethoden ist das alternierende Verfahren von Schwarz [118]. Seither sind die additiven [81, 85] und multiplikativen Schwarz–Methoden [13] entwickelt worden. Die mathematische Entwicklung von primalen Gebietszerlegungsmethoden, bei denen die Formulierung der Gebietszerlegungsmethode in den Freiheitsgraden der Problemstellung auf den Rändern der Gebietszerlegung erfolgt, ging von [12] aus. Außerdem existieren Gebietszerlegungsmethoden, die auf einer Formulierung in Lagrange–Multiplikatoren als dualen Variablen beruhen. Solche Methoden sind die Mortar–Methoden [9], für die in [138] biorthogonale Basisfunktionen für die Stabilität eingeführt wurden, hybride Methoden [3], Drei–Feld–Methoden [20] und FETI–Methoden [34].

Zur Kopplung von Finiten Element Methoden und Randelementmethoden gibt es relativ frühe Arbeiten [18, 19, 41, 65, 134, 142, 143]. Die symmetrische Kopplung von Finiten Element Methoden und Randelementmethoden wird in [27, 73] behandelt. Symmetrische Randelementgebietszerlegungsmethoden sind in [23, 61, 62, 122] dargestellt. In [2, 56, 57, 126] werden Gebietszerlegungsmethoden betrachtet, die auf dem Steklov–Poincaré–Operator beruhen.

In dieser Arbeit wird die BETI–Methode [78], die “Bondary Element Tearing and Interconnecting”–Methode, eingesetzt. Sie bildet das Gegenstück der Randelementmethoden zu den “Finite Element Tearing and Interconnecting”–Methoden (FETI) [34, 35]. Die Grundideen dieser Methoden sind das Auseinanderreißen (tearing) der globalen Ansatzfunktionen in lokale Ansatzfunktionen und das anschließende Zusammenbinden (interconnecting) dieser lokalen Ansatzfunktionen entlang der Koppelränder mittels Nebenbedingungen Lagrange–Multiplikatoren. Die Verknüpfung von BETI– und FETI–Methoden wird in [79] betrachtet. Bei den FETI–Methoden wurden mit den FETI–DP–Methoden [32] neue Versionen entwickelt. Die verschiedenen Varianten der FETI–Methoden werden vielfach in Ingenieursanwendungen eingesetzt, siehe beispielsweise [31, 32, 33, 37, 101, 121]. Außerdem existieren viele Arbeiten zur Analysis der FETI–Methoden [15, 16, 67, 70, 83, 84].

Ziel dieser Arbeit ist die Bereitstellung effizienter Verfahren zur numerischen Simulation komplexer gekoppelter Strukturen, wie sie bereits oben beschrieben wurden. Neben der Gebietszerlegungsmethode selbst sind auch die verwendeten lokalen Lösungsverfahren wichtig für ein schnelles Gesamtverfahren. Daher müssen die entsprechenden Werkzeuge für die lokalen Teilprobleme bereitgestellt werden.

Das wohl am häufigsten eingesetzte numerische Verfahren ist die Finite Element Methode (FEM). Ausgehend von einer Variationsformulierung des betrachteten Randwert-

problems erfolgt die Diskretisierung durch eine geeignete Zerlegung des Rechengebietes in sogenannte Finite Elemente und die Verwendung eines zugehörigen Ansatzraumes. Die Matrix des zugehörigen linearen Gleichungssystems ist dünn besetzt und in der Regel leicht zu erstellen. Ein Vorteil der Finiten Element Methode ist die universelle Einsetzbarkeit. Bei der Randelementmethode (BEM) wird die Variationsformulierung der partiellen Differentialgleichung durch partielle Integration in eine Randintegralgleichung transformiert. Daher genügt statt der eventuell sehr aufwendigen Vernetzung des Gebietes für die Finite Element Methode nun eine Unterteilung des Randes in Randelemente. Voraussetzung für die Transformation auf die Randintegralgleichung ist die Kenntnis der zugehörigen Fundamentallösung. Dadurch beschränkt sich der Einsatz der Randelementmethode im wesentlichen auf partielle Differentialgleichungen mit (stückweise) konstanten Koeffizienten. Die Vorteile der Randelementmethode liegen außer der einfacheren Vernetzung des Randes in der Behandlung von Außenraumproblemen, der nicht notwendigen Neuvernetzung bei sich bewegenden Strukturen, und der expliziten Berechnungen der kompletten Cauchy-Daten auf dem Rand. Ein Nachteil der Randelementmethode ist, daß die Randintegraloperatoren nicht mehr den lokalen Charakter der Differentialgleichung besitzen. Die Diskretisierung der Randintegraloperatoren führt vielmehr zu vollbesetzten Matrizen in den linearen Gleichungssystemen. Somit sind der Speicher- und Rechenaufwand für eine Standardrandelementmethode mindestens quadratisch in der Anzahl der verwendeten Randelemente bzw. Freiheitsgrade.

Es existieren inzwischen aber eine Reihe von schnellen Randelementmethoden, welche die Struktur der nichtlokalen Operatoren ausnutzen und somit den Speicheraufwand und den Aufwand für eine Matrixvektormultiplikation auf fast lineare Komplexität reduzieren. Die meisten dieser Verfahren beruhen auf einer Clustering der Randelemente, die dann eine Clustering der Matrix zur Folge hat. Für so konstruierte geeignete Blöcke wird dann eine Niedrigrangapproximation verwendet. Die Methoden unterscheiden sich dabei im wesentlichen in der Konstruktion und Realisierung der Niedrigrangapproximation. Zunächst sind die Multipolmethode [106, 44, 45] und das Panel Clustering Verfahren [50] zu nennen, die die Niedrigrangapproximation durch eine Approximation des Kerns mit geeigneten entarteten Kernen, die eine Separation der Variablen bieten, realisieren. Dabei verwendet das Panel Clustering Verfahren die Taylor-Reihenentwicklung, während bei der Multipolmethode spezielle Reihenentwicklungen wie beispielsweise harmonische Kugelfunktionen eingesetzt werden. Die Adaptive Cross Approximation (ACA) Methode [8, 6] bedient sich algebraischer Hilfsmittel zur Konstruktion der Niedrigrangapproximation und kann daher leichter auf verschiedene Kerne angewendet werden. Die \mathcal{H} -Matrizen [48, 43] bieten eine komplette Arithmetik für die Klasse der Matrizen mit Niedrigrangapproximationen. Bei den \mathcal{H}^2 -Matrizen [49, 22] werden hierarchische Basisfunktionen verwendet und die entsprechende Arithmetik aufgebaut. Die Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression [29, 114, 52] bedient sich der Konstruktion spezieller hierarchischer Basisfunktionen, die in Verbindung mit dem Abklingverhalten des Kerns eine schwachbesetzte Approximation der Matrix ermöglichen.

In dieser Arbeit wird ausgehend von der bereits vorhandenen Multipolmethode für die Laplace-Gleichung eine Multipolvariante für die lineare Elastostatik entwickelt, die wesentliche Teile der Implementierung für die Laplace-Gleichung wiederverwendet. Aus der Literatur sind einige Multipolvarianten für die lineare Elastostatik bekannt. Die Multipolvariante in [38] schreibt die Kerne der Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik in Terme des Kerns $|x - y|^{-1}$ und seiner Ableitungen um. Dadurch kann die Multipolimplementierung der Elektrostatik als Black-Box verwendet werden. In [102] wird eine Multipolvariante vorgestellt, die auf der Taylor-Reihenentwicklung des Kerns beruht. Ausgehend von der Entwicklung der Fundamentallösung des Laplace-Operators werden in [139, 140] eine neue Multipolentwicklung und die zugehörigen Translationen für die Fundamentallösung der linearen Elastostatik hergeleitet. Diese Entwicklung der Fundamentallösung der linearen Elastostatik in harmonischen Kugelfunktionen wurde auch in [53] für die Panel Clustering Methode ohne die für die Multipolmethode notwendigen Translationen hergeleitet.

Für eine effiziente Lösung der lokalen Teilprobleme sind neben den schnellen Diskretisierungsverfahren auch geeignete Vorkonditionierungstechniken für ein effizientes iteratives Lösungsverfahren notwendig. Hierzu existiert eine Vielzahl von Arbeiten. Einige mögliche Vorkonditionierungstechniken sind additive oder multiplikative Methoden [66, 54, 82, 130], BPX-Multilevelvorkonditionierungen [14, 39, 124], Mehrgitterverfahren [77, 76, 133], Randintegraloperatoren entgegengesetzter Ordnung [128] und die Anwendung einer Approximation der Inversen mittels der \mathcal{H} -Matrixarithmetik [7, 48].

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Das erste Kapitel dient als Einführung in die Randelementmethoden, wobei im wesentlichen die in der Arbeit benötigten Ergebnisse zusammengestellt werden. Ausführliche mathematische Darstellungen zu Randelementmethoden findet man beispielsweise in [63, 64, 87, 108, 125]. Hier werden zunächst die Randwertprobleme der Poisson-Gleichung und der linearen Elastostatik betrachtet und kurz die zugehörigen Randintegralgleichungen hergeleitet. Dann werden die symmetrische Formulierung und die zugehörige Variationsformulierung betrachtet. Dazu werden die notwendigen Sobolev-Räume eingeführt. Außerdem werden noch die wichtigsten Eigenschaften der Diskretisierung bei der Randelementmethode zusammengestellt. Zum Schluß wird noch die Realisierung des Steklov-Poincaré-Operators, der für die Gebietszerlegungsmethoden wichtig ist, beschrieben.

Im zweiten Kapitel wird die Behandlung von Neumann-Randwertproblemen für die Laplace-Gleichung und die lineare Elastostatik beschrieben. Dabei wird die hypersinguläre Randintegralgleichung zur Bestimmung der fehlenden Dirichlet-Daten auf dem Rand verwendet. Der hypersinguläre Operator ist aufgrund seines durch die Starrkörperbewegungen beschriebenen Kerns nicht invertierbar. Daher wird entsprechend [96, 125] eine stabilisierte Variationsformulierung verwendet. Als Vorkonditionierung des zugehörigen linearen Gleichungssystems wird die Technik des Operators entgegengesetzter Ordnung [128] eingesetzt. In Verbindung mit dieser Vorkonditionierung lassen sich die Stabilisierungsterme so skalieren, daß die Stabilisierung die Konditionszahl

des Systems nicht verschlechtert. Hier wird dieser Zugang für die lineare Elastostatik auf die blockweise Vorkonditionierung mit dem Einfachschichtpotential der Laplace-Gleichung übertragen und theoretisch sowie numerisch abgesichert. Diese Technik der Stabilisierung und Vorkonditionierung wird später für den Steklov–Poincaré–Operator in den Gebietszerlegungsmethoden wichtig.

Das dritte Kapitel beginnt mit einer kurzen Beschreibung der Multipolmethode [106, 44, 45]. Dabei werden auch die Ergebnisse einer Analyse [95, 97] der Randelementmethoden mit den Approximationen durch die Multipolmethode kurz zusammengestellt. Dann wird die BPX–Multilevelvorkonditionierung aus [124] beschrieben und auf adaptive Gitter übertragen. Außerdem wird das algebraische Mehrgitterverfahren [76, 77] zur Vorkonditionierung des Einfachschichtpotentials für stückweise konstante Basisfunktionen auf die Multipolmethode übertragen und angepaßt. Die zugehörige Aufwandsanalyse zeigt, daß die Mehrgittervorkonditionierung mit dem für die Multipolmethode üblichen Aufwand von der Ordnung $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ erstellt und angewendet werden kann. Die Effizienz der Vorkonditionierungen wird anhand von einigen Beispielen überprüft. Einige komplexe, adaptive Beispiele zeigen die Einsetzbarkeit der Multipolrandelementmethode für industrielle Anwendungen.

Im vierten Kapitel wird eine Multipolvariante für die lineare Elastostatik vorgestellt. Für das Einfachschichtpotential wird wie in [38] eine Realisierung über den Kern der Laplace-Gleichung und dessen Ableitungen verwendet. Die hier eingesetzte Darstellung garantiert zu etwas höheren Kosten jedoch die Symmetrie der zugehörigen Approximationsmatrix. Die Realisierungen des Doppelschichtpotentials und der Bilinearformen des adjungierten Doppelschichtpotentials und des hypersingulären Operators werden mittels Darstellungen [51, 72], die auf partieller Integration beruhen, auf Einfachschichtpotentiale und Doppelschichtpotentiale der Laplace-Gleichung sowie das Einfachschichtpotential der linearen Elastostatik zurückgeführt. Für alle Randintegraloperatoren wird die effiziente Realisierung mittels der Multipolmethode beschrieben. Eine Konsistenzanalyse zeigt, daß die vorgestellte Multipolvariante für die lineare Elastostatik bei entsprechender Wahl der Parameter die wichtigen Eigenschaften der Matrizen der Randintegraloperatoren und die optimale Konvergenzordnung beibehält. Auch hier zeigen wieder numerische Beispiele die Effizienz der Multipolmethode und der Vorkonditionierungstechniken sowie die Anwendbarkeit der Methoden für komplexe Geometrien aus industriellen Anwendungen.

Das fünfte Kapitel widmet sich den Gebietszerlegungsmethoden, nachdem nun die notwendigen Hilfsmittel zur Lösung der lokalen Teilprobleme zur Verfügung stehen. Zunächst wird eine allgemeine Formulierung für Gebietszerlegungsmethoden mittels Übergangsbedingungen an den Koppelrändern und daraus die Dirichlet–Gebietszerlegungsmethode mit einer starken Kopplung der Dirichlet–Daten und einer schwachen Kopplung der Neumann–Daten hergeleitet [57, 126]. Dann werden die “Boundary Element Tearing and Interconnecting”–Methode (BETI) und wichtigsten zugehörigen Ergebnisse aus [78] beschrieben. Anschließend wird mit der “Allfloating”–Formulierung eine neue Variante der BETI–Methode eingeführt. Bei den BETI– und FETI–Methoden sind Teilgebiete ohne ausreichende Dirichlet–Randbedingungen gesondert zu behan-

deln und die eingehandelten lokalen Freiheitsgrade der Starrkörperbewegungen mittels einer geeigneten Projektion zu eliminieren. Dies erweist sich in der linearen Elastostatik als eher schwierig, da je nach Randbedingungen unterschiedlich viele Starrkörperbewegungen berücksichtigt werden müssen. Die "Allfloating"-Formulierung vereinheitlicht und vereinfacht die Behandlung der Teilgebiete, indem sie allen Teilgebieten die lokalen Freiheitsgrade durch die Starrkörperbewegungen gibt. Außerdem verbessert sich dadurch das Verhalten der für die lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren verwendeten Vorkonditionierung. Dies führt zu einem verbesserten asymptotischen Verhalten der "Allfloating"-BETI-Methode. Ein großer Vorteil der BETI- und FETI-Methoden ist die Unabhängigkeit der Konditionszahl des linearen Gleichungssystems von springenden Koeffizienten. Es werden noch die benötigte Projektion, die Grundzüge der Parallelisierung und die effiziente Realisierung der auftretenden Matrizen beschrieben. Abschließend werden verschiedene lineare Gleichungssysteme für die beiden BETI-Varianten zusammengestellt und deren effizientes iteratives Lösen als Sattelpunktprobleme mit Hilfe einer Transformation auf ein symmetrisches und positiv definites Gesamtsystem nach [11, 144] besprochen. Für das zugehörige iterative CG-Verfahren werden noch die Abschätzungen für die Iterationszahlen und den Gesamtaufwand der Standard- und der "Allfloating"-BETI-Methode als Ergebnis formuliert.

Im sechsten Kapitel werden die vorgestellten Gebietszerlegungsmethoden anhand von Testbeispielen der Laplace-Gleichung und der linearen Elastostatik mit der Theorie und untereinander verglichen. Dazu werden Dirichlet-Randwertprobleme und gemischte Randwertprobleme, sowie Problemstellungen mit einheitlichen und mit springenden Materialparametern betrachtet.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Randintegralgleichungen und der Randelementmethode für die Laplace-Gleichung und die lineare Elastostatik zusammengefaßt. Die Darstellung orientiert sich dabei im wesentlichen an [125]. Andere mathematische Bücher zu Randelementmethoden sind beispielsweise [64, 87, 108]. Hier werden ausgehend von den Randwertproblemen kurz die zugehörigen Randintegralgleichungen hergeleitet und die verwendeten Sobolev-Räume eingeführt. Für die Diskretisierung wird die Galerkin-Variationsformulierung der symmetrischen Formulierung verwendet. Abschließend wird die Approximation des für die Gebietszerlegungsmethoden wichtigen Steklov-Poincaré-Operators behandelt.

1.1 Randwertprobleme

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Lipschitz-Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Auf dem ist dann fast überall der äußere Normalenvektor $n(x)$ für $x \in \Gamma$ gegeben.

Im folgenden werden die Randwertprobleme der Laplace-Gleichung und der linearen Elastostatik gemeinsam behandelt. Um eine einheitliche Darstellung zu ermöglichen, werden sowohl das skalarwertige Potential als auch die vektorwertigen Verschiebungen der linearen Elastostatik mit $u(x)$ bezeichnet. Dabei wird auf eine Kennzeichnung der vektorwertigen Funktionen verzichtet. Daher sind die auftretenden Größen aus dem Zusammenhang und je nach betrachtetem Randwertproblem entweder als skalare Größen oder als vektorwertige Größen zu interpretieren.

Im Fall der Laplace-Gleichung ist das Potential $u(x)$ als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.1)$$

gesucht.

In der linearen Elastostatik ist das Verschiebungsfeld $u(x)$ für $x \in \Omega$ zu bestimmen. Dabei wird ein Körper mit einem elastischen, reversiblen, isotropen und homogenen Materialverhalten betrachtet. Im beschränkten Gebiet Ω sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$-\operatorname{div} \sigma(u, x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.2)$$

zu erfüllen. Dabei ist der Spannungstensor $\sigma(u)$ durch das Hookesche Gesetz

$$\sigma(u) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr} e(u)I + \frac{E}{1+\nu} e(u) \quad (1.3)$$

mit dem Elastizitätsmodul $E > 0$ und der Poisson-Zahl $\nu \in (0, 1/2)$, auch Querkontraktionszahl genannt, gegeben. Der Verzerrungstensor wird für kleine Deformationen definiert durch

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^\top + \nabla u).$$

Im folgenden bezeichnet

$$\gamma_0 u(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u(\tilde{x}) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma$$

die Spur der im Gebiet Ω gegebenen Funktion u auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Angewandt auf das Integral des mit einer Testfunktion v multiplizierten Laplace-Operators über das Gebiet Ω , liefert die partielle Integration

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) dx = \int_{\Gamma} \gamma_0 u(x) \gamma_0 v(x) n_i(x) ds_x - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) dx \quad (1.4)$$

die erste Greensche Formel

$$a(u, v) = - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 v(x) \gamma_1 u(x) ds_x \quad (1.5)$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (1.6)$$

und der Konormalenableitung

$$\gamma_1 u(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} [n(x) \cdot \nabla u(\tilde{x})] \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma.$$

Die erste Greensche Formel (1.5) gilt auch entsprechend mit vertauschten Rollen von u und v . Somit folgt durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Bilinearform (1.6) die zweite Greensche Formel

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 v(x) \gamma_1 u(x) ds_x = - \int_{\Omega} \Delta v(x) u(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 u(x) \gamma_1 v(x) ds_x. \quad (1.7)$$

Analog zur Greenschen Formel kann aus den Gleichgewichtsbedingungen (1.2) der linearen Elastostatik die erste Bettische Formel

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u, x) \cdot v(x) dx = a(u, v) - \int_{\Gamma} \gamma_0 v(x) \cdot \gamma_1 u(x) ds_x \quad (1.8)$$

hergeleitet werden. Dabei ist die Bilinearform

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u, x) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u, x) \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} v_j(x) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u, x) e_{ij}(v, x) dx, \end{aligned} \quad (1.9)$$

und die Konormalenableitung ergibt sich als

$$\gamma_1 u(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} [\sigma(u, \tilde{x}) n(x)] \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma.$$

Drückt man die Gleichgewichtsbedingungen (1.2) nur in Abhängigkeit von der Verschiebung $u(x)$ aus, so erhält man

$$-\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega$$

mit den Laméschen Elastizitätskonstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Die Bilinearform (1.9) läßt sich mit λ und μ auch als

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u, x) e_{ij}(v, x) dx \\ &= 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}(u, x) e_{ij}(v, x) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) \operatorname{div} v(x) dx \end{aligned}$$

schreiben. Damit ergibt sich auch sofort die Symmetrie der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$. Die Konormalenableitung $\gamma_1 u(x)$, auch Randspannungsoperator genannt, hat entsprechend die Darstellung

$$\gamma_1 u(x) = \lambda \operatorname{div} u(x) n(x) + 2\mu \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) + \mu n(x) \times \operatorname{curl} u(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma.$$

Mit der Symmetrie $a(u, v) = a(v, u)$ der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ erhält man aus der ersten Bettischen Formel (1.8) die zweite Bettische Formel

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u, x) \cdot v(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 v(x) \cdot \gamma_1 u(x) ds_x \\ = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(v, x) \cdot u(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 u(x) \cdot \gamma_1 v(x) ds_x. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Mit Hilfe der Spuroperatoren lassen sich nun die Randwertprobleme für die Poisson-Gleichung (1.1) und die lineare Elastostatik (1.2) formulieren. Im folgenden wird stets ein gemischtes Randwertproblem betrachtet, sofern nicht explizit auf eine andere Problemstellung hingewiesen wird. Für eine disjunkte Zerlegung des Randes $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ in den Dirichlet-Rand Γ_D und den Neumann-Rand Γ_N werden dabei Dirichlet-Randbedingungen

$$\gamma_0 u(x) = g_D(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_D \quad (1.11)$$

und Neumann–Randbedingungen

$$\gamma_1 u(x) = g_N(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_N \quad (1.12)$$

vorgegeben. Insbesondere soll der Anteil des Dirichlet–Randes nicht verschwinden, d.h. es gilt $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$. Für die lineare Elastostatik kann diese Zerlegung auch komponentenweise erfolgen. Dann muß die Bedingung des nicht verschwindenden Dirichlet–Randes $\Gamma_{D,i}$ komponentenweise erfüllt sein. Es ist auch möglich, Randbedingungen für die Tangential– und Normalkomponenten zu formulieren. Diese Randwertprobleme werden hier allerdings nicht explizit betrachtet.

Für die Laplace–Gleichung besteht der Lösungsraum \mathcal{R} des homogenen Neumann–Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_1 u(x) &= 0 & \text{für } x \in \Gamma \end{aligned}$$

aus den konstanten Funktionen und kann durch

$$\mathcal{R} = \text{span} \{1\} \quad (1.13)$$

beschrieben werden.

Der Lösungsraum \mathcal{R} des homogenen Neumann–Randwertproblems der linearen Elastostatik

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \text{grad div } u(x) &= 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_1 u(x) &= 0 & \text{für } x \in \Gamma \end{aligned}$$

besteht aus den Starrkörperbewegungen, d.h. Translationen und Rotationen des Körpers, und kann beschrieben werden durch

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.14)$$

Im folgenden werden diese Vektoren mit v_k bezeichnet und entsprechend ihrer obigen Anordnung numeriert. Für die konstante Funktion $v \equiv 1$ folgt aus der zweiten Green–schen Formel (1.7)

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_1 u(x) ds_x = 0.$$

Für die Starrkörperbewegungen $v_k \in \mathcal{R}$ der linearen Elastostatik ergibt sich aus der zweiten Bettischen Formel (1.10)

$$-\int_{\Omega} \text{div } \sigma(u, x) \cdot v_k(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 v_k(x) \cdot \gamma_1 u(x) ds_x = 0 \quad \text{für alle } v_k \in \mathcal{R}.$$

Somit müssen für die Lösbarkeit des Neumann-Randwertproblems der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma \end{aligned}$$

bzw. des Neumann-Randwertproblems der linearen Elastostatik

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma \end{aligned}$$

die Lösbarkeitsbedingungen

$$\int_{\Omega} v_k(x) \cdot f(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 v_k(x) \cdot g_N(x) ds_x = 0 \quad \text{für alle } v_k \in \mathcal{R} \quad (1.15)$$

mit dem jeweiligen Raum \mathcal{R} vorausgesetzt werden, und die allgemeine Lösung kann nur bis auf die konstanten Funktionen (1.13) bzw. die Starrkörperbewegungen (1.14) eindeutig beschrieben werden. Für verschwindende rechte Seiten $f \equiv 0$ können die Lösbarkeitsbedingungen auch als Bedingung $g_N \in H_{\mathcal{R}}^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$H_{\mathcal{R}}^{-1/2}(\Gamma) := \{w \in H^{-1/2}(\Gamma) : \langle w, v_k \rangle_{\Gamma} = 0 \text{ für alle } v_k \in \mathcal{R}\}$$

ausgedrückt werden.

1.2 Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt werden die notwendigsten Definitionen der Sobolev-Räume eingeführt. Dabei werden stets nur reellwertige Funktionen betrachtet. Ausführliche Darstellungen zum Thema Sobolev-Räume findet man beispielsweise in [1, 87, 90].

$L_2(\Omega)$ ist der Raum aller auf dem Gebiet Ω definierten und Lebesgue-messbaren Funktionen, die quadratintegrierbar sind. Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden identifiziert. Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Mit dem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ und $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, 3$ lassen sich die partiellen Ableitungen einer Funktion $u(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3$ schreiben als

$$D^{\alpha} u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3^{\alpha_3}} u(x).$$

Definition 1.1 (Sobolev-Räume im Gebiet). Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $m \in \mathbb{N}_0$ wird durch

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

eine Norm definiert. Durch die Vervollständigung von $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{H^m(\Omega)} < \infty\}$ bezüglich dieser Norm wird der Sobolev-Raum

$$H^m(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}}$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ definiert. Dabei bezeichnet $C^\infty(\Omega)$ den Raum der auf Ω beschränkten und unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Diese Definition der Sobolev-Räume läßt sich auf Sobolev-Räume $H^s(\Omega)$ für $s > 0$ verallgemeinern. Dazu wird mittels der Zerlegung $s = k + \sigma$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in (0, 1)$ die Sobolev-Slobodeckii-Norm

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \left\{ \|u\|_{H^k(\Omega)}^2 + |u|_{H^s(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

mit der Halbnorm

$$|u|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{3+2\sigma}} dx dy$$

verwendet.

Die Sobolev-Räume $H^s(\Omega)$ lassen sich auch allgemeiner über Distributionen und die Fourier-Transformierte definieren. Dann werden diese mit $H^s(\Omega)$ und die hier definierten Räume mit $W_2^s(\Omega)$ bezeichnet. Für Lipschitz-Gebiete sind die allgemeiner definierten Räume äquivalent zu denen der hier verwendeten Definition, siehe dazu zum Beispiel [87].

Für den Rand $\Gamma = \partial\Omega$ ist der Raum $L_2(\Gamma)$ definiert über die Norm

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} = \left\{ \int_{\Gamma} |u(x)|^2 ds_x \right\}^{1/2}.$$

Für die Definition der Sobolev-Räume auf dem Rand wird die Karte einer Umgebung eines festgehaltenes Punktes x und des zugehörigen euklidischen Parameterbereichs in der Tangentialebene des Punktes x betrachtet. Mit Hilfe der orthonormierten Tangentialvektoren \underline{e}_i wird durch

$$y = \tilde{y}(x, \underline{t}) := x + \varphi(x, \underline{t}) \underline{n}(x) + \sum_{i=1}^2 t_i \underline{e}_i \quad \text{mit } \varphi(x, \underline{0}) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t_i} \varphi(x, \underline{t}) \right|_{\underline{t}=\underline{0}} = 0$$

eine Abbildung der Koordinaten der Tangentialebene $\underline{t} \mapsto y \in \Gamma$ auf den Rand definiert. Dabei handelt es sich um eine lokale Parametrisierung des Randes um den Punkt $x \in \Gamma$ mit den Koordinaten t_i . Mit Hilfe der kovarianten Ableitungen

$$\partial_{\underline{t}}^\alpha u(y) = \partial_{\underline{t}}^\alpha \tilde{u}(x, \underline{t}) = \partial_{t_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{t_3}^{\alpha_3} \tilde{u}(x, \underline{t}) \quad \text{für } |\alpha| \leq m \leq \ell$$

mit $\tilde{u}(x, \underline{t}) = u(\tilde{y}(x, \underline{t}))$ läßt sich die Definition der Sobolev-Norm somit auf den Rand übertragen [1, 87, 137]. Damit die so definierten Ableitungen existieren, ist als Voraussetzung $\Gamma \in C^{\ell-1,1}$ hinreichend.

Definition 1.2 (Sobolev-Räume auf dem Rand). Die Sobolev-Normen auf dem Rand $\Gamma \in C^{\ell-1,1}$ lassen sich für $m \in \mathbb{N}_0$ und $m \leq \ell$ durch

$$\|u\|_{H^m(\Gamma)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_t^\alpha u\|_{L_2(\Gamma)}^2 \right\}^{1/2}$$

definieren. Die zugehörigen Sobolev-Räume $H^m(\Gamma)$ auf dem Rand sind dann der Abschluß von $C^\infty(\Gamma)$ bezüglich der $H^m(\Gamma)$ -Norm.

Definition 1.3 (Sobolev-Räume reeller Ordnungen). Für $\Gamma \in C^{\ell-1,1}$ lassen sich die Sobolev-Räume $H^s(\Gamma)$ für $0 < s \leq \ell$ mittels der Sobolev-Slobodeckii-Norm

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left\{ \|u\|_{H^k(\Gamma)}^2 + |u|_{H^s(\Gamma)}^2 \right\}^{1/2}$$

und der Halbnorm

$$|u|_{H^s(\Gamma)}^2 := \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|\partial_t^\alpha u(x) - \partial_t^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2+2\sigma}} ds_x ds_y$$

mit $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in (0, 1)$ definieren. Für $0 < s \leq \ell$ wird der Sobolev-Raum $H^{-s}(\Gamma)$ negativer Ordnung durch

$$H^{-s}(\Gamma) := (H^s(\Gamma))'$$

mit der Norm

$$\|u\|_{H^{-s}(\Gamma)} := \sup_{0 \neq v \in H^s(\Gamma)} \frac{|\langle u, v \rangle_{\Gamma}|}{\|v\|_{H^s(\Gamma)}}$$

bezüglich des Dualitätsproduktes

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} := \int_{\Gamma} u(x)v(x) ds_x$$

definiert.

Für das gemischte Randwertproblem werden Sobolev-Räume auf den beiden Teilrändern Γ_D und Γ_N benötigt. Daher müssen die bisherigen Definitionen erweitert werden.

Definition 1.4 (Sobolev-Räume auf einem Teilrand). Für ein offenes Randstück $\Gamma_0 \subset \Gamma$ werden die Sobolev-Räume der Ordnung $s \geq 0$ durch

$$\begin{aligned} H^s(\Gamma_0) &:= \{u = \tilde{u}|_{\Gamma_0} : \tilde{u} \in H^s(\Gamma)\}, \\ \tilde{H}^s(\Gamma_0) &:= \{u = \tilde{u}|_{\Gamma_0} : \tilde{u} \in H^s(\Gamma) \text{ und } \text{supp } \tilde{u} \subset \bar{\Gamma}_0\} \end{aligned}$$

mit der kanonischen Norm

$$\|u\|_{H^s(\Gamma_0)} := \inf \{ \|\tilde{u}\|_{H^s(\Gamma)} : \tilde{u} \in H^s(\Gamma) \text{ und } \tilde{u}|_{\Gamma_0} = u \}$$

definiert. Die Sobolev-Räume negativer Ordnung auf einem Teilrand Γ_0 werden für $s > 0$ wieder über die Dualität definiert:

$$H^{-s}(\Gamma_0) := (\tilde{H}^s(\Gamma_0))', \quad \tilde{H}^{-s}(\Gamma_0) := (H^s(\Gamma_0))'.$$

Für einen geschlossenen, stückweise glatten Rand Γ mit der Zerlegung

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Gamma}_i \text{ mit } \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

ist für $s > 0$ durch

$$H_{\text{pw}}^s(\Gamma) := \{u \in L_2(\Gamma) : u|_{\Gamma_i} \in H^s(\Gamma_i), i = 1, \dots, n\}$$

der Raum der stückweise glatten Funktionen mit der Norm

$$\|u\|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)} := \left\{ \sum_{i=1}^n \|u|_{\Gamma_i}\|_{H^s(\Gamma_i)}^2 \right\}^{1/2}$$

gegeben. Für die lineare Elastizität sind die Sobolev-Räume jeweils komponentenweise anzuwenden. Auf die Kennzeichnung als $[H^s(\Gamma)]^3$ wird im folgenden im Sinne der einheitlichen Darstellung für die Laplace-Gleichung und die lineare Elastizität verzichtet. Wie für die übrigen Größen ist wieder aus dem Zusammenhang und bezüglich des betrachteten Randwertproblems entsprechend zu unterscheiden.

1.3 Randintegralgleichungen

Ausgehend von der zweiten Greenschen Formel (1.7) bzw. der zweiten Bettischen Formel (1.10) kann mit Hilfe einer Fundamentallösung $v(x) := U^*(x, y)$ für $x \in \Omega$ die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_{0,y} U^*(x, y) \gamma_1 u(y) ds_y - \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y} U^*(x, y))^{\top} \gamma_0 u(y) ds_y + \int_{\Omega} U^*(x, y) f(y) dy \quad (1.16)$$

für $x \in \Omega$ hergeleitet werden. Dabei ist die Fundamentallösung des Laplace-Operators gegeben durch

$$U^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}. \quad (1.17)$$

Die Fundamentallösung der linearen Elastostatik ist gegeben durch den Kelvinschen Lösungstensor mit

$$U_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{(3-4\nu)}{|x-y|} \delta_{ij} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3} \right] \quad \text{für } i, j = 1, \dots, 3. \quad (1.18)$$

Wegen der Darstellungsformel (1.16) ist die Bestimmung der vollständigen Cauchy-Daten $\gamma_0 u$ und $\gamma_1 u$ ausreichend für die Berechnung der Lösung $u(x)$ für $x \in \Omega$. Eine Realisierung des Newton-Potentials ist mittels einer Partikulärlösung oder direkt mit Hilfe der im Abschnitt 3.1 beschriebenen Multipolmethode möglich. Im folgenden wird jedoch stets angenommen, daß die rechten Seiten der beiden Differentialgleichungen (1.1) und (1.2) mit $f \equiv 0$ verschwinden. Dadurch entfällt die Behandlung des zugehörigen Volumen- bzw. Newton-Potentials in der Darstellungsformel (1.16).

Bei der Anwendung der beiden Spuoperatoren γ_0 und γ_1 auf die Darstellungsformel (1.16) erhält man die erste Randintegralgleichung

$$\gamma_0 u(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) \gamma_1 u(y) ds_y + \frac{1}{2} \gamma_0 u(x) - \int_{\Gamma \setminus \{x\}} T^*(x, y) \gamma_0 u(y) ds_y, \quad (1.19)$$

für fast alle $x \in \Gamma$ mit $T^*(x, y) = (\gamma_{1,y} U^*(x, y))^{\top}$, bzw. die zweite (hypersinguläre) Randintegralgleichung

$$\gamma_1 u(x) = \frac{1}{2} \gamma_1 u(x) + \int_{\Gamma \setminus \{x\}} \gamma_{1,x} U^*(x, y) \gamma_1 u(y) ds_y - \gamma_1 \int_{\Gamma} T^*(x, y) \gamma_0 u(y) ds_y \quad (1.20)$$

für fast alle $x \in \Gamma$. Zusammen bilden die beiden Randintegralgleichungen (1.19) und (1.20) ein System von Randintegralgleichungen,

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

mit dem Calderon-Projektor

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Dabei bezeichnen $V : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ das Einfachschichtpotential

$$(Vt)(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) t(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma, \quad (1.23)$$

$K : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ das Doppelschichtpotential

$$(Ku)(x) = \int_{\Gamma \setminus \{x\}} T^*(x, y) u(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma, \quad (1.24)$$

$K' : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ das adjungierte Doppelschichtpotential

$$(K't)(x) = \int_{\Gamma \setminus \{x\}} \gamma_{1,x} U^*(x, y) t(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma, \quad (1.25)$$

und $D : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ den hypersingulären Operator

$$(Du)(x) = -\gamma_{1,x} \int_{\Gamma} T^*(x, y) u(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.26)$$

Dabei handelt es sich um beschränkte lineare Operatoren. Es gilt also insbesondere

$$\|Vw\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_2^V \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|Dv\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_2^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad (1.27)$$

für alle $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $v \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Im folgenden werden noch einige Eigenschaften der Randintegraloperatoren aufgeführt, die für spätere Überlegungen notwendig sind. Eine ausführliche Darstellung der hier beschriebenen Eigenschaften findet man beispielsweise in [28, 64, 125].

Aus der Projektionseigenschaft $\mathcal{C} = \mathcal{C}^2$ des Calderon–Projektors (1.22) können die folgenden Beziehungen zwischen den Randintegraloperatoren hergeleitet werden.

Lemma 1.1. *Für die Randintegraloperatoren gelten die Relationen:*

$$VD = \left(\frac{1}{2}I + K\right)\left(\frac{1}{2}I - K\right), \quad (1.28)$$

$$DV = \left(\frac{1}{2}I + K'\right)\left(\frac{1}{2}I - K'\right), \quad (1.29)$$

$$KV = VK', \quad (1.30)$$

$$DK = K'D. \quad (1.31)$$

Lemma 1.2. *Das Einfachschichtpotential V ist $H^{-1/2}(\Gamma)$ –elliptisch, es gilt also*

$$\langle Vw, w \rangle_{\Gamma} \geq c_1^V \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad (1.32)$$

für alle $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit einer positiven Konstanten c_1^V .

Das Einfachschichtpotential V ist somit nach dem Lemma von Lax–Milgram, siehe hierzu z.B. Satz 1.8, invertierbar und kann auch als Abbildung $H_{\mathcal{R}}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_*^{1/2}(\Gamma)$ aufgefaßt werden. Dabei sind

$$H_{\mathcal{R}}^{-1/2}(\Gamma) := \{w \in H^{-1/2}(\Gamma) : \langle w, v_k \rangle_{\Gamma} = 0 \text{ für alle } v_k \in \mathcal{R}\} \quad (1.33)$$

und

$$H_*^{1/2}(\Gamma) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : \langle V^{-1}v, v_k \rangle_{\Gamma} = 0 \text{ für alle } v_k \in \mathcal{R}\} \quad (1.34)$$

geeignet definiert. Insbesondere werden mit $w_k = V^{-1}v_k$, die zu den Starrkörperbewegungen gehörenden Funktionen definiert, zu denen Funktionen $v \in H_*^{1/2}(\Gamma)$ orthogonal sind. In der linearen Elastostatik ist für den hier ausgeschlossenen Fall $\nu \rightarrow 1/2$ eine geeignete Orthogonalzerlegung des Sobolev–Raumes $H^{1/2}(\Gamma)$ vorzunehmen und die Gültigkeit entsprechender Spektraläquivalenzungleichungen zu untersuchen.

Lemma 1.3. *Der hypersinguläre Operator D ist beschränkt und $H_*^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch, d.h. es gilt*

$$\langle Dv, v \rangle_\Gamma \geq c_1^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } v \in H_*^{1/2}(\Gamma) \quad (1.35)$$

mit einer positiven Konstanten c_1^D .

Die beiden Elliptizitätskonstanten c_1^V und C_1^D hängen vom Gebiet ab und sind im allgemeinen explizit nur schwer zu bestimmen [105]. Die Elliptizität läßt sich auf jeden Unterraum von $H^{1/2}(\Gamma)$ übertragen, dessen Funktionen bezüglich spezieller Skalarprodukte orthogonal auf den Starrkörperbewegungen sind. Insbesondere ist der Raum $H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma)$ definiert als

$$H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : \langle v, v_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0 \text{ für alle } v_k \in \mathcal{R}\}. \quad (1.36)$$

Lemma 1.4. *Der hypersinguläre Operator D ist $H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch, d.h. es gilt*

$$\langle Dv, v \rangle_\Gamma \geq \hat{c}_1^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } v \in H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma) \quad (1.37)$$

mit einer positiven Konstanten \hat{c}_1^D .

Für eine Funktion $u \in C^1(\Gamma)$ und $x \in \Gamma$ ist

$$\underline{\text{curl}}_\Gamma u(x) := n_x \times \nabla u_\Gamma^*(x) \quad (1.38)$$

die Oberflächenrotation. Dabei bezeichnet $u_\Gamma^*(x)$ die entlang der Normalen n_x konstante Fortsetzung der Funktion $u(x)$ in eine genügend kleine Umgebung von Γ . Die Oberflächenrotation läßt sich entsprechend auch auf stückweise glatten Oberflächen für global stetige und auf den einzelnen Oberflächenstücken differenzierbare Funktionen definieren. Durch partielle Integration kann die Bilinearform des hypersingulären Operators D_L der Laplace-Gleichung durch eine Summe von Bilinearformen des Einfachschichtpotentials V_L ersetzt werden.

Satz 1.5 ([86, 92]). *Sei Γ eine stückweise glatte Oberfläche, und seien u und v global stetige Funktionen und auf den Oberflächenstücken differenzierbar, dann gilt für die Bilinearform des hypersingulären Operators D_L der Laplace-Gleichung die Darstellung*

$$\langle D_L u, v \rangle_\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \underline{\text{curl}}_\Gamma u(y) \cdot \underline{\text{curl}}_\Gamma v(x) \frac{1}{|x-y|} ds_y ds_x. \quad (1.39)$$

Eine entsprechende Darstellung existiert auch in der linearen Elastostatik. Diese beruht auf einer Darstellung des Doppelschichtpotentials K_E der linearen Elastostatik durch schwachsinguläre Randintegraloperatoren.

Satz 1.6 ([72]). *Für das Doppelschichtpotential K_E der linearen Elastostatik gilt die Darstellung*

$$(K_E u)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} ds_y - \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|} (\mathcal{M}u)(y) ds_y + 2\mu (V_E(\mathcal{M}u))(x), \quad (1.40)$$

mit der Definition

$$\mathcal{M}_{kj} = n_j \frac{\partial}{\partial x_k} - n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.41)$$

bzw.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & n_2 \partial_1 - n_1 \partial_2 & n_3 \partial_1 - n_1 \partial_3 \\ n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1 & 0 & n_3 \partial_2 - n_2 \partial_3 \\ n_3 \partial_1 - n_3 \partial_1 & n_2 \partial_3 - n_3 \partial_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Wie für die Laplace–Gleichung läßt sich die Bilinearform des hypersingulären Operators mittels partieller Integration in Bilinearformen des Einfachschichtpotential umformen. Ausgehend von der Darstellung (1.40) des Doppelschichtpotentials K_E nach [72] erhält man dadurch die folgenden Darstellung.

Satz 1.7 ([51]). Für die Bilinearform des hypersingulären Operators D_E der linearen Elastostatik gilt

$$\begin{aligned} \langle D_E u, v \rangle_\Gamma &= \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{k=1}^3 (\mathcal{M}_{k+2, k+1} v)(x) \cdot (\mathcal{M}_{k+2, k+1} u)(y) \right) ds_y ds_x \\ &+ \int_\Gamma \int_\Gamma (\mathcal{M} v)^\top(x) \left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{|x-y|} - 4\mu^2 U^*(x, y) \right) (\mathcal{M} u)(y) ds_y ds_x \quad (1.43) \\ &+ \int_\Gamma \int_\Gamma \sum_{i, j, k=1}^3 (\mathcal{M}_{k, j} v_i)(x) \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} (\mathcal{M}_{k, i} u_j)(y) ds_y ds_x. \end{aligned}$$

Im Skalarprodukt der ersten Zeile sind die verwendeten Indizes modulo 3 erklärt, d.h. 4 ist mit 1 und 5 ist mit 2 zu identifizieren.

1.4 Variationsmethoden und symmetrische Formulierung

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, welches auch die Norm $\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$ induziert. Dabei werden hier stets nur reellwertige Funktionen betrachtet. Für die Norm $\|\cdot\|_{X'}$ des Dualraumes X' von X gilt dann mit dem Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\|f\|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_X} \quad \text{für alle } f \in X'.$$

Gesucht ist die Lösung $u \in X$ der Operatorgleichung

$$Au = f \quad (1.44)$$

für eine gegebene rechte Seite $f \in X'$. Dabei wird im folgenden vorausgesetzt, daß der Operator $A : X \rightarrow X'$ beschränkt ist, d.h. es gilt

$$\|Av\|_{X'} \leq c_2^A \|v\|_X \quad \text{für alle } v \in X$$

mit einer Konstanten $c_2^A > 0$, und der Operator außerdem X -elliptisch ist, d.h. es existiert eine Konstante $c_1^A > 0$ mit

$$\langle Av, v \rangle \geq c_1^A \|v\|_X^2 \quad \text{für alle } v \in X.$$

Statt der Operatorgleichung (1.44) kann auch die dazu äquivalente Variationsformulierung betrachtet werden:

Gesucht ist $u \in X$, so daß

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in X \quad (1.45)$$

gilt mit

$$a(u, v) := \langle Au, v \rangle \quad \text{und} \quad f(v) := \langle f, v \rangle.$$

Der folgende Satz macht eine Aussage über die Lösbarkeit der Operatorgleichung (1.44) bzw. der zugehörigen Variationsformulierung (1.45).

Satz 1.8 (Lemma von Lax–Milgram). *Sei der Operator $A : X \rightarrow X'$ beschränkt und X -elliptisch. Dann besitzt die Operatorgleichung (1.44) bzw. die äquivalente Variationsformulierung (1.45) für jede rechte Seite $f \in X'$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in X$, für die gilt*

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}.$$

Beweis. Siehe beispielsweise [141, 125]. □

Aufgrund der Darstellungsformel (1.16) genügt die Kenntnis der Cauchy–Daten $\gamma_0 u$ und $\gamma_1 u$ auf dem kompletten Rand Γ , um die Lösung des gemischten Randwertproblems

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= 0 && \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_0 u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N \end{aligned} \quad (1.46)$$

zu beschreiben. Dabei ist $(Lu)(x) = 0$ je nach Anwendung die Differentialgleichung (1.1) des Laplace–Operators bzw. die Differentialgleichung (1.2) der linearen Elastostatik. Es bleiben also $\gamma_0 u$ auf Γ_N und $\gamma_1 u$ auf Γ_D zu bestimmen. Dazu werden zunächst geeignete Fortsetzungen $\hat{g}_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\hat{g}_N \in H^{-1/2}(\Gamma)$ der gegebenen Randdaten $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ und $g_N \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ auf den gesamten Rand gewählt, so daß

$$\hat{g}_D(x) = g_D(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_D \quad \text{und} \quad \hat{g}_N(x) = g_N(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_N$$

gelten. Mit den Ansätzen

$$\gamma_0 u(x) = \tilde{u}(x) + \hat{g}_D(x) \quad \text{und} \quad \gamma_1 u(x) = \tilde{t}(x) + \hat{g}_N(x)$$

bleiben dann noch Funktionen $\tilde{u} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ und $\tilde{t} \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ zu bestimmen. Für diese Funktionen gilt dabei $\tilde{u}(x) = 0$ für $x \in \Gamma_D$ und $\tilde{t}(x) = 0$ für $x \in \Gamma_N$. Zur Bestimmung dieser Restdaten wird das komplette System (1.21) der beiden Randintegralgleichungen genutzt. Die Verwendung der ersten Randintegralgleichung für $x \in \Gamma_D$ und der zweiten Randintegralgleichung für $x \in \Gamma_N$ führt bei der oben beschriebenen Aufspaltung der Cauchy–Daten auf die symmetrische Formulierung [27, 119]:

$$\begin{aligned} (V\tilde{t})(x) - (K\tilde{u})(x) &= \left(\frac{1}{2}I + K\right)\hat{g}_D(x) - (V\hat{g}_N)(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ (K'\tilde{t})(x) + (D\tilde{u})(x) &= \left(\frac{1}{2}I - K'\right)\hat{g}_N(x) - (D\hat{g}_D)(x) && \text{für } x \in \Gamma_N. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Für den Hilbertraum $Z := \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ mit der Norm

$$\|(v, \tau)\|_Z := \left(\|v\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)}^2 + \|\tau\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}^2 \right)^{1/2}$$

ist die zur symmetrischen Formulierung (1.47) äquivalente Variationsformulierung: Gesucht ist $(\tilde{u}, \tilde{t}) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$, so daß

$$a(\tilde{u}, \tilde{t}; v, \tau) = f(v, \tau) \quad \text{für alle } (v, \tau) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \quad (1.48)$$

gilt. Dabei sind die Bilinearform als

$$a(\tilde{u}, \tilde{t}; v, \tau) = \langle V\tilde{t}, \tau \rangle_{\Gamma_D} - \langle K\tilde{u}, \tau \rangle_{\Gamma_D} + \langle K'\tilde{t}, v \rangle_{\Gamma_N} + \langle D\tilde{u}, v \rangle_{\Gamma_N} \quad (1.49)$$

und die Linearform als

$$f(v, \tau) = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K\right)\hat{g}_D, \tau \right\rangle_{\Gamma_D} - \langle V\hat{g}_N, \tau \rangle_{\Gamma_D} + \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K'\right)\hat{g}_N(x), v \right\rangle_{\Gamma_N} - \langle D\hat{g}_D, v \rangle_{\Gamma_N}$$

definiert. Mit der Beschränktheit der Operatoren und der Elliptizität des Einfachschichtpotentials V und des hypersingulären Operators D bzgl. $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ bzw. $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ ergeben sich die Beschränktheit und die $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ –Elliptizität der Bilinearform $a(\cdot; \cdot)$. Mit der beschränkten Linearform $f(\cdot)$ folgt dann aus dem Lemma von Lax–Milgram (Satz 1.8) die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung (1.48).

1.5 Diskretisierung der symmetrischen Formulierung

Der folgende Satz gibt Auskunft über die eindeutige Lösbarkeit einer diskreten Variationsformulierung und eine Fehlerabschätzung für die Näherungslösung.

Satz 1.9 (Ceas Lemma [24]). *Sei X ein Hilbert–Raum und $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und X –elliptische Bilinearform. Außerdem sei f eine beschränkte Linearform in X und $X_h \subset X$ ein endlich dimensionaler konformer Ansatzraum. Dann ist die diskrete Variationsformulierung*

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in X_h$$

eindeutig lösbar. Dabei gilt für die Näherungslösung $u_h \in X_h$ die Stabilitätsabschätzung

$$\|u_h\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}$$

und die quasi-optimale Fehlerabschätzung zur Lösung u der kontinuierlichen Variationsformulierung (1.45)

$$\|u - u_h\|_X \leq \frac{c_2^A}{c_1^A} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X. \quad (1.50)$$

Beweis. Siehe beispielsweise [125]. □

Es sei eine Randdiskretisierung $\Gamma_h = \bigcup_{\ell=1}^N \bar{\tau}_\ell$ mit N Randelementen τ_ℓ gegeben. Hier werden stets ebene Dreiecke als Randelemente τ_ℓ verwendet. Die bei einer eventuellen Approximation des Randes entstehenden Fehler werden hier nicht berücksichtigt. Sie können aber nach [91] analysiert werden. Eine Randdiskretisierung heißt zulässig, wenn zwei benachbarte Elemente entweder einen Knoten oder eine Kante gemeinsam haben. Somit sind also hängende Knoten ausgeschlossen. Die lokale Maschenweite des Randelementes τ_ℓ ist gegeben durch

$$h_\ell := \left(\int_{\tau_\ell} ds_x \right)^{1/2},$$

und

$$h := \max_{\ell=1, \dots, N} h_\ell$$

definiert die globale Maschenweite der Randdiskretisierung Γ_h . Die Randelemente τ_ℓ werden als formregulär vorausgesetzt, d.h. es existiert eine Konstante c_B mit

$$d_\ell \leq c_B h_\ell \text{ für alle } \ell = 1, \dots, N.$$

Dabei bezeichnet d_ℓ den Durchmesser des Randelements τ_ℓ . Eine Familie von Randdiskretisierungen $\{\Gamma_h\}$ heißt global gleichmäßig oder quasi-uniform, falls

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq c_G$$

mit einer globalen Konstanten $c_G \geq 1$ unabhängig von h gilt. Grundsätzlich sind alle später beschriebenen Methoden auch auf adaptive Gitter übertragbar. Wegen der besseren Lesbarkeit wird auf diesen Fall nur in Bemerkungen hingewiesen. Daher werden im folgenden stets zulässige, formreguläre und global gleichmäßige Randdiskretisierungen vorausgesetzt.

Für die Diskretisierung der symmetrischen Formulierung werden im folgenden endlich dimensionale Ansatzräume

$$S_h^1(\Gamma_N) = \text{span} \{\varphi_i\}_{i=1}^{M_N} \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) \quad \text{und} \quad S_h^0(\Gamma_D) = \text{span} \{\psi_i\}_{i=1}^{N_D} \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$$

verwendet. Dabei beschreibt $S_h^1(\Gamma)$ den Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen. Als Basis dienen die linearen und stetigen Hutfunktionen $\varphi_i(x)$, die im Knoten x_i den Wert 1 annehmen und in allen anderen Knoten verschwinden. Mit $S_h^0(\Gamma)$ wird der Raum der stückweise konstanten Funktionen bezeichnet. Dabei ist ψ_i die Basisfunktion, die auf dem Randelement τ_i konstant eins ist und auf dem restlichen Rand verschwindet. Mit N wird die Anzahl der Randelemente angegeben, während M die Anzahl der Knoten ist. Ein Index wie bei M_N oder N_D schränkt die jeweilige Anzahl auf den angegebenen Teilrand ein. M_N ist also die Anzahl der Neumann-Knoten, und N_D ist die Anzahl der Randelemente des Dirichlet-Randes. Der Ansatzraum $S_h^1(\Gamma)$ wird zur Approximation des Potentials bzw. der Verschiebungen u eingesetzt, während mit dem Ansatzraum $S_h^0(\Gamma)$ der Fluß bzw. die Spannungen t approximiert werden. Für die Ansatzräume $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$ gelten die folgenden Eigenschaften:

Lemma 1.10 (Approximationseigenschaft). Für den Ansatzraum $S_h^\eta(\Gamma)$, $\eta \in \{0, 1\}$, gilt für alle $v \in H^\beta(\Gamma)$ die Abschätzung

$$\inf_{v_h \in S_h^\eta} \|v - v_h\|_{H^\alpha(\Gamma)} \leq c_A h^{\beta-\alpha} \|v\|_{H^\beta(\Gamma)} \quad (1.51)$$

mit $\alpha \leq \eta$ und $\alpha \leq \beta \leq \eta + 1$.

Beweis. Siehe beispielsweise [5, 110, 125]. □

Lemma 1.11 (inverse Ungleichung). Für alle $v_h \in S_h^\eta(\Gamma)$, $\eta \in \{0, 1\}$, gilt für eine quasi-uniforme Randdiskretisierung die inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{H^\beta(\Gamma)} \leq c_I h^{\alpha-\beta} \|v_h\|_{H^\alpha(\Gamma)} \quad (1.52)$$

mit $\alpha \leq \beta \leq \eta$.

Beweis. Siehe beispielsweise [5, 110, 125]. □

Entsprechende Aussagen gelten auch für offene Randstücke wie Γ_D und Γ_N .

Gemäß obiger Beschreibung werden nun die stückweise linearen und stetigen bzw. die stückweise konstanten Basisfunktionen als Ansatzfunktionen verwendet,

$$\tilde{u}_h(x) = \sum_{i=1}^{M_N} \tilde{u}_i \varphi_i(x) \quad \text{und} \quad \tilde{t}_h(x) = \sum_{i=1}^{N_D} \tilde{t}_i \psi_i(x).$$

Somit wird also die Lösung $(\tilde{u}_h, \tilde{t}_h) \in Z_h := S_h^1(\Gamma_N) \times S_h^0(\Gamma_D)$ der diskreten Galerkin-Variationsformulierung

$$a(\tilde{u}_h, \tilde{t}_h; v_h, \tau_h) = f(v_h, \tau_h) \quad \text{für alle } (v_h, \tau_h) \in S_h^1(\Gamma_N) \times S_h^0(\Gamma_D) \quad (1.53)$$

gesucht. Die Voraussetzungen von Ceas Lemma, Satz 1.9, sind nach Abschnitt 1.4 erfüllt, so daß zusammen mit der Approximationseigenschaft (1.51) der folgende Satz gezeigt werden kann.

Satz 1.12 ([97, 125]). Seien $\tilde{u} \in \tilde{H}^{s+1}(\Gamma_N)$ und $\tilde{t} \in \tilde{H}_{pw}^s(\Gamma_D)$ die Lösungen der Variationsformulierung (1.48). Dann ist die diskrete Variationsformulierung (1.53) für die gewählten Ansatzräume $S_h^1(\Gamma_N)$ und $S_h^0(\Gamma_D)$ eindeutig lösbar, und es gilt bei geeigneten Fortsetzungen $\hat{g}_D \in H^{s+1}(\Gamma)$ und $\hat{g}_N \in H_{pw}^s(\Gamma)$ der Randdaten die Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq ch^{2s+1} \left[\|\tilde{u}\|_{H^{s+1}(\Gamma)}^2 + \|\tilde{t}\|_{H_{pw}^s(\Gamma)}^2 \right] \quad (1.54)$$

für $-1/2 \leq s \leq 1$.

Somit ist für eine hinreichend glatte Lösung ($s = 1$) eine optimale Konvergenzordnung von $3/2$ in der Energienorm zu erreichen. Mit Hilfe des Aubin–Nitsche–Tricks [59] und der inversen Ungleichung kann der jeweilige Fehler auch für $-2 \leq s \leq -1/2$ und für $s = 0$ abgeschätzt werden.

Lemma 1.13. Für $u \in H^2(\Gamma)$ und $t \in H_{pw}^1(\Gamma)$ gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2 \left[\|\tilde{u}\|_{H^2(\Gamma)}^2 + \|\tilde{t}\|_{H_{pw}^1(\Gamma)}^2 \right]^{1/2}, \quad (1.55)$$

$$\|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch \left[\|\tilde{u}\|_{H^2(\Gamma)}^2 + \|\tilde{t}\|_{H_{pw}^1(\Gamma)}^2 \right]^{1/2}. \quad (1.56)$$

Aus der symmetrischen Formulierung (1.47) läßt sich auch das zur diskreten Variationsformulierung (1.53) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} V_h & -K_h \\ K'_h & D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{t}} \\ \underline{\tilde{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

gewinnen. Dabei sind $\underline{\tilde{t}} \in \mathbb{R}^{N_D}$ und $\underline{\tilde{u}} \in \mathbb{R}^{M_N}$ die Vektoren der Koeffizienten \tilde{t}_ℓ bzw. \tilde{u}_j der Ansatzfunktionen \tilde{t}_h bzw. \tilde{u}_h . Die einzelnen Blöcke sind aus der Diskretisierung der zugehörigen Randintegraloperatoren auf dem jeweiligen Teilrand für $k, \ell = 1, \dots, N_D$ und $i, j = 1, \dots, M_N$ gegeben durch

$$\begin{aligned} V_h[\ell, k] &= \langle V\psi_k, \psi_\ell \rangle_{\Gamma_D}, \\ K_h[\ell, i] &= \langle K\varphi_i, \psi_\ell \rangle_{\Gamma_D}, \\ K'_h[j, k] &= \langle K'\psi_k, \varphi_j \rangle_{\Gamma_N}, \\ D_h[j, i] &= \langle D\varphi_i, \varphi_j \rangle_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Für die Vektoren der rechten Seite sind die Komponenten gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{1,\ell} &= \langle (\tfrac{1}{2}I + K)\hat{g}_D - V\hat{g}_N, \psi_\ell \rangle_{\Gamma_D}, \\ f_{2,j} &= \langle (\tfrac{1}{2}I - K')\hat{g}_N - D\hat{g}_D, \varphi_j \rangle_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Für den Laplace–Operator und die lineare Elastostatik ist die Steifigkeitsmatrix des linearen Gleichungssystems (1.57) blockschiefesymmetrisch und positiv definit. Desweiteren sind alle Blöcke vollbesetzt, d.h. der Speicheraufwand und der Rechenaufwand für eine Matrixvektormultiplikation sind von der Ordnung $\mathcal{O}(N_D^2 + M_N^2)$.

1.6 Approximation des Steklov–Poincaré–Operators

Der Steklov–Poincaré–Operator $S : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ kann aus dem System (1.21) durch Einsetzen der ersten Randintegralgleichung in die zweite in seiner symmetrischen Darstellung

$$S = D + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K\right) \quad (1.58)$$

angegeben werden. Er realisiert als Dirichlet–Neumann–Abbildung

$$\gamma_1 u(x) = (S\gamma_0 u)(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma \quad (1.59)$$

für die Lösung der homogenen Differentialgleichung die Beziehung der Cauchy–Daten $\gamma_0 u$ und $\gamma_1 u$ untereinander. Der Steklov–Poincaré–Operator S besitzt die gleichen Elliptizitätseigenschaften wie der hypersinguläre Operator D , da aufgrund der $H^{1/2}(\Gamma)$ –Elliptizität des inversen Einfachschichtpotentials V^{-1} die Abschätzung

$$\langle Sv, v \rangle_\Gamma = \langle Dv, v \rangle_\Gamma + \langle V^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K\right)v, \left(\frac{1}{2}I + K\right)v \rangle_\Gamma \geq \langle Dv, v \rangle_\Gamma \quad (1.60)$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt.

Aus den beiden Randintegralgleichungen des Systems (1.21) folgen für alle Funktionen $v \in \mathcal{R}$ mit $\gamma_1 v = 0$

$$\frac{1}{2}v(x) + (Kv)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma \quad (1.61)$$

und daher

$$(Dv)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma, \quad (1.62)$$

d.h. die Starrkörperbewegungen $v \in \mathcal{R}$ bilden die Kerne des Doppelschichtpotentials $\frac{1}{2}I + K$ und des hypersingulären Operators D .

Der Steklov–Poincaré–Operator S erlaubt allerdings keine direkte Berechnung der zugehörigen Steifigkeitsmatrix, da die Inverse V^{-1} des Einfachschichtpotentials in der Regel nicht explizit zur Verfügung steht. Es kann meist nur eine Approximation \tilde{S} des Steklov–Poincaré–Operators S realisiert werden. Die Anwendung auf eine Funktion $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ läßt sich jedoch nach der Definition (1.58) schreiben als

$$Sv = Dv + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w \quad \text{mit} \quad w = V^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K\right)v.$$

$w \in H^{1/2}(\Gamma)$ läßt sich also als eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\langle Vw, \tau \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K\right)v, \tau \right\rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \tau \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

bestimmen. Mit den für die symmetrische Formulierung beschriebenen Ansatzfunktionen definiert die Näherungslösung $w_h \in S_h^0(\Gamma)$ der diskreten Galerkin–Variationsformulierung

$$\langle Vw_h, \tau_h \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K\right)v, \tau_h \right\rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \tau_h \in S_h^0(\Gamma)$$

dann eine Approximation \tilde{S} des Steklov–Poincaré–Operators S als

$$\tilde{S}v = Dv + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w_h. \quad (1.63)$$

Lemma 1.14. *Die durch (1.63) definierte Approximation \tilde{S} des Steklov–Poincaré–Operators S ist beschränkt,*

$$\|\tilde{S}v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_2^{\tilde{S}} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma),$$

und aufgrund der Abschätzung

$$\langle \tilde{S}v, v \rangle_{\Gamma} \geq \langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (1.64)$$

übertragen sich die Elliptizitätsaussagen des hypersingulären Operators D auf den approximierten Steklov–Poincaré–Operator \tilde{S} . Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$\|(S - \tilde{S})v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c \inf_{\tau_h \in S_h^0(\Gamma)} \|Sv - \tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (1.65)$$

Beweis. Siehe beispielsweise [126]. □

Die Fehlerabschätzung (1.65) garantiert in Verbindung mit dem Strang–Lemma [26], daß durch die Approximation \tilde{S} des Steklov–Poincaré–Operators S die Konvergenzordnung des entsprechenden Verfahrens nicht gestört wird.

2 Behandlung von Neumann–Randwertproblemen

In diesem Kapitel wird nun der in [125, 96] für den Laplace–Operator dargestellte Zugang zur Behandlung des Neumann–Randwertproblems auch auf die lineare Elastostatik übertragen. Das Neumann–Randwertproblem der linearen Elastostatik wurde beispielsweise auch in [60] betrachtet. Zur Bestimmung der fehlenden Cauchy–Daten $\gamma_0 u$ wird die hypersinguläre Randintegralgleichung (1.20) verwendet. Statt den entsprechenden Unterraum zu diskretisieren, wird der hypersinguläre Operator geeignet stabilisiert. Zur Vorkonditionierung in der numerischen Realisierung wird, entsprechend des Konzepts der Operatoren entgegengesetzter Ordnung [88, 128], das Einfachschichtpotential verwendet. Im folgenden wird dieser Zugang zunächst kurz beschrieben und auf die lineare Elastostatik übertragen. Dabei wird allerdings nicht das Einfachschichtpotential V_E der linearen Elastostatik sondern das Einfachschichtpotential V_L des Laplace–Operators für eine in der Anwendung günstigere, blockweise Vorkonditionierung verwendet.

2.1 Die hypersinguläre Randintegralgleichung und der Operator entgegengesetzter Ordnung

Die Lösung des Neumann–Randwertproblems

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= 0 && \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma \end{aligned}$$

mit der Lösbarkeitsbedingung (1.15) wird durch die Darstellungsformel (1.16) beschrieben. Die zu deren Auswertung fehlenden Dirichlet–Daten $\gamma_0 u(x)$ können beispielsweise aus der hypersingulären Randintegralgleichung des Systems (1.21)

$$(D\gamma_0 u)(x) = \frac{1}{2}g_N(x) - (K'g_N)(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma$$

bestimmt werden. Damit die Randintegralgleichung lösbar ist, muß die rechte Seite im Bild $\text{Im}(D) = (\ker(D))^0$ des hypersingulären Operators liegen. Dabei ist $(\ker(D))^0$ definiert als der durch das Dualitätsprodukt induzierte Orthogonalraum von $\ker(D)$,

$$(\ker(D))^0 := \{v \in H^{-1/2}(\Gamma) : \langle v, w \rangle_\Gamma = 0 \text{ für alle } w \in \ker(D)\}.$$

Wegen (1.62) ist der Kern des hypersingulären Operators durch die Starrkörperbewegungen $v_k \in \mathcal{R}$ gegeben. Die Bildeigenschaft läßt sich aufgrund der Kerneigenschaft (1.61) des Doppelschichtpotentials K und der Lösbarkeitsbedingungen (1.15) nachweisen

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}g_N - K'g_N, v_k \right\rangle_\Gamma &= \langle g_N, v_k \rangle_\Gamma - \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K'\right)g_N, v_k \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle g_N, v_k \rangle_\Gamma - \langle g_N, \left(\frac{1}{2}I + K\right)v_k \rangle_\Gamma = 0 \end{aligned}$$

für alle $v_k \in \mathcal{R}$. Aufgrund der $H_*^{1/2}(\Gamma)$ –Elliptizität (1.35) des hypersingulären Integraloperators existiert nach dem Lemma von Lax–Milgram (Satz 1.8) eine eindeutige Lösung $\gamma_0 u \in H_*^{1/2}(\Gamma)$ der Randintegralgleichung bzw. der äquivalenten Variationsformulierung:

Gesucht ist $\gamma_0 u \in H_*^{1/2}(\Gamma)$, so daß

$$\langle D\gamma_0 u, v \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K'\right)g_N, v \right\rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v \in H_*^{1/2}(\Gamma) \quad (2.1)$$

erfüllt ist.

Zur Konstruktion eines Vorkonditionierers für den hypersingulären Operator D bzw. den Steklov–Poincaré–Operator S wird hier das Einfachschichtpotential V als Operator entgegengesetzter Ordnung [88, 128] gewählt. Die Eignung des Einfachschichtpotentials beruht auf der folgenden Eigenschaft.

Lemma 2.1. *Für das Einfachschichtpotential V und den hypersingulären Operator D gelten die Spektraläquivalenzungleichungen*

$$c_1^V c_1^D \langle V^{-1}\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma \leq \langle D\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma \leq \frac{1}{4} \langle V^{-1}\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \tilde{v} \in H_*^{1/2}(\Gamma). \quad (2.2)$$

Beweis. Gegeben sei $\tilde{v} \in H_*^{1/2}(\Gamma)$. Dann existiert nach dem Lemma von Lax–Milgram (Satz 1.8) ein $\tilde{w} \in H_{\mathcal{R}}^{-1/2}(\Gamma)$ mit $\tilde{v} = V\tilde{w}$. Unter Verwendung der Beziehungen (1.29) und (1.30) zwischen den Randintegraloperatoren sowie der Elliptizität (1.32) des Einfachschichtpotentials V läßt sich dann die rechte Ungleichung zeigen:

$$\begin{aligned} \langle D\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma &= \langle DV\tilde{w}, V\tilde{w} \rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K'\right)\tilde{w}, \left(\frac{1}{2}I + K\right)V\tilde{w} \right\rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K'\right)\tilde{w}, V\left(\frac{1}{2}I + K'\right)\tilde{w} \right\rangle_\Gamma \\ &= \frac{1}{4} \langle \tilde{w}, V\tilde{w} \rangle_\Gamma + \frac{1}{2} \langle \tilde{w}, VK'\tilde{w} \rangle_\Gamma - \frac{1}{2} \langle K'\tilde{w}, V\tilde{w} \rangle_\Gamma - \langle K'\tilde{w}, VK'\tilde{w} \rangle_\Gamma \\ &= \frac{1}{4} \langle \tilde{w}, V\tilde{w} \rangle_\Gamma - \langle K'\tilde{w}, VK'\tilde{w} \rangle_\Gamma \\ &\leq \frac{1}{4} \langle V^{-1}\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Mit der Elliptizität des Einfachschichtpotentials V erhält man

$$\begin{aligned} \|V^{-1}u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{0 \neq v \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{|\langle V^{-1}u, v \rangle_\Gamma|}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \sup_{0 \neq w \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{|\langle u, w \rangle_\Gamma|}{\|Vw\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \\ &\leq \frac{1}{c_1^V} \frac{|\langle u, w \rangle_\Gamma|}{\|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \leq \frac{1}{c_1^V} \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, und somit gilt

$$\langle V^{-1}u, u \rangle_\Gamma \leq \|V^{-1}u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \frac{1}{c_1^V} \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } u \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Zusammen mit der $H_*^{1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität (1.35) des hypersingulären Operators D folgt dann für alle $\tilde{v} \in H^{1/2}(\Gamma)$ die linke Ungleichung,

$$\langle D\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma \geq c_1^D \|\tilde{v}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq c_1^V c_1^D \langle V^{-1}\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma.$$

□

2.2 Spektraläquivalenzungleichungen des hypersingulären Operators D_E und des Einfachschichtpotentials V_L

Die Spektraläquivalenzungleichungen (2.2) gelten sowohl für die Laplace-Gleichung als auch in der linearen Elastostatik. Für eine Vorkonditionierung des hypersingulären Operators D_E mit dem Einfachschichtpotential V_E der linearen Elastostatik sind lineare Basisfunktionen zu verwenden. Dadurch werden die Implementierung, die Erstellung der zugehörigen Galerkin-Matrix des Einfachschichtpotentials V_E und deren Anwendung relativ aufwendig. Daher wird zur Vorkonditionierung stattdessen das Einfachschichtpotential V_L der Laplace-Gleichung komponentenweise verwendet. Dafür müssen die geeigneten Räume definiert und die entsprechenden Spektraläquivalenzabschätzungen gezeigt werden.

Der geeignete Raum für die lineare Elastostatik wird nun durch das Einfachschichtpotential V_L des Laplace-Operators induziert,

$$H_L^{1/2}(\Gamma) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : \langle V_L^{-1}v, v_k \rangle_\Gamma = 0 \text{ für alle } v_k \in \mathcal{R}\}. \quad (2.3)$$

Für die Laplace-Gleichung entspricht diese Definition der des Raumes $H_*^{1/2}(\Gamma)$. Daher werden im folgenden weiterhin beide Fälle gemeinsam behandelt. Mit Hilfe des folgenden Lemmas kann für die lineare Elastostatik die Elliptizität des hypersingulären Operators D_E von $H_*^{1/2}(\Gamma)$ auf $H_L^{1/2}(\Gamma)$ übertragen werden.

Lemma 2.2 ([64]). Sei \mathcal{H} ein Hilbert–Raum und $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform, welche die Gårdingsche Ungleichung

$$\operatorname{Re} \{a(v, v) + (Cv, v)_{\mathcal{H}}\} \geq \alpha_0 \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H} \quad (2.4)$$

mit einer Konstanten $\alpha_0 > 0$ und einem kompakten, linearen Operator C erfüllt. Weiter seien die Bedingungen

$$\begin{cases} \operatorname{Re} a(v, v) \geq 0 & \text{für alle } v \in \mathcal{H} \\ a(v, v) = 0 \implies v = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

erfüllt. Dann ist $a(\cdot, \cdot)$ \mathcal{H} -elliptisch.

Beweis. Die Gültigkeit der Aussage des Lemmas wird mittels eines Widerspruchsbeweises nachgewiesen. Es wird also angenommen, daß die Sesquilinearform $a(\cdot, \cdot)$ nicht \mathcal{H} -elliptisch ist. Dann existiert für alle $\alpha_j > 0$ ein $v_j \in \mathcal{H}$, so daß

$$\operatorname{Re} \{a(v_j, v_j)\} < \alpha_j \|v_j\|_{\mathcal{H}}^2$$

gilt. Somit existiert für $\alpha_j \rightarrow 0$ mit $j \rightarrow \infty$ eine Folge $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\|v_j\|_{\mathcal{H}} = 1$, so daß gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{a(v_j, v_j)\} = 0. \quad (2.6)$$

Aufgrund der schwachen Kompaktheit der Einheitsphäre in Hilbert–Räumen enthält die beschränkte Folge $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\|v_j\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ für $j \in \mathbb{N}$ eine schwach konvergente Teilfolge $\{v_{j'}\}_{j' \in \mathbb{N}} \subset \{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{j' \rightarrow \infty} (g, v_{j'})_{\mathcal{H}} = (g, v_0)_{\mathcal{H}} \quad \text{für jedes } g \in \mathcal{H}$$

mit einem Grenzwert $v_0 \in \mathcal{H}$. Mit der Gårdingschen Ungleichung folgt für jedes Element $v_{j'}$ dieser Teilfolge

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|v_{j'} - v_0\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \operatorname{Re} \{a(v_{j'} - v_0, v_{j'} - v_0) + (C(v_{j'} - v_0), v_{j'} - v_0)_{\mathcal{H}}\} \\ &= \operatorname{Re} \{a(v_{j'}, v_{j'}) - a(v_0, v_{j'}) - a(v_{j'}, v_0) + a(v_0, v_0) \\ &\quad + (Cv_{j'}, v_{j'} - v_0)_{\mathcal{H}} - (Cv_0, v_{j'} - v_0)_{\mathcal{H}}\} \end{aligned}$$

Im folgenden wird für die einzelnen Terme der Grenzwert für $j' \rightarrow \infty$ bestimmt. Dies wird dann zu $\lim_{j' \rightarrow \infty} \|v_{j'} - v_0\|_{\mathcal{H}} = 0$ führen. Da die Folge $\{v_{j'}\}_{j' \in \mathbb{N}}$ beschränkt und der Operator C kompakt ist, existiert eine weitere Teilfolge $\{v_{j''}\}_{j'' \in \mathbb{N}} \subset \{v_{j'}\}_{j' \in \mathbb{N}}$ mit starker Konvergenz $Cv_{j''} \rightarrow g \in \mathcal{H}$ für $j'' \rightarrow \infty$. Aus der schwachen Konvergenz dieser Teilfolge $\{v_{j''}\}_{j'' \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $v_0 \in \mathcal{H}$ folgt daraus für $j'' \rightarrow \infty$

$$(Cv_{j''}, v_{j''} - v_0)_{\mathcal{H}} = (Cv_{j''} - g, v_{j''} - v_0)_{\mathcal{H}} + (g, v_{j''} - v_0)_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Entsprechend folgt für $Cv_0 \in \mathcal{H}$ mit $j'' \rightarrow \infty$

$$(Cv_0, v_{j''} - v_0)_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Mit Hilfe der Riesz–Abbildung J kann gezeigt werden, daß für $j'' \rightarrow \infty$ gilt

$$\begin{aligned} a(v_0, v_{j''}) &= (Av_{j''})(v_0) = (v_0, JAv_{j''})_{\mathcal{H}} \\ &= ((JA)^*v_0, v_{j''})_{\mathcal{H}} \rightarrow ((JA)^*v_0, v_0)_{\mathcal{H}} = a(v_0, v_0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Schreibt man die Gårdingsche Ungleichung nun nochmals für $v_{j''}$ auf, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|v_{j''} - v_0\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \operatorname{Re} a(v_{j''}, v_{j''}) + \operatorname{Re} \{a(v_0, v_0) - a(v_0, v_{j''})\} - \operatorname{Re} a(v_{j''}, v_0) \\ &\quad + \operatorname{Re} \{(Cv_{j''}, v_{j''} - v_0)_{\mathcal{H}} - (Cv_0, v_{j''} - v_0)_{\mathcal{H}}\}. \end{aligned}$$

Für $j'' \rightarrow \infty$ verschwindet der Grenzwert des ersten Terms wegen (2.6), der des zweiten Terms wegen (2.9), der des vierten Terms wegen (2.7) und der des letzten Terms wegen (2.8), so daß gilt

$$\lim_{j'' \rightarrow \infty} \alpha_0 \|v_{j''} - v_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq - \lim_{j'' \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a(v_{j''}, v_0).$$

Für die verbleibende Sesquilinearform kann wie oben mittels der Riesz–Abbildung J

$$a(v_{j''}, v_0) \rightarrow a(v_0, v_0)$$

für $j'' \rightarrow \infty$ gezeigt werden. Somit gilt also insgesamt

$$0 \leq \lim_{j'' \rightarrow \infty} (\alpha_0 \|v_{j''} - v_0\|_{\mathcal{H}}^2) \leq -\operatorname{Re} a(v_0, v_0).$$

Mit Voraussetzung (2.5) folgt daraus

$$\lim_{j'' \rightarrow \infty} \|v_{j''} - v_0\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} a(v_0, v_0) = 0.$$

Weiter folgt aus (2.5) $v_0 = 0$ und somit der Widerspruch zu

$$\|v_0\|_{\mathcal{H}} = \lim_{j'' \rightarrow \infty} \|v_{j''}\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

□

Lemma 2.3. *Der hypersinguläre Operator D ist $H_L^{1/2}(\Gamma)$ –elliptisch, d.h. es gilt*

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \geq \tilde{c}_1^D \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } v \in H_L^{1/2}(\Gamma). \quad (2.10)$$

Beweis. Für den Laplace–Operator ist die Aussage äquivalent zu Lemma 1.3. Für die lineare Elastostatik folgt die Behauptung direkt aus Lemma 2.2, sobald dessen Voraussetzungen geprüft sind. Für den hypersingulären Operator D_E der linearen Elastostatik gilt die Gårdingsche Ungleichung [28]. Außerdem ist aufgrund der $H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma)$ –Elliptizität (1.37) und der Kerneigenschaft (1.62) $\langle D_E v, v \rangle_{\Gamma} \geq 0$ für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ erfüllt.

Somit bleibt nur noch die zweite Voraussetzung aus (2.5) zu prüfen. Für $v \in H_L^{1/2}(\Gamma)$ gelte $\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} = 0$. Wegen der $H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma)$ –Elliptizität (1.37) des hypersingulären Operators

für alle Funktionen aus $H^{1/2}(\Gamma)$, die orthogonal auf den Starrkörperbewegungen stehen, muß also v aus dem Raum \mathcal{R} der Starrkörperbewegungen sein. Da nun $v \in H_L^{1/2}(\Gamma)$, d.h.

$$\langle V_L^{-1}v, v_k \rangle_\Gamma = 0 \quad \text{für alle } v_k \in \mathcal{R}$$

gilt, folgt aus $v \in \mathcal{R}$

$$\langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma = 0.$$

Aufgrund der Elliptizität des Einfachschichtpotentials V_L wird durch das Skalarprodukt $\langle V_L^{-1}\cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ eine zur $H^{1/2}(\Gamma)$ –Norm äquivalente Norm induziert. Daher folgt dann $\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 = 0$ und somit $v = 0$. Nun liefert Lemma 2.2 die Behauptung. \square

Das folgende Lemma zeigt die Eignung des Einfachschichtpotential V_L des Laplace–Operators zur Vorkonditionierung des hypersingulären Operators D_E der linearen Elastostatik.

Lemma 2.4. *Für das Einfachschichtpotential V_L der Laplace–Gleichung und den hypersingulären Operator D_E der linearen Elastostatik gilt für alle $v \in H_L^{1/2}(\Gamma)$ und $\nu \neq 1/2$:*

$$c_1^{V_L} \tilde{c}_1^{D_E} \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma \leq \langle D_E v, v \rangle_\Gamma \leq \frac{1}{4} \frac{E}{1-2\nu} \frac{1-\nu}{1+\nu} \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma. \quad (2.11)$$

Beweis. Der Beweis ist im wesentlichen identisch mit dem Beweis aus Lemma 2.1. Daher werden hier nur die notwendigen Änderungen besprochen. Die untere Abschätzung erfolgt ganz analog unter Verwendung der $H_L^{1/2}(\Gamma)$ –Elliptizität (2.10) des hypersingulären Operators D_E . Dabei wird statt gegen das Einfachschichtpotential V_E der linearen Elastostatik nun gegen das Einfachschichtpotential V_L der Laplace–Gleichung komponentenweise abgeschätzt,

$$\langle D_E v, v \rangle_\Gamma \geq \tilde{c}_1^{D_E} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq c_1^{V_L} \tilde{c}_1^{D_E} \sum_{i=1}^3 \langle V_L^{-1}v_i, v_i \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } u \in H_L^{1/2}(\Gamma).$$

Für die Abschätzung nach oben wird als Ausgangspunkt die entsprechende Abschätzung aus (2.2) gegenüber dem Einfachschichtpotential V_E der linearen Elastostatik verwendet. Daraus erhält man mit

$$\langle V_E^{-1}v, v \rangle_\Gamma \leq \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{E}{1-2\nu} \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma$$

die gewünschte Abschätzung. Die hier verwendete Abschätzung kann aufgrund der Darstellung der Fundamentallösung der linearen Elastostatik [123]

$$U_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\tilde{U}_{ij}^*(x, y) + (1-2\nu) \delta_{ij} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \right]$$

mittels der Fundamentallösungen des Stokes–Problems

$$\tilde{U}_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^3} \right]$$

und der Laplace–Gleichung gewonnen werden. Somit gilt für die Bilinearform des Einfachschichtpotentials V_E

$$\langle V_E t, t \rangle_\Gamma = \frac{1}{E} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} [\langle V_S t, t \rangle_\Gamma + (1 - 2\nu) \langle V_L t, t \rangle_\Gamma],$$

und daraus folgt mit der Semi–Elliptizität des Einfachschichtpotentials V_S des Stokes–Systems

$$\langle V_E t, t \rangle_\Gamma \geq \frac{1}{E} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (1 - 2\nu) \langle V_L t, t \rangle_\Gamma.$$

Diese Abschätzung ist scharf. Dabei wird die Gleichheit in einfachen Beispielen für $t(x) = n(x)$ mit dem Normalenvektor $n(x)$ angenommen. Mit der Transformation dieser Abschätzung auf die inversen Operatoren folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.1. Die Konstante der Abschätzung nach oben in (2.11) ist explizit bekannt. Dies hat erhebliche Vorteile für eine Skalierung. Im Fall $\nu = 1/2$ ist die Abschätzung (2.11) nicht mehr für eine Vorkonditionierung ausreichend. Für diesen Fall sollte die Formulierung allerdings auch entsprechend [123] modifiziert werden.

2.3 Stabilisierung des hypersingulären Operators

Zur Konstruktion der angestrebten Stabilisierung werden nun die Laplace–Gleichung und die lineare Elastostatik wieder gemeinsam betrachtet. Dazu wird mit der Dimension $\dim \mathcal{R}$ des Raumes \mathcal{R} der Starrkörperbewegungen gearbeitet. Nun wird wieder das Neumann–Randwertproblem bzw. die zugehörige Variationsformulierung betrachtet: Gesucht ist $\gamma_0 u \in H_L^{1/2}(\Gamma)$, so daß

$$\langle D\gamma_0 u, v \rangle_\Gamma = \langle (\frac{1}{2}I - K')g_N, v \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v \in H_L^{1/2}(\Gamma)$$

erfüllt ist. Wie bei der Argumentation zur eindeutigen Lösbarkeit der Variationsformulierung (2.1) des Neumann–Problems im Raum $H_*^{1/2}(\Gamma)$ folgt auch hier die eindeutige Lösbarkeit in $H_L^{1/2}(\Gamma)$. Statt den Unterraum $H_L^{1/2}(\Gamma)$ zu diskretisieren, werden die Nebenbedingungen mittels Lagrange–Multiplikatoren in die Variationsformulierung eingebaut:

Gesucht sind $(\gamma_0 u, \underline{\lambda}) \in H^{1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}^{\dim \mathcal{R}}$, so daß

$$\begin{aligned} \langle D\gamma_0 u, v \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \lambda_k \langle v, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma &= \langle (\frac{1}{2}I - K')g_N, v \rangle_\Gamma \\ \langle \gamma_0 u, \tilde{w}_\ell \rangle_\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\ell = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$ gilt. Dabei sind die Funktionen $\tilde{w}_\ell \in H^{-1/2}(\Gamma)$ noch geeignet zu wählen. Die Idee besteht nun darin, aus dem Anteil mit den Lagrange–Multiplikatoren und den Nebenbedingungen eine Stabilisierung für den hypersingulären Operator zu konstruieren, die gewährleistet, daß die Lösung des Problems im Unterraum $H_L^{1/2}(\Gamma)$ gesucht wird.

Zunächst wird gezeigt, daß in obiger Variationsformulierung $\lambda_\ell = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$ ist. Dazu wird die hypersinguläre Integralgleichung in (2.12) im Fall des homogenen Neumann–Problems mit $g_N \equiv 0$ mit Basisvektoren \tilde{v}_ℓ des Raumes der Starrkörperbewegungen getestet,

$$\langle D\gamma_0 u, \tilde{v}_\ell \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \lambda_k \langle \tilde{v}_\ell, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma = 0.$$

Zunächst lassen sich diese Bedingungen mit (1.62) auf

$$\sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \lambda_k \langle \tilde{v}_\ell, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma = 0.$$

reduzieren. Wird die Basis \tilde{v}_k des Raumes der Starrkörperbewegungen so konstruiert, daß

$$\langle \tilde{v}_\ell, V_L^{-1} \tilde{v}_k \rangle_\Gamma = \langle \tilde{v}_\ell, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma = \delta_{\ell k} \langle \tilde{v}_\ell, V_L^{-1} \tilde{v}_k \rangle_\Gamma$$

gilt, so folgt aufgrund der Elliptizität (1.32) des Einfachschichtpotentials bzw. des inversen Einfachschichtpotentials, daß $\lambda_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$ ist.

Somit können für die rechten Seiten der zusätzlichen Gleichungen die Nullen durch λ_ℓ/α_ℓ mit Skalierungsparametern $\alpha_\ell \neq 0$ ersetzt werden. Durch Einsetzen dieser Gleichungen können dann die Lagrange–Multiplikatoren λ_k aus der ersten Zeile eliminiert werden. Das resultierende, äquivalente Variationsproblem lautet somit:
Gesucht ist $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\Gamma)$, so daß

$$\langle D\gamma_0 u, v \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k \langle \gamma_0 u, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \langle v, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma = \langle (\frac{1}{2}I - K')g_N, v \rangle_\Gamma \quad (2.13)$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt. Dabei sind die Skalierungsparameter α_k noch geeignet zu wählen. Die Wahl $\tilde{w}_k := V_L^{-1} \tilde{v}_k$ für die Stabilisierung wird sich in Satz 2.5 noch als günstig für die Wahl der α_k in Bezug auf die Vorkonditionierung erweisen. Dort wird auch die Möglichkeit einer anderen Wahl der Funktionen \tilde{w}_k diskutiert. Außerdem garantiert die hier getroffene Wahl, daß die gesuchte Lösung $\gamma_0 u \in H_L^{1/2}(\Gamma)$ ist, da für Testfunktionen $v = v_\ell \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \alpha_\ell \langle \gamma_0 u, V_L^{-1} \tilde{v}_\ell \rangle_\Gamma \langle v_\ell, V_L^{-1} \tilde{v}_\ell \rangle_\Gamma &= \langle D\gamma_0 u, v_\ell \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k \langle \gamma_0 u, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \langle v_\ell, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \\ &= \langle (\frac{1}{2}I - K')g_N, v_\ell \rangle_\Gamma = 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\langle \gamma_0 u, V_L^{-1} \tilde{v}_\ell \rangle_\Gamma = 0$$

für alle $\ell = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$ gelten.

2.4 Konstruktion der Basisvektoren der Stabilisierung

Zur Konstruktion der Basis \tilde{v}_k des Raumes der Starrkörperbewegungen bzw. der zugehörigen $\tilde{w}_k = V_L^{-1}\tilde{v}_k$ kann das Verfahren von Gram–Schmidt zur Konstruktion einer orthogonalen Basis bezüglich des Skalarprodukts $\langle V_L^{-1}\cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ verwendet werden. Im Fall der Laplace–Gleichung ist die Wahl mit $\tilde{v}_1 = 1$ und mit der natürlichen Dichte $w_{eq} = \tilde{w}_1 = V_L^{-1}1$ trivial. In der linearen Elastostatik soll hier nur das blockweise angewandte Einfachschichtpotential der Laplace–Gleichung verwendet werden. Dadurch reduzieren sich die Kosten zur Erstellung der Basis gegenüber dem Fall des Einfachschichtpotentials der linearen Elastostatik erheblich. Dabei können insbesondere die Verschiebungen direkt für die neue Basis verwendet werden. Die Berechnung der Basis \tilde{v}_k des Raumes der Starrkörperbewegungen bzw. der zugehörigen \tilde{w}_k kann einmalig im voraus erfolgen:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{w}_1 &= \begin{pmatrix} w_{eq} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ w_{eq} \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{eq} \end{pmatrix}, \text{ mit } w_{eq} = V_L^{-1}1, \\ \tilde{v}_4 &= v_4 - \frac{\langle v_4, \tilde{w}_1 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_1, \tilde{w}_1 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_1 - \frac{\langle v_4, \tilde{w}_2 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_2, \tilde{w}_2 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_2, \quad \tilde{w}_4 = V_L^{-1}\tilde{v}_4 \\ \tilde{v}_5 &= v_5 - \frac{\langle v_5, \tilde{w}_2 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_2, \tilde{w}_2 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_2 - \frac{\langle v_5, \tilde{w}_3 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_3, \tilde{w}_3 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_3 - \frac{\langle v_5, \tilde{w}_4 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_4, \tilde{w}_4 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_4, \quad \tilde{w}_5 = V_L^{-1}\tilde{v}_5 \\ \tilde{v}_6 &= v_6 - \frac{\langle v_6, \tilde{w}_1 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_1, \tilde{w}_1 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_1 - \frac{\langle v_6, \tilde{w}_3 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_3, \tilde{w}_3 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_3 - \frac{\langle v_6, \tilde{w}_4 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_4, \tilde{w}_4 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_4 - \frac{\langle v_6, \tilde{w}_5 \rangle_\Gamma}{\langle \tilde{v}_5, \tilde{w}_5 \rangle_\Gamma} \tilde{v}_5, \quad \tilde{w}_6 = V_L^{-1}\tilde{v}_6\end{aligned}$$

Somit genügen in diesem Fall die vier Invertierungen $V_L^{-1}1, V_L^{-1}x_1, V_L^{-1}x_2$ und $V_L^{-1}x_3$ des Einfachschichtpotentials V_L zur Bestimmung einer geeigneten Basis.

2.5 Wahl der Skalierungsparameter

Es gilt nun, die Skalierungsparameter α_k für $k = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$ geeignet zu wählen, um eine Verschlechterung der Konditionszahl des entsprechenden linearen Gleichungssystems zu vermeiden. Somit sollen die Spektraläquivalenzungleichungen (2.2) auch für den modifizierten hypersingulären Operator \hat{D} mit

$$\langle \hat{D}u, v \rangle_\Gamma = \langle Du, v \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k \langle u, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \langle v, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \quad (2.14)$$

gelten.

Satz 2.5. Für das Einfachschichtpotential V_L des Laplace–Operators und für den modifizierten hypersingulären Operator \widehat{D} gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

$$\sigma_1 \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma \leq \langle \widehat{D}v, v \rangle_\Gamma \leq \sigma_2 \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma \quad (2.15)$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit den Konstanten

$$\sigma_1 = \min_{k=1, \dots, \dim \mathcal{R}} \{c_1^{V_L} \widetilde{c}_1^D, \alpha_k \langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma\}, \quad \sigma_2 = \max_{k=1, \dots, \dim \mathcal{R}} \left\{ \frac{1}{4} c_E, \alpha_k \langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma \right\}.$$

Dabei ist $c_E = 1$ für den hypersingulären Operator D_L der Potentialgleichung, während für die lineare Elastostatik

$$c_E = \frac{E}{1 - 2\nu} \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$$

gilt.

Beweis. Einfaches Nachrechnen zeigt, daß für die Zerlegung von $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ in

$$v = \widetilde{v} + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \beta_k \widetilde{v}_k, \quad \beta_k = \frac{\langle v, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma}{\langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma}$$

$\widetilde{v} \in H_L^{1/2}(\Gamma)$ gilt. Zunächst kann die Bilinearform des inversen Einfachschichtpotentials V_L^{-1} aufgrund der Orthogonalität von \widetilde{v} mit $\widetilde{w}_k = V_L^{-1} \widetilde{v}_k$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma &= \langle V_L^{-1}\widetilde{v}, \widetilde{v} \rangle_\Gamma + 2 \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \beta_k \langle \widetilde{v}, V_L^{-1}\widetilde{v}_k \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \sum_{\ell=1}^{\dim \mathcal{R}} \beta_k \beta_\ell \langle \widetilde{v}_k, V_L^{-1}\widetilde{v}_\ell \rangle_\Gamma \\ &= \langle V_L^{-1}\widetilde{v}, \widetilde{v} \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \frac{(\langle v, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma)^2}{\langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für $\widetilde{v} \in H_L^{1/2}(\Gamma)$ können nun die Spektraläquivalenzungleichungen (2.11) für die lineare Elastostatik bzw. (2.2) für den Laplace–Operator angewendet werden und mittels der Darstellung (2.16) auf den kompletten $H^{1/2}(\Gamma)$ übertragen werden. Dazu wird zunächst unter Ausnutzung der Eigenschaft (1.62), daß die Starrkörperbewegungen im Kern von D liegen, die Abschätzung nach oben betrachtet:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D}v, v \rangle_\Gamma &= \langle D\widetilde{v}, \widetilde{v} \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k (\langle v, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} c_E \langle V_L^{-1}\widetilde{v}, \widetilde{v} \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k \langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma \frac{(\langle v, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma)^2}{\langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{4} c_E, \alpha_k \langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma \right\} \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung nach unten können die gleichen Techniken angewandt werden, so daß aus

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{D}v, v \rangle_\Gamma &= \langle D\tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k (\langle v, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma)^2 \\
&\geq c_1^{V_L} \tilde{c}_1^D \langle V_L^{-1} \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k \langle \tilde{v}_k, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \frac{(\langle v, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma)^2}{\langle \tilde{v}_k, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma} \\
&\geq \min \{ c_1^{V_L} \tilde{c}_1^D, \alpha_k \langle \tilde{v}_k, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma \} \langle V_L^{-1} v, v \rangle_\Gamma
\end{aligned}$$

die Behauptung folgt. \square

Somit ist es nun möglich die einzelnen Stabilisierungsterme geeignet zu skalieren.

Folgerung 2.6. Für die Wahl

$$\alpha_k = \frac{1}{4} c_E \frac{1}{\langle \tilde{v}_k, \tilde{w}_k \rangle_\Gamma} \quad (2.17)$$

der Skalierungsparameter der Stabilisierung des modifizierten hypersingulären Operators \widehat{D} gelten die optimalen Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^{V_L} \tilde{c}_1^D \langle V_L^{-1} v, v \rangle_\Gamma \leq \langle \widehat{D}v, v \rangle_\Gamma \leq \frac{1}{4} c_E \langle V_L^{-1} v, v \rangle_\Gamma \quad (2.18)$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Bemerkung 2.2. Im Beweis von Satz 2.5 hat sich die Orthogonalität der Basisvektoren bzgl. des Skalarprodukts $\langle V_L^{-1} \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ als vorteilhaft erwiesen, da mit der Darstellung (2.16) eine optimale Abschätzung gefunden werden konnte. Allerdings ist dazu die Bestimmung einer orthogonalen Basis bzgl. des Skalarprodukts $\langle V^{-1} \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ bzw. $\tilde{w}_k = V^{-1} \tilde{v}_k$ notwendig. Für die Laplace-Gleichung kann bei leicht veränderten Abschätzungen auch $\tilde{v} = 1$ als Stabilisierungsvektor verwendet werden. Die direkte Verwendung der Starrkörperbewegungen $v_k \in \mathcal{R}$ scheint daher auch für die Stabilisierung des hypersingulären Operators D_E der linearen Elastostatik interessant. Allerdings müssen dazu wohl nicht verschwindende Skalarprodukte $\langle \hat{v}_k, \hat{v}_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)}$ in die Stabilisierung eingebaut werden, um eine Abschätzung wie in Satz 2.5 zeigen zu können. Dadurch wird die Stabilisierung jedoch erheblich aufwendiger und wird daher hier nicht weiter betrachtet.

Bei der Verwendung des inversen Einfachschichtpotentials der Laplace-Gleichung als blockweisen Vorkonditionierer für den hypersingulären Operator D_E der linearen Elastostatik ist der Aufwand, der mit den vier Invertierungen des Einfachschichtpotentials der Laplace-Gleichung für die Konstruktion der Stabilisierung verbunden ist, vergleichsweise gering, siehe später Tabelle 2.1. Daher erscheint die beschriebene Stabilisierung als sinnvoll einsetzbar, den Fall fast inkompressibler Materialien ausgenommen. Für diesen Fall sollte die betrachtete Formulierung allerdings auch entsprechend [123] modifiziert werden.

2.6 Diskretisierung der Vorkonditionierung

Zur Diskretisierung der Variationsformulierung (2.13) werden, wie im Abschnitt 1.5 beschrieben, die stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen $\varphi_i \in S_h^1(\Gamma)$ verwendet. Mit der Ansatzfunktion $u_h(x) = \sum_{i=1}^M u_i \varphi_i(x)$ erhält man das zur diskreten Galerkin–Variationsformulierung von (2.13) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\widehat{D}_h \underline{u} = \underline{f}.$$

Für die Steifigkeitsmatrix

$$\widehat{D}_h = D_h + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_k \underline{a}_k \underline{a}_k^\top$$

sind die Komponenten definiert als

$$D_h[j, i] = \langle D\varphi_i, \varphi_j \rangle_\Gamma, \quad a_{k,j} = \langle \varphi_j, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma$$

und der Vektor der rechten Seite als

$$f_j = \langle (\frac{1}{2}I - K')g_N, \varphi_j \rangle_\Gamma$$

für $i, j = 1, \dots, M$. Gemäß Satz 2.5 ist eine geeignete Vorkonditionierung für die Matrix des modifizierten hypersingulären Operators \widehat{D} durch die Galerkin–Matrix des inversen Einfachschichtpotentials V_L^{-1} gegeben als

$$C_D[j, i] = \langle V_L^{-1}\varphi_i, \varphi_j \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, M.$$

Bei Verwendung dieses Vorkonditionierers bleiben die Spektraläquivalenzungleichungen aus Satz 2.5 auch im Diskreten gültig. Allerdings steht die Anwendung des inversen Einfachschichtpotentials V_L^{-1} in der Regel nicht zur Verfügung und damit natürlich auch nicht die notwendige Anwendung von C_D^{-1} . Stattdessen wird als Vorkonditionierung die Approximation

$$\widetilde{C}_D := M_h \widehat{V}_h^{-1} M_h \tag{2.19}$$

mit

$$\widehat{V}_h[j, i] = \langle V\varphi_i, \varphi_j \rangle_\Gamma \quad \text{und} \quad M_h[j, i] = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_\Gamma$$

für $i, j = 1, \dots, M$ verwendet. Damit sind für die Realisierung von C_D^{-1} nur die Anwendung von \widehat{V}_h und die günstige Invertierung der Matrix M_h notwendig. Nach [88, 125, 128] bildet \widetilde{C}_D eine spektraläquivalente Vorkonditionierungsmatrix zur Galerkin–Matrix \widehat{D}_h .

Lemma 2.7. Für die in (2.19) definierte Vorkonditionierungsmatrix \widetilde{C}_D und die Galerkin–Matrix \widehat{D}_h des modifizierten hypersingulären Operators \widehat{D} gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^{V_L} \widetilde{c}_1^D (\widetilde{C}_D \underline{v}, \underline{v}) \leq (\widehat{D} \underline{v}, \underline{v}) \leq \frac{1}{4} c_E c_0 (\widetilde{C}_D \underline{v}, \underline{v}) \tag{2.20}$$

mit einer Stabilitätskonstanten $c_0 > 1$, siehe [88, 125, 128].

2.7 Stabilisierung und Vorkonditionierung des Steklov–Poincaré–Operators

Alle ausgeführten Überlegungen zur Stabilisierung und Vorkonditionierung lassen sich auch auf den Steklov–Poincaré–Operator S übertragen.

Satz 2.8. Für das Einfachschichtpotential V_L des Laplace–Operators und den modifizierten Steklov–Poincaré–Operator $\widehat{S} := \widehat{D} + (1/2 I + K')V^{-1}(1/2 I + K)$ gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

$$\sigma_1 \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma \leq \langle \widehat{S}v, v \rangle_\Gamma \leq \sigma_2 \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma \quad (2.21)$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit den Konstanten

$$\sigma_1 = \min_{k=1, \dots, \dim \mathcal{R}} \{c_1^{V_L} \widetilde{c}_1^D, \alpha_k \langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma\}, \quad \sigma_2 = \max_{k=1, \dots, \dim \mathcal{R}} \left\{ \left(\frac{1}{4} + c_K \right) c_E, \alpha_k \langle \widetilde{v}_k, \widetilde{w}_k \rangle_\Gamma \right\}.$$

Dabei ist c_E in Satz 2.5 definiert, und

$$c_K = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - c_1^V c_1^D} < 1$$

ist die Kontraktionskonstante des Doppelschichtpotentials K aus

$$\|(\frac{1}{2}I + K)v\|_{V^{-1}} \leq c_K \|v\|_{V^{-1}}.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt bis auf die im folgenden beschriebenen Änderungen wie in Satz 2.5. Die linke Ungleichung folgt dabei sofort aus der Abschätzung (1.60) der Bilinearform des Steklov–Poincaré–Operators S durch die des hypersingulären Operators D . Für die Abschätzung nach oben kann der zusätzliche Term des Steklov–Poincaré–Operators S mit der Kontraktionseigenschaft [129] des Doppelschichtpotentials und dem Zusammenhang der inversen Einfachschichtpotentiale abgeschätzt werden,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)v, v \rangle_\Gamma &= \langle V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)v, (\frac{1}{2}I + K)v \rangle_\Gamma = \|(\frac{1}{2}I + K)v\|_{V^{-1}}^2 \\ &\leq c_K \|v\|_{V^{-1}}^2 = c_K \langle V^{-1}v, v \rangle_\Gamma \\ &\leq c_K c_E \langle V_L^{-1}v, v \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

□

Damit kann nun auch für den modifizierten Steklov–Poincaré–Operator \widehat{S} die Vorkonditionierung \widetilde{C}_D verwendet werden. Für die Skalierungsparameter α_k der Stabilisierung können wie für den hypersingulären Operator D die Werte aus (2.17) verwendet werden, da die untere Konstante in den Spektraläquivalenzungleichungen gleich ist und die obere Konstante größer geworden ist.

2.8 Numerisches Beispiel für das Neumann–Randwertproblem

Als Testbeispiel für das Lösen eines Neumann–Randwertproblems der linearen Elastostatik mit der in (2.14) beschriebenen Stabilisierung des hypersingulären Operators für die Variationsformulierung (2.13) wird der Quader $\Omega = (0, 2) \times (0, 1) \times (0, 1)$ aus Abbildung 2.1 verwendet. Dessen Randflächen werden von zehn Quadraten, die jeweils mit vier Dreiecken beschrieben werden, gebildet. Zur Vorkonditionierung wird nach (2.19) der Operator entgegengesetzter Ordnung eingesetzt.

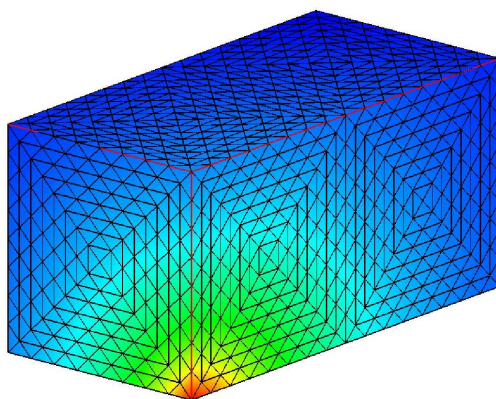


Abbildung 2.1: Quader aus 2560 Dreiecken ($L=3$)

Für die verschiedenen Verfeinerungslevel L einer gleichmäßigen Verfeinerung sind in der Tabelle 2.1 die minimalen und maximalen Eigenwerte λ_{\min} und λ_{\max} , die Iterationszahlen It des CG–Verfahrens für eine relative Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-8}$ angegeben. N ist die Anzahl der Dreiecke, und M ist die Anzahl der Knoten. t_1 , t_2 und t_w sind die Zeiten für das Erstellen des linearen Gleichungssystems, für die Konstruktion der Basis für die Stabilisierung und die Bestimmung der Skalierung bzw. für das Lösen des linearen Gleichungssystems.

L	N	M	DoF	λ_{\min}	λ_{\max}	It	t_1	t_w	t_2
0	40	22	66	5.542	67.616	18	1	0	0
1	160	82	246	2.947	67.227	23	3	0	0
2	640	322	966	2.771	67.262	25	9	1	5
3	2560	1282	3846	2.711	67.301	26	30	6	38
4	10240	5122	15366	2.718	67.292	27	112	33	177
5	40960	20482	61446	2.662	67.350	27	597	264	1136

Tabelle 2.1: Eigenwerte, Iterationszahlen und Rechenzeiten zur Stabilisierung

Die für die beiden letzten Level konstante Iterationszahl entspricht der Aussage von Folgerung 2.6 zur Stabilisierung und Vorkonditionierung mit (2.19). Auch die Eigenwerte aus der Tabelle 2.1 sind fast schon konstant. Dabei liegen die maximalen Eigenwerte nahe bei $\frac{1}{4}c_E \approx 67,30769$, wie in der Abschätzung (2.18) vorhergesagt. Dabei zeigt sich, daß die Stabilitätskonstante $c_0 \approx 1$ zumindest für das Beispiel ist. Zusätzlich wird die Zeit t_w zur Konstruktion der Basis für die Stabilisierung und die Bestimmung der Skalierung mit den Zeiten t_1 und t_2 für das Erstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems verglichen. Dieser zusätzliche Aufwand für die Stabilisierung ist relativ gering. Insgesamt zeigt sich also, daß die beschriebene Vorkonditionierung und Stabilisierung für den Fall $\nu \approx 1/2$ insbesondere bei Gebietszerlegungsmethoden sehr gut einsetzbar sind.

3 Die Multipolmethode für die Laplace–Gleichung

Für Ingenieurs- und industrielle Anwendungen ist der Einsatz schneller Randelementmethoden notwendig, da ohne diese der Speicherbedarf und die Rechenzeit der Randelementmethode quadratisch von der Anzahl der Freiheitsgrade abhängen, und somit nur eine geringe Anzahl an Freiheitsgraden behandelt werden kann. In den letzten beiden Jahrzehnten sind einige Methoden entwickelt worden, die inzwischen für Rechnungen mit einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden eingesetzt werden können. Damit sind die Randelementmethoden zu einem wichtigen Werkzeug des wissenschaftlichen Rechnens geworden. Die ersten Methoden waren die Multipolmethode [106, 44, 45] und das Panel–Clustering–Verfahren [50], die auf einer Approximation des Kerns mittels geeigneter Reihenentwicklungen beruhen. Bei den Multiskalen- und Wavelet–Matrixkompressionen [29, 114, 52] wird durch die Konstruktion geeigneter hierarchischer Basisfunktionen die Steifigkeitsmatrix durch eine schwach besetzte Matrix approximiert. Die Adaptive Cross Approximations (ACA) Methode [8, 6] bedient sich algebraischer Mittel zur Konstruktion einer schwach besetzten Approximationsmatrix. Die \mathcal{H} –Matrizen [48, 43] bieten eine komplette Arithmetik für solche Approximationsmatrizen. Für die \mathcal{H}^2 –Matrizen [49, 22] wird dieses Konzept um die Verwendung hierarchischer Basisfunktionen für die Niedrigrangapproximation erweitert.

In diesem Kapitel wird nun die Multipolmethode für die Laplace–Gleichung kurz nach [95, 97] beschrieben. Desweiteren werden ein BPX–Vorkonditionierer und ein algebraischer Mehrgittervorkonditionierer für das Einfachschichtpotential V dargestellt. Andere Möglichkeiten zur Vorkonditionierung sind additive oder multiplikative Methoden [54, 66, 82], algebraische Mehrgitterverfahren [77, 76] für das ACA–Verfahren oder die Näherung der inversen Matrix mittels der \mathcal{H} –Matrixarithmetik [7, 48]. In [104] wurde für die Vorkonditionierung des Einfachschichtpotentials der linearen Elastostatik das Einfachschichtpotential auf dem Kreis verwendet.

3.1 Beschreibung der Multipolmethode

Die Multipolmethode soll hier zunächst nur in ihren Ideen und Grundzügen für die Laplace–Gleichung dargestellt werden. Die Erweiterung auf die lineare Elastizität wird im Kapitel 4 besprochen. In [94] wird versucht, einen ausführlichen Überblick über die Vielzahl an Arbeiten zur Multipolmethode zu geben. Die Darstellung hier orientiert sich an der Originalformulierung aus [44, 45]. Seither gab es eine Vielzahl an Verbesse-

rungen, die sich aber meist erst bei hohen Entwicklungsgraden auszahlen und teilweise algorithmischer Art sind. Auf ihre Beschreibung wird zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung verzichtet. Hier werden lediglich umformulierte harmonische Kugelfunktionen [100, 135, 139] verwendet, die neben einer schnelleren Realisierung auch eine kompakte Schreibweise bieten. Auf die Beschreibung einer adaptiven Version [25, 89] der Multipolmethode, welche später für die numerischen Beispiele eingesetzt wird, wird im Hinblick auf eine einfache Darstellung der Methode ebenfalls weitgehend verzichtet. Es werden nur gegebenenfalls Hinweise zur adaptiven Version gegeben.

Für die bereits beschriebene Randelementmethode und die Gebietszerlegungsmethoden aus Kapitel 5 ist die schnelle Realisierung von Matrixvektormultiplikationen essentiell, da sie bei der iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems (1.57) der symmetrischen Formulierung und im Steklov–Poincaré–Operator auftreten. Die Multipolmethode eignet sich aber auch für eine schnelle Auswertung von Randintegraloperatoren in sehr vielen Auswertungspunkten, die beispielsweise bei der Auswertung der Lösung im Gebiet Ω mittels der Darstellungsformel (1.16) auftreten. Hier wird die Multipolmethode nun anhand der Realisierung der Matrixvektormultiplikation des Einfachschichtpotentials V_L besprochen. Für die anderen Randintegraloperatoren werden dann nur noch die entsprechenden Modifikationen skizziert. Detaillierte Ausarbeitungen findet man in [95, 97].

Die Matrixvektormultiplikation $\underline{w} = V_{L,h}\underline{t}$ des Einfachschichtpotentials läßt sich komponentenweise schreiben als

$$w_\ell = \sum_{k=1}^N V_{L,h}[\ell, k] t_k = \sum_{k=1}^N \frac{t_k}{4\pi} \int_{\tau_\ell} \int_{\tau_k} \frac{1}{|x-y|} ds_y ds_x \quad \text{für } \ell = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Der Aufwand für die Erstellung dieser Matrix und für eine Matrixvektormultiplikation ist quadratisch. Dieser Aufwand ließe sich auf einen linearen Aufwand reduzieren, wenn es gelingen würde, den Kern $|x-y|^{-1}$ als Produkt $f(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen darzustellen. Diese Trennung der Variablen gelingt allerdings nur als Reihenentwicklung. Für die Fundamentallösung der Laplace–Gleichung eignen sich die harmonischen Kugelfunktionen [55] besser als eine Taylor–Reihe. Die Grundlage dafür bildet die Entwicklung des Kerns

$$k(x, y) = \frac{1}{|x-y|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}), \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|}, \quad \hat{y} = \frac{y}{|y|}, \quad (3.2)$$

mittels der Legendre–Polynome

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n, \quad \text{für } |u| \leq 1.$$

Für die Approximation $k_p(x, y)$ der Kernfunktion $k(x, y)$ in der numerischen Realisierung mit dem maximalen Entwicklungsgrad p

$$k_p(x, y) = \sum_{n=0}^p \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}) \quad (3.3)$$

läßt sich der entstehende Fehler durch

$$|k(x, y) - k_p(x, y)| \leq \frac{1}{|y| - |x|} \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^{p+1} \quad \text{für } |y| > |x| \quad (3.4)$$

abschätzen. Die Trennung der Veränderlichen durch umformulierte harmonische Kugelfunktionen [100, 135, 139] ergibt dann die im folgenden verwendete Kernentwicklung

$$k_p(x, y) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \overline{S_n^m}(y) R_n^m(x). \quad (3.5)$$

Diese umformulierten harmonischen Kugelfunktionen ($m \geq 0$)

$$\begin{aligned} R_n^{\pm m}(x) &= \frac{1}{(n+m)!} \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \Big|_{u=\hat{x}_3} (\hat{x}_1 \pm i\hat{x}_2)^m |x|^n, \\ S_n^{\pm m}(y) &= (n-m)! \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \Big|_{u=\hat{y}_3} (\hat{y}_1 \pm i\hat{y}_2)^m \frac{1}{|y|^{n+1}} \end{aligned}$$

ermöglichen eine einfachere Darstellung und später eine schnelle Realisierung der Multipolmethode. Wie die Fehlerabschätzung (3.4) zeigt, ist diese Entwicklung nicht für alle x und y einsetzbar. Für die Realisierung der Matrixvektormultiplikation (3.1) kann diese Reihenentwicklung nur für den Fall verwendet werden, daß das Randelement τ_k weit genug vom Auswertungselement τ_ℓ entfernt ist. Dies führt zu einer Unterteilung in ein Fernfeld $\text{FF}(\ell)$, für das die Reihenentwicklung angewendet wird, und ein Nahfeld $\text{NF}(\ell)$, für das die Matrixeinträge wie bei der Standardrandelementmethode berechnet werden [117]. Die durch die Kernapproximation k_p definierte Approximation des Matrixvektorprodukts (3.1) lautet für $\ell = 1, \dots, N$

$$\tilde{w}_\ell = \sum_{k \in \text{NF}(\ell)} V_{L,h}[\ell, k] t_k + \sum_{k \in \text{FF}(\ell)} \frac{t_k}{4\pi} \int_{\tau_\ell} \int_{\tau_k} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \overline{S_n^m}(y) R_n^m(x) ds_y ds_x.$$

Nun lassen sich die Koeffizienten

$$M_n^m(O, \ell) = \int_{\tau_\ell} R_n^m(x) ds_x \quad \text{und} \quad L_n^m(O, k) = \int_{\tau_k} \overline{S_n^m}(y) ds_y \quad (3.6)$$

bezüglich eines lokalen Ursprungs O für alle Randelemente entweder mit Hilfe einer numerischen Quadraturformel oder für ebene Dreiecke sogar exakt [89, 93] berechnen. Die Verwendung dieser Koeffizienten führt zu der Darstellung

$$\tilde{w}_\ell = \sum_{k \in \text{NF}(\ell)} V_{L,h}[\ell, k] t_k + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n M_n^m(O, \ell) \tilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell)). \quad (3.7)$$

Ist nun die Bestimmung der Koeffizienten

$$\tilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell)) = \sum_{k \in \text{FF}(\ell)} t_k L_n^m(O, k) \quad \text{für } n = 0, \dots, p, m = -n, \dots, n \quad (3.8)$$

effizient möglich, so gelingt die schnelle Realisierung der Matrixvektormultiplikation mittels der Aufspaltung (3.7). Die Schwierigkeit dabei ist, daß die Koeffizienten $\tilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell))$ vom jeweiligen Fernfeld $\text{FF}(\ell)$ abhängen und somit voneinander verschieden sind. Für ihre effiziente Berechnung werden möglichst große Gruppen der Koeffizienten $L_n^m(O, k)$ zusammengefaßt und für möglichst viele Koeffizienten $\tilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell))$ wiederverwendet.

Dafür eignet sich eine hierarchische Struktur, welche über den Randelementen τ_k gebildet wird. Alle Randelemente $\{\tau_k\}_{k=1}^N$ liegen in einem Würfel, der das Gebiet Ω umfaßt, und bilden den Cluster ω_1^0 des größten Levels 0. Die Cluster $\omega_j^{\lambda+1}$ des Levels $\lambda + 1$ werden als Söhne der Cluster ω_i^λ des Levels λ gebildet. Dazu wird für jeden Cluster ω_i^λ der zugehörige Würfel gleichmäßig in acht kleinere Würfel verfeinert. Die Dreiecke des Clusters ω_i^λ werden gemäß der Lage ihrer Schwerpunkte diesen acht kleineren Würfeln zugeordnet und bilden dementsprechend bis zu acht neue Cluster $\omega_j^{\lambda+1}$. Für den hier betrachteten Fall einer quasi-uniformen Randdiskretisierung wird diese Konstruktion rekursiv bis zu einem maximalen Level L durchgeführt, so daß die Cluster dieses feinsten Levels noch einige Randelemente beinhalten. Beschreibungen adaptiver Varianten der Multipolmethode findet man beispielsweise in [25, 89].

Die bisher nur abstrakt formulierte Unterteilung in Nah- und Fernfeld kann nun, basierend auf der Clusterhierarchie, definiert werden. Ein Cluster ω_i^λ liegt im Nahfeld eines Clusters ω_j^λ des gleichen Levels λ , wenn die Bedingung

$$\text{dist}\{C_i^\lambda, C_j^\lambda\} \leq (d+1)\max\{r_i^\lambda, r_j^\lambda\} \quad (3.9)$$

erfüllt ist. Dabei ist C_i^λ der Mittelpunkt des Würfels, der zum Cluster ω_i^λ gehört, und r_i^λ ist der zugehörige Clusterradius, d.h. $r_i^\lambda = \sup_{x \in \omega_i^\lambda} |x - C_i^\lambda|$. Für den Algorithmus ist wichtig, daß das Nahfeld eines Vaterclusters $\omega_i^{\lambda-1}$ die Nahfelder aller seiner Söhne $\omega_j^\lambda \subset \omega_i^{\lambda-1}$ enthält. Diese Definition des Nah- und Fernfelds überträgt sich auf die Randelemente τ_k über die Blätter des Clusterbaumes:

$$\begin{aligned} \text{NF}(\ell) &:= \{k, 1 \leq k \leq N \text{ und (3.9) gilt für den Cluster } \omega_i^L \text{ von } \tau_k \\ &\quad \text{und } \omega_j^L \text{ ist der zu } \tau_\ell \text{ gehörende Cluster.}\}, \\ \text{FF}(\ell) &:= \{1, \dots, N\} \setminus \text{NF}(\ell). \end{aligned}$$

Für den Erhalt der Symmetrie der Matrix $V_{L,h}$ des Einfachschichtpotentials ist eine symmetrische Definition für den Nahbereich erforderlich. Dabei bleibt dann auch die durch den endlichen Entwicklungsgrad p definierte Approximation symmetrisch [95, 97].

Mit Hilfe der konstruierten Clusterhierarchie können nun die Koeffizienten $\tilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell))$ berechnet werden. Dazu werden zunächst für alle Cluster ω_j^L des feinsten Level L die Multipolkoeffizienten

$$\tilde{M}_n^m(C_j^L, P(\omega_j^L)) = \sum_{\tau_k \in \omega_j^L} \widehat{M}_n^m(C_j^\lambda, k) \quad (3.10)$$

berechnet, wobei $P(\omega_j^\lambda) := \{k, \tau_k \in \omega_j^\lambda\}$ die Menge aller Randelemente τ_k des Clusters ω_j^λ beschreibt. Die Koeffizienten \widehat{M}_n^m berechnen sich als

$$\widehat{M}_n^m(O, k) := \int_{\tau_k} \mathcal{Q} R_n^m(x) ds_x. \quad (3.11)$$

Für das Einfachschichtpotential V_L ist \mathcal{Q} gegeben durch $\mathcal{Q} = t_k$. Die Koeffizienten \widetilde{M}_n^m werden dann zur Bestimmung der Multipolkoeffizienten der größeren Level mittels der Translation

$$\widetilde{M}_n^m(C_j^\lambda, P(\omega_j^\lambda)) = \sum_{\omega_i^{\lambda+1} \in \text{Söhne}(\omega_j^\lambda)} \sum_{s=0}^n \sum_{t=-s}^s R_s^t(\overrightarrow{C_j^\lambda C_i^{\lambda+1}}) \widetilde{M}_{n-s}^{m-t}(C_i^{\lambda+1}, P(\omega_i^{\lambda+1})) \quad (3.12)$$

verwendet. Aus diesen Multipolkoeffizienten eines Clusters ω_j^λ lassen sich dann die gesuchten lokalen Koeffizienten für einen zweiten Cluster ω_i^λ im Fernfeld von ω_j^λ mittels der Konvertierung

$$\widetilde{L}_n^m(C_i^\lambda, P(\omega_j^\lambda)) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=-s}^s (-1)^n \overline{S_{n+s}^{m+t}}(\overrightarrow{C_j^\lambda C_i^\lambda}) \widetilde{M}_s^t(C_j^\lambda, P(\omega_j^\lambda)) \quad (3.13)$$

berechnen. Diese Konvertierungen erfolgen auf dem größtmöglichen Level, auf dem die Zulässigkeitsbedingung noch erfüllt ist, d.h. zwischen zwei Clustern, die gegenseitig im Fernfeld liegen, deren Väter aber noch zum gegenseitigen Nahbereich gehören. Diese lokalen Koeffizienten müssen dann noch für jeden Cluster aufsummiert werden. Zusätzlich werden diese Koeffizienten mittels der Translation

$$\widetilde{L}_n^m(C_j^{\lambda+1}, \text{FF}(\omega_i^\lambda)) = \sum_{s=n}^p \sum_{t=-s}^s R_{s-n}^{t-m}(\overrightarrow{C_i^\lambda C_j^{\lambda+1}}) \widetilde{L}_s^t(C_i^\lambda, \text{FF}(\omega_i^\lambda)) \quad (3.14)$$

von jedem Cluster ω_i^λ auch noch auf seine Söhne $\omega_j^{\lambda+1}$ übertragen. Die Summe aller dieser Koeffizienten $\widetilde{L}_n^m(C_j^L, \cdot)$ ergibt die für die Matrixvektormultiplikation (3.7) notwendigen Koeffizienten $\widetilde{L}_n^m(\text{FF}(\ell))$, wobei ω_j^L der zu τ_ℓ gehörende Cluster ist.

Für die Anwendung des Doppelschichtpotentials K_L bleibt der Algorithmus bis auf die Berechnung der Multipolkoeffizienten \widehat{M}_n^m aus (3.11) unverändert. Für deren Berechnung wird der Operator \mathcal{Q} um die Normalenableitung erweitert zu

$$\mathcal{Q} = u_{h|\tau_k} \frac{\partial}{\partial n_x}.$$

Die Ableitungen der umformulierten harmonischen Kugelfunktionen lassen sich dabei selbst wieder durch solche ausdrücken [139].

Für das adjungierte Doppelschichtpotential bleibt erneut der für das Einfachschichtpotential beschriebene Algorithmus erhalten. Nur bei der Auswertung der Reihenentwicklung wie in (3.7) müssen die um die Normalenableitung erweiterten Koeffizienten

$\widehat{M}_n^m(O, \ell)$ verwendet werden. Dadurch bleibt auch die Transponiertheit des Doppelschichtpotentials und des adjungierten Operators in den Matrizen der Multipolapproximation erhalten, solange der gleiche Entwicklungsgrad p verwendet wird [95, 97].

Für den hypersingulären Operator können beide Ableitungen auf die Koeffizienten der Multipolentwicklung angewendet werden. Aber insbesondere für den Nahbereich erweist sich die Anwendung der partiellen Integration als vorteilhaft. Die Bilinearform des hypersingulären Operators D_L läßt sich nämlich als Summe von Bilinearformen des Einfachschichtpotentials V_L schreiben [86, 92], vergleiche auch Satz 1.5,

$$\langle D_L u, v \rangle_\Gamma = \sum_{k=1}^3 \langle V_L \underline{\text{curl}}_\Gamma u|_k, \underline{\text{curl}}_\Gamma v|_k \rangle_\Gamma.$$

Für eine Funktion $u \in C^1(\Gamma)$ und $x \in \Gamma$ ist

$$\underline{\text{curl}}_\Gamma u(x) := n_x \times \nabla u_\Gamma^*(x)$$

die Oberflächenrotation. Für die hier verwendeten stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen $\varphi(x)$ und ebene Dreiecke als Randelemente sind die Vektoren $\underline{\text{curl}}_\Gamma \varphi(x)$ auf jedem Element konstant. Es gilt die Relation

$$\underline{\text{curl}}_{\tau_i} \psi_j|_{\tau_i}(y) = \frac{1}{2\Delta_{\tau_i}}(x_2 - x_3), \quad (3.15)$$

wobei mit $x_j = x_1, x_2, x_3$ die Ecken des Dreiecks τ_i bezeichnet werden. Daher kann die Einfachschichtpotentialmatrix $V_{L,h}$ der stückweise konstanten Basisfunktionen hier für die Realisierung der Galerkin–Matrix des hypersingulären Operators wiederverwendet werden.

Eine Fehleranalyse für die Approximation der Randintegraloperatoren durch die Multipolmethode liefert die folgenden Konsistenzabschätzungen für die Approximationen der Randintegraloperatoren.

Lemma 3.1 ([95, 97]). *Für eine quasi–uniforme Randdiskretisierung und die Wahl $p \sim \log N$ gelten für die Approximationen der Randintegraloperatoren der Laplace–Gleichung durch die Multipolmethode die Konsistenzabschätzungen*

$$\|(V_L - \widetilde{V}_L)t_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_{\widetilde{V}_L} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (3.16)$$

$$\|(K_L - \widetilde{K}_L)u_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_{\widetilde{K}_L} h^2 \|u_h\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (3.17)$$

$$\|(K'_L - \widetilde{K}'_L)t_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_{\widetilde{K}'_L} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (3.18)$$

$$\left| \langle (D_L - \widetilde{D}_L)u_h, v_h \rangle_{L_2(\Gamma)} \right| \leq c_{\widetilde{D}_L} h^2 \|u_h\|_{H^1(\Gamma)} \|v_h\|_{H^1(\Gamma)} \quad (3.19)$$

für alle $t_h \in S_h^0(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ und $u_h \in S_h^1(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ bzw. für den hypersingulären Operator $u_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$ und $v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$.

Bemerkung 3.1. Die Einschränkung, daß die Funktionen aus diesen Ansatzräumen sind, ist nicht zwingend. Es genügt, daß die Integrationen in den Koeffizienten (3.11) der Multipolmethode für die betrachteten Funktionen exakt sind. Sollte dies nicht der Fall sein, so ist eine zusätzliche Fehleranalyse für diese Integration notwendig.

Diese Fehlerabschätzungen genügen, um die eindeutige Lösbarkeit der symmetrischen Formulierung für die approximierten Randintegraloperatoren und die quasi-optimale Fehlerabschätzung zu zeigen.

Satz 3.2 ([95, 97]). Seien $\tilde{t} \in H^\sigma(\Gamma)$ und $\tilde{u} \in H^\eta(\Gamma)$ für $\sigma \in [0, 1]$ und $\eta \in [1, 2]$ die eindeutige Lösung der Variationsformulierung (1.48). Für eine quasi-uniforme Randdiskretisierung und die Ansatzräume $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$ garantiert die Wahl des Entwicklungsgrads $p \sim \log N$ der Multipolmethode die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Variationsproblems, und es gilt für die Näherungslösungen \tilde{u}_h und \tilde{t}_h der Multipolmethode die asymptotische Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq c \left(h^{2\sigma+1} \|\tilde{t}\|_{H_{pw}^\sigma(\Gamma)}^2 + h^{2\eta-1} \|\tilde{u}\|_{H^\eta(\Gamma)}^2 \right). \quad (3.20)$$

Auch für Ansatzfunktionen höherer Ordnungen lassen sich mit der Wahl $p \sim \log N$ die entsprechenden Konvergenzordnungen erzielen. Dabei ist lediglich der Faktor c in $p = c \cdot \log N$ höher zu wählen.

Diese Fehleranalyse bei fest gewähltem Nahbereichsparameter d und geeignet gewähltem Entwicklungsgrad $p \sim \log N$ muß in der Aufwandsanalyse berücksichtigt werden. Die Aufwandsanalyse liefert dann einen Gesamtaufwand von der Ordnung $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ für eine Matrixvektormultiplikation, siehe [95, 97]. Die Anzahl der Matrixeinträge für den Nahbereich und der Speicherbedarf sind ebenfalls von der Ordnung $\mathcal{O}(N \log^2 N)$. In vielen Arbeiten zur Multipolmethode wird oft nur ein linearer Aufwand angegeben. Dabei wird aber die Methode für einen fest gewählten Fehler analysiert und nicht die notwendige asymptotische Konvergenzrate für Randelementmethoden berücksichtigt. Für jedes Randelement muß eine Reihenentwicklung mit $\mathcal{O}(p^2)$ ausgewertet werden. Wird also für die gesamte Multipolanwendung ein einheitlicher Entwicklungsgrad p verwendet, so ist der Gesamtaufwand immer mindestens $c N \log^2 N$.

Bisher wurde nur für Randintegralgleichungen zweiter Art mit stückweise konstanten Basisfunktionen ein $\mathcal{O}(N)$ -Algorithmus für die Multipolmethode konstruiert [131]. Dazu wurde eine Variante der Panel Clustering Methode mit variablem Entwicklungsgrad [109] auf die Multipolmethode übertragen.

Gegenüber den hier verwendeten Translationen und Konvertierungen für die Entwicklungen der Multipolmethode, wie sie auch in [44, 45] beschrieben sind, sind inzwischen einige Verbesserungsvorschläge, wie die Verwendung schneller Fouriertransformationen [30] oder einer Exponentialdarstellung für den Kern [46], gemacht worden. Dies reduziert den Aufwand für die Multipoloperationen von ursprünglich $\mathcal{O}(p^4)$ auf $\mathcal{O}(p^3)$. Diese Verbesserungen zahlen sich jedoch meist erst für hohe Entwicklungsgrade p aus, die für die Laplace-Gleichung nicht nötig sind. Außerdem führen sie nicht zu einer besseren Asymptotik. Eine Multipolvariante, welche die Notwendigkeit der Herleitung und Implementierung einer neuen Reihenentwicklung für jeden Differentialoperator umgeht, wurde in [111] präsentiert.

3.2 Eine Multilevel–Vorkonditionierung

Im folgenden wird eine Vorkonditionierungstechnik für das Einfachschichtpotential V_L der Laplace–Gleichung beschrieben, die auf einer mittels eines Clusterbaumes künstlich erzeugten Hierarchie von Ansatzräumen beruht und als “Artificial Multilevel Boundary Element Preconditioners” in [124] eingeführt wurde. Durch eine gewichtete Summe von $L_2(\Gamma)$ –Projektionen wird wie in [14, 39] auf der Hierarchie der Ansatzräume die Vorkonditionierung definiert.

Sei $Z_h = Z_J \subset S_h^0(\Gamma)$ der Ansatzraum der stückweise konstanten Basisfunktionen. Desweiteren existiere eine Folge von geschachtelten Ansatzräumen Z_j

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_J = Z_h \quad (3.21)$$

mit der Maschenweite $h_j = \frac{1}{2}h_{j-1}$. Der Multileveloperator A^s wird für $s \in \mathbb{R}$ definiert als

$$A^s = \sum_{j=0}^J h_j^{-2s} (Q_j - Q_{j-1}), \quad (3.22)$$

wobei Q_j die L_2 –Projektion auf Z_j mit

$$\langle Q_j w, \tau \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle w, \tau \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } \tau \in Z_j, j = 0, \dots, J$$

und $w \in L_2(\Gamma)$ bezeichnet. Insbesondere ist $Q_{-1} = 0$. Aufgrund der Spektraläquivalenzungleichungen [99]

$$c_1 \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq \langle A^{-1/2} w, w \rangle_{L_2(\Gamma)} \leq c_2 J^2 \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } w \in Z_J \quad (3.23)$$

eignet sich der Operator $A^{-1/2}$ als Vorkonditionierer für das Einfachschichtpotential. Dies folgt aus dessen Elliptizität und Beschränktheit. Beachtet man, daß $A^{-1/2} A^{1/2} = I$ gilt, so ist die entsprechende Vorkonditionierungsmatrix $C_{V,h}^{-1}$ für die Galerkin–Matrix des Einfachschichtpotentials V_L gegeben durch

$$C_{V,h}^{-1} = M_h^{-1} A_h^{1/2} M_h^{-1}. \quad (3.24)$$

Die Matrizen sind dabei als

$$A_h^{1/2}[\ell, k] = \langle A^{1/2} \psi_k, \psi_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad M_h[\ell, k] = \langle \psi_k, \psi_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)}$$

definiert. Diese Vorkonditionierungstechnik wurde für eine durch geometrische Verfeinerung erzeugte Hierarchie in [39] verwendet. Hier wird nun nach der Idee aus [124] die Hierarchie durch eine Clusterhierarchie wie aus der Multipolmethode definiert. Das vorliegende geometrische Netz wird als feinsten Ansatzraum Z_J verwendet. Die Cluster ω_i^j des Clusterbaumes definieren die fiktiven Elemente τ_i^j der größeren Ansatzräume Z_j für $j < J$.

Im folgenden wird die Realisierung der Vorkonditionierung (3.24) für die stückweise konstanten Ansatzfunktionen $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ beschrieben. Die Vorkonditionierung erfolgt durch die Matrixvektormultiplikation

$$\underline{v} = C_{V,h}^{-1} \underline{r} = M_h^{-1} A_h^{1/2} M_h^{-1} \underline{r}.$$

In einem ersten Schritt wäre die Invertierung der Massematrix M_h durchzuführen als

$$\underline{u} = M_h^{-1} \underline{r}.$$

Diese läßt sich aber, wie sich später zeigen wird, einsparen. Der zweite Schritt sieht die Anwendung $\underline{w} = A_h^{1/2} \underline{u}$ der diskreten Galerkin–Matrix des Operators $A^{1/2}$ vor. Für die ℓ -te Komponente des Ergebnisvektors \underline{w} gilt mit einer Funktion $z_h = A^{1/2} u_h$:

$$\begin{aligned} w_\ell &= \sum_{k=1}^N A_h^{1/2}[\ell, k] u_k = \sum_{k=1}^N \langle A^{1/2} \psi_k u_k, \psi_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle A^{1/2} u_h, \psi_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ &= \langle z_h, \psi_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^N z_k \langle \psi_k, \psi_\ell \rangle_{L_2(\Gamma)} = (M_h \underline{z})_\ell. \end{aligned}$$

Somit läßt sich diese Matrixvektormultiplikation durch die Einführung eines Hilfsvektors \underline{z} umschreiben zu

$$\underline{w} = A_h^{1/2} \underline{u} = M_h \underline{z}.$$

Diese Anwendung der Massematrix M_h hebt sich mit der abschließend noch auszuführenden Invertierung derselben weg,

$$\underline{v} = M_h^{-1} \underline{w} = \underline{z}.$$

Somit ist in erster Linie der Vektor \underline{z} bzw. die zugehörige Funktion z_h gemäß

$$z_h = A^{1/2} u_h = \sum_{j=0}^J h_j^{-1} (Q_j - Q_{j-1}) u_h = h_J^{-1} Q_J u_h + \sum_{j=0}^{J-1} (h_j^{-1} - h_{j+1}^{-1}) Q_j u_h$$

zu bestimmen. Nimmt man die levelabhängigen Funktionen $u_h^j = Q_j u_h$ zunächst einmal als gegeben an, dann kann die Berechnung von z_h rekursiv erfolgen:

$$\begin{aligned} z_h^0 &= (h_0^{-1} - h_1^{-1}) u_h^0, \\ z_h^j &= z_h^{j-1} + (h_j^{-1} - h_{j+1}^{-1}) u_h^j \quad \text{für } 0 < j < J, \\ z_h^J &= z_h^{J-1} + h_J^{-1} u_h^J. \end{aligned}$$

Wegen den geschachtelten Randelementräumen läßt sich jede Basisfunktion ψ_i^{j-1} des $(j-1)$ -ten Levels mittels Basisfunktionen ψ_q^j des j -ten Levels ausdrücken,

$$\psi_i^{j-1} = \sum_{q \in \text{Söhne}(\psi_i^{j-1})} \psi_q^j.$$

Damit können für $0 < j < J$ die Funktionen z_h^j geschrieben werden als

$$\begin{aligned} z_h^j &= z_h^{j-1} + (h_j^{-1} - h_{j+1}^{-1})u_h^j = \sum_{i=1}^{N_{j-1}} z_i^{j-1}\psi_i^{j-1} + \sum_{i=1}^{N_j} (h_j^{-1} - h_{j+1}^{-1})u_i^j\psi_i^j \\ &= \sum_{i=1}^{N_j} \left(z_{\text{Vater}(i)}^{j-1} + (h_j^{-1} - h_{j+1}^{-1})u_i^j \right) \psi_i^j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Für die Funktionen z_h^J gilt entsprechend

$$z_h^J = \sum_{i=1}^{N_J} \left(z_{\text{Vater}(i)}^{J-1} + h_J^{-1}u_i^J \right) \psi_i^J. \quad (3.26)$$

Die Berechnung der L_2 -Projektion $u_h^j = Q_j u_h$ beruht auf den Gleichungen

$$\langle u_h^j, \psi_\ell^j \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N_j} u_k^j \langle \psi_k^j, \psi_\ell^j \rangle_{L_2(\Gamma)} = (M_h^j \underline{u}^j)_\ell \stackrel{!}{=} \langle u_h, \psi_\ell^j \rangle_{L_2(\Gamma)} =: f_\ell^j$$

für alle $\ell = 1, \dots, N$ und somit auf dem linearen Gleichungssystem

$$M_h^j \underline{u}^j = \underline{f}^j.$$

Da M_h^j für die stückweise konstanten Basisfunktionen eine Diagonalmatrix ist, bleiben im wesentlichen nur noch die rechten Seiten \underline{f}^j zu bestimmen. Diese lassen sich erneut rekursiv berechnen,

$$\begin{aligned} \underline{f}^J &= M_h^J \underline{u} = M_h^J (M_h^J)^{-1} \underline{r} = \underline{r} \\ f_\ell^j &= \langle u_h, \psi_\ell^j \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{q \in \text{Söhne}(\psi_\ell^j)} \langle u_h, \psi_q^{j+1} \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{q \in \text{Söhne}(\psi_\ell^j)} f_q^{j+1} \text{ für } j < J. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Damit entfällt auch der erste Schritt mit der Invertierung der Massematrix M_h . Mit den Diagonalmatrizen

$$D_h^j = \text{diag}(h_j^{-1}) \quad \text{und} \quad D_h^j = \text{diag}(h_j^{-1} - h_{j+1}^{-1}) \quad \text{für } j < J$$

lassen sich die Vektoren \underline{z}^j ausdrücken durch

$$\underline{z}^j = \underline{\tilde{z}}^j + D_h^j (M_h^j)^{-1} \underline{f}^j,$$

wobei die Vektoren $\underline{\tilde{z}}^j$ den Beiträgen der Vaterfunktionen entsprechen. Somit können nach (3.27) bzw. nach (3.25) und (3.26) die notwendigen Berechnungen nach folgendem Schema erfolgen:

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{f}^J \rightarrow \underline{f}^{J-1} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{f}^0 \\ \underline{z}^0 &= D_h^0 (M_h^0)^{-1} \underline{f}^0 \rightarrow \underline{z}^1 = \underline{\tilde{z}}^1 + D_h^1 (M_h^1)^{-1} \underline{f}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{z}^J = \underline{\tilde{z}}^J + D_h^J (M_h^J)^{-1} \underline{f}^J \end{aligned}$$

Dabei entsprechen die Abbildungen $\underline{f}^j \rightarrow \underline{f}^{j-1}$ Restriktionen, und die Abbildungen $\underline{z}^{j-1} \rightarrow \underline{z}^j$ sind Prolongationen.

Eine Variante für ein adaptives Gitter kann man ableiten, indem man die großen Elemente an passender Stelle in den adaptiven Clusterbaum einfügt und die zusätzlich für einen balancierten Baum benötigten Level durch gleichmäßige Verfeinerung der Randelemente erzeugt. Man hängt also an den entsprechenden Stellen eine geometrische Hierarchie an. Die zum jeweiligen Randelement gehörende Basisfunktion kann auf den feineren Level exakt dargestellt werden. Für die stückweise konstanten Funktionen übertragen sich die Koeffizienten direkt.

Nun kann der Algorithmus für diesen nicht mehr adaptiven, sondern ausbalancierten Baum bzw. die entsprechenden Ansatzräume angewendet werden. Zunächst wird ein Blatt ω_q^j des adaptiven Clusterbaumes, das auf dem Level j liegt, betrachtet. Der Eintrag für ein Randelement $\tau_k = \tau_k^{j+1}$ aus diesem Cluster berechnet sich dann als

$$\tilde{z}_k^{j+1} = z_q^j + \frac{f_k^{j+1}}{\Delta_{j+1,k}} \left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_{j+2}} \right).$$

Nun sind noch die Transformationen für die fiktiven Söhne τ_i^{j+2} des Elements τ_j auszuführen, dabei sind $\Delta_{j+2,i} = \Delta_{j+1,k}/4$ und $f_i^{j+2} = \langle u_h^{j+2}, \psi_i^{j+2} \rangle_{L_2(\Gamma)} = f_k^{j+1}/4$ aufgrund der fiktiven Erweiterung des Clusterbaumes zu beachten:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i^{j+2} &= \tilde{z}_k^{j+1} + \frac{f_i^{j+2}}{\Delta_{j+2,i}} \left(\frac{1}{h_{j+2}} - \frac{1}{h_{j+3}} \right) \\ &= z_q^j + \frac{f_k^{j+1}}{\Delta_{j+1,k}} \left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_{j+2}} \right) + \frac{f_i^{j+2}}{\Delta_{j+2,i}} \left(\frac{1}{h_{j+2}} - \frac{1}{h_{j+3}} \right) \\ &= z_q^j + \frac{f_k^{j+1}}{\Delta_{j+1,k}} \left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_{j+3}} \right) \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die höheren Level. Nur für den feinsten Level $L+1$ ist die abweichende Skalierung zu beachten. Dabei gilt unter der Annahme, daß die fiktive Verfeinerung von dem Randelement $\tau_k^{j+1} = \tau_k$ auf Level $j+1$ ausging, mit den gleichen Argumenten wie zuvor für die Söhne des feinsten fiktiven Levels:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i^{L+1} &= \tilde{z}_{\text{Vater}(L+1,i)}^L + \frac{f_i^{L+1}}{\Delta_{L+1,i}} \frac{1}{h_{L+1}} \\ &= z_q^j + \frac{f_k^{j+1}}{\Delta_{j+1,k}} \left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_{L+1}} \right) + \frac{f_i^{L+1}}{\Delta_{L+1,i}} \frac{1}{h_{L+1}} \\ &= z_q^j + \frac{f_k^{j+1}}{\Delta_{j+1,k}} \frac{1}{h_{j+1}}. \end{aligned}$$

Da dieser Wert für alle Elemente der fiktiven geometrischen Verfeinerung des Randelements τ_k des größeren Level $j+1$ gleich ist, kann er nun wieder auf das Randelement

τ_k übertragen werden, und somit gilt

$$z_k^{j+1} = z_q^j + \frac{f_i^{j+1}}{\Delta_{j+1,k}} \frac{1}{h_{j+1}}.$$

Die hier fiktiv eingeführten Verfeinerungen der größeren Randelemente müssen somit nicht durchgeführt werden, sondern nur diese letzte Formel im adaptiven Baum angewendet werden. Dies läßt sich so interpretieren, daß man die Elemente entsprechend der Adaptivität hinzunimmt.

3.3 Ein multipolbasiertes algebraisches Mehrgitterverfahren

Hier wird nun ein algebraisches Mehrgitterverfahren in Verbindung mit der Multipolmethode zur Vorkonditionierung der Galerkin–Matrix des Einfachschichtpotentials V_L der Laplace–Gleichung verwendet. Dieser Zugang kann auch direkt für die lineare Elastostatik verwendet werden. Aus Implementierungsgründen wird in den Beispielen allerdings der Laplace–Vorkonditionierer komponentenweise angewandt. Dies führt zwar zu einer etwas schlechteren Konditionszahl, dafür ist die Anwendung jedoch billiger, und gute Ergebnisse rechtfertigen dieses Vorgehen.

Die Konstruktion des hier beschriebenen Mehrgitterverfahrens beruht auf Ideen von [76, 77] zur Konstruktion algebraischer Mehrgitterverfahren für die Randelementmethode. Für die Beschreibung des Mehrgitterverfahrens wird zunächst von einer gegebenen Folge von Systemmatrizen V_ℓ für $\ell = \ell_0, \dots, L + 1$ ausgegangen, deren Konstruktion später beschrieben wird. Zur Vorkonditionierung der Matrix $V_{L+1} = V_h$ wird ein Mehrgitterverfahren mit einem V–Zyklus verwendet. Dieser ist in Algorithmus 3.1 beschrieben. Dabei bezieht sich der Index eines Vektors \underline{u}_ℓ auf das jeweilige Level ℓ .

Eine Schwierigkeit für das Mehrgitterverfahren ergibt sich aus den Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials $V : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$. Dadurch gehören zu den hochfrequenten Eigenfunktionen die kleinen Eigenwerte und nicht wie bei den Finiten Element Methoden die großen. Als Glätter wird daher eine Diskretisierung $A_\ell \in \mathbb{R}^{N_\ell \times N_\ell}$ des Laplace–Beltrami–Operators auf der Oberfläche Γ empfohlen [10]. Somit gestaltet sich der in Algorithmus 3.1 beschriebene Glättungsschritt als

$$\underline{u}_\ell = \underline{u}_\ell + \mu_\ell A_\ell (\underline{f}_\ell - V_\ell \underline{u}_\ell)$$

mit einem Dämpfungsparameter $0 < \mu_\ell \leq 1/\lambda_{l,\max}$. Dabei bezeichnet $\lambda_{l,\max}$ den größten Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$V_\ell \underline{w}_\ell = \lambda A_\ell^{-1} \underline{w}_\ell.$$

Dieser maximale Eigenwert wird mit wenigen Iterationsschritten eines modifizierten Gradientenverfahrens [107] bestimmt.

Algorithmus 3.1 Mehrgitterverfahren mit V-Zyklus

```

MultiGrid ( $\underline{u}_\ell, \underline{f}_\ell, \ell$ )
if  $\ell = \ell_0$  then
    Bestimme  $\underline{u}_{\ell_0} = (V_{\ell_0})^{-1} \underline{f}_{\ell_0}$  mittels eines Grobgitterlösers
else
     $\nu_F$  Glättungsschritte für  $V_\ell \underline{u}_\ell = \underline{f}_\ell$ 
    Berechne den Defekt  $\underline{d}_\ell = \underline{f}_\ell - V_\ell \underline{u}_\ell$ 
    Restriktion des Defektes auf das nächst gröbere Level  $\ell - 1$ :  $\underline{d}_{\ell-1} = P_\ell^\top \underline{d}_\ell$ 
    Setze  $\underline{u}_{\ell-1} = 0$ 
    MultiGrid ( $\underline{u}_{\ell-1}, \underline{d}_{\ell-1}, \ell - 1$ ) aufrufen
    Prolongation der Korrektur  $\underline{s}_\ell = P_\ell \underline{u}_{\ell-1}$ 
    Update der Lösung  $\underline{u}_\ell = \underline{u}_{\ell-1} + \underline{s}_\ell$ 
     $\nu_B$  Glättungsschritte für  $V_\ell \underline{u}_\ell = \underline{f}_\ell$ 
end if

```

In [76, 77] wird nicht wie bei algebraischen Mehrgitterverfahren für Finite Element Methoden die Systemmatrix zur Konstruktion der Grobgittermatrizen eingesetzt, sondern es werden gewichtete Distanzfunktionen zwischen den Mittelpunkten der Randelemente als Grundlage für die Vergrößerung verwendet. Mit Hilfe der zugehörigen Matrix werden nach geeigneten Kriterien die Grobgitterelemente für die Konstruktion der Grobgittermatrizen ausgewählt. Dazu werden dann die passenden gewichteten Prolongationen und Restriktionen erstellt. Als schnelle Randelementmethode kommt die Adaptive Cross Approximations Methode zum Einsatz. Diese Methode erstellt eine schwachbesetzte Approximationsmatrix mit Niedrigrangapproximationen für die zulässigen Blöcke der Clusterung der Matrix. Die Grobgittermatrizen werden dann durch die Anwendung der Prolongationen und Restriktionen auf die einzelnen Blöcke erstellt. Dabei reduzieren sich die Dimensionen der Vektoren der Niedrigrangapproximationen, und man erhält die gewünschten schwach besetzten Grobgittermatrizen.

Dieser Zugang läßt sich natürlich auch auf die Multipolmethode übertragen. Er kann aber zu einer recht komplizierten Implementierung führen. Außerdem wäre das resultierende Verfahren nicht sonderlich schnell, da mit dem Erhalt aller zulässigen Blöcke jede Konvertierung der Multipolentwicklung bei der Vergrößerung erhalten bleiben würde. Da diese Operationen jedoch einen großen Teil des Gesamtaufwands ausmachen, scheint dies nicht mehr zu einem optimalen Verfahren zu führen.

Daher wird nun die Clusterhierarchie der Multipolmethode verwendet, um die Grobgitter zu definieren. Die Cluster des feinsten Levels fassen Randelemente zusammen und definieren die erste Vergrößerung. Bei allen weiteren Vergrößerungen werden dann die Cluster entsprechend der Vater-Sohn-Beziehungen zu Grobgitterelementen zusammengefaßt. Der Vorteil dieses Zuganges ist, daß zur Konstruktion der Grobgittermatrizen die Operationen der Multipolmethode direkt verwendet werden können.

Somit sind die Elemente τ_j^ℓ des jeweiligen "Diskretisierungslevels" $\ell = \ell_0, \dots, L$ durch die Cluster ω_j^ℓ des zugehörigen Levels des Clusterbaumes gegeben. Für den feinsten

Level $L + 1$ werden die gegebenen Randelemente $\tau_i^{L+1} := \tau_i$ verwendet. Als grösster Level ℓ_0 wird der feinste Clusterlevel mit weniger als 1000 – 1500 Clustern verwendet, so daß die zugehörige Matrix erstellt und mittels eines direkten Verfahrens invertiert werden kann. Zunächst gilt es, die Nahbereichsanteile der Matrizen V_ℓ der größeren Gitter für $\ell = \ell_0, \dots, L$ zu bestimmen. Der Nahbereich wird immer durch die Vätercluster des Clusterlevels $\ell - 1$ vorgegeben. Durch die auf die Randelemente ausgeweiteten Vater–Sohn–Beziehungen lassen sich für die verwendeten stückweise konstanten Test– und Ansatzfunktionen die Matrixeinträge der größeren Level rekursiv mittels

$$V_\ell[i, j] = \sum_{m \in \text{Söhne}(i)} \sum_{n \in \text{Söhne}(j)} V_{\ell+1}[m, n] \quad (3.28)$$

bestimmen. Die Schwierigkeit dabei ist nun, daß nicht alle zur Bestimmung der Nahbereichseinträge benötigten Einträge der Matrix des feineren Levels zum Nahbereich gehören und somit bekannt sind. Dies wird schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt.

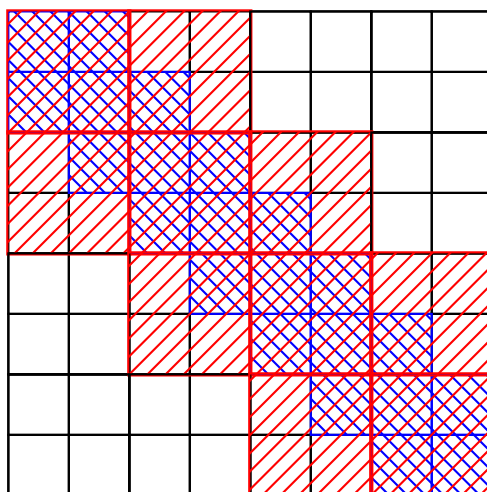


Abbildung 3.1: Nahbereichsbestimmung für Mehrgitterverfahren

Die Nahbereichselemente der 8×8 –Matrix des feinen Levels sind blau markiert, während die Nahbereichselemente der 4×4 –Matrix des groben Levels rot sind. Dabei berechnet sich ein Grobgittereintrag aus der Summe der vier zugehörigen Einträge der Matrix des feinen Levels. Nur die vier Diagonaleinträge der Matrix des groben Levels können somit aus den Nahbereichseinträgen des feinen Gitters bestimmt werden.

Zu den nicht bekannten Matrixeinträge eines Levels $\ell + 1$ gehören immer Konvertierungen von Multipolentwicklungen. Dies wird in Abbildung 3.2 veranschaulicht.

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einer zweidimensionalen Clusterung zur Veranschaulichung der Bestimmung der Nahbereichseinträge zu dem Element τ_j^ℓ , das mit dem orangenen Cluster ω_j^ℓ zu identifizieren ist. Die Nahbereiche der Cluster und der identifizierten Elemente stimmen nicht überein. Der Nahbereich des orangenen Clusters

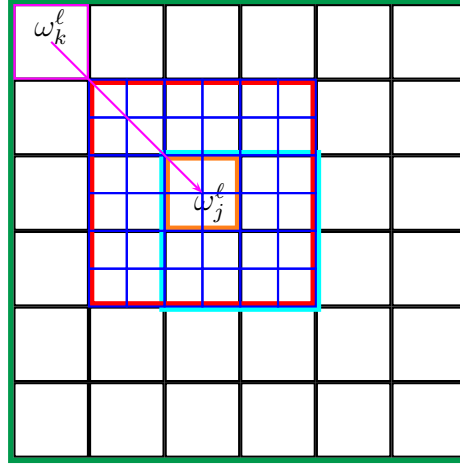


Abbildung 3.2: Nahbereiche und Interaktionen

ω_j^ℓ ist durch die rote Umrandung gekennzeichnet. Für die in diesem Bereich liegenden Cluster sind die Söhne blau eingezeichnet. Der Nahbereich des Elements τ_j^ℓ wird durch den grün umrandeten Nahbereich des cyanen Vaters des Clusters ω_j^ℓ bestimmt. Für alle im Bild eingezeichneten Quadrate der Standardgröße bzw. die zugehörigen Elemente τ_i^ℓ sind also die Nahbereichseinträge $V_\ell[j, i]$ zu τ_j^ℓ zu berechnen. Für den roten Nahbereich des Clusters ω_j^ℓ sind die Nahbereichseinträge des feineren Levels bekannt und können entsprechend der Vorschrift (3.28) zur Berechnung des roten Anteils der Nahbereichseinträge des Elements τ_j^ℓ verwendet werden. Der Anteil der Matrixmultiplikation mit den Clustern zwischen der roten und der grünen Umrandung wird für die Matrixvektormultiplikation mit $V_{\ell+1}$ des feineren Levels durch die Multipolmethode realisiert. Für die Bestimmung der für die Matrix des größeren Levels notwendigen Nahbereichseinträge $V_\ell[j, k]$ muß nur die Konvertierung (3.13) zwischen den Clustern ω_j^ℓ und ω_k^ℓ , die zu den Elementen τ_j^ℓ und τ_k^ℓ gehören, durchgeführt werden. Eine solche Konvertierung zwischen zwei Clustern ist durch den eingezeichneten Pfeil angedeutet. Die zu konvertierenden Multipolkoeffizienten \acute{M}_n^m der Cluster berechnen sich rekursiv durch die Summe der Translationen (3.12) der Multipolkoeffizienten der Söhne als

$$\acute{M}_n^m(C_j^\ell, P(\omega_j^\ell)) = \sum_{\omega_i^{\ell+1} \in \text{Söhne}(\omega_j^\ell)} \sum_{s=0}^n \sum_{t=-s}^s R_s^t(\overrightarrow{C_j^\ell C_i^{\ell+1}}) \acute{M}_{n-s}^{m-t}(C_i^{\ell+1}, P(\omega_i^{\ell+1})),$$

wobei für die Cluster ω_i^L des feinsten Levels diese Multipolkoeffizienten durch

$$\acute{M}_n^m(C_i^L, P(\omega_i^L)) = \sum_{\tau_k \in \omega_i^L} M_n^m(C_i^L, k)$$

gegeben sind. Diese Koeffizienten werden dann auch für die Auswertung der konvertierten Entwicklungen verwendet. Der Eintrag zwischen zwei Elementen τ_j^ℓ und τ_k^ℓ be-

rechnet sich somit als

$$V_\ell[j, k] = \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \dot{M}_n^m(C_j^\ell, \mathbf{P}(\omega_j^\ell)) \left(\sum_{s=0}^p \sum_{t=-s}^s (-1)^n \overrightarrow{S_{n+s}^{m+t}}(\overrightarrow{C_k^\ell C_j^\ell}) \dot{M}_s^t(C_k^\ell, \mathbf{P}(\omega_k^\ell)) \right).$$

Der Anteil der Matrixvektormultiplikation, der nicht im Nahbereich des jeweiligen Levels enthalten ist, wird in einer Matrixvektormultiplikation mit V_ℓ wie bisher mittels der Multipolmethode realisiert. Dabei werden allerdings nur die Operationen bis zum Clusterlevel $\ell - 1$ des Clusterbaumes ausgeführt. Zur Auswertung der so berechneten Entwicklungen werden wieder die oben bestimmten Koeffizienten \dot{M}_n^m verwendet.

Im folgenden wird eine Speicher- und Aufwandsanalyse für eine Anwendung der Mehrgittervorkonditionierung nach Algorithmus 3.1 durchgeführt. Entscheidend für den Gesamtaufwand der Methode sind die Anwendungen der Matrizen V_ℓ für $\ell = \ell_0, \dots, L + 1$, daher wird deren Aufwand analysiert. Entsprechend der Aufwandsanalyse in [95, 97] wird die Clusterung so aufgebaut, daß die Anzahl der Randelemente in den Clustern des feinsten Levels proportional zu $\log^2 N$ ist. Somit existieren $M_T = \mathcal{O}(N/\log^2 N)$ Cluster auf dem feinsten Level. Aufgrund der Baumstruktur kann die Gesamtzahl der Cluster des Baumes mit $2M_T$ abgeschätzt werden. Bei festgehaltenem Nahbereichsparameter d ist entsprechend der Fehleranalyse der Entwicklungsgrad $p \sim \log N$ zu wählen. Die Anzahl der Nahbereichseinträge auf dem Diskretisierungslevel $L + 1$ ist $\mathcal{O}(N \log^2 N)$. Die Elemente der größeren Level sind durch die Cluster gegeben. Aufgrund der Konstruktion des Nahbereichs eines Elements τ_i^ℓ über den Nahbereich des Vaterclusters $\omega_j^{\ell-1}$ von ω_i^ℓ ist die Anzahl der Nahbereichselemente auf den größeren Levels durch eine Konstante c_{NF} beschränkt. Daher entstehen durch die Vergrößerung höchstens $\mathcal{O}(2M_T c_{\text{NF}})$ Nahbereichseinträge für die Grobgittermatrizen. Weiterer Speicheraufwand entsteht durch die zusätzliche Speicherung der $\mathcal{O}(p^2)$ Koeffizienten \dot{M}_n^m für jeden der $2M_T$ Cluster. Somit bleibt der Gesamtspeicheraufwand von der Ordnung $\mathcal{O}(N \log^2 N)$.

Operation und Erläuterung	Kosten
Berechnung der $\mathcal{O}(p^2)$ Koeffizienten \dot{M}_n^m für jedes der N Randelemente und Translation ($\mathcal{O}(p^4)$) auf alle Vätercluster.	$N\mathcal{O}(p^2)$ $+2M_T\mathcal{O}(p^4)$
Jeder Nahbereichseintrag wird zur Berechnung der Nahbereichseinträge des jeweils größeren Levels nur einmal verwendet.	$\mathcal{O}(N \log^2 N)$ $+ \mathcal{O}(2M_T c_{\text{NF}})$
Konstruktion der restlichen Nahbereichseinträge durch jeweils eine Konvertierung ($\mathcal{O}(p^4)$) und eine Auswertung ($\mathcal{O}(p^2)$). Jede der maximal $2M_T c_I$ Konvertierungen ist nur einmal anzuwenden.	$2M_T c_I \mathcal{O}(p^4)$ $+ 2M_T c_I \mathcal{O}(p^2)$

Tabelle 3.1: Aufwandsanalyse zur Erstellung der Grobgittermatrizen

Der Aufwand zur Erstellung der Grobgittermatrizen ist in Tabelle 3.1 aufgelistet. Dabei bezeichnet c_I die maximale Anzahl der Konvertierungen für einen Cluster und ist

wegen des fest gewählten Nahbereichsparameters d beschränkt. Der Gesamtaufwand für die Nahbereichsanteile der Grobgittermatrizen ist somit $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ und entspricht in großen Teilen dem einer Matrixvektormultiplikation mit der Ausgangsmatrix V_h . Es sind lediglich deutlich mehr Auswertungen von lokalen Entwicklungen notwendig, was die Kosten erhöht. Falls zusätzlich die Matrix des größten Levels für eine direkte Invertierung komplett erstellt wird, sind zusätzliche Konvertierungen zwischen den entsprechenden Clustern notwendig. Da die Dimension N_{ℓ_0} dieser Matrix mit ungefähr 1000 bis 1500 fest gewählt ist, ist der zusätzliche Speicherbedarf konstant, und der Aufwand zur Erstellung ist durch $N_{\ell_0}^2 \mathcal{O}(p^4)$ beschränkt. Bei der Aufwandsanalyse der Matrixmultiplikationen in Tabelle 3.2 ist zu beachten, daß jede der Matrizen V_ℓ für $\ell = \ell_0 + 1, \dots, L + 1$ innerhalb einer Anwendung des Mehrgittervorkonditionierers zweimal verwendet wird.

Operation und Erläuterung	Kosten	Mehrgitter	Matrix
Initialisierung der $\mathcal{O}(p^2)$ Multipolkoeffizienten für jeden Cluster und jedes Randelement.	$\mathcal{O}(p^2)$	$2 \cdot (2M_T + N)$	N
Translationen (3.12) von Multipolkoeffizienten	$\mathcal{O}(p^4)$	$2 \cdot 4M_T$	$2M_T$
Konvertierungen (3.13) der Entwicklungen	$\mathcal{O}(p^4)$	$2 \cdot 4M_T \cdot c_I$	$2M_T \cdot c_I$
Translationen (3.14) von lokalen Koeffizienten	$\mathcal{O}(p^4)$	$2 \cdot 4M_T$	$2M_T$
Auswertungen der lokalen Entwicklungen für alle Cluster und alle Randelemente.	$\mathcal{O}(p^2)$	$2 \cdot (2M_T + N)$	N
Nahbereichsmultiplikation	$\mathcal{O}(1)$	$2 \cdot (2M_T \cdot c_{NF} + N \log^2 N)$	$N \log^2 N$

Tabelle 3.2: Aufwandsanalyse für eine Anwendung des Mehrgittervorkonditionierers

In der ersten Spalte ist die Operation beschrieben, deren Einzelkosten in der zweiten Spalte angegeben sind. In der dritten Spalte steht die Anzahl der Anwendungen der jeweiligen Operation im Mehrgittervorkonditionierer. Zum Vergleich ist in der letzten Spalte die entsprechende Anzahl für eine normale Matrixmultiplikation mit V_h mittels der Multipolmethode angegeben. Die Anzahl der Translationen und Konvertierungen ergibt sich dabei aus der Häufigkeit der Anwendungen der Operationen in Abhängigkeit des Clusterlevels, da für die Realisierung der Matrix V_ℓ die Operationen nur bis zum Clusterlevel $\ell - 1$ ausgeführt werden. Die Anzahl der Cluster auf dem Clusterlevel k wird mit $M_T/2^{L-k}$ großzügig abgeschätzt. Somit kann die Anzahl der Operationen mittels des Cauchy-Produkts und der geometrischen Reihe durch

$$\sum_{\ell=\ell_0}^{L+1} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{M_T}{2^{L-k}} \leq \sum_{\ell=1}^{L+1} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{M_T}{2^{L-k}} = \sum_{i=0}^L \frac{M_T}{2^i} (i+1) \leq M_T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^i} = M_T \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right)^2 = 4M_T$$

abgeschätzt werden.

Der Gesamtaufwand einer Anwendung des Mehrgitterverfahrens nach Algorithmus 3.1 als Vorkonditionierer ist somit $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ und geringer als für vier Multipolanwendungen der Matrix V_h . Dabei ist zu beachten, daß in dieser Vorkonditionierung jede Matrix V_ℓ zweimal angewendet werden muß, also auch V_h .

Die bei der Approximation der Grobgittermatrizen notwendige Genauigkeit ist gewährleistet, da bei allen Operationen die Multipolparameter des Diskretisierungslevels, das die größte Genauigkeit benötigt, verwendet wurden. Durch eine geeignete Anpassung des Entwicklungsgrades p an die einzelnen Grobgittermatrizen V_ℓ könnte die Rechenzeit noch ein wenig reduziert werden.

3.4 Numerische Beispiele

Eine genaue Verifikation der Multipolmethode für das gemischte Randwertproblem (1.46) der Laplace–Gleichung wurde in [95, 97] durchgeführt. Dabei wurden der Speicherbedarf, die Rechenzeiten und die Fehler durch die Approximation mit der Multipolmethode analysiert. Dabei stimmten die gemessenen Werte mit den theoretischen Erwartungen überein.

Für die gleiche Struktur der Stufe, die in Abbildung 3.3 dargestellt ist, werden nun anhand eines Dirichlet–Randwertproblems die verschiedenen Vorkonditionierungstechniken verglichen. Das unverfeinerte Randelementnetz der Stufe besteht aus 14 Quadraten, von denen jedes durch zwei Dreiecke beschrieben ist.

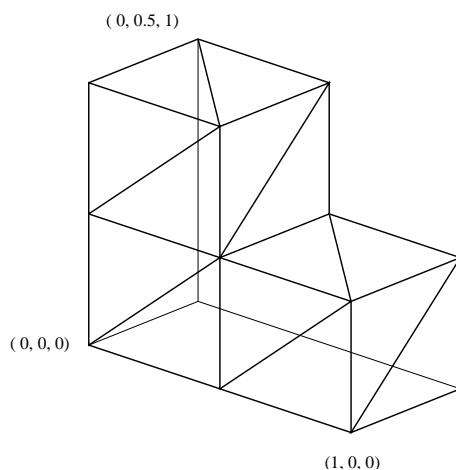


Abbildung 3.3: Grobstruktur der Stufe

Dabei werden in der Tabelle 3.3 eine Diagonalskalierung, der BPX–Vorkonditionierer (3.24) und der algebraische Mehrgittervorkonditionierer aus Abschnitt 3.3 bis zum siebten Verfeinerungslevel mit 458752 Dreiecken verglichen. Der BPX-Vorkonditionierer

zeigt bei zunehmender Elementzahl N einen leichten Anstieg der Iterationszahlen It des CG-Verfahrens mit $\varepsilon = 10^{-8}$, wie aus den Spektraläquivalenzungleichungen (3.23) zu erwarten ist. Die Iterationszahlen sind deutlich geringer als bei der Skalierung. Dies führt zu einem viel schnelleren Lösen des linearen Gleichungssystems. Mit der algebraischen Mehrgittervorkonditionierung reduziert sich die Iterationszahl nochmals sehr stark. Für die Rechenzeit t_2 für das Lösen bringt dies jedoch nur einen geringen Vorteil, da die BPX-Vorkonditionierung in der Anwendung extrem günstig ist. Ein Iterationsschritt mit einer Matrixanwendung und der Mehrgittervorkonditionierung kostet hier ungefähr soviel wie vier Matrixanwendungen. Der zusätzliche Aufwand für die Erstellung der Mehrgittervorkonditionierung kann an den Zeiten t_1 für das Aufstellen des linearen Gleichungssystems und der Vorkonditionierung abgelesen werden und ist mit ungefähr zehn Prozent vertretbar. Dabei ist die Bestimmung der Dämpfungsparameter teurer als das Erstellen der Grobgittermatrizen. Insgesamt sind beide vorgestellten Vorkonditionierungstechniken empfehlenswert.

L	N	Skalierung			ABPX			AMG		
		t_1	t_2	It	t_1	t_2	It	t_1	t_2	It
0	28	0	0	18	0	0	18	0	0	1
1	112	1	0	26	0	0	25	0	0	9
2	448	4	1	36	5	0	28	5	0	10
3	1792	14	1	48	15	1	32	15	1	10
4	7168	56	6	65	56	3	36	61	3	9
5	28672	193	62	85	192	29	39	212	27	10
6	114688	677	363	113	674	140	43	736	140	11
7	458752	2684	2678	144	2691	902	48	3024	855	11

Tabelle 3.3: Vergleich der Vorkonditionierungen für die Laplace-Gleichung

Bisher wurde die adaptive Version der Multipolmethode in der Beschreibung ausgespart. Es gibt allerdings schon Arbeiten zu diesem Thema [25, 89]. Bei adaptiven Geometrien entsteht in Bereichen, in denen ein ausbalancierter Clusterbaum zu flach ist, ein riesiger Nahbereich. Dies führt zu einem hohen Speicherbedarf für die Nahbereichsmatrix und hohen Kosten bei der Berechnung der Nahbereichseinträge. In anderen Bereichen, in denen der Clusterbaum zu tief ist, sind unnötige Cluster zu speichern und der Aufwand für den Multipolanteil der Matrixvektormultiplikation wird sehr hoch. Diese Probleme lassen sich durch einen adaptiven Clusterbaum beheben. Für einen Cluster werden die Söhne immer nur dann angelegt, wenn er noch mehr als eine vorgegebene Anzahl an Dreiecken enthält. Wichtig sind dabei der Erhalt der Symmetrie bei den Operatoren der Multipolmethode und die Kontrolle des Approximationsfehlers. Dies kann aber durch die Einhaltung der Symmetrie für die Nahbereiche der Cluster bei einer gleichzeitigen Abstandskontrolle nach (3.9) erreicht werden. Anhand des Beispiels der adaptiven Clusterung aus Abbildung 3.4 werden nun einige Hinweise dazu gegeben.

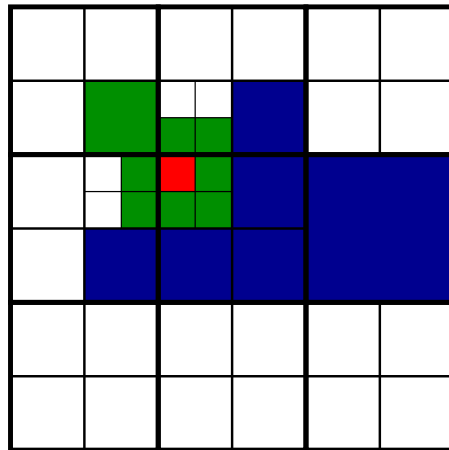


Abbildung 3.4: Nahbereichsbestimmung für eine adaptive Clusterung

Dazu wird der Nahbereich des rot markierten Clusters untersucht. In manchen Arbeiten zur Multipolmethode werden nur die direkt angrenzenden, grün gekennzeichneten Nachbarn als Nahbereich gewählt. Dadurch wird das Verfahren sehr schnell. Allerdings werden dadurch das Zulässigkeitskriterium abgeschwächt und die Approximationsgüte verringert. Wird über den Nahbereich levelweise entschieden, geht sogar die Symmetrie verloren. Der große blaue Cluster liegt dann im Fernfeld des roten, aber der rote Cluster im Nahbereich des blauen. Um die Symmetrie bei einer levelweisen Zuordnung des Nahbereichs der Cluster zu gewährleisten, sind daher die blauen Cluster zum Nahbereich des roten Clusters hinzuzufügen. Dieser Nahbereich kann mit Hilfe des Zulässigkeitskriteriums abschließend noch ausgedünnt werden. Hier wird auf dieses Ausdünnen zugunsten einer einfacheren Implementierung jedoch verzichtet.

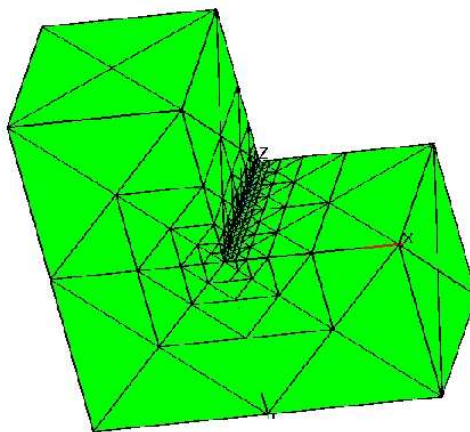


Abbildung 3.5: Adaptives Netz für die Stufe ($L = 0$)

Für die Stufe wird nun das adaptiv gegebene Netz aus Abbildung 3.5 gleichmäßig verfeinert, um die adaptive Multipolversion mit der nichtadaptiven zu vergleichen. Dabei wurden die Randdaten entsprechend der auftretenden Singularität an der einspringenden Kante vorgegeben. In Tabelle 3.4 werden die nichtadaptive Version in der jeweils ersten Zeile und die adaptive Version in der zweiten Zeile verglichen. Dabei wurden die Einstellungen für die nichtadaptive Version so gewählt, daß noch möglichst viele Verfeinerungslevel zu einem vertretbaren Aufwand gerechnet werden konnten.

Level	# Elemente	Erstellen (s)	Lösen (s)	Nahbereich	$ u(x^*) - u_h(x^*) $
0	338	5	2	26.91 %	1.676e-3
		6	1	40.42 %	1,677e-3
1	1352	20	12	6.22 %	4.101e-4
		58	3	26.43 %	4.103e-4
2	5408	60	42	1.77 %	1.025e-4
		113	13	4.51 %	1.021e-4
3	21632	203	188	0.44 %	2.699e-5
		183	43	0.67 %	2.674e-5
4	86528	720	849	0.11 %	6.414e-6
		556	284	0.16 %	6.561e-6
5	346112	1909	1596	0.04 %	1.610e-6

Tabelle 3.4: Ergebnisse für das adaptive Netz der Stufe

Durch die starke Tiefe, die bei der nichtadaptiven Version gewählt wurde, ist der Nahbereich bei der adaptiven Version etwas größer. Allerdings sind die Kosten bei der nichtadaptiven Version auch sehr hoch, da sehr viele zusätzliche Cluster gespeichert werden müssen. Daher konnte das fünfte Verfeinerungslevel auch nur mit der adaptiven Version gerechnet werden. Der Rechenzeitvorteil der adaptiven Version ist insbesondere für das Lösen des linearen Gleichungssystems sehr groß. Zur Fehlerkontrolle wurde die Punktauswertung in einem Punkt des Gebietes verwendet. Dabei stimmen die Fehler der beiden Versionen gut überein, und die erwartete Konvergenzrate tritt ein. Für alle ansonsten durchgeführten Rechnungen wird stets die adaptive Version der Multipolmethode eingesetzt.

Aufgrund der Vorteile der schnelle Randelementmethoden bezüglich Speicherbedarf und Rechenzeit ist es möglich, Beispiele zu simulieren, die in industriellen Anwendungen auftreten. Das erste Beispiel ist die Berechnung des elektrostatischen Feldes für eine Sprühanlage zur Lackierung von Autoteilen. Die entsprechende Testgeometrie in Abbildung 3.6 stammt von R. Sonnenschein (Daimler Chrysler, Dornier). Die beiden Ausschnitte am rechten Rand zeigen Vergrößerungen eines der sechs Arme, an deren Spitzen jeweils eine Nadel mit einem Potential von -70000 V angebracht ist. Ansonsten sind als Randbedingungen verschwindende Dirichlet- oder Neumann-Daten vorgegeben.

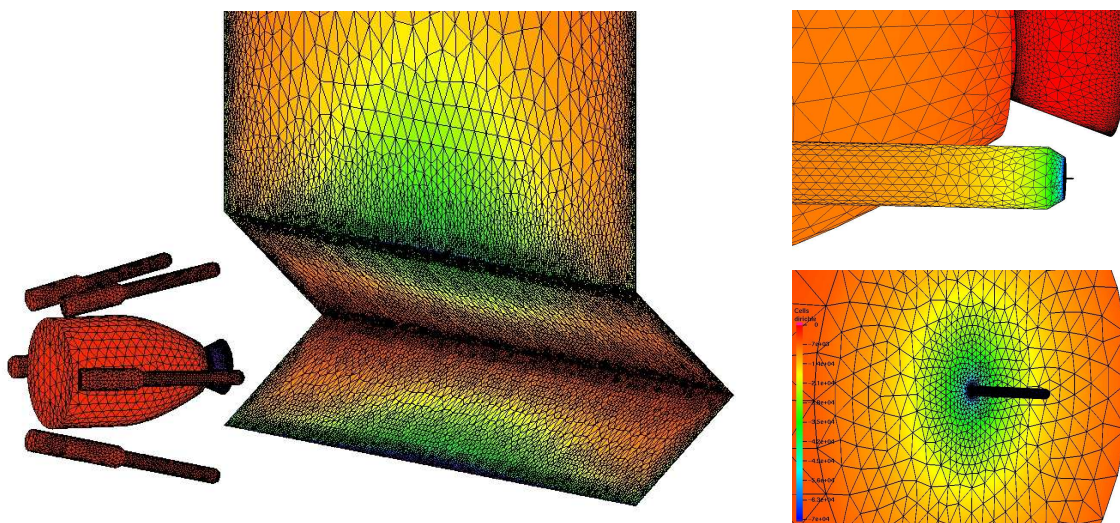


Abbildung 3.6: Sprühanlage und Testblech

Der Farbverlauf zeigt das berechnete Potential mit Werten zwischen -70000 V (blau) und 0 V (rot). Der berechnete Fluß nimmt auf dem Rand Werte zwischen $-2,3 \cdot 10^5$ und $5,5 \cdot 10^8$ an. Das Netz besteht aus 112146 Dreiecken und ist stark adaptiv. Das maximale Verhältnis der Maschenweiten ist $h_{\max}/h_{\min} \approx 1454,5$. So wird beispielsweise jede der sechs winzigen Nadeln durch mehr als 2000 Randelemente beschrieben. Die Höhe und die Breite des Bleches sind jeweils ungefähr 1 m, während die Dicke nur $0,8$ mm beträgt. Die Auswertung der Ergebnisse hat gezeigt, daß das verwendete Netze noch immer nicht fein genug ist. Durch die Verwendung der Vorkonditionierer (3.24) und (2.19) gelingt es, das lineare Gleichungssystem in 150 Iterationschritten des GMRES–Verfahrens mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-8} zu lösen. Ohne eine geeignete Vorkonditionierung ließe sich diese Genauigkeit gar nicht erreichen. Die Multipolmethode eignet sich auch sehr gut, um das Potential oder das elektrische Feld in den zugehörigen 570930 Auswertungspunkten zu berechnen. In der Tabelle 3.5 sind die Rechenzeiten auf einem Rechner mit einem Intel Pentium 4 mit $3,2$ GHz und 2 GB Hauptspeicher angegeben.

N	Erstellen (s)	Lösen (s)	It.
112146	6454	5807	150

Tabelle 3.5: Ergebnisse für die Sprühanlage

Weitere Rechnungen wurden für einen zugehörigen Meßaufbau, siehe Abbildung 3.7, durchgeführt. Das zugehörige Randelementnetz ist wieder stark adaptiv mit einem maximalen Verhältnis der Maschenweiten von $h_{\max}/h_{\min} \approx 1220$. Für den Faradayschen Käfig sind Dirichlet–Randbedingungen mit Nullpotential vorgegeben. Auf der Lanze sind Neumann–Randbedingungen mit verschwindendem Fluß vorgegeben. Nur am Messingmantel und auf der Metallspitze ist ein Potential von -60000 V angebracht.

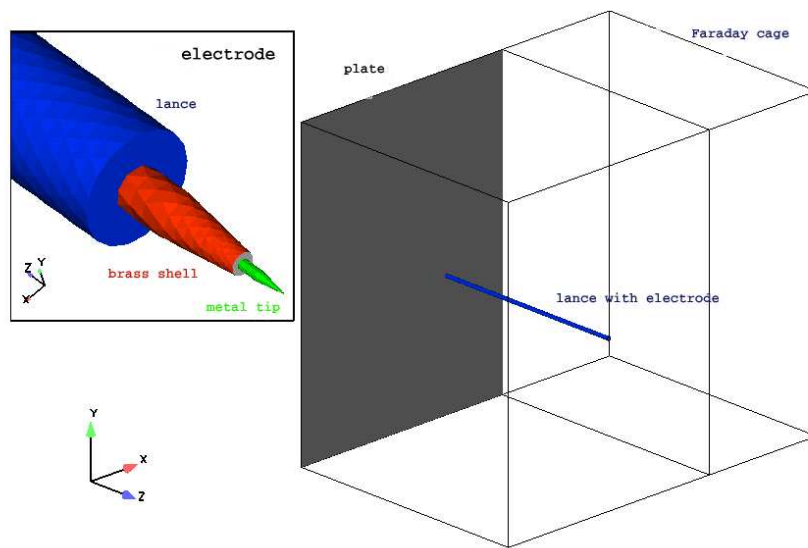


Abbildung 3.7: Meßaufbau

Die Schwierigkeiten bei diesem Beispiel liegen in den kleinen Ausmaßen der Metallspitze und vor allem im sehr starken Abfall des Potentials und des elektrischen Feldes in der Umgebung der Metallspitze. Dies muß durch das verwendete Randelementnetz aufgelöst werden. Daher wurden an der Metallspitze weitere adaptive Verfeinerungen durchgeführt. Die Ausschnitte der verwendeten Netze, in denen adaptiv verfeinert wurde, sind in Abbildung 3.8 zu sehen.

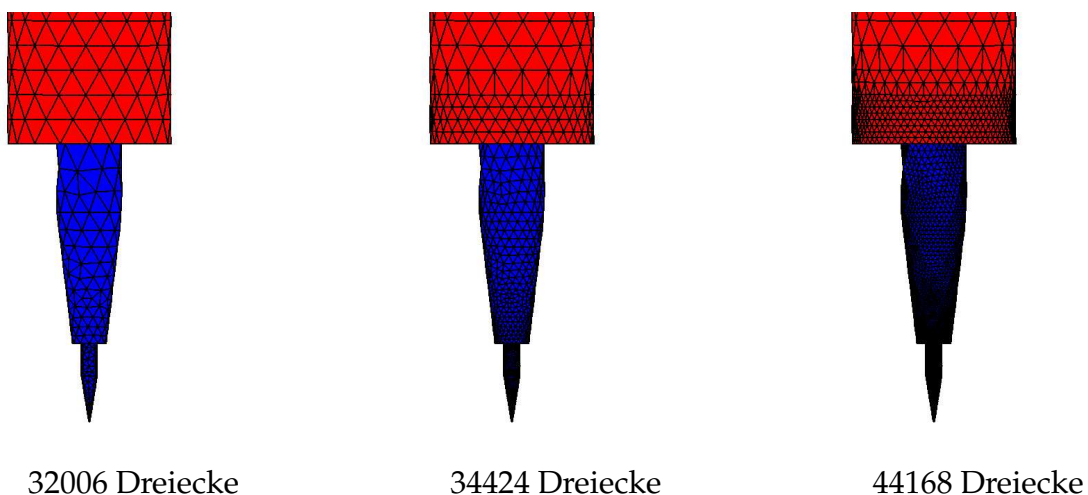


Abbildung 3.8: adaptive Verfeinerung an der Metallspitze

Die zugehörigen Daten der numerischen Simulation sind in Tabelle 3.6 angegeben. Die Rechnung wurde auf einem Computer mit einem Intel Pentium 4 mit 3,06 GHz

und 1 GB Hauptspeicher ausgeführt. Es zeigt sich, daß die adaptive Version der Multipolmethode mit den stark adaptiven Netzen sehr gute Resultate liefert. Die Anzahl der Nahbereichseinträge könnte durch eine Art Nachkompression des Nahbereiches noch verringert werden. Darauf wurde hier im Hinblick auf eine einfachere Implementierung jedoch verzichtet. Außerdem zeigt sich, daß der BPX–Vorkonditionierer (3.24) auch für adaptive Netze gut funktioniert, da die Iterationszahl nur geringfügig ansteigt. Die kleinen Sprünge in den Iterationszahlen können auch mit den Skalierungen der beiden Blöcke des linearen Gleichungssystems der gemischten Formulierung zusammenhängen.

N	# Einträge	Erstellen (s)	Lösen (s)	It.
32006	4435610	443	127	79
34424	5576398	571	155	75
44168	7889093	860	247	83

Tabelle 3.6: Ergebnisse für die drei adaptiven Netze

Beim Vergleich der Cauchy–Daten $u_h(x)$ auf der Lanze mit der Auswertung $\tilde{u}(x)$ der Darstellungsformel

$$\tilde{u}(x) = Vg(y) + \left(\frac{1}{2}I - K\right)u_h(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma,$$

ist ein Sprung zwischen den beiden Werte zu beobachten. Bei Rechnungen mit verfeinerten Gittern werden diese Sprünge kleiner. Dabei zeigt sich, daß die Ergebnisse des einmal adaptiv verfeinerten Gitters die gleiche Qualität haben wie die des gleichmäßig verfeinerten Gitters und das zu wesentlich geringeren Kosten. Durch die zweite adaptive Verfeinerung wird der Sprung noch weiter verringert.

Dabei besteht ein Zusammenhang zwischen diesem Sprung $e_h(x) = \tilde{u}(x) - u_h(x)$ und einem a posteriori Fehlerschätzer [115, 116]. Beispielsweise für ein Neumann–Problem ist der tatsächliche Fehler $u - u_h$ der Approximationslösung u_h zur exakten Lösung u die Lösung der Randintegralgleichung

$$\left(\frac{1}{2}I + K\right)(u - u_h)(x) = e_h(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma,$$

und ein einfacher Fehlerschätzer ist dann durch

$$\frac{1}{1 + c_K} \|e_h\|_D \leq \|u - u_h\|_D \leq \frac{1}{1 - c_K} \|e_h\|_D$$

gegeben. Somit kann der beobachtete Sprung als ein erster Hinweis auf den Approximationsfehler angesehen werden.

4 Symmetrische Multipolmethode für die Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik

Es gibt einige Varianten der Multipolmethode für die dreidimensionale lineare Elastostatik. In [53] wird eine Entwicklung der Fundamentallösung der linearen Elastostatik in harmonische Kugelfunktionen für die Panel-Clustering-Methode hergeleitet. In [38] wird eine Multipolvariante beschrieben, die die Kerne der Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik mittels des Kerns $|x - y|^{-1}$ und seiner Ableitungen umschreibt und dann die Multipolmethode der Elektrostatik als Black-Box verwendet. Dies führt zu einer hohen Anzahl von Anwendungen der Multipolmethode für die Laplace-Gleichung. Ausgehend von der Entwicklung der Fundamentallösung des Laplace-Operators werden in [139, 140] eine neue Multipolentwicklung und die zugehörigen Translationen für die Fundamentallösung der linearen Elastostatik hergeleitet. Dies führt zu einer geringeren Anzahl von Multipolanwendungen, aber die Entwicklungen und die zugehörigen Operationen sind dafür teurer. Die Arbeit enthält jedoch keine klare Aussage darüber, ob dieser Zugang schneller ist als der in [38] präsentierte. In [102] wird eine Multipolvariante vorgestellt, die eine Taylor-Reihenentwicklung verwendet.

Hier wird nun die Realisierung der Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik dargestellt, die für das Einfachschichtpotential dem Zugang aus [38] folgt. Allerdings garantiert die hier vorgestellte Version die Symmetrie der Galerkin-Matrix der Multipolapproximation. Die anderen Randintegraloperatoren werden mittels partieller Integration auf das Einfachschichtpotential und das Doppelschichtpotential der Laplace-Gleichung sowie das Einfachschichtpotential der linearen Elastostatik zurückgeführt. Abschließend wird noch eine Fehleranalyse für diese Approximationen durchgeführt und numerische Beispiele für die vorgestellte Realisierung präsentiert.

4.1 Realisierung des Einfachschichtpotentials

Aufgrund der Zielstellung, daß die Multipolentwicklungen und die zugehörigen Operationen der Laplace-Gleichung wiederverwendet werden sollen, bietet es sich an, die Fundamentallösung $(U_{k\ell}^*)_{\ell,k=1..3}$ der linearen Elastostatik

$$U_{k\ell}^*(x - y) = \frac{1 + \nu}{8\pi E(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \frac{\delta_{k\ell}}{|x - y|} + \frac{(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{|x - y|^3} \right] \quad (4.1)$$

mittels des Kerns der Laplace–Gleichung und seiner Ableitungen darzustellen. Die direkte Umsetzung führt zu der Darstellung

$$U_{k\ell}^*(x-y) = \frac{1+\nu}{2E(1-\nu)} \frac{1}{4\pi} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} - x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{y_\ell}{|x-y|} \right].$$

Bei dieser Zerlegung läßt sich das Einfachschichtpotential bei genauerer Analyse mittels vier Aufrufen der Multipolmethode der Laplace–Gleichung und sieben Auswertungen realisieren. Allerdings erweist sich die Galerkin–Matrix dieser Realisierung als nicht symmetrisch, da nur ein endlicher Entwicklungsgrad für die Approximation des Kerns verwendet wird. Der Erhalt der Transponiertheit der Galerkin–Matrizen des Doppelschichtpotentials der Laplace–Gleichung und seines adjungierten Operators [95, 98] liefert die Idee, wie hier für die Gradiententerme die Symmetrie bei der Realisierung mit der Multipolmethode erhalten werden kann. Diese führt zu der folgenden Darstellung der Fundamentallösung,

$$U_{k\ell}^*(x-y) = \frac{1+\nu}{2E(1-\nu)} \frac{1}{4\pi} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} - x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} - y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|} \right],$$

die bei der Realisierung mit der Multipolmethode die Symmetrie innerhalb eines Blocks gewährleistet. Um auch noch die Symmetrie zwischen den einzelnen Blöcken sicher zu stellen, wird die Darstellung des Blockes mit vertauschten Indizes k und ℓ hinzuaddiert und das Ergebnis halbiert:

$$U_{k\ell}^*(x-y) = \frac{1+\nu}{2E(1-\nu)} \frac{1}{4\pi} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} - \frac{1}{2} x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2} y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2} x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2} y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \frac{1}{|x-y|} \right]. \quad (4.2)$$

Aufgrund dieser Darstellung mittels der Fundamentallösung der Laplace–Gleichung kann die Realisierung mittels des in Abschnitt 3.1 beschriebenen Multipolverfahrens erfolgen. Es müssen lediglich die Koeffizienten zur Erstellung der Multipolentwicklungen (3.10) und zur Auswertung der lokalen Entwicklungen nach (3.7) angepaßt werden, wie es bereits für die Realisierung des Doppelschichtpotentials und des adjungierten Doppelschichtpotentials der Laplace–Gleichung notwendig war. Daher wird im folgenden für die Realisierung der Randintegraloperatoren immer nur die notwendige Anpassung des Terms \mathcal{Q} der modifizierten Koeffizienten $\widehat{M}_n^m(O, k)$ aus (3.11) angegeben. Wird nicht die Galerkin–Matrix sondern der Randintegraloperator selbst realisiert, so entfällt die äußere Integration und die Auswertung des Fernfeldanteils in einem Auswertungspunkt x erfolgt dann mittels der Koeffizienten

$$\check{M}_n^m(O, x) := \mathcal{Q}R_n^m(x). \quad (4.3)$$

Lemma 4.1. Die Approximation \tilde{V}_E des Einfachschichtpotential V_E der linearen Elastostatik mittels der Multipolmethode lässt sich symmetrisch realisieren als

$$\begin{aligned} (\tilde{V}_{Et})_k(x) &= \frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)} \left[(3-4\nu) (\tilde{V}_L t_k)(x) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sum_{\ell=1}^3 \left(x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \right) t_{\ell}(y) \frac{k_p(x, y)}{4\pi} ds_y \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sum_{\ell=1}^3 t_{\ell}(y) \left(y_{\ell} \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_{\ell}} \right) \frac{k_p(x, y)}{4\pi} ds_y \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dabei wird der Nahbereich über die Darstellung (4.1) beschrieben. Für das Fernfeld werden sechs Anwendungen des Multipolalgorithmus und neun Auswertungen von lokalen Entwicklungen benötigt.

Beweis. Diese Realisierung des Einfachschichtpotentials erhält man direkt durch das Einsetzen der Darstellung (4.2) der Fundamentallösung und die anschließende Summation über ℓ ,

$$(V_{Et})_k(x) = \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} U_{k\ell}^*(x, y) t_{\ell}(y) ds_y.$$

Für die Aufwandsanalyse werden nun die Modifikationen für die Koeffizienten (3.11) bei der Realisierung durch die Multipolmethode angegeben. Aus der Darstellung (4.4) lassen sie die Operationen, wie in Tabelle 4.1 dargestellt, ablesen.

Term	\mathcal{Q} Initialisierung $\widehat{M}_n^m(O, i)$	\mathcal{Q} Auswertung $\check{M}_n^m(O, x)$
1. Zeile für $k = 1, 2, 3$	$t_k(x)$	$(3-4\nu)\alpha I_k$
2. Zeile für $\ell = 1, 2, 3$	$t_{\ell}(x)$	$-\frac{\alpha}{2} I_k (x_{\ell} \delta_{jk} + x_k \delta_{j\ell})_{j=1}^3 \cdot \nabla$
3. Zeile für $k = 1, 2, 3$	$w^{(k)}(t, x) \cdot \nabla$	$-\frac{\alpha}{2} I_k$

Tabelle 4.1: Aufwandsanalyse für das Einfachschichtpotential

Dabei erfolgt die Zuordnung zur richtigen Komponente mittels des Vektors I_k mit den Koeffizienten $I_{k,i} = \delta_{ki}$. Die Vektoren $w^{(k)}(t, x)$ besitzen für $j = 1, \dots, 3$ die Komponenten

$$w_j^{(k)}(t, x) = y_k t_j(x) + \delta_{jk} \sum_{\ell=1}^3 y_{\ell} t_{\ell}(x).$$

Die Konstante α ist gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{1 + \nu}{2E(1 - \nu)}.$$

Somit lassen sich für die zweite Zeile die gleichen Aufrufe der Multipolmethode wie für die erste Zeile verwenden. Während für die erste Zeile drei Standardauswertungen durchgeführt werden, müssen für die zweite Zeile zusätzlich drei Auswertungen mit dem Gradienten erfolgen. Für die dritte Zeile werden dann noch drei modifizierte Multipolaufrufe und drei weitere Standardauswertungen ausgeführt. \square

Bemerkung 4.1. Es lassen sich sogar noch die Auswertungen der ersten und der dritten Zeile zusammenfassen, wenn nach den jeweiligen Auswertungen von $V(t_\ell)$ mittels ∇_x noch die Entwicklungen zur dritten Zeile berechnet und hinzuaddiert werden. Dann können die erste und dritte Zeile gemeinsam ausgewertet werden. Dazu müssen aber im Multipolteil die entsprechenden Faktoren der einzelnen Terme eingebaut werden. Vor allem führt dies aber zu einer komplizierteren Implementierung.

Gegenüber der Multipolmethode für die Laplace–Gleichung werden zwei neue Prozeduren benötigt. Zunächst braucht man eine Prozedur, die bei der Auswertung der lokalen Entwicklungen den Gradienten ∇_x berücksichtigt. Diese Prozedur kann aus der Prozedur für das adjungierte Doppelschichtpotential $K_{L'}$, die die Normalenableitung realisiert, gewonnen werden. Die zweite neue Prozedur muß die Multipolentwicklungen für die dritte Zeile korrekt initialisieren. Sie kann aber aus der Initialisierung für das Doppelschichtpotential K_L gewonnen werden. Dabei ist jeweils zu beachten, daß x_ℓ und y_ℓ die globalen Koordinaten der Punkte x und y bezeichnen.

Folgerung 4.2. *Die Bilinearform*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}_E t, \tau \rangle_\Gamma &= \frac{(1 + \nu)}{2E(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \sum_{k=1}^3 \langle \tilde{V}_L t_k, \tau_k \rangle_\Gamma \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \tau_k(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^3 \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) t_\ell(y) \frac{k_p(x, y)}{4\pi} ds_y ds_x \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \tau_k(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^3 t_\ell(y) \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) \frac{k_p(x, y)}{4\pi} ds_y ds_x \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

der symmetrischen Approximation \tilde{V}_E des Einfachschichtpotentials der linearen Elastostatik kann wie das Einfachschichtpotential selbst mit sechs Multipolaufrufen und neun Multipolauswertungen berechnet werden.

Die Realisierung der zur Bilinearform gehörigen Galerkin–Matrix für stückweise konstante Basisfunktionen ist in Tabelle 4.2 ausgeführt. Dabei ist insbesondere die Zuordnung zu den entsprechenden Blöcken bzw. Komponenten dargestellt. Der Operator $\mathcal{W}_{i,j}$

ist gegeben durch

$$\mathcal{W}_{i,j}(x) = \alpha(3 - 4\nu)\delta_{ij}\tau_j(x) - \frac{\alpha}{2}\tau_j(x) \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Initialisierung	Auswertung: \mathcal{Q} für $\widehat{M}_n^m(O, i)$		
\mathcal{Q} für $\widehat{M}_n^m(O, i)$	1. Komponente	2. Komponente	3. Komponente
t_1	$\mathcal{W}_{1,1}(x)$	$\mathcal{W}_{1,2}(x)$	$\mathcal{W}_{1,3}(x)$
t_2	$\mathcal{W}_{2,1}(x)$	$\mathcal{W}_{2,2}(x)$	$\mathcal{W}_{2,3}(x)$
t_3	$\mathcal{W}_{3,1}(x)$	$\mathcal{W}_{3,2}(x)$	$\mathcal{W}_{3,3}(x)$
$w^{(1)}(t, x) \cdot \nabla$	$-\frac{\alpha}{2}\tau_1(x)$		
$w^{(2)}(t, x) \cdot \nabla$		$-\frac{\alpha}{2}\tau_2(x)$	
$w^{(3)}(t, x) \cdot \nabla$			$-\frac{\alpha}{2}\tau_3(x)$

Tabelle 4.2: Realisierung der Bilinearform des Einfachschichtpotentials

4.2 Realisierung des Doppelschichtpotentials

Für das Doppelschichtpotential K_E der linearen Elastostatik kann mit Hilfe der partiellen Integration eine Darstellung mittels schwachsingulärer Randintegraloperatoren hergeleitet werden. Nach Satz 1.6 gilt für das Doppelschichtpotential K_E der linearen Elastostatik die Darstellung [72]

$$(K_E u)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} ds_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} (\mathcal{M}u)(y) ds_y + 2\mu (V_E(\mathcal{M}u))(x).$$

mit der Abbildung \mathcal{M} aus (1.42), die auch geschrieben werden kann als

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{\text{curl}}_{\Gamma,3} & \underline{\text{curl}}_{\Gamma,2} \\ \underline{\text{curl}}_{\Gamma,3} & 0 & -\underline{\text{curl}}_{\Gamma,1} \\ -\underline{\text{curl}}_{\Gamma,2} & \underline{\text{curl}}_{\Gamma,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung (1.40) des Doppelschichtpotentials der linearen Elastostatik wird nun auch für den Nahbereich verwendet, da dadurch nur schwach-singuläre Randintegraloperatoren auszuwerten sind. Dieser Übergang von Cauchy-singulären auf schwach-singuläre Integrale reduziert den Integrationsaufwand für den Nahbereich erheblich. Aus der Darstellung (1.40) kann man eine Aufwandsanalyse für die Realisierung mittels des Multipolverfahrens erstellen. Die Analyse läßt sich vereinfachen durch die Verwendung der Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \left(\tilde{K}_E u\right)_k(x) &= \int_{\Gamma} u_k(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{k_p(x, y)}{4\pi} ds_y - \int_{\Gamma} \frac{k_p(x, y)}{4\pi} (\mathcal{M}u)_k(y) ds_y + 2\mu \left(\tilde{V}_E(\mathcal{M}u)\right)_k(x) \\ &= \left(\tilde{K}_L u_k\right)(x) - \left(\tilde{V}_L(\mathcal{M}u)_k\right)(x) + 2\mu \left(\tilde{V}_E(\mathcal{M}u)\right)_k(x). \end{aligned}$$

Für die einzelnen Summanden lassen sich nun die erforderlichen Operationen aus der Tabelle 4.3 ablesen.

Term	\mathcal{Q} Initialisierung $\widehat{M}_n^m(O, i)$	\mathcal{Q} Auswertung $\check{M}_n^m(O, x)$
$\tilde{K}_L u_k$ für $k = 1, 2, 3$	$u_k(x) \frac{\partial}{\partial n_x}$	$I_k \frac{1}{4\pi}$
$\tilde{V}_L(\mathcal{M}u)_k$ für $k = 1, 2, 3$	$(\mathcal{M}u)_k(x)$	$I_k \frac{1}{4\pi}$
$\tilde{V}_E(\mathcal{M}u)$ für $k = 1, 2, 3$	$(\mathcal{M}u)_k(x)$	$(3 - 4\nu)\beta I_k$
$\tilde{V}_E(\mathcal{M}u)$ für $\ell = 1, 2, 3$	$(\mathcal{M}u)_\ell(x)$	$-\frac{\beta}{2} I_k (x_\ell \delta_{jk} + x_k \delta_{j\ell})_{j=1}^3 \cdot \nabla$
$\tilde{V}_E(\mathcal{M}u)$ für $k = 1, 2, 3$	$w^{(k)}(\mathcal{M}u, x) \cdot \nabla$	$-\frac{\beta}{2} I_k$

Tabelle 4.3: Aufwandsanalyse für das Doppelschichtpotential

Dabei ist die Konstante β gegeben durch

$$\beta = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{4\pi}.$$

Für die zweite, dritte und vierte Zeile genügen insgesamt drei Aufrufe der Multipolmethode, sowie drei Standardauswertungen und drei Gradientenauswertungen. Die Anwendungen der ersten und der fünften Zeile können auch noch zusammengefaßt werden, so daß dafür nur drei Multipolaufrufe und drei Auswertungen notwendig sind.

Folgerung 4.3. Die Approximation \tilde{K}_E des Doppelschichtpotentials der linearen Elastostatik läßt sich mit sechs Multipolaufrufen und neun Multipolauswertungen realisieren.

Folgerung 4.4. Die Bilinearform des Doppelschichtpotentials \tilde{K}_E der linearen Elastostatik

$$\langle \tilde{K}_E u, \tau \rangle_\Gamma = \sum_{k=1}^3 \langle \tilde{K}_L(u_k), \tau_k \rangle_\Gamma - \sum_{k=1}^3 \langle \tilde{V}_L(\mathcal{M}u)_k, \tau_k \rangle_\Gamma + 2\mu \sum_{k=1}^3 \langle (\tilde{V}_E(\mathcal{M}u))_k, \tau_k \rangle_\Gamma$$

läßt sich mit sechs Multipolaufrufen und neun Multipolauswertungen berechnen.

Die Bilinearform kann auch durch geeignetes Umsortieren wie in der Tabelle 4.4 realisiert werden. Dabei sind die Vektoren $\tilde{w}^{(k)}$ gegeben als

$$\tilde{w}^{(k)}(x) = \frac{1}{4\pi} u_k(x) n_x - \frac{\beta}{2} w^{(k)}(\mathcal{M}u, x)$$

und $\mathcal{W}_{i,j}$ durch

$$\mathcal{W}_{i,j}(v, x) = (1 - 2\nu)\beta\delta_{ij}v(x) - \frac{\beta}{2}v(x) \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Initialisierung	Auswertung: \mathcal{Q} für $\widehat{M}_n^m(O, i)$		
\mathcal{Q} für $\widehat{M}_n^m(O, i)$	1. Komponente	2. Komponente	3. Komponente
$(\mathcal{M}u)_1(x)$	$\mathcal{W}_{1,1}(\tau_1, x)$	$\mathcal{W}_{1,2}(\tau_2, x)$	$\mathcal{W}_{1,3}(\tau_3, x)$
$(\mathcal{M}u)_2(x)$	$\mathcal{W}_{2,1}(\tau_1, x)$	$\mathcal{W}_{2,2}(\tau_2, x)$	$\mathcal{W}_{2,3}(\tau_3, x)$
$(\mathcal{M}u)_3(x)$	$\mathcal{W}_{3,1}(\tau_1, x)$	$\mathcal{W}_{3,2}(\tau_2, x)$	$\mathcal{W}_{3,3}(\tau_3, x)$
$\tilde{w}^{(1)}(x) \cdot \nabla$	$\tau_1(x)$		
$\tilde{w}^{(2)}(x) \cdot \nabla$		$\tau_2(x)$	
$\tilde{w}^{(3)}(x) \cdot \nabla$			$\tau_3(x)$

Tabelle 4.4: Realisierung der Bilinearform des Doppelschichtpotentials

Für stückweise lineare Ansatzfunktionen ist \mathcal{M} eine Abbildung von den stückweise linearen Ansatzfunktionen auf die stückweise konstanten Ansatzfunktionen nach (3.15). Ansonsten kommen nur Multipoloperationen des Laplace-Operators und das Einfachschichtpotential der linearen Elastostatik zum Einsatz. Da \mathcal{M} also einen Vektor über den Knoten auf einen Vektor über den Dreiecken abbildet, können die bereits vorhandenen Nahbereichsmatrizen der beiden Einfachschichtpotentiale V_L und V_E und des Doppelschichtpotentials K_E direkt zur Realisierung der Nahbereichsmultiplikation verwendet werden.

4.3 Das adjungierte Doppelschichtpotential

Die Darstellung des Doppelschichtpotentials läßt sich auf die Bilinearform des adjungierten Doppelschichtpotentials übertragen. Dies ist ausreichend für das verwendete Galerkin–Verfahren.

Lemma 4.5. Für die Bilinearform des adjungierten Doppelschichtpotentials K_E' der linearen Elastostatik gilt

$$\langle K_E' t, v \rangle_\Gamma = \langle K_L' t, v \rangle_\Gamma - \langle V_L t, \mathcal{M}v \rangle_\Gamma + 2\mu \langle V_E t, \mathcal{M}v \rangle_\Gamma. \quad (4.6)$$

Dabei ist die Schreibweise so zu verstehen, daß die Laplace–Operatoren auf jede Raumdimension extra angewandt werden.

Beweis. Durch Ausnutzen der Adjungiertheit bzw. Selbstdjungiertheit der einzelnen Randintegraloperatoren erhält man unter Verwendung der Darstellung (1.40) des Doppelschichtpotentials

$$\begin{aligned} \langle K_E' t, v \rangle_\Gamma &= \langle t, K_E v \rangle_\Gamma \\ &= \langle t, K_L v - V_L(\mathcal{M}v) + 2\mu V_E(\mathcal{M}v) \rangle_\Gamma \\ &= \langle K_L' t, v \rangle_\Gamma - \langle V_L t, \mathcal{M}v \rangle_\Gamma + 2\mu \langle V_E t, \mathcal{M}v \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

□

Aus der Darstellung (4.6) der Bilinearform des adjungierten Doppelschichtpotentials der linearen Elastostatik ergibt sich sofort eine Aufwandsanalyse für die Realisierung mittels des Multipolverfahrens.

Eine Galerkin–Matrix wird blockweise für die einzelnen Komponenten behandelt. Für ein Testfunktion $v^{(j)} = (\delta_{1,j}v_0, \delta_{2,j}v_0, \delta_{3,j}v_0)^\top$, die nur in der j -ten Komponente einen Eintrag hat, gilt

$$(\mathcal{M}v^{(j)})_k = \sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} v_i^{(j)} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} \delta_{i,j} v_0 = \mathcal{M}_{k,j} v_0.$$

Daher muß bei der zugehörigen Galerkinmatrix das Ergebnis dann in die j -te Komponente des Ergebnisvektors eingetragen werden. Die Operationen der Realisierung nach Formel (4.6) sind in der Tabelle 4.5 zusammengefaßt.

Dabei sind die Terme $\widetilde{\mathcal{W}}$ definiert als

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{i,j,k,\ell} = \mathcal{W}_{i,j}(\underline{\text{curl}}_{\Gamma,k} v_\ell, x) - \mathcal{W}_{i,k}(\underline{\text{curl}}_{\Gamma,j} v_\ell, x).$$

Folgerung 4.6. Die Bilinearform des adjungierten Doppelschichtpotential K_E' der linearen Elastostatik läßt sich mit sechs Multipolaufrufen und neun Multipolauswertungen, wovon drei Auswertungen mit dem Gradienten erfolgen und deren Ergebnisse dann noch an verschiedenen Stellen gewichtet aufsummiert werden, realisieren.

Initialisierung	Auswertung: \mathcal{Q} für $\widehat{M}_n^m(O, i)$		
\mathcal{Q} für $\widehat{M}_n^m(O, i)$	1. Komponente	2. Komponente	3. Komponente
t_1	$\frac{1}{4\pi} v_1 \frac{\partial}{\partial n} + \widetilde{\mathcal{W}}_{1,2,3,1}$	$\widetilde{\mathcal{W}}_{1,3,1,2}$	$\widetilde{\mathcal{W}}_{1,1,2,3}$
t_2	$\widetilde{\mathcal{W}}_{2,2,3,1}$	$\frac{1}{4\pi} v_1 \frac{\partial}{\partial n} + \widetilde{\mathcal{W}}_{2,3,1,2}$	$\widetilde{\mathcal{W}}_{2,1,2,3}$
t_3	$\widetilde{\mathcal{W}}_{3,2,3,1}$	$\widetilde{\mathcal{W}}_{3,3,1,2}$	$\frac{1}{4\pi} v_1 \frac{\partial}{\partial n} + \widetilde{\mathcal{W}}_{3,1,2,3}$
$w^{(1)}(t, x) \cdot \nabla$		$\frac{\beta}{2} \underline{\text{curl}}_{\Gamma,3} v_2$	$-\frac{\beta}{2} \underline{\text{curl}}_{\Gamma,2} v_3$
$w^{(2)}(t, x) \cdot \nabla$	$-\frac{\beta}{2} \underline{\text{curl}}_{\Gamma,3} v_1$		$\frac{\beta}{2} \underline{\text{curl}}_{\Gamma,1} v_3$
$w^{(3)}(t, x) \cdot \nabla$	$\frac{\beta}{2} \underline{\text{curl}}_{\Gamma,2} v_1$	$-\frac{\beta}{2} \underline{\text{curl}}_{\Gamma,1} v_2$	

Tabelle 4.5: Realisierung der Bilinearform des adjungierten Doppelschichtpotentials

Die Realisierung für stückweise konstante Ansatzfunktionen und stückweise lineare, stetige Testfunktionen gestaltet sich etwas einfacher, da hier das Ergebnis aus den Anteilen der Einzelschichtpotentials als Vektor über den Randelementen bestimmt und dann mittels der transponierten Abbildung von $\mathcal{M}u_h$ zum Endergebnisvektor hinzuaddiert werden kann.

4.4 Die Bilinearform des hypersingulären Operators

Wie bei der Laplace-Gleichung läßt sich die Bilinearform des hypersingulären Operators mittels partieller Integration in Bilinearformen des Einzelschichtpotentials umformen. Ausgehend von der Darstellung (1.40) des Doppelschichtpotentials K_E erhält man nach Satz 1.7 die folgende Darstellung [51]:

$$\begin{aligned}
\langle D_E u, v \rangle_{\Gamma} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{k=1}^3 (\mathcal{M}_{k+2,k+1} v)(x) \cdot (\mathcal{M}_{k+2,k+1} u)(y) \right) ds_y ds_x \\
&+ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (\mathcal{M}v)^{\top}(x) \left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{|x-y|} - 4\mu^2 U^*(x, y) \right) (\mathcal{M}u)(y) ds_y ds_x \\
&+ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \sum_{i,j,k=1}^3 (\mathcal{M}_{k,j} v_i)(x) \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} (\mathcal{M}_{k,i} u_j)(y) ds_y ds_x.
\end{aligned}$$

Die Bilinearform läßt sich bei komponentenweiser Schreibweise und Einsetzen der Darstellung (4.2) der Fundamentallösung noch genauer aufsplitten

$$\begin{aligned}
\langle D_E u, v \rangle_\Gamma = & \mu \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_\Gamma (\mathcal{M}_{k+2,k+1} v_i)(x) \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} (\mathcal{M}_{k+2,k+1} u_i)(y) ds_y ds_x \\
& + 2\mu \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{k,j} v_j \right)(x) \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} u_i \right)(y) ds_y ds_x \\
& + \mu \sum_{i,j,k=1}^3 \int_\Gamma (\mathcal{M}_{k,j} v_i)(x) \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} (\mathcal{M}_{k,i} u_j)(y) ds_y ds_x \\
& - \frac{E}{2(1+\nu)(1-\nu)} \left[\right. \\
& (3-4\nu) \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} v_i \right)(x) \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{k,j} u_j \right)(y) ds_y ds_x \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} v_i \right)(x) \sum_{\ell=1}^3 x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{\ell,j} u_j \right)(y) ds_y ds_x \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} v_i \right)(x) \sum_{\ell=1}^3 x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{\ell,j} u_j \right)(y) ds_y ds_x \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} v_i \right)(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^3 y_\ell \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{\ell,j} u_j \right)(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} ds_y ds_x \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{k,i} v_i \right)(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^3 y_k \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{\ell,j} u_j \right)(y) \frac{\partial}{\partial y_\ell} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} ds_y ds_x \right].
\end{aligned}$$

Die Tabelle 4.6 gibt Auskunft über die notwendigen Multipolaufrufe und die Zuordnung der Auswertungen mit zugehörigen Summationsgewichten. Dabei werden die Konstanten

$$\alpha = -\frac{E}{2(1+\nu)(1-\nu)} \frac{1}{4\pi} \quad \text{und} \quad \beta = (3-4\nu)\alpha$$

und der Operator

$$\mathcal{V}_{i,j,k}(v_\ell) = \frac{\alpha}{2} \left(\underline{\text{curl}}_{\Gamma,k} v_\ell \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \underline{\text{curl}}_{\Gamma,j} v_\ell \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right)$$

verwendet.

Folgerung 4.7. Die Bilinearform des hypersingulären Operators D_E der linearen Elastostatik kann mit zwölf Multipolaufrufen und 18 Multipolauswertungen realisiert werden. Die Auswertungen setzen sich zusammen aus zwölf Standardauswertungen, für jeden Aufruf eine, und sechs Gradientenauswertungen.

Initialisierung	Auswertung: Q für $\widetilde{M}_n^m(O, i)$		
Q für $\widetilde{M}_n^m(O, i)$	1. Komponente	2. Komponente	3. Komponente
$\mathcal{M}_{2,1}u_1$	$(4\mu + \beta)\mathcal{M}_{2,1}v_1 + \mathcal{V}_{2,2,3}(v_1)$	$\mathcal{V}_{2,3,1}(v_2)$	$-(2\mu + \beta)\mathcal{M}_{3,2}v_3 + \mathcal{V}_{2,1,2}(v_3)$
$\mathcal{M}_{2,1}u_2$	$-\mathcal{V}_{1,2,3}(v_1)$	$(4\mu + \beta)\mathcal{M}_{2,1}v_2 - \mathcal{V}_{1,3,1}(v_2)$	$-(2\mu + \beta)\mathcal{M}_{1,3}v_3 - \mathcal{V}_{1,1,2}(v_3)$
$\mathcal{M}_{2,1}u_3$	$-\mu\mathcal{M}_{3,2}v_1$	$-\mu\mathcal{M}_{1,3}v_2$	$\mu\mathcal{M}_{2,1}v_3$
$\mathcal{M}_{1,3}u_1$	$(4\mu + \beta)\mathcal{M}_{1,3}v_1 - \mathcal{V}_{3,2,3}(v_1)$	$-(2\mu + \beta)\mathcal{M}_{3,2}v_2 - \mathcal{V}_{3,3,1}(v_2)$	$-\mathcal{V}_{3,1,2}(v_3)$
$\mathcal{M}_{1,3}u_2$	$-\mu\mathcal{M}_{3,2}v_1$	$\mu\mathcal{M}_{1,3}v_2$	$-\mu\mathcal{M}_{2,1}v_3$
$\mathcal{M}_{1,3}u_3$	$\mathcal{V}_{1,2,3}(v_1)$	$-(2\mu + \beta)\mathcal{M}_{2,1}v_2 + \mathcal{V}_{1,3,1}(v_2)$	$(4\mu + \beta)\mathcal{M}_{1,3}v_3 + \mathcal{V}_{1,1,2}(v_3)$
$\mathcal{M}_{3,2}u_1$	$\mu\mathcal{M}_{3,2}v_1$	$-\mu\mathcal{M}_{1,3}v_2$	$-\mu\mathcal{M}_{2,1}v_3$
$\mathcal{M}_{3,2}u_2$	$-(2\mu + \beta)\mathcal{M}_{1,3}v_1 + \mathcal{V}_{3,2,3}(v_1)$	$(4\mu + \beta)\mathcal{M}_{3,2}v_2 + \mathcal{V}_{3,3,1}(v_2)$	$\mathcal{V}_{3,1,2}(v_3)$
$\mathcal{M}_{3,2}u_3$	$-(2\mu + \beta)\mathcal{M}_{2,1}v_1 - \mathcal{V}_{2,2,3}(v_1)$	$-\mathcal{V}_{2,3,1}(v_2)$	$(4\mu + \beta)\mathcal{M}_{3,2}v_3 - \mathcal{V}_{2,1,2}(v_3)$
$w^{(1)}(\mathcal{M}u, x) \cdot \nabla$		$\frac{\alpha}{2}\mathcal{M}_{2,1}v_2$	$-\frac{\alpha}{2}\mathcal{M}_{1,3}v_3$
$w^{(2)}(\mathcal{M}u, x) \cdot \nabla$	$-\frac{\alpha}{2}\mathcal{M}_{2,1}v_1$		$\frac{\alpha}{2}\mathcal{M}_{3,2}v_3$
$w^{(3)}(\mathcal{M}u, x) \cdot \nabla$	$\frac{\alpha}{2}\mathcal{M}_{1,3}v_1$	$-\frac{\alpha}{2}\mathcal{M}_{3,2}v_2$	

Tabelle 4.6: Realisierung der Bilinearform des hypersingulären Operators

4.5 Fehleranalyse der approximierten Operatoren

Wie bei der Multipolmethode für die Laplace–Gleichung ist auch für die Approximation der Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik eine Fehleranalyse vorzunehmen. Entscheidend ist dabei das Einfachschichtpotential V_E . Für dessen Analyse ist das folgende Resultat hilfreich.

Lemma 4.8. Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $|x| \leq r$, $|y| \geq dr$ mit $d > 1$ und $r > 0$ gilt die folgende Fehlerabschätzung für eine spezielle Richtungsableitung $|x|w \cdot \nabla_x$ mit $|w| \neq 0$ der Differenz $k(x, y) - k_p(x, y)$ des Potentials $k(x, y)$ und seiner lokalen Entwicklung:

$$| |x|w \cdot \nabla_x(k(x, y) - k_p(x, y)) | \leq |w| \frac{1 + \pi}{(d-1)r} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1}, \quad (4.7)$$

$$| |y|w \cdot \nabla_y(k(x, y) - k_p(x, y)) | \leq |w| \frac{1 + \pi}{(d-1)r} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+2}. \quad (4.8)$$

Beweis. Der Beweis erfolgt weitgehend ähnlich dem zur Abschätzung der Normalenableitung der Approximation [95, 97], die für die Fehleranalyse des Doppelschichtpotentials K_L der Laplace–Gleichung verwendet wird. Dabei werden unter Verwendung der Schreibweise $\hat{x} = x/|x|$ die folgenden elementaren Relationen

$$\nabla_x |x|^n = n |x|^{n-1} \hat{x}, \quad \nabla_x (\hat{x} \cdot \hat{y}) = (\hat{y} - (\hat{x} \cdot \hat{y})\hat{x}) \frac{1}{|x|}$$

und

$$|\hat{y} - (\hat{x} \cdot \hat{y})\hat{x}|^2 = (\hat{y} \cdot \hat{y}) - 2(\hat{x} \cdot \hat{y})^2 + (\hat{x} \cdot \hat{y})^2(\hat{x} \cdot \hat{x}) = 1 - (\hat{x} \cdot \hat{y})^2. \quad (4.9)$$

verwendet. Durch einfaches Umformen erhält man zunächst

$$\begin{aligned} | |x|w \cdot \nabla_x(k(x, y) - k_p(x, y)) | &= \left| |x|w \cdot \nabla_x \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}) \right| \\ &= \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{|y|^{n+1}} \left\{ n |x|^{n-1} (|x|w \cdot \hat{x}) P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}) + |x|^n P'_n(\hat{x} \cdot \hat{y}) \frac{1}{|x|} [|x|w \cdot (\hat{y} - (\hat{x} \cdot \hat{y})\hat{x})] \right\} \right| \\ &\leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} \{ n |w \cdot \hat{x}| |P_n(\hat{x} \cdot \hat{y})| + |w| |P'_n(\hat{x} \cdot \hat{y})| |\hat{y} - (\hat{x} \cdot \hat{y})\hat{x}| \}. \end{aligned}$$

Mit der Relation (4.9) und der Definition der zugehörigen Legendre–Polynome

$$P_n^m(u) = (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u)$$

erkennt man im letzten Term die Legendre–Polynome n -ten Grades und erster Ordnung $P_n^1(\hat{x} \cdot \hat{y})$. Diese können mit

$$|P_n^1(u)| \leq \pi(n+1)$$

abgeschätzt werden [42]. Zusammen mit der Abschätzung

$$|P_n(u)| \leq 1$$

liefert dies dann

$$\begin{aligned} \left| |x| w \cdot \nabla_x (k(x, y) - k_p(x, y)) \right| &\leq |w| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} \{n + \pi(n+1)\} \\ &\leq |w| (1 + \pi) \frac{|x|^{p+1}}{|y|^{p+2}} \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) + (p+1)) \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^n. \end{aligned}$$

Mit der geometrischen Reihe und dem Cauchy-Produkt,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^n,$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \left| |x| w \cdot \nabla_x (k(x, y) - k_p(x, y)) \right| &\leq |w| (1 + \pi) \frac{|x|^{p+1}}{|y|^{p+2}} \left\{ \frac{p+1}{1 - \frac{|x|}{|y|}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right)^2} \right\} \\ &= |w| (1 + \pi) \frac{1}{|y| - |x|} \left(p+1 + \frac{|y|}{|y| - |x|} \right) \frac{|x|^{p+1}}{|y|^{p+1}}. \end{aligned}$$

Aufgrund des Nahfeldkriteriums (3.9) der Multipolmethode können die Abschätzungen $|x| \leq r$ und $|y| \geq dr$ für das weitere Abschätzen verwendet werden. Somit gilt

$$\left| |x| w \cdot \nabla_x (k(x, y) - k_p(x, y)) \right| \leq |w| (1 + \pi) \frac{1}{(d-1)r} \left(p+1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1}.$$

Die zweite Aussage läßt sich ganz analog zeigen. \square

Diese Fehlerabschätzung entspricht bis auf einen Faktor $|w| r$ der Abschätzung für die Normalenableitung für die Bestimmung der Fehlerabschätzung des Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung [95, 97].

Lemma 4.9. *Für eine quasi-uniforme Randdiskretisierung und einen Multipolentwicklungsgrad $p \sim \log N$ gilt die folgende Fehlerabschätzung für die Approximation \tilde{V}_E des Einfachschichtpotentials der linearen Elastostatik:*

$$\|(V_E - \tilde{V}_E)t_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_{\tilde{V}} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } t_h \in S_h^0(\Gamma) \subset L_2(\Gamma). \quad (4.10)$$

Dabei haben die Lamé-Parameter keinen Einfluß auf die Approximationsgüte.

Beweis. Die Fehlerabschätzung beruht auf der Darstellung (4.4). Zur Vereinfachung der Darstellung wird nun der erste Term mit $T_{1,k}$ bezeichnet, der zweite mit $T_{2,k}$ und der dritte mit $T_{3,k}$. Die Approximationen dieser Terme sind entsprechend $\tilde{T}_{1,k}(x)$, $\tilde{T}_{2,k}(x)$ und $\tilde{T}_{3,k}(x)$. Zu untersuchen ist der $L_2(\Gamma)$ -Fehler der Approximation \tilde{V}_E des Einfachschichtpotentials durch die Multipolmethode. Zunächst kann die Fehleranalyse auf die einzelnen Terme zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \left| (V_E t)_k(x) - (\tilde{V}_E t)_k(x) \right|^2 ds_x &\leq \frac{3(1+\nu)^2}{4E^2(1-\nu)^2} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \left((3-4\nu)^2 |T_{1,k}(x) - \tilde{T}_{1,k}(x)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |T_{2,k}(x) - \tilde{T}_{2,k}(x)|^2 + \frac{1}{2} |T_{3,k}(x) - \tilde{T}_{3,k}(x)|^2 \right) ds_x. \end{aligned}$$

Für den ersten Term kann die Fehlerabschätzung für das Einfachschichtpotential V_L der Laplace-Gleichung nach (3.16) komponentenweise verwendet werden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (3-4\nu)^2 \|T_{1,k} - \tilde{T}_{1,k}\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= (3-4\nu)^2 \sum_{k=1}^3 \|(V_L - \tilde{V}_L)t_k\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq (3-4\nu)^2 \sum_{k=1}^3 c_{\tilde{V}_L} h^4 \|t_k\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Dabei müssen die Parameter d und p so gewählt werden, daß gilt

$$\frac{1}{(d-1)} \left(\frac{1}{d}\right)^{p+1} \leq ch^3$$

mit c unabhängig von h [95, 97]. Für ein fest gewähltes d , beispielsweise $d = 2$, ist der Entwicklungsgrad p proportional zu $\log_d h^{-3}$, also p proportional zu $\log_d N^{3/2} = \frac{3}{2} \log_d N$ zu wählen.

Die Terme $T_{2,k}$ und $T_{3,k}$ können mit den Ungleichungen aus Lemma 4.8 abgeschätzt werden. Um diese anwenden zu können, wird der Term $T_{2,k}$ für festes k geeignet umgeschrieben:

$$\begin{aligned} T_{2,k}(x) - \tilde{T}_{2,k}(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} \left(x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \right) (k(x, y) - k_p(x, y)) t_{\ell}(y) ds_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} |x| w \cdot \nabla_x (k(x, y) - k_p(x, y)) t_{\ell}(y) ds_y, \end{aligned}$$

wobei der Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ die Koeffizienten

$$w_i = \delta_{ik} \hat{x}_{\ell} + \delta_{i\ell} \hat{x}_k$$

besitzt, und $|w| \leq 2$ gilt. Für den Term $T_{3,k}$ gilt analog

$$\begin{aligned} T_{3,k}(x) - \tilde{T}_{3,k}(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} \left(y_{\ell} \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_{\ell}} \right) (k(x, y) - k_p(x, y)) t_{\ell}(y) ds_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} |y| w \cdot \nabla_y (k(x, y) - k_p(x, y)) t_{\ell}(y) ds_y, \end{aligned}$$

wobei der Vektor w hier die Koeffizienten

$$w_i = \delta_{ik} \hat{y}_{\ell} + \delta_{i\ell} \hat{y}_k$$

besitzt, und erneut $|w| \leq 2$ gilt. Da die Abschätzungen aus Lemma 4.8 unabhängig von der speziellen Gestalt des Vektor w sind, ist die Abschätzung der Terme $T_{2,k}$ und $T_{3,k}$ auch unabhängig von k , und die Summe über k kann durch einen Faktor 3 und einen stellvertretenden Term ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \|T_{2,k}(x) - \tilde{T}_{2,k}(x)\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\leq \frac{3}{2} \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Gamma} \left| \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} w \cdot \nabla_x (k(x, y) - k_p(x, y)) t_{\ell}(y) ds_y \right|^2 ds_x \\ &\leq \frac{9}{32\pi^2} \int_{\Gamma} \sum_{\ell=1}^3 \left(\int_{\Gamma} |w \cdot \nabla_x (k(x, y) - k_p(x, y))| |t_{\ell}(y)| ds_y \right)^2 ds_x. \end{aligned}$$

Nun kann also die Abschätzung (4.7) angewendet werden. Dies liefert zusammen mit der Abschätzung für $|w| \leq 2$ und der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \|T_{2,k}(x) - \tilde{T}_{2,k}(x)\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\leq \frac{9}{32\pi^2} \left(|w| \frac{1+\pi}{(d-1)r} \left(p+1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1} \right)^2 \\ &\quad \int_{\Gamma} \sum_{\ell=1}^3 \left(\int_{\Gamma} |t_{\ell}(y)| ds_y \right)^2 ds_x. \\ &\leq \frac{9(1+\pi)^2}{8\pi^2} |\Gamma|^2 ch^4 \sum_{\ell=1}^3 \int_{\Gamma} |t_{\ell}(y)|^2 ds_y, \end{aligned}$$

wenn die Multipolparameter d und p so gewählt werden, daß

$$\left(\frac{1}{(d-1)} \left(p+1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1} \right)^2 \leq \tilde{c} h^6$$

gilt, um auch $r \geq ch$ zu kompensieren. Auch hier genügt es bei festem d , daß für den Entwicklungsgrad $p \sim \log N$ gilt. Analog läßt sich die entsprechende Abschätzung für

die Approximation der $T_{3,k}$ herleiten. Durch das Zusammenfügen der einzelnen Abschätzungen erhält man

$$\|(V_E - \tilde{V}_E)t\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq \frac{3(1+\nu)^2}{4E^2(1-\nu)^2} \left((3-4\nu)^2 c_{\tilde{V}_L}^2 h^4 + 2 \cdot \frac{9(1+\pi)^2}{8\pi^2} |\Gamma|^2 c h^4 \right) \sum_{k=1}^3 \|t_k\|_{L_2(\Gamma)}^2$$

und somit die Behauptung. \square

Für die Analyse der Approximationen der weiteren Randintegraloperatoren ist die Abschätzung

$$\|\mathcal{M}u\|_{L_2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H^1(\Gamma)} \quad (4.11)$$

entscheidend, siehe beispielsweise [21].

Lemma 4.10. *Für eine quasi-uniforme Randdiskretisierung und einen Multipolentwicklungsgrad $p \sim \log N$ gilt für die Approximation \tilde{K}_E des Doppelschichtpotentials der linearen Elastostatik die Fehlerabschätzung*

$$\|(K_E - \tilde{K}_E)u_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_{\tilde{K}_E} h^2 \|u_h\|_{H^1(\Gamma)} \quad \text{für alle } u_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma). \quad (4.12)$$

Beweis. Aufgrund der Darstellung (1.40) des Doppelschichtpotentials K_E können hier die Fehlerabschätzungen (3.16) und (3.17) der Randintegraloperatoren der Laplace-Gleichung und die Fehlerabschätzung (4.10) für das Einfachschichtpotential V_E der linearen Elastostatik verwendet werden, um zusammen mit (4.11)

$$\begin{aligned} \|(K_E - \tilde{K}_E)u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\leq \|(K_L - \tilde{K}_L)u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|(V_L - \tilde{V}_L)\mathcal{M}u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + 4\mu^2 \|(V_E - \tilde{V}_E)\mathcal{M}u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq c_{\tilde{K}_L}^2 h^4 \|u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 + c_{\tilde{V}_L}^2 h^4 \|\mathcal{M}u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 + 4\mu^2 c_{\tilde{V}_E}^2 h^4 \|\mathcal{M}u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq ch^4 \|u_h\|_{H^1(\Gamma)} \end{aligned}$$

zu zeigen. \square

Für das adjungierte Doppelschichtpotential K'_E und den hypersingulären Operator D_E werden nun lediglich die Bilinearformen abgeschätzt. Dies entspricht jedoch der Implementierung und genügt auch für die Fehleranalyse für die gemischte Formulierung.

Lemma 4.11. *Für eine quasi-uniforme Randdiskretisierung und einen Multipolentwicklungsgrad $p \sim \log N$ gilt für die Approximation der Bilinearform des adjungierten Doppelschichtpotentials \tilde{K}'_E die Fehlerabschätzung*

$$|\langle (K'_E - \tilde{K}'_E)t_h, v_h \rangle_\Gamma| \leq c_{\tilde{K}'_E} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)} \|v_h\|_{H^1(\Gamma)} \quad (4.13)$$

für alle $t_h \in S_h^0(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ und $v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$.

Beweis. Auf die Darstellung (4.6) der Bilinearform können die bekannten Fehlerabschätzung angewendet werden:

$$\begin{aligned}
|\langle K'_E t_h, v_h \rangle_\Gamma| &= |\langle K'_L t_h, v_h \rangle_\Gamma - \langle V_L t_h, \mathcal{M}v_h \rangle_\Gamma + 2\mu \langle V_E t_h, \mathcal{M}v_h \rangle_\Gamma| \\
&\leq c_{\tilde{K}'_L} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)} \|v_h\|_{L_2(\Gamma)} + c_{\tilde{V}'_L} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)} \|\mathcal{M}v_h\|_{L_2(\Gamma)} \\
&\quad + 2\mu c_{\tilde{V}'_E} h^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)} \|\mathcal{M}v_h\|_{L_2(\Gamma)} \\
&\leq ch^2 \|t_h\|_{L_2(\Gamma)} \|v_h\|_{H^1(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.12. Für eine quasi-uniforme Randdiskretisierung und einen Multipolentwicklungsgrad $p \sim \log N$ gilt für die Approximation der Bilinearform des hypersingulären Operator \tilde{D}_E der linearen Elastostatik die Fehlerabschätzung

$$|\langle (D_E - \tilde{D}_E)u_h, v_h \rangle_{L_2(\Gamma)}| \leq c_{\tilde{D}_E} h^2 \|u_h\|_{H^1(\Gamma)} \|v_h\|_{H^1(\Gamma)} \quad (4.14)$$

für alle $u_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$ und $v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$.

Beweis. Aufgrund der Darstellung (1.43) mittels Bilinearformen der Einfachschichtpotentiale der Laplace-Gleichung und der linearen Elastizität können die entsprechenden Fehlerabschätzungen angewendet werden. Wie im Beweis für die Fehlerabschätzung des adjungierten Doppelschichtpotentials folgt damit die Behauptung. □

Zusammenfassend erhält man damit wieder das gleiche Ergebnis zur Lösbarkeit und Fehlerabschätzung der symmetrischen Formulierung wie für die Laplace-Gleichung.

Satz 4.13. Seien $\tilde{t} \in H_{pw}^\sigma(\Gamma)$ und $\tilde{u} \in H^\eta(\Gamma)$ für $\sigma \in [0, 1]$ und $\eta \in [1, 2]$ die eindeutigen Lösungen des Variationsproblems (1.48). Weiter sei die Randdiskretisierung formregulär und global gleichmäßig. Dann ist das Variationsproblem der Approximation durch die Multipolmethode eindeutig lösbar, und für die Näherungslösungen \tilde{u}_h und \tilde{t}_h gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq c \left(h^{2\sigma+1} \|\tilde{t}\|_{H_{pw}^\sigma(\Gamma)}^2 + h^{2\eta-1} \|\tilde{u}\|_{H^\eta(\Gamma)}^2 \right). \quad (4.15)$$

Beweis. Die Fehlerabschätzungen für die Approximationen der Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik reichen aus, um den gleichen Beweis wie für die Laplace-Gleichung [95, 97] durchzuführen. □

Bemerkung 4.2. Die Einschränkung, daß die Funktionen t_h, u_h usw. aus den Ansatzräumen $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$ stammen, ist wie für die Laplace-Gleichung nicht zwingend. Als Voraussetzung genügt, daß für die verwendeten Funktionen die Integrationen für die Multipolkoeffizienten \widehat{M}_n^m exakt durchgeführt werden können. Falls dies nicht möglich ist, muß zusätzlich eine Analyse für den Integrationsfehler erfolgen.

4.6 Numerische Beispiele

Zunächst wird die Multipolversion der linearen Elastostatik mit der Standardversion vollbesetzter Matrizen verglichen. Dabei kann auch das asymptotische Verhalten analysiert werden. Als Testgeometrie dient der Quader aus Abbildung 2.1. Als Randdaten werden wieder die Spuren einer Fundamentallösung mit der Singularität außerhalb des Gebietes verwendet. Damit kann der Fehler, der durch die Verfahren gemacht wird, bestimmt werden. Die linke Vorderseite des Quaders ist der Dirichlet-Rand. Auf dem Rest des Randes sind Neumann-Randbedingungen aufgebracht. Das lineare Gleichungssystem (1.57) wurde als Schur-Komplement-System gelöst, wobei das Einfachschichtpotential in jedem Iterationsschritt mit dem CG-Verfahren invertiert wurde. In der Tabelle 4.7 sind die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen angegeben.

L	N	M	DoF	Erstellen	Lösen	It.	D-Fehler	N-Fehler
0	40	22	63	0	0	19	1.25e-3	7.23e-2
				0	0	19	1.25e-3	7.23e-2
1	160	82	255	2	0	24	2.86e-4	4.71e-2
				3	2	24	2.86e-4	4.71e-2
2	640	322	1035	37	5	27	5.15e-5	2.26e-2
				17	18	27	5.14e-5	2.26e-2
3	2560	1282	4179	609	82	30	1.06e-5	1.05e-2
				111	150	30	1.05e-5	1.05e-2
4	10240	5122	16803	(162 min)	(>23 min)	32	2.47e-6	5.06e-3
				7.6 min	13.5 min			
5	40960	20482	67395	(43.3 h)	(>6.6 h)	34	5.96e-7	2.50e-3
				0.5 h	1.3 h			

Tabelle 4.7: Ergebnisse für den Balken mit linearer Elastizität

Die erste Zeile für jeden Verfeinerungslevel L enthält die Daten für das Standardrandelementverfahren, während die Daten der zweiten Zeile zur Multipolmethode gehören. Neben der Anzahl N der Dreiecke und der Anzahl M der Knoten ist diesmal auch die Anzahl DoF der Freiheitsgrade angegeben. Wieder werden die Rechenzeiten t_1 und t_2 für das Erstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems verglichen. It gibt die benötigte Anzahl an Iterationsschritten für die relative Genauigkeit von 10^{-8} an. Außerdem werden noch die Fehler der Dirichlet- und Neumann-Daten verglichen. Die Testrechnungen wurden auf einem Rechner mit einem Intel Pentium 4 mit 3.06 GHz und 1 GB Hauptspeicher durchgeführt. Zur Vorkonditionierung wurden der BPX-Vorkonditionierer (3.24) für das Einfachschichtpotential und der Operator entgegengesetzter Ordnung nach (2.19) für den hypersingulären Operator verwendet.

Die Iterationszahlen der Standard- und der Multipolmethode stimmen überein. Dies deutet bereits die gute Approximation der Systemmatrix durch die Multipolmethode an. Ab dem vierten Verfeinerungslevel reicht der Speicher für die Standardversion nicht mehr aus. Daher wurden einige Werte extrapoliert. Diese Werte lassen sich an den Klammern erkennen. Die Iterationszahlen steigen logarithmisch an, wie es aus der Theorie [88] auch zu erwarten ist. Bei den Rechenzeiten gibt es einen kleinen Overhead der Multipolmethode auf den niedrigen Leveln. Für den fünften Verfeinerungslevel beschleunigt die Multipolmethode die Erstellung des linearen Gleichungssystems um mehr als den Faktor 86. Die Rechenzeit für das Lösen wird nicht so stark beschleunigt. Dies ist typisch für die Multipolmethode. Der große Unterschied zwischen den beiden Werten hier ist aber auch durch die Wahl der Multipoleinstellungen für eine möglichst optimale Gesamtrechenzeit und durch einige Implementierungsdetails bedingt. Die insgesamt erzielte Beschleunigung ist sehr gut. Die in der $L_2(\Gamma)$ -Norm gemessenen Fehler der Dirichlet- und Neumann-Daten stimmen zwischen den beiden Methoden sehr gut überein. Dabei werden die erwarteten Konvergenzraten erreicht.

In der Tabelle 4.8 werden eine Diagonalskalierung, der BPX-Vorkonditionierer (3.24) und das algebraische Mehrgitterverfahren nach Abschnitt 3.3 für das Einfachschichtpotential anhand eines Dirichlet-Randwertproblems für den Quader aus Abbildung 2.1 verglichen. Dabei wurde jeweils die Vorkonditionierung für die Laplace-Gleichung komponentenweise angewandt. Es ist natürlich auch möglich, die Mehrgittervorkonditionierung für die lineare Elastizität aufzustellen, allerdings ist die Programmierung etwas schwieriger und die Anwendung deutlich teurer als die blockweise Anwendung der Laplace-Vorkonditionierung. Da diese zu sehr guten Iterationszahlen führt, lohnt sich die Verwendung der Mehrgittervorkonditionierung mit den Grobgittermatrizen der linearen Elastostatik nicht.

L	N	DoF	Skalierung			BPX			AMG		
			t_1	t_2	It	t_1	t_2	It	t_1	t_2	It
0	40	120	0	0	26	0	0	26	0	0	13
1	160	480	1	2	36	2	1	33	2	1	15
2	640	1920	5	13	51	5	10	40	5	4	16
3	2560	7680	18	93	70	19	58	44	21	25	16
4	10240	30720	75	680	92	76	370	50	88	160	17
5	40960	122880	365	6945	124	368	3080	55	457	1392	19
6	163840	491520	1749	55984	165	1750	20386	60	2325	9481	21

Tabelle 4.8: Vergleich der Vorkonditionierung für die lineare Elastizität

Insgesamt wurden sechs gleichmäßige Verfeinerungen durchgeführt, so daß auf dem feinsten Netz 163840 Dreiecke verwendet wurden. Dies entspricht 491520 Freiheitsgra-

den für das lineare Gleichungssystem. Die Rechnungen wurden auf einem Computer mit einem AMD Opteron Prozessor 146 mit 2,0 GHz und 4 GB Hauptspeicher ausgeführt. Die Iterationszahlen für die Diagonalskalierung steigen erwartungsgemäß stark an. Für den BPX-Vorkonditionierer steigen die Iterationszahlen nur logarithmisch an, wie von der Theorie in (3.23) vorhergesagt. Da die Kosten für den BPX-Vorkonditionierer extrem gering sind, führt die geringere Anzahl an Iterationen zu einem deutlich schnelleren Lösen des linearen Gleichungssystems. Der algebraische Mehrgittervorkonditionierer reduziert die Iterationszahlen nochmals deutlich. Solange auf den niedrigeren Verfeinerungsleveln noch ein Zweigitterverfahren verwendet wird, bleibt die Anzahl an Iterationsschritten konstant. Für die letzten Verfeinerungslevel ist dann ein leichter Anstieg der Iterationszahlen zu beobachten, wie auch in anderen Arbeiten [76, 77] beobachtet wurde. Der Mehrgittervorkonditionierer ist mit recht hohen Kosten verbunden. Aufgrund der niedrigen Iterationszahlen beschleunigt er das Lösen des linearen Gleichungssystems nochmals deutlich. Somit ist auch der Mehraufwand bei der Erstellung des linearen Gleichungssystems vertretbar. Insgesamt zeigt sich, daß hier der Mehrgittervorkonditionierer die beste Wahl ist.

Das erste Beispiel von industriellem Interesse ist ein Ausschnitt aus einem Umformwerkzeug (W. Volk, M. Wagner und S. Wittig, BMW Forschungszentrum München). Die beiden Bilder aus Abbildungen 4.1 zeigen die deformierte Geometrie bei aufgebrachtene Verschiebungen und Spannungen aus verschiedenen Richtungen. Die Farben geben dabei die Verschiebung in x -Richtung wieder.

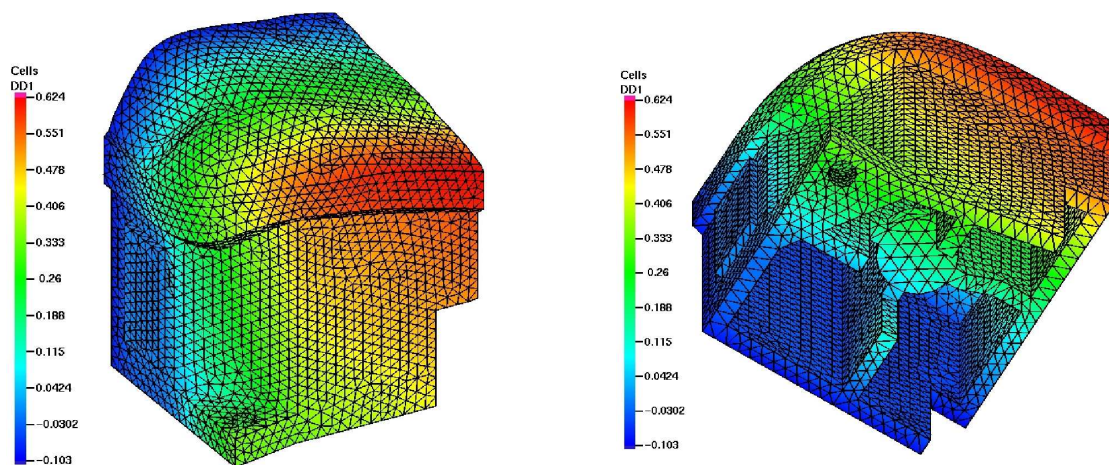


Abbildung 4.1: Ausschnitt eines Umformwerkzeugs

Die Anzahl der Randelemente, die Anzahl an Freiheitsgraden, die Rechenzeiten für das Erstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems und die Iterationszahl des CG-Verfahrens mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-8} sind in Tabelle 4.9 angegeben. Das Umformwerkzeug wird nur an wenigen Punkten festgehalten. Daher wurde aufgrund des sehr kleinen Dirichlet-Randes der Block des Einfachschichtpotentials vollbesetzt erstellt und mit einem direkten Verfahren invertiert. Das Gesamtsystem wurde dann als Schur-Komplement-System auf dem Opteron-Rechner gelöst.

N	DOF(N)	DOF(D)	Erstellen	Lösen	It.
13144	182	19586	896	3398	343
52572	728	78426	3940	23623	372

Tabelle 4.9: Rechenzeiten für das Umformwerkzeug

Die Iterationszahlen erscheinen auf den ersten Blick sehr hoch. Sie sind aber durch die dünnen Wandstrukturen bedingt. Der geringe Anstieg der Iterationszahlen zeigt, daß die Vorkonditionierung mit dem Operator entgegengesetzter Ordnung erwartungsgemäß funktioniert.

Das zweite Beispiel ist der Metallschaum (H. Andrä, Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik in Kaiserslautern) aus Abbildung 4.2. Das linke Bild zeigt den entlasteten Schaum, während das rechte Bild den deformierten Schaum zeigt. Die Unterseite des Schaums wurde fixiert, und die Oberseite wurde um eine vorgegebene Verschiebung nach unten gedrückt. Die Farben entsprechen den Verschiebungen in z -Richtungen.

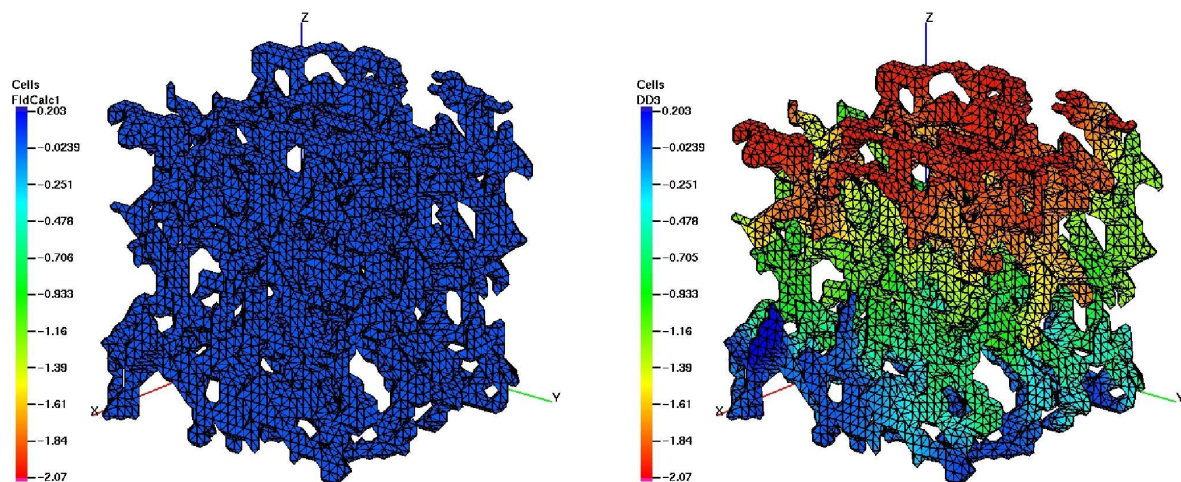


Abbildung 4.2: entlasteter und deformierter Metallschaum

In der Tabelle 4.10 sind die Anzahl der Randelemente, die Anzahl der Knoten, die Anzahl der Freiheitsgrade, die Iterationszahl und die Rechenzeiten angegeben.

N	M	DOF(N)	DOF(D)	Erstellen	Lösen	It
28952	14152	396	41511	1730	9832	264

Tabelle 4.10: Rechendaten für den Schaum

Mehrere Berechnungsversuche mit kommerziellen Finite-Element-Programmen sind für diese komplexe Struktur fehlgeschlagen [4]. Mit der schnellen Randelementmethode war dies jedoch möglich. Auch für diese extrem komplexe Struktur funktioniert die Vorkonditionierung. Dies ist eines der bezüglich der Rechenzeit aufwendigsten Netze für schnelle Randelementmethoden, da das Randnetz fast das gesamte Volumen ausfüllt und somit im Clusterbaum sehr große Nahbereiche entstehen.

Abschließend kann zusammengefaßt werden, daß die Realisierung der Randelementmethode für die lineare Elastostatik mit der Multipolmethode erwartungsgemäß sehr gut funktioniert und auch für komplexe Strukturen aus industriellen Anwendungen einsetzbar ist.

5 BETI–Gebietszerlegungsmethoden

In diesem Kapitel wird zunächst eine Dirichlet–Gebietszerlegungsmethode mit einer starken Kopplung der Dirichlet–Daten und einer schwachen Kopplung der Neumann–Daten betrachtet. Von dieser Formulierung wird dann die Boundary Element Tearing und Interconnecting (BETI) Methode nach [78] hergeleitet. Die BETI–Methode wird dann noch um eine neue Formulierung, die “Allfloating”–Formulierung, erweitert. Diese besitzt Vorteile bei der Vorkonditionierung und in der einheitlichen Behandlung der Teilgebiete. Das Lösen der bei dieser Formulierung entstehenden linearen Gleichungssysteme wird ebenso besprochen wie die Grundzüge der Parallelisierungsstrategie und einige Details der verwendeten Operatoren. Abschließend wird noch das Lösen von einfachen und doppelten Sattelpunktproblemen diskutiert.

5.1 Dirichlet–Gebietszerlegungsmethoden

In diesem Kapitel wird nun statt eines Randwertproblems der Laplace–Gleichung (1.1) das gemischte Randwertproblem des Differentialoperators

$$(Lu)(x) = -\operatorname{div}[\alpha(x)\nabla u(x)]$$

mit stückweise konstantem Koeffizienten $0 < \alpha(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \Omega$ betrachtet. Dementsprechend ist die Konormalenableitung mit

$$\gamma_1 u(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} [\alpha(x)n(x) \cdot \nabla u(\tilde{x})]$$

zu modifizieren. Für konstantes α ist die Fundamentallösung gegeben durch

$$U^*(x, y) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}.$$

Dies hat dann auch modifizierte Definitionen der Randintegraloperatoren zur Folge. Das Einfachschichtpotential V ist dabei gegeben durch

$$(Vt)(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x - y|} t(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (5.1)$$

und unterscheidet sich von der Definition (1.23) durch die Skalierung mit $1/\alpha$. Der hypersinguläre Operator D wird definiert durch

$$(Du)(x) = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{4\pi} \gamma_{1,x} \int_{\Gamma} \gamma_{1,y} \frac{1}{|x - y|} u(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (5.2)$$

Dies entspricht bei Berücksichtigung der Skalierung der Spuroperatoren einer Skalierung mit α gegenüber der Definition (1.26). Für das Doppelschichtpotential K und das adjungierte Doppelschichtpotential K' bleiben die Definitionen (1.24) und (1.25) gültig. Diese Skalierungen übertragen sich dann entsprechend auf den Steklov–Poincaré-Operator S .

Betrachtet wird also das gemischte Randwertproblem der Potential-Gleichung mit stückweise konstanten Materialparametern:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha(x)\nabla u(x)] &= 0 && \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_0 u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Im folgenden wird stets eine nichtüberlappende Gebietszerlegung des Gebietes Ω in p sich gegenseitig nicht überlappende Teilgebiete Ω_i betrachtet, d.h.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^p \bar{\Omega}_i \quad \text{mit } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j.$$

Mit $\Gamma_i := \partial\Omega_i$ wird der Rand der einzelnen Teilgebiete bezeichnet. Für benachbarte Gebiete sind die lokalen Koppelränder durch $\Gamma_{ij} := \Gamma_i \cap \Gamma_j$ für alle $i < j$ gegeben. Das Skelett der Gebietszerlegung ist

$$\Gamma_S := \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i = \Gamma \cup \bigcup_{i < j} \bar{\Gamma}_{ij}.$$

Für eine solche nichtüberlappende Gebietszerlegung, wobei die Materialparameter α_i auf jedem Teilgebiet konstant sein sollen, erhält man die lokalen Randwertprobleme

$$\begin{aligned} -\alpha_i \Delta u_i(x) &= 0 && \text{für } x \in \Omega_i, \\ \gamma_0^i u_i(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \cap \Gamma_D, \\ \gamma_1^i u_i(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \cap \Gamma_N \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit den Transmissionsbedingungen

$$\gamma_0^i u_i(x) = \gamma_0^j u_j(x) \quad \text{und} \quad \gamma_1^i u_i(x) + \gamma_1^j u_j(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma_{ij}. \quad (5.5)$$

Dabei beschreiben γ_0^i und γ_1^i die Spuroperatoren des Teilgebietes Ω_i .

Entsprechend wird in der linearen Elastostatik das gemischte Randwertproblem mit stückweise konstanten Materialparametern $E_i > 0$ und $\nu_i \in (0, 1/2)$ betrachtet. Hier lauten die lokalen Randwertprobleme

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\sigma_i(u_i))(x) &= 0 && \text{für } x \in \Omega_i, \\ \gamma_0^i u_i(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \cap \Gamma_D, \\ \gamma_1^i u_i(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \cap \Gamma_N \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit den Transmissionsbedingungen (5.5). Dabei sind keine Modifikationen der Definitionen (1.23), (1.24), (1.25) und (1.26) für die lineare Elastostatik notwendig, sondern es werden lediglich die lokalen Materialparameter E_i und ν_i verwendet. Ausgehend von den lokalen Randwertproblemen (5.4) und (5.6) unter den Übergangsbedingungen (5.5) können nun die Potentialgleichung und die lineare Elastostatik unter Verwendung der jeweiligen Operatoren wieder zusammen betrachtet werden.

Im folgenden werden Operatoren, die zu einem Teilgebiet Ω_i beziehungsweise zum zugehörigen Rand $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ gehören, mit dem Index i versehen, also beispielsweise das Einfachschichtpotential V_i . Mit den lokalen Dirichlet–Neumann–Abbildungen über die Steklov–Poincaré–Operatoren S_i ,

$$\gamma_1^i u_i(x) = \left[D_i + \left(\frac{1}{2}I + K_i' \right) V_i^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K_i \right) \right] \gamma_0^i u_i(x) =: (S_i \gamma_0^i u_i)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_i,$$

lassen sich lokale Transmissionsprobleme für $i = 1, \dots, p$ formulieren:

Finde $u_i \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, so daß

$$\begin{aligned} u_i(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \cap \Gamma_D, \\ \gamma_1^i u_i(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \cap \Gamma_N, \\ u_i(x) &= u_j(x) && \text{für } x \in \Gamma_{ij}, \\ \gamma_1^i u_i(x) + \gamma_1^j u_j(x) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma_{ij} \\ \gamma_1^i u_i(x) &= (S_i u_i)(x) && \text{für } x \in \Gamma_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

gilt. Somit können jetzt statt der globalen Randwertprobleme wie (5.3) die gekoppelten lokalen Randwertprobleme (5.7) betrachtet werden. Ausgehend von dieser Formulierung können verschiedene Gebietszerlegungsmethoden wie beispielsweise die Neumann– und die Dirichlet–Gebietszerlegungsmethode abgeleitet werden [57, 126]. Hier wird nun die Dirichlet–Gebietszerlegungsmethode eingesetzt. Zunächst wird $\gamma_1^i u_i$ durch den lokalen Steklov–Poincaré–Operator $S_i u_i$ ersetzt. Um den stetigen Übergang der gesuchten lokalen Funktionen u_i an den Koppelrändern zu gewährleisten, wird eine globale Funktion $u \in H^{1/2}(\Gamma_S)$ eingeführt. Dabei sei $H^{1/2}(\Gamma_S)$ der Spurraum von $H^1(\Omega)$ auf das Skelett Γ_S . Die lokalen Funktionen u_i werden als lokale Einschränkungen $u_i = u|_{\Gamma_i}$ dieser Funktion u aufgefaßt. Somit sind die Dirichlet–Übergangsbedingungen automatisch erfüllt. Durch die Dirichlet–Neumann–Abbildung wird die lokale Lösung des lokalen Randwertproblems bestimmt. Es bleiben noch die Randbedingungen auf dem Rand Γ und die Neumann–Übergangsbedingungen an den Koppelrändern Γ_{ij} zu erfüllen. Die Dirichlet–Randbedingung auf Γ_D wird vorerst als Nebenbedingung an die gesuchte Funktion u gestellt. Die noch verbleibenden Neumann–Randbedingungen werden nun schwach, d.h. im variationellen Sinn, formuliert:

$$\int_{\Gamma_{ij}} [(S_i u|_{\Gamma_i})(x) + (S_j u|_{\Gamma_j})(x)] v_{ij}(x) ds_x = 0 \quad \text{für alle } v_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_{ij}), i < j$$

und

$$\int_{\Gamma_i \cap \Gamma_N} [(S_i u|_{\Gamma_i})(x) - g_N(x)] v_N(x) ds_x = 0 \quad \text{für alle } v_N \in H^{1/2}(\Gamma_N), i = 1, \dots, p.$$

Die Summe über alle Koppelränder Γ_{ij} und den Neumann–Rand Γ_N liefert die Variationsformulierung:

Gesucht ist $u \in H^{1/2}(\Gamma_S)$ mit $u = g_D$ auf Γ_D und

$$\sum_{i=1}^p \int_{\Gamma_i} (S_i u|_{\Gamma_i})(x) v|_{\Gamma_i}(x) ds_x = \int_{\Gamma_N} g_N(x) v|_{\Gamma_N}(x) ds_x \quad \text{für alle } v \in H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D).$$

Dabei ist der Testraum $H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D)$ definiert als

$$H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma_S) : v(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Gamma_D\}.$$

Diese Art der Gebietszerlegung wird als Dirichlet–Gebietszerlegung bezeichnet. Beschreibt man die gesuchte Funktion $u \in H^{1/2}(\Gamma_S)$ mittels der Zerlegung $u = \hat{u} + \hat{g}_D$, wobei \hat{g}_D eine geeignete Fortsetzung der Randdaten g_D auf Γ_S ist, so erhält man das zu lösende Variationsproblem:

Gesucht ist $\hat{u} \in H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D)$, so daß

$$\sum_{i=1}^p \int_{\Gamma_i} (S_i \hat{u}|_{\Gamma_i})(x) v|_{\Gamma_i}(x) ds_x = - \sum_{i=1}^p \int_{\Gamma_i} (S_i \hat{g}_D|_{\Gamma_i})(x) v|_{\Gamma_i}(x) ds_x + \int_{\Gamma_N} g_N(x) v|_{\Gamma_N}(x) ds_x \quad (5.8)$$

für alle $v \in H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D)$ gilt.

Nach [58, 126] ist die durch die linke Seite definierte Bilinearform

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^p \int_{\Gamma_i} (S_i u|_{\Gamma_i})(x) v|_{\Gamma_i}(x) ds_x \quad (5.9)$$

beschränkt und $H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D)$ –elliptisch. Mit dem Lemma von Lax–Milgram (Satz 1.8) folgt dann die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems (5.8). Eine Diskretisierung nach Abschnitt 1.5 mit stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen für das Potential bzw. die Verschiebungen und stückweise konstanten Basisfunktionen für den Fluß bzw. die Spannungen liefert das lineare Gleichungssystem

$$S_h \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top S_{i,h} A_i \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_i + \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_{N,i}, \quad (5.10)$$

mit den Zugehörigkeitsmatrizen $A_i \in \mathbb{R}^{(M_{C,i} + M_{N,i}) \times M_S}$. Diese bilden von den globalen Knoten auf die lokalen ab, bzw. den globalen Vektor \underline{u} auf den lokalen Vektor $\underline{u}_i = A_i \underline{u}$. Da die Test– und Ansatzfunktionen auf dem Dirichlet–Rand Γ_D verschwinden, bezeichnen $M_{C,i} + M_{N,i}$ die Anzahl aller Nicht–Dirichlet–Knoten auf Γ_i und M_S deren Anzahl auf ganz Γ_S . Dabei wird für alle Nicht–Dirichlet–Knoten in Koppelknoten, gekennzeichnet mit C , und Neumann–Knoten unterschieden. Die Vektoren $\underline{f}_{N,i}$ entsprechen dem Anteil der rechten Seite, der aus der Neumann–Randbedingung kommt,

$$f_{N,i,k} = \begin{cases} \int_{\Gamma_N} g_N(x) \varphi_k|_{\Gamma_N}(x) ds_x & \text{für } \text{supp } \varphi_k \cap \Gamma_N \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Vektoren \underline{f}_i sind durch

$$f_{i,k} = - \int_{\Gamma_i} (S_i \widehat{g}_D|_{\Gamma_i})(x) \varphi_k|_{\Gamma_i}(x) ds_x$$

gegeben. Dabei ist S_i hier als Abbildung von ganz Γ_i bzw. dem Träger von \widehat{g}_D in Γ_i nach $\Gamma_i \setminus \Gamma_D$ im Diskreten zu realisieren. Der zum Träger der globalen Formfunktion auf dem Rand Γ_N gehörende Eintrag wird dann mittels der Matrizen A_i^\top aus den einzelnen Teilgebieten aufsummiert.

Nach Ceas Lemma (Satz 1.9) ist aufgrund der oben beschriebenen Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ das lineare Gleichungssystem (5.10) eindeutig lösbar.

Das globale lineare Gleichungssystem (5.10) kann nun mit lokalen Realisierungen der diskreten Matrizen der Steklov–Poincaré–Operatoren gelöst werden. Diese Matrizen sind bei der symmetrischen Variante des Steklov–Poincaré–Operators gegeben durch

$$\widetilde{S}_{i,h} = D_{i,h} + \left(\frac{1}{2}M_{i,h}^\top + K_{i,h}^\top\right)V_{i,h}^{-1}\left(\frac{1}{2}M_{i,h} + K_{i,h}\right).$$

Dabei handelt es sich allerdings aufgrund der notwendigen Realisierung des inversen Einfachschichtpotentialoperators um eine Approximation \widetilde{S}_i des Steklov–Poincaré–Operators S_i nach (1.63). Entsprechend kann mittels der Fehlerabschätzung (1.65) für diese Approximation die Fehlerabschätzung für die hier beschriebene Näherungslösung \widetilde{u}_h ,

$$\begin{aligned} \|u - \widetilde{u}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma_S)}^2 &\leq c_1 \cdot \inf_{v_h \in S_h^0(\Gamma_S)} \|(u - \widehat{g}_D) - v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma_S)}^2 \\ &\quad + c_2 \cdot \sum_{i=1}^p \inf_{\tau_{h,i} \in S_h^0(\Gamma_i)} \|S_i u|_{\Gamma_i} - \tau_{h,i}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_i)}^2, \end{aligned}$$

gezeigt werden, siehe beispielsweise [126]. Unter den Voraussetzungen, daß $u \in H^2(\Gamma_S)$ und $S_i u|_{\Gamma_i} \in \widetilde{H}_{pw}^1(\Gamma_i)$ sind, liefert diese Fehlerabschätzung dann zusammen mit den Approximationseigenschaften (1.51) eine Konvergenzordnung von $3/2$.

Für die Vorkonditionierung des Systems (5.10) wird

$$C_{\widetilde{S}}^{-1} = \sum_{i=1}^p A_i^\top V_{L,i,h} A_i \quad (5.11)$$

eingesetzt. Bei dieser Vorkonditionierung wird der jeweilige lokale Steklov–Poincaré–Operator S_i durch das lokale Einfachschichtpotential $V_{L,i}$ des Laplace–Operators gemäß Satz 2.8 geeignet vorkonditioniert. Es fehlt allerdings eine geeignete Erweiterung [66], die den Grobgitteranteil der Matrix \widetilde{S}_h berücksichtigt. Diese könnte beispielsweise über eine additive Schwarzsche Aufspaltung realisiert werden [12].

Im folgenden werden bei den verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden stets die Approximationen der Randintegraloperatoren durch die Multipolmethode verwendet.

Der dabei entstehende Fehler bei der Approximation der einzelnen Matrizen kann wie der oben beschriebene Fehler durch die Approximation des inversen Einfachschichtpotentials V^{-1} behandelt werden. Wie in Satz 3.2 bzw. Satz 4.13 bleiben dabei Eigenschaften der Galerkin–Matrizen erhalten, und es gelten die entsprechenden Fehlerabschätzungen für die lokalen Randintegraloperatoren. Somit hat die Verwendung der Multipolapproximation keinen Einfluß auf die Konvergenzordnung der Gebietszerlegungsmethoden.

5.2 Die Standardformulierung der BETI–Methode

Statt des globalen linearen Gleichungssystems (5.10)

$$\tilde{S}_h \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \tilde{S}_{i,h} A_i \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_i + \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_{N,i}$$

kann auch das zugehörige Minimierungsproblem

$$F(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^p \left[\frac{1}{2} (\tilde{S}_{i,h} A_i \underline{v}, A_i \underline{v}) - (\underline{f}_i, A_i \underline{v}) - (\underline{f}_{N,i}, A_i \underline{v}) \right] \quad (5.12)$$

betrachtet werden. Ausgehend von diesem Minimierungsproblem wird nun die “Boundary Element Tearing and Interconnecting” (BETI)–Methode nach [78] hergeleitet. Die BETI–Methode ist das Gegenstück der Randelementmethoden zu den “Finite Element Tearing and Interconnecting” (FETI)–Methoden. Die FETI–Methoden sind in [34] eingeführt worden. Eine detaillierte Beschreibung findet man in [35]. Inzwischen wurden mit den FETI–DP–Methoden [32] neue Versionen entwickelt. Die FETI–Methoden und auch die neueren FETI–DP–Methoden werden vielfach in Ingenieursanwendungen eingesetzt, siehe beispielsweise [31, 32, 33, 37, 101, 121]. Darüberhinaus existiert eine ausführliche Analysis für die FETI–Methoden [16, 67, 70, 83, 84]. Viele Ideen der FETI–Methoden lassen sich auf die BETI–Methoden unter Verwendung der Eigenschaften der Randintegraloperatoren übertragen. Die Verknüpfung von BETI– und FETI–Methoden wird in [79] behandelt. Die Grundideen der FETI– und BETI–Methoden sind das Auseinanderreißen (tearing) der globalen Ansatzfunktion u in lokale Ansatzfunktionen u_i und das anschließende Zusammenbinden (interconnecting) dieser lokalen Ansatzfunktionen u_i entlang der Koppelränder.

Zunächst werden also die lokalen Vektoren $\underline{u}_i = A_i \underline{u}$ eingeführt. Somit können statt des globalen Minimierungsproblems (5.12) die entsprechenden lokalen Minimierungsprobleme betrachtet werden. Die für die gesuchte Lösung u_h notwendige Stetigkeit an den Übergangsrändern wird durch die Einführung der Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^p B_i \underline{u}_i = \underline{0} \quad (5.13)$$

mit den Matrizen $B_i \in \mathbb{R}^{M_L \times (M_{C,i} + M_{N,i})}$ garantiert. Jedem der globalen Koppelknoten, der zu n Teilgebieten gehört, werden $n-1$ Nebenbedingungen zugeordnet. Die Gesamtzahl der so notwendigen Nebenbedingungen wird mit M_L angegeben. In der linearen Elastostatik sind diese Nebenbedingungen für jede der drei Komponenten zu berücksichtigen. In diesen Nebenbedingungen wird erzwungen, daß an einem globalen Koppelknoten die Werte der lokalen Vektoren der angrenzenden Teilgebiete alle gleich sind. Hier werden alle Werte der lokalen Vektoren an den Wert des Teilgebiets Ω_j mit dem größten Gebietskoeffizienten α_j gekoppelt, vergleiche auch [67]. Dabei sind die meisten Einträge der Matrizen B_i gleich 0. Für alle an die Koppelknoten angrenzenden Teilgebiete Ω_i mit $i \neq j$ wird nun eine Nebenbedingung aufgestellt, also insgesamt die oben angegebenen $n-1$. Für diese Nebenbedingung mit dem Index r und für das Teilgebiet Ω_k für $k \neq j$ erhält das Teilgebiet Ω_j mit dem größten Gebietskoeffizienten den Eintrag 1 und das angehängte Teilgebiet Ω_k den Eintrag -1 . Für diese Nebenbedingung sind die Einträge der Matrizen B_i also

$$B_i[r, s] = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ und } s = \ell_j, \\ -1 & \text{für } i = k \text{ und } s = \ell_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.14)$$

Dabei ist ℓ_j der zum Koppelknoten gehörende Index des lokalen Vektors \underline{v}_j des Teilgebietes Ω_j entsprechend der Zugehörigkeitsmatrix A_j .

Abbildung 5.1 veranschaulicht die einzelnen Schritte für die BETI-Methode anhand einer zweidimensionalen Skizze. Im linken Bild ist ein Ausschnitt des Gebietes mit vier Teilgebieten und einigen globalen Koppelknoten zu sehen. Im mittleren Bild ist die Situation nach dem Auseinanderreißen (Tearing) der Teilgebiete dargestellt. Im rechten Bild sind dann die Nebenbedingungen zwischen den lokalen Knoten aus dem Zusammenbinden (Interconnecting) durch die Pfeile angedeutet.

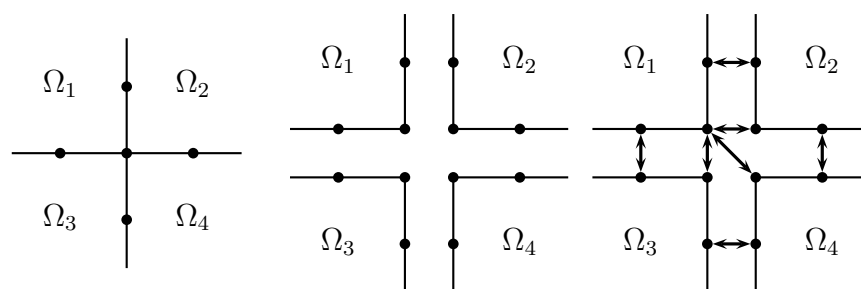


Abbildung 5.1: Veranschaulichung der Ideen der BETI-Methode

Wie bei den FETI-Methoden können auch redundante Nebenbedingungen [67] eingesetzt werden. Hier wird die oben beschriebene nicht redundante Variante verwendet. Es sind nun also p unabhängige Minimierungsprobleme unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (5.13) zu lösen. Durch die Einführung von Lagrange-Multiplikatoren

$\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{M_L}$ lassen sich diese wieder als ein lineares Gleichungssystem schreiben,

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_{1,h} & & & -B_1^\top \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \tilde{S}_{p,h} & -B_p^\top \\ B_1 & \dots & B_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 + \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_p + \underline{f}_{N,p} \\ \underline{0} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Dabei handelt es sich im wesentlichen um lokale Probleme mit den Steklov–Poincaré–Matrizen $\tilde{S}_{i,h}$, die über die Nebenbedingungen und die Lagrange–Multiplikatoren $\underline{\lambda}$ miteinander gekoppelt sind.

Für Teilgebiete mit einem Dirichlet–Randanteil sind die lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren und somit auch ihre diskreten Realisierungen $\tilde{S}_{i,h}$ invertierbar,

$$\underline{u}_i = \tilde{S}_{i,h}^{-1}(\underline{f}_i + \underline{f}_{N,i} + B_i^\top \underline{\lambda}).$$

Im folgenden wird zunächst angenommen, daß dies für alle Teilgebiete der Fall ist. Die Behandlung von Teilgebieten ohne Anteil am Dirichlet–Rand wird im Abschnitt 5.4 beschrieben. Somit läßt sich das obige lineare Gleichungssystem (5.15) in das Schur–Komplement–System

$$F \underline{\lambda} := \sum_{i=1}^p B_i \tilde{S}_{i,h}^{-1} B_i^\top \underline{\lambda} = - \sum_{i=1}^p B_i \tilde{S}_{i,h}^{-1} (\underline{f}_i + \underline{f}_{N,i}) \quad (5.16)$$

umschreiben. Dieses kann beispielsweise mittels des CG–Verfahrens gelöst werden. Für die Vorkonditionierung wird wieder die Idee der Operatoren entgegengesetzter Ordnung verwendet, wie beispielsweise in Satz 2.5 beschrieben. Als Vorkonditionierer können die folgenden Varianten verwendet werden [67, 78]:

- hypersingulärer BETI–Vorkonditionierer I:

$$C^{-1} = B D_h B^\top = \sum_{i=1}^p B_i D_{i,h} B_i^\top.$$

Dieser Vorkonditionierer funktioniert für sich moderat ändernde Koeffizienten und für den Fall, daß keine Kreuzungspunkte auftreten. Dabei ist zu beachten, daß die lokalen Matrizen $D_{i,h}$ die entsprechende lokale Skalierung beinhalten.

- hypersingulärer BETI–Vorkonditionierer II:

$$C^{-1} = (B B^\top)^{-1} B D_h B^\top (B B^\top)^{-1}.$$

Diese Vorkonditionierung ist robust gegenüber auftretenden Kreuzungspunkten mittels des durch die Matrizen $(B B^\top)^{-1}$ lokal durchgeführten Austausches.

- skaliertes, hypersingulärer BETI-Vorkonditionierer:

$$C_{\text{BETI}}^{-1} = (BC_{\alpha}^{-1}B^{\top})^{-1}BC_{\alpha}^{-1}D_hC_{\alpha}^{-1}B^{\top}(BC_{\alpha}^{-1}B^{\top})^{-1} \quad (5.17)$$

mit geeigneten Diagonalmatrizen C_{α} , siehe beispielsweise [67, 16]. Die Werte werden im Abschnitt 5.5 bei der blockweisen Beschreibung der Matrix $(BC_{\alpha}^{-1}B^{\top})^{-1}$ in (5.30) angegeben.

Die Eignung der vorgestellten Vorkonditionierer ergibt sich aus folgendem Satz.

Satz 5.1 ([78]). *Unter der Voraussetzung, daß die Vorkonditionierung für die Invertierung der lokalen Einfachschichtpotentiale und der lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren optimal ist, gilt für den skalierten, hypersingulären BETI-Vorkonditionierer und das BETI–System (5.16) die folgende Abschätzung für die Konditionszahl*

$$\kappa(C_{\text{BETI}}^{-1}F) \leq c \left(1 + \log \frac{H}{h}\right)^2 \quad (5.18)$$

mit einer von h , H , p und den Koeffizientensprüngen der Parameter α_i der Potentialgleichung unabhängigen Konstanten c . Für die lineare Elastostatik ist die Konstante c unabhängig von den Werten $E_i/(1 + \nu_i)$. Dabei bezeichnet H das Maximum der lokalen Teilgebietsdurchmesser $H_i := \text{diam } \Omega_i$.

Mit Hilfe dieser Vorkonditionierung ist die Konvergenzrate im iterativen Löser für die BETI–Methode unabhängig von Sprüngen in den Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung. Desweiteren besteht auch nur eine schwache Abhängigkeit der Konditionszahl und damit der Anzahl an notwendigen Iterationsschritten von der Diskretisierung. Mit dem Aufwand von $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ für die Realisierung der einzelnen Randintegraloperatoren mittels der Multipolmethode erhält man ein asymptotisch gutes Gesamtverfahren [74, 75], wenn die Vorkonditionierung der lokalen Einfachschichtpotentiale und Steklov–Poincaré–Operatoren optimal ist. Eine genaue Aufwandsanalyse erfolgt später im Satz 5.7.

5.3 Die Allfloating–Formulierung

Ein Nachteil der BETI–Formulierung (5.16) ist, daß die Matrizen der lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren nur auf Teilbereichen des Teilgebietsrandes Γ_i erklärt sind. Daher steigt beim verwendeten Vorkonditionierer, dem Einfachschichtpotential für linear stetige Basisfunktionen als Operator entgegengesetzter Ordnung, die Konditionszahl logarithmisch an [88].

Desweiteren muß zwischen Teilgebieten mit einem Anteil am Dirichlet–Rand und “floating” Teilgebieten, deren lokale Lösung aufgrund nicht ausreichender Dirichlet–Randbedingungen nicht eindeutig bestimmt ist, unterschieden werden. Für die “floating” Teilgebiete wird hier die Matrix des Steklov–Poincaré–Operators nach Satz 2.8 stabilisiert. Um die einzelnen eingehandelten Freiheitsgrade der lokalen Kerne wieder zu

eliminieren, muß eine entsprechende Orthogonalprojektion in das CG–Verfahren eingebaut werden. Für die Potentialgleichung läßt sich dies noch recht einfach handhaben. In der linearen Elastizität gestaltet sich dies jedoch erheblich schwieriger, da hier je nach Verteilung der Randbedingungen unterschiedlich viele Starrkörperbewegungen für die einzelnen Teilgebiete zu beachten sind [68].

Daher wird im folgenden eine Formulierung beschrieben, die letztlich alle Gebiete zu “Neumann–Gebieten” (floating subdomains) macht und so eine einheitliche Behandlung der Teilgebiete ermöglicht. Dies vereinfacht die Implementierung stark. Außerdem spielt beispielsweise ein Wechsel der Randbedingungen wie bei Kontaktproblemen keine Rolle. Zusätzlich erhält man für die lokalen Vorkonditionierer der Matrizen der Steklov–Poincaré–Operatoren eine beschränkte Konditionszahl im Gegensatz zur Vorkonditionierung bei der Standard–BETI–Formulierung. Allerdings erhöht sich in dieser Formulierung die Anzahl der Freiheitsgrade in den Lagrange–Multiplikatoren $\underline{\lambda}$ und den lokalen Dirichlet–Daten u_i . Ein ähnliches Vorgehen wurde auch in [112, 113] gewählt.

Ein andere Möglichkeit zur Behandlung der “floating” Teilgebiete bietet die Dual–Primal–Variante der FETI–Methode, genannt FETI–DP [31, 32, 68]. Dabei werden wieder einige globale Knoten und damit die zugehörigen primalen Variablen eingeführt, um die Invertierbarkeit der einzelnen Steklov–Poincaré–Operatoren zu gewährleisten, während für die verbleibenden Koppelknoten die Stetigkeit in den Nebenbedingungen mittels der zugehörigen dualen Lagrange–Multiplikatoren erzwungen wird, wie bei der Standard–BETI–Formulierung. Dabei ist die Wahl der primalen Variablen entscheidend für die Robustheit und Effizienz des Verfahrens und erscheint insbesondere für die lineare Elastostatik [68] recht schwierig.

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der Allfloating–Formulierung ist wiederum das lineare Gleichungssystem (5.10)

$$\tilde{S}_h \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \tilde{S}_{i,h} A_i \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_i + \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_{N,i},$$

beziehungsweise das zugehörige Minimierungsproblem

$$F(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}} \sum_{i=1}^p \left[\frac{1}{2} (\tilde{S}_{i,h} A_i \underline{v}_i, A_i \underline{v}_i) - (\underline{f}_i, A_i \underline{v}_i) - (\underline{f}_{N,i}, A_i \underline{v}_i) \right].$$

Dabei ist zu beachten, daß die Vektoren \underline{v} keine Einträge für die Knoten des Dirichlet–Randes besitzen, da die zugehörigen Funktionen v_h dort verschwinden. Erneut werden zunächst lokale Vektoren $\underline{v}_i = A_i \underline{v}$ eingeführt, die wieder an den Übergangsrändern durch Nebenbedingungen aneinandergesetzt werden. Somit erhält man wieder lokale Minimierungsprobleme

$$F(\underline{u}_i) = \min_{\underline{v}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_i}} \frac{1}{2} (\tilde{S}_{i,h} \underline{v}_i, \underline{v}_i) - (\underline{f}_i, \underline{v}_i) - (\underline{f}_{N,i}, \underline{v}_i),$$

die durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^p B_i \underline{u}_i = \underline{0}$$

miteinander verknüpft sind. Nun sollen die lokalen Vektoren \underline{u}_i und damit auch die zugehörigen Funktionen wieder auf den ganzen Rand Γ_i ausgeweitet werden. Dazu wird zunächst die Symmetrie der Steklov–Poincaré-Operatoren zu der Aufspaltung

$$(\underline{f}_i, \underline{v}_i) = -(S_{i,h} \hat{g}_i, \underline{v}_i) = -\frac{1}{2}(S_{i,h} \hat{g}_i, \underline{v}_i) - \frac{1}{2}(\hat{g}_i, S_{i,h} \underline{v}_i)$$

verwendet. Nach wie vor muß die zum Vektor \underline{v}_i gehörende Funktion v_i auf Γ_D verschwinden. Um diese Einschränkung aufzuheben, wird sie nun wieder mit \hat{g} zusammengefaßt. Dazu werden die lokalen Minimierungsprobleme unter Verwendung der obigen Aufspaltung transformiert zu

$$\begin{aligned} F(\underline{u}_i) &= \min_{\underline{v}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_i}} \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{S}_{i,h} \underline{v}_i, \underline{v}_i) + \frac{1}{2}(S_{i,h} \hat{g}_i, \underline{v}_i) + \frac{1}{2}(\hat{g}_i, S_{i,h} \underline{v}_i) - (\underline{f}_{N,i}, \underline{v}_i) \right\} \\ &= \min_{\underline{v}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_i}} \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{S}_{i,h}(\underline{v}_i + \hat{g}_i), \underline{v}_i + \hat{g}_i) - (\underline{f}_{N,i}, \underline{v}_i + \hat{g}_i) - \frac{1}{2}(S_{i,h} \hat{g}_i, \hat{g}_i) + (\underline{f}_{N,i}, \hat{g}_i) \right\}. \end{aligned}$$

Da die Lösung des Minimierungsproblems von den Konstanten der letzten beiden Terme unabhängig ist, kann auch das äquivalente Minimierungsproblem

$$\tilde{F}(\underline{u}_i) = \min_{\underline{v}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_i}} \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{S}_{i,h}(\underline{v}_i + \hat{g}_i), \underline{v}_i + \hat{g}_i) - (\underline{f}_{N,i}, \underline{v}_i + \hat{g}_i) \right\}$$

betrachtet werden. Definiert man nun noch neue lokale Funktionen $\tilde{v}_i = v_i + \hat{g}_{|\Gamma_i}$ bzw. deren Vektoren $\tilde{\underline{v}}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_i}$, wobei M_i die Anzahl aller Knoten des Teilgebiets Ω_i ist, so erhält man die Minimierungsprobleme

$$\tilde{F}(\tilde{\underline{u}}_i) = \min_{\tilde{\underline{v}}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_i}} \frac{1}{2}(\tilde{S}_{i,h} \tilde{\underline{v}}_i, \tilde{\underline{v}}_i) - (\underline{f}_{N,i}, \tilde{\underline{v}}_i).$$

Da nun aber die Erfüllung der Dirichlet-Randbedingung nicht mehr gewährleistet ist, muß diese in die Nebenbedingungen eingebaut werden. Dadurch erweitert sich das System der Nebenbedingungen auf

$$\sum_{i=1}^p \tilde{B}_i \tilde{\underline{v}}_i = \underline{b}$$

mit $\tilde{B}_i \in \mathbb{R}^{(M_L + \sum_i M_{D,i}) \times M_i}$. Dabei gilt bei geeigneter Numerierung der Knoten für die Matrixeinträge

$$\tilde{B}_i[j, k] = \begin{cases} B_i[j, k] & \text{falls } j \leq M_L \\ 1 & \text{falls } j > M_L \text{ und } k \text{ der lokale Index des zu } j \text{ gehörenden} \\ & \text{Dirichlet-Knotens des Teilgebietes } \Omega_i \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu lauten die Einträge der rechten Seite \underline{b}

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \leq M_L, \text{ d.h. zur Zeile } j \text{ gehört eine Koppelbedingung,} \\ g(x_k) & \text{falls } j > M_L \text{ und } k \text{ der lokale Index des zu } j \text{ gehörenden} \\ & \text{Dirichlet–Knotens des Teilgebietes } \Omega_i \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Einführung von Lagrange–Multiplikatoren $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}_L}$ führt dann auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_{1,h} & & & -\tilde{B}_1^\top \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \tilde{S}_{p,h} & -\tilde{B}_p^\top \\ \tilde{B}_1 & \dots & \tilde{B}_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{N,p} \\ \underline{b} \end{pmatrix}.$$

Diese Formulierung unterscheidet sich von der ursprünglichen in einigen wesentlichen Punkten. Zunächst operiert die Matrix $\tilde{S}_{i,h}$ durch den Übergang zu den kompletten lokalen Funktionen nun nicht mehr auf dem entsprechenden Nicht–Dirichlet–Teilrand sondern auf dem kompletten Rand Γ_i . Dadurch verbessert sich, wie bereits oben erwähnt, die Qualität der Vorkonditionierung (2.19) der lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren. Da die gesuchten Funktionen nun auch wieder den Anteil der Dirichlet–Randbedingung enthalten, entfällt auch der entsprechende Anteil der rechten Seiten der lokalen Steklov–Poincaré–Blöcke. Stattdessen geht die Dirichlet–Randbedingung nun über die rechte Seite der Nebenbedingungen ein. Die Anzahl der Nebenbedingungen hat sich um die Summe der lokalen Dirichlet–Knoten erhöht. Diese zusätzlichen Nebenbedingungen sind allerdings lokal und können auch so behandelt werden, d.h. sie gehen nicht in die Kommunikation des parallelen Lösungsverfahrens mit ein.

Da die Steklov–Poincaré–Operatoren und somit auch ihre diskreten Realisierungen $\tilde{S}_{i,h}$ nun auf dem kompletten Rand definiert sind, sind sie nicht mehr invertierbar. Daher wird nun eine stabilisierte Pseudoinverse nach Kapitel 2 verwendet. Dies wird nun im nächsten Abschnitt beschrieben. Für die Vorkonditionierung lassen sich die gleichen Vorkonditionierer wie für die Standard–BETI–Methode verwenden, wobei eben die modifizierten Operatoren verwendet werden.

5.4 Projektionsverfahren

Bei der Allfloating–BETI–Methode bleibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_{1,h} & & & -\tilde{B}_1^\top \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \tilde{S}_{p,h} & -\tilde{B}_p^\top \\ \tilde{B}_1 & \dots & \tilde{B}_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{N,p} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

zu lösen. Für die Standard-BETI-Formulierung sind statt der erweiterten Matrizen \tilde{B}_i die Originalmatrizen B_i und die passenden rechten Seiten zu verwenden und die Dimensionen entsprechend anzupassen. Im folgenden wird stellvertretend für beide Fälle die Notation mit den \tilde{B}_i verwendet. Für die Standardformulierung sind nur entsprechende Modifikationen durchzuführen. Die lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren $\tilde{S}_{i,h}$ sind für $i = 1, \dots, q$ singulär, da sie auf dem kompletten Rand Γ_i operieren. Für die Allfloating-Formulierung gilt insbesondere $q = p$. Zur Invertierung dieser lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren $\tilde{S}_{i,h}$ werden nun die gleichen Techniken wie in Kapitel 2 verwendet. Für die entsprechenden Teilgebiete und Operatoren sind die lokalen Gleichungen

$$\tilde{S}_{i,h}\underline{u}_i = \underline{f}_{N,i} + \tilde{B}_i^\top \underline{\lambda} \quad (5.20)$$

nur lösbar, wenn zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen

$$(\underline{f}_{N,i} + \tilde{B}_i^\top \underline{\lambda}, \underline{v}_{k,i}) = 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, \dim \mathcal{R} \quad (5.21)$$

mit den Starrkörperverschiebungen $\underline{v}_{k,i} \in \mathbb{R}^{M_i}$ vorausgesetzt werden. Nach Kapitel 2 werden statt der lokalen Probleme (5.20) nun die modifizierten Probleme

$$\hat{S}_{i,h}\underline{u}_i = \left[\tilde{S}_{i,h} + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \alpha_{k,i} \underline{a}_{k,i} \underline{a}_{k,i}^\top \right] \underline{u}_i = \underline{f}_{N,i} + \tilde{B}_i^\top \underline{\lambda} \quad (5.22)$$

mit der Normalisierungsbedingung

$$(\underline{a}_{k,i}, \underline{u}_i) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$$

gelöst. Dabei sind die $\alpha_{k,i}$ die aus Satz 2.5 bekannten Skalierungsparameter. Somit kann nach Abschnitt 2.3 die Lösung der lokalen Probleme (5.20) mit

$$\underline{u}_i = \hat{S}_{i,h}^{-1}(\underline{f}_{N,i} + \tilde{B}_i^\top \underline{\lambda}) + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \gamma_{k,i} \underline{v}_{k,i} \quad \text{für } i = 1, \dots, q \quad (5.23)$$

angegeben werden, wobei die Konstanten $\gamma_{k,i} \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmen sind. Durch das Einsetzen der lokalen Lösungen in die Kopplungsbedingungen in der letzten Zeile des linearen Gleichungssystems (5.19) erhält man das modifizierte BETI-System

$$\sum_{i=1}^p \tilde{B}_i \hat{S}_{i,h}^{-1} \tilde{B}_i^\top \underline{\lambda} + G \underline{\gamma} = \underline{b} - \sum_{i=1}^p \tilde{B}_i \hat{S}_{i,h}^{-1} \underline{f}_{N,i},$$

wobei die Matrix G als $G = (\tilde{B}_1 \underline{v}_{1,1}, \dots, \tilde{B}_1 \underline{v}_{\dim \mathcal{R},1}, \dots, \tilde{B}_q \underline{v}_{\dim \mathcal{R},q}) \in \mathbb{R}^{(M_L + \sum M_{D,i}) \times q \dim \mathcal{R}}$ definiert ist. Abkürzend geschrieben entspricht dies dem linearen Gleichungssystem

$$F \underline{\lambda} + G \underline{\gamma} = \underline{d}. \quad (5.24)$$

Für dieses modifizierte Problem läßt sich wieder der Vorkonditionierer (5.17) verwenden. Die Kompatibilitätsbedingungen (5.21) lassen sich entsprechend zu

$$G^T \underline{\lambda} = - \left((f_{N,i}, \underline{v}_{k,i}) \right)_{k=1:\dim \mathcal{R}, i=1:q} =: \underline{e} \quad (5.25)$$

umschreiben. Nun wird eine Projektion $P = I - G(G^T G)^{-1} G^T$ vom Bild (B) auf den Unterraum $\text{Kern}(G^T) = (\text{Bild}(G))^\perp$ eingeführt. Mittels der Projektion P^T können die Bestimmung der Lagrange–Parameter $\underline{\lambda}$ und die Bestimmung der Konstanten $\underline{\gamma}$ des Gleichungssystems (5.24) voneinander getrennt werden, da $P^T G \gamma = 0$ gilt. Somit ist die Lösung $\underline{\lambda}$ des linearen Gleichungssystems

$$P^T F \underline{\lambda} = P^T \underline{d} \quad (5.26)$$

unter den Nebenbedingungen (5.25) zu finden. Anschließend können dann die Konstanten $\underline{\gamma}$ aus (5.24) als

$$\underline{\gamma} = (G^T G)^{-1} G^T (\underline{d} - F \underline{\lambda}) \quad (5.27)$$

bestimmt werden. Abschließend lassen sich die gesuchten lokalen Lösungen \underline{u}_i aus der Darstellung (5.23) berechnen, wobei $\gamma_{k,i} = 0$ für $i = q + 1, \dots, p, k = 1, \dots, \dim \mathcal{R}$ ist.

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems (5.26) kann nun ein iteratives Verfahren verwendet werden. Um die Nebenbedingung zu gewährleisten, muß bereits der Startvektor die Nebenbedingung erfüllen, und kann dazu als

$$\underline{\lambda}_0 = G(G^T G)^{-1} \underline{e}$$

gewählt werden. Ein vorkonditioniertes und projiziertes paralleles CG-Verfahren wird im Abschnitt 5.5 beschrieben. Nun wird die Projektion zunächst für den Fall der Potentialgleichung nochmals erweitert. Die bisher beschriebene Projektion ist geeignet für einheitliche Gebietskoeffizienten. Für springende Koeffizienten müssen die Projektion und das zugehörige Skalarprodukt geeignet modifiziert werden [67, 16]. Dabei wird mit $P = I - QG(G^T QG)^{-1} G^T$ eine geeignete Skalierung Q in die Projektion eingebaut. Eine erste Wahl für diese Skalierungsmatrix wäre die Vorkonditionierungsmatrix der BETI–Methode. Deren Anwendung ist für eine Skalierungsmatrix allerdings relativ teuer. Es kann aber auch eine Diagonalmatrix verwendet werden [67, 16]. Diese bezieht sich speziell auf die Formulierung der Nebenbedingungen als direkte Anbindung aller angrenzenden Teilgebiete an das Teilgebiet mit dem größten Koeffizienten. Für diesen Fall werden die Einträge der Diagonalmatrix Q wie folgt gewählt [67]

$$Q[\ell, \ell] = \begin{cases} \min\{\alpha_i, \alpha_j\} \left(1 + \log \left(\frac{H_i}{h_i} \right) \right) \frac{h_i^2}{H_i} & \text{falls der Knoten } x_\ell \text{ in einer Fläche liegt} \\ \min\{\alpha_i, \alpha_j\} h_i & \text{falls der Knoten } x_\ell \text{ auf einer Koppelkante} \\ & \text{liegt oder eine Ecke am Koppelrand ist.} \end{cases}$$

Dabei sind i und j die Indizes der beiden Teilgebiete Ω_i und Ω_j zu denen die Koppelbedingung gehört. Diese beiden Fälle lassen sich recht leicht unterscheiden, da die Knoten

in einer Fläche immer zu zwei Teilgebieten gehören, während die anderen inneren Knoten zu mindestens drei Teilgebieten gehören. Entsprechend der Skalierung ändert sich auch die Realisierung von P^\top und die Bestimmung der Konstanten $\underline{\gamma}$ aus (5.24) als

$$\underline{\gamma} = (G^\top QG)^{-1} G^\top Q(\underline{d} - F\underline{\lambda}). \quad (5.28)$$

Der Startvektor für das Lösen mit einem iterativen Verfahren muß natürlich weiterhin die Nebenbedingung erfüllen, und kann daher als

$$\underline{\lambda}_0 = QG(G^\top QG)^{-1} \underline{e}$$

gewählt werden. In der linearen Elastostatik werden statt der Koeffizienten α_i die Werte $G_i = E_i/(1 + \nu_i)$ verwendet [69].

Wie im Fall ohne "floating" Teilgebiete gilt nun nach den Untersuchungen zur verwendeten Projektion in [67] auch mit "floating" Teilgebieten eine entsprechende Abschätzung für die Konditionszahl des projizierten BETI-System (5.26).

Satz 5.2 ([78]). *Für den skalierten, hypersingulären BETI-Vorkonditionierer (5.17) und das projizierte BETI-System (5.26) gilt die folgende Abschätzung für die Konditionszahl*

$$\kappa(PC_{BETI}^{-1}P^\top F) \leq c \left(1 + \log \frac{H}{h}\right)^2 \quad (5.29)$$

mit einer von h , H , p und den Koeffizientensprüngen der Parameter α_i der Potentialgleichung bzw. den Werten $E_i/(1 + \nu_i)$ in der linearen Elastostatik unabhängigen Konstanten c . Dabei bezeichnet H das Maximum der lokalen Teilgebietsdurchmesser $H_i := \text{diam } \Omega_i$.

Somit ist auch für den Fall mit "floating" Teilgebieten die Iterationszahl des iterativen Löser unabhängig von Sprüngen in den Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung. Hiermit erweist sich nun die beschränkte Konditionszahl und die damit auch beschränkte Iterationszahl für die lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren bei der Allfloating–Formulierung als vorteilhaft. Diese führt zu einer verbesserten Gesamtkomplexität der Allfloating–Formulierung gegenüber der Standard–BETI–Methode. Eine genaue Aufwandsanalyse erfolgt später im Satz 5.7.

5.5 Beschreibung von Operationen der BETI-Methode

5.5.1 Paralleler iterativer Löser

Hier wird nun kurz die parallele Lösung des linearen Gleichungssystems (5.10) der Dirichlet–Gebietszerlegung beschrieben. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.26) der BETI-Methode erfolgt analog bis auf die spezifischen Besonderheiten der Methode durch die Matrizen B_i der Nebenbedingungen. Einige dieser Details werden in den Abschnitten 5.5.2 und 5.5.3 beschrieben.

Jedem Teilgebiet wird ein Prozess und damit im Idealfall ein Prozessor zugewiesen. Jeder Prozess erstellt nur die Matrizen der lokalen Randintegraloperatoren und benötigt dafür nur die Geometriedaten für das Teilgebiet. Darüberhinaus sind nur noch wenige Informationen für die Abwicklung der Kommunikation notwendig. Für die primale Dirichlet–Gebietszerlegungsmethode genügt beispielsweise ein eindeutiger Index für jeden globalen Koppelknoten. Für die BETI–Methode sind zusätzlich noch Kenntnisse über die Teilgebiete, zu denen ein Koppelknoten gehört, notwendig. Diese Daten, wie beispielsweise die Anzahl der Teilgebiete und die zugehörigen Materialparameter, können aber beim Start des Programms einmal mit niedrigen Kommunikationskosten ausgetauscht werden. Für das lineare Gleichungssystem (5.10),

$$\tilde{S}_h \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \tilde{S}_{i,h} A_i \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_i + \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_{N,i} =: \underline{b},$$

speichert kein Prozess den globalen Vektor \underline{u} sondern immer nur den für ihn relevanten lokalen Anteil $A_i \underline{u}$. Die komplette Kommunikation des Verfahrens erfolgt innerhalb des zur Lösung des linearen Gleichungssystems verwendeten parallelen CG–Verfahrens, welches in Algorithmus 5.1 beschrieben wird.

Algorithmus 5.1 Paralleles CG–Verfahren

Wähle eine Startnäherung \underline{u}^0 .

$$\underline{r}^0 = \tilde{S}_h \underline{u}^0 - \underline{b} \quad \{\text{Anfangsresiduum berechnen}\}$$

$$\underline{w}^0 = C^{-1} \underline{r}^0 \quad \{\text{Vorkonditionierung, Kommunikation}\}$$

$$\rho_0 = (\underline{w}^0, \underline{r}^0) \quad \{\text{Skalarprodukt, Kommunikation}\}$$

$$\underline{p}^0 = \underline{0}, k = 0, \rho_{-1} = 1$$

while $|\rho^k| > \text{error} \cdot \rho_0$ **do**

$$\beta_k = \rho_k / \rho_{k-1}$$

$$\underline{p}^{k+1} = \underline{w}^k + \beta_k \underline{p}^k \quad \{\text{neue Suchrichtung bestimmen}\}$$

$$\underline{v}^{k+1} = \tilde{S}_h \underline{p}^{k+1} \quad \{\text{Matrixvektormultiplikation}\}$$

$$\sigma_{k+1} = (\underline{v}^{k+1}, \underline{p}^{k+1}) \quad \{\text{Skalarprodukt, Kommunikation}\}$$

$$\alpha_{k+1} = \rho_k / \sigma_{k+1}$$

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{u}^k - \alpha_{k+1} \underline{p}^{k+1} \quad \{\text{neue Näherungslösung berechnen}\}$$

$$\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k - \alpha_{k+1} \underline{v}^{k+1} \quad \{\text{neues Residuum bestimmen}\}$$

$$\underline{w}^{k+1} = C^{-1} \underline{r}^{k+1} \quad \{\text{Vorkonditionierung, Kommunikation}\}$$

$$\rho_{k+1} = (\underline{w}^{k+1}, \underline{r}^{k+1}) \quad \{\text{Fehler bestimmen, Skalarprodukt, Kommunikation}\}$$

$$k = k + 1$$

end while

Dabei wird bei der Anwendung der Matrixvektormultiplikation die Summation der lokalen Ergebnisse aus der Anwendungen der lokalen Teilmatrizen $\tilde{S}_{i,h}$ nicht durchgeführt. Die Gesamtmatrix \tilde{S}_h ist aufgrund der lokalen Teilmatrizen $\tilde{S}_{i,h}$ verteilt gespeichert, daher wird das Ergebnis der Matrixvektormultiplikation auch verteilt gespeichert. Ein verteilt gespeicherter Vektor wird als \underline{v} gekennzeichnet. Den Gesamtvektor

$\underline{v}_{\text{ges}}$ eines verteilt gespeicherten Vektors \underline{v} erhält man durch das Aufsummieren der lokalen Teilvektoren \underline{v}_i nach $\underline{v}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{v}_i$. Außerdem werden noch akkumulierte Vektoren \underline{u} verwendet. Dabei sind die Einträge des lokal gespeicherten Vektors $\underline{u}_i = A_i \underline{u}_{\text{ges}}$ gleich denen des globalen Vektors $\underline{u}_{\text{ges}}$. Diese Unterscheidung in zwei verschiedene Arten von Vektoren hält den Kommunikationsaufwand möglichst gering. So läßt sich das Skalarprodukt zweier globaler Vektoren durch die Summation der Ergebnisse der Skalarprodukte der lokalen Anteile aller Teilgebiete eines verteilt gespeicherten und eines akkumulierten Vektors effizient bestimmen. Kommunikation erfolgt nur noch in der Vorkonditionierung, da die Vorkonditionierungsmatrix C^{-1} durch die Ausführung der zugehörigen Summation über alle Teilgebiete einen verteilt gespeicherten Vektor auf einen akkumulierten Vektor abbildet. Es ist also in jedem Iterationsschritt nur die Kommunikation für die beiden Skalarprodukte und die Vorkonditionierung notwendig. Alle anderen Operationen laufen parallel und damit vollständig unabhängig von den anderen Prozessen ab. Damit hängt die gleichmäßige Lastverteilung des parallelen Verfahrens vor allem von der möglichst gleich schnellen Durchführung der lokalen Matrixvektormultiplikationen ab. Dies ist durch eine Aufteilung des Gesamtgebietes Ω in Teilgebiete Ω_i mit möglichst gleich vielen Randelementen gut zu gewährleisten. Genauere Informationen zu parallelen iterativen Lösern findet man beispielsweise in [47].

5.5.2 Realisierung der BETI-Vorkonditionierung

Für eine schnelle Anwendung der Vorkonditionierungsmatrix C_{BETI}^{-1} der BETI-Methode (5.17) ist eine schnelle Realisierung von $(\tilde{B}C_\alpha^{-1}\tilde{B}^\top)^{-1}$ erforderlich. Aufgrund der speziellen Struktur der Matrix \tilde{B} für die Nebenbedingungen und der Diagonalmatrix C_α^{-1} erhält die Matrix $\tilde{B}C_\alpha^{-1}\tilde{B}^\top$ bei geeigneter Anordnung eine Blockstruktur. Dabei ist jedem globalen Koppelknoten ein solcher Block zugeordnet. Die Matrix $\tilde{B}C_\alpha^{-1}\tilde{B}^\top$ kann daher auch blockweise invertiert werden. Da die Invertierung der lokalen 1×1 -Blöcke der Dirichlet-Nebenbedingungen trivial ist, genügt es hier die Invertierung der einzelnen Blöcke der Matrix $BC_\alpha^{-1}B^\top$ zu betrachten.

Die Struktur des umsortierten lokalen Ausschnitts aus der Matrix $B = (B_1, \dots, B_p)$, welche die Nebenbedingungen für die Stetigkeit der Dirichlet-Daten beschreibt, sieht nach (5.14) an einem globalen Koppelknoten, der zu n Teilgebieten gehört, wie folgt aus

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 1 & & \ddots & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

oder koeffizientenweise für $i = 1, \dots, n-1$ und $j = 1, \dots, n$ geschrieben,

$$B[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1, \\ -1 & \text{für } j = i + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß insgesamt $n - 1$ Nebenbedingungen zwischen jedem Gebiet und dem Gebiet Ω_1 mit dem größten Gebietskoeffizienten (Materialparameter) gestellt werden. Für den Fall springender Koeffizienten wird bei der Vorkonditionierung noch eine Skalierungsmatrix C_α^{-1} eingeschoben. Deren Einträge sind wie folgt für $i, j = 1, \dots, n$ und $\gamma \in [1/2, \infty)$ definiert [67]

$$C_\alpha^{-1}[i, j] = \begin{cases} \frac{\sum_{l=1}^n \alpha_l^\gamma}{\alpha_i^\gamma} & \text{für } j = i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.30)$$

wobei n hier die Gesamtzahl der zu dem betrachteten globalen Koppelknoten gehörenden Teilgebiete und die α_l deren Koeffizienten sind. Das Produkt $BC_\alpha^{-1}B^\top$ läßt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} (BC_\alpha^{-1}B^\top)[i, j] &= \sum_{l=1}^n B[i, l]C_\alpha^{-1}[l, l]B^\top[l, j] = \sum_{l=1}^n B[i, l]C_\alpha^{-1}[l, l]B[j, l] \\ &= B[i, 1]C_\alpha^{-1}[1, 1]B[j, 1] + B[i, i+1]C_\alpha^{-1}[i+1, i+1]B[j, i+1] \\ &= C_\alpha^{-1}[1, 1] - C_\alpha^{-1}[i+1, i+1]B[j, i+1]. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nun $\beta_{\gamma, n} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^\gamma$ definiert. Somit hat die Matrix $BC_\alpha^{-1}B^\top$ die Koeffizienten $(i, j = 1, \dots, n - 1)$

$$(BC_\alpha^{-1}B^\top)[i, j] = \begin{cases} \frac{\beta_{\gamma, n}}{\alpha_1^\gamma} + \frac{\beta_{\gamma, n}}{\alpha_{i+1}^\gamma} & \text{für } i = j, \\ \frac{\beta_{\gamma, n}}{\alpha_1^\gamma} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Matrix muß nun im BETI–Vorkonditionierer invertiert werden. Dies geschieht im folgenden für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ durch geeignete Umformungen. Zur Vereinfachung werden die Werte $a_i := \beta_{\gamma, n}/\alpha_i^\gamma$ für $i = 1, \dots, n$ eingeführt. Somit muß das lineare Gleichungssystem

$$(BC_\alpha^{-1}B^\top)\underline{x} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_1 + a_3 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 + a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \underline{b}$$

gelöst werden. Subtraktion der ersten Zeile von allen anderen eliminiert den Wert a_1 in diesen Zeilen und sorgt für viele Nulleinträge,

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 & \dots & a_1 \\ -a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_1 \end{pmatrix}.$$

Da die weitere Umformung auf Diagonalgestalt sehr aufwendig ist, wird zunächst einmal für die erste Komponente der Lösung $x_1 := u$ gesetzt. In Abhängigkeit dieses Parameters u werden nun die restlichen Komponenten der Lösung bestimmt. Dabei gilt sofort

$$x_j = \frac{b_j - b_1 + a_2 u}{a_{j+1}}$$

für $j = 1, \dots, n-1$. Diese Werte müssen nun noch die erste Zeile des linearen Gleichungssystems erfüllen,

$$a_2 u + a_1 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j - b_1 + a_2 u}{a_{j+1}} = b_1.$$

Daraus läßt sich sofort der Parameter u bestimmen als

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{a_2 \left(1 + a_1 \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1}^{-1}\right)} \left(b_1 + a_1 b_1 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_{j+1}} - a_1 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{a_{j+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_2 \sum_{j=1}^n a_j^{-1}} \left(b_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{a_{j+1}} \right). \end{aligned}$$

Somit lassen sich auch die Komponenten der Lösung für $j = 1, \dots, n-1$ angeben mit

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{a_{j+1} \sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \left(b_j \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} - b_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + b_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{a_{i+1}} \right) \\ &= \frac{b_j}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_{j+1} \sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{a_{i+1}}. \end{aligned}$$

Diese Lösung stimmt mit dem aus der Cramerschen Regel erzielten Ergebnis überein. Diese Darstellung ist jedoch sehr viel einfacher. Die Inverse der Matrix $(BC_\alpha^{-1}B^\top)$ kann also für $j, = 1, \dots, n-1$ angegeben werden mit

$$\begin{aligned} (BC_\alpha^{-1}B^\top)^{-1}[j, k] &= \frac{1}{a_{j+1}} \delta_{j,k} - \frac{1}{a_{j+1} \left(\sum_{i=0}^n a_i^{-1}\right)} \frac{1}{a_{k+1}} \\ &= \frac{\alpha_{j+1}^\gamma}{\beta_{\gamma,n}} \delta_{j,k} - \frac{\alpha_{j+1}^\gamma}{\beta_{\gamma,n}} \frac{\beta_{\gamma,n}}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^\gamma\right)} \frac{\alpha_{k+1}^\gamma}{\beta_{\gamma,n}} \\ &= \frac{\alpha_{j+1}^\gamma}{\beta_{\gamma,p}} \left(\delta_{j,k} - \frac{\alpha_{k+1}^\gamma}{\beta_{\gamma,p}} \right). \end{aligned}$$

Da in der parallelen Implementierung die Vektoren, auf die diese inverse Matrix angewendet werden muß, verteilt gespeichert sind, muß meist nur ein Teil der inversen Matrix angewendet werden. Die komplette Invertierung erfolgt dann über die Aufsummierung über die Teilergebnisvektoren. Das Teilgebiet Ω_1 mit dem größten Koeffizienten α_i besitzt einen Eintrag zu jeder Nebenbedingung des Knotens und muß daher die

komplette inverse Matrix ausführen. Alle anderen Teilgebiete Ω_i besitzen nur einen lokalen Eintrag zur $(i - 1)$ -ten Nebenbedingung, und folglich muß die $(i - 1)$ -te Spalte der Matrix $(BC_\alpha^{-1}B^\top)^{-1}$ angewendet werden.

Für den Fall von gleichen Koeffizienten kann auf die Skalierungsmatrix C_α^{-1} verzichtet werden. Dann lauten die Einträge der Matrix $(BB^\top)^{-1}$ wie folgt

$$(BC_\alpha^{-1}B^\top)^{-1}[j, k] = \frac{1}{p}(p\delta_{j,k} - 1).$$

In der linearen Elastizität ist die hier beschriebene Matrix $(BC_\alpha^{-1}B^\top)^{-1}$ komponentenweise anzuwenden. Außerdem werden zur Skalierung nicht die Koeffizienten α_i sondern die Werte $G_i := E_i/(1 + \nu_i)$ verwendet [69].

5.5.3 Realisierung der Projektion

Für die BETI–Methode wird bei Gebieten mit singulären Steklov–Poincaré–Operatoren zur Lösung des linearen Gleichungssystems (5.26) die Projektion P nach (5.26) verwendet. Das entsprechend modifizierte CG–Verfahren ist in Algorithmus 5.2 angegeben.

Algorithmus 5.2 Paralleles CG–Verfahren mit Projektion

$\underline{\lambda}^0 = QG(G^\top QG)^{-1}\underline{e}$	{Startnäherung unter Nebenbedingung bestimmen}
$\underline{r}^0 = P^\top(F\underline{\lambda}^0 - \underline{d})$	{zusätzliche Projektion}
$\underline{w}^0 = PC_{\text{BETI}}^{-1}\underline{r}^0$	{zusätzliche Projektion}
$\rho_0 = (\underline{w}^0, \underline{r}^0)$	
$\underline{p}^0 = \underline{0}, k = 0$	
while $ \rho^k > \text{error}$ do	
$\beta_k = \rho_k / \rho_{k-1}$	
$\underline{p}^{k+1} = \underline{w}^k + \beta_k \underline{p}^k$	
$\underline{v}^{k+1} = P^\top F \underline{p}^{k+1}$	{zusätzliche Projektion}
$\sigma_{k+1} = (\underline{v}^{k+1}, \underline{p}^{k+1})$	
$\alpha_{k+1} = \rho_k / \sigma_{k+1}$	
$\underline{\lambda}^{k+1} = \underline{\lambda}^k - \alpha_{k+1} \underline{p}^{k+1}$	
$\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k - \alpha_{k+1} \underline{v}^{k+1}$	
$\underline{w}^{k+1} = PC_{\text{BETI}}^{-1}\underline{r}^{k+1}$	{zusätzliche Projektion}
$\rho_{k+1} = (\underline{w}^{k+1}, \underline{r}^{k+1})$	
$k = k + 1$	
end while	
$\underline{\gamma} = (G^\top QG)^{-1}G^\top Q(\underline{d} - F\underline{\lambda})$	{Bestimme Anteil der Starrkörperverschiebungen}
$\underline{u}_i = \tilde{S}_{i,h}^{-1}(\underline{f}_{N,i} + \tilde{B}_i^\top \underline{\lambda}) + \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{R}} \gamma_{k,i} \underline{v}_{k,i}$	{Bestimme lokale Lösungen}

Die grundlegende Funktionsweise mit verteilt gespeicherten und akkumulierten Vektoren für die parallele Realisierung des CG–Verfahrens bleibt dabei erhalten. In den

Kommentaren wird auf die Unterschiede zum in Algorithmus 5.1 beschriebenen parallelen CG-Verfahren ohne Projektionen hingewiesen.

Im folgenden wird die Realisierung einzelner Operationen besprochen. Die Matrix $(G^T G)^{-1}$ ist als wesentlicher Bestandteil der Projektion P entscheidend für die schnelle Realisierung der Projektion. Die Matrix $G^T G$ kann aufgrund der kleinen Dimension $q \cdot \dim \mathcal{R}$ explizit erstellt. Mit Hilfe eines direkten Verfahrens wird dann die Inverse explizit aufgestellt. Dabei ist q die Anzahl der "floating" Teilgebiete.

Zunächst wird die Invertierung von $(G^T G)$ für die lineare Elastostatik gezeigt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die lokalen Starrkörperbewegungen $\underline{v}_{k,i}$ nun zu einer Matrix $R^{(i)} = [\underline{v}_{1,i}, \dots, \underline{v}_{\dim \mathcal{R}, i}]$ zusammengefaßt. Somit kann für die Matrix $G = (\tilde{B}_1 R^{(1)}, \dots, \tilde{B}_q R^{(q)})$ die Matrix $G^T G$ mit Hilfe der Blöcke $(\tilde{B}_i R^{(i)})^T \tilde{B}_j R^{(j)}$ beschrieben werden. Die Einträge eines solchen 6×6 -Blocks sind für $k, \ell = 1, \dots, 3$

$$\left((\tilde{B}_i R^{(i)})^T \tilde{B}_j R^{(j)} \right) [k, \ell] = \begin{cases} +\text{Anzahl der Nebenbedingungen des} & \text{für } k = \ell, i = j, \\ \text{Gebietes } \Omega_i \text{ in der } k\text{-ten Komponente} & \\ -\text{Anzahl der gemeinsamen Nebenbe-} & \text{für } k = \ell, i \neq j, \\ \text{dingungen der Gebiete } \Omega_i \text{ und } \Omega_j \text{ in} & \\ \text{der } k\text{-ten Komponente} & \\ 0 & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Für $k = 1, \dots, 3$ und $\ell = 4, \dots, 6$ lassen sich die Einträge angeben als

$$\left((\tilde{B}_i R^{(i)})^T \tilde{B}_j R^{(j)} \right) [k, \ell] = \begin{cases} + \sum_{s \in \mathcal{N}(j)} v_{\ell, j, s} & \text{für } i = j, \\ - \sum_{s \in \mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)} v_{\ell, j, s} & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

wobei die Summe im Fall $i = j$ über alle Knoten $\mathcal{N}(j)$ des Gebietes Ω_j mit Nebenbedingungen läuft und im Fall $i \neq j$ über die Knoten mit gemeinsamen Nebenbedingungen $\mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)$ der Gebiete Ω_i und Ω_j und die Vektoreinträge $v_{\ell, j, s}$ der k -ten Komponente der lokalen Starrkörperbewegungen $\underline{v}_{\ell, j}$. Aufgrund der Symmetrie sehen die Einträge für $k = 4, \dots, 6$ und $\ell = 1, \dots, 3$ entsprechend aus. Die Einträge für $k, \ell = 4, \dots, 6$ sind gegeben durch

$$\left((\tilde{B}_i R^{(i)})^T \tilde{B}_j R^{(j)} \right) [k, \ell] = \begin{cases} + \sum_{s \in \mathcal{N}(j)} v_{k, j, s} v_{\ell, j, s} & \text{für } i = j, \\ - \sum_{s \in \mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)} v_{k, i, s} v_{\ell, j, s} & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

wobei die Summe im Fall $i = j$ über alle Knoten des Gebietes Ω_j mit Nebenbedingungen läuft und im Fall $i \neq j$ über die gemeinsamen Knoten der Gebiete Ω_i und Ω_j mit Nebenbedingungen in den relevanten Komponenten.

Da die Einträge der Vektoren $\underline{v}_{\ell,j}$ auf den einzelnen Teilgebieten in den Koppelknoten identisch sind, kann die Bestimmung der Einträge der Matrix $G^T G$ blockweise lokal in den einzelnen Prozessen erfolgen. Anschließend kann die Gesamtmatrix aufgrund ihrer relativ geringen Größe mittels Kommunikation für jeden Prozess verfügbar gemacht und dort mittels eines direkten Löser invertiert werden. Dadurch ist für die Anwendung von $(G^T G)^{-1}$ keine Kommunikation mehr notwendig. Natürlich kann auch für die Potentialgleichung die Matrix $G^T QG$ aufgrund der kleinen Dimension q explizit erstellt und invertiert werden. Die Einträge der Matrix $G^T G$ sind

$$(G^T G)[i, j] = \begin{cases} +\text{Anzahl der Nebenbedingungen des Gebietes } \Omega_i & \text{für } i = j, \\ -\text{Anzahl der gemeinsamen Nebenbedingungen} & \text{sonst.} \\ \text{der Gebiete } \Omega_i \text{ und } \Omega_j & \end{cases}$$

Entsprechend gilt für die Matrix $G^T QG$

$$(G^T QG)[i, j] = \begin{cases} + \sum_{s \in \mathcal{N}(i)} Q[\ell, \ell] & \text{für } i = j, \\ - \sum_{s \in \mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)} Q[\ell, \ell] & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die jeweilige Summe über die oben beschriebenen gemeinsamen Nebenbedingungen laufen. Diese Matrixeinträge können am einfachsten parallel bestimmt werden, indem jeder Prozess die zu seinem Teilgebiet gehörende Zeile bestimmt und anschließend die Matrix durch Kommunikation auf alle Rechner verteilt wird. Dann kann lokal die Invertierung und die Anwendung der Inversen erfolgen.

Die Anwendung der Projektionen P und P^T erfordert allerdings Kommunikation. In einem parallelen CG–Verfahren muß P^T von einem verteilten Vektor wieder auf einen verteilten Vektor abbilden. P muß einen akkumulierten Vektor wieder auf einen akkumulierten Vektor abbilden. Wesentlich in ihrer Anwendung sind die Matrizen G und G^T . Die Matrix \tilde{B}_i bildet die lokalen Dirichlet–Daten auf die globalen Nebenbedingungen ab und die Matrix \tilde{B}_i^T umgekehrt. Somit ist $G^T = (R_i^T \tilde{B}_i^T)_{i=1, \dots, q}$ auf einen akkumulierten Vektor anzuwenden. Für die Projektion $P = I - QG(G^T QG)^{-1}G^T$ wird nach der Anwendung von G^T akkumuliert. Nach der Anwendung von $(G^T QG)^{-1}$ ist noch G auszuführen und zu akkumulieren. Für die Anwendung von $P^T = I - G(G^T QG)^{-1}G^T Q$ ist jeweils vor und nach der Anwendung von G^T zu akkumulieren.

5.6 Lösen der Sattelpunktprobleme

Zunächst wird allgemein eine effiziente Behandlung von einfachen und doppelten Sattelpunktproblemen durch eine geschickte Transformation [11] auf ein symmetrisches und positiv definites System behandelt. Anschließend werden die entsprechenden linearen Gleichungssysteme der Gebietszerlegungsmethoden zusammengestellt, und deren effiziente Lösung mit Hilfe der zuvor vorgestellten Transformation analysiert.

5.6.1 Die Behandlung von Sattelpunktproblemen

Die hier gewählte Beschreibung orientiert sich an der Darstellung von [125, 127]. Zunächst wird die blockschiefsymmetrische Matrix eines Sattelpunktproblems

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

betrachtet. Als Voraussetzungen an die Matrizen sind zu verlangen, daß $A \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_1}$ symmetrisch und positiv definit und $D \in \mathbb{R}^{M_2 \times M_2}$ symmetrisch und positiv semi-definit ist. Außerdem muß das Schur-Komplement S

$$S\underline{u}_2 = [D + B^\top A^{-1}B]\underline{u}_2 = \underline{f}_2 - B^\top A^{-1}\underline{f}_1.$$

positiv definit sein. Desweiteren werden zwei symmetrische und positiv definite Vorkonditionierungsmatrizen C_A und C_S für die Matrix A bzw. das Schur-Komplement S mit

$$c_1^A(C_A \underline{x}_1, \underline{x}_1) \leq (A \underline{x}_1, \underline{x}_1) \leq c_2^A(C_A \underline{x}_1, \underline{x}_1)$$

für alle $\underline{x}_1 \in \mathbb{R}^{M_1}$ und

$$c_1^S(C_S \underline{x}_2, \underline{x}_2) \leq (S \underline{x}_2, \underline{x}_2) \leq c_2^S(C_S \underline{x}_2, \underline{x}_2)$$

für alle $\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{M_2}$ benötigt. Unter der Voraussetzung $c_1^A > 1$ an die Spektraläquivalenzungleichung, welche durch eine einfache Skalierung der Vorkonditionierungsmatrix C_A immer erfüllbar ist, ist die Matrix $AC_A^{-1} - I = (A - C_A)C_A^{-1}$ invertierbar. Dann liefert die Transformation nach [11] mit der invertierbaren Matrix

$$T = \begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & 0 \\ -B^\top C_A^{-1} & I \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

ein transformiertes lineares Gleichungssystem mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix M

$$M\underline{x} = \begin{pmatrix} AC_A^{-1}A - A & (I - AC_A^{-1})B \\ B^\top(I - C_A^{-1}A) & D + B^\top C_A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & 0 \\ -B^\top C_A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird nun mittels des CG-Verfahrens gelöst. Als Vorkonditionierungsmatrix empfiehlt sich die Blockdiagonalmatrix

$$C_M = \begin{pmatrix} A - C_A & 0 \\ 0 & C_S \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Satz 5.3 ([11, 144, 145]). *Unter den oben aufgeführten Voraussetzungen an die verschiedenen Matrizen gelten für das vorkonditionierte transformierte System (5.33) die Spektraläquivalenzgleichungen*

$$c_1^M (C_M \underline{x}, \underline{x}) \leq (M \underline{x}, \underline{x}) \leq c_2^M (C_M \underline{x}, \underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^{M_1+M_2}$ mit den Konstanten

$$\begin{aligned} c_1^M &= \frac{1}{2} c_2^A (1 + c_1^S) - \sqrt{\frac{1}{4} (c_2^A (1 + c_1^S))^2 - c_1^S c_2^A}, \\ c_2^M &= \frac{1}{2} c_2^A (1 + c_2^S) + \sqrt{\frac{1}{4} (c_2^A (1 + c_2^S))^2 - c_2^S c_2^A}. \end{aligned}$$

Für eine optimale Konditionszahl $\kappa_2(C_M^{-1}M)$ des transformierten Systems sind Skalierungen der Vorkonditionierer C_A und C_S notwendig. Zur Untersuchung dieser Skalierungen dient die Abschätzung der Konditionszahl

$$\begin{aligned} \kappa_2(C_M^{-1}M) &\leq \frac{c_2^M}{c_1^M} = \frac{c_2^A (1 + c_2^S) + \sqrt{(c_2^A (1 + c_2^S))^2 - 4c_2^S c_2^A}}{c_2^A (1 + c_1^S) - \sqrt{(c_2^A (1 + c_1^S))^2 - 4c_1^S c_2^A}} \\ &= \frac{(1 + c_2^S) + \sqrt{(1 + c_2^S)^2 - 4c_2^S/c_2^A}}{(1 + c_1^S) - \sqrt{(1 + c_1^S)^2 - 4c_1^S/c_2^A}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{c_2^A}{c_1^S} \left[(1 + c_2^S) + \sqrt{(1 + c_2^S)^2 - 4c_2^S/c_2^A} \right] \left[(1 + c_1^S) + \sqrt{(1 + c_1^S)^2 - 4c_1^S/c_2^A} \right] \\ &\leq \frac{c_2^A}{c_1^S} (1 + c_2^S)(1 + c_1^S). \end{aligned}$$

An dieser Abschätzung kann abgelesen werden, daß für eine optimale Konditionszahl c_2^A möglichst klein sein sollte. Gleichzeitig ist aber die Bedingung $c_1^A > 1$ zu erfüllen. Daher wird die Vorkonditionierung C_A so skaliert, daß $c_1^A = 1 + \varepsilon$ für eine kleine Zahl $\varepsilon > 0$ ist. Obige Abschätzung wird minimal für eine Skalierung des Vorkonditionierers C_S , so daß $c_1^S c_2^S = 1$ gilt.

Folgerung 5.4 ([145]). *Werden die Vorkonditionierer C_A und C_S so skaliert, daß*

$$c_1^S c_2^S = 1 \quad \text{und} \quad c_1^A = 1 + \varepsilon \quad \text{für eine kleine Zahl } \varepsilon > 0 \quad (5.35)$$

gelten, so folgt für die Konditionszahl des vorkonditionierten transformierten Systems (5.33) die Abschätzung

$$\kappa_2(C_M^{-1}M) \leq \frac{c_2^M}{c_1^M} \leq (1 + \varepsilon) \frac{c_2^A}{c_1^A} \left(1 + \sqrt{\frac{c_2^S}{c_1^S}} \right)^2. \quad (5.36)$$

Somit läßt sich Konditionszahl des transformierten Systems durch das Produkt der Konditionszahlen der Matrix A und des Schur-Komplements S abschätzen. Eine Beschreibung des CG-Verfahrens mit der oben beschriebenen Transformation wird in Algorithmus 5.3 gegeben.

Algorithmus 5.3 CG–Verfahren mit Bramble–Pasciak–Transformation

Wähle eine Startnäherung \underline{x}^0 .

$$\tilde{\underline{v}}^0 = \begin{pmatrix} A & -B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \underline{x}^0 - \underline{b} \quad \{\text{untransformiertes Anfangsresiduum}\}$$

$$\underline{h}_1^0 = C_A^{-1} \tilde{\underline{v}}_1^0 \quad \{\text{Hilfsvektor}\}$$

$$\underline{r}^0 = T \tilde{\underline{v}}^0 = \begin{pmatrix} A \underline{h}_1^0 - \tilde{\underline{v}}_1^0 \\ \tilde{\underline{v}}_2^0 - B^\top \underline{h}_1^0 \end{pmatrix} \quad \{\text{transformiertes Anfangsresiduum}\}$$

$$\underline{w}^0 = C_M^{-1} \underline{r}^0 = \begin{pmatrix} \underline{h}_1^0 \\ C_S^{-1} \underline{r}_2^0 \end{pmatrix} \quad \{\text{Vorkonditionierung}\}$$

$$\rho_0 = (\underline{w}^0, \underline{r}^0), \underline{p}^0 = \underline{0}, k = 0, \rho_{-1} = 1$$

while $|\rho^n| > \text{error}$ **do**

$$\beta_k = \rho_k / \rho_{k-1}$$

$$\underline{p}^{k+1} = \underline{w}^k + \beta_k \underline{p}^k$$

$$\tilde{\underline{v}}^{k+1} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \underline{p}^{k+1} \quad \{\text{ursprüngliche Matrixmultiplikation}\}$$

$$\underline{h}_1^{k+1} = C_A^{-1} \tilde{\underline{v}}_1^{k+1} \quad \{\text{Hilfsvektor}\}$$

$$\underline{v}^{k+1} = \begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & 0 \\ -B^\top C_A^{-1} & I \end{pmatrix} \tilde{\underline{v}}^{k+1} = \begin{pmatrix} A \underline{h}_1^{k+1} - \tilde{\underline{v}}_1^{k+1} \\ \tilde{\underline{v}}_2^{k+1} - B^\top \underline{h}_1^{k+1} \end{pmatrix} \quad \{\text{Transformation}\}$$

$$\sigma_{k+1} = (\underline{v}^{k+1}, \underline{p}^{k+1})$$

$$\alpha_{k+1} = \rho_k / \sigma_{k+1}$$

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_{k+1} \underline{p}^{k+1}$$

$$\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k - \alpha_{k+1} \underline{v}^{k+1}$$

$$\underline{w}^{k+1} = C_M^{-1} \underline{r}^{k+1} = \begin{pmatrix} \underline{w}_1^k \\ C_S^{-1} \underline{r}_2^{k+1} \end{pmatrix} - \alpha_{k+1} \begin{pmatrix} \underline{h}_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{\text{Vorkonditionierung}\}$$

$$\rho_{k+1} = (\underline{w}^{k+1}, \underline{r}^{k+1})$$

$$k = k + 1$$

end while

Zunächst scheint bei der Anwendung der Vorkonditionierung C_M^{-1} ein Invertieren der Matrix $(A - C_A)^{-1}$ notwendig zu sein. Aufgrund der rekursiven Definition des Residuums $\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k - \alpha_{k+1} M \underline{p}^{k+1}$ im CG-Verfahren nach Algorithmus 5.3 kann bei der Berechnung des vorkonditionierten Residuums $\underline{w}^{k+1} = C_M^{-1} \underline{r}^{k+1}$ die Anwendung von $(A - C_A)^{-1}$ jedoch durch die Verknüpfung mit der Transformation T wegen

$$(A - C_A)^{-1}(AC_A^{-1} - I) = (A - C_A)^{-1}(A - C_A)C_A^{-1} = C_A^{-1}$$

vermieden werden. Zählt man die in einem Iterationschritt auftretenden Anwendungen der einzelnen Matrizen, so zeigt sich, daß die Matrix A des linken oberen Blocks zweimal auftritt. Dies ist der Preis, der bei der angewandten Transformation für die Symmetrie, die positive Definitheit und die Aussagen über die Skalierung der Vorkonditionierungen und die Konditionszahl zu zahlen ist.

Als nächstes wird das doppelte Sattelpunktproblem

$$\begin{pmatrix} A & -B & \\ B^\top & D & -E \\ & E^\top & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{pmatrix}$$

untersucht. Solche doppelten Sattelpunktprobleme wurden beispielsweise in [40] betrachtet. Entsprechend dem Vorgehen für das Sattelpunktproblem (5.31) wird auch hier eine Transformation auf eine symmetrische und positiv definite Gesamtmatrix durchgeführt. Dazu sind für die zusätzlichen Matrizen entsprechende Voraussetzungen zu erfüllen. Die Matrix $F \in \mathbb{R}^{M_3 \times M_3}$ muß symmetrisch und positiv semidefinit sein. Weiter sei das Schur-Komplement

$$S_F = [F + E^\top S^{-1}E]$$

positiv definit und erfülle für alle $\underline{x}_3 \in \mathbb{R}^{M_3}$ die Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^F(C_F \underline{x}_3, \underline{x}_3) \leq (S_F \underline{x}_3, \underline{x}_3) \leq c_2^F(C_F \underline{x}_3, \underline{x}_3).$$

Zuerst wird die Bramble-Pasciak-Transformation mit

$$\begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & & \\ -B^\top C_A^{-1} & I & \\ & & I \end{pmatrix}$$

auf die oberen beiden Blöcke angewandt. Dies führt auf das transformierte System

$$\begin{pmatrix} AC_A^{-1}A - A & (I - AC_A^{-1})B & \\ B^\top(I - C_A^{-1}A) & D + B^\top C_A^{-1}B & -E \\ & E^\top & F \end{pmatrix}.$$

Nun kann die symmetrische und positiv definite Matrix

$$M := \begin{pmatrix} AC_A^{-1}A - A & (I - AC_A^{-1})B \\ B^\top(I - C_A^{-1}A) & D + B^\top C_A^{-1}B \end{pmatrix}$$

mit zugehöriger Vorkonditionierungsmatrix

$$C_M := \begin{pmatrix} (A - C_A) & \\ & C_S \end{pmatrix}$$

wie für das einfache Sattelpunktproblem (5.31) definiert werden. Damit kann für die Matrix

$$\begin{pmatrix} M & -\tilde{E} \\ \tilde{E}^\top & F \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$$

bei geeigneter Skalierung der Vorkonditionierungsmatrix C_M , so daß $c_1^M > 1$ gilt, erneut die Transformation nach [11] durchgeführt werden. Die Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} MC_M^{-1} - I & \\ -\tilde{E}^\top C_M^{-1} & I \end{pmatrix}$$

liefert diesmal die symmetrische und positiv definite Matrix

$$N = \begin{pmatrix} MC_M^{-1}M - M & (I - MC_M^{-1})\tilde{E} \\ \tilde{E}^\top(I - C_M^{-1}M) & F + \tilde{E}^\top C_M^{-1}\tilde{E} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Die Vorkonditionierung dieser Matrix erfolgt mit

$$C_N := \begin{pmatrix} (M - C_M) & 0 \\ 0 & C_F \end{pmatrix}.$$

Die beiden Transformationen sind auch auf die rechte Seite anzuwenden. Die Realisierung der Transformationen im CG-Verfahren erfolgt wie für das einfache Sattelpunktproblem allerdings mit einer rekursiven Realisierung der Gesamttransformation. Entsprechend den Überlegungen zum Algorithmus 5.3 ist die Matrix M zweimal anzuwenden. Aufgrund der rekursiven Definition und Realisierung der Matrixmultiplikationen sind jetzt in einem Iterationsschritt die Matrix A viermal und die Matrizen B , B^\top , D und C_A^{-1} jeweils zweimal anzuwenden. Dafür erhält man eine symmetrische und positiv definite Gesamtmatrix N , für die eine geeignete Skalierung der Vorkonditionierungsmatrizen bekannt ist. Die entsprechende Analyse der Konditionszahlen ist für zweifache und n -fache Sattelpunktprobleme [145] komplizierter.

Satz 5.5 ([145]). *Unter den oben aufgeführten Voraussetzungen an die verschiedenen Matrizen gelten für das vorkonditionierte transformierte System (5.37) die Spektraläquivalenzungleichungen*

$$c_1^N(C_N \underline{x}, \underline{x}) \leq (N \underline{x}, \underline{x}) \leq c_2^N(C_N \underline{x}, \underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^{M_1+M_2+M_3}$ mit der Konstanten

$$c_1^N = \frac{1}{2}c_2^S(1 + c_1^F) - \sqrt{\frac{1}{4}(c_2^S(1 + c_1^F))^2 - c_1^F c_2^S}.$$

Die Konstante c_2^N ist die größte positive Nullstelle eines Polynoms dritten Grades und kann durch

$$c_2^N \leq \frac{1}{2}c_2^M(1 + c_2^F) - \sqrt{\frac{1}{4}(c_2^M(1 + c_2^F))^2 - c_2^F c_2^M}.$$

abgeschätzt werden.

Die Skalierung gestaltet sich ähnlich wie für das einfache Sattelpunktproblem, so daß dessen Skalierung übernommen werden kann. Allerdings müssen zusätzlich die Vorkonditionierungen C_M und C_F skaliert werden.

Folgerung 5.6 ([145]). Werden die Vorkonditionierer C_A und C_S nach (5.35) skaliert, und die Vorkonditionierer C_M und C_F so skaliert, daß

$$c_1^F c_2^F = 1 \quad \text{und} \quad c_1^M = 1 + \varepsilon \quad \text{für eine kleine Zahl } \varepsilon > 0 \quad (5.38)$$

gelten, so folgt für die Konditionszahl des vorkonditionierten transformierten Systems (5.33) die Abschätzung

$$\kappa_2(C_N^{-1}N) \leq (1 + \varepsilon) \frac{c_2^M}{c_1^M} \left(1 + \sqrt{\frac{c_2^F}{c_1^F}} \right)^2. \quad (5.39)$$

Insgesamt gilt also für die Konditionszahl des transformierten doppelten Sattelpunktproblems

$$\kappa_2(C_N^{-1}N) = \mathcal{O} \left(\frac{c_2^A c_2^S c_2^F}{c_1^A c_1^S c_1^F} \right). \quad (5.40)$$

Somit hat die Konditionszahl jedes einzelnen Schur–Komplements Einfluß auf das Gesamtverhalten des Verfahrens. Die Skalierung der einzelnen Vorkonditionierungen ist wichtig für ein stabiles und schnelles Verfahren.

5.6.2 Lineare Gleichungssysteme der Gebietszerlegungsmethoden

Im folgenden werden die verschiedenen, zuvor vorgestellten Formulierungen zur Gebietszerlegung gegenübergestellt und das Lösen der zugehörigen linearen Gleichungssysteme besprochen. Als Ausgangsformulierung dient die primale Dirichlet–Gebietszerlegungsformulierung (5.10)

$$\tilde{S}_h \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \tilde{S}_{i,h} A_i \underline{u} = \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_i + \sum_{i=1}^p A_i^\top \underline{f}_{N,i} \quad (5.41)$$

mit der Vorkonditionierung (5.11). Für die BETI–Methode werden verschiedene Formulierungen betrachtet. Zunächst können das Schur–Komplement–System (5.16)

$$F \underline{\lambda} = \sum_{i=1}^p B_i \tilde{S}_{i,h}^{-1} B_i^\top \underline{\lambda} = - \sum_{i=1}^p B_i \tilde{S}_{i,h}^{-1} (\underline{f}_i + \underline{f}_{N,i}). \quad (5.42)$$

und das Sattelpunktproblem (5.15)

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_{1,h} & & & -B_1^\top \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \tilde{S}_{p,h} & -B_p^\top \\ B_1 & \dots & B_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 + \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_p + \underline{f}_{N,p} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

gelöst werden. Das Sattelpunktproblem hat zwar eine größere Anzahl an Unbekannten, dafür wird aber die Invertierung der lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren $\tilde{S}_{i,h}$ in jedem Iterationsschritt des Schur–Komplement–Systems (5.42) vermieden. Für jede Anwendung der Matrizen der lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren $\tilde{S}_{i,h}$ ist nach der Approximation (1.63) immer noch eine Invertierung der Matrix des lokalen Einfachschichtpotentials $V_{i,h}$ notwendig. Aufgrund der großen Dimensionen kann die Invertierung nicht mit einem direkten Verfahren erfolgen, sondern muß mit einem iterativen Verfahren wie dem CG–Verfahren durchgeführt werden. Wegen der vielen Invertierungen, die durch die äußere Iteration notwendig sind, ist dieses Vorgehen jedoch recht teuer. Dies motiviert die Einführung des lokalen Flusses bzw. der lokalen Spannungen \underline{t}_i durch

$$\underline{t}_i := V_{i,h}^{-1} \left(\frac{1}{2} M_{i,h} + K_{i,h} \right) \underline{u}_i.$$

Dadurch wird das Sattelpunktproblem (5.43) in das doppeltes Sattelpunktproblem

$$\begin{pmatrix} V_{1,h} & & & -\hat{K}_{1,h} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & V_{p,h} & & -\hat{K}_{p,h} & \\ \hat{K}_{1,h}^\top & & & D_{1,h} & & -B_1^\top \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & \hat{K}_{p,h}^\top & & D_{p,h} & -B_p^\top \\ B_1 & \dots & B_p & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}_1 \\ \vdots \\ \underline{t}_p \\ \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \underline{f}_1 + \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_p + \underline{f}_{N,p} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

transformiert. Dabei wurde die abkürzende Schreibweise

$$\hat{K}_{i,h} = \frac{1}{2} M_{i,h} + K_{i,h}$$

verwendet. Für das doppelte Sattelpunktproblem steigt die Anzahl der Unbekannten erneut an. Allerdings sind nun keine inneren Invertierungen mehr notwendig.

Für die Allfloating–Formulierung können wie für die Standard–BETI–Formulierung das Schur–Komplement–System (5.26)

$$P^\top F \underline{\lambda} = P^\top \underline{d} \quad (5.45)$$

und das Sattelpunktproblem (5.19)

$$\begin{pmatrix} \widehat{S}_{1,h} & & & -\widetilde{B}_1^\top \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \widehat{S}_{p,h} & -\widetilde{B}_p^\top \\ \widetilde{B}_1 & \dots & \widetilde{B}_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{N,p} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

benutzt werden. Und wie für die Standard–BETI–Formulierung kann auch hier das doppelte Sattelpunktproblem

$$\begin{pmatrix} V_{1,h} & & & -\widehat{K}_{1,h} & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & V_{p,h} & & & & -\widehat{K}_{p,h} & \\ \widehat{K}_{1,h}^\top & & & \widehat{D}_{1,h} & & & & -\widetilde{B}_1^\top \\ & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & \widehat{K}_{p,h}^\top & & & \widehat{D}_{p,h} & & -\widetilde{B}_p^\top \\ & & & \widetilde{B}_1 & \dots & \widetilde{B}_p & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}_1 \\ \vdots \\ \underline{t}_p \\ \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_p \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \underline{f}_{N,1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{N,p} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

eingeführt werden. Für beide Sattelpunktformulierungen ist die Projektion in das verwendete Iterationsverfahren wie im Algorithmus 5.2 einzubauen. Bei allen drei Formulierungen sind jeweils im Anschluß noch die Anteile der lokalen Starrkörperbewegungen an der Lösung nach (5.27) zu bestimmen. Dies erfolgt allerdings zu vergleichsweise geringen Kosten, da im wesentlichen nur eine Anwendung der Matrix F notwendig ist. Für die beiden Sattelpunktformulierungen sind die Kosten noch geringer, da $F\underline{\lambda}$ durch $\widetilde{B}\underline{u}$ mit der simultan bestimmten Lösung \underline{u} ersetzt werden kann.

Alle hier vorgestellten linearen Gleichungssysteme der verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden werden mit einem parallelen vorkonditioniertes CG–Verfahren gelöst, wie in den Algorithmen 5.1 und 5.2 beschrieben. Für die Sattelpunktprobleme werden die in Abschnitt 5.6.1 beschriebenen Transformationen verwendet, so daß jeweils die transformierte Gesamtmatrix symmetrisch und positiv definit ist. Die Kosten dafür sind Mehrfachanwendungen einzelner Matrizen in jedem Iterationsschritt. Dafür kann aber ein vorkonditioniertes und gut skaliertes CG–Verfahren eingesetzt werden. Für die Vorkonditionierung aller BETI–Methoden wird der skalierte, hypersinguläre BETI–Vorkonditionierer (5.17) eingesetzt. Die lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren werden mittels der lokalen Einfachschichtpotentiale nach (2.19) vorkonditioniert. Für die Matrizen der lokalen Einfachschichtpotentiale der Potentialgleichung können zwei Vorkonditionierer verwendet werden, der BPX–Vorkonditionierer (3.24) und die algebraische Mehrgittervorkonditionierung aus Abschnitt 3.3. In der linearen Elastostatik werden der algebraische Mehrgittervorkonditionierer und die lokalen Einfachschichtpotentiale der Laplace–Gleichung jeweils komponentenweise angewandt. Für die Transformationen der Sattelpunktprobleme werden die notwendigen Skalierungen der Vorkonditionierer entsprechend (5.35) und (5.38) möglichst optimal gewählt.

Sammelt man nun die Abschätzungen der Konditionszahlen der einzelnen Vorkonditionierer und des in Abschnitt 5.6.1 vorgestellten Verfahrens für die Lösung der doppelten Sattelpunktprobleme nach (5.40), so kann man folgendes Ergebnis zur Effizienz der verschiedenen BETI-Varianten formulieren. Für die Standard-BETI-Methode wurde dies in [74] gezeigt.

Satz 5.7. *Es wird vorausgesetzt, daß die Vorkonditionierung der lokalen Einfachschichtpotentiale mit dem Mehrgitterverfahren optimal ist. Verwendet man zur Lösung des doppelten Sattelpunktproblems (5.44) der Standard-BETI-Methode das Bramble-Pasciak-CG-Verfahren nach (5.37) mit einer festen Genauigkeit, dann sind für die Standard-BETI-Methode nicht mehr als $\mathcal{O}((1 + \log(H/h))^2)$ Iterationsschritte und bei Verwendung der Multipolmethode nicht mehr als $\mathcal{O}((H/h)^2(1 + \log(H/h))^4)$ arithmetische Operationen notwendig. Entsprechend sind für das doppelte Sattelpunktproblem (5.47) der Allfloating-BETI-Formulierung nicht mehr als $\mathcal{O}(1 + \log(H/h))$ Iterationsschritte und nicht mehr als $\mathcal{O}((H/h)^2(1 + \log(H/h))^3)$ arithmetische Operationen notwendig.*

Bei diesen Abschätzungen wurde die notwendige Kommunikation in der BETI-Vorkonditionierung und der zugehörigen Projektion nicht berücksichtigt. Diese muß jedoch nur zwischen den benachbarten Teilgebieten effizient realisiert werden. Für die Schur-Komplement-Systeme und einfachen Sattelpunktprobleme ist wegen der inneren Invertierungen das jeweilige asymptotische Verhalten schlechter als für die doppelten Sattelpunktprobleme. Die asymptotischen Abschätzungen für das doppelte Sattelpunktproblem (5.47) die Allfloating-Formulierung sind besser als für die Standard-BETI-Methode, so daß diese zu bevorzugen ist. Somit wird ein fast optimales asymptotische Verhalten erreicht. Dabei ist zu beachten, daß die Konvergenzrate unabhängig von Sprüngen in den Koeffizienten der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichung ist. Allerdings ist der fast inkompressible Fall ausgeschlossen.

6 Beispiele zur BETI-Methode

Hier werden nun die primale Dirichlet-Gebietszerlegungsmethode (5.41), die BETI-Methode und die Allfloating-BETI-Methode anhand einiger numerischer Beispiele miteinander verglichen. Dazu werden die Iterationszahlen und Rechenzeiten ermittelt und erläutert. Für die BETI-Methode werden das Schur-Komplement-System (5.42), das Sattelpunktproblem (5.43) und das doppelte Sattelpunktproblem (5.44) verwendet. Für die Allfloating-Variante werden ganz entsprechend das Schur-Komplement-System (5.45), das Sattelpunktproblem (5.46) und das doppelte Sattelpunktproblem (5.47) verglichen. Dabei werden die im Abschnitt 5.6.2 benannten iterativen Löser und Vorkonditionierungen verwendet.

Als Testgeometrie wird die gleichmäßige Zerlegung des Einheitswürfels in acht Teilwürfel verwendet. Diese acht Teilwürfel sind in der Abbildung 6.1 zur besseren Darstellung etwas auseinander gezogen worden. Diese Gebietszerlegung läßt sich noch recht leicht von Hand erzeugen. Sie ist auch kein ganz einfaches Beispiel mehr, da Kreuzungspunkte und eine große Zahl von Koppelknoten auftreten. Aufgrund der Beschreibung der Teilgebiete mit relativ wenigen Randelementen sind mehrere Verfeinerungsschritte möglich, so daß sich Informationen über das asymptotische Verhalten der verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden gewinnen lassen. Außerdem sind mit acht Prozessoren die notwendigen Hardwareressourcen für die hohe Anzahl an durchgeführten Testrechnungen noch gering.

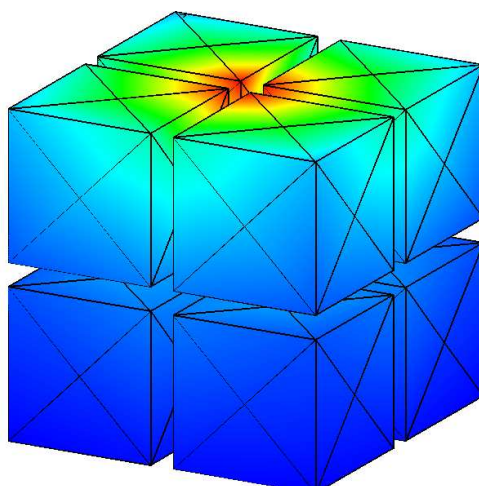


Abbildung 6.1: Gebietszerlegung mit acht Teilgebieten

In der Tabelle 6.1 sind die geometrischen Informationen der Gebietszerlegung und der Teilgebiete aufgeführt. L bezeichnet den jeweiligen Verfeinerungslevel einer gleichmäßigen Verfeinerung. Auf dem größten Level besteht jedes Teilgebiet aus 24 Dreiecken. Entlang der Koppelflächen sind die Knoten und die Dreiecke bis auf die Orientierung für die lokalen Netze identisch. Diese Dreiecksnetze werden durch die gleichmäßige Zerteilung jedes Dreiecks in vier kleinere, ähnliche Dreiecke unter Berücksichtigung der entstehenden globalen Knoten verfeinert. Die Anzahl der lokalen Dreiecke und lokalen Knoten sind für jedes Teilgebiet Ω_i durch N_i und M_i gegeben. N ist die Summe aller Randelemente der Teilgebiete, und M ist die Gesamtzahl der globalen Knoten des Gebietes Ω . Die Gesamtzahl der Koppelknoten M_c ist für den Fall eines Dirichlet-Randwertproblems angegeben. Würde man das Randelementnetz eines Teilgebietes Ω_i mit 98304 Dreiecken gleichmäßig mittels Tetraedern in das Innere des Teilgebietes fortsetzen, dann würde das entsprechende Finite-Elemente-Netz aus 6291456 Tetraedern bestehen. Für die entsprechende Vernetzung des gesamten Gebietes Ω müssten somit mehr als 50 Millionen Tetraeder verwendet werden.

L	N	M	M_c	N_i	M_i
0	192	63	13	24	14
1	768	261	67	96	50
2	3072	1089	319	384	194
3	12288	4473	1399	1536	770
4	49152	18153	5863	6144	3074
5	196608	73161	24007	24576	12290
6	786432	293769	97159	98304	49154

Tabelle 6.1: Geometrische Informationen

In den folgenden Tabellen zu den Testrechnungen für die Gebietszerlegungsmethoden werden einheitliche Bezeichnungen verwendet. L bezeichnet wieder den Verfeinerungslevel der Randelementnetze. Aus Tabelle 6.1 können die zugehörigen Informationen abgelesen werden. t_1 und t_2 sind die in Sekunden gemessenen Rechenzeiten für das Erstellen und das Lösen des linearen Gleichungssystems. It bezeichnet die Anzahl der Iterationsschritte, die nötig sind, um das lineare Gleichungssystem mit einer hohen relativen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-8}$ zu lösen. In der Spalte mit der Bezeichnung "Fehler" ist jeweils der $L_2(\Gamma)$ -Fehler $\|u - u_h\|_{L_2(\Gamma_i)}$ zur vorgegebenen exakten Lösung in einem Teilgebiet angegeben.

Alle Rechnungen wurden auf dem Mozart-Cluster der Abteilung Simulation großer Systeme und des Lehrstuhls für Numerische Mathematik für Höchstleistungsrechner der Universität Stuttgart durchgeführt. Der Linux-Cluster besteht aus 64 Knoten mit jeweils vier GB Hauptspeicher und zwei Intel Xeon Prozessoren mit 3,066 GHz.

6.1 Numerische Tests für die Potentialgleichung

Die Auswirkungen der Vorkonditionierung auf das lineare Gleichungssystem (5.41) sind in Tabelle 6.2 aufgeführt. Dabei wurde ein Dirichlet-Randwertproblem zugrundegelegt. Die Vorkonditionierung erfolgt mit (5.11) für das Gesamtsystem und mit dem BPX-Vorkonditionierer (3.24) für die Invertierung der Matrizen der lokalen Einfachschichtpotentiale. Es werden die Rechenzeiten und die Iterationszahlen für das so vorkonditionierte System mit dem vollständig unvorkonditionierten System verglichen.

L	ohne Vorkonditionierung				mit Vorkonditionierung			
	t_1	t_2	It	D-Fehler	t_1	t_2	It	D-Fehler
0	0	0	4(6)	3.2954e-2	0	0	4(11)	3.2954e-2
1	1	0	12(21)	5.1662e-3	1	0	14(22)	5.1662e-3
2	2	3	17(33)	1.1907e-3	4	3	20(28)	1.1907e-3
3	9	30	25(46)	2.8996e-4	13	19	22(31)	2.8996e-4
4	35	380	36(65)	6.9990e-5	48	150	24(35)	6.9989e-5
5	159	4912	52(87)	1.7508e-5	178	1194	26(38)	1.7506e-5
6	807	40294	74(122)	4.3532e-6	844	6099	29(41)	4.3488e-6

Tabelle 6.2: Primales Schur-Komplement-System (5.41)

Die Zeit t_1 zum Erstellen des linearen Gleichungssystems ist für den vorkonditionierten Fall durch das Erstellens der Vorkonditionierer etwas größer als für den nicht vorkonditionierten. Dafür sind die Iterationszahlen It des vorkonditionierten Systems und damit auch Zeiten t_2 für das Lösen des Systems deutlich geringer. In Klammern ist die durchschnittliche Anzahl an Iterationsschritten für die Invertierung der lokalen Einfachschichtpotentiale angegeben. Bei der reduzierten Rechenzeit bleiben die berechneten Fehler vergleichbar. Diese Rechnungen wurden im Gegensatz zu allen anderen auf einem Rechnerpool mit 3,06 GHz Intel-Prozessoren und 1 GB Hauptspeicher durchgeführt. Das Beispiel zeigt die Notwendigkeit, geeignete Vorkonditionierer zu verwenden. Daher werden im folgenden nur noch die vorkonditionierten Systeme betrachtet.

6.1.1 Dirichlet-Randwertproblem und BPX-Vorkonditionierung

Als erste Vergleichskonfiguration für die verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden dient erneut das Dirichlet-Randwertproblem. Als Vorkonditionierer für die Matrix des Einfachschichtpotentials wird der BPX-Vorkonditionierer (3.24) verwendet. In der Tabelle 6.3 wird die Anzahl der Freiheitsgrade für die verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden und ihre Formulierungen angegeben. Durch den Übergang auf die einfachen

und doppelten Sattelpunktprobleme steigt die Anzahl an Unbekannten durch die zusätzlichen lokalen Freiheitsgrade stark an. Bei der Allfloating-Formulierung wird die Anzahl der Unbekannten um die Nebenbedingungen der Dirichlet-Knoten erhöht. Alle gegenüber dem BETI-Schur-Komplement-System zusätzlichen Freiheitsgrade sind lokal und gehen nicht in die Kommunikation ein.

	Schur-CG	B-Schur	B-SPP	B-SPP2	A-Schur	A-SPP	A-SPP2
L	(5.41)	(5.42)	(5.43)	(5.44)	(5.45)	(5.46)	(5.47)
0	13	19	51	243	99	211	403
1	67	85	237	1005	333	733	1501
2	319	361	1041	4113	1233	2785	5857
3	1399	1489	4377	16665	4761	10921	23209
4	5863	6049	17961	67113	18729	43321	92473
5	24007	24385	72777	269385	74313	172633	369241
6	97159	97921	293001	1079433	296073	689305	1475737

Tabelle 6.3: Anzahl der Freiheitsgrade für die verschiedenen Formulierungen

In der Tabelle 6.4 werden die Ergebnisse der drei linearen Gleichungssysteme (5.42), (5.43) und (5.44) der BETI-Methode mit dem Schur-Komplement-System (5.41) der Dirichlet-Gebietszerlegungsmethode verglichen.

	Schur-CG (5.41)		BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	0	0(0)	1	2(2(4))	1	5(4)	2	36
1	2	14(19)	5	6(6(17))	3	18(18)	2	50
2	4	18(27)	32	11(14(28))	10	28(28)	8	62
3	23	21(32)	248	12(17(33))	72	34(32)	56	78
4	155	22(37)	2113	14(19(36))	546	39(35)	363	89
5	1523	27(40)	20908	15(21(39))	4873	43(38)	2938	101
6	8267	30(43)	123454	16(25(43))	25759	47(42)	15038	116

Tabelle 6.4: Ergebnisse für die BETI-Methode und $\alpha = 1$ für alle Teilgebiete

Auf den Vergleich der Zeiten t_1 zur Erstellung der linearen Gleichungssysteme wird hier wegen der geringen Unterschiede verzichtet. Insbesondere ist für die verschiedenen linearen Gleichungssysteme der BETI-Methode die Berechnung der unterschiedlichen rechten Seite der Lösungsphase und somit t_2 zugeordnet.

Der Vorkonditionierer (5.11) führt für das primale System (5.41) zu deutlich reduzierten Iterationszahlen. In Klammern stehen die durchschnittlichen Iterationszahlen für die innere Invertierung der Matrix des Einfachschichtpotentials. Für das Schur-Komplement-System (5.42) der BETI-Methode sind zwei rekursive Invertierungen notwendig. Deren durchschnittliche Iterationszahlen stehen in Klammern. Alle drei verwendeten Vorkonditionierer, (5.17) für das BETI-System, der Operator entgegengesetzter Ordnung (2.19) für die lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren und der BPX-Vorkonditionierer (3.24) für die lokalen Einfachschichtpotentiale, führen zu dem erwarteten leichten Anstieg der Iterationszahlen. Durch die Invertierung der Steklov-Poincaré-Operatoren statt ihrer Anwendung im Ausgangssystem (5.41) sind die Rechenzeiten sehr hoch.

Eine drastische Verbesserung der Rechenzeiten läßt sich durch die Verwendung der Sattelpunktformulierung (5.43) erzielen. Zwar steigt die Anzahl der Iterationsschritte für das System an, aber die Anzahl an Anwendungen von Randintegraloperatoren reduziert sich durch das Vermeiden der Invertierung der Steklov-Poincaré-Operatoren stark. Durch das Vermeiden der inneren Invertierungen der lokalen Einfachschichtpotentiale im doppelten Sattelpunktproblem (5.44) wird die Rechenzeit nochmals verbessert, wenn auch nicht so stark wie zuvor. Die Iterationszahl steigt deutlich an. Zwar verringert sich die Anzahl der Anwendungen der lokalen Einfachschichtpotentiale, allerdings erhöht sich die Anzahl der Anwendungen der restlichen Randintegraloperatoren. Da deren Anwendungen teurer sind, geht ein Teil der Ersparnisse wieder verloren. Dennoch ist das doppelte Sattelpunktproblem (5.44) die schnellste BETI-Variante, auch wenn sie in diesem Beispiel langsamer ist als die Ausgangsformulierung (5.41).

Interessanter wird der Vergleich für springende Koeffizienten in der Tabelle 6.5. Die Koeffizienten $\alpha_i \in \{1, 10^5\}$ wurde entsprechend dem Schachbrettmuster verteilt.

L	Schur-CG (5.41)		BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	2	8(12)	2	2(2(4))	1	5(4)	1	30
1	2	16(19)	4	6(6(18))	4	17(18)	2	43
2	5	23(27)	29	10(14(27))	10	25(26)	8	58
3	29	28(33)	245	12(16(32))	70	32(30)	51	71
4	226	33(36)	1939	13(19(36))	497	36(34)	328	80
5	2439	44(39)	17762	13(21(39))	4442	40(37)	2593	89
6	15045	55(44)	106341	14(24(43))	24748	45(40)	13667	106

Tabelle 6.5: Ergebnisse der BETI-Methode bei springenden Koeffizienten

Der Vergleich zwischen den verschiedenen linearen Gleichungssystemen der BETI-Methode fällt wie für die einheitlichen Koeffizienten in Tabelle 6.4 aus. Die Iterations-

zahlen sind dank des BETI-Vorkonditionierers (5.17) unabhängig von den Materialparametern, vgl. Satz 5.1. Sie und damit auch die Rechenzeiten sind sogar etwas besser als für den Fall einheitlicher Koeffizienten. Der Vorkonditionierer (5.11) für die Standardmethode (5.41) liefert höhere Iterationszahlen als für einheitliche Koeffizienten, deren Anstieg hält sich aber in Grenzen. Die doppelte Sattelpunktformulierungen (5.44) der BETI-Methode ist hier schneller als die primale Gebietszerlegungsmethode.

Im folgenden wird für einheitliche Materialparameter die Approximationsgüte der verschiedenen Verfahren unter Verwendung der Randdaten einer Fundamentallösung verglichen. Durch die veränderten rechten Seiten ändern sich auch die Iterationszahlen leicht. Die entsprechenden Rechenzeiten und Iterationszahlen sind in Tabelle 6.6 angegeben. Die Analyse entspricht der von Tabelle 6.4.

L	BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	2	2(3(12))	2	9(12)	1	40
1	6	6(11(22))	4	27(21)	3	67
2	33	11(16(29))	11	32(27)	12	84
3	263	12(18(33))	77	36(32)	70	99
4	2221	14(20(36))	572	41(35)	450	111
5	21429	15(23(39))	4947	44(39)	3739	128
6	132892	17(26(43))	26011	48(43)	18875	148

Tabelle 6.6: Ergebnisse der BETI-Methode für Fundamentallösung als Randdaten

Die $L_2(\Gamma_i)$ -Fehler dieser Rechnungen sind in der Tabelle 6.7 aufgelistet.

L	Schur-CG (5.41)	BETI-Schur (5.42)	BETI-SPP (5.43)	BETI-SPP2 (5.44)
0	3.2954e-02	3.2954e-02	3.2954e-02	3.2954e-02
1	5.1662e-03	5.1662e-03	5.1662e-03	5.1662e-03
2	1.1907e-03	1.1907e-03	1.1909e-03	1.1907e-03
3	2.8996e-04	2.8996e-04	2.9012e-04	2.8995e-04
4	6.9990e-05	6.9993e-05	7.0097e-05	6.9954e-05
5	1.7506e-05	1.7510e-05	1.7580e-05	1.7466e-05
6	4.3487e-06	4.3514e-06	4.3894e-06	4.2888e-06

Tabelle 6.7: Berechneter $L_2(\Gamma)$ -Fehler für die BETI-Methode

Es werden wieder alle drei BETI-Varianten mit der primalen Gebietszerlegungsmetho-

de verglichen. Dabei treten nur geringe Unterschiede zwischen den einzelnen Varianten auf. Die größte Abweichung tritt beim doppelten Sattelpunktproblem (5.44) auf. Dabei wird allerdings der kleinste berechnete Fehler angenommen. Bei allen Varianten wird die erwartete Konvergenzrate $\varrho = 2$ in der $L_2(\Gamma)$ -Norm erreicht.

Bei Vorgabe der gleichen Randdaten wird nun die Allfloating-Formulierung getestet. Erneut werden das zugehörige Schur-Komplement-System (5.45), das Sattelpunktproblem (5.46) und das doppelte Sattelpunktproblem (5.47) in Tabelle 6.8 verglichen.

L	Allfl.-Schur (5.45)		Allfl.-SPP (5.46)		Allfl.-SPP2 (5.47)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	5	12(7(12))	5	25(12)	3	49
1	11	13(13(22))	7	28(22)	4	69
2	40	14(15(28))	12	31(28)	12	82
3	319	17(16(33))	66	31(32)	67	91
4	2447	19(17(36))	456	33(36)	417	99
5	22934	22(17(39))	4008	36(39)	3282	109
6	122036	24(17(43))	22518	41(43)	16634	125

Tabelle 6.8: Ergebnisse der Allfloating-Variante für Fundamentallösung als Randdaten

Die Varianten der Allfloating-Formulierung weisen ein ähnliches Laufzeitverhalten wie die Varianten der Standard-BETI-Methode auf. Das doppelte Sattelpunktproblem (5.47) ist erneut die schnellste Variante. Interessant ist der Vergleich der Iterationszahlen mit denen der Standard-BETI-Methode aus Tabelle 6.6. Für das Schur-Komplement-System steigt in der Allfloating-Variante die Anzahl der äußeren Iterationen an. Dies liegt an den vielen zusätzlichen Freiheitsgraden durch die Hinzunahme der Dirichlet-Knoten zu den Nebenbedingungen. Der BETI-Vorkonditionierer (5.17) liefert mit den entsprechenden Modifikationen auch für die Allfloating-Formulierung sehr gute Iterationszahlen. Die bessere Konditionszahl der Vorkonditionierung (2.19) der lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren mit dem Operator entgegengesetzter Ordnung ist an der beschränkten Iterationszahl 17 für das System (5.45) zu beobachten. Dies reduziert die Iterationszahlen für die beiden anderen linearen Gleichungssysteme. Insgesamt führt das verbesserte Vorkonditionierungsverhalten zu kürzeren Lösungszeiten bei allen drei linearen Gleichungssystemen. Insbesondere ist für die Allfloating-Formulierungen das asymptotische Verhalten besser als das der Standard-BETI-Formulierungen.

Wie in der Tabelle 6.9 abzulesen ist, treten bei der Allfloating-Variante etwas stärkere Abweichungen zu den berechneten Fehlern der Standardmethode (5.41) auf. Allerdings liefert die Allfloating-Formulierung meist den kleineren $L_2(\Gamma_i)$ -Fehler. Die Abweichung ist dadurch zu erklären, daß nun im globalen System zusätzlich die Randdaten an den Dirichlet-Knoten approximiert werden.

L	Schur-CG (5.41)	Allfl.-Schur (5.45)	Allfl.-SPP (5.46)	Allfl.-SPP2 (5.47)
0	3.2954e-02	3.2954e-02	3.2954e-02	3.2954e-02
1	5.1662e-03	5.1662e-03	5.1662e-03	5.1662e-03
2	1.1907e-03	1.1922e-03	1.1922e-03	1.1922e-03
3	2.8996e-04	2.8439e-04	2.8439e-04	2.8439e-04
4	6.9990e-05	6.8914e-05	6.8913e-05	6.8911e-05
5	1.7506e-05	1.6996e-05	1.6997e-05	1.6995e-05
6	4.3487e-06	4.2292e-06	4.2295e-06	4.2279e-06

Tabelle 6.9: Berechneter $L_2(\Gamma)$ -Fehler für die Allfloating-Variante

Zum Abschluß werden noch die doppelten Sattelpunktformulierungen (5.44) und (5.47) mit dem Ausgangssystem (5.41) in Tabelle 6.10 verglichen. Die Allfloating-Formulierung hat einen etwas erhöhten Zeitaufwand t_1 für das Erstellen des linearen Gleichungssystems als die beiden anderen Methoden. Diese Zeit fällt aufgrund der größeren Zeiten t_2 für das Lösen kaum ins Gewicht. Die Allfloating-Formulierung hat niedrigere Iterationszahlen als die Standard-BETI-Methode und ist auch schneller. Für den Fall einheitlicher Materialparameter und den Vorkonditionierer (3.24) ist allerdings die Ausgangsformulierung (5.41) am schnellsten.

L	Schur-CG (5.41)			BETI-SPP2 (5.44)			Allfl.-SPP2 (5.47)		
	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.
0	1	0	4(12)	2	1	40	2	3	49
1	2	2	14(22)	1	3	67	3	4	69
2	6	4	20(28)	5	12	84	8	12	82
3	13	24	22(32)	13	70	99	18	67	91
4	48	164	24(36)	49	450	111	64	417	99
5	209	1427	26(39)	208	3739	128	232	3282	109
6	987	7691	29(43)	988	18875	148	1102	16634	125

Tabelle 6.10: Vergleich der BETI-Methode und der Allfloating-Formulierung

Im folgenden wird für alle weiteren Rechnungen auf die Angabe der berechneten $L_2(\Gamma)$ -Fehler verzichtet, da diese Daten keine weiteren Erkenntnisse beinhalten. Die Auswertung der Daten ergab immer eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Fehler zwischen den einzelnen Methoden. Dabei wurde jeweils auch die zu erwartende Konvergenzordnung erzielt.

6.1.2 Dirichlet–Randwertproblem und Mehrgitterverfahren

Nun wird statt des BPX–Vorkonditionierers (3.24) das algebraische Mehrgitterverfahren aus Abschnitt 3.3 zur Vorkonditionierung der lokalen Einfachschichtpotentiale verwendet. Das algebraische Mehrgitterverfahren liefert deutlich verbesserte Konditions- und Iterationszahlen. Erneut wird das Dirichlet–Randwertproblem als Testbeispiel verwendet, um Vergleiche mit dem BPX–Vorkonditionierer (3.24) anstellen zu können.

In der Tabelle 6.11 sind die Ergebnisse des Standardsystems (5.41) und der drei linearen Gleichungssysteme der BETI–Methode für die Randdaten der gleichen Fundamentallösung wie für die Rechnungen zur Tabelle 6.6 aufgeführt.

L	Schur–CG (5.41)		BETI–Schur (5.42)		BETI–SPP (5.43)		BETI–SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	0	4(1)	1	2(3(1))	1	8(1)	1	11
1	1	14(8)	6	6(11(8))	4	27(8)	2	37
2	4	20(10)	36	11(16(10))	15	32(10)	6	40
3	25	22(11)	285	12(18(11))	83	36(10)	38	45
4	167	24(11)	2262	14(20(11))	548	39(10)	243	50
5	1626	26(11)	24663	15(23(11))	5564	43(11)	2036	56
6	9262	29(12)	163637	17(27(12))	30788	47(12)	10130	62

Tabelle 6.11: Ergebnisse der BETI–Methode für Fundamentallösung als Randdaten

In den Iterationszahlen zur Invertierung der lokalen Einfachschichtpotentiale zeigt sich die Güte des algebraischen Mehrgittervorkonditionierers. Allerdings sind dessen Kosten im Vergleich zum extrem günstigen BPX–Vorkonditionierer recht hoch und daher steigen die Lösungszeiten für das Schur–Komplement–System (5.42) und das Sattelpunktproblem (5.43) etwas an. Für die doppelte Sattelpunktformulierung (5.44) reduziert sich die Iterationszahl wegen der stark verbesserten Konditionszahl auf weniger als die Hälfte. Dadurch reduziert sich auch die Anzahl der Anwendungen der Randintegraloperatoren, so daß der Mehraufwand für das Mehrgitterverfahren nicht mehr so stark ins Gewicht fällt und sich die Lösungszeit gegenüber der Verwendung des BPX–Vorkonditionierers fast halbiert. Somit ist für die BETI–Methode die Verwendung einer möglichst guten Vorkonditionierung wie dem algebraischen Mehrgitterverfahren zu empfehlen.

Nachdem die BETI–Methode mit dem algebraischen Mehrgitterverfahren für den Fall von einheitlichen Koeffizienten in Tabelle 6.11 bereits beinahe so schnell war wie die Standardformulierung (5.41), ist der Fall von springenden Koeffizienten von besonderem Interesse. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 6.12 aufgeführt. Dabei wurden dieselben Daten wie für die Rechnungen zu Tabelle 6.5 verwendet.

L	Schur-CG (5.41)		BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	0	0(0)	1	2(2(1))	1	4(1)	1	6
1	2	16(5)	4	6(6(5))	2	17(5)	2	31
2	5	23(10)	32	10(13(10))	9	25(10)	5	32
3	33	28(10)	261	12(16(10))	73	32(10)	34	41
4	231	33(11)	1946	13(18(11))	498	36(10)	223	47
5	2542	41(11)	19984	13(21(11))	5111	40(11)	1833	51
6	15572	55(12)	128255	14(24(12))	28597	44(11)	9631	59

Tabelle 6.12: Ergebnisse der BETI-Methode mit AMG bei springenden Koeffizienten

Gegenüber der Tabelle 6.5 bleibt das Verhalten des BETI-Vorkonditionierers erwartungsgemäß unverändert, und somit sind die Rechenzeiten der BETI-Varianten wieder etwas besser als für einheitliche Koeffizienten. Interessant sind daher die Auswirkungen des algebraischen Mehrgitterverfahrens für das doppelte Sattelpunktproblem (5.44). Aufgrund der verbesserten Konditionszahl und der guten Skalierung der Vorkonditionierer steigt die Iterationszahl beim Übergang vom Sattelpunktproblem (5.43) zum doppelten Sattelpunktproblem nur leicht an. Somit reduziert sich die Rechenzeit mit dem Rückgang auf ein Drittel für den sechsten Verfeinerungslevel deutlich. Die Einsparungen durch das Vermeiden der Invertierung der lokalen Einfachschichtpotentiale wirken sich hier durch den geringen Anstieg der Anwendungen der restlichen Randintegraloperatoren stärker aus. Dadurch ist die doppelte Sattelpunktformulierung der BETI-Methode auf den letzten beiden Leveln deutlich schneller als die primale Gebietszerlegungsmethode (5.41). Hier zeigt sich auch das bessere asymptotische Verhalten nach Satz 5.1.

Schon mit dem BPX-Vorkonditionierer war die Allfloating-Formulierung (5.47) bereits schneller als die BETI-Formulierung (5.44). Da bisher für den Fall mit den aus der Fundamentallösung vorgegebenen Randdaten die primale Gebietszerlegungsmethode (5.41) noch schneller war als die BETI-Methode, wird nun die Allfloating-Formulierung an diesem Beispiel getestet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.13 zu finden.

Betrachtet man die Iterationszahlen für das Schur-Komplement-System (5.45) der Allfloating-Formulierung, so sind die inneren Iterationszahlen konstant oder nahezu konstant. Die Iterationszahl des BETI-Systems steigt über die Level entsprechend Satz 5.1 leicht an. Insgesamt ist das vorhergesagte, "optimale" asymptotische Verhalten zu beobachten. Im Vergleich zur Tabelle 6.8 für den BPX-Vorkonditionierer reduziert sich für das doppelte Sattelpunktproblem (5.47) die Lösungszeit t_2 auf ungefähr die Hälfte. Auch ist wieder der Vorteil des doppelten Sattelpunktproblems gegenüber dem einfachen Sattelpunktproblem (5.46) mit ungefähr einem Drittel der Rechenzeit deutlich.

L	Allfl.–Schur (5.45)		Allfl.–SPP (5.46)		Allfl.–SPP2 (5.47)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	5	12(7(1))	5	25(1)	2	28
1	13	13(13(9))	6	28(9)	3	40
2	44	14(15(10))	12	30(10)	7	40
3	341	17(16(11))	71	31(10)	38	43
4	2383	19(17(11))	446	33(10)	227	46
5	25820	22(17(11))	4593	36(11)	1798	48
6	146872	24(17(12))	26370	41(12)	8693	51

Tabelle 6.13: Ergebnisse der Allfloating–Variante mit AMG

Zum Schluß werden noch die Rechenzeiten bei der Verwendung des algebraischen Mehrgitterverfahrens für die beiden doppelten Sattelpunktformulierungen (5.44) und (5.47) der BETI–Methode und der Allfloating–Formulierung mit denen des Ausgangssystems (5.41) in Tabelle 6.14 verglichen.

L	Schur–CG (5.41)			BETI–SPP2 (5.44)			Allfl.–SPP2 (5.47)		
	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.
0	1	0	4(1)	2	1	11	2	2	28
1	1	1	14(8)	3	2	37	3	3	40
2	5	4	20(10)	4	6	40	8	7	40
3	14	25	22(11)	15	38	45	22	38	43
4	77	167	24(11)	76	243	50	93	227	46
5	333	1626	26(11)	333	2036	56	342	1798	48
6	1443	9262	29(12)	1445	10130	62	1477	8693	51

Tabelle 6.14: Vergleich der BETI–Methode und der Allfloating–Formulierung mit AMG

Hier zeigt sich, daß die Allfloating–Formulierung für das behandelte Dirichlet–Randwertproblem schneller ist als die Standard–BETI–Methode und die primale Dirichlet–Gebietszerlegungsmethode. Bei den Zeiten t_1 für das Erstellen der linearen Gleichungssysteme ist die Allfloating–Formulierung nun beinahe so gut wie die beiden anderen Methoden. Der Mehraufwand durch die höhere Anzahl an lokalen Unbekannten wird durch die verbesserte Konditionszahl schon fast wieder aufgehoben. Für das Lösen der Gleichungssysteme ist das aus der Theorie zu erwartenden “optimale” asymptotische Verhalten zu beobachten.

6.1.3 Gemischtes Randwertproblem und Mehrgitterverfahren

Für die Allfloating-Formulierung ist das Dirichlet-Randwertproblem die ungünstigste Problemstellung, da hier die meisten zusätzlichen Nebenbedingungen im Vergleich zur Standard-BETI-Methode benötigt werden. Somit ist der Vergleich der verschiedenen Verfahren für ein gemischtes Randwertproblem von Interesse. Für den Test wird wieder die Geometrie aus der Abbildung 6.1 verwendet. Als Neumann-Rand werden die Ober- und die Unterseite festgelegt. Der restliche Rand wird mit Dirichlet-Randbedingungen versehen. Als Randdaten werden wieder die Spurdaten der Fundamentallösung aus dem Dirichlet-Randwertproblem verwendet. Die jeweiligen Anzahlen der Freiheitsgrade der verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden sind in der Tabelle 6.15 angegeben. Gegenüber den Werten für das Dirichlet-Randwertproblem aus der Tabelle 6.3 erhöhen sich wegen der zusätzlichen lokalen Freiheitsgrade an den Neumann-Knoten die Anzahlen an Unbekannten für die primale Gebietszerlegungsmethode und die BETI-Varianten. Für die Varianten der Allfloating-Formulierung reduziert sich die Anzahl der Unbekannten hingegen, da nicht so viele Dirichlet-Nebenbedingungen notwendig sind.

	Schur-CG	B-Schur	B-SPP	B-SPP2	A-Schur	A-SPP	A-SPP2
L	(5.41)	(5.42)	(5.43)	(5.44)	(5.45)	(5.46)	(5.47)
0	23	25	73	265	89	201	393
1	117	99	315	1083	283	683	1451
2	545	391	1327	4399	1007	2559	5631
3	2361	1551	5463	17751	3799	9959	22247
4	9833	6175	22183	71335	14759	39351	88503
5	40137	24639	89415	286023	58183	156503	353111
6	162185	98431	359047	1145479	231047	624279	1410711

Tabelle 6.15: Anzahl der Freiheitsgrade für die verschiedenen Formulierungen

Da sich das algebraische Mehrgitterverfahren aus Abschnitt 3.3 als wesentlich besser als die BPX-Vorkonditionierung (3.24) erwiesen hat, wird ab sofort nur noch das Verhalten bei Verwendung des Mehrgitterverfahrens beschrieben. Die numerischen Tests für das Beispiel mit gemischten Randbedingungen haben allerdings ein ähnliches Verhältnis wie im Dirichlet-Fall zwischen den beiden Vorkonditionierungen gezeigt.

In der Tabelle 6.16 werden wieder die drei linearen Gleichungssysteme der BETI-Methode miteinander verglichen. Erneut steigen die Iterationszahlen für das Lösen des BETI-Schur-Komplement-Systems (5.42) und die inneren Invertierungen der lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren den Erwartungen entsprechend logarithmisch an [88]. Die doppelte Sattelpunktformulierung erweist sich aus den selben Gründen wie beim Dirichlet-Randwertproblem als am schnellsten.

L	BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	2	3(6(1))	2	14(1)	1	15
1	11	8(15(9))	6	26(9)	3	37
2	42	11(19(10))	15	33(10)	7	40
3	336	13(21(11))	84	37(10)	38	46
4	2656	15(24(11))	541	39(10)	241	50
5	31167	17(27(11))	5809	44(11)	2089	56
6	203008	19(30(12))	32001	48(12)	10406	62

Tabelle 6.16: Ergebnisse der BETI-Methode für das gemischte Randwertproblem

Im Vergleich mit den Werten aus der Tabelle 6.11 des Dirichlet-Randwertproblems steigen die Iterationszahlen und damit die Rechenzeiten t_2 für das Schur-Komplement-System etwas an. Dies wirkt sich aber nicht auf die Iterationszahlen der beiden Sattelpunktprobleme aus. Deren Lösungszeiten steigen nur ganz leicht an, da die lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren nun auf einem größeren Teil des Randes als beim Dirichlet-Randwertproblem definiert sind.

L	Allfl.-Schur (5.45)		Allfl.-SPP (5.46)		Allfl.-SPP2 (5.47)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	6	13(7(1))	4	27(1)	1	29
1	11	13(14(9))	6	28(9)	2	40
2	50	15(16(10))	14	30(10)	7	41
3	368	17(17(11))	71	31(10)	38	43
4	2827	19(17(11))	484	34(10)	234	46
5	28077	22(18(11))	4839	37(11)	1800	48
6	157650	24(18(12))	26999	41(12)	9246	54

Tabelle 6.17: Ergebnisse der Allfloating-Variante des gemischten Randwertproblems

Nun werden die Testrechnungen der Allfloating-Formulierung für das gemischte Randwertproblem in Tabelle 6.17 ausgewertet. Die Iterationszahlen für das Schur-Komplementsystem (5.45) sind wieder beschränkt oder steigen logarithmisch an. Die Formulierung (5.47) als doppeltes Sattelpunktproblem erweist sich wieder als die effizienteste. Die Iterationszahlen und Rechenzeiten entsprechen für alle drei linearen Gleichungssysteme im wesentlichen denen des Dirichlet-Randwertproblem aus Tabelle 6.13.

Im Vergleich der drei Methoden in der Tabelle 6.18 zeigt sich, daß die primale Gebietszerlegungsmethode (5.41) aufgrund der höheren Anzahl an Unbekannten deutlich höhere Iterationszahlen und Rechenzeiten benötigt als für das Dirichlet-Randwertproblem in Tabelle 6.14. Dadurch sind nun die beiden BETI-Formulierungen deutlich schneller. Die Allfloating-Formulierung (5.47) ist als schnellere der beiden fast doppelt so schnell wie die primale Gebietszerlegungsmethode. Außerdem läßt sich auch für das gemischte Randwertproblem das "optimale" asymptotische Verhalten beobachten.

L	Schur-CG (5.41)			BETI-SPP2 (5.44)			Allfl.-SPP2 (5.47)		
	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.
0	3	1	9(1)	2	1	15	2	1	29
1	3	4	29(9)	3	3	37	3	2	40
2	6	9	38(10)	7	7	40	8	7	41
3	16	48	41(11)	17	38	46	21	38	43
4	83	303	43(11)	83	241	50	93	234	46
5	354	3007	47(11)	357	2089	56	341	1800	48
6	1543	17289	53(12)	1557	10406	62	1483	9246	54

Tabelle 6.18: Vergleich der Methoden für das gemischte Problem

6.2 Numerische Tests für die lineare Elastostatik

Nun werden die BETI-Methode und die Allfloating-Formulierung an einem Dirichlet-Randwertproblem und einem gemischtem Randwertproblem der linearen Elastostatik getestet. Zur Vorkonditionierung der lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren werden die Einfachschichtpotentiale der Laplace-Gleichung mit linearen Basisfunktionen gemäß (2.19) als Operator entgegengesetzter Ordnung komponentenweise verwendet. Für die lokalen Einfachschichtpotentiale wird die algebraische Mehrgittervorkonditionierung der Laplace-Gleichung aus Abschnitt 3.3 komponentenweise eingesetzt. Dies verursacht keinen zusätzlichen Implementierungsaufwand, ist in der Anwendung günstiger und liefert sehr gute Ergebnisse. Als Testgeometrie wird wieder die Zerlegung des Einheitswürfels in acht Teilgebiet entsprechend Abbildung 6.1 verwendet. Als Randdaten werden die Spuren einer Fundamentallösung der linearen Elastostatik mit einer Singularität außerhalb des Gebietes verwendet. Die dadurch berechenbaren Approximationsfehler der verschiedenen Methoden stimmen wie bei der Potentialgleichung sehr gut überein, und die optimale asymptotische Konvergenzordnung wird erreicht. Daher wird im folgenden wieder auf die Angabe der Fehler verzichtet.

6.2.1 Dirichlet–Randwertproblem der linearen Elastostatik

Zunächst wird mit einem Dirichlet–Randwertproblem wieder der für die Allfloating–Formulierung ungünstigste Fall untersucht. Das Dirichlet–Randwertproblem ist außerdem für die lineare Elastostatik eher ungewöhnlich. In Tabelle 6.19 sind die Anzahlen der Freiheitsgrade der verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden angegeben. Das Verhältnis zwischen den einzelnen Varianten entspricht dem für die Potentialgleichung. Die Unterschiede zur Potentialgleichung ergeben sich durch die drei Komponenten für die lineare Elastostatik.

	Schur–CG	B–Schur	B–SPP	B–SPP2	A–Schur	A–SPP	A–SPP2
L	(5.41)	(5.42)	(5.43)	(5.44)	(5.45)	(5.46)	(5.47)
0	39	57	153	729	297	633	1209
1	201	255	711	3015	999	2199	4503
2	957	1083	3123	12339	3699	8355	17571
3	4197	4467	13131	49995	14283	32763	69627
4	17589	18147	53883	201339	56187	129963	277419
5	72021	73155	218331	808155	222939	517899	1107723

Tabelle 6.19: Anzahl der Freiheitsgrade für die verschiedenen Formulierungen

In der Tabelle 6.20 werden die Rechenzeiten der verschiedenen linearen Gleichungssysteme der BETI–Methode miteinander verglichen.

L	BETI–Schur (5.42)		BETI–SPP (5.42)		BETI–SPP2 (5.42)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	8	11(8(11))	5	31(12)	3	45
1	75	14(21(15))	22	51(15)	10	65
2	841	18(31(16))	169	62(16)	66	73
3	6376	22(39(17))	979	71(16)	346	81
4	56039	25(45(16))	7143	77(16)	2483	88
5			62300	85(17)	18157	99

Tabelle 6.20: Ergebnisse der BETI–Methode für das Dirichlet–Randwertproblem

Im Vergleich zum Laplace–Problem in Tabelle 6.11 steigen die Iterationszahlen des linearen Gleichungssystems (5.42) der primalen Gebietszerlegungsmethode und die inneren Invertierungen der lokalen Einfachschichtpotentiale nur leicht an. Dabei ist zu be-

achten, daß sich beim gleichen Verfeinerungslevel die Anzahl der Unbekannten gegenüber der Laplace-Gleichung verdreifacht haben. Die komponentenweise Vorkonditionierung (2.19) der lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren im BETI-System funktioniert entsprechend Satz 2.5, aber leider nicht ganz so gut wie die beiden anderen Vorkonditionierungen. Durch die höhere Anzahl an Unbekannten und die notwendige Anwendung von neun Matrixblöcken statt einem Block für die Laplace-Gleichung wurden die Rechnungen für das Schur-Komplement-Systems (5.42) der BETI-Methode nur bis zum vierten Verfeinerungslevel durchgeführt, da der Nutzen in keinem Verhältnis zum Aufwand steht. Durch den Übergang auf das Sattelpunktproblem (5.43) und das doppelte Sattelpunktproblem (5.44) wird der Rechenaufwand jeweils deutlich reduziert. Dabei sind die Iterationszahlen aufgrund der höheren Anzahl an Unbekannten und des vergleichsweise weniger effizienten Vorkonditionierers (2.19) höher als für die Laplace-Gleichung.

L	Allfl.-Schur (5.45)		Allfl.-SPP (5.46)		Allfl.-SPP2 (5.47)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	18	17(15(11))	8	54(11)	6	64
1	132	19(27(15))	35	77(15)	15	86
2	1238	23(33(16))	218	79(16)	85	89
3	8296	29(36(17))	1012	73(16)	359	82
4	69498	34(40(16))	8188	89(16)	2921	102
5			71541	97(17)	21667	116

Tabelle 6.21: Ergebnisse der Allfloating-Variante des Dirichlet-Randwertproblems

Nun werden in der Tabelle 6.21 die Werte der Gleichungssysteme der Allfloating-Formulierung verglichen. Die Iterationszahlen des Schur-Komplement-Systems (5.45) steigen aufgrund der höheren Anzahl an Unbekannten im Vergleich zur BETI-Methode an. Allerdings reduzieren sich die Iterationszahlen für die Invertierung der lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren nicht so stark wie im Fall der Potentialgleichung. Der asymptotische Bereich ist wegen der relativ geringen Anzahl an Randelementen noch nicht erreicht. Die Iterationszahlen sind relativ hoch, da die lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren für die Allfloating-Formulierung nun auf ungefähr doppelt so vielen Unbekannten wie für die Standard-BETI-Formulierung operieren. Insgesamt steigen die Rechenzeiten im Vergleich zur BETI-Methode etwas an. Die Verwendung des Einfachschichtpotentials der linearen Elastostatik als Vorkonditionierung der lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren könnte hier zu einer deutlichen Verbesserung führen. Erneut führt die Verwendung der Sattelpunktformulierung (5.43) bzw. der doppelten Sattelpunktformulierung (5.44) zu einer deutlichen Verringerung der Rechenzeiten.

Zum Schluß werden wieder die doppelten Sattelpunktprobleme der BETI-Methode und der Allfloating-Formulierung mit der primalen Gebietszerlegungsmethode (5.41)

in Tabelle 6.22 verglichen. Die Iterationszahlen und Rechenzeiten der Allfloating-Formulierung sind etwas schlechter als die der Standard-BETI-Methode wegen der noch nicht optimalen Vorkonditionierung der Steklov-Poincaré-Operatoren. Die primale Gebietszerlegungsmethode (5.41) erweist sich für das Dirichlet-Randwertproblem als am schnellsten. Überraschend ist dabei, daß die Iterationszahlen des gekoppelten Steklov-Poincaré-Systems (5.41) geringerer sind als für die Invertierung der einzelnen Steklov-Poincaré-Operatoren. Dies kann aber bei einer etwas veränderten Problemstellung wieder völlig anders sein. Auf jeden Fall erklärt es hier die kürzere Rechenzeit.

L	Schur-CG (5.41)			BETI-SPP2 (5.44)			Allfl.-SPP2 (5.47)		
	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.
0	4	1	10(12)	2	3	45	2	6	64
1	5	5	21(15)	4	10	65	4	15	86
2	11	33	25(16)	10	66	73	12	85	89
3	26	191	28(16)	27	346	81	26	359	82
4	181	1348	30(16)	180	2483	88	157	2921	102
5	1333	12152	34(17)	1326	18157	99	1044	21667	116

Tabelle 6.22: Vergleich der Methoden für das Dirichlet-Randwertproblem

6.2.2 Gemischtes Randwertproblem der linearen Elastostatik

In der linearen Elastostatik sind meist auf einem großen Teil des Randes natürliche Randbedingungen, also Neumann-Randbedingungen, vorgegeben. Es wird deshalb ein gemischtes Randwertproblem für den Würfel aus Abbildung 6.1 betrachtet. Erneut werden die Spuren der Fundamentallösung als Randdaten vorgegeben. Als Dirichlet-Rand werden die obere und die untere Seite des Würfels gewählt. Der Rest des Randes ist der Neumann-Rand. Da diese Verteilung der Randbedingungen nicht mit der des gemischten Randwertproblems der Potentialgleichung übereinstimmt, gibt es keinen direkten Zusammenhang der Zahlen für die Freiheitsgrade der einzelnen Gebietszerlegungsmethoden in der Tabelle 6.23 mit denen der Potentialgleichung aus der Tabelle 6.23. Das System (5.41) der primalen Gebietszerlegungsmethode hat durch die lokalen Unbekannten an den Neumann-Knoten mehr Unbekannte als die Schur-Komplement-Systeme der BETI-Methode und der Allfloating-Formulierung. Die Allfloating-Formulierung hat wieder weniger Freiheitsgrade als für das Dirichlet-Randwertproblem, siehe Tabelle 6.19.

Zunächst werden wieder die drei Gleichungssysteme der BETI-Methode in der Tabelle 6.24 verglichen. Erneut ist das doppelte Sattelpunktproblem (5.44) die schnellste Alternative. Für alle drei Varianten sind die Iterationszahlen und Rechenzeiten deutlich

	Schur-CG	B-Schur	B-SPP	B-SPP2	A-Schur	A-SPP	A-SPP2
L	(5.41)	(5.42)	(5.43)	(5.44)	(5.45)	(5.46)	(5.47)
0	111	105	321	897	225	561	1137
1	537	351	1239	3543	663	1863	4167
2	2397	1275	4947	14163	2259	6915	16131
3	10149	4851	19851	56715	8331	26811	63675
4	41781	18915	79611	227067	31995	105771	253227
5	169557	74691	318939	908763	125403	420363	1010187

Tabelle 6.23: Anzahl der Freiheitsgrade für die verschiedenen Formulierungen

höher als für das Dirichlet-Beispiel in Tabelle 6.20. Dies ist mit der deutlich höheren Anzahl an Unbekannten für die Lagrange-Multiplikatoren und die Verschiebungen zu begründen.

L	BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	20	15(21(12))	11	63(11)	4	77
1	176	22(36(15))	38	76(15)	17	97
2	1916	29(44(16))	240	86(16)	97	106
3	12643	34(51(17))	1228	90(16)	496	116
4	101357	38(56(16))	8056	87(16)	3699	131
5			72276	99(17)	27531	150

Tabelle 6.24: Ergebnisse der BETI-Methode für das gemischte Randwertproblem

In der Tabelle 6.25 sind die Ergebnisse für die Allfloating-Formulierung und das gemischte Randwertproblem der linearen Elastostatik aufgelistet. Im Vergleich zu den Daten des Dirichlet-Problems aus Tabelle 6.21 bleiben die Iterationszahlen konstant oder nehmen sogar ein wenig ab. Dies läßt sich im Vergleich zur Standardformulierung der BETI-Methode dadurch begründen, daß die Anzahl der Lagrange-Parameter durch den kleineren Dirichlet-Rand zurückgeht, während für die Standardformulierung diese Anzahl zunimmt. Hier ist der Geschwindigkeitsvorteil des doppelte Sattelpunktproblems (5.47) mit einem Viertel der Rechenzeit des Sattelpunktproblems (5.46) am größten. Das Beispiel deutet in Verbindung mit dem Dirichlet-Randwertproblem an, daß bei der Allfloating-Formulierung im Gegensatz zu den anderen Methoden die Verteilung der Randdaten kaum einen Einfluß auf die Iterationszahlen und Rechenzeit hat.

L	Allfl.–Schur (5.45)		Allfl.–SPP (5.46)		Allfl.–SPP2 (5.47)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	22	18(17(11))	10	53(11)	4	63
1	145	19(30(15))	34	70(15)	13	81
2	1291	23(35(16))	191	69(16)	76	80
3	8383	28(39(17))	984	72(16)	358	83
4	70985	33(42(16))	7544	81(16)	2673	93
5			64093	87(17)	18935	102

Tabelle 6.25: Ergebnisse der BETI-Methode für das gemischte Randwertproblem

Deshalb schlägt die Allfloating-Formulierung die beiden anderen Methoden beim Vergleich für das gemischte Randwertproblem in Tabelle 6.26 deutlich. In den früheren Fällen gelang dies erst für die höheren Verfeinerungslevel aufgrund der besseren Asymptotik. Hier ist die Allfloating-Formulierung jedoch schon auf den frühen Leveln gleich schnell oder meistens sogar schneller. Bei früheren Beispielen hatte sie etwas größere Rechenzeiten t_1 für das Erstellen des linearen Gleichungssystems. Für das gemischte Beispiel ist nun auch hier die Allfloating-Formulierung am schnellsten.

L	Schur-CG (5.41)			BETI-SPP2 (5.44)			Allfl.–SPP2 (5.47)		
	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.
0	2	3	25(12)	2	4	77	3	4	63
1	4	14	60(15)	5	17	97	6	13	81
2	11	99	74(16)	11	97	106	12	76	80
3	30	575	85(16)	29	496	116	26	358	83
4	193	4128	92(16)	193	3699	131	157	2673	93
5	1353	37146	101(17)	1360	27531	150	1045	18935	102

Tabelle 6.26: Vergleich der Methoden für das gemischte Randwertproblem

6.2.3 Ein Beispiel mit springenden Koeffizienten

Zum Abschluß wird noch ein Beispiel für springende Koeffizienten in der linearen Elastostatik untersucht. Die Gebietszerlegung in der Abbildung 6.2 beschreibt ein Stück Stahl durch zwei Teilgebiete, das von Beton umgeben ist. Insgesamt wurden 18 Teilgebiete verwendet. Jedes Teilgebiet wird wieder durch einen Würfel wie in den vorherigen

Beispielen beschrieben. Die Unterseite wird festgehalten, während an der Oberseite eine Verschiebung in allen drei Komponenten vorgegeben wird. Der restliche Rand besitzt verschwindende Neumann-Daten. Diese Randdatenverteilung wurde gewählt, damit das Randwertproblem auch mit der Standard-BETI-Formulierung ohne Projektion gelöst werden kann.

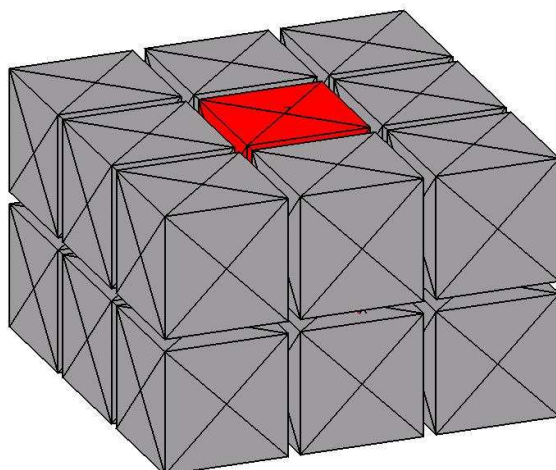


Abbildung 6.2: Gebietszerlegung für Stahlstange in Beton

Die Zahlen der Freiheitsgrade der verschiedenen Gebietszerlegungsmethoden sind in der Tabelle 6.27 aufgelistet.

	Schur-CG	B-Schur	B-SPP	B-SPP2	A-Schur	A-SPP	A-SPP2
L	(5.41)	(5.42)	(5.43)	(5.44)	(5.45)	(5.46)	(5.47)
0	219	267	753	2049	537	1293	2589
1	1071	927	2925	8109	1629	4329	9513
2	4827	3435	11697	32433	5649	16125	36861
3	20547	13203	46953	129897	21033	62613	145557
4	84819	51747	188313	520089	81177	247173	578949
5	344691	204867	754425	2081529	318969	982629	2309733

Tabelle 6.27: Anzahl der Freiheitsgrade für die verschiedenen Formulierungen

Bei der globalen Verfeinerung wird wieder jeder Würfel auf bis zu 24576 Randelemente verfeinert. Die gleichmäßige Fortsetzung ins Gebiet erzeugt ein Finite-Elemente-Netz mit mehr als 14 Millionen Tetraedern für die lineare Elastostatik. Wegen der vielen Freiheitsgrade durch die Neumann-Knoten hat die primale Gebietszerlegung (5.41)

mehr Freiheitsgrade als die beiden Schur-Komplement-Systeme (5.42) und (5.45) der BETI-Methoden. Die Allfloating-Formulierung besitzt wieder zusätzliche Freiheitsgrade durch die Nebenbedingungen an den Dirichlet-Knoten.

Bei den Ergebnissen für die Standard-BETI-Methode in der Tabelle 6.28 zeigen die Vorkonditionierer wieder das gleiche Verhalten wie bei den vorherigen Beispielen. Die BETI-Vorkonditionierung kommt auch in der linearen Elastostatik sehr gut mit den springenden Koeffizienten zurecht. Das doppelte Sattelpunktproblem erweist sich wieder als die schnellste Variante.

L	BETI-Schur (5.42)		BETI-SPP (5.43)		BETI-SPP2 (5.44)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	31	19(21(10))	12	67(10)	7	78
1	217	28(33(14))	38	78(14)	19	100
2	2129	35(44(14))	256	91(14)	112	114
3	14149	42(51(14))	1410	98(14)	562	129
4	116404	47(54(14))	10605	111(14)	4352	153
5			89455	125(16)	31645	172

Tabelle 6.28: Ergebnisse der BETI-Methode für springende Koeffizienten

In der Tabelle 6.29 sind die Ergebnisse der Allfloating-Formulierung angegeben. Erneut sind die Iterationszahlen für das Lösen des globalen Problems und die Invertierung der Steklov-Poincaré-Operatoren niedriger als für die Standard-BETI-Methode. Dies führt für alle drei linearen Gleichungssysteme zu geringeren Rechenzeiten.

L	Allfl.-Schur (5.45)		Allfl.-SPP (5.46)		Allfl.-SPP2 (5.47)	
	t_2	It.	t_2	It.	t_2	It.
0	39	22(17(10))	11	51(10)	8	65
1	170	24(27(14))	35	71(14)	19	82
2	1437	27(33(14))	208	72(14)	115	85
3	9005	32(36(14))	1152	81(14)	476	95
4	77111	38(38(15))	9029	93(14)	3119	105
5			76090	104(16)	23008	120

Tabelle 6.29: Ergebnisse der Allfloating-Formulierung für springende Koeffizienten

Zum Abschluß werden wieder die doppelten Sattelpunktprobleme (5.44) und (5.47) der beiden BETI-Varianten und die primale Gebietszerlegungsmethode (5.41) verglichen. Dabei erweist sich die Standard-BETI-Methode als fast doppelt so schnell wie

die primale Gebietszerlegungsmethode. Die Allfloating ist sogar fast dreimal so schnell. Dabei zeigt sich das bessere asymptotische Verhalten der BETI-Methode und insbesondere das der Allfloating-Formulierung.

L	Schur-CG (5.41)			BETI-SPP2 (5.44)			Allfl.-SPP2 (5.47)		
	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.	t_1	t_2	It.
0	5	7	53(10)	5	7	78	4	8	65
1	7	25	110(14)	7	19	100	7	19	82
2	13	181	130(14)	15	112	114	15	115	85
3	30	986	148(14)	30	562	129	27	476	95
4	191	6902	154(14)	189	4352	153	159	3119	105
5	1332	59264	166(16)	1334	31645	172	1060	23008	120

Tabelle 6.30: Vergleich der Methoden für springende Koeffizienten

6.3 Abschließende Bemerkungen

Die Schwerpunkte dieser Arbeit lagen in der Entwicklung von effizienten Gebietszerlegungsmethoden und der Bereitstellung schneller Methoden zur Lösung der lokalen Teilprobleme. Dazu wurde zunächst zusätzlich zu der bereits vorhandenen schnellen Multipolrandelementmethode für die Laplace-Gleichung eine Multipolmethode für die lineare Elastostatik entwickelt. Diese baut durch die Verwendung partieller Integrationsformeln im wesentlichen auf den vorhandenen Routinen aus der Laplace-Gleichung auf. Dabei konnte auch für die lineare Elastostatik durch eine Konsistenzanalyse der Einsatz der Multipolmethode theoretisch abgesichert werden. Desweiteren wurden mit dem algebraischen Mehrgitterverfahren und der Vorkonditionierungstechnik mit Randintegraloperatoren entgegengesetzter Ordnung effiziente Vorkonditionierungstechniken sowohl für die Laplace-Gleichung als auch für die lineare Elastostatik analysiert und eingesetzt. Auch wurde mit der vorgestellten Stabilisierung die effiziente Invertierung des auf dem kompletten Rand definierten hypersingulären Operators und damit des Steklov-Poincaré-Operators sichergestellt. Damit stehen geeignete schnelle Lösungsverfahren für den Einsatz in den Gebietszerlegungsmethoden zur Verfügung.

Als Gebietszerlegungsmethode wurde vor allem die BETI-Methode eingesetzt. Hierbei wurden zur effizienten Lösung dieser Gebietszerlegungsmethode verschiedene Formulierungen in linearen Gleichungssystemen betrachtet. Diese linearen Gleichungssysteme wurden mit geeigneten iterativen Verfahren gelöst.

Die numerischen Experimente haben gezeigt, daß bei Verwendung eines guten Vorkonditionierers für die lokalen Einfachschichtpotentiale, wie der Mehrgittervorkonditionierung, die BETI-Methode (5.44) meist schneller ist als die primale Gebietszerle-

gungsmethode (5.41). Eine Ausnahme bildet hier nur das eher akademische Beispiel des Dirichlet–Randwertproblems der linearen Elastostatik. Hier ist die primale Gebietszerlegungsmethode am schnellsten, da weniger Iterationsschritte für die Invertierung des globalen Problems benötigt werden als für die Invertierung des lokalen Steklov–Poincaré–Operators. Insbesondere bei gemischten Randwertproblemen ist die BETI–Methode schneller.

Die Beispiele mit springenden Materialparametern haben gezeigt, daß die Vorkonditionierung der BETI–Methode entsprechend den theoretischen Ergebnissen unabhängig von der Verteilung und der Wahl der Materialparameter sehr gute Iterationszahlen liefert. Hier zeigt die BETI–Methode mit der Unabhängigkeit der Konditionszahl von den Materialparametern nach Satz 5.1 ihre Stärke gegenüber der primalen Gebietszerlegungsmethode.

Insbesondere in der linearen Elastostatik kann die Behandlung von Teilgebieten ohne ausreichende Dirichlet–Randbedingungen für die BETI–Methoden aufgrund der möglicherweise variierenden Zahl an auftretenden Starrkörperbewegungen kompliziert werden. Die eingeführte Allfloating–Formulierung der BETI–Methode vereinheitlicht die Behandlung der einzelnen Teilgebiete der Gebietszerlegung. Dadurch vereinfacht sich die Realisierung der BETI–Methode insbesondere für die lineare Elastostatik und erscheint auch einfacher realisierbar als die Ideen der FETI–DP–Methoden. Außerdem ermöglicht die Allfloating–Formulierung den Einsatz optimaler Vorkonditionierer für die lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren. Dies hat ein verbessertes asymptotisches Verhalten der Allfloating–Formulierung nach Satz 5.7 zur Folge.

In den numerischen Beispielen ist das bessere asymptotische Laufzeitverhalten der Allfloating–Formulierung gegenüber der Standard–BETI–Formulierung zu beobachten. Somit ist die Allfloating–Formulierung zumindest für große Dimensionen meist die schnellste der getesteten Gebietszerlegungsmethoden.

Für die BETI–Gebietszerlegungsmethode und die lineare Elastostatik wurde der fast inkompressible Fall bisher nicht untersucht. Dafür kann bei der Vorkonditionierung (2.19) der lokalen Steklov–Poincaré–Operatoren nicht mehr das Einfachschichtpotential der Laplace–Gleichung eingesetzt werden. Vielmehr sind die Techniken aus [123] zu verwenden, um die Robustheit der Randelementmethode zu gewährleisten. Ungeklärt ist für diesen Fall bisher jedoch das Verhalten der Vorkonditionierung für die BETI–Methode.

Nachdem bisher akademische Beispiele untersucht wurden, wäre einer der nächsten Schritte die Anwendung der Methoden auf komplexe Strukturen. Dabei ist auch die geeignete automatische Konstruktion der Gebietszerlegung von Interesse. Die BETI–Methoden sollten allerdings problemlos funktionieren. Die Kopplung mit Finiten Element Methoden wurde in dieser Arbeit nicht verfolgt. Sie läßt sich aber ohne Probleme durchführen. Interessant wäre auch die Verwendung der BETI–Methoden für gekoppelte Problemstellungen, die auf verschiedenen physikalischen partiellen Differentialgleichungen beruhen, wie sie beispielsweise in den Teilprojekten B4 und B5 des SFB 404 “Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik” mit der Fluid–Struktur–Interaktion und der Struktur–Akustik–Kopplung betrachtet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics, 65. A Series of Monographs and Textbooks. New York-San Francisco-London: Academic Press, 1975.
- [2] V. I. Agoshkov and V. I. Lebedev. Poincaré-Steklov operators and methods for separation of a domain in variational problems. *Vychisl. Protsessy Sist.*, 2:173–227, 1985.
- [3] A. Agouzal and J.-M. Thomas. Une méthode d'éléments finis hybrides en décomposition de domaines. (A hybrid finite element domain decomposition method). *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 29(6):749–764, 1995.
- [4] H. Andrä. Persönliche Mitteilung, 2003.
- [5] I. Babuška and A. K. Aziz. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, pages 1–359. Academic Press, New York, 1972.
- [6] M. Bebendorf. *Effiziente numerische Lösung von Randintegralgleichungen unter Verwendung von Niedrigrang-Matrizen*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2001.
- [7] M. Bebendorf. Hierarchical LU decomposition-based preconditioners for BEM. *Computing*, 74(3):225–247, 2005.
- [8] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70(1):1–24, 2003.
- [9] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method. In H. Brezis et al., editor, *Non-linear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, volume XI. Lectures presented at the weekly seminar on applied mathematics, Paris, France, 1989-1991*, volume 299, pages 13–51. Harlow: Longman Scientific & Technical. Pitman Res. Notes Math. Ser., 1994.
- [10] J. H. Bramble, Z. Leyk, and J. E. Pasciak. The analysis of multigrid algorithms for pseudodifferential operators of order minus one. *Math. Comput.*, 63(208):461–478, 1994.

- [11] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comput.*, 51(183):387–388, 1988.
- [12] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and A. H. Schatz. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I. *Math. Comput.*, 47:103–134, 1986.
- [13] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, J. Wang, and J. Xu. Convergence estimates for multigrid algorithms without regularity assumptions. *Math. Comput.*, 57(195):23–45, 1991.
- [14] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comput.*, 55(191):1–22, 1990.
- [15] S. C. Brenner. A new look at FETI. In N. Debit et al., editor, *Domain decomposition methods in science and engineering. Papers of the thirteenth international conference on domain decomposition methods, Lyon, France, October 9-12, 2000*, Theory Eng. Appl. Comput. Methods., pages 41–51. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2002.
- [16] S. C. Brenner. An additive Schwarz preconditioner for the FETI method. *Numer. Math.*, 94(1):1–31, 2003.
- [17] J. Breuer. *Schnelle Randelementmethoden zur Simulation von elektrischen Wirbelstromfeldern sowie ihre Wärmeproduktion und Kühlung*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2005.
- [18] F. Brezzi and C. Johnson. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Calcolo*, 16:189–201, 1979.
- [19] F. Brezzi, C. Johnson, and J. C. Nedelec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. In *Basic problems of numerical mathematics, 4th Symp., Plezn/CSSR 1978*, pages 103–114. Charles Univ., 1978.
- [20] F. Brezzi and L. D. Marini. A three-field domain decomposition method. In A. Quarteroni et al., editor, *Domain decomposition methods in science and engineering. The sixth international conference on domain decomposition, Como, Italy, June 15-19, 1992*, volume 157, pages 27–34. Providence, RI: American Mathematical Society. Contemp. Math., 1994.
- [21] A. Buffa, M. Costabel, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell’s equations on non-smooth domains. *Numer. Math.*, 92(4):679–710, 2002.
- [22] S. Börm. Approximation of integral operators by \mathcal{H}^2 -matrices with adaptive bases. *Computing*, 74(3):249–271, 2005.

- [23] C. Carstensen, M. Kuhn, and U. Langer. Fast parallel solvers for symmetric boundary element domain decomposition equations. *Numer. Math.*, 79(3):321–347, 1998.
- [24] J. Cea. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Ann. Inst. Fourier*, 14(2):345–444, 1964.
- [25] H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 155(2):468–498, 1999.
- [26] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications. Vol. 4. Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.
- [27] M. Costabel. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements. In *Boundary elements IX, Vol. 1*, pages 411–420. Comput. Mech., Southampton, 1987.
- [28] M. Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3):613–626, 1988.
- [29] W. Dahmen, S. Prößdorf, and R. Schneider. Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations. II: Matrix compression and fast solution. *Adv. Comput. Math.*, 1(3-4):259–335, 1993.
- [30] W. D. Elliott and J. A. Board. Fast Fourier transform accelerated fast multipole algorithm. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17(2):398–415, 1996.
- [31] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, and D. Rixen. FETI-DP: A dual-primal unified FETI method. I: A faster alternative to the two-level FETI method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50(7):1523–1544, 2001.
- [32] C. Farhat, M. Lesoinne, and K. Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 7(7-8):687–714, 2000.
- [33] C. Farhat, A. Macedo, and M. Lesoinne. A two-level domain decomposition method for the iterative solution of high frequency exterior Helmholtz problems. *Numer. Math.*, 85(2):283–308, 2000.
- [34] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 32(6):1205–1227, 1991.
- [35] C. Farhat and F.-X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. *Comput. Mech. Adv.*, 2(1):1–124, 1994.

- [36] M. Fischer. *The Fast Multipole Boundary Element Method and its Application to Structure–Acoustic Field Interaktion*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2004.
- [37] Y. Fragakis and M. Papadrakakis. A unified framework for formulating domain decomposition methods in structural mechanics. Technical report, National Technical University, Athen, 2002.
- [38] Y. Fu, K. J. Klimkowski, G. J. Rodin, E. Berger, J. C. Browne, J. K. Singer, R. A. van de Geijn, and K. S. Vemaganti. A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 42(7):1215–1229, 1998.
- [39] S. A. Funken and E. P. Stephan. The BPX preconditioner for the single layer potential operator. *Appl. Anal.*, 67(3-4):327–340, 1997.
- [40] G. N. Gatica and N. Heuer. A dual-dual formulation for the coupling of mixed FEM and BEM in hyperelasticity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2):380–400, 2000.
- [41] G. N. Gatica and G. C. Hsiao. *Boundary-field equation methods for a class of nonlinear problems*. Pitman Research Notes in Mathematics Series. 331. Harlow: Longman House. New York, NY: Wiley, 1995.
- [42] K. Giebermann. *Schnelle Summationsverfahren zur numerischen Lösung von Integralgleichungen für Streuprobleme im \mathbb{R}^3* . Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.
- [43] L. Grasedyck. *Theorie und Anwendungen Hierarchischer Matrizen*. Dissertation, Universität Kiel, 2001.
- [44] L. Greengard. *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*. The MIT Press, 1987.
- [45] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73:325–348, 1987.
- [46] L. Greengard and V. Rokhlin. A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions. In A. Iserles, editor, *Acta Numerica Vol. 6*, pages 229–269. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [47] G. Haase. *Parallelisierung numerischer Algorithmen für partielle Differentialgleichungen*. Stuttgart: Teubner, 1999.
- [48] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on \mathcal{H} -matrices. I: Introduction to \mathcal{H} -matrices. *Computing*, 62(2):89–108, 1999.
- [49] W. Hackbusch, B. Khoromskij, and S. A. Sauter. On \mathcal{H}^2 -matrices. In H.-J. Bungartz et al., editor, *Lectures on applied mathematics. Proceedings of the symposium organized by the Sonderforschungsbereich 438 on the occasion of Karl-Heinz Hoffmann's*

- 60th birthday, Munich, Germany, June 30-July 1, 1999, pages 9–29. Berlin: Springer, 2000.
- [50] W. Hackbusch and Z. P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, 54(4):463–491, 1989.
- [51] H. Han. The boundary integro-differential equations of three-dimensional Neumann problem in linear elasticity. *Numer. Math.*, 68(2):269–281, 1994.
- [52] H. Harbrecht. *Wavelet Galerkin schemes for the boundary element method in three dimensions*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz, 2001.
- [53] K. Hayami and S. A. Sauter. A panel clustering method for 3-D elastostatics using spherical harmonics. In B. Bertram et al., editor, *Integral methods in science and engineering. Proceedings of the 5th international conference, IMSE'98*, volume 418 of *Chapman Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 179–184. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [54] N. Heuer, E. P. Stephan, and T. Tran. Multilevel additive Schwarz method for the h - p version of the Galerkin boundary element method. *Math. Comput.*, 67(222):501–518, 1998.
- [55] E. W. Hobson. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge: Univ. Press., 1931.
- [56] G. C. Hsiao, E. Schnack, and W. L. Wendland. A hybrid coupled finite-boundary element method in elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 173(3-4):287–316, 1999.
- [57] G. C. Hsiao, E. Schnack, and W. L. Wendland. Hybrid coupled finite-boundary element methods for elliptic systems of second order. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190(5-7):431–485, 2000.
- [58] G. C. Hsiao, O. Steinbach, and W. L. Wendland. Domain decomposition methods via boundary integral equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 125(1-2):521–537, 2000.
- [59] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. The Aubin-Nitsche lemma for integral equations. *J. Integral Equations*, 3:299–315, 1981.
- [60] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. On a boundary integral method for some exterior problems in elasticity. *Mat. Mech. Astron.*, 257:31–60, 1985.
- [61] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. Domain decomposition in boundary element methods. In *Fourth international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, Proc. Symp., Moscow/Russ. 1990*, pages 41–49. SIAM, Philadelphia, PA, 1991.

- [62] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. Domain decomposition via boundary element methods. In H. Alder et al., editor, *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, Part I*, pages 198–207. CIMNE, Barcelona, 1992.
- [63] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. Boundary element methods: foundation and error analysis. In E. Stein, R. de Borst, and T. Huges, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume I: Fundamentals*, pages 339–373. John Wiley & Sons, 2004.
- [64] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. *Boundary Integral Equations: Variational Methods*. Springer-Verlag, Heidelberg, to be published.
- [65] C. Johnson and J. C. Nedelec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comput.*, 35:1063–1079, 1980.
- [66] B. N. Khoromskij and W. L. Wendland. Spectrally equivalent preconditioners for boundary equations in substructuring techniques. *East-West J. Numer. Math.*, 1(1):1–26, 1993.
- [67] A. Klawonn and O. B. Widlund. FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods: Connections and new results. *Commun. Pure Appl. Math.*, 54(1):57–90, 2001.
- [68] A. Klawonn and O. B. Widlund. Dual-Primal FETI methods for linear elasticity. Technical Report TR2004-855, Courant Institute of Mathematical Sciences, Department of Computer Science, September 2004.
- [69] A. Klawonn and O. B. Widlund. Selecting Constraints in Dual-Primal FETI Methods for Elasticity in Three Dimensions. In R. H. W. Hoppe, D. Keyes, J. Periaux, O. Pironneau, and J. Xu, editors, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, volume 40 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 67–81. Berlin: Springer, 2005.
- [70] A. Klawonn, O. B. Widlund, and M. Dryja. Dual-primal FETI methods for three-dimensional elliptic problems with heterogeneous coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):159–179, 2002.
- [71] R. Kornhuber, R. Hoppe, J. Périaux, O. Pironneau, O. Widlund, and J. Xu. *Domain decomposition methods in science and engineering. Selected papers of the 15th international conference on domain decomposition, Berlin, Germany, July 21–25, 2003*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering 40. Berlin: Springer, 2005.
- [72] V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Baseleisvili, and T. V. Burculadze. *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North-Holland Series in applied Mathematics and Mechanics. Vol. 25. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979.

- [73] U. Langer. Parallel iterative solution of symmetric coupled FE/BE-equations via domain decomposition. In A. Quarteroni et al., editor, *Domain decomposition methods in science and engineering. The sixth international conference on domain decomposition, Como, Italy, June 15-19, 1992*, pages 335–344. Providence, RI: American Mathematical Society. Contemp. Math., 1994.
- [74] U. Langer, G. Of, O. Steinbach, and W. Zulehner. Inexact data-sparse boundary element tearing and interconnecting methods. Technical Report 2005/06, SFB 404 Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik, Universität Stuttgart, 2005.
- [75] U. Langer, G. Of, O. Steinbach, and W. Zulehner. Inexact Fast Multipole Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods. In *Proceedings of the 16th international conference on domain decomposition, New York, USA, January 12-15, 2005. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Berlin: Springer, 2005. published online.
- [76] U. Langer and D. Pusch. Data-sparse algebraic multigrid methods for large scale boundary element equations. *Appl. Numer. Math.*, 54(3-4):406–424, 2005.
- [77] U. Langer, D. Pusch, and S. Reitzinger. Efficient preconditioners for boundary element matrices based on grey-box algebraic multigrid methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 58(13):1937–1953, 2003.
- [78] U. Langer and O. Steinbach. Boundary element tearing and interconnecting methods. *Computing*, 71(3):205–228, 2003.
- [79] U. Langer and O. Steinbach. Coupled boundary and finite element tearing and interconnecting methods. In R. Kornhuber et al., editor, *Domain decomposition methods in science and engineering. Selected papers of the 15th international conference on domain decomposition, Berlin, Germany, July 21-25, 2003. Lecture Notes in Computational Science and Engineering 40*, pages 83–97. Berlin: Springer, 2005.
- [80] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Comput. Mech. Adv.*, 1(2):121–220, 1994.
- [81] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. I. In *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Paris, 1987)*, pages 1–42. SIAM, Philadelphia, PA, 1988.
- [82] M. Maischak, E. P. Stephan, and T. Tran. Multiplicative Schwarz algorithms for the Galerkin boundary element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(4):1243–1268, 2000.
- [83] J. Mandel and R. Tezaur. Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 73(4):473–487, 1996.

- [84] J. Mandel and R. Tezaur. On the convergence of a dual-primal substructuring method. *Numer. Math.*, 88(3):543–558, 2001.
- [85] A. M. Matsokin and S. V. Nepomnyashchikh. The Schwarz alternation method in a subspace. *Sov. Math.*, 29(10):78–84, 1985.
- [86] A. Maue. Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungsproblems durch eine Integralgleichung. *Z. Phys.*, 126:601–618, 1949.
- [87] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [88] W. McLean and O. Steinbach. Boundary element preconditioners for a hypersingular integral equation on an interval. *Adv. Comput. Math.*, 11(4):271–286, 1999.
- [89] K. Nabors, F. T. Korsmeyer, F. T. Leighton, and J. White. Preconditioned, adaptive, multipole-accelerated iterative methods for three-dimensional first-kind integral equations of potential theory. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(3):713–735, 1994.
- [90] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [91] J. Nedelec. Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces in \mathbb{R}^3 . *Computer Methods Appl. Mech. Engin.*, 8:61–80, 1976.
- [92] J. C. Nedelec. Integral equations with non integrable kernels. *Integral Equations Oper. Theory*, 5:562–572, 1982.
- [93] J. N. Newman. Distributions of sources and normal dipoles over a quadrilateral panel. *Journal of Engineering Mathematics*, 20:113–126, 1986.
- [94] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, 55(4):299–324, 2002.
- [95] G. Of. Die Multipolmethode für Randintegralgleichungen. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 2001.
- [96] G. Of and O. Steinbach. A fast multipole boundary element method for a modified hypersingular boundary integral equation. In W. Wendland et al., editor, *Analysis and simulation of multifield problems. Selected papers of the international conference on multifield problems, Stuttgart, Germany, April 8-10, 2002. Lect. Notes Appl. Comput. Mech. 12*, pages 163–169. Berlin: Springer, 2003.
- [97] G. Of, O. Steinbach, and W. Wendland. The fast multipole method for the symmetric boundary integral formulation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, published online.

- [98] G. Of, O. Steinbach, and W. L. Wendland. Applications of a fast multipole galerkin boundary element method in linear elastostatics. *Comput. Visual. Sci.*, 8:201–209, 2005.
- [99] P. Oswald. Multilevel norms for $H^{-1/2}$. *Computing*, 61(3):235–255, 1998.
- [100] J. M. Perez-Jorda and W. Yang. A concise redefinition of the solid spherical harmonics and its use in the fast multipole methods. *J. Chem. Phys.*, 104(20):8003–8006, 1996.
- [101] K. H. Pierson, P. Raghaven, and G. M. Reese. Experiences with FETI–DP in a production level finite element application. In I. Herrera, D. E. Keyes, O. Widlund, and R. Yates, editors, *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 233–240. DDM.org, 2003.
- [102] V. Popov and H. Power. An $O(N)$ Taylor series multipole boundary element method for three-dimensional elasticity problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 25(1):7–18, 2001.
- [103] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford: Clarendon Press, 1999.
- [104] S. Rjasanow. Optimal preconditioner for boundary element formulation of the Dirichlet problem in elasticity. *Math. Methods Appl. Sci.*, 18(8):603–613, 1995.
- [105] G. Rodin and O. Steinbach. Boundary element preconditioners for problems defined on slender domains. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(4):1450–1464, 2003.
- [106] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phys.*, 60:187–207, 1985.
- [107] A. A. Samarskij and E. S. Nikolaev. *Numerical methods for grid equations. Volume I: Direct methods. Volume II: Iterative methods*. Basel etc.: Birkhäuser Verlag, 1989.
- [108] S. Sauter and C. Schwab. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Stuttgart: Teubner, 2004.
- [109] S. A. Sauter. Variable order panel clustering. *Computing*, 64(3):223–261, 2000.
- [110] A. H. Schatz, V. Thomée, and W. L. Wendland. *Mathematical theory of finite and boundary element methods. Lecture notes of the seminar 'Mathematische Theorie der finiten Element- und Randelementmethoden' organized by the 'Deutsche Mathematiker-Vereinigung' and held in Düsseldorf, Germany, from June 7th to 14th, 1987*. DMV Seminar 15, Basel etc.: Birkhäuser Verlag, 1990.

- [111] G. Schmidlin, C. Lage, and C. Schwab. Rapid solution of first kind boundary integral equations in \mathbb{R}^3 . *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 27(5):469–490, 2003.
- [112] E. Schnack. A hybrid BEM model. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:1015–1025, 1987.
- [113] E. Schnack, N. Karaosmanoglu, and I. Becker. Modelling of finite element functions using generalized BEM. In *Proceedings of the 9th Conference on Problems and Methods in Mathematical Physics (9.TMP) (Karl-Marx-Stadt, 1988)*, volume 111 of *Teubner-Texte Math.*, pages 245–256, Leipzig, 1989. Teubner.
- [114] R. Schneider. *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme*. Advances in Numerical Mathematics. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [115] H. Schulz and O. Steinbach. A new a posteriori error estimator in adaptive direct boundary element methods: The Dirichlet problem. *Calcolo*, 37(2):79–96, 2000.
- [116] H. Schulz and O. Steinbach. A new a posteriori error estimator in adaptive direct boundary element methods. The Neumann problem. In A.-M. Sändig et al., editor, *Multifid problems. State of the art*, pages 201–208. Berlin: Springer, 2000.
- [117] C. Schwab and W. L. Wendland. On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary element methods. *Numer. Math.*, 62(3):343–369, 1992.
- [118] H. A. Schwarz. II. Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 1870.
- [119] S. Sirtori. General stress analysis method by means of integral equations and boundary elements. *Meccanica*, 14:210–218, 1979.
- [120] B. F. Smith, P. E. Bjørstad, and W. D. Gropp. *Domain decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [121] D. Stefanica. A numerical study of FETI algorithms for mortar finite element methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(4):1135–1160, 2001.
- [122] O. Steinbach. *Gebietszerlegungsmethoden mit Randintegralgleichungen und effiziente numerische Lösungsverfahren für gemischte Randwertprobleme*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996.
- [123] O. Steinbach. A robust boundary element method for nearly incompressible linear elasticity. *Numer. Math.*, 95(3):553–562, 2003.
- [124] O. Steinbach. Artificial multilevel boundary element preconditioners. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 3:539–542, 2003.

- [125] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2003.
- [126] O. Steinbach. *Stability estimates for hybrid coupled domain decomposition methods*. Lecture Notes in Mathematics 1809. Berlin: Springer, 2003.
- [127] O. Steinbach. *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Algorithmen und Anwendungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2005.
- [128] O. Steinbach and W. L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):191–216, 1998.
- [129] O. Steinbach and W. L. Wendland. On C. Neumann’s method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries. *J. Math. Anal. Appl.*, 262(2):733–748, 2001.
- [130] E. P. Stephan. Multilevel methods for the h -, p -, and hp -versions of the boundary element method. *J. Comput. Appl. Math.*, 125(1-2):503–519, 2000.
- [131] J. Tausch. The variable order fast multipole method for boundary integral equations of the second kind. *Computing*, 72(3-4):267–291, 2004.
- [132] A. Toselli and O. Widlund. *Domain decomposition methods – algorithms and theory*. Springer Series in Computational Mathematics 34. Berlin: Springer, 2005.
- [133] T. von Petersdorff and E. Stephan. Multigrid solvers and preconditioners for first kind integral equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 8(5):443–450, 1992.
- [134] W. L. Wendland. On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM. In *Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view*, volume 301 of *CISM Courses and Lectures*, pages 273–333. Springer-Verlag, Vienna, 1988.
- [135] C. A. White and M. Head-Gordon. Derivation and efficient implementation of the fast multipole method. *J. Chem. Phys.*, 101(8):6593–6605, 1994.
- [136] O. B. Widlund et al, editor. *Proceedings of the 16th international conference on domain decomposition, New York, USA, January 12-15, 2005. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Berlin: Springer, 2005. published online.
- [137] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen. Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Mathematische Leitfäden. Stuttgart: B. G. Teubner, 1982.
- [138] B. I. Wohlmuth. *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. 17. Berlin: Springer, 2001.

-
- [139] K. Yoshida. *Applications of Fast Multipole Method to Boundary Integral Equation Method*. Dissertation, Kyoto University, 2001.
- [140] K. Yoshida, N. Nishimura, and S. Kobayashi. Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50(3):525–547, 2001.
- [141] K. Yosida. *Functional analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 123. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980.
- [142] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11:355–375, 1977.
- [143] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. Marriage a la mode - The best of both worlds (finite elements and boundary integrals). In *Energy methods in finite element analysis*, pages 81–107. Wiley, Chichester, 1979.
- [144] W. Zulehner. Analysis of iterative methods for saddle point problems: A unified approach. *Math. Comput.*, 71(238):479–505, 2002.
- [145] W. Zulehner. Uzawa-type methods for block-structured indefinite linear systems. Technical report, SFB F013 "Numerical and Symbolic Scientific Computing", Johannes Kepler University Linz, 2005.