Die relativistische Schrödingertheorie als erweiterte Yang - Mills Theorie

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Peter Schust

aus Berlin

Hauptberichter: Prof. Dr. U. Weiß

Mitberichter: Prof. Dr. G. Wunner

Betreuer: Dr. M. Sorg

Tag der mündlichen Prüfung: 19.3.2007

Institut für Theoretische Physik II
Universität Stuttgart
2007

Inhaltsverzeichnis

Summary

For all the decades since the introduction of exchange symmetry into quantum mechanics, its description by the global and discrete group of permutations stands in opposition to physics' fundamental principle of locality. This principle is most prominently expressed by the fact that all fundamental forces are described by Yang - Mills theories with local and continuous gauge groups: $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ and $SO(1,3)$ for electromagnetic, electroweak, strong and gravitational interactions respectively.
In this thesis, a proposal is presented how to deal with exchange symmetry by means of tools of Yang - Mills theories, i.e. by means of local unitary symmetries and their equivalence classes. The according potentials and field strength necessary for the invariance of the theory under choice of a special representative of an equivalence class then incline the effects of the existence of many indistinguishable states of a system of identical particles on the measurable quantities, instead of the weighted sum over all the equivalent states that is typical for the permutational approach.
The basic idea behind the Yang - Mills approach presented here, is seen in many books on group theory: the congruence symmetries of regular polygons are given by restricting the rotation group to finite angles. For instance, the rotational symmetry of an equilateral triangle is described by $SO(2)$ with its rotation angle restricted to multiples of π over three; those of a square are described by $SO(2)$ with a rotation angle restricted to multiples of π over two.
For this idea to be made to work in a generalised form for quantum many particle systems, two major changes are done in the standard quantum description of such systems. First, and most obvious, the gauge group is extended to the full unitary Lie group $U(N)$ (the local and continuous part of the unitary group generated from a Lie algebra $\mathfrak{u}(N)$),where N is the number of independent degrees of freedom. So now, it does not only embrace the subgroup of $U(N)$ necessary for the description of interactions, but contains enough elements to take into account other symmetries, which is to say exchange symmetries, also. From this extension follow, straightforward and necessarily, changes in all objects involving potentials like the gauge covariant derivatives or the field strengths.
Secondly, the mathematical structure at the basis of the particle picture is no longer the tensor product of the theory's degrees of freedom, but rather their Whitney sum. This change has far reaching implications for it cuts loose all connections to Fock spaces and all the concepts derived from them, especially the according particle picture. In other words, the usual mathematical structure for implementing the notion of a particle is not available.

Indeed, a major part of this thesis is concerned with establishing a particle picture solely using the Whitney sum of the field degrees of freedom as its structure of reference. Furthermore, it turns out that this particle picture and the restrictions which make the additional symmetry elements (those which exceed the symmetries necessary for modelling only the interactions) into representatives of exchange symmetry are so closely related to each other that they are just two sides of the same medal. Demanding that a notion of particles established with one representative of the equivalence class of state vectors for the system holds with every other vector of this class leads inevitably to exactly those restrictions of the new symmetries which lets them be exchange symmetry. On the other way around, the full unitary Lie group offers far too much transformations among the theory's degrees of freedom to allow them to be distinct from one another; only with appropriate restrictions a particle picture can emerge.
It should be mentioned that dismissing Fock space as a fundamental structure does not only result in loosing the according particle picture but also in loosing the idea of how to describe their creation and annihilation as well as the notion of a locality of processes. This is, because to say one uses Fock space as a fundamental structure is to say creation and annihilation operators are fundamental objects of the theory, which in turn is to say one implements the idea of locality of processes by means of field quantisation. Put in other words, the presented approach to exchange symmetry by extension of the unitary symmetry of a system is done on the level of field theories.
Unlike for the notion of distinct particles, no replacements for creation and annihilation processes or locality are yet available in the Whitney sum approach to many particle systems; promising points of departure to develop such ideas in this approach, however, do exist; see below for details.
Depriving oneself of the ability to describe creation and annihilation processes and locality in the fields may seem strange at a first glance. But since they are all implemented, together with the particle picture of known theory, by the one mathematical method introducing locality into field theory, which leads to serious problems like that of divergencies, etc, a step-by-step introduction of all necessary ideas offers opportunities to avoid some of the problems of standard theory.
The detailed connections between the two major mathematical structures and the physical ideas they are dedicated to imply are worked out in two respective parts of this thesis.
First, there is a short outline of this thesis' general mathematical framework of fibre bundle theory, which settles notations used in the following.
After that, part I, i.e. chapter 2, gives the origin of the usage of the Whitney sum arrangement of degrees of freedom for many - particle systems. It lies in what is known as "**R**elativistic **S**chrödinger **T**heory" (RST). At the heart of RST is the **R**elativistic **S**chrödinger **E**quation (RSE), a relativistic generalisation of the ordinary Schrödinger equation, which equates the effect of the gauge covariant derivative $\mathcal{D}_\mu$ on a high-dimensional state vector $\Psi = \left(\psi^1, \ldots, \psi^N\right)^T$ to the action of a $\mathfrak{gl}\,(N, \mathbb{C})$ - valued one-

form $\mathcal{H}_\mu$ on Ψ. This rather general equation is specialised to describe fields of Klein-Gordon or Dirac type by contraction with an appropriate operator that is linked to the unitary representation of the Poincaré transformation (this and similarly simplified expressions read in full "unitary representations of the universal covering group of the Poincaré transformation") of Ψ. It is in this contraction operator where the Whitney sum approach as a fundamental ordering structure for the description of many particles by Ψ becomes most manifest. For example, the operator Γ^μ yielding the Dirac case of RST, i.e. the case of N spinorical degrees of freedom, is the direct sum of N matrices γ^μ: $\Gamma^\mu = \oplus_i^N (\gamma^\mu)_i$. This is the typical structure for an operator acting in a space of spinors Ψ which are the Whitney sums of N single spinors ψ. Indeed, from Γ^μ the generator of the unitary representation of the Lorentz group for Ψ follows as $[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$. Consequently, Ψ's unitary Lorentz group is the direct product of N unitary representations of the Lorentz group for a single spinor. Thus, of an object with $4N$ degrees of freedom every four components are grouped together into one spinor making Ψ a column of N single spinors, that is to say, a Whitney sum of N spinors.
In the light of the just explained connection of the contraction operator of the RSE to the Poincaré group of Ψ, the RSE itself may be regarded as a pre-Kemmerer type of equation.
Of course, the contraction of $\mathcal{H}_\mu$ with the contraction operator has to result in the mass term of the kind of particles aimed at, or to be more correct: in a direct product matrix of appropriate mass terms. This first constraint of $\mathcal{H}_\mu$ is called the *source equation* due to its expressions involving divergences of $\mathcal{H}_\mu$.
A second constraint, the so-called *integrability condition*, which is a curl-type equation in $\mathcal{H}_\mu$, is derived by equating an expression for the commutator of covariant derivatives in terms of $\mathcal{H}_\mu$ to, of course, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Within RST, the set of both constraints is often referred to as the *dynamics of* $\mathcal{H}_\mu$.
The root all this has in the density matrix formulation of quantum mechanics can best be seen from the way observable quantities are gained in chapter 2.4. For each observable quantity an appropriate operator is formulated and the trace of the product of this operator and the intensity matrix $\mathcal{I}$, built from Ψ as shown in chapters 2.1. and 2.2, gives densities whose spatial integrals finally result in measurable quantities.
In all of part I, exchange symmetry is treated such that RST is linked to the Hartree-Fock theory. To the matrix part of the gauge covariant derivative additional matrices are added that represent the group of permutations, albeit with space-time dependent coefficients which are not the gauge potentials of the interaction as the connection to Hartree-Fock theory suggests. Since these additional matrices are at the same time generators of the group $SU(N)$, they are added such that the matrix part of $\mathcal{D}_\mu$ now looks like that of a theory with full unitary symmetry $U(N)$. However, it must be stressed that it just *looks like* the gauge covariant derivative of an $U(N)$-symmetric theory but actually *it is not*, because the new matrices are used as representatives of the group of permutations, not as generators of the group $SU(N)$. Therefore, no other symmetry transformations than those of the group modelling the interactions are applied, or in

other words, the equivalence class of system vectors is made solely with respect to the group of interactions.
With this approach, difficulties arise. First of all, connecting RST to Hartree - Fock theory connects RST's underlying Whitney sum to the product structure of standard theory, i.e. two very different mathematical structures, and hence different concepts of particle pictures etc. This in not very healthy, because the ideas spilling over from standard theory via this link do not fit in the framework of RST. First, usual Hartree - Fock theory does not know space - time dependent coefficients for the elements of the permutation group. This causes two mismatches in addition to the already stated problem of incompatible fundamental mathematical concepts when trying to take over standard theory's particle picture via the link. First here, using the extended gauge covariant derivative throughout RST results in terms made of RST's space - time dependent coefficients of the permutation matrices in the source currents of the interaction gauge potentials, which are completely unknown to standard theory. Secondly, the sources of the matter parts of the Noether currents, being made from single degrees of freedom of Ψ, now have sources which involve the coefficients of the permutation matrices and are, again, only known to RST. Both new things together make it impossible to use standard theory's allocation of charges to distinct degrees of freedom by currents, what is an essential part of the particle picture in known theory.
At last, there is another point not really fitting. Adding additional terms in the matrix part of the gauge covariant derivative following the pattern of the Lie algebra of $U(N)$ only delivers fermionic sign rules for the exchange of degrees of freedom. This is no problem if the matter part describes fermionic particles, but already in the always bosonic part of gauge potentials and their field strengths these sign rules are mis - en - place.
The latter problem may be overcome by changing the way the extended gauge covariant derivative of RST for the field strength is built so that the right signs are gained, i.e. in extending the gauge covariant derivative, the pattern of the Lie algebra $\mathfrak{u}(N)$ is dropped, but the other problems still persist.
An extended summary of the criticism of the last three paragraphs is found part II, resp chapter 3, where also a proposal is made how to avoid the difficulties just mentioned.
This can be done by using the $\mathfrak{su}(N)$ - matrices from above really as generators of $SU(N)$, that is to say, as generators of a local Lie symmetry, and not as representation matrices of the permutation group. This is clearly the idea introduced at the beginning: the local and continuous Lie symmetry group of the theory is extended to embrace not only interactions but in addition the exchange symmetry of a system. Its implications on the theory are worked out in detail in part III, which comprises chapters 4 to 6.
Since the most natural framework for dealing with local symmetries is that of Yang - Mills theories, the point of departure for all other developments is to find an appropriate Lagrange density. As far as it is possible, this search is guided by the results of part I. Especially, it takes over the segmentation of the systems spinor, resp vector, into N independent degrees of freedom by a Whitney sum type representation of Ψ's Poincaré transformation. It deviates from part I in that it assumes right from the beginning the

maximal possible unitary Lie symmetry $U(N)$. So all objects concerned with the gauge invariance of the theory, like the gauge covariant derivative or the field strength, are formulated right away with respect to the Lie algebra $\mathfrak{u}(N)$ instead of extending them later. A first general principle for this approach to describe exchange symmetry consists in that not all elements of $U(N)$ can be treated equal. If they were, no particle characteristics could be assigned to each of the N degrees of freedom by means of the sources of the field strength that could be maintained under all the numerous possible transformations of $U(N)$. So some of them have to be restrained whereas others can still be applied in their original form. The latter are the group of symmetries $E(N)$ modelling the exchange interactions upon whose conserved densities, dedicated to them by Noether's theorem, the particle picture is to be built. The other symmetry elements $U(N) \setminus E(N)$ are restricted as far as it is necessary to do not interfere with the concepts just established with $E(N)$.
The symmetry elements $U(N) \setminus E(N)$ in general do not from a group, what may seem strange at a first glance, but is not, since the group structure of the theory is alway that of $U(N)$ in which the restricted symmetry elements stay embedded. For the interaction group, which, contrary to the restricted symmetry elements, *is always* a group with Whitney sum structure like the Poincaré group for Ψ, the embedding in $U(N)$ says it is always engulfed by other elements of the group $U(N)$. So it shares its Whitney sum structure with Ψ's Poincaré group, but it becomes just visible by the restrainement of the engulfing parts of $U(N)$, but never attains that pure form of Ψ's Poincaré group.
Chapter 4 gives the general outline and general lines of implementation of this *symmetry splitting* for the case of Dirac-type fields (4.1) and the case of Klein-Gordon fields (4.2) along with the respective general form of conserved densities due to Noether's theorem, being utilisable due to the Lagrangian formulation of the theory. Among the conserved quantities the current densities resulting from generators of unrestricted elements of $U(N)$ are those to be kept gauge invariant under all allowed transformations for they shall be the basis for the particle picture, whereas for those belonging to generators of restrained symmetry elements gauge covariance is sufficient. So these must not be directly measurable.
In chapter 5 the general framework of chapter 4 is exemplified by specialising it to the case of the spinorical degrees of freedom ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu \oplus \gamma^\mu \oplus \gamma^\mu \rightsquigarrow \Sigma^{\mu\nu} = [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = \sigma^{\mu\nu} \oplus \sigma^{\mu\nu} \oplus \sigma^{\mu\nu}$) with interaction group $E(N=3) = U(1) \times U(1) \times U(1)$, so the interactions between the spinors are of electromagnetic type.
First, a suitable basis for $\mathfrak{u}(3)$ is chosen and their members are divided into a set $\alpha_{1,2,3}$ generating $E(3)$ and a set $\beta_{4,\ldots,9}$ generating $U(3) \setminus E(3)$. All potentials, field strengths, currents and equations of motion etc. are formulated accordingly. The maintained structure of $\mathfrak{u}(3)$, resp $U(3)$ in this example may best be seen from the field strength belonging to the generators α. Despite the fact that interactions are electromagnetic they do not reduce to rotational objects in the potentials of the interactions. They always contain also terms resulting from the commutators of the βs among each other. (Of course, the field strengths associated with the $\beta_{4,\ldots,9}$ contain terms resulting from the

commutators of the βs among each other and especially terms from the commutators of αs and βs, but this seems to be less surprising than the non-rotational structure just mentioned.)
The central result of this chapter is to exemplify the close relationship between the establishment of a particle picture and a restriction of the elements of $U\,(N=3)\backslash E\,(N=3)$. As already stated, after building up a particle picture with one Ψ, the question which other Ψ's are allowed, leads exactly to a restriction of the parameters Λ in the generating expressions $\exp\{\Lambda^4(x)\beta_4\}$, etc that makes the βs generators of an exchange symmetry. It should be stressed that the restrained Λs are not set to constant values. Within their boundaries they still can vary over space - time.
Concerning the particle picture, there is another important result. Because of the full unitary symmetry of the system the building elements of the Noether currents, the densities made from single spinors of Ψ, have sources when the single spinors overlap. In addition, to all currents there are contributions of the potentials and field strengths of the generators β. Consequently, it is only possible to attribute spinors an own charge e when all fields, spinorical as well as potentials, are sufficiently localised in their own respective volumina of space. Put the other way around, for overlapping, i.e strongly interacting spinors, there is no notion of distinct particles. This is the cause why in general the field degrees of freedom of Ψ are not called particles.
Another consequence of the particle picture relying on fields localised in separated volumina is that any quantisation of RST is directly linked to the quantisation of space - time.
Chapter 5.2 shows another nice feature of the proposed description of exchange symmetry: The exchange symmetry between unlike particles vanishes without any further assumptions imposed on the theory. This is, because the metric in the space where Ψ lives, contains a *coupling matrix* underlying the constraint of covariant constancy. Single spinors of Ψ are called different if their matching entry on the main diagonal of the coupling matrix differs from that of the others. By virtue of the covariant constancy of the coupling matrix, the exchange symmetry between spinors with unequal main diagonal entries is ruled out.
Concerning the outlook chapters 5.3 and 5.4 there should be mentioned a promising point for incorporating creation and annihilation processes into RST in 5.3. For this purpose, the idea of embedding a Whitney sum structured group with elements of a full unitary symmetry should be moved to the Poincaré group of Ψ. Then, since there is no particle picture anyway for overlapping field degrees of freedom, the restriction on some of the group parameters Λ can be removed. With an additional dynamics for the group parameters different subsets of the overall of group parameters can go into (approximative) restriction over different areas in space and time, and by this, segment Ψ in different ways, what is nothing else than giving a different particle content for every different subset of group parameters going into restriction.

Kurzfassung

Seit ihrer Einführung in die Quantenmechanik steht die Austauschsymmetrie wegen ihrer Beschreibung durch die globale und diskrete Permutationsgruppe in Kontrast zum sonst vorherrschenden Prinzip der Lokalität in der Physik. Dieses Verlangen wird am deutlichsten durch die lokalen und kontinuierlichen Eichgruppen der Yang - Millstheorien der fundamentalen Wechselwirkungen zum Ausdruck gebracht: die Gruppen $U\,(1)$, $SU\,(2)$, $SU\,(3)$ und $SO\,(1,3)$ für jeweils die elektromagnetische, die elektroschwache, die starke und die gravitative Wechselwirkung.
In dieser Arbeit wird eine Möglichkeit dargelegt, wie man die Austauschsymmetrie eines Systems mit den Mitteln der Yang - Millstheorien beschreiben kann, d.h. durch lokale unitäre Symmetrien und ihre zugehörigen Äquivalenzklassen. Anstatt durch die Einführung der für den Zugang über die Permutationsgruppe typische gewichtete Summe über alle äquivalenten Zustände des Systems werden die Auswirkungen der Tatsache, daß ein System vieler identischer Teilchen betrachtet wird, auf die meßbaren Größen hierbei durch die Potentiale und ihren Feldstärken getragen, die eingeführt werden müssen, um die Invarianz der Theorie unter der Auswahl eines speziellen Repräsentanten der Äquivalenzklasse der Austauschsymmetrie sicherzustellen.
Die wesentliche Idee hinter dem hier Vorgestellten Yang - Millszugang zur Austauschsymmetrie kann in vielen Büchern über Gruppentheorie nachgeschlagen werden: die Kongruenzsymmtrien eines regulären Polygons sind durch die Beschränkung des Drehwinkels der Rotationsgruppe auf bestimmte Werte beschreibbar. Die Rotationsymmetrie eines gleichseitigen Dreieckes zum Beispiel ist durch die Gruppe $SO\,(2)$ gegeben, deren Drehwinkel auf Vielfache von $\frac{\pi}{3}$ festgelegt ist; die eines Quadrates durch die $SO\,(2)$, deren Rotationswinkel nur Werte annimmt, die Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sind.
Damit diese Idee in verallgemeinerter Form in Rahmen der quantenmechanischen Beschreibung von Vielteilchensystemen genutzt werden kann, sind zwei wesentliche Änderungen in den Grundlagen der bisherigen Theorie vorzunehmen. Die erste und offensichtliche Änderung besteht in der Erweiterung der Eichgruppe des betrachteten Systems zur vollen unitären Liegruppe $U\,(N)$ (genauer: zum vollen lokalen und kontinuierlichen Teil der unitären Gruppe, der aus der Liealgebra $\mathfrak{u}\,(N)$ generiert wird); N gibt die Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade des Systems an. Demnach umfaßt die Eichgruppe der Theorie jetzt nicht nur bloß die Untergruppe von $U\,(N)$, die zur Beschreibung der Wechselwirkungen notwendig sind, sondern enthält jetzt auch genug Elemente, um weitere Symmetrien, wie eben die Austauschsymmetrie, zu beschreiben. Diese Erweiterung zieht selbstverständlich entsprechende Veränderungen in allen Objekten nach sich, die Potentiale enthalten, wie z.B. die eichkovarianten Ableitungen oder die Feldstärken.

Die zweite grundlegende Änderung betrifft die mathematische Struktur, auf der das Teilchenbild beruht. Sie ist nicht länger das Tensorprodukt der Freiheitsgrade der Theorie, sondern deren Whitneysumme. Die Konsequenzen dieses Wechsels sind äußerst weitreichend, da durch ihn alle Möglichkeiten unterbunden werden das Konzept des Fockraumes zu nutzen, um den Teilchenbegriff mathematisch darzustellen.
Folglich beschäftigt sich nicht der geringste Teil dieser Arbeit mit der Aufstellung mathematischen Darstellung des Teilchenbegriffes, der auf die Anordnung der Freiheitsgrade der Theorie in einer Whitneysumme als fundamentale mathematische Struktur zurückgreift. Dabei erweist es sich, daß dieses Teilchenbild derart eng mit der Beschränkung der neuen Symmetriefreiheitsgrade, die jene erst zu Vertretern der Austauschsymmetrie werden lassen, zusammenhängt, daß beide Konzepte zwei Seiten derselben Medaille sind. Verlangt man die Gültigkeit des Teilchenbegriffes, der mit Bezug auf einen speziellen Vertreter der Äquivalenzklasse von Zustandsvektoren des Systems erstellt wurde, auch für alle anderen Mitglieder der Äquivalenzklasse Gültigkeit hat, führt auf genau die Einschränkungen der der neuen Symmetrien, die sie zur Darstellung der Austauschsymmetrie machen. Andererseits bietet die vollständige unitäre Liegruppe deutlich zuviele Transformationen der Freiheitsgrade des Systems, als daß sie als deutlich voneinander abgegrenzt betrachtet werden können. Erst nach passenden Einschränkungen der Symmetriegruppe ist dieses möglich.
Außer dem Verlust der bekannten mathematischen Darstellung des Teilchenbildes hat die gelöste Verbindung zu den Fockräumen auch den Verlust der bisherigen Beschreibung von Erzeugungs - und Vernichtungsprozessen, sowie die bekannte (störungstheoretische) Darstellung von Lokalisierung in Feldtheorien zur Folge, was schlicht daran liegt, daß die Nutzung des Fockraumkonzeptes gleichbedeutend mit der Nutzung von Erzeugungs - und Vernichtungsoperatoren ist, deren störungstheoretisches Einbringen in eine Feldtheorie durch die S - Matrix wiederrum äquivalent zur Behandlung der Bewegungsgleichungen des Systems durch den Greensformalismus ist, also zur Einführung der Feldquantisierung. Mit anderen Worten findet das Vorgehen in dieser Arbeit auf der Ebene der Feldtheorien statt.
Anders als für den Begriff voneinander abgegrenzter Freiheitsgrade, sprich Teilchen, sind bisher weder für die Beschreibung von Erzeugungs - und Vernichtungsprozessen noch für die Beschreibung von Lokalität innerhalb einer Feldtheorie Alternativen im Whitneysummenzugang zu Vielteilchensystemen ausgearbeitet; vielversprechende Ansatzpunkte dazu existieren jedoch. Auf sie wird weiter unten noch Eingegangen.
Auf den ersten Blick mag die Aufgabe der Fähigkeit zur Beschreibung von Teilchenerzeugung - und Vernichtungsprozessen merkwürdig erscheinen. Doch da sie, zusammen mit dem bekannten Teilchenbild, durch die mathematische Methode eingeführt werden, die den Begriff der Lokalität einbringen soll und die erhebliche Probleme mit sich bringt, wie z.B. Divergenzen, bietet die schrittweise Einführung aller notwendigen Konzepte die Möglichkeit die Wurzeln einiger der bisherigen Probleme genauer auszumachen und sie so zu umgehen.
Der Ausarbeitung des genauen Zusammenhanges zwischen den beiden gerade Vorgestell-

ten wesentlichen neuen mathematischen Strukturen und den physikalischen Ideen, die sie modellieren sollen, werden in dieser Arbeit jeweils eigene Teile gewidmet.
Vorher findet noch eine übersichtsartige Einführung in den allgemeinen mathematische Rahmen der Faserbündeltheorie statt, in dem sich auch die beiden tragenden Ideen dieser Arbeit wiederfinden; hauptsächlich um die im Folgenden verwendete Notation festzulegen.
Nach diese Einführung wird in Teil I, sprich Kapitel 2, der Ursprung der Nutzung der Whitneysumme zur quantenmechanischen Beschreibung von Vielteilchensystemen wiedergegeben. Er liegt in den Arbeiten zur **r**elativistischen **S**chrödinger**t**heorie. Das Herz der RST stellt die **r**elativistische **S**chrödinger**g**leichung dar, die eine die relativistische Verallgemeinerung der bekannten Schrödingergleichung ist. Sie setzt die Wirkung der eichkovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu$ auf einen hochdimensionalen Zustandsvektor $\Psi = \left(\psi^1, \ldots, \Psi^N\right)^T$ mit der Wirkung einer $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$-wertigen Einsform $\mathcal{H}_\mu$ auf Ψ gleich. Diese sehr allgemeine Gleichung wird mit einem Operator kontrahiert, der sich aus der Form der unitären Darstellung der Poincarétransformation (dieser und ähnlich vereinfachte Ausdrücke stehen für den vollständigen Ausdruck "unitäre Darstellung der universellen Überdeckungsgruppe der Poincarégruppe") von Ψ bestimmt, um zu einer Gleichung zu gelangen die Klein-Gordonfelder oder Diracfelder beschreibt. In diesem Kontraktionsoperator wird die Art, wie die Whitneysumme ihre Rolle als tragende Ordnungsstruktur in der Beschreibung eines Vielteilchensystemes durch Ψ erfüllt, am besten sichtbar. Betrachtet man beispielsweise den Operator Γ^μ, der zum Diracfall der RST führt, d.h. zum Fall mit N spinoriellen Freiheitsgraden, so besteht dieser aus der direkten Summe von N γ^μ-Matrizen: $\Gamma^\mu = \oplus_i^N \left(\gamma^\mu\right)_i$. Dies ist der typische Aufbau eines Operators, der in einem Raum wirkt, in dem Systemspinoren Ψ leben, die die Whitneysumme N einzelne Spinoren ψ sind. In der Tat folgt aus der Form von Γ^μ, daß der Generator der unitären Darstellung der Lorentzgruppe von Ψ $[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$ ist. Mithin ist also Ψ's Lorentzgruppe das direkte Produkt aus N Lorentzgruppen einzelner Diracspinoren ψ. Aus einem Objekt mit $4N$ Freiheitsgraden werden also jeweils vier Komponenten zu je einem Spinor ψ zusammengefaßt, wodurch Ψ zu einem Spaltenspinor aus N Einzelspinoren wird, sprich zu einer Whitneysumme aus N Spinoren ψ.
Im Lichte des gerade am Beispiel dargelegten Zusammenhanges zwischen dem Kontraktionsoperator der RSE und der Poincarégruppe von Ψ kann die RSE als Prä-Kemmerergleichung angesehen werden.
Natürlich muß die Kontraktion von $\mathcal{H}_\mu$ mit dem Kontraktionsoperator den Massenterm der Bewegungsgleichung der gewünschten Teilchensorte liefern, oder, um genauer zu sein, in einer Massenmatrix, die das direkte Produkt der erforderlichen Massenterme ist. Diese Nebenbedingung für $\mathcal{H}_\mu$ wird wegen ihrer Formen, die Divergenzterme von $\mathcal{H}_\mu$ enthalten, *Quellgleichung* genannt.
Eine weitere Nebenbedingung ergibt sich aus der Herleitung eines Ausdruckes für den Kommutator der eichkovarianten Ableitungen, unter Zuhilfenahme der RSE. Die eigentliche Nebenbedingung ergibt sich daraus, daß dieser Ausdruck natürlich gleich $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sein

soll. Es ergibt sich die sogenannte *Integrabilitätsbedingung*, die Rotationsausdrücke in $\mathcal{H}_\mu$ beinhaltet. Beide Nebenbedingungen zusammen werden in der RST auch als *Dynamik von* $\mathcal{H}_\mu$ genannt.
Den Ursprung der RST im Dichtematrixformalismus der Quantenmechanik läßt sich am einfachsten aus der Art ersehen, in der in Kapitel 2.4. Meßgrößen konstruiert werden. Zu jeder beobachtbaren Grösse korrespondiert ein Operator, aus dessen Produkt mit der Intensitätsmatrix $\mathcal{I}$ die Spur gebildet wird, was zu den Dichten führt, deren räumliche Integrale schlußendlich die meßbaren Größen ergeben. Der Zusammenhang von $\mathcal{I}$ mit Ψ wird in den Kapiteln 2.1 und 2.2 besprochen.
Im ganzen ersten Teil der Arbeit wird die Austauschsymmetrie auf eine Art behandelt, die es erlaubt, die RST mit der Hartree - Focktheorie zu verbinden. Im Matrixanteil der eichkovarianten Ableitung werden zusätzliche Matrizen eingeführt, die die Permutationsgruppe vertreten. Sie werden dabei mit raumzeitabhängigen Koeffizienten versehen, die allerdings nicht, wie die Anbindung an die Hartree - Focktheorie erwarten läßt, die Potentiale der Wechselwirkung sind. Da diese zusätzlichen Matrizen gleichzeitig Generatoren der Gruppe $SU(N)$ sind, werden sie so eingefügt, daß der Matrixanteil von $\mathcal{D}_\mu$ die Form annimmt, die er hätte, wenn er einer Theorie enspränge, die vollständig $U(N)$ - symmetrisch wäre. Es ist jedoch ausdrücklich zu betonen, daß die eichkovariante Ableitung nach dieser Erweiterung *nur so aussieht* als gehörte sie zu einer vollständig $U(N)$ - symmetrischen Theorie. Tatsächlich ist dem aber nicht so, denn die hinzugefügten Matrizen werden als Darstellungsmatrizen der Permutationsgruppe verwendet, nicht aber als Generatoren der Gruppe $SU(N)$. Deshalb werden weiterhin keine anderen Symmetrietransformationen zur Anwendung gebracht als diejenigen der Gruppe, die die Wechselwirkungen modelliert. Anders gesagt, die Äquivalenzklasse der Systemvektoren wird weiterhin nur mit Bezug auf die Gruppe gebildet, die die Wechselwirkungen trägt.
Dieser Zugang ist mit Problemen behaftet. Zuerst einmal enstehen durch die Verbindung der RST mit der Hartree - Focktheorie Verbindungen der Whitneysumme, auf der die RST aufbaut, mit der Produktstruktur der Standardtheorie. D.h. es treffen zwei völlig verschiedene mathematische Konzepte aufeinander, und folglich auch grundsätzlich unterschiedliche Umsetzungen des Teilchenbildes und ähnlicher Konzepte. Dieses Aufeinandertreffen führt folglich zu keinem guten Ende, da die von der Standardtheorie herüberschwappenden Ideen sich nicht in den Rahmen der RST einfügen lassen, und umgekehrt. Als erstes fällt auf, daß die Hartree - Focktheorie keine raumzeitabhängigen Koeffizienten für die Elemente der Permutationsgruppe kennt. Hieraus ergeben sich vor allem die folgenden zwei Probleme (zusätzlich zu dem Eingangs schon besprochenen Fehlen des Fockraumkonzeptes), wenn die Umsetzung des Teilchenkonzeptes der Standardtheorie in die RST übernommen wird: Zuerst einmal hat die Verwendung der erweiterten kovarianten Ableitung in allen Bereichen der RST Terme in den Quellströmen der Potentiale der Wechselwirkung zur Folge, die aus den, nur der RST eigenen, raumzeitabhängigen Koeffizienten der Permutationsmatrizen bestehen. Weiterhin werden in den Quellausdrücken der Materiedichten, die aus einzelnen Freiheitsgraden von Ψ beste-

hen, Terme erzeugt, die die Koeffizienten der Permutationmatrizen miteinbeziehen, und dementsprechend wieder nur der RST bekannt sind. Beide Arten von neu auftretenden Termen machen es unmöglich, die Art und Weise zu übernehmen, in der die Standardtheorie über die Ströme einzelnen Freiheitsgraden einzelne Ladungen e zuzuordnen, also eine Größe, die einen einzelnen Freiheitsgrad als einzelnes Teilchen charakterisiert.
Abschließend ist noch ein weiteres Problem zu erwähnen. Durch das Hinzufügen der Permutationsmatrizen nach dem Schema der Liealgebra von $U(N)$ ergeben sich nur die fermionischen Vorzeichen bei der Vertauschung von zwei Freiheitsgraden der Theorie. Für einen fermionischen Materieanteil der Theorie stellt dies natürlich kein Problem dar, aber bereits im grundsätzlich bosonischen Anteil der Potentiale und ihrer Feldstärken sind solche Vorzeichen völlig Fehl am Platze.
Das letzte Problem kann dadurch behoben werden, daß die Liealgebra $\mathfrak{u}(N)$ nicht mehr alleine das Muster vorgibt, nach dem die eichkovariante Ableitung erweitert wird. Mit allgemeineren Schemata für diesen Vorgang läßt sich auch bosonisches Vorzeichenverhalten bei der Vertauschung zweier Freiheitsgrade erreichen. Die anderen Probleme bleiben dessen ungeachtet aber bestehen.
Eine ausführlichere Darlegung der gerade geäußerten Kritik findet sich in Teil II, d.h. Kapitel 3. Dort wird auch ein Vorschlag unterbreitet, wie die Probleme vermieden werden können. Die Lösung besteht darin, die $\mathfrak{su}(N)$ - Matrizen von oben als die Generatoren der Gruppe $SU(N)$ zu verwenden, die sie sind, und nicht als (rudimentäre)Darstellungsmatrizen für die Permutationsgruppe. Dieses ist nichts Anderes als die zu Beginn geäußerte Idee, die lokale und kontinuierliche unitäre Symmetriegruppe der Theorie so zu erweitern, daß sie nicht nur die Wechselwirkung des Systems beschreibt, sondern auch die Austauschsymmetrie des Systems mitumfaßt. Die Folgen dieser Idee werden im Detail in Teil III, bestehend aus den Kapiteln 4,5 und 6, herausgearbeitet.
Da der natürliche Rahmen für die Arbeit mit lokalen Symmetrien der der Yang - Millstheorien ist, besteht der Ausgangspunkt für alles Weitere darin, eine passende Lagrangedichte zu finden. Soweit dies Möglich ist, orientiert sich diese Suche an den Ergebnissen aus Teil I. Vor allem wird die Segmentierung des Systemspinors bzw. Systemvektors in N unabhängige Freiheitsgrade durch eine whitneysummenartige Darstellung der Poincarétransformation von Ψ übernommen. Abweichend von Teil I wird aber von Beginn an die maximal mögliche Gruppe $U(N)$ verwendet. Alle Objekte, die mit der Eichinvarianz der Theorie in Zusammenhang stehen, d.h. die eichkovariante Ableitung und die Feldstärken, sind also grundsätzlich mit Bezug auf die Liealgebra $\mathfrak{u}(N)$ formuliert. Eine spätere Erweiterung findet zudem auch nicht mehr statt.
Das grundlegendste Prinzip des Yang - Millszuganges wird gleich nach der Aufstellung der Lagrangedichte in seiner allgemeinen Form ausgeführt: Damit durch die $U(N)$ Austauschsymmetrie beschrieben werden kann, dürfen nicht alle ihre Elemente gleich behandelt werden; würden sie es, könnte kein Teilchenbild auf der Basis der Ströme aufgestellt werden, das unter allen Transformationen der $U(N)$ invariant bliebe. Nur durch die folgerichtige Beschränkung einiger Transformationen kann dieses verwirklicht werden. Andere Teile der $U(N)$ hingegen werden weiterhin in ihrer ursprünglichen Form angewendet.

Sie bilden die Untergruppe $E\,(N)$ von $U\,(N)$, die die Wechselwirkung des Systems beschreiben, und deren Ströme, die ihnen durch ihre Generatoren und das Noethertheorem zugeordnet werden, die Grundlage des Teilchenbildes der RST sind. Die Transformationen, die zu $U\,(N) \setminus E\,(N)$ gehören, werden genau soweit eingeschränkt, daß sie mit dieses Teilchenbild nicht stören.
$U\,(N) \setminus E\,(N)$ ist im Allgemeinen keine Gruppe. Das mag zunächst wieder merkwürdig erscheinen, ist es bei näherer Betrachtung aber nicht, da die eigentliche Strukturgruppe der Theorie die $U\,(N)$ bleibt bzw. ist, in die sowohl die beschränkten Transformationen als auch die Wechselwirkungsgruppe eingebettet bleiben.
Die Wechselwirkungsgruppe hingegen ist natürlich immer eine Gruppe, eine mit einer Whitneysummenstruktur wie die der Poincarégruppe für Ψ. Für sie besagt die Einbettung in die $U\,(N)$, daß ihre Whitneysummenstruktur durch die Beschränkung der Elemente von $U\,(N) \setminus E\,(N)$ nur sichtbar wird, aber nie die reine Form annimmt, wie sie in er Poincarégruppe vorliegt.
In Kapitel 4 wird die allgemeine Formulierung dieses *Prinzip der Symmetrieaufteilung*, sowie seine allgemeinen Umsetzung im Formalismus behandelt; in Kapitel 4.1 für Diracfelder und Kapitel 4.2 für Klein - Gordonfelder, beide Male zusammen mit den allgemeinen Formen der erhaltenen Dichten gemäß dem Noethertheorem, das wegen der lagrangschen Formulierung der Theorie Anwendung finden kann. Da, wie schon mehrfach erwähnt wurde, unter diesen Erhaltungsgrößen den Strömen der Generatoren der unbeschränkten Symmetrien der Wechselwirkungsgruppe als Grundlage des Teilchenbildes besondere Bedeutung zukommt, sind sie unter allen (erlaubten)Transformationen invariant zu halten. Hingegen genügt bei den Strömen der Generatoren der Elemente der beschränkten Symmetrien Kovarianz. Als Folge davon dürfen sie allerdings nicht in sie direkt und allein betreffenden Meßverfahren nachweisbar sein.
In Kapitel 5 wird dann der allgemeine Rahmen aus Kapitel 4 konkret auf ein System mit drei spinoriellen Freiheitsgraden ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu \oplus \gamma^\mu \oplus \gamma^\mu \rightsquigarrow \Sigma^{\mu\nu} = [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = \sigma^{\mu\nu} \oplus \sigma^{\mu\nu} \oplus \sigma^{\mu\nu}$) mit der Wechselwirkungsgruppe $E\,(N = 3) = U\,(1) \times U\,(1) \times U\,(1)$, die elektromagnetische Wechselwirkungen beschreibt, angewandt.
Als erstes wird dazu eine passende Basis für $\mathfrak{u}\,(3)$ ausgesucht, deren Mitglieder in eine Menge von Generatoren $\alpha_{1,2,3}$ der Wechselwirkungsgruppe $E\,(3)$ und eine Menge von Generatoren $\beta_{4,\ldots,9}$ der Elemente von $U\,(3) \setminus E\,(3)$ aufgeteilt werden. Alle Potentiale, Feldstärken, Ströme, Bewegungsgleichungen, usw. folgen dieser Grundsteinlegung in ihrer konkreten Ausformulierung für diesen Fall. Die stets beibehaltene Struktur der Gruppe $U\,(3)$, bzw. ihrer Liealgebra $\mathfrak{u}\,(3)$ läßt sich am besten aus dem Beispiel der Feldstärken bezüglich der Generatoren α ersehen. Ungeachtet der Tatsache, daß sie Träger elektromagnetischer Wechselwirkung sind, reduzieren sie sich nicht auf reine Rotationsausdrücke in den Potentialen der Wechselwirkung. Sie beinhalten auch immer zusätzliche Terme, die durch die Kommutatoren der βs untereinander enstehen. (Natürlich enthalten die Feldstärken der βs ebenso Terme, die aus den Kommutatoren der βs untereinander resultieren, neben denen, die aus den Kommutatoren der βs mit den αs hervorgehen, was aber weniger überraschend ist als die Nichtrotationsstruktur der Wechselwirkungsfeld-

stärken.)
Das zentrale Anliegen des Kapitels 5 ist es, die enge Beziehung zwischen dem Teilchenbild der RST und den Beschränkungen der Elemente von $U(N=3) \setminus E(N=3)$ am Beispiel aufzuzeigen. Wie schon erähnt, führt die Frage, welche anderen Ψs noch erlaubt sind, nachdem ein Teilchenbild mit Bezug auf ein spezielles Ψ aufgestellt wurde, zu genau den Einschränkungen der Parameter Λ in den generierenden Ausdrücken $\exp\{\Lambda^4(x)\beta_4\}$, usw., die die βs zu Generatoren einer Austauschsymmetrie machen. dabei ist zu betonen, daß die Einschränkung der Λs nicht bedeutet, daß sie auf konstante Werte festgelegt werden. Es verbleibt ihnen durchaus einiger Spielraum, um über der Raumzeit variieren zu können.
Hinsichtlich des Teilchenbegriffes ist noch ein weiteres Resultat von Bedeutung. Auf Grund der verwendeten vollen unitären Liesymmetrie besitzen die Einzelstromdichten, die aus Einzelspinoren von Ψ bestehen, und die jeweiligen Noetherströme aufbauen, Quellen, wenn die einzelnen Spinoren überlappen. Zusätzlich gehen in alle Noetherströme Terme ein, die rein aus Potentialen der Generatoren β bestehen. Folglich ist es nur dann möglich den Einzelspinoren von Ψ eine eigene Ladung e zuzuordnen, wenn alle Felder, spinorielle wie Potentialfelder, in jeweils eigenen Volumina lokalisiert sind, die sich nicht überschneiden. Andersherum gesagt existiert für sich überlappende, also stark miteinander wechselwirkende Freiheitsgrade, was den allgemeinen Fall darstellt, kein Teilchenbegriff. Aus diesem Grund werden die Feldfreiheitsgrade der Theorie im Allgemeinen auch nicht als Teilchen bezeichnet.
Eine andere Konsequenz des Teilchenbegriffes, der auf Felder in separaten Raumvolumina zurückgreift, ist die dadurch zwangsläufige Verbindung der Quantisierung der RST mit der Quantisierung der Raumzeit.
Kapitel 5.2 beschäftigt sich mit einer anderen erfreulichen Eigenschaft der Theorie. Die Austauschsymmetrie zwischen ungleichen Teilchen verschwindet, ohne daß Annahmen über die bereits bestehenden hinaus gemacht werden müssen, da die Metrik im Raum der Systemspinoren/-vektoren eine *Kopplungsmatrix* enthält, die der Bedingung der kovarianten Konstanz unterliegt. Einzelspinoren/-vektoren von Ψ werden dann als verschieden angesehen, wenn ihre zugehörigen Hauptdiagonaleinträge in der Kopplungsmatrix voneinander verschieden sind. Durch die Bedingung der kovarianten Konstanz der Kopplungsmatrix wird bereits die Austauschsymmetrie zwischen Einzelspinoren mit unterschiedlichen Hauptdiagonalelementen unterbunden.
Aus dem Inhalt de Ausblickkapitel 5.3 und 5.4 sollten die Besprechungen des Ausgangspunktes für den Einbau von Erzeugungs- und Vernichtungsprozeßen in Kapitel 5.3 hervorgehoben werden. Zu diesem Zweck sollte die Idee die Whitneysumme einer Symmetriegruppe mit Elementen einer einbettenden Gruppe maximaler unitärer Symmetrie zu ummanteln auf die Poincarégruppe von Ψ angewandt werden. Da es für sich überlappende Einzelspinoren/-vektoren ohnehin keinen Teilchenbegriff gibt, kann die Einschränkung einiger der Gruppenparameter Λ in diesem Fall problemlos fallengelassen werden. Mithilfe von Bewegungsgleichungen der Gruppenparameter Λ können dann unterschiedliche Untermengen der Gesamtheit der Gruppenparameter über verschiede-

nen Raumzeitregionen einer (näherungsweisen) Beschränkung unterliegen, wodurch Ψ in unterschiedlichen Weisen segmentiert wird. Dieses ist dann nichts anderes als ein unterschiedlicher Teilcheninhalt der Theorie für jede jeweilige beschränkte Untermenge von Gruppenparametern.

Einleitung

Das heutzutage gängige Verfahren, um zu einer quantenmechanischen Vielteilchentheorie zu gelangen, besteht in der Quantisierung von Feldtheorien: In den Theorien der Dirac-, Klein-Gordon, elektroschwachen oder gluonischen Felder werden die Felder selbst durch Operatoren, die sogenannten Feldoperatoren, ersetzt, die bestimmten Vertauschungsrelationen genügen müssen. Die Auswahl dieser Relationen orientiert sich hauptsächlich an der Forderung, daß sie Feldoperatoren definieren, die der Theorie eine Leiterstruktur verleihen, wie sie von den Operatoren des quantenmechanischen harmonischen Oszillators bekannt ist, da sich dadurch die Erzeugung und Vernichtung von diskreten Beiträgen zu Energie, Impuls, Spin oder (Hyper-)Ladung beschreiben lassen. Gerade die letzten beiden Erhaltungsgrößen charakterisieren, neben der Masse, ein Teilchen einer bestimmten Sorte. Durch die Leiterstruktur in diesen Größen wird folglich der Begriff der Teilchenerzeugung- und vernichtung begründet.
Weitere Kriterien für die Auswahl der Vertauschungrelationen sind die Mikrokausalität, die zur Quantisierung von bosonischen Feldern mit Kommutatoren führt, ferner die Positivität des Energieausdruckes, die die Quantisierung von fermionischen Felder mit Antikommutatoren nach sich zieht, sowie besonders bei den elektroschwachen und gluonischen Feldern die Bedingungen, die die Eichfreiheiten der Theorie stellen.
Das gerade umrissen wohlbekannte[§] Verfahren wurde zuerst nur auf freie Felder, d.h. Felder die untereinander nicht wechselwirken, angewandt. Die obige Aufzählung von Feldtypen stellt diese also beziehungslos nebeneinander. Ein wesentliches Problem der **Q**uanten**f**eld**t**heorie, kurz mit QFT bezeichnet, besteht darin, daß die Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren ihre für die Leiterstruktur benötigte Form, die dem Vielteilchenbild zugrunde liegt, nur im Fall freier Felder annehmen.
Dieses Problem wird versucht zu umgehen, indem die Wechselwirkungen als Störungen des freien Zustandes eines Vielteilchensystems behandelt werden. Nocheinmal anders und mathematisch etwas strenger gesagt, wird ein wechselwirkendes Vielteilchensystem beschrieben durch eine Störungsentwicklung seiner Zustandsfunktion um seinen freien Zustand. Die Bemühungen in dieser Hinsicht kulminieren in der **S**treumatrix (**s**cattering matrix), kurz S-Matrix genannt. Mit ihr werden die ursprünglich nur für den freien Zustand der Teilchen gedachten Vertauschungsrelationen für die Beschreibung wechselwirkender Teilchen nutzbar gemacht.
In einer solchen störungstheoretischen Behandlung der Wechselwirkung zwischen den

[§]Die Literatur zu diesem Thema ist vielzählig, als Beispiele mögen [1–5] dienen. [1] enthält im ersten Band eine Übersicht über die historische Entwicklung der Quantenfeldtheorie.

Teilchen (Feldquanten) kann sie natürlich nur eine Ausnahme sein, nicht der Normalfall. Die zur S - Matrix gehörige Bildsprache der Feynmangraphen zeigt dieses auch sehr deutlich: Wechselwirkung findet nur an den punktförmigen Vertices statt, an denen verschiedene Teilchen einander streuen; den weit ausgedehnteren Teil der Graphen nehmen die Phasen der freien Propagation der Feldquanten ein. Mit dieser Feststellung des Ausnahmestatus der Wechselwirkung in der Störungstheorie ist auch schon ihr Anwendungsbereich umrissen: Es ist die Modellierung nur wenig bzw. nur für einen sehr kurzen Zeitraum wechselwirkender Vielteilchensysteme, die eben deshalb durch den Austausch von Energie und Impuls in einigen wenigen Streuprozeßen ihrer quantisierten Freiheitsgrade ausreichend gut beschrieben werden.

Streuprozeße als solche, wie sie in den großen Beschleunigern stattfinden, sind ein Beispiel für solche Systeme. Dabei ist der Begriff "Streuprozeß" in seine beiden Bestandteile bei diesem Vorgang zu zerlegen. Die Streuung von meßbaren, ursprünglich freien, einlaufenden Teilchen in auslaufende, zu späteren Zeitpunkten auch wieder nicht mehr in Beziehung stehende, meßbare Zustände wird dadurch beschrieben, daß die Vorgänge in der Wechselwirkungszone durch die "internen" Streuprozeße der S - Matrix angenähert werden. Die S(treu) - Matrix trägt ihren Namen also aus zweierlei Gründen. Meßbar sind allerdings nur der einlaufende und der auslaufende Zustand, die in der S - Matrix zusammengefaßten modellierenden Zustände sind es nicht. Ihre Art und Anzahl hängt direkt von der Ordnung der betriebenen Störungsrechnung ab. Daß dabei abgeschlossen in jeder Ordnung für sich eine Anzahl genau definierter Teilchen vorhanden zu sein scheint, liegt darin begründet, daß eben die Vertauschungsrelationen zum Einsatz kommen, die es im freien Fall ermöglichen von Teilchen zu sprechen. Im freien Fall ordnen die durch diese Vertauschungsrelationen definierten Operatoren jedoch Ladung, Spin, Energie oder Impuls Freiheitsgraden zu, die geschlossen angegeben werden können, während sie in der Wechselwirkungszone Einzelobjekte mit Teilchencharakteristika versehen, die (bestenfalls) erst in der Gesamtheit der aufsummierten unendlich vielen Störungsordnungen das Geschehen in der Wechselwirkungszone vollständig beschreiben. Der Teilchenbegriff wird demnach in Teile der Theorie eingeführt, die für sich alleine nicht den gesamten Zustand des Systems repräsentieren. Wie sich der Begriff einer abgeschlossenen Einheit ("Teilchen") mit den für sich alleine unvollständigen einzelnen Ordnungen der Störungstheorie verträgt, ist ungeklärt, auch weil sich die QFT immer noch die Frage gefallen lassen muß, gegen welchen geschlossenen Ausdruck die Störungsreihe eigentlich konvergiert. Diese Ungereimtheit muß dadurch abgemildert werden, daß die Einzelzustände (die einzelnen Ordnungen der Störungsreihe), die nach Art und Anzahl der Teilchen, die in ihnen enthalten sein sollen, durchaus stark voneinander verschieden sind, nicht meßbar sein dürfen[§].

[§]Das Teilchenbild der QFT gerät aber nicht nur durch die Paarung von Charakteristika vollständiger Teilchen mit unvollständigen Feldern in Bedrängnis, denn in der Wechselwirkungszone ist die Teilchendichte bedeutend höher im Vergleich zum unendlich verdünnten freien Zustand, in dem das Teilchenbild begründet wird, was zur Folge hat, daß einige der charakteristischen Größen nicht mehr scharf bestimmt sind. Z.B. werden bei zwei Elektronen die Pole in den Integralen zur Festlegung

Über diese interpretatorischen Schwierigkeiten hinaus gerät die QFT mit ihrer störungstheoretischen Beschreibung von Wechselwirkungen in echte Probleme, wenn sie mit gebundenen Zuständen konfrontiert wird, denn in solchen sind Wechselwirkungen eben nicht die Ausnahme sondern die Regel. Unter den ohnehin nicht wenigen Schwierigkeiten, die die Bethe - Salpetergleichung plagen, ist diejenige einen gebundenen Zustand mittels der sich weit außerhalb ihres eigentlichen Wirkungsbereiches befindlichen S - Matrix zu beschreiben, nicht die geringste. Selbst für ein System mit der geringen Teilchenzahl $N = 2$ können nur mit sehr starken Vereinfachungen der beteiligten Feynmandiagramme überhaupt Aussagen getroffen werden; siehe z.B. [1, 2].
Die gerade angesprochenen Probleme der QFT, wie auch weitere, sind Fachkreisen durchaus bewußt, wie sich auf Tagungen, in Seminaren und selbst in der Lehrbuchliteratur feststellen läßt. Teile der gerade geäußerten Kritik finden sich in ähnlicher Form z.B. in [2] im einleitenden Text zu dessen Kapitel 6. Erstaunlicherweise werden die problematischen Punkte aber genauso gerne verdrängt wie angesprochen, zu nicht geringen Teilen sogar in direkter Abfolge. Als Beispiel hierfür kann die Behandlung des Polarisationstensors in Kapitel 5.2. in [2] dienen. Dort wird zunächst festgestellt, daß der Polarisationstensor (mathematisch) schlecht definiert ist, da er gegen die ursprünglich in der Theorie vorhandene $U(1)$ - Eichinvarianz verstößt. In der Folge wird aber nicht etwa der Ursprung des Polarisationstensors betrachtet, um festzustellen, wie die fehlerhafte Definition berichtigt werden kann, sondern es wird versucht mittels Regularisierung den fehlerhaften Ausdruck zu retten. Anstatt also die ursprünglichen Annahmen, die zum Polarisationstensor führen und die ersichtlich mit dem sehr fundamentalen Symmetrieprinzip, d.h. der Eichinvarianz, in Konflikt stehen, zu überprüfen, werden nicht gerade einfache Zusatzannahmen gemacht, um das fehlerhafte Objekt zu retten. Diese für die QFT so typische Flucht nach vorne wird selbst in der neusten Auflage noch ohne einen Hauch von (Selbst -) Kritik angetreten.
Ein weiteres Beispiel findet sich in [6], wo klar festgestellt wird, daß nur in nichtwechselwirkenden Systemen von Teilchen gesprochen werden kann und daß dieser freie Teilchenbegriff für die Beschreibung von Wechselwirkungen ein Stützkonstrukt ist. Dieses Stützkonstrukt wird aber in Kapitel VI: "Particles. Completeness of the Particle Picture" für grundlegend richtig zur Beschreibung von Wechselwirkungen erklärt, trotz der Tatsache, daß selbst heutzutage noch Klärungsbedarf zu diesem Thema besteht, und, wie der Author selbst ausführt, noch Arbeit in dieser Hinsicht aussteht. Eine kritische Betrachtung darüber, ob das Stützkonstrukt des Teilchenbegriffes in der Wechselwirkungszone tatsächlich die richtige Grundlage bildet, fehlt dann auch hier. Angesichts der nun mittlerweile mehrere Jahrzehnte andauernden Probleme mit der Störungstheorie ist die Überprüfung ihrer Grundlagen aber mehr als überfällig.
Der Verdrängungsmechnismus funktioniert zum Glück nur bei drei von vier Wechselwirkungen, denn die Quellen des Gravitationsfeldes sind Energie und Impuls, die es selber zur Genüge trägt. Es wechselwirkt deshalb mit sich selbst derart stark bzw. andauernd,

ihrer Massen unscharf

daß seine störungstheoretische Behandlung unmöglich ist, selbst fernab irgendwelcher Beiträge von Materie - oder Eichfeldern zum Energie - Impulstensor. Es kann somit niemals als so frei betrachtet werden, wie es für die Quantisierung der anderen Felder, z.B. des Diracfeldes oder des elektromagnetischen Feldes, grundlegend notwendig war¶.
Die Probleme bei der Einführung diskreter Strukturen in die **a**llgemeine **R**elativitäts**t**heorie (ART) durch die bisherigen Methoden sind so massiv, daß mit der Quantenloopgravitation ein Weg zur Quantisierung der ART beschritten wurde, der mit dem alten Ansatz wenig gemein hat [7].
Dieser Verwerfung traditioneller Vorgehensweisen schließt sich diese Arbeit an.
Aus dem allgemeinen Aufgabenfeld einer Vielteilchentheorie, das die Festlegung eines Teilchenbegriffes, die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen den Teilchen, spezieller die Beschreibung gebundener Zustände, die Beschreibung von Austauschphänomenen, Modellierung von Erzeugungs - und Vernichtungsprozeßen sowie die Quantisierung der vorhergehenden Vorgänge umfaßt, werden die ersten drei betrachtet. Bisher sind ja die Erzeugungs - und Vernichtungsprozesse in Verbindung mit Teilchenbegriff unter dem Dach der Quantisierung in den Mittelpunkt gestellt worden.
Erzeugungs - und Vernichtungsprozesse stehen also nicht im Vordergrund dieser Arbeit. Vielmehr wird Wert darauf gelegt, eine Theorie zu formulieren, die bereits vor einer Quantisierung genug Freiheitsgrade besitzt, um ein Vielteilchensystem beschreiben zu können. In der Standardtheorie ist dieses erst nach der Modenzerlegung der Feldoperatoren nach einem geeigneten Funktionensystem, meist eine Fourierzerlegung, der Fall, mit anderen Worten nach der Quantisierung. Weiterhin wird der Theorie eine maximal mögliche unitäre Liesymmetrie zugestanden, die soweit wie möglich unbeschränkt beibehalten werden soll. Beschränkungen werden ihr durch die Forderung nach einem Teilchenbegriff auferlegt. Dieser soll aber gar nicht andauernd verfügbar sein, sondern nur in speziellen Situationen. Hier ist zuerst einmal an sehr weit und damit (fast) nicht miteinander wechselwirkende Freiheitsgrade der Theorie zu denken. “Freiheitsgrade” und “Teilchen” sind demnach im Allgemeinen nicht miteinander synonym.
Die Situation (fast) nicht miteinander in Beziehung stehender Freiheitsgrade als “natürliche Umgebung” des Teilchenbegriffes ergibt sich, weil mit abklingender aufeinander ausgeübter Wechselwirkung der Freiheitsgrade eher zwanglos die Bedingungen erfüllt werden, die die Freiheitsgrade der Theorie mit einem Teilchenbegriff in Einklang brin-

¶Das Problem stark mit sich selbst wechselwirkender Eichfelder ist nicht alleine auf die Gravitationswechselwirkung beschränkt. Auch die **Q**uanten**c**hromo**d**ynamik, kurz mit QCD bezeichnet, hat mit einer fliehenden Koppelungskonstanten (running coupling constant) zu kämpfen, da die gluonischen Felder dieser Theorie ebenso farbtragend sind, wie die Quarks und folglich außer an die spinoriellen Felder auch untereinander koppeln. Allerdings trägt nicht jedes gluonische Feld jede Farbe, so daß nur bestimmte unter ihnen in Beziehung stehen, nicht alle, im Gegensatz zum Gravitationsfeld, bei dem jede seiner Moden mit Energie und Impuls genau die Größen trägt, die sie mit allen anderen koppelt. Aus diesem Grund ist die Kopplungskonstante noch renormierbar. Sie ist aber viel zu groß, als daß sie die Störungstheorie nach Art der QED (**Q**uanten**e**lektro**d**ynamik) oder der elektroschwachen Theorie zulassen würde. Es kommen andere Methoden zum Einsatz, die aber ähnlich problembehaftet sind, wie die der QED oder elektroschwachen Theorie sind.

gen. Unter "Wechselwirkung" ist hier immer die Wirkung der ganzen unitären Symmetrie zu verstehen, nicht nur Teile davon, wie bisher üblich, was der Grund für das Adjektiv "erweitert" im Titel dieser Arbeit ist.

Ein Teilchenbegriff ist auch hier erreicht, wenn sich Erhaltungsgrößen genau einem Freiheitsgrad zuordnen lassen. Es werden speziell die gleichen (Hyper -)Ladungen sein, für die diese Zuordnung nicht immer möglich ist. Somit wird ein Weg gewählt, der entgegengesetzt zu dem in der Standardtheorie beschrittenen verläuft: Zuerst wird ein wechselwirkendes System betrachtet, das in einem Grenzfall einen Teilchenbegriff hervorbringt, anstatt erst in einem Spezialfall einen Teilchenbegriff zu begründen, der dann mit viel Mühe in den Fall mit Wechselwirkung eingebracht wird. Die Bedingungen, die die Freiheitsgrade beim hiesigen Vorgehen mit einem Teilchenbegriff zur Deckung bringen, *können* in die Wechselwirkungszone, dem Kernbereich der hier vorgestellten Theorie, übernommen werden, *müssen* es aber nicht. Sie sind außerhalb des Grenzfalles freier Freiheitsgrade auch recht restriktiv, weshalb ihre Beibehaltung eher hinderlich ist. Mit dem letzten Satz wird beabsichtigt, daß ein ständig beibehaltener Teilchenbegriff, d.h. eine dauerhafte strenge Zuordnung bestimmter Größen zu nur einem Freiheitsgrad, Schwierigkeiten bereitet, eben durch die Bedingungen, die er mit sich bringt und seine Aussetzung Erleichterung verschafft. Erhaltungsgrößen jeder Art sind dann unterteilungslos dem System als ganzem zugeordnet, einzelne Freiheitsgrade des Systems auflösende Messungen nicht mehr möglich. Die Ungereimtheit, in einer nicht meßbaren bzw. keine Messung, die bestimmte Teile des Systems als autarke Einheiten herauslöst, zulassenden Situation einen Teilchenbegriff zugegen zu haben, der eine solche Vereinzelung scheinbar gestattet, entsteht auf diese Weise gar nicht erst.

Die hohe Zahl an Freiheitsgraden sowohl im Anteil der materiellen[§] als auch der Wechselwirkung vermittelnden Felder, die die Theorie bereits vor der Quantisierung besitzt, befreit die Beschreibung von Vielteilchensystemen noch in zwei anderen Punkten von unnötigen Zwängen.

Zum Ersten erlaubt eine hohe Anzahl an materiellen Freiheitsgraden eben die Verwendung einer hochdimensionalen unitären Strukturgruppe, die nur dann eingeschränkt wird, wenn von Teilchen gesprochen werden soll, also zum Teilchenbegriff hin, nicht von ihm ausgehend. Im Vergleich dazu existiert in der QFT, wie schon erwähnt, ein Vielteilchenbegriff erst nach der Quantisierung. Diese wird aber in eine Feldtheorie mit minimalen materiellen und potentiellen Feldfreiheitsgraden implementiert. So besitzt die Lagrangedichte der QED gerade mal ein spinorielles Feld und ein Vektorpotential, die QCD drei Spinoren und immerhin neun Vektorpotentiale, was aber immer noch wenig ist, wie sich gleich zeigen wird. Die wenigen Felder bzw. ihre Feldoperatoren der Ausgangstheorie werden dann nach einem vollständigen Funktionensystem entwickelt, dessen Koeffizienten zu den Basisfunktionen dann die eigentliche Grundlage für den Vielteil-

[§]"Materielle Felder" dient als etwas ungenauer Sammelbegriff für alle Felder, die keine Wechselwirkung vermittelnden Potentiale sind. Mitunter wird, in Anlehnung an diesen Sammelbegriff, auch von "potentiellen Feldern" gesprochen, wenn von Wechselwirkung vermittelnden Potentialen die Rede ist.

chenbegriff sind. Solche Vektorräume sehr hoher oder sogar überabzählbarer Dimension erlauben die Verwendung einer sehr viel größeren Strukturgruppe als die der anfänglichen Theorie. Dieser hohe Transformationsfreiheitsgrad im Funktionenraum, dessen einzelne Basisfunktionen wesentlich für die Begriffe der QFT sind, werden dadurch empfindlich eingegrenzt, daß der Funktionenraum nur zur Beschreibung einige weniger Felder genutzt wird. Sehr deutlich sieht man diese Restriktion beispielsweise bei der schon in die Kritik geratenen Behandlung des Polarisationstensor in [2]. Dort werden aus der Eichfreiheit des einen Vektorpotentials im Ortsraum, die entsprechenden Ausdrücke für alle seine Fourierkoeffizienten im Impulsraum abgeleitet, was natürlich soweit nicht falsch ist. Bei Licht besehen wird damit aber aus den vielen möglichen unitären Transformationen im Impulsraum nur die wenigen herausgesucht, die denen der $U(1)$ im Ortsraum entsprechen. Zwischen genau diesen $U(1)$ - Transformationen und dem Polarisationstensor entsteht nun ein Konflikt, der durch Regularisierung umgangen wird.
Zum Zweiten erlaubt die Beschränkung der unitären Symmetrie, die dem Teilchenbegriff zugrunde liegt, auch die Aufstellung eines Begriffes des Austausches identischer Teilchen (Freiheitsgraden, die mit identischen Charakteristika versehen sind) innerhalb der Strukturgruppe; sind die Teilchen nicht identisch, entfällt der entsprechende Teil der Symmetriegruppe, ohne daß weiter Annahmen, als die bei der Aufstellung der Theorie bereist getroffenen gemacht werden müssen.
Damit befreit die hochdimensionale *lokale* unitäre Strukturgruppe die Beschreibung von Vielteilchensystemen von dem Zwang zusätzlich die *globale* Permutationsgruppe verwenden zu müssen. Deren Nichtlokalität hat ja seit ihrer Einführung immer im spannungsgeladenen Kontrast zum Prinzip der Lokalität der Physik gestanden.
Die gerade umrissenen Vorstellungen für eine Feldtheorie, die in der Lage ist ein System mit vielen wechselwirkenden Teilchen/Freiheitsgraden zu beschreiben, werden in Teil 3, dem Hauptteil dieser Arbeit, verwirklicht. Kapitel 4 hat die $U(N)$ - symmetrische Lagrangedichte eines Systems mit N spinoriellen Freiheitsgraden (Unterkapitel 4.1) oder N skalaren Freiheitsgraden (Unterkapitel 4.2) zum Inhalt. Besonders in Unterkapitel 4.1 werden die Orte benannt, an denen die geäußerten Vorstellungen umgesetzt werden sollen; soweit dieses schon in der allgemein Form des Kapitels 4 konkret möglich ist, wird dieses auch getan. Meistens wird jedoch erst einmal ein Rahmen an Vorgaben gezogen, den konkrete Modelle auszufüllen bzw. zu beachten haben. Als fundamentales Beispiel eines solchen konkreten Modells wird in Kapitel 5 ein System mit drei spinoriellen Freiheitsgraden unter der Gruppe $U(3)$ betrachtet. Wie seine Begriffe in die Vorgaben aus Kapitel 4.1 eingebettet sind, wird gründlich behandelt. Diese Einbettung in 4.1 bzw. die Entstehung des Systems aus 4.1 als Leitfaden nehmend, sollte es ohne größere Schwierigkeiten möglich sein, den Formalismus aus Kapitel 4 auch für Systeme mit mehr Freiheitsgraden und höherdimensionalen unitären Strukturgruppen zu verwenden. Die letzten beiden Unterkapitel 5.3 und 5.4 geben einen Ausblick auf solche Systeme, sowie eine Übersicht über die Teile der Theorie, deren Weiterentwicklung sehr gute Möglichkeiten bietet Teilchenerzeugung und - vernichtung in einer Feldtheorie, d.h. ohne gleichzeitige Quantisierung zu beschreiben.

Mit Anordnung der Kapitel, 4 über die Lagrangedichte zuerst, gefolgt von 5 über ein spezielles System, gibt der Aufbau des dritten Teils einen wesentlichen Charakterzug der Theorie wieder: Aus einer Situation mit einigen wenigen, aber sehr grundsätzlichen Prinzipien als Fixpunkte ensteht eine, in der sich einzelne Teile immer schärfer gegeneinader abgrenzen und so ihre Bedeutung erhalten.
Wer sich die Grundlagen einer neuen Herangehensweise lieber an einem Beispiel erarbeitet, kann auch mit Kapitel 5 beginnen; es ist ausführlich genug, um auch alleine verständlich zu sein, um sich erst danach Kapitel 4, besonders 4.1 zu widmen, und dessen Inhalt als Verallgemeinerung von 5 ansehen.
Entstanden ist der Inhalt des dritten Teiles im Umfeld der relativistischen Schrödingertheorie, worauf sein Name und der Titel der Arbeit ja hinweisen. Diese Theorie wird in Teil I beschrieben, was auch die Wurzeln beleuchtet, die der dritte Teil in der (permutativen) relativistischen Schrödingertheorie besitzt. Welche Entwicklungslinien aus Teil I in Teil III nicht fortgesetzt werden und warum, schildert Teil II, d.h. Kapitel 3. Die dort geäußerte Kritik ist in verteilter Form schon im ersten Teil zu finden. Zusätzlich zu den zusammengefaßten Kritikpunkten wird in Kapitel 3 auch angegeben, welche Ideen die kritisierten Punkte ablösen sollen. Aus der Zwischenbilanz entspinnt sich dadurch ein Leitfaden, entlang dem sich der Rest der Arbeit bewegt. Kapitel 3 kann deshalb durchaus als Fortsetzung der Einleitung angesehen werden, in der die oben geäußerten Gedanken mathematischer formuliert werden, vor allem in Bezug auf die Verwendung der hochdimensionalen Symmetriegruppe. Wer daran interessiert ist, kann direkt im Anschluß an diese Einleitung Teil II lesen, vor allem dessen letzten Abschnitte. Eine Ausführung dieser Ideen ohne weitere Umschweife bietet die sich sofort anschließende Lektüre des dritten Teiles.
Eine Arbeit wie diese entsteht natürlich nicht im Alleingang. Deshalb möchte ich mich bei den folgenden Personen ganz herzlich bedanken: Herrn Dr. M. Sorg gilt mein Dank für die Aufnahme in seine Gruppe und die interessante Themenstellung. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. U. Weiß für die Übernahme des Hauptberichtes zu dieser Arbeit, obwohl sie nicht seinem eigentlichen Forschunggebiet zugehört. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. G. Wunner für die Übernahme des Mitberichtes, sowie Prof. Dr. U. Seifert für die Aufnahme am II. institut für Theoretische Physik.

1. Mathematische Vorbemerkungen

Wie jede Yang - Millstheorie (Eichtheorie) basiert die relativistische Schrödingertheorie mathematisch auf der Faserbündeltheorie. In diesem Kapitel wird eine kurze Übersicht über deren wichtigsten Grundbegriffe gegeben sowie die im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendete Notation eingeführt. Die Darstellung stützt sich im wesentlichen auf [8–11], in denen auch dieser kurze Überblick vertieft werden kann.

1.1. Allgemeine Faserbündel und Vektorbündel

Die Bestandteile eins allgemeinen (differenzierbaren) Faserbündels $B(E, \pi, M, F, G)$ sind die folgenden:

1. Die "*totaler Raum*" E benannte differenzierbare Mannigfaltigkeit.

2. Die "*Basisraum*" M genannte differenzierbare Mannigfaltigkeit. In der Physik ist M entweder der Minkowskiraum $\mathbb{R}^4_1$ oder eine vierdimensionale riemannschen Mannigfaltigkeit M^4_1. Die Metrik $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$ beider Räume weist die Signatur $- + ++$, oder äquivalent $+ - --$, auf.

3. Die "*Faser*" oder auch "*typische Faser*" F genannte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist F ein Vektorraum V^k der Dimension k, z.B. $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{R}^k$ oder auch die Algebra einer Liegruppe, wird das zugehörige Bündel *Vektorbündel* genannt.

4. Die "*Projektion*" π benannte Surjektion

$$\pi : E \to M \ . \tag{1.1}$$

   Deren inverse Abbildung

$$\begin{gathered} \pi^{-1}(p) = F_p \cong F \\ p \in M \ , \end{gathered} \tag{1.2}$$

   ist isomorph zur Faser F und wird deshalb auch direkt als Faser F über p bezeichnet.

5. Die als "*Strukturgruppe*" bezeichnete Liegruppe G. Sie wirkt von links auf die Faser.

6. Schließlich noch das wichtigsten Element, die "*lokale Trivialisierungen*" genannten Diffeomorphismen τ_i, die jeweils über ihrem Element U_i der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ von M den Teil $(U_i \times F)$ nach $\pi^{-1}(U_i)$ abbilden

$$\tau_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i) \ , \tag{1.3}$$

derart, daß für die Projektion $\pi \circ \tau_i(p, f)$

$$\begin{aligned} \pi \circ \tau_i(p, f) &= p \\ p &\in M \\ f &\in F \end{aligned} \tag{1.4}$$

gilt. Der Name "lokale Trivialisierung" rührt daher, daß τ_i^{-1}, die inverse Abbildung von τ_i, $\pi^{-1}(U_i)$ auf das direkte Produkt $U_i \times F$ abbildet:

$$\tau_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F \ . \tag{1.5}$$

Ein Paar (U_i, τ_i) wird eine *Karte* genannt und $\{(U_i, \tau_i)\}$ ein *Atlas*, wobei die U_i eine offene Überdeckung von M sind: $M = \cup_i U_i$.

Der letzte Punkt zeigt, welches Ziel genau mit den Faserbündeln verfolgt werden soll. Zuerst einmal soll der totale Raum E durch Abbildung auf das direkte Produkt zweier bekannter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten handhabbar gemacht werden, auch im Sinne eines Differentialkalküls. Je nach Beschaffenheit des Basisraumes ist das nur lokal, d.h über den offenen Teilmengen U_i von M möglich. Im Zusammenspiel der nur lokal möglichen Trivialisierungen mit globalen Objekten des Bündels lassen sich Aussagen über die Beschaffenheit (der Topologie) der Basismannigfaltigkeit M treffen.
Auch in der Physik verwendete globale Objekte eines Bündels sind die Schnitte s

$$s : M \to E \ , \tag{1.6}$$

die M so in den Totalraum E abbilden, daß $s(p) = s|_p$ ein Element der Faser $F(p) = \pi^{-1}(p)$ über p ist. D.h. es gilt

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_M \ . \tag{1.7}$$

Zudem sollen die durch (1.5) und (1.6) definierten Abbildungen glatt sein. Ist die Faser F ein Vektorraum V^k der Dimension k, wird durch einen Schnitt s ein stetiges Vektorfeld über dem Basisraum M angegeben, weshalb Schnitte für die Physik interessant sind. Das elektromagnetische Feld $\left(\vec{E}, \vec{B}\right) \in \mathbb{R}^6$, Diracspinoren $\psi \in \mathbb{C}^4$ oder Klein - Gordonfelder $\phi \in \mathbb{C}^1$ sind solche Schnitte; die lokalen Lorentzkoordinaten der allgemeinen Relativitätstheorie bestehen aus vier linear unabhängigen Schnitten, die ihre Werte in den als Fasern betrachteten Tangentialräumen T_pM[§] annehmen, und *Rahmen* oder *Koordinatenrahmen* genannt werden. Von ihren lokalen Darstellungen mittels der τ_i über den U_i und den damit zusammenhängenden Freiheiten oder Uneindeutigkeiten wird sofort zu sprechen sein. Ein *lokaler Schnitt* s_i ist ein auf einer offenen Teilmenge $U_i \subset M$ definierter Schnitt. Er kann z.B. durch die Beschränkung eines globalen Schnittes auf eine offene Teilmenge U_i entstehen: $s_i = s|_{U_i}$. Die Koordinatendarstellung durch eine lokale Trivialisierung τ_i eines globalen Schnittes kann nur durch eine solche Restriktion angegeben werden. Über dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ zweier offener Mengen U_i und U_j mit lokalen Trivialisierungen τ_i und τ_j besitzt solch ein restringierter Schnitt s demnach zwei verschiedene Koordinatendarstellungen, die alleine schon wegen der Forderung nach Stetigkeit von s auf vernünftige Weise miteinander in Beziehung stehen müssen. Die Art, wie sich dieser Zusammenhang gestaltet, ist einer der Punkte, die Auskunft über die Beschaffenheit von M geben. Schnitte sind in der Physik sehr wichtig, aber nicht die einzigen Objekte, die auf E definiert werden können und durch die lokalen Trivialisierungen ihre Koordinatendarstellung erhalten, die über den Schnittmengen zweier offener Mengen von M ebenso nicht völlig ohne Bezug zueinander sein dürfen. Es ist also sinnvoll die koordinatengebenden Abbildungen τ_i selber miteinander in Beziehung zu setzen. An dieser Stelle kommt die Strukturgruppe G ins Spiel. Dazu ist zunächst zu Bemerken, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_i\,(p,f) = \tau_{i,p}\,(f) : F \to F_p \\ p \in M \\ f \in F\ , \end{aligned} \tag{1.8}$$

ein Diffeomorphismus von F nach F_p ist. Über $U_i \cap U_j$ lässt sich der Koordinatenwechsel in der Faser von denen, die durch $\tau_{j,p}$ gegeben sind, zu denen von $\tau_{i,p}$ damit durch

$$t_{ij}\,(p) \equiv \tau_{i,p}^{-1} \circ \tau_{j,p} : F \to F \tag{1.9}$$

beschreiben. Die $t_{ij}\,(p)$ sollen Elemente der Gruppe G sein: $t_{ij}\,(p) \in G$. Sie können als glatte Abbildung von $U_i \cap U_j$ nach G aufgefaßt werden:

$$t_{ij} : U_i \cap U_j \to G \tag{1.10}$$

Mit ihnen wird der Koordinatenwechsel in der Faser folgendermaßen ausgedrückt:

$$\tau_j\,(p, f_j) = \tau_i\,(p, t_{ij}\,(p)\, f_i)\ . \tag{1.11}$$

Da sich nur die Elemente $f \in F$ ändern, die einem Element aus dem Totalraum E zugewiesen werden, aber nicht der Punkt $p \in M$, kann (1.11) auch etwas schlanker ausgedrückt werden:

$$f_j = t_{ij}\,(p)\, f_i\ . \tag{1.12}$$

[§] Die *Tangentenbündel* TM der riemannschen Geometrie, die aus der Zusammenfassung $TM = \cup_i TU_i = \cup_{p \in U_i \subset M} T_pM$ aller Tangentialräume einer riemannschen Mannigfaltigkeit M bestehen, gehören zu den bekanntesten Beispielen für Faserbündel.

Damit die t_{ij} ihrer Aufgabe gerecht werden können, müssen sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$t_{ii} = \mathrm{id}_F \tag{1.13a}$$
$$t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p) \tag{1.13b}$$
$$t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \ . \tag{1.13c}$$

Kann man für alle Übergangsfunktionen t_{ij} die Identitätsabbildung wählen, ohne die Konsistenz des Bündels zu verletzen, ist das Bündel durch das direkte Produkt $M \times F$ beschreibbar und wird *trivial*, weil eben global trivialisierbar, genannt.
Durch die t_{ij} wird ein vernünftige Verbindung der einzelnen Koordinatensysteme τ_i miteinander erreicht, die z.B die Stetigkeit der globalen Schnitte s auch in deren Koordinatendarstellungen s_i garantiert. Andererseits eröffnet eine solche konsistente Aneinanderklebung der einzelnen Fasern F_p durch die $t_{ij}(p)$ die Möglichkeit lokale Objekte, die über einzelnen U_i definiert sind, zu globalen zusammenzusetzen; etwa einen globalen Schnitt s aus lokalen Schnitten s_i

$$\begin{aligned} s &= \cup_i s_i \\ s_i &: U_i \subset M \to F_{U_i} \ , \end{aligned} \tag{1.14}$$

dessen Faserkoordinaten der einzelnen s_i durch Elemente $t_{ij} \in G$ zusammenhängen.
Nach diesem Muster lassen sich auch Bündel aus lokalen direkten Produkten $U_i \times F$ zusammensetzten

$$\begin{aligned} X &= \cup_i U_i \times F \\ M &= \cup_i U_i \ , \end{aligned} \tag{1.15}$$

wenn man die Elemente $(p, f_i) \in U_i \times F$ und $(q, f_j) \in U_j \times F$ durch

$$(p, f_i) \sim (q, f_j) \quad \text{, wenn } \ p = q \ \text{ und } \ f_j = t_{ij} f_i \ ; \ t_{ij} \in G \tag{1.16}$$

identifiziert, also die Äquivalenzklasse

$$E = X/\sim \tag{1.17}$$

mit $\sim$ aus (1.16) bildet. Auf diese Weise lassen sich auch Bündel mit gleichen Strukturgruppen aber verschiedenen Fasern zueinander assoziieren, in dem in einem bekannten Bündel seine Fasern F lokal gegen andere F' ausgetauscht werden, wobei der Rest, vor allem die Strukturgruppe und ganz besonders die einzelnen Übergangsfunktionen $t_{ij(p)}$, nicht verändert werden. Anschließend werden die lokalen Ausdrücke $U_i \times F'$ durch (1.15) - (1.17) zum Faserbündel $B(E, \pi, M, F', G)$ zusammengefügt. G muß natürlich auf die neue Faser F' anwendbar sein.
Die Strukturgruppe G eines Bündels als Vermittlerin zwischen den lokalen Trivialisierungen eins Bündels eröffnet viel über die (topologische) Beschaffenheit von M. Das

Verfahren (1.15) - (1.17) ermöglicht es andersherum durch die Wahl der Strukturgruppe G, die an der Äquivalenzrelation (1.16) entscheidenden Anteil hat, sich ein Bündel mit gewünschten Eigenschaften zu schaffen. Die Bildung von Bündeln die durch ihre Strukturgruppe zueinander assoziiert sind, ist ein Beispiel dafür, wie durch die Gruppe G auf eine Faser F', die aus einem anderen Zusammenhang heraus, dem des Bündels mit Faser F, als brauchbar angesehenen Eigenschaften der Gruppe G, übertragen werden. In der Physik sind solche Assoziationen die Paarung eines *Prinzipalbündels*, dessen definierende Eigenschaft die Gleichheit seiner Faser mit seiner Strukturgruppe ist, mit einem Vektorbündel, auf dessen Vektorfaser die Gruppe G in Vektorraumdarstellung wirkt.

Von besonderem Interesse an diesen Paarungen ist für die Physik der Identifizierungsprozeß (1.16) im Vektorbündel, denn dadurch werden verschiedene Vektoren der Faser durch die Wirkung einer Gruppe als zueinander äquivalent erklärt. Ein Vektor der durch $\sim$ (1.16) entstandenen Äquivalenzklasse von Vektoren beschreibt das zu modellierende System ebenso gut, wie jeder andere Repräsentant dieser Klasse, in dem Sinne, daß die aus derartigen Vektoren konstruierten Meßgrößen invariant unter der Wahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse sind und der Rest der Theorie, wie z.B. die Bewegungsgleichungen, forminvariant unter der Wahl sind. Die Identifizierung aus (1.16) ist somit nichts Anderes als der formale Ausdruck der Ideen der *Eichinvarianz* und der *Eichkovarianz*, die in der Elektrodynamik und der allgemeinen Relativitätstheorie ihre maßgeblichen Wurzeln besitzen. Die Wahl eines Repräsentanten der Klasse äquivalenter Vektoren wird in der Physik als *Wahl einer Eichung* bezeichnet. Vom Standpunkt der Physik aus, wird in solchen *Eichtheorien* durch die Strukturgruppe G, die die Äquivalenzklasse der Vektoren und damit die möglichen Wahlfreiheiten entscheidend mitbestimmt, die Art der Wechselwirkung im betrachteten System benannt. In der (klassischen) Elektrodynamik ist $G = U\,(1)$, in der allgemeinen Relativitätstheorie ist $G = SO\,(3,1)$. Zwei jüngere Vertreter der Eichtheorien sind die elektroschwache Wechselwirkung mit $G = SU\,(2)$ und die Quantenchromodynamik mit der Farbgruppe $G = SU\,(3)$.

Daß durch die Identifizierung in (1.16) durch Mitwirkung der Gruppe G tatsächlich die Idee der Eichtheorien der Physik erfaßt wird, zeigen die folgenden Betrachtungen der lokalen Trivialisierungen τ_i und ihrer Übergangsfunktionen.

Es seien $\{\tau_i\}$ und $\{\tilde{\tau}_i\}$ zwei verschiedene Sätze von lokalen Trivialisierungen desselben Faserbündels über dessen offener Überdeckung $\{U_i\}$ von M. Jeder Satz lokaler Trivialisierungen besitzt seine eigenen Übergangsfunktionen t_{ij} und $\tilde{t}_{ij}$ über $U_i \cap U_j$

$$t_{ij} = \tau_{i,p}^{-1} \circ \tau_{j,p} \tag{1.18a}$$

$$\tilde{t}_{ij} = \tilde{\tau}_{i,p} \circ \tilde{\tau}_{j,p}\ . \tag{1.18b}$$

Es läßt sich aber auch eine Abbildung $F \to F$ über einer offenen Menge U_i alleine definieren:

$$g_i\,(p) \equiv \tau_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\tau}_{i,p} \tag{1.19}$$

Da $\{\tau_i\}$ und $\{\tilde{\tau}_i\}$ dasselbe Bündel beschreiben gehört $g_i\,(p)$ zwingend zu G. Aus dem gleichen Grund sind sowohl $t_{ij}\,(p)$ als auch $\tilde{t}_{ij}\,(p)$ Elemente von G. Durch Einsetzen der beiden Einsoperatoren $t_{ii} = \tau_{i,p}^{-1} \circ \tau_{i,p}$ und $t_{jj} = \tau_{j,p}^{-1} \circ \tau_{j,p}$ in (1.18b) erhält man das Verhältnis in G zwischen diesen drei Elementen von G:

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i(p) \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p) \ . \tag{1.20}$$

Die unterschiedlichen Sätze $\{\tau_i\}$ und $\{\tilde{\tau}_i\}$ besagen nichts Anderes, als daß die lokalen Trivialisierungen selbst über *einer* offenen Menge U_i nicht eindeutig sind, wobei $g_i(p)$ (1.19) zwei solche verschiedenen koordinatengebenden Abbildungen miteinander in Beziehung setzt. Während die t_{ij} immer dann Anwendung finden, wenn die Basismannigfaltigkeit einen Wechsel der lokalen Trivialisierungen beim Wechsel erzwingt, weil über zwei verschiedenen ihrer offenen Mengen U_i und U_j kein einheitliches Koordinatensystem möglich ist, drücken die $g_i(p)$ im Gegensatz dazu eine *Freiheit* der Theorie aus. Über einem U_i wird das Bündel durch $\{\tau_i\}$ genausogut beschrieben wie durch $\{\tilde{\tau}_j\}$. Das entspricht genau der Idee der Eichfreiheit in der Physik und da zwischen diesen Freiheitsgraden durch die Elemente $g_i(p) \in G$ der Strukturgruppe vermittelt wird, werden sie im Identifizierungsprozeß (1.16) mit erfasst.

1.2. Prinzipalbündel, assoziierte Vektorbündel und der eichkovariante Ableitungsbegriff

Da die Bildung des Paares aus Prinzipalbündel und Vektorbündel durch Assoziation für Yang - Millstheorien (Eichtheorien) von grundlegender Bedeutung ist, soll dieser Vorgang hier nocheinmal etwas genauer beleuchtet werden.
Prinzipalbündel sind, wie gesagt, Faserbündel deren Strukturgruppe zugleich ihre Faser ist: $P(E, \pi, M, G, G)$. Sie werden häufig kurz mit $P(M, G)$ bezeichnet.
Da Faser und Gruppe übereinstimmen, ist es durch das Produkt in der Gruppe sichergestellt, daß ein Element der Gruppe auch von rechts sinnvoll an ein Element der Faser multipliziert werden kann. Dadurch ergibt sich für ein $u \in \pi^{-1}(U_i)$, das durch $\tau_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ die Koordinaten $\tau^{-1}(u) = (p, g)$ erhält, die anderen Faserbündeln unbekannte Abbildung von $P \times G \to P$

$$\begin{aligned} ua &= \tau_i(p, g_i a) & (1.21) \\ u &\in \pi^{-1}(U_i) \\ a, g_i &\in G \\ p &\in M \ . & (1.22) \end{aligned}$$

Die g_i sind dabei Faserkoordinaten, die u durch τ_i/τ_i^{-1} zugeordnet werden, wodurch der Eindruck ensteht, die Abbildung (1.21) wäre abhängig von den lokalen, nicht eindeutig bestimmten Trivialisierungen. Wegen

$$ua = \tau_j(p, g_j a) = \tau_i(p, t_{ji} g_i a) = \tau_i(p, g_i a) \ , \tag{1.23}$$

ist (1.21) tatsächlich aber unabhängig von der Wahl der lokalen Trivialisierung. Die Bedeutung diese Abbildung liegt in der Eigenschaft

$$\pi(ua) = \pi(u) = p \ , \tag{1.24}$$

im Zusammenschluß mit den Tatsachen daß *ua transitiv* ist, d.h. für zwei u_1, u_2 derselben Faser gibt es immer ein $a \in G$ mit $u_1 = u_2 a$, und daß *ua frei* ist, also für $ua = u$ muß u gleich dem Einselement e von G sein. Dadurch läßt sich eine ganze Faser als

$$\pi^{-1}(p) = \{ ua |\, a \in G \} \tag{1.25}$$

angeben. Besonders interessant ist diese Möglichkeit bei der Betrachtung von (lokalen) Schnitten eines Prinzipalbündels, denn zu einem Schnitte $s_i(p)$ existiert genau ein u mit $u = s_i(p)\, g_u$. Nimmt man als definierende Eigenschaft einer lokalen Trivialisierung τ_i die Eigenschaft $\tau_i^1(u) = (p, g_u)$ an, ergibt sich für $s_i(p)$ der Ausdruck

$$s_i(p) = \tau_i(p, e) \ . \tag{1.26}$$

In einem Prinzipalbündel steht also die willkommene Möglichkeit offen, eine Faser mit Hilfe der Gruppe G aus einem Element er Faser zu konstruieren und einen Schnitt $s_i(p)$ durch Wahl einer geeigneten Trivialisierung als über einem Punkt dem Einselement der Strukturgruppe zuzuordnen. Diese Eigenschaften sind äußerst nützlich bei der Identifikation von Elementen einer Vektorfaser und bei der Bildung eines sich wie die Vektoren selber transformierenden Ableitungsbegriffes in einem Vektorbündel, wenn beide Eigenschaften erst in ein Vektorbündel übertragen worden sind. Dazu wird zu $P(M, G)$ ein Vektorbündel mit Faser $F = V^k$ assoziiert, indem die Abbildung $P \times F \overset{G}{\to} P \times F$ mittels G

$$\begin{aligned} &(u, f) \to \left(ug, g^{-1} f\right) \\ &\quad u \in P \\ &\quad f \in F \ , \end{aligned} \tag{1.27}$$

definiert wird, durch die zwei Punkte $(u, f), (u', f') \in (P \times F)$ durch

$$(u', f') = \left(ug, g^{-1} f\right) \tag{1.28}$$

identifiziert werden. Das assoziierte Vektorbündel $B\left(E, \pi, M, \rho(G), V^k, P\right)$ ist die Äquivalenzklasse $P \times {}_\rho V^k$. $\rho(G)$ ist die k - dimensionale Darstellung der Gruppe G im Vektorraum V^k; in B kommt dann die Übergangsfunktion $\rho(t_{ij})$ zur Anwendung, wenn in P t_{ij} verwendet wird.

Die gerade geschilderte enge Beziehung zwischen einem Vektorbündel und seiner Eichgruppe, die durch das assoziierte Prinzipalbündel direkter Handhabung zugänglich ist, kann auch vom Vektorbündel ausgehend begründet werden. Dazu werden seine Fasern

$F = V^k$ lokal durch die Gruppe G unter Beibehaltung der Übergangsfunktionen ersetzt und der oben geschilderte (siehe (1.16)) Konstruktionsprozeß eines Bündels aus lokalen direkten Produkten angewandt wird.
Die enge Beziehung zwischen einem Vektorbündel und seiner Strukturgruppe findet sich im Ableitungsbegriff des Vektorbündels wieder, der sich wie die Vektorfaser selber transformiert. Er kann auf genau den zwei Wegen hergeleitet werden, auf denen sich ein Vektorbündel und das Prinzipalbündel seiner Strukturgruppe miteinander verbinden lassen. D.h. man startet entweder damit, zuerst im Prinzipalbündel eine Begrifflichkeit für den Vergleich von Schnitten in infinitesimal benachbarten Fasern aufzustellen, der nicht unwesentlich von den Eigenschaften (1.25) und (1.26) Gebrauch macht, und dann ins Vektorbündel verbracht wird. Oder man beginnt im Vektorbündel, ausgehend von der Tatsache, daß der Konnexionsbegriff der riemannschen Geometrie, die Abbildung $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, zu nicht geringen Teilen Gebrauch von der Tatsache macht, daß $\mathfrak{X}(M)$ (die Menge aller Vektorfelder über M) ein Vektorraum ist. Einen der Räume $\mathfrak{X}(M)$ durch einen anderen Vektorraum, z.B. die Menge aller Schnitte eines Vektorbündels $\Gamma(M, E)$, auszutauschen, bereitet nur geringe Probleme und führt zum selben Ableitungsbegriff wie der erste Weg. In den meisten Büchern über riemannsche Geometrie wird dieses auch angemerkt, siehe z.B [11].
Beide Herleitungen sind in der Literatur ausführlich geschildert, die erste in [10] und die zweite in [8], weshalb sie hier nicht nocheinmal widerholt werden müssen; Bücher abzuschreiben ist eine Kunst, die seit dem Mittelalter zurecht an Ansehen verloren hat (und [8] ist in diesem Kapitel ohnehin schon genug strapaziert worden.)
Das Bild der Abbildung $\Gamma(M, E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(M, E)$ ist der Vektor $\mathcal{D}_\mu S$

$$\mathcal{D}_\mu S = \partial_\mu S + W^a{}_\mu \omega_a S \tag{1.29}$$
$$\{\omega_a\} : \text{Basis der Liealgebra der Strukturgruppe } G$$

wenn $S \in \Gamma(M, E)$ ein Element der Menge aller Schnitte ist, dessen Veränderung entlang eines Vektorfeldes $X = X^\mu(p)\, \vec{e}_\mu(p) \in \mathfrak{X}(M)$ gerade betrachtet wird. Daß in (1.29) ein Element der Liealgebra $\mathcal{W}_\mu = W^a{}_\mu \omega_a$ der Strukturgruppe G des Vektorbündels auftritt, ist nicht weiter verwunderlich, denn es wird die Veränderung des Schnittes/Vektorfeldes s in seiner lokalen Umgebung betrachtet, in der sich $s|_p$ an der Stelle p von einem infinitesimal benachbarten $s|_{p'}$ an der Stelle p' außer durch "echte" Veränderungen auch durch einen Koordinatenwechsel durch Wechsel der lokalen Trivialisierungen unterscheiden kann, wobei dieser letzte Unterschied im Sinne eines Differentialkalküls gar keiner ist, da ggf. nur derselbe Vektor in verschiedenen Koordinaten ausgedrückt wird. Genau diesen scheinbaren Veränderungen wirkt $\mathcal{W}_\mu$ entgegen, so daß (1.29) nur mißt, ob ein Vektorfeld tatsächlich unterschiedlichen Punkten p, p' unterschiedliche verschiedene Elemente der Faser zuordnet. Gilt $\mathcal{D}_\mu S \equiv 0$ findet derartiges nicht statt und das Vektorfeld S heißt parallel, da nur ein $S(p) \equiv S_0$ von einem p_0 aus an alle anderen $p \in M$ verschoben wird, also parallel verschoben wird. Die Gruppe G ist durch ihre Liealgebra vertreten, da sie, um den Stetigkeitsbedingungen der Bündel, wie sie eingangs des Kapitels geschildert wurden, nachzukommen eine Liegruppe mit kontinuierlich und stetig

veränderbaren Gruppenparametern sein muß. Bei infinitesimalen Vorgängen genügt es vollauf ihre Liealgebra statt der ganzen Gruppe zu betrachten.
Um seiner Funktion nachkommen zu können, muß $\mathcal{W}_\mu$ sich inhomogen unter $\rho\,(t_{ij}) \in \rho\,(G)$ ($\rho\,(g_i) \in \rho\,(G)$) transformieren

$$\mathcal{W}'_\mu = \rho\,(t_{ij})\,\mathcal{W}_\mu \rho\left(t_{ij}^{-1}\right) - \partial_\mu \rho\,(t_{ij}) \cdot \rho\left(t_{ij}^{-1}\right) \ . \tag{1.30}$$

Dadurch transformiert sich $\mathcal{D}_\mu S$ wie S selber

$$S' = \rho\,(t_{ij})\,S \tag{1.31}$$

$$(\mathcal{D}_\mu S)' = \rho\,(t_{ij})\,\mathcal{D}_\mu S \tag{1.32}$$

was $\mathcal{D}_\mu S$ den Namen *eichkovariante Ableitung* einträgt.
(1.29) kann auch in Komponenten geschrieben werden:

$$\begin{aligned} D_\mu S^n = (\mathcal{D}_\mu S)^n &= \partial_\mu S^n + W^a{}_\mu\,(\omega_a)^n{}_\ell S^\ell \qquad (1.33)\\ S &= S^n \vec{s}_n \\ \{\vec{s}_n\} &: \text{Basis für } \ \Gamma\,(M, E) \end{aligned}$$

Analog zur riemannschen Geometrie kann man sich nach der Kommutativität der eichkovarianten Ableitung (1.29) fragen, wodurch man zur *Bündelkrümmung*, physikalisch *Feldstärketensor*, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ geführt wird, die diese Kommutativität unabhängig von einem speziellen S mißt:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\,S = \mathcal{R}_{\mu\nu} S = R^a{}_{\mu\nu}\omega_a S \tag{1.34a}$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{W}_\nu - \partial_\nu \mathcal{W}_\mu + [\mathcal{W}_\mu, \mathcal{W}_\nu] \tag{1.34b}$$

$$R^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a{}_\nu - \partial_\nu W^a{}_\mu + W^a{}_\mu W^b{}_\nu\,[\omega_a, \omega_b] \ . \tag{1.34c}$$

Verschwindet $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, herrscht, wie in der allgemeinen Relativitätstheorie, keine Kraft zwischen den Teilen eines Systems, das durch eine Eichtheorie beschrieben wird. Es transformiert sich homogen unter $\rho\,(t_{ij}) \in G$ (natürlich auch unter $\rho\,(g_i) \in G$)

$$\mathcal{R}'_{\mu\nu} = \rho\,(t_{ij})\,\mathcal{R}_{\mu\nu}\rho\left(t_{ij}^{-1}\right) \ , \tag{1.35}$$

wodurch es wegen (1.34a) zum idealen Objekt wird, um das Potential $\mathcal{W}_\mu$ in eine unter der Strukturgruppe eichinvariante Lagrangedichte einzuführen.
Neben dieser sehr zielstrebigen Einführung der Bündelkrümmung $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ gibt es im Rahmen der Herleitung von $\mathcal{D}_\mu$ aus dem Prinzipalbündel noch eine, die den mathematischen Hintergrund und genaue mathematische Art des Operators $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ besser ausleuchtet; siehe [9] oder [8].

1.3. Whitneysummenbündel

Aus bestehenden Bündeln können auch neue konstruiert werden. Die Konstruktion, der in dieser Arbeit zentrale Bedeutung zukommt, ist das *Whitneysummenbündel*. Es setzt sich folgendermaßen aus zwei Vektorbündel $B_1\left(E_1, \pi_1, M, V_1^m, G_1\right)$ und $B_2\left(E_2, \pi_2, M, V_2^n, G_2\right)$ über M zusammen: Seine Vorstufe ist das *Produktbündel*, das durch die direkten Produkte seiner Bestandteile definiert ist:

$$B_1 \times B_2 = \left(E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, M \times M, V_1^m \times V_2^n, G_1 \times G_2\right) \ . \tag{1.36}$$

Die Projektion $\pi_1 \times \pi_2$ wirkt dabei auf einen Punkt u_1, u_2 aus dem Totalraum $E_1 \times E_2$, indem jeder Punkt von "seiner" Projektion nach $M \times M$ abgebildet wird

$$\begin{aligned} \left[\pi_1 \times \pi_2\right]\left(u_1, u_2\right) &= \pi_1\left(u_1\right) \times \pi_2\left(u_2\right) = \left(p_1, p_2\right) \in M \times M \\ u_1, u_2 &\in E_1, E_2 \ . \end{aligned} \tag{1.37}$$

Die Faser über $\left(p_1, p_2\right)$ ist demnach

$$\left[\pi_1 \times \pi_2\right]^{-1}\left(p_1, p_2\right) = \pi_1^{-1}\left(p_1\right) \times \pi_2^{-1}\left(p_2\right) = V_{1,p_1}^m \oplus V_{2,p_2}^n \ . \tag{1.38}$$

Das Zeichen $\oplus$ der direkten Summe bei der Zusammensetzung der Faser begründet sich damit, daß wegen der Form (1.37) der Projektion des Produktbündels $B_1 \times B_2$ bzw. der daraus folgenden Form (1.38) seiner inversen Projektion jedes Element seiner Faser lokal als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} &= s_1 \oplus s_2 \\ s_1 &\in V_1^m \ \text{ über } \ p_1 \\ s_2 &\in V_2^n \ \text{ über } \ p_2 \ , \end{aligned} \tag{1.39}$$

geschrieben werden kann, was genau die Form eines Vektors aus einer direkten Summe zweier Vektorräume ist.
Daß Fasern über verschiedenen Punkten p_1 und p_2 zu einer Faser über $\left(p_1, p_2\right)$ zusammengefügt werden, läßt sich durch eine Einschränkung des Totalraumes $E_1 \times E_2$ auf seine Untermenge $E_1 \oplus E_2 \subset E_1 \times E_2$

$$E_1 \oplus E_2 = \left\{ \left(u_1, u_2\right) \in E_1 \times E_2 \middle| \left[\pi_1 \times \pi_2\right]\left(u_1, u_2\right) = \pi_1\left(u_1\right) = \pi_2\left(u_2\right) = p \right\} \tag{1.40}$$

verhindern. Mit anderen Worten sind nur Punkte aus $E_1 \times E_2$ zugelassen, die dieselbe Projektion $\pi_1\left(u_1\right) \equiv \pi_2\left(u_2\right) = p_1 = p_2 \equiv p$ besitzen. Ein *Whitneysummenbündel* $B_1 \oplus B_2$ ist ein Produktbündel mit Totalraum $E_1 \oplus E_2$ (1.40)

$$B_1 \oplus B_2 = \left(E_1 \oplus E_2, q, M, V_1^m \oplus V_2^n, G_1 \times G_2\right) \ , \tag{1.41}$$

bei dem wegen (1.40) auf das direkte Produkt des in beiden Bündel B_1 und B_2 gleichen Basisraumes M verzichtet wird. Da durch (1.40) in (1.41) nur die Fasern der Bündel miteinander verknüpft werden, wird die Whitneysumme zweier Bündel mitunter auch Faserprodukt genannt. Auf welche Weise genau die Fasern miteinander in Beziehung gesetzt werden, zeigt ein Blick auf die Projektion $q = [\pi_1 \times \pi_2]\,(u_1, u_2)$ von $B_1 \oplus B_2$. Die Faser über p von (1.41) ist auf Grund von

$$q = [\pi_1 \times \pi_2]\,(u_1, u_2) = p\ , \tag{1.42}$$

und deren inverser Abbildung

$$q^{-1}\,(p) = [\pi_1 \times \pi_2]^{-1}\,(p) = \pi_1^{-1}\,(p) \oplus \pi_2^{-1}\,(p)\ \ , \tag{1.43}$$

die direkte Summe der beiden Vektorräume $V_{1,p}^m \oplus V_{2,p}^n$, diesmal über demselben Punkt p , im Gegensatz zu (1.39). Diese Vektorraumstruktur findet ebenso in den lokalen Trivialisierungen von (1.41) wider. Sind $\tau_{1,i}$ und $\tau_{2,i}$ zwei Trivialisierungen von B_1 und B_2 über $U_i \subset M$, dann ist

$$\tau_{1,i} \oplus \tau_{2,i} : U_i \times V^{m+n} \to q^{-1}\,(U_i)\ \ , \tag{1.44}$$

eine lokale Trivialisierung von $B_1 \oplus B_2$, die die Vektorraumstruktur von $V_{1,p}^m \oplus V_{2,p}^n \in E_1 \oplus E_2$ auch bei der Abbildung auf lokale Koordinaten erhält.
Die Übergangsfunktionen $t_{ij}^{B_1 \oplus B_2}$ von (1.41) sind deshalb die direkten Produkte der Übergangsfunktionen von $t_{1,ij} \in G_1$ von B_1 und $t_{2,ij} \in G_2$ von B_2

$$t_{ij}^{B_1 \oplus B_2} = t_{1,ij} \times t_{2,ij}\ ; \tag{1.45}$$

in Matrixschreibweise

$$\rho\left(t_{ij}^{B_1 \oplus B_2}\right) = \begin{pmatrix} \rho\,(t_{1,ij}) & 0 \\ 0 & \rho\,(t_{2,ij}) \end{pmatrix}\ . \tag{1.46}$$

Die zu $G^{B_1 \oplus B_2}$ gehörige Liealgebra $\mathfrak{t}^{B_1 \oplus B_2}$ ist dementsprechend die direkte Summe der einzelnen Liealgebren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ der Gruppen G_1 und G_2

$$\mathfrak{t}^{B_1 \oplus B_2} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2\ , \tag{1.47}$$

und dies durchaus im Sinne der direkten Summe zweier Vektorräume, da Liealgebren tatsächlich Vektorräume sind.
Neben der direkten Summe $V_{1,p}^m \oplus V_{2,p}^n$ seiner Vektorfasern, ist es auch die eng mit der gerade genannten zusammenhängende in (1.44) sowie diejenige in (1.47), die dem Whitney*summen*bündel seinen Namen verleihen.
Für Teil III dieser Arbeit, ihren wesentlichen Teil, ist es wichtig zu bemerken, daß solche blockdiagonalen Gruppen, die typisch für Whitneysummenbündel sind, immer in höherdimensionalen Gruppen enthalten sind. So ist z.B. die Gruppe $U\,(1) \times U\,(1) \times U\,(1)$ eine Untergruppe der $U\,(3)$: $U\,(1) \times U\,(1) \times U\,(1) \subset U\,(3)$. In jedem Vektorbündel mit einer sehr reichhaltigen Strukturgruppe ist als Untergruppe also immer eine für ein Whitneysummenbündel charakteristische Gruppe enthalten.

Teil I.

Die permutative relativistische Schrödingertheorie

2. Eine Einführung in die bisherige Form der relativistische Schrödingertheorie

Dieses Kapitel dient der Einführung in die bisher verwendete permutative Form der **r**elativistische **S**chrödinger**t**heorie, die im folgenden kurz (p)RST genannt wird, deren grundlegendes Anliegen es ist, eine relativistische Vielteilchentheorie auf der Ebene der ersten Quantisierung, d.h. der feldtheoretischen Beschreibung der Materie und ihrer Wechselwirkungen, zur Verfügung zu stellen, die sowohl die aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik bekannten Austauschphänomene als auch Mischungseffekte im fluiddynamischen Sinn umfasst. Es sollen also diese Konzepte auf den Bereich der relativistischen Feldtheorien verallgemeinert werden. Damit stellt sie sich in die immer noch existierende Lücke zwischen den (relativistischen) Einteilchen - Feldtheorien und den daraus durch Zweitquantisierung folgenden Vielteilchentheorien. Denn zum einen folgt selbst aus der erfolgreichsten dieser Theorien, der QED, in einem entsprechenden Grenzfall keine befriedigende relativistische Vielteilchen - Feldtheorie, und zum anderen haben sich die bisherigen Bemühungen, ausgehend von den Einteilchen - Feldtheorien, hier speziell die Arbeiten zur Bethe - Salpeter - Gleichung, als nicht aufschlussreich erwiesen. Somit ist also immer noch unklar, wie eine Vielteilchentheorie aus einer Einteilchentheorie folgen kann.
Da die RST zuerst einmal den Anspruch erhebt, die Mehrteilchenkonzepte der nichtrelativistischen Quantenmechanik zu verallgemeinern, bleibt die von den quantisierten Feldtheorien erfolgreich erfaßte Teilchenerzeugung und - vernichtung zunächst unberücksichtigt. Dieser Frage im Rahmen der RST nachzugehen, was letztendlich den Anschluß an die Quantenfeldtheorien bedeutet, bleibt, trotz des Ausblickes in Unterkapitel 5.3, zukünftigen Arbeiten vorbehalten.
Die wesentlichen Ideen der RST werden am Beispiel spinloser Klein - Gordonfelder eingeführt. Der Fall spintragender Felder wird im Anschluß daran anhand von Diracfeldern eingeführt, wobei allerdings auf eine erneute ausführliche Beschreibung der Grundgedanken der RST, die bereits im Unterkapitel vorher besprochen werden, verzichtet wird. Daran anschließend werden im Rahmen der RST Observable und erhaltene Größen aufgestellt, die mit den vorhergehenden Ideen bis auf eine entscheidende Stelle im Einklang sind.

2.1. Die Grundgleichungen der RST am Beispiel von Klein - Gordonfeldern

2.1.1. Die Standardtheorie

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird ein (statistisches) Gemisch von k Zuständen $|\psi_k>$, die jeweils der Schrödingergleichung genügen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_k >= \hat{H}|\psi_k > , \tag{2.1}$$

und mit der Wahrscheinlichkeit p_k auftreten, durch die Dichtematrix ρ beschrieben

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \tag{2.2}$$

$$\rho_k = |\psi_k >< \psi_k| \, . \tag{2.3}$$

Deren Bewegungsgleichung ergibt sich mittels der aus der Schrödingergleichung folgenden Zeitentwicklung für ρ_k

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_k = \left[\hat{H}, \rho_k\right] , \tag{2.4}$$

zur von - Neumann - Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho = \left[\hat{H}, \rho\right] . \tag{2.5}$$

In Bezug auf ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|u_n>\}$ des Zustandsraumes werden dabei die reellen, positiven Elemente ρ_{nn} der Hauptdiagonalen von ρ

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k < u_n|\psi_k >< \psi_k|u_n >= \sum_k p_k \left|c_n^{(k)}\right|^2 . \tag{2.6}$$

die die mittlere Wahrscheinlichkeit angeben, das System im Zustand $|u_n>$ zu finden, deswegen auch als *Population* des Zustandes $|u_n>$ bezeichnet. Die komplexen Einträge ρ_{nm} der Nebendiagonalen

$$\rho_{nm} = \sum_k p_k < u_n|\psi_k >< \psi_k|u_m >= \sum_k p_k c_n^{(k)} c_m^{(k)*} , \tag{2.7}$$

sind von ihrer Art her Interferenzterme, genauer gesagt der Mittelwert der Interferenz zweier Zustände $|u_n>$ und $|u_m>$, wenn sich das System in einem Mischzustand befindet. Sie bilden damit ein Maß für die Kohärenz zweier solcher Zustände und werden deshalb auch *Kohärenzen* genannt.

Die Wahrscheinlichkeit, einen der Eigenwerte a_n bei einer Messung der entsprechenden Observablen A zu erhalten, lässt sich mit dem Projektor P_n auf den zu a_n gehörigen Eigenunterraum $\mathcal{E}_n$ angeben als

$$\mathcal{P}(a_n) = \mathrm{tr}\,\{\rho P_n\} . \tag{2.8}$$

Der Mittelwert einer solchen Observablen wird im Rahmen des Dichteoperatorformalismus zu

$$< A >= \operatorname{tr}\{\rho A\} \ . \tag{2.9}$$

Eine ausführlichere Darstellung des auf der Dichtematrix ρ basierenden Formalismus, der hier nur in seinen wichtigsten Punkten angegeben ist, findet sich zum Beispiel in [12].

2.1.2. Die relativistische Schrödingergleichung und ihre hamiltonsche 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$

Ein wesentliche Rolle beim Aufbau dieser Theorie spielt offensichtlich die Schrödingergleichung (2.1), genauer: ihre spezielle Form. Die Zeitentwicklung des Zustandes $|\Psi_k>$ ist gleich der Wirkung eines unitären Operators $\hat{H}$. Daraus folgt dann unter Berücksichtigung der Definition des neuen Objektes (2.2), des Dichteoperators ρ, vor allem dessen Bewegungsgleichung (2.5). Eine relativistische Verallgemeinerung der oben geschilderten Vorgehensweise benötigt also grundlegend erst einmal eine Bewegungsgleichung des Typs (2.1) für die Zustände, die das Gemisch in analoger Weise zu (2.2) aufbauen sollen. In dieser darf allerdings die Zeit gegenüber den Raumdimensionen keine hervorgehobene Rolle spielen, der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial t}$ muss also durch $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ ersetzt werden. Neben dieser Lorentzsymmetrie spielen in der Physik natürlich auch die lokalen, unitären Eichsymmetrien eine wichtige Rolle, da sie die Wechselwirkungen der Materie beschreiben. Dementsprechend wird der Ableitungsoperator durch Aufnahme eines Eichfeldes $\mathcal{A}_\mu$ zur eichkovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu$ erweitert. In Übereinstimmung mit der Tatsache, daß lokale Eichsymmetrien in die Theorie aufgenommen werden sollen, wirkt dieser Operator auf den Schnitt eines Whitneyschen Summenbündels $\mathcal{K}\left(\oplus_{i=1}^N E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^N (\mathbb{C}^1)^i, \times_{i=1}^N (U(1))^i\right)$, welches aus N Vektorbündeln $\kappa_i\left(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^1)^i, (U(1))^i\right)$ gebildet wird, wenn N Klein - Gordon - Teilchen beschrieben werden sollen

$$\mathcal{K}\left(\oplus_1^N E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^N \left(\mathbb{C}^1\right)^i, \times_{i=1}^N (U(1))^i\right) = \bigoplus_{i=1}^N \kappa_i\left(E_i, p_i, M_1^4, \left(\mathbb{C}^1\right)^i, (U(1))^i\right) \ . \tag{2.10}$$

Jedem der Teilchen ist also ein Vektorfaserbündel κ_i mit Faser $\mathbb{C}^1$ und unitärer Strukturgruppe $U(1)$ über einer vierdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M_1^4 mit Signatur $(+ - --)$ als Basisraum zugeordnet, das die Vektorraumstruktur seiner Faser als Teil einer direkten Summe von N Vektorräumen in die Faser von $\mathcal{K}$ einbringt. Ein

Schnitt Φ in $\mathcal{K}$ besteht dann aus der direkten Summe von N Einteilchenschnitten ϕ^i.

$$\phi^i : M_1^4 \to E_i \ \text{ mit } \ p_i\phi^i\left(x^\mu\right) = x^\mu \tag{2.11a}$$

$$\Phi : M_1^4 \to E = \bigoplus_{i=1}^{N} E_i \tag{2.11b}$$

$$\text{mit } \ q\Phi\left(x^{1\mu}, \ldots, x^{N\mu}\right) = p_1\phi^1\left(x^\mu\right) = \ldots = p_N\phi^N\left(x^\mu\right) = x^\mu$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^N \end{pmatrix} \tag{2.11c}$$

Folglich ist die Transformationsgruppe der Vektorfaser $\bigoplus_{i=1}^{N} \left(\mathbb{C}^1\right)^i$ das direkte lokale Produkt der jeweiligen unitären Gruppen $U(1)$, $G = \times_1^N U(1)$, und $\mathcal{A}_\mu$ demgemäß eine 1 - Form über M_1^4, die ihre Werte in $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{u}^i(1)$ annimmt. Damit die RST ihrem Anspruch, eine Vielteilchentheorie zu sein, auch in dem Sinne gerecht wird, daß sie Austauschphänomene beschreiben kann, muß $\mathcal{A}_\mu$ bzw. $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{u}^i(1)$ noch mit Zusatztermen ummantelt werden, die diese Aufgabe übernehmen, da die Eichgruppe alleine hierfür nicht geeignet ist. Der Einbau solcher Zusatzterme ist der Inhalt des nächsten Teilkapitels 2.1.3. In diesem Kapitel bleibt, wie bereits eingangs erwähnt, die Aufmerksamkeit auf die Entwicklung der relativistischen Schrödingergleichung gerichtet.
Ebenso wie die Zeitableitung in (2.1) ist dazu der Zeitentwicklungsoperator $\hat{H}$ durch ein Objekt $\mathcal{H}_\mu$ zu ersetzten, das keine der Raum - Zeit - Richtungen bevorzugt und natürlich die Entwicklung entlang der Koordinate beschreibt, die durch $\mathcal{D}_\mu$ vorgegeben ist. Vergleichbar mit $\mathcal{A}_\mu$ gibt $\mathcal{H}_\mu$ die Veränderung des Schnittes Φ von einer lokalen Vektorfaser über einem Punkt $x^\mu \in M$ zu den davon verschiedenen $\mathbb{C}^N$ - Fasern über Punkten $x'^\mu \in M$ in seiner Umgebung an, weshalb es als liealgebrawertige 1 - Form über M_1^4 aufgefaßt werden sollte. Da hermitische Entwicklungen solcher Art den Übergang von Gemischen zu reinen Zuständen und umgekehrt durch daraus folgende unitäre Zustandsentwicklungen über größere Abstände unmöglich machen, siehe z.B. [9], wird hier ausdrücklich auf die Hermitizität von $\mathcal{H}_\mu$ verzichtet, und damit auf die (hier unerwünschte)Erhaltung der Norm des von ihr transportierten Vektors. Wegen fehlender weiterer Forderungen an $\mathcal{H}_\mu$ besteht kein Grund diesem Objekt Werte in $\mathfrak{gl}(N)$ zu verweigern.
Zusammengefasst hat sich also folgende relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung (2.1) ergeben, die darum so genannte **r***elativistische* **S***chrödinger***g***leichung*,

die kurz RSG genannt wird:

$$i\hbar c\mathcal{D}_\mu\Phi = \mathcal{H}_\mu\Phi \tag{2.12a}$$
$$\mathcal{D}_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + \mathcal{A}_\mu\Phi \tag{2.12b}$$
$$\Phi' = \Phi \tag{2.12c}$$
$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{S}\mathcal{A}_\mu\mathcal{S}^{-1} - \partial_\mu\mathcal{S}\cdot\mathcal{S}^{-1} \tag{2.12d}$$
$$\mathcal{H}_\mu \in \mathfrak{gl}\,(N) \tag{2.12e}$$
$$\mathcal{H}'_\mu = \mathcal{S}\mathcal{H}_\mu\mathcal{S}^{-1}\ . \tag{2.12f}$$

(2.12f) beruht natürlich darauf, daß sich die rechte Seite von (2.12a) ebenso homogen transformieren muss wie die linke Seite.
Die Freiheit, auf die Hermitizität der sogenannten *Hamiltonschen* 1 - *Form* $\mathcal{H}_\mu$ verzichten zu können, beruht darauf, daß mit dieser 1 - Form keine beobachtbare Größe zusammenhängt, wie die Energie mit $\hat{H}$ in der konventionellen Quantentheorie. Natürlich ist $\mathcal{H}_\mu$ nicht völlig beliebig; es unterliegt Einschränkungen, die sich aus der Anbindung der RSG (2.12a) an die Klein - Gordon - Gleichung ergeben. Eine solche muss existieren, da die RST die bekannten relativistischen Feldgleichungen nicht ignorieren kann und auch gar nicht ignorieren will. Durch Kontraktion der RSG (2.12a) mit $i\hbar c\mathcal{D}_\mu = i\hbar c\,(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)$ hat also die Klein - Gordon - Gleichung für Φ

$$\mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu\Phi = -\frac{c^2}{\hbar^2}\mathcal{M}^2\Phi \tag{2.13a}$$
$$\mathcal{M} = \mathrm{diag}\left\{m^1,\ldots,m^N\right\} \tag{2.13b}$$
$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{M} \equiv 0\ , \tag{2.13c}$$

so zu entstehen, daß für die einzelnen ϕ^i mit Masse m^i jeweils eine eigene Klein - Gordon - Gleichung in der bekannten Form folgt:

$$D^\mu D_\mu\phi^i = \frac{c^2}{\hbar^2}\left(m^i\right)^2\phi^i \tag{2.14a}$$
$$D_\mu\phi^i = \left(\mathcal{D}_\mu\Phi\right)^i = \partial_\mu\phi^i + \left(\mathcal{A}_\mu\right)^i{}_j\phi^j \tag{2.14b}$$

Damit (2.13a) wie angegeben aus (2.12a) folgt, muß für $\mathcal{H}_\mu$

$$\mathcal{D}^\mu\mathcal{H}_\mu - \frac{i}{\hbar c}\mathcal{H}^\mu\mathcal{H}_\mu = -i\hbar c\left(\frac{\mathcal{M}c}{\hbar}\right)^2 \tag{2.15a}$$
$$\mathcal{D}_\nu\mathcal{H}_\mu = \partial_\nu\mathcal{H}_\mu + \left[\mathcal{A}_\nu,\mathcal{H}_\mu\right]\ , \tag{2.15b}$$

gelten. (2.15a) ist der Form nach eine *Quellgleichung*, was ihr eben diesen Namen einträgt. Bei der Behandlung der Observablen der RST in Kapitel (2.4) wird dieser mittelbare Zusammenhang von $\mathcal{H}_\mu$ mit den im *Massenoperator* $\mathcal{M}$ zusammengefassten beobachtbaren Teilchenmassen m^i entscheidenden Anteil an der Konstruktion von Erhaltungsgrössen haben.

Neben dem Verhältnis zwischen $\mathcal{H}_\mu$ und $\mathcal{M}$ besteht auch eines zwischen $\mathcal{H}_\mu$ und der Bündelkrümmung $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, denn die linke Seite dieser aus den Ableitungen $\mathcal{D}_\mu\Phi$ zusammengesetzten Grösse

$$[\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu]\,\Phi = \mathcal{F}_{\mu\nu}\Phi \tag{2.16a}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\ , \tag{2.16b}$$

kann mit der RSG (2.12a) umgewandelt werden, so daß sich

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{H}_\nu - \mathcal{D}_\nu\mathcal{H}_\mu + \frac{i}{\hbar c}\,[\mathcal{H}_\mu, \mathcal{H}_\nu] = i\hbar c\mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

ergibt, ihrer Form entsprechend *Rotationsgleichung* oder *Integrabilitätsbedingung* genannt. Zumindest (2.17) bindet $\mathcal{H}_\mu$ an eine dynamische Grösse, da die Eichfelder auch weiterhin den verallgemeinerten Maxwellgleichungen

$$\mathcal{D}^\mu\mathcal{F}_{\mu\nu} = -4\pi\alpha_{\mathrm{S}}\mathcal{J}_\nu\ , \tag{2.18}$$

genügen sollen, weshalb man das System aus Gleichung (2.15a) und (2.17) auch als Bewegungsgleichungen der Hamiltonschen 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$, der *Hamiltondynamik*, ansehen kann.
Über (2.18) erbt $\mathcal{J}_\nu$ die Antihermitizität von $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, was bei der Zerlegung von $\mathcal{J}_\nu$ in eine Basis beachtet werden muß, d.h. Basis und Entwicklungskoeffizienten müssen gemäß der Antihermitizitätsforderung aufeinander abgestimmt werden.
Der Strom in (2.18) ist natürlich nicht direkt mit den aus der konventionellen Quantenfeldtheorie bekannten zu vergleichen, sondern besitzen einen Aufbau, der den Anspruch der RST eine Mehrteilchentheorie zu sein, widerspiegelt. Dieser Punkt wird ausführlich in Unterkapitel (2.4) behandelt.
Nach diesen Vorbereitungen bezüglich der zum nichtrelativistischen Hamiltonian analogen Hamiltonschen 1 - Form, die unter anderem sicher stellen, daß jede Lösung von (2.12a) auch der Klein - Gordon - Gleichung (2.13a) bzw. (2.14a) genügt, kann jetzt die relativistische Verallgemeinerung von (2.2) und (2.5) vorgenommen werden. Die hermitesche *Intensitätsmatrix* $\mathcal{I}\,(x)$

$$\mathcal{I}(x) = I^{AB}(x)\Phi_A(x) \otimes \bar{\Phi}_B(x) \tag{2.19a}$$

$$(\mathcal{I}(x))^i{}_j = I^{AB}(x)\phi^i_A(x)\bar{\phi}_{jB}(x) \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned} p\Phi_A(x) &= p\Phi_B(x) = x \\ I^{BA*}(x) &= I^{AB}(x)\ , \end{aligned} \tag{2.19c}$$

bestehend aus Lösungen von (2.12a), erfüllt die **r***elativistische von* **N***eumann* - **G***leichung*, kurz RNG

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{I} = \frac{i}{\hbar c}\left[\mathcal{I}\cdot\bar{\mathcal{H}}_\mu - \mathcal{H}_\mu\cdot\mathcal{I}\right] \tag{2.20a}$$

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{I} \doteqdot \partial_\mu\mathcal{I} + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{I}]\ , \tag{2.20b}$$

wenn

$$D_\mu I^{AB} \equiv 0 \tag{2.21}$$

gilt, ähnlich wie für $\mathcal{M}$ (2.13c). Gegenüber der Definition der Dichtematrix ρ (2.2) ist (2.19a) etwas freier, da in $\mathcal{I}$ Tensorprodukte aller Zustände ($I^{AB}\Phi_A \otimes \overline{\Phi}_B$, $A \neq B$ und $I^{AA}\Phi_A \otimes \overline{\Phi}_A$) eingehen, während in ρ nur solche von Zuständen mit sich selbst Eingang finden, den Termen $I^{AA}\Phi_A \otimes \overline{\Phi}_A$ in (2.19a) entsprechend.
Weiterhin kann in (2.20a) auf Grund der fehlenden Hermitizität von $\mathcal{H}_\mu$, die Einschränkungen der Hamiltondynamik (2.15a) und (2.17) fordern dies keineswegs, nicht in vollständiger Analogie zu (2.5) verallgemeinert werden, sondern nur (2.5) mit ausgeschriebenem Kommutator. Der wichtigste Unterschied besteht aber in der *Lokalität* der Definition von $\mathcal{I}$ (2.19a) gegenüber der globalen von ρ (2.2). Das Tensorprodukt (2.19a) wird in jeder Faser über dem jeweiligen Raum - Zeit - Punkt einzeln gebildet, während sich (2.2) als Tensorprodukt von Zuständen aus globalen Hilberträumen versteht. Der Mischungscharakter kann sich in der RST also in Abhängigkeit der Komponenten der Schnitte $\Phi_A(x)$ von Punkt zu Punkt ändern. Diese Möglichkeit steht der konventionellen Theorie auf Grund der globalen Definition (2.2) von ρ und der aus der Hermitizität von $\hat{H}$ folgenden Unitarität der Zeitentwicklung nicht offen. Diese Lokalität der RST bildet auch den Kern der Diskussion der Beschreibung von Austauschprozeßen in der RST im nächsten Abschnitt.

2.1.3. Die Aufnahme von Austauschphänomenen in die Theorie

Die Erweiterung der eichkovarianten Ableitung

Bereits bei der Definition des Schnittes Φ auf den die eichkovariante Ableitung wirken soll, wurde ersichtlich, wie die RST den Anspruch, eine Vielteilchentheorie zu sein, verwirklichen will. Jedem Klein - Gordon - Teilchen wird ein Schnitt ϕ^i in einem $\mathbb{C}^1$ - Vektorbündel $\kappa_i \left(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^1)^i, U^i(1)\right)$ zugeordnet. Deren Gesamtheit wiederum wird in einem Whitneyschen Vektorsummenbündel zusammengefasst $\mathcal{K}$ $\left(\oplus_{i=1}^N E_i, q, M_1^4,\right.$ $\left.\oplus_{i=1}^N (\mathbb{C}^1)^i, \times_{i=1}^N U^i(1)\right)$, dessen Vektorraumstruktur seiner Faser die einer direkten Summe der zugrunde liegenden lokalen Vektorfasern $\mathbb{C}^1$ ist. Vom mathematischen Standpunkt unterscheidet sich ein solcher Aufbau merklich von dem in der Standardfeldtheorie verwendeten (anti -) symmetrisierten Produkt des Satzes an Einteilchenwellenfunktionen $\{|\varphi^i>\}$, besonders im Hinblick auf die Einbindung der Zeit. Bei letzterem hängt die Gesamtwellenfunktion von allen Teilchenkoordinaten ab, relativistisch also von N Koordinatensätzen $x^{i\mu}$ und insbesondere von N Zeiten x^{i0}. Gerade dieser Punkt bereitet der Bethe - Salpeter - Gleichung Schwierigkeiten. In dem in der RST das Whitneysche Summenbündel als geeignetes Mittel zur Beschreibung eines Vielteilchenzustandes gewählt wird, entstehen solche Probleme erst gar nicht, da der Kern der Definition dieses Typs von Faserproduktbündeln gerade in der Schaffung einer Vektorfaser über einem (Raum - Zeit -) Punkt der Basismannigfaltigkeit (M_1^4) aus verschiedenen einzelnen Vektorfasern über *demselben* (Raum - Zeit -) Punkt besteht. Gegenüber der globalen Definition der Vielteilchenwellenfunktion erleichtert die Verwendung der inhärent lokalen Faserbündeltheorie die Formulierung einer ebensolchen Vielteilchentheorie offensichtlich erheblich. Eingedenk der grundsätzlichen Forderung nach Lokalität physikalischer Theorien ist der Wechsel von der Standardbeschreibung zur RST - Formulierung sicher begründet. Natürlich können den Dichten, die aus Schnitten in solch lokalen Vektorfasern gebildet werden, keine probabilistischen Deutungen mehr zukommen, sondern müssen im fluiddynamischen Sinn als Teilchendichten aufgefasst werden. Und obwohl dadurch die relativistische Verallgemeinerung der bekannten Vielteilchentheorie auf der Grundlage von Analogieschlüssen ähnlich denen bei der Verallgemeinerung der Gemischformulierung oben versperrt ist, besteht kein Anlass, alle von der Standardtheorie bekannten Konzepte zu verwerfen. Die wesentliche Neuerung, die durch die Tensorproduktwellenfunktionen eingebracht werden, sind bei der Skalarproduktbildung Interferenzterme zwischen den verschiedenen Einteilchenzuständen. Eine Antwort auf die Frage, wie solche, in der Sprache der Teilchendichten “Überlappungen”, auch in der RST entstehen können, liefert die Erweiterung der eichkovarianten Ableitung (2.12b). Ihr Konnexionsanteil besteht zunächst nur aus einer 1 - Form $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathrm{d}x^\mu$, die ihre Werte $\mathcal{A}_\mu$ in der Liealgebra des direkten Produktes der Einteilchensymmetriegruppen $\times_{i=1}^{N} U^i\,(1) \subset U\,(N,\mathbb{C})$ der Faser von $\mathcal{K}\left(\oplus_{i=1}^{N} E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^{N}\left(\mathbb{C}^1\right)^i, \times_{i=1}^{N} U^i(1)\right)$ annimmt:

$$\mathcal{A}_\mu = \bigoplus_1^N \mathcal{A}_\mu^{(i)} \tag{2.22a}$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(i)} \in \mathfrak{u}_i\,(1) \tag{2.22b}$$

$$\mathcal{A}_\mu \in \bigoplus_1^N \mathfrak{u}_i\,(1)\ . \tag{2.22c}$$

In Matrixschreibweise wird die Anwendung von (2.22a) auf Φ zu

$$\mathcal{A}_\mu \Phi = \mathrm{diag}\left\{\mathcal{A}_\mu^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}_\mu^{(N)}\right\}\Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{A}_\mu^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu^{(1)}\phi^1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_\mu^{(N)}\phi^N \end{pmatrix} . \tag{2.23}$$

Ein Skalarprodukt des Vektors $\mathcal{A}_\mu\Phi$ mit Φ liefert nur Produkte der jeweiligen Einteilchenwellenfunktion ϕ^i mit sich selbst

$$< \Phi, \mathcal{A}_\mu \Phi >= \bar{\Phi} \cdot \mathcal{A}_\mu \Phi = \sum_{i=1}^{N} \bar{\phi}_i \mathcal{A}_\mu^{(i)} \phi^i\ . \tag{2.24}$$

Durch Hinzunahme von Nebendiagonaltermen kann dem abgeholfen werden. Terme dieser Art können z.B. durch Elemente aus $\mathfrak{u}\,(N,\mathbb{C})$ ohne $\oplus_{i=1}^{N}\mathfrak{u}\,(1)$

$$\mathcal{X}_\mu \in \mathfrak{u}\,(N) \setminus \oplus_{i=1}^{N} \mathfrak{u}^i\,(1)\ , \tag{2.25}$$

eingebracht werden. Eine passende Stelle für die Eingliederung dieser Matrizen bietet die eichkovariante Ableitung. Sie versteht sich dann als

$$\mathcal{D}_\mu \Phi \doteqdot \partial_\mu \Phi + (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)\, \Phi \; , \tag{2.26}$$

und wird als *Permutationsableitung* bezeichnet. Der Grund für die Namensgebung wird im nächsten und übernächsten Abschnitt sehr deutlich. In Komponenten lautet sie:

$$D_\mu \phi^i \doteqdot (\mathcal{D}_\mu \Phi)^i = \partial_\mu \phi^i + (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)^i{}_j \phi^j \; . \tag{2.27}$$

Die Wahl der Basis für $\mathfrak{u}\,(N)$

(2.26) zeigt die erwünschten Folgen für das Skalarprodukt, was am deutlichsten in der folgenden Basis, zunächst für $\mathfrak{gl}\,(N)$, zum Ausdruck kommt:

$$\chi_{ab} = \begin{array}{cc} & \text{b} \\ \text{a} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & i & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.28a}$$

$$(\chi_{ab}))^i{}_j = i\delta^i{}_a \delta_{bj} \;\; ; \;\; \{\upsilon_{ab}\} : \text{Basis für } \mathfrak{u}\,(N) \tag{2.28b}$$

$$\alpha_a = \chi_{aa} \;\; ; \;\; \{\alpha_a\} : \text{Basis für } \bigoplus_1^N (\mathfrak{u}\,(1))^i \tag{2.28c}$$

$$\{\chi_{de}\} \;\; ; \;\; d \neq e \;\; ; \;\; : \text{Basis für } \mathfrak{u}\,(N) \setminus \bigoplus_1^N \mathfrak{u}\,(1) \tag{2.28d}$$

$$\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu = A^a_\mu \alpha_a + X^{de}_\mu \chi_{de} \tag{2.28e}$$
$$a, b, d, e = \{1, \ldots, N\} \;\; ; \;\; \text{aber immer} \;\; ; \;\; d \neq e \; .$$

Wegen $\alpha^{a\dagger} = -\alpha^a$ sowie $\chi^\dagger_{de} = -\chi_{ed}$ führt die Forderung $(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)^\dagger = -\,(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)$ zu folgenden Nebenbedingungen für antihermitesche Objekte in einer $\mathfrak{gl}\,(N)$ - Basis

$$A^{a*}_\mu = A^a_\mu \tag{2.29a}$$
$$X^{de*}_\mu = X^{ed}_\mu \; , \tag{2.29b}$$

und den folgenden zwei alternativen Formen für (2.28e)

$$\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu = A^a_\mu \alpha_a + X^{kl}_\mu \chi_{kl} - X^{kl*}_\mu \chi^\dagger_{kl} \tag{2.30a}$$
$$a, b, k, l = \{1, \ldots, N\} \;\; ; \;\; \text{aber immer} \;\; ; \;\; k \neq l \; ; \; k < l$$

$$\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu = A^a_\mu \alpha_a + \frac{1}{2}\left(X^{de}_\mu \chi_{de} - X^{de*}_\mu \chi^\dagger_{de} \right) \tag{2.30b}$$
$$a, b, d, e = \{1, \ldots, N\} \;\; ; \;\; \text{aber immer} \;\; ; \;\; d \neq e \; .$$

Also:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)\,\Phi &= A^a_\mu\,(\alpha_a)^i{}_j\phi^j + X^{de}\,(\chi_{de})^i{}_j\phi^j \\
&= \begin{pmatrix} iA^1_\mu\phi^1 + iX^{12}_\mu\phi^2 + \ldots + iX^{1N}\phi^N \\ \vdots \\ iX^{N1}_\mu\phi^1 + \ldots + iX^{N(N-1)}_\mu + iA^N_\mu\phi^N \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.31a}
$$

$$
< \Phi, (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{B}_\mu)\,\Phi > = iA^1_\mu\bar{\phi}_1\phi^1 + iX^{12}_\mu\bar{\phi}_1\phi^2 + \ldots + iX^{NN-1}_\mu\bar{\phi}_N\phi^{N-1} + iX^N_\mu\bar{\phi}_N\phi^N \;. \tag{2.31b}
$$

An dieser Stelle sind nun erst einmal einige klärende Worte zum Doppelcharakter der Elemente χ_{de} (2.28d) von $\mathfrak{u}\,(N)$, die in ihrer Matrixdarstellung gemäß (2.28b) nur Einträge auf der Nebendiagonalen besitzen, angebracht. Zum einen stellen diese χ_{de} Generatoren der *lokalen* und *kontinuierlichen* Liegruppe $SU\,(N)$ dar, zum anderen vertreten sie die *globale* und *diskrete* Permutationsgruppe. Es ist letztere Funktion, die sie in (2.31b) erfüllen sollen, trotz der Tatsache, daß sie über ihre (gleichzeitige) Mitgliedschaft in $\mathfrak{u}\,(N)$ in die Theorie eingeführt worden sind. Dieser gewichtige Punkt wird in Kürze ausführlich besprochen. Zuvor soll noch die Betrachtung der hier gewählten Basis (2.28) für $\mathfrak{u}\,(N)$ abgeschlossen werden.

Selbstverständlich kann für die Darstellung von $\mathfrak{u}\,(N)$ auch die Basis

$$\tilde{\alpha}_a = \alpha_a = -\alpha_a^\dagger \tag{2.32a}$$

$$\tilde{\chi}^{(-)}_{kl} = i\,(\chi_{kl} - \chi_{lk}) = -\tilde{\chi}^{(-)\dagger}_{kl} \tag{2.32b}$$

$$\tilde{\chi}^{(+)}_{kl} = (\chi_{kl} + \chi_{lk}) = -\tilde{\chi}^{(+)\dagger}_{kl} \;, \tag{2.32c}$$

mit reellen Entwicklungskoeffizienten $\tilde{A}^a_\mu = A^a_\mu, \tilde{X}^{(+)kl}_\mu, \tilde{X}^{(-)kl}_\mu$ verwendet werden, da die Basis $\left\{\tilde{\alpha}_a, \tilde{\chi}^+_{de}, \tilde{\chi}^-_{de}\right\}$ bereits die geforderte Antihermitizität trägt:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu) &= A^a_\mu\alpha_a + \tilde{X}^{(+)kl}_\mu\tilde{\chi}^{(+)}_{kl} + \tilde{X}^{(-)kl}_\mu\tilde{\chi}^{(-)}_{kl} \\
&= -\left(A^a_\mu\alpha_a + \tilde{X}^{(+)kl}_\mu\tilde{\chi}^{(+)}_{kl} + \tilde{X}^{(-)kl}_\mu\tilde{\chi}^{(-)}_{kl}\right)^\dagger \;.
\end{aligned}
\tag{2.33a}
$$

Gegenüber (2.31b) ändert sich dadurch aber nichts Wesentliches, denn die Koeffizienten von $\overline{\phi}_i\phi^j$ und $\overline{\phi}_j\phi^i$ stehen bis auf ein Minuszeichen zueinander im selben Verhältnis

$$\left(-\tilde{X}^{(-)ij}_\mu + i\tilde{X}^{(+)ij}_\mu\right) = -\left(\tilde{X}^{(-)ji}_\mu + i\tilde{X}^{(+)ji}_\mu\right)^* \;, \tag{2.34}$$

anstatt (2.29b). Genau genommen stehen die Koeffizienten beider Basen über

$$\mathfrak{Re}\left(iX^{kl}_\mu\right) = \tilde{X}^{(+)kl}_\mu \tag{2.35a}$$

$$\mathfrak{Im}\left(iX^{kl}_\mu\right) = \tilde{X}^{(-)kl}_\mu \tag{2.35b}$$

$$X^{kl} = \tilde{X}^{(-)kl}_\mu + i\tilde{X}^{(+)kl}_\mu \;, \tag{2.35c}$$

in Beziehung zueinander, so daß in der Basis (2.28) der Sachverhalt etwas kompakter und bequemer ausgedrückt werden kann.
Wie sich im Kapitel (2.4) über die Observablen der RST zeigen wird, tritt die Kombination (2.31b) dort häufig auf, so daß auf diese Weise Interferenzterme der Art $\bar{\phi}_j \phi^i$ Eingang finden.

Die Permutationsgruppe innerhalb der Liealgebra $\mathfrak{u}\,(N)$

Vom formalen Standpunkt lässt sich ein eichkovariantes Objekt wie die Ableitung $\mathcal{D}_\mu \Phi = \mathcal{S}^{-1}\,(\mathcal{D}_\mu \Phi)'$ additiv immer um andere eichkovariante Objekte, d.h. Objekte mit homogendem Transformationsverhalten erweitern ($\rightsquigarrow\ \mathcal{S}\mathcal{X}_\mu\mathcal{S}^{-1}$), ohne seine Transformationseigenschaften zu verlieren. Die Frage ist nur wie viele Terme und in welcher Weise dazugenommen werden sollen. Als Antwort darauf bietet sich bei Erweiterung der eichkovarianten Ableitung, die auf einen N - komponentigen Schnitt Φ angewandt wird, die Vektorraumstruktur von $\mathfrak{u}\,(N)$ an, der Liealgebra der maximalen unitären Gruppe, die eine N - dimensionale Vektorfaser besitzen kann. Das hierzu gehörige Bündel kann dann natürlich kein Whitneysches Summenbündel sein. Anders gesagt: Die durch $\mathcal{A}_\mu \in \bigoplus_{i=1}^N (\mathfrak{u}\,(1))^i \subset \mathfrak{u}\,(N)$ vertretene Eichsymmetrie der Vektorfaser des Whitneysummenbündels ist in $\mathfrak{u}\,(N)$ eingebettet, schöpft diesen einbettenden Vektorraum aber keinesfalls aus. Die Erweiterung der eichkovarianten Ableitung zu (2.26) fügt nun genau die Art und Anzahl an Termen $\mathcal{X}_\mu$ (2.25) hinzu, die im Matrixanteil von (2.12b) fehlen, um $\mathfrak{u}\,(N)$ ganz auszuschöpfen. In diesem Sinne erhält die Theorie eine vollständige $\mathfrak{u}(N)$ - *Struktur* zusätzlich zu ihrer $\oplus_{i=1}^N \mathfrak{u}_i\,(1)$ Eich*symmetrie*. Diese $\mathfrak{u}(N)$ - Struktur ist der Hintergrund der Bezeichnung von (2.26) als "erweiterte eichkovariante Ableitung", d.h. speziell die Beibehaltung des Adjektives "eichkovariant" in der Bezeichnung von (2.26)[§].
Daß diese Bezeichnungsweise, selbst ohne besondere Strenge an die Begrifflichkeiten anzulegen, falsch ist, zeigt ein Blick auf die Symmetrietransformationen der Vektorfaser $\oplus_{i=1}^N (\mathbb{C}^1)^i$, die mit der gerade geschilderten Erweiterung von (2.12b) zu (2.26) verbunden sind.
Zuerst einmal besteht natürlich immer noch die lokale, kontinuierliche $\times_{i=1}^N (U\,(N))^i$ - Eichsymmetrie, die durch die Generatoren $\{\alpha_a\}$ (2.28c), die $\oplus_{i=1}^N (\mathfrak{u}\,(1))^i$ aufspannen, erzeugt wird:

$$\mathcal{S}_{\text{Eich}} = \mathrm{e}^{\Lambda^a(x)\alpha_a} \ . \tag{2.36}$$

Diese Symmetriegruppe ist im Formalismus selber nur durch ihre *Generatoren* im Term $\mathcal{A}_\mu = A^a{}_\mu \alpha_a$ vertreten, der die Eichkovarianz der Theorie, speziell des Ableitungsbegriffes, unter den Transformationen (2.36) sichert. Die Gruppe $\times_{i=1}^N (U\,(N))^i$ selber tritt

[§]Solange keine Verwechslung mit der eigentlichen eichkovarianten Ableitung der Art (2.12b) möglich ist, wird im folgenden im Zusammenhang mit der RST (2.26) sogar kurz eichkovariante Ableitung genannt.

explizit nicht auf. Ihr Einfluß auf den Formalismus besteht darin, daß durch sie in jeder Vektorfaser des Bündels mit den Elementen die sie aufeinander abbildet, eine Menge von Elementen in jeder Faser gebildet wird, die in Bezug auf das durch das Faserbündel beschriebene physikalische System äquivalent zueinander sind. D.h. der Formalismus zur Beschreibung des Systems besitzt die gleiche Form und ein invariantes Skalarprodukt, egal welcher Repräsentant der durch die Eichgruppe definierten Äquivalenzklasse von Vektoren als Systemvektor ausgewählt wird. Diese Wahl darf lokal, also in den verschiedenen Fasern durchaus unterschiedlich ausfallen. Als Preis für diese Freiheit, ist die Ableitung um den Konnexionsterm $\mathcal{A}_\mu$ zu erweitern, wodurch dann die Eichpotentiale ${A^a}_\mu$ in die Theorie eingeführt werden, durch die sie sich dann von den Theorien unterscheidet, die die gerade angesprochene Freiheit bei der Wahl ihres Systemvektors nicht besitzen, d.h. eine Eichgruppe nicht wirkt; siehe hierzu [10], [9] oder [8] für den Faserbündelformalismus im Detail.
Völlig anders dagegen verhält sich die durch Terme $\mathcal{X}_\mu = X^{de}\chi_{de}$ in (2.26) neu eingeführte Permutationssymmetrie. Als diskrete Gruppe kann sie nicht wie die Eichsymmetrie durch einen Satz von Generatoren erzeugt werden. In einem Vektorraum wird sie durch Matrizen der Art $\chi_{de} + \chi_{ed}$, mit χ_{de}, χ_{ed} aus (2.28) dargestellt§. *Die in* (2.26) *neu hinzugekommenen Terme repräsentieren also die Permutationsgruppe selber:*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Perm}} = X^{de}\chi_{de} \; . \tag{2.37}$$

Im Gegensatz zur Eichgruppe tritt die Permutationsgruppe demnach durch die χ_{de} im Formalismus direkt auf.
Der Tatsache, daß jedes ihrer Elemente mit einem eigenen Koeffizienten auftritt ist der nächste Abschnitt gewidmet, im Augenblick liegt die Aufmerksamkeit auf den Matrizen χ_{de} und ihren Auswirkungen.
Dadurch, daß in (2.37) alle Gruppenelemente Auftreten, die die Permutationsgruppe bei Anwendung auf einen N - dimensionalen Vektorraum besitzt, werden in die Beschreibung eines N - Teilchensystems alle möglichen Permutationen der Komponenten ϕ^i innerhalb des Systemspinors (2.11c) bei der Beschreibung des Systems verwendet. Die Symmetrie, die die Permutationsgruppe in einerm Vektorraum erzeugt, d.h. die Menge an Vektoren, die sie aufeinander abbildet, wird demnach grundlegend anders behandelt als die Eichsymmetrie und ihre Äquivalenzklasse. Bei der Eichsymmetrie ist es egal welcher Repräsentant ihrer Äquivalenzklasse zur Beschreibung des Systems ausgewählt wird. Die Auswirkungen dieser Freiheit auf die Theorie trägt der Konnexionsterm $\mathcal{A}_\mu$, siehe oben. Als diskrete Gruppe kann die Permutationsgruppe nicht in den Faserbündelformalismus eingebunden werden. Da aber auch keiner der Vektoren, die durch Permutationen ineinander überführt werden können, bevorzugt werden soll, wird der Ausweg gewählt, alle

§Allerdings ist dies eine Darstellung die sich sehr auf das wesentliche der Permutationen beschränkt, denn außer den permutierten Elementen ist im Bild der Abbildung nichts mehr vorhanden; die Elemente, die nicht permutiert werden, werden auf die Null abgebildet. Für die Zwecke, zu denen die χ_{de} hier verwendet werden sollen, ist das aber ohne Belang.

diese Vektoren in die Beschreibung des Systems direkt aufzunehmen. Dieses Vorgehen ist natürlich nichts anderes als das, welches das (Anti -) Symmetrisierungspostulat in der Standardtheorie vorschreibt, siehe z.B. [13], bloß in einer für den hier dem Vielteilchenbegriff zugrunde liegenden Whitneysummenformalismus angemessenen Form. Die Diskussion im ersten Abschnitt dieses Teilkapitels, besonders nach (2.24), zeigt, daß diese Analogie vollständig gewollt ist.
Im Anteil $\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu = A^a_\mu \alpha_a + X^{de}_\mu \chi_{de}$ der erweiterten "eichkovarianten" Ableitung (2.26) treffen also die *Generatoren* α_a der Eichgruppe auf die *Permutationsgruppe*, vertreten durch die χ_{de} als solche. Da das Adjektiv "eichkovariant" aber nur jenen Ableitungen vorbehalten ist, deren Zusatzterme über die partielle Ableitung hinaus alleine aus Generatoren einer durch eine Liegruppe beschriebene Symmetrie des Systems bestehen, kann die Bezeichnung von (2.26) als eichkovariante Ableitung eigentlich nicht aufrecht erhalten werden. Der Funktion ihrer Zusatzterme entsprechend, sollte sie besser als *Permutationsableitung* bezeichnet werden.
Wie unterschiedlich die in (2.26) aufeinandertreffenden Symmetrien wirklich sind, zeigt auch der Fakt, daß die Permutationsgruppe nicht nur diskret sondern auch global ist, im völligen Unterschied zur lokalen Eichsymmetrie (2.36). Man sollte sich von den ortsabhängigen Permutationskoeffizienten $\mathfrak{Re}\left(X^{de}{}_\mu\right)$ nicht darüberhinwegtäuschen laßen. Sie gewichten die Permutationen lokal nur unterschiedlich; das ihnen zugehörige Gruppenelement $\chi_{de} + \chi_{ed}$ ist an allen Orten dasselbe. Dahingegen werden durch die ortsabhängigkeit der $\Lambda(x)$ in (2.36) an verschiedenen Orten tatsächlich verschiedene Elemente der Eichgruppe erzeugt.
Daß diese beiden sehr unterschiedlichen Typen von Symmetrietransformationen überhaupt in (2.26) zusammentreffen, liegt am bereits nach (2.31b) erwähnten Doppelcharakter der Matrizen χ_{de} (2.28d): sie sind einerseits Generatoren für die $SU(N)$, wodurch sie sich harmonisch in den Begriff einer eichkovarianten Ableitung einfügen lassen, auch wenn sie gar nicht in dieser Funktion verwendet werden sollen, und zum anderen stellen sie die Permutationsgruppe als solche dar. Eben dieser Doppelcharakter wird hier ausgenutzt, um das (Anti) - Symmetrisierungspostulat ohne größeren Aufwand in die Theorie einzugliedern. Da der Term $\mathcal{X}_\mu$ mit keiner Liegruppe verbunden ist, muß er sich zwangsweise homogen transformieren:

$$\mathcal{X}'_\mu = \mathcal{S}\mathcal{X}_\mu\mathcal{S}^{-1} \ . \tag{2.38}$$

Abschließend bleibt dann zu sagen, daß die Transformation $\mathcal{S}$, die in den bereits angegebenen Transformationsgesetzen für Φ, $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}_\mu$ und dem gerade aufgestellten für $\mathcal{X}_\mu$ immer die Eichtransformation (2.36) ist bzw. bleibt. Die χ_{de} haben an diesen Bündeltransformationen aus den genannten Gründen keinen Anteil.

Die Erweiterung des Feldstärketensors

Die im letzten Abschnitt in die RST eingeführte Permutationsgruppe legt die Frage nahe, ob dadurch die Bewegungsgleichungen der Materiefelder der RST einen Bezug zu den

bekannten nichtrelativistischen Hartree und Hartree - Fockgleichungen erhalten. Dem ist tatsächlich so; sie sind der nichtrelativistische Limes der Gleichung (2.13a), wenn in ihr $\mathcal{D}_\mu\Phi$ in der im letzten Abschnitt erarbeiteten Form (2.26) verwendet wird. Dieser Sachverhalt wird in [14] und [15] beschrieben. Allerdings tritt in der RST gegenüber der Standardtheorie eine Verallgemeinerung bei der Verwendung der Permutationsgruppe auf. In der normalen Quantenmechanik wird sie in reiner Form verwendet, d.h. ihre Elemente finden ohne ortsabhängige Gewichtungskoeffizienten Verwendung. In der RST hingegen wird laut (2.37) jedes Element $\chi_{de} + \chi_{ed}$ mit einem eigenen Koeffizienten $\mathfrak{Re}\left(X^{de}{}_\mu\right)$ in die Theorie eingebunden, durch den es gegenüber den anderen Elementen gewichtet wird. Die Permutationsgruppe wird damit immer noch mit allen Elementen in die Theorie aufgenommen, aber anders als bei ihrer Verwendung in der Standardtheorie sind diese Elemente nicht völlig gleich gewichtet zueinander. Dieser Ansatz kann durchaus als Verallgemeinerung der Hartree - Focktheorie angesehen werden, denn durch Gleichsetzen eines Permutationskoeffizienten mit dem Eichfeld, das zwischen den von der jeweiligen Permutation betroffenen Teilchen die Eichwechselwirkung vermittelt, erhält man die bekannte Form der Hartree - Fockgleichungen zurück.
Zu der Tatsache, daß die Permutationen trotz der ortsabhängigen Faktoren immer noch global ausgeführt werden siehe den vorherigen Abschnitt.
Die Bewegungsgleichungen der neuen Felder $X^{de}{}_\mu$ werden als erweiterte Maxwellgleichungen festgesetzt. Diese Definition stützt sich wieder auf den oben festgestellten Doppelcharakter der Matrizen χ_{de}.
Um die Aufstellung der erweiterten Maxwellgleichungen in eben den größeren Rahmen einzubinden, den die Erweiterung der eichkovarianten Ableitung darstellt, wird das Prinzip dieser Ergänzung der eichkovarianten Ableitung um Permutationsterme auf den Feldstärketensor übertragen, in dem er um eine *Permutationsfeldstärke* $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$ erweitert wird; $\mathcal{F}_{\mu\nu} \to \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu} = F^a{}_{\mu\nu}\alpha_a + Y^{de}_{\mu\nu}\chi_{de} \tag{2.39a}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F^a{}_{\mu\nu}\alpha_a \tag{2.39b}$$

$$\mathcal{Y}_{\mu\nu} = Y^{de}_{\mu\nu}\chi_{de} \tag{2.39c}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu} = \partial_\mu\left(\mathcal{A}_\nu + \mathcal{X}_\nu\right) - \partial_\nu\left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right) + \left[\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu, \mathcal{A}_\nu + \mathcal{X}_\nu\right] \tag{2.39d}$$

$$\begin{aligned} = &\Big(\partial_\mu A^{a_1}_\mu - \partial_\nu A^{a_1}_\nu + C^{a_1}_{\;a_2\,d_3e_3} A^{a_2}_\mu X^{d_3e_3}_\nu + C^{a_1}_{\;d_2e_2\,a_3} X^{d_2e_3}_\mu A^{a_3}_\nu \\ &+ C^{a_1}_{\;d_2e_2\,d_3e_3} X^{d_2e_2}_\mu X^{d_3e_3}_\nu\Big)\,\alpha_{a_1} \\ &+ \Big(\partial_\mu X^{de}_\mu - \partial_\nu X^{de}_\nu + C^{d_1e_1}_{\;a_2d_3e_3} A^{a_2}_\mu X^{d_3e_3}_\nu C^{d_1e_1}_{\;d_2e_2a_3} X^{d_2e_2}_\mu A^{a_3}_\nu \\ &+ C^{d_1e_2}_{\;d_2e_2\,d_3e_e} X^{d_2e_2}_\mu X^{d_3e_3}_\nu\Big)\,\chi_{d_1e_1} \end{aligned} \tag{2.39e}$$

$$F^{a_1}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{a_1}_\mu - \partial_\nu A^{a_1}_\nu + C^{a_1}_{a_2\, d_3 e_3} A^{a_2}_\mu X^{d_3 e_3}_\nu + C^{a_1}_{d_2 e_2\, a_3} X^{d_2 e_3}_\mu A^{a_3}_\nu \\ + C^{a_1}_{d_2 e_2\, d_3 e_3} X^{d_2 e_2}_\mu X^{d_3 e_3}_\nu \tag{2.39f}$$

$$Y^{d_1 e_1}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu X^{d_1 e_1}_\mu - \partial_\nu X^{d_1 e_1}_\nu + C^{d_1 e_1}_{a_2 d_3 e_3} A^{a_2}_\mu X^{d_3 e_3}_\nu C^{d_1 e_1}_{d_2 e_2 a_3} X^{d_2 e_2}_\mu A^{a_3}_\nu \\ + C^{d_1 e_2}_{d_2 e_2\, d_3 e_e} X^{d_2 e_2}_\mu X^{d_3 e_3}_\nu \tag{2.39g}$$

$$C^{a_1}_{a_2 d_3 e_e}, C^{a_1}_{d_2 e_2 a_3}, C^{a_1}_{d_2 e_2\, d_3 e_3}, C^{d_1 e_1}_{a_2 d_3 e_3}, C^{d_1 e_1}_{d_2 e_2 a_3}, C^{d_1 e_2}_{d_2 e_2\, d_3 e_e} \ : \ \text{Struktur-} \tag{2.39h}$$
konstanten von $\mathfrak{gl}(N)$
$$a_i, d_j, e_k = 1, \ldots, N \ \text{ aber immer } \ d_j \neq e_k \ .$$

Weiterhin gilt wegen der Forderung $\left(\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}\right)^\dagger = -\left(\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}\right)$,

$$F^{a_1 *}_{\mu\nu} = F^{a_1}_{\mu\nu} \tag{2.40a}$$
$$Y^{d_1 e_1 *}_{\mu\nu} = Y^{e_1 d_1}_{\mu\nu} \ . \tag{2.40b}$$

Anders als in der konventionellen Theorie wird (2.39f) auch dann nicht zu einem reinen Rotationsausdruck, wenn nur eine abelsche Eichsymmetrie wie z.B beim Elektromagnetismus[§], verwendet wird, bedingt durch die grundsätzlich nicht verschwindenden Kommutatoren der Eichgeneratoren $\{\alpha_a\}$ mit den Permutationsoperatoren $\{\chi_{de}\}$ und deren Kommutatoren untereinander, die durch die Strukturerweiterung Einzug erhalten. Bereits hier zeigen sich also erste Auswirkungen der zusätzlichen Terme.
An die Stelle der verallgemeinerten Maxwellgleichungen (2.18) tritt nun das Set aus verallgemeinerten Maxwellgleichungen für $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ und $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 4\pi i \alpha_{\mathrm{S}} \mathcal{J}_\nu \left(\{\alpha_a\}\right) = 4\pi i \alpha_{\mathrm{S}} k^a{}_\nu \alpha_a \tag{2.41a}$$
$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{Y}_{\mu\nu} = 4\pi i \alpha_{\mathrm{S}} \mathcal{J}_\nu \left(\{\chi_{de}\}\right) = 4\pi i \alpha_{\mathrm{S}} k^{de}_\nu \chi_{de} \ . \tag{2.41b}$$

Die Ströme auf den rechten Seiten dieser beiden Gleichungen werden ausführlich im Unterkapitel 2.4 besprochen.
Wie schon bei den Materiefeldern wird die eichkovariante Ableitung der Feldstärken, der Eichpotentiale $\mathcal{A}_\mu$ und der Permutationskoeffizienten $\mathcal{X}_\mu$ durch ihre erweiterte Form ersetzt:

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \doteqdot \partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\mathcal{A}^\mu + \mathcal{X}^\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] \tag{2.42a}$$
$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{Y}_{\mu\nu} \doteqdot \partial^\mu \mathcal{Y}_{\mu\nu} + [\mathcal{A}^\mu + \mathcal{X}^\mu, \mathcal{Y}_{\mu\nu}] \tag{2.42b}$$
$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{X}_\mu \doteqdot \partial_\lambda \mathcal{X}_\mu + [\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{X}_\lambda, \mathcal{X}_\mu] \ . \tag{2.42c}$$

[§]Mit dem bisher diskutierten Whitneybündel läßt sich tatsächlich nur elektromagnetische Wechselwirkung beschreiben. Höhere Wechselwirkungen lassen sich mit der RST beschreiben, wenn anstelle der $U(1)$ höherdimensionale Gruppen wie die $SU(2)$ oder die $SU(3)$ treten, wobei natürlich die Vektorräume $(\mathbb{C})^i$ in (2.10) dann natürlich durch $\left(\mathbb{C}^2\right)^i$ bzw. $\left(\mathbb{C}^3\right)^i$ zu ersetzen sind. Die Diskussion ab (2.22) versteht sich dann entsprechend blockdiagonal.

Obwohl die Permutationskoeffizienten $\mathcal{X}_\mu$ keine Potentiale im Sinne einer eichinvarianten Faserbündeltheorie sind, muß ihre Ableitung trotzdem wie in (2.42c) formuliert werden, da sie sonst aus dem sonst verfolgten Schema der Theorie herausfallen würden. Daß dieses konsistent möglich ist, beruht, mal wieder, auf dem Doppelcharakter der Matrizen χ_{de} (2.28d).
Die Komponenten der Ableitungen der Feldstärken (2.42a) und (2.42b)

$$D^\mu F^a{}_{\mu\nu} = (\mathcal{D}^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu})^a = \partial^\mu F^a{}_{\mu\nu} + ([\mathcal{A}^\mu + \mathcal{X}^\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}])^a \tag{2.43a}$$

$$D^\mu Y^{ed}_{\mu\nu} = (\mathcal{D}^\mu \mathcal{Y}_{\mu\nu})^{ed} = \partial^\mu Y^{ed}_{\mu\nu} + ([\mathcal{A}^\mu + \mathcal{X}^\mu, \mathcal{Y}_{\mu\nu}])^{ed} \tag{2.43b}$$

$$\tag{2.43c}$$

vor allem die Komponenten der Kommutatoren, lassen sich aus (2.39f) und (2.39g) übernehmen. Es müssen nur sinngemäß Potentiale und Koeffizienten durch Feldstärken ersetzt werden. Gleiches gilt für die Komponenten der Ableitung (2.42c)

$$D_\lambda X^{de}_\mu = (\mathcal{D}_\lambda \mathcal{X}_\mu)^{de} = \partial_\lambda X^{de}_\mu + ([\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{X}_\lambda, \mathcal{X}_\mu])^{de} \tag{2.44}$$

Deren Kommutatorkomponenten können sogar direkt aus (2.39f) und (2.39g) abgelesen werden.
Durch die Kommutatoren sind die Gleichungen (2.42a) und (2.42b) miteinander gekoppelt. Die der unitären Liealgebra $\mathfrak{u}\,(N)$ entliehene Struktur sorgt dafür, bzw. wird so konsequent angewandt, daß der Permutationsteil der Theorie und der Eichanteil nicht einfach nebeneinander her existieren. Dadurch ergeben sich aber Probleme bei der Interpretation der Theorie, wie sich bei der Diskussion der Ströme in 2.4 noch genauer zeigen wird.

Zusammenfassung der Erweiterungen

Die zur Permutationsableitung erweiterte Ableitung (2.26) wird anstelle von (2.12b) in den Bewegunggleichungen für Φ (2.12a) und (2.13a) verwendet bzw. ihre Komponentenform (2.27) in (2.14a). Selbiges gilt in den Gleichungen der hamiltonschen 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$ (2.15a) und(2.17), d.h. die folgendermaßen lautende erweiterte Ableitung von $\mathcal{H}_\mu$ wird in Gebrauch genommen:

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{H}_\mu \doteqdot \partial_\lambda \mathcal{H}_\mu + [\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{X}_\lambda, \mathcal{H}_\mu] \ . \tag{2.45}$$

Dieser Wechsel in der Bedeutung des Symboles $\mathcal{D}_\mu$ ändert an der Diskussion zur Einführung von $\mathcal{H}_\mu$, die in dem Kapitel geführt wird, in dem die besagten Gleichungen angegeben werden nichts, so daß ihre erneute Angabe nicht notwendig ist; es muß nur der Bedeutungswechsel von $\mathcal{D}_\mu$ beachtet werden, wenn die Gleichungen zur Beschreibung von Systemen genutzt werden. Eine Ausnahme hiervon bilden die Gleichungen (2.16) und (2.17), denn auf die linke Seite von (2.16a) geht, genauso wie in den Rest des

Formalismus, $\mathcal{D}_\mu$ in der Form (2.26) ein. Auf der rechten Seite von (2.16a) muß dann natürlich $\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}$ stehen

$$[\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu] \Phi = (\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}) \Phi , \tag{2.46}$$

was dann zwangsläufig auch für die rechte Seite von (2.17) gilt:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{H}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{H}_\mu + \frac{i}{\hbar c} [\mathcal{H}_\mu, \mathcal{H}_\nu] = i\hbar c (\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}) . \tag{2.47}$$

Die ab jetzt geltende Verwendung der permutativen Form von $\mathcal{D}_\mu$ bei Anwendung auf $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$, $\mathcal{A}_\mu$ und $\mathcal{X}_\mu$, also vor allem in den erweiterten Maxwellgleichungen, und die damit einhergehende strikte Anwendung der Strukturkonstanten der Algebra $\mathfrak{u}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$, die den Rahmen (zur Erinnerung: aber auch nur den, ausgeschlossen bleibt die Eichtheorie, die sie mit sich bringen könnte) für die Einbindung der Permutationsgruppe bildet, ist bereits im vorhergehenden Abschnitt eingeführt worden.
Wer schon jetzt mehr über die Ströme der Maxwellgleichungen (2.41) wissen möchte, sollte gleich zum übernächsten Unterkapitel 2.4 springen und die nächsten beiden überspringen, die sich mit der RST im Diracfall und der Lösung der Dynamik der hamiltonschen 1 - Form widmen.

2.2. Die Grundgleichungen der RST für Diracfelder

2.2.1. Die Bildung des Summenbündels

Neben der Klein - Gordon - Gleichung existiert noch die Diracgleichung als Bewegungsgleichung für relativistische Felder. Auch sie soll mit der RSG (2.12a) in Verbindung stehen, wobei natürlich der Tatsache Rechnung getragen werden muss, daß jetzt Spin tragende Felder beschrieben werden. Dazu ist zunächst einmal das grundlegende Whitneysche Summenbündel aus Einzelbündeln $\sigma_i \left(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^4)^i, \left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i \right)$ mit einer $\mathbb{C}^4$-Faser und einer Darstellung der unitären Strukturgruppe, die die Spinstruktur der Faser berücksichtigt, aufzubauen

$$\Sigma \left(\oplus_{i=1}^N E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^N (\mathbb{C}^4)^i, \times_{i=1}^N \left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i \right) = \bigoplus_{i=1}^N \sigma_i \left(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^4)^i, \left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i \right) . \tag{2.48}$$

Jedem Teilchen wird also ein kompletter spinorwertiger Schnitt ${}^i\psi$ zugeordnet. Die Gesamtwellenfunktion $\Psi = \left({}^1\psi, \dots, {}^N\psi\right)^T$ besteht dann wiederum aus der direkten Summe von N dieser Einteilchenschnitte. Im Prinzip kann Ψ noch in die Komponenten seiner Einzelspinoren zerlegt werden ${}^i\psi = (\psi^{4i-3}, \psi^{4i-2}, \psi^{4i-1}, \psi^{4i})^T$, was aber in den allermeisten Fällen nicht notwendig ist.

$$\begin{aligned} {}^i\psi : M_1^4 \to E_i \quad \text{mit} \quad p_i \left({}^i\psi (x^\mu)\right) = x^\mu \qquad (2.49\text{a}) \\ \Psi : M_1^4 \to E \qquad (2.49\text{b}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \ q\Psi\left(x^{1\mu},\ldots,x^{N\mu}\right) = p_i\, {}^{i}\psi\left(x^{\mu}\right) = \ldots = p_N\, {}^{N}\psi\left(x^{\mu}\right) = x^{\mu}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} {}^{1}\psi \\ \vdots \\ {}^{i}\psi \\ \vdots \\ {}^{N}\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^{1} \\ \psi^{2} \\ \psi^{3} \\ \psi^{4} \\ \vdots \\ \psi^{4i-3} \\ \psi^{4i-2} \\ \psi^{4i-1} \\ \psi^{4i} \\ \vdots \\ \psi^{N-3} \\ \psi^{N-2} \\ \psi^{N-1} \\ \psi^{N} \end{pmatrix} . \tag{2.49c}$$

2.2.2. Die Basis für $\mathfrak{u}\left(N\right)$ im Diracfall

In Bezug auf die Darstellung der Eichgruppe und ihrer Liealgebra sowie deren Erweiterung zur Berücksichtigung der Austauschwechselwirkung lässt sich hier folgende Darstellung der Basis von $\mathfrak{u}\left(N\right)$ sinnvoll nutzen:

$$\chi^{\mathrm{D}}_{ab} = \begin{array}{cc} & \mathrm{b} \\ \mathrm{a} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & i\mathbb{1}_{4\times 4} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.50a}$$

$$\left(\chi^{\mathrm{D}}_{ab}\right)\right)^{i}{}_{j} = i\mathbb{1}_{4\times 4}\delta^{i}{}_{a}\delta_{bj} \ ; \ \left\{\chi^{\mathrm{D}}_{ab}\right\} : \text{Basis für } \mathfrak{gl}\left(N\right) \ \text{ bei Anwendung auf } \Psi \tag{2.50b}$$

$$\alpha^{\mathrm{D}}_{a} = \chi^{\mathrm{D}}_{aa} \ ; \ \left\{\alpha^{\mathrm{D}}_{a}\right\} : \text{Basis für } \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{u}_i\left(1\right) \ \text{ bei Anwendung auf } \Psi \tag{2.50c}$$

$$\left\{\chi^{\mathrm{D}}_{de}\right\} \ ; \ d \neq e \ ; \ \left\{\chi_{de}\right\} : \text{Basis für } \mathfrak{u}\left(N\right) \setminus \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{u}_i\left(1\right) \ \text{ bei Anwendung auf } \Psi \tag{2.50d}$$

$$\mathcal{A}^{\mathrm{D}}_{\mu} + \mathcal{X}^{\mathrm{D}}_{\mu} = A^{a}_{\mu}\alpha^{\mathrm{D}}_{a} + X^{de}_{\mu}\chi^{\mathrm{D}}_{de} \tag{2.50e}$$

$$a, b, d, e = \{1, \ldots, N\} \ ; \ \text{aber immer} \ ; \ d \neq e \, .$$

Ersichtlich wird die Unterstruktur der Einzelspinoren ${}^{i}\psi$ *nicht* aufgelöst; ein Potential vermittelt Wechselwirkungen zwischen Teilchen also immer, in dem es auf den vollständigen zugeordneten Spinor wirkt, ohne dessen Substruktur zu verändern. Ganz ohne diese lässt sich eine Theorie von Spin tragenden Teilchen aber nicht aufbauen, denn die Lorentzinvarianz des Einteilchenformalismus, die sich selbstverständlich auf die Vielteilchenformulierung übertragen muss, verlangt nach der Verwendung der γ_μ - Matrizen in Bilinearformen, wie dem Skalarprodukt zweier Spinoren, und später der Bewegungsgleichung für Ψ. Da Ψ die direkte Summe von Einzelspinoren ist, ergibt sich die direkte Summe von N γ_μ - Matrizen als ihre natürliche Verallgemeinerung auf den Vielteilchenfall, analog zu den Potentialen der Eichsymmetrie $\mathcal{A}_\mu$

$$\Gamma_\mu = \bigoplus_1^N \gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_\mu \end{pmatrix} = \gamma_\mu \cdot \mathbb{1}_{(4N\times 4N)} \; . \tag{2.51}$$

Mit dem Verständnis der Eichwechselwirkungen (2.50) gilt dann

$$\left[\Gamma_\nu, \mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}}\right] = 0 \; . \tag{2.52}$$

2.2.3. Die Aufnahme von Austauschphänomenen durch die Erweiterung der eichkovarianten Ableitung und des Feldstärketensors und die Folgen für die Hamiltondynamik

Die Erweiterung der eichkovarianten Ableitung

Das Skalarprodukt kann mit (2.50) folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} < \Psi, \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right)^{\mathrm{D}} \Psi >= \overline{\Psi} \cdot \left(\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}}\right) \Psi &= A_\mu^a \, {}_i\overline{\psi} \left(\alpha_a^{\mathrm{D}}\right)^i{}_j \, {}^j\psi + X_\mu^{de} \, {}_i\overline{\psi} \left(\chi_{de}^{\mathrm{D}}\right)^i{}_j \, {}^j\psi \\ &= iA^1{}_\mu \, {}_1\overline{\psi} \cdot \mathbb{1}_{4\times 4} \cdot {}^1\psi + iX_\mu^{12} \, {}_1\overline{\psi} \cdot \mathbb{1}_{4\times 4} \cdot {}^2\psi + \ldots \\ &\quad + iX_\mu^{NN-1} \, {}_N\overline{\psi} \cdot \mathbb{1}_{4\times 4} \cdot {}^{N-1}\psi + iA_\mu^N \, {}_N\overline{\psi} \cdot \mathbb{1}_{4\times 4} \cdot {}^N\psi \\ &= iA^1{}_\mu \cdot {}_1\overline{\psi} \, {}^1\psi + iX_\mu^{12} \cdot {}_1\overline{\psi} \, {}^2\psi + \ldots + iX_\mu^{NN-1} \cdot {}_N\overline{\psi} \, {}^{N-1}\psi \\ &\quad + iA_\mu^N \cdot {}_N\overline{\psi} \, {}^N\psi \end{aligned} \tag{2.53}$$

Sowohl die Wechselwirkungspotentiale A_μ^a als auch die Austauschpotentiale X_μ^{de} wirken, wie schon erwähnt, auf einen kompletten Einteilchenspinor ${}^i\psi$. Aus der letzten Zeile wird ersichtlich, daß anstatt der Diracdarstellung der Liealgebra $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ (2.50) auch deren Klein - Gordon - Version (2.28) benutzt werden kann, vorausgesetzt man versteht Ausdrücken der Art $\left(\left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right)\right)^i{}_j \, {}^j\psi$ als Multiplikation eines skalaren Elementes $\left(\left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right)\right)^i{}_j$ an einen Spinor ${}^j\psi$. Im Folgenden wird deshalb die eichkovariante Ableitung des spinorwertigen Schnittes Ψ mit derselben Form der Liealgebra für $\mathfrak{u}(N)$

angegeben, die schon beim $\mathbb{C}^N$ - wertigen Schnitt Φ verwendet worden ist

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \mathcal{A}^{\mathrm{D}}_\mu \Psi + \mathcal{X}^{\mathrm{D}}_\mu \Psi \tag{2.54a}$$

$$\hat{=} \partial_\mu \Psi + \mathcal{A}_\mu \Psi + \mathcal{X}_\mu \Psi \tag{2.54b}$$

$$D_\mu {}^i\psi = (\mathcal{D}_\mu \Psi)^i = \partial_\mu {}^i\psi + A^a{}_\mu (\alpha_a)^i{}_j {}^j\psi + X^{de}{}_\mu (\chi_{de})^i{}_j {}^j\psi \ , \tag{2.54c}$$

auch weil beide Darstellungen von $\mathfrak{u}(N)$ (2.28) und (2.50) die selben Strukturkonstanten haben, weswegen ebenso der erweiterte Feldstärketensor $\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}_{\mu\nu}$ der jetzt in (2.16b) resp. (2.39a) - (2.40b) Verwendung findet, ebenso wie seine erweiterte eichkovariante Ableitung, in beiden Fällen gleich behandelt werden kann.

Die Dynamik der hamiltonschen 1 - Form $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu$

Als Bezugsgleichung der RST zur Einteilchentheorie dient jetzt die Diracgleichung. Kontraktion der RSG des Schnittes Ψ für Spin tragende Teilchen

$$i\hbar c \mathcal{D}_\mu \Psi = \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu \Psi \tag{2.55a}$$

$$\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu \in \mathfrak{gl}(4N) \tag{2.55b}$$

$$\mathcal{H}'^{D}_\mu = \mathcal{S} \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu \mathcal{S}^{-1} \ , \tag{2.55c}$$

mit Γ^μ hat also auf die Diracgleichung für Ψ zu führen

$$i\hbar c \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi = \mathcal{M}^{\mathrm{D}} c^2 \Psi \tag{2.56a}$$

$$\mathcal{M}^{\mathrm{D}} = \mathrm{diag}\left\{m^1 \mathbb{1}_{4\times4}, \ldots, m^N \mathbb{1}_{4\times4}\right\} \hat{=} \mathrm{diag}\left\{m^1, \ldots, m^N\right\} = \mathcal{M} \tag{2.56b}$$

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{M}^{\mathrm{D}} \equiv 0 \ , \tag{2.56c}$$

deren Komponenten wiederum die Diracgleichung der Einzelspinoren ${}^i\psi$ sind, der die Vielteilchencharakteristik fehlt, wenn $(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu) \to \mathcal{A}_\mu$

$$i\hbar c \gamma^\mu D_\mu {}^i\psi = m^i \, {}^i\psi \tag{2.57a}$$

$$D_\mu {}^i\psi = {}^i(\mathcal{D}_\mu \Psi) = \partial_\mu {}^i\psi + (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)^i{}_j {}^j\psi \ . \tag{2.57b}$$

$\mathcal{M}$ ist dabei wieder der Massenoperator, für den bei Spin tragenden Teilchen das bezüglich der Anwendung des Eichpotentials $(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)$ Gesagte gilt. Hinsichtlich $\mathcal{H}_\mu$ muss jetzt die Bedingung

$$\Gamma^\mu \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu = \mathcal{M} c^2 \ , \tag{2.58}$$

gelten, was sich auch in der zu (2.47) ähnlichen Form

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu - \frac{i}{\hbar c} \mathcal{H}^{\mathrm{D}\mu} \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_\mu = -i\hbar c \left(\frac{\mathcal{M} c}{\hbar}\right)^2 + \Sigma^{\mu\nu} \left(\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.59}$$

ausdrücken lässt. $\Sigma^{\mu\nu}$ ist dabei der Generator der Lorentztransformation des Spinors Ψ

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}\right] \ , \tag{2.60}$$

dessen Gestalt aus dem Aufbau von Ψ (2.49a) - (2.49c) und Γ^{μ} (2.51) folgt. $\left(\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}\right)$ ist gemäß(2.16a) - (2.16b) definiert mit Ψ anstatt Φ und der erweiterten eichkovarianten Ableitung statt der normalen, samt der daraus mit Hilfe der RSG (2.55a) herleitbaren Rotationsbeziehung analog zu (2.46) mit $\mathcal{D}_{\mu}$ jetzt als $\partial_{\mu} + (\mathcal{A}_{\mu} + \mathcal{X}_{\mu})$

$$\left[\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu} - \mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\right]\Psi = \left(\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}\right)\Psi \tag{2.61a}$$

$$\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\left(\mathcal{A}_{\nu} + \mathcal{X}_{\nu}\right) - \partial_{\nu}\left(\mathcal{A}_{\mu} + \mathcal{X}_{\mu}\right) + \left[\mathcal{A}_{\mu} + \mathcal{X}_{\mu}, \mathcal{A}_{\nu} + \mathcal{X}_{\nu}\right] \tag{2.61b}$$

$$\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\nu} - \mathcal{D}_{\nu}\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mu} + \frac{i}{\hbar c}\left[\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mu}, \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\nu}\right] = i\hbar c\left(\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \mathcal{Y}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}\right) \ . \tag{2.61c}$$

Aus den Lösungen von (2.55a) wird wiederum eine Intensitätsmatrix gebildet

$$\mathcal{I}^{\mathrm{D}}(x) = I^{AB}(x)\Psi_{A}(x) \otimes \bar{\Psi}_{B}(x) = I^{AB}(x)\Psi_{A}(x) \otimes \left(\Psi^{\dagger}_{B}(x)\Gamma_{0}\right) \tag{2.62a}$$

$$\left(\mathcal{I}^{\mathrm{D}}(x)\right)^{i}{}_{j} = \left(I^{AB}\,{}^{\frac{i+n}{4}}\psi_{A}(x) \otimes {}_{\frac{j+m}{4}}\bar{\psi}_{B}(x)\right)^{n}{}_{m} = I^{AB}\psi^{i}_{A}(x)\bar{\psi}_{jB} \ ; \ \ n, m = 0, \ldots, 3 \tag{2.62b}$$

$$\begin{aligned} q\Psi_{A}\left(x^{\mu}\right)) &= q\Psi_{B}\left((x^{\mu}\right) = x^{\mu} \\ I^{BA*} &= I^{AB} \ . \end{aligned} \tag{2.62c}$$

Diese Intensitätsmatrix erfüllt die RNG

$$\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{I}^{\mathrm{D}} = \frac{i}{\hbar c}\left[\mathcal{I}^{\mathrm{D}}\bar{\mathcal{H}}^{\mathrm{D}}_{\mu} - \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mu}\mathcal{I}^{\mathrm{D}}\right] \tag{2.63a}$$

$$\hat{=} \frac{i}{\hbar c}\left[\mathcal{I}\bar{\mathcal{H}}_{\mu} - \mathcal{H}_{\mu}\mathcal{I}\right] \tag{2.63b}$$

$$\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{I}^{\mathrm{D}} = \partial_{\mu}\mathcal{I}^{\mathrm{D}} + \left[\mathcal{A}^{\mathrm{D}}_{\mu} + \mathcal{X}^{\mathrm{D}}_{\mu}, \mathcal{I}^{\mathrm{D}}\right] \ , \tag{2.63c}$$

wenn

$$\mathcal{D}_{\mu}I^{AB} \equiv 0 \ , \tag{2.64}$$

gilt. (2.62b) zeigt die Unterstruktur die $\mathcal{I}^{\mathrm{D}}$ (2.62a) gegenüber $\mathcal{I}$ (2.19a) besitzt: Das (i, j)te Element von $\mathcal{I}^{\mathrm{D}}$ ist das (n, m)te Element des Blockes, der aus dem Tensorprodukt der Einzelspinoren ${}^{\frac{i+n}{4}}\psi(x)$ und ${}_{\frac{j+m}{4}}\bar{\psi}(x)$ besteht, das an die Stelle des Skalars $I^{AB}\phi^{i}_{A}\bar{\phi}_{jB}$ (2.19b) tritt. Anders als die Eich - und Austauschpotentiale löst demnach die Gemischformulierung im vorliegenden Fall die Unterstruktur der Einteilchenspinoren also auf, weshalb $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mu}$ eine echt $\mathfrak{gl}\,(4N)$ - wertige 1 - Form sein muss. Währendessen bleibt die reine Vielteilchenstruktur davon unberührt; auf den Gemischblock (2.62b) wirkt das Potential

$\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}}$ gemäß(2.63c) immer noch der Struktur (2.50a) folgend mit *einem* Potentialwert $\left(\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}}\right)^i{}_j \mathbb{1}_{4\times 4}$ je Einzelspinor ${}^i\psi$ bzw. ${}_j\overline{\psi}$.
Je nach dem ob die Klein - Gordon - Gleichung (2.13a) - (2.14b) oder die Diracgleichung (2.56a) - (2.57b) die Bezugsgleichung für die RST stellen, wird vom *Klein - Gordonfall* oder vom *Diracfall* gesprochen. Da durch diese Angabe eigentlich klar ist, wie sich $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}_\mu$, $\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu$ und $\mathcal{M}$ verstehen, unterbleibt die Indizierung dieser Grössen, es sei denn beide Fälle werden verglichen oder nebeneinander verwendet. Der Verzicht auf einen eigene Index des Klein - Gordonfalles und die nicht indizierten Ausdrücke des Diracfalles (2.54b), (2.57b) und (2.63b) sollen dieses zum Ausdruck bringen. Besonders der Wechsel zwischen $\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}}$ und $\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}}$ bzw. der Basis (2.50) und (2.28) ist einfach genug um zwischen den Darstellungen situationsabhängig wechseln zu können, ohne daß die fehlende gesonderte Herausstellung der verwendeten Basis zu Verständnisproblemen führt. Häufig wird im Folgenden deshalb auch von *der* Rotationsgleichung der RST gesprochen, obwohl streng genommen zwei Varianten (2.17) und (2.61c) existieren. Ebenso werden die die beiden Divergenzgleichungen (2.15a) und (2.59) als eine Gleichung angesprochen, wobei aus dem Zusammenhang immer klar wird, welche von beiden gemeint ist.

2.3. Eine formale Lösung der Dynamik der hamiltonschen 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$

2.3.1. Der Klein - Gordonfall

Zum Abschluß soll, basierend auf [14], die innere Konsistenz der RST - Dynamik gezeigt werden, bestehend aus der Bewegungsgleichung des Schnittes Φ (2.12a) - (2.12e), der Hamiltondynamik (2.15a), (2.17), der Eichfelddynamik (2.18) und schließlich der Bewegungsgleichung für $\mathcal{I}$ (2.20a) für den Klein - Gordonfall sowie den analogen Ausdrücken (2.54b), (2.55a), (2.55b), (2.58) bzw. (2.59), (2.61c) und (2.63a) für den Diracfall. Dazu wird die Rotationsgleichung (2.17) gelöst, in dem zu einem sehr allgemeinen Ansatz der $\mathfrak{gl}\,(n)$ - wertigen 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$ ein Element $(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu)$ der $U\,(N)$ - Struktur addiert wird

$$\mathcal{H}_\mu = i\hbar c\left(\left(\partial_\mu g\right) g^{-1} + \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right)\right) \tag{2.65a}$$
$$g \in \mathcal{G}l\,(N) \ . \tag{2.65b}$$

Einen ersten Hinweis darauf, von welcher Art die Einträge von g sein werden, liefert dessen Transformationsverhalten. Damit weiterhin (2.12f) bzw. (2.55c) gilt, folgt wegen (2.12d) und (2.38) für g

$$g' = \mathcal{S} g \ , \tag{2.66}$$

was klar das Transformationsverhalten einer vektoriellen Grösse ist.
Zunächst ergeben sich mit (2.65a) die Lösungen

$$\Phi = g\Phi_* \tag{2.67a}$$

$$\mathcal{I} = g g_* g^\dagger \ , \tag{2.67b}$$

für die RSG (2.12a) und die RNG (2.20a), wobei Φ_* ein konstanter N - Vektor und g_* eine konstante hermitische $N \times N$ - Matrix ist. Aus der Quellgleichung (2.15a) wird

$$\partial^\mu \partial_\mu g + 2 \left(\mathcal{A}^\mu + \mathcal{X}^\mu\right) \partial_\mu g + \left(\mathcal{A}^\mu + \mathcal{X}^\mu\right) \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right) g + \partial^\mu \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right) g = -\left(\frac{\mathcal{M}c}{\hbar}\right)^2 g \ , \tag{2.68}$$

was sich zu

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu g + \left(\frac{\mathcal{M}c}{\hbar}\right)^2 g = 0 \ , \tag{2.69}$$

zusammenfassen lässt, vorausgesetzt man faßt $\mathcal{D}_\mu g$ als $\partial_\mu g + \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu\right) g$ auf, womit aber endgültig festgelegt wird, daß g Vektorcharakter hat, denn diese Formulierung macht nur Sinn, wenn die einzelnen Spalten von g Vektoren sind. Mit anderen Worten sind die Spalten von g Lösungen Φ_A der vektoriellen Klein - Gordon - Gleichung (2.13a),

$$g = \left(\Phi_I, \Phi_{II}, \ldots\right) = \begin{pmatrix} \phi^1{}_I & \phi^1{}_{II} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ldots \\ \phi^N{}_I & \phi^N{}_{II} & \ldots \end{pmatrix} . \tag{2.70}$$

Auf dieser Grundlage sind dann auch (2.67b) und (2.19a) identisch unter der Bedingung, daß die Entwicklungkoeffizienten I^{AB} aus (2.19a) und die Matrixelemente $\left(g_*\right)^A{}_B$ aus (2.67b) gleich sind

$$I^{AB} = \left(g_*\right)^A{}_B \ . \tag{2.71}$$

Diese Identifizierung lässt sich aus Sicht der Matrix g_* nur komponentenweise durchführen, da die I^{AB} als Entwicklungskoeffizienten einen anderen mathematischen Charakter besitzen als die Matrixelemente $\left(g_*\right)^A{}_B$. Gleichwohl sind aber beide Sätze von Zahlen unter Vertauschung der Indices hermitesch und erfüllen in den Komponenten von $\left(\mathcal{I}\right)^i{}_j$ dieselbe Funktion:

$$\left(\mathcal{I}\right)^i{}_j = I^{AB} \phi^i_A \phi^*_{jB} = \phi^i_k \left(g_*\right)^k{}_\ell \phi^{*l}{}_j = \phi^i{}_A \left(g_*\right)^A{}_B \phi^{*B}{}_j \ . \tag{2.72}$$

D.h. nun zusammengefasst, daß die eingangs des Abschnittes angegebene RST - Dynamik die gewünschte Form der Intensitätsmatrix $\mathcal{I}$ ohne besondere Definition liefert, ebenso die Äquivalenz des Formalismus mit der bestehenden Klein - Gordontheorie ohne expliziten Bezugnahme auf die Klein - Gordongleichung.

2.3.2. Der Diracfall

Die Lösung des Diracfalles veräuft analog. Zuerst wird mit dem Ansatz

$$\mathcal{H}_\mu^{\mathrm{D}} = i\hbar c \left(\left(\partial_\mu g^{\mathrm{D}} \right) g^{\mathrm{D}-1} + \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu \right) \right) \tag{2.73a}$$

$$g^{\mathrm{D}} \in \mathcal{G}l\,(4N) \ , \tag{2.73b}$$

(2.61c) gelöst, was auf

$$\Psi = g^{\mathrm{D}} \Psi_* \tag{2.74a}$$

$$\mathcal{I}^{\mathrm{D}} = g^{\mathrm{D}} g_*^{\mathrm{D}} g^{D\dagger} \gamma_0 = g^{\mathrm{D}} g_*^{\mathrm{D}} \bar{g}^{\mathrm{D}} \ , \tag{2.74b}$$

führt. Neben dem gleichbleibenden vektoriellen bzw. hier spinoriellen Transformationsverhalten von g^{D} ist auch die Multiplikation mit γ_0 dem spinoriellen Charakter von g^{D} geschuldet. Aus (2.58) folgt damit

$$i\hbar c \Gamma^\mu \left(\partial_\mu g^{\mathrm{D}} + \left(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu \right) g^{\mathrm{D}} \right) = \mathcal{M} c^2 \cdot g^{\mathrm{D}} \ , \tag{2.75}$$

was ebenso wie (2.68) die Zusammenfassung

$$i\hbar c \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu g^{\mathrm{D}} = \mathcal{M} c^2 \cdot g^{\mathrm{D}} \ , \tag{2.76}$$

zulässt, wenn man $\mathcal{D}_\mu g^{\mathrm{D}}$ in der spinoriellen Weise $\partial_\mu g^{\mathrm{D}} + \left(\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{D}} + \mathcal{X}_\mu^{\mathrm{D}} \right) g^{\mathrm{D}}$ auffasst, also g^{D} spaltenweise als Lösungen Ψ_A der spinoriellen Diracgleichung (2.56a)

$$g^{\mathrm{D}} = \left(\Psi_I, \Psi_{II}, \ldots \right) = \begin{pmatrix} {}^1\psi_I & {}^1\psi_{II} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ldots \\ {}^N\psi_I & {}^N\psi_{II} & \ldots \end{pmatrix} \ , \tag{2.77}$$

versteht. Damit sind wiederum (2.62a) und (2.74b) gleich und der Diracfall ebenso eigenständig wie der Klein - Gordonfall, vorausgesetzt

$$g_*^{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} I^{II} \mathbb{1}_{4\times4} & \cdots & I^{IK} \mathbb{1}_{4\times4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{KI} \mathbb{1}_{4\times4} & \cdots & I^{KK} \mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \quad ; \ K\text{: Anzahl an Zuständen} \, . \tag{2.78}$$

2.3.3. Systeme in denen die Teilchenzahl die Anzahl der dem System zugänglichen Zustände übersteigt

Das Problem der Inversen g^{-1}, die notwendigerweise zu existieren hat, im Zusammenhang mit Teilchenzahlen die die Anzahl an Zuständen übersteigen und somit keine quadratische invertierbare Matrix ergeben, lässt sich durch die konstante Matrix g_* lösen. Sie allein bestimmt nämlich, welche Teile von g in die Intensitätsmatrix $\mathcal{I}$ aufgenommen werden, mit der dann die Observablen der Theorie gebildet werden; zum letzten

Punkt siehe das nächste Kapitel. Man kann also zunächst mit einer beliebig dimensionierten, invertierbaren $(4)N \times (4)N$ - Matrix g beginnen, um dann über die Einträge von der, bis auf die Hermitizität keinen Bedingungen unterworfenen Matrix g_* festzulegen wieviele Spalten, d.h. verschiedene Zustände N - Teilchenzustände des Systems, in die Beschreibung eingehen sollen. So wird zum Beispiel aus der anfänglichen Matrix

$$g = \begin{pmatrix} \phi^1{}_I & \phi^1{}_{II} & \phi^1{}_{III} \\ \phi^2_I & \phi^2{}_{II} & \phi^2{}_{III} \\ \phi^3_I & \phi^3{}_{II} & \phi^3{}_{III} \end{pmatrix} , \tag{2.79}$$

durch die Wahl

$$g_* = \begin{pmatrix} g^1_{*1} & 0 & 0 \\ 0 & g^2_{*2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.80}$$

die Intensitätsmatrix

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} g^1_{*1}\phi^1{}_I\phi^{1*}{}_I + g^2_{*2}\phi^1{}_{II}\phi^{1*}{}_{II} & g^1_{*1}\phi^1{}_I\phi^{2*}{}_I + g^2_{*2}\phi^1{}_{II}\phi^{2*}{}_{II} & g^1_{*1}\phi^1{}_I\phi^{3*}{}_I + g^2_{*2}\phi^1{}_{II}\phi^{3*}{}_{II} \\ g^1_{*1}\phi^2{}_I\phi^{1*}{}_I + g^2_{*2}\phi^2{}_{II}\phi^{1*}{}_{II} & g^1_{*1}\phi^2{}_I\phi^{2*}{}_I + g^2_{*2}\phi^2{}_{II}\phi^{2*}{}_{II} & g^1_{*1}\phi^2{}_I\phi^{3*}{}_I + g^2_{*2}\phi^2{}_{II}\phi^{3*}{}_{II} \\ g^1_{*1}\phi^3{}_I\phi^{1*}{}_I + g^2_{*2}\phi^3{}_{II}\phi^{1*}{}_{II} & g^1_{*1}\phi^3{}_I\phi^{2*}{}_I + g^2_{*2}\phi^3{}_{II}\phi^{2*}{}_{II} & g^1_{*1}\phi^3{}_I\phi^{3*}{}_I + g^2_{*2}\phi^3{}_{II}\phi^{3*}{}_{II} \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

$$= g^1_{*1} \begin{pmatrix} \phi^1{}_I \\ \phi^2{}_I \\ \phi^3{}_I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \phi^{1*}{}_I & \phi^{2*}{}_I & \phi^{3*}{}_I \end{pmatrix} + g^2_{*2} \begin{pmatrix} \phi^1{}_{II} \\ \phi^2{}_{II} \\ \phi^3{}_{II} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \phi^{1*}{}_{II} & \phi^{2*}{}_{II} & \phi^{3*}{}_{II} \end{pmatrix} ,$$

also ein 3 - Teilchensystem, dem zwei Dreiteilchenzustände zur Verfügung stehen.

2.3.4. Systeme in denen die Anzahl der dem System zugänglichen Zustände die Teilchenzahl übersteigt

Bei Systemen mit einer grösseren Zahl an Zuständen im Vergleich zur Teilchenzahl funktioniert dieses Verfahren nicht, denn die Matrix g_* ist im wesentlichen nichts anderes als die Matrixanordnung der Koeffizienten I^{AB}, welche nur die Gewichtung, ggf. die Nullgewichtung, der einzelnen Zustände bestimmt; die Teilchenzahl läßt sich hiermit nicht regulieren. Zu diesem Zweck müssen die Eichpotentiale herangezogen werden, wobei hier durch eine entsprechende Wahl der Generatoren bestimmte Teilchen vom betrachteten Teil des Systems derart isoliert werden können, daß sie für dessen Dynamik keine Rolle mehr spielen. Möchte man z.B. ein 2 - Teilchensystem mit drei Zuständen untersuchen, startet man wie oben mit einer quadratischen, invertierbaren 3×3 - Matrix

$$g = \begin{pmatrix} \phi^1{}_I & \phi^1{}_{II} & \phi^1{}_{III} \\ \phi^2_I & \phi^2{}_{II} & \phi^2{}_{III} \\ \phi^3_I & \phi^3{}_{II} & \phi^3{}_{III} \end{pmatrix} , \tag{2.82}$$

die sich im Unterschied zu oben mit

$$g_* = \begin{pmatrix} g^1_{*1} & 0 & 0 \\ 0 & g^2_{*2} & 0 \\ 0 & 0 & g^3_{*3} \end{pmatrix} , \tag{2.83}$$

zur Intensitätsmatrix eines 3 - Teilchensystems mit drei Zuständen verbindet

$$\begin{aligned} \mathcal{I} =& g^1_{*1} \begin{pmatrix} \phi^1_I\phi^{1*}_I & \phi^1_I\phi^{2*}_I & \phi^1_I\phi^{3*}_I \\ \phi^2_I\phi^{1*}_I & \phi^2_I\phi^{2*}_I & \phi^2_I\phi^{3*}_I \\ \phi^3_I\phi^{1*}_I & \phi^3_I\phi^{2*}_I & \phi^3_I\phi^{3*}_I \end{pmatrix} + g^2_{*2} \begin{pmatrix} {\phi^1}_{II}{\phi^{1*}}_{II} & {\phi^1}_{II}{\phi^{2*}}_{II} & {\phi^1}_{II}{\phi^{3*}}_{II} \\ {\phi^2}_{II}{\phi^{1*}}_{II} & {\phi^2}_{II}{\phi^{2*}}_{II} & {\phi^2}_{II}{\phi^{3*}}_{II} \\ {\phi^3}_{II}{\phi^{1*}}_{II} & {\phi^3}_{II}{\phi^{2*}}_{II} & {\phi^3}_{II}{\phi^{3*}}_{II} \end{pmatrix} \\ &+ g^3_{*3} \begin{pmatrix} {\phi^1}_{III}{\phi^{1*}}_{III} & {\phi^1}_{III}{\phi^{2*}}_{III} & {\phi^1}_{III}{\phi^{3*}}_{III} \\ {\phi^2}_{III}{\phi^{1*}}_{III} & {\phi^2}_{III}{\phi^{2*}}_{III} & {\phi^2}_{III}{\phi^{3*}}_{III} \\ {\phi^3}_{III}{\phi^{1*}}_{III} & {\phi^3}_{III}{\phi^{2*}}_{III} & {\phi^3}_{III}{\phi^{3*}}_{III} \end{pmatrix} \\ =& g^1_{*1} \begin{pmatrix} {\phi^1}_I \\ {\phi^2}_I \\ {\phi^3}_I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} {\phi^{1*}}_I & {\phi^{2*}}_I & {\phi^{3*}}_I \end{pmatrix} + g^2_{*2} \begin{pmatrix} {\phi^1}_{II} \\ {\phi^2}_{II} \\ {\phi^3}_{II} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} {\phi^{1*}}_{II} & {\phi^{2*}}_{II} & {\phi^{3*}}_{II} \end{pmatrix} \\ &+ g^3_{*3} \begin{pmatrix} {\phi^1}_{III} \\ {\phi^2}_{III} \\ {\phi^3}_{III} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} {\phi^{1*}}_{III} & {\phi^{2*}}_{III} & {\phi^{3*}}_{III} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2.84}$$

Das überzählige Teilchen wird durch die Wahl der Generatoren als

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.85a}$$

$$\chi_{12} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.85b}$$

die ersichtlich eine Basis für $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ darstellen, aus dem betrachteten System entfernt, denn durch die Permutationsableitung (2.26) in dieser Basis werden nur noch die ersten beiden Teilchen durch Eich - und Austauschwechselwirkung aneinander gekoppelt, während das dritte Teilchen als freies, d.h. von den anderen beiden nicht beeinflußtes und sie auch nicht beeinflussendes auftritt. Diese Aufteilung des Systems erscheint auch in allen Observablen, so daß das nicht angekoppelte Teilchen nur auf sich selbst bezogene Zusatzterme zum restlichen 2 - Teilchenproblem liefert.
Der etwas eigenartigen Auffassung der Ableitung von g und g^{D} wie sie nach (2.69)

bzw. (2.76) beschrieben ist, lässt sich mehr Vertrauen abgewinnen, wenn man sie als kompaktere Schreibweise des vektoriellen

$$\partial_\mu \begin{pmatrix} \Phi_I \\ \vdots \\ \Phi_L \\ \vdots \\ \Phi_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_I \\ \vdots \\ \Phi_L \\ \vdots \\ \Phi_K \end{pmatrix} , \qquad (2.86)$$

bzw. des entsprechenden spinoriellen Ausdrucks

$$\partial_\mu \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \vdots \\ \Psi_L \\ \vdots \\ \Psi_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\mathcal{A}^{\mathrm{D}}_\mu + \mathcal{X}^{\mathrm{D}}_\mu\right) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \left(\mathcal{A}^{\mathrm{D}}_\mu + \mathcal{X}^{\mathrm{D}}_\mu\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \left(\mathcal{A}^{\mathrm{D}}_\mu + \mathcal{X}^{\mathrm{D}}_\mu\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \vdots \\ \Psi_L \\ \vdots \\ \Psi_K \end{pmatrix} , \qquad (2.87)$$

betrachtet, dem die folgende Zuordnung zugrunde liegt,

$$g = \begin{pmatrix} \phi^1{}_I & \dots & \phi^1{}_L & \dots & \phi^1{}_N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi^i{}_I & \dots & \phi^i{}_L & \dots & \phi^i{}_N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi^N{}_I & \dots & \phi^N{}_L & \dots & \phi^N{}_N \end{pmatrix} \qquad (2.88a)$$

$$\rightarrow \vec{g} = \big(\ \phi^1{}_I \ \dots \ \phi^i{}_I \ \dots \ \phi^N{}_I \ \dots \ \phi^1{}_L \ \dots \ \phi^i{}_L \ \dots \ \phi^N{}_L \ \dots \ \phi^1{}_N \ \dots \ \phi^i{}_N \ \dots \ \phi^N{}_N \ \big)^T \qquad (2.88b)$$

$$g^{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} {}^1\psi_I & \dots & {}^1\psi_L & \dots & {}^1\psi_N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^i\psi_I & \dots & {}^i\psi_L & \dots & {}^i\psi_N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^N\psi_I & \dots & {}^N\psi_L & \dots & {}^N\psi_N \end{pmatrix} \qquad (2.88c)$$

$$\rightarrow \vec{g}^{\mathrm{D}} = \big(\ {}^1\psi_I \ \dots \ {}^i\psi_I \ \dots \ {}^N\psi_I \ \dots \ {}^1\psi_L \ \dots \ {}^i\psi_L \ \dots \ {}^N\psi_L \ \dots \ {}^1\psi_N \ \dots \ {}^i\psi_N \ \dots \ {}^N\psi_N \ \big)^T , \qquad (2.88d)$$

also die spaltenweise Abbildung der invertierbaren $N \times N$ - Matrizen auf den $\mathbb{C}^N$, respektive der invertierbaren $4N \times 4N$ - Matrizen auf den $\mathbb{C}^{4N}$. In diesen Vektorräumen werden sich die Entwicklungskoeffizienten I^{AB} aus (2.19b) und (2.62a) in Kapitel 4 als Komponenten einer Metrik erweisen, die eine reiche, über die Entwicklungskoeffizienten hinausreichende Struktur besitzt, wodurch es dann möglich wird die Teilchenzahl ebenso wie die Anzahl an Zuständen in diesem einen Objekt festzulegen, anstatt in zwei getrennten, wie in (2.79) bis (2.85b) geschehen.

2.4. Observable und Erhaltungsgrössen in der RST

In Fortsetzung der Verwendung des Aufbaus der nichtrelativistischen Gemischformulierung als Modell für die Formulierung einer relativistisch invarianten sowie eichkovarianten Theorie werden die den beobachtbaren Grössen der RST zugrunde liegenden Dichten durch Spurbildung des Produktes der Intensitätsmatrix $\mathcal{I}$ mit einem zugehörigen Operator $\mathcal{O}$ gebildet,

$$O = \mathrm{tr}\left\{\mathcal{I}\mathcal{O}\right\} \ . \tag{2.89}$$

Obwohl der RST die nichtrelativistische Gemischformulierung relativistisch verallgemeinern will, übernimmt sie streng genommen nur die Vektorraumkonzepte der bekannten Theorie, die dort erfolgreich sind, in die Vektorräume der Faserbündeltheorie, auf der sie basiert. Durch solche formalen Analogieschlüsse zwischen verwandten aber nicht völlig gleichen mathematischen Konzepten entstehen natürlich auch Unterschiede in den mit physikalischer Interpretation versehenen Objekten der Theorien. Auf die in der Faserbündeltheorie angelegte Lokalität der Intensitätsmatrix $\mathcal{I}$ der RST gegenüber der globalen Definition von ρ (2.2) und (2.3) der konventionellen Theorie wurde schon direkt nach der Festlegung von $\mathcal{I}$ in (2.19a) - (2.19c) eingegangen. Ein weiterer wichtiger konzeptioneller Unterschied wird jetzt durch den Vergleich von (2.9) mit (2.89) sichtbar. Dort wird der Mittelwert eines *Operators* gebildet, hier entstehen *Dichten.* Ersterer ist Ausdruck der probabilistischen Natur der Standardtheorie, letztere sind eindeutig einem fluiddynamischen Bild verhaftet. Dieser Unterschied spiegelt sich auch in der Behandlung der klassischen Feldtheorien wieder. Sowohl die Materiefelder als auch klassische Felder, wie das elektrodynamische, werden in der normalen Theorie der zweiten Quantisierung unterzogen um so eine einheitliche, auf hermiteschen Operatoren und ihren Eigenwerten als möglichen Messwerten beruhende, probabilistische, Grundlage zu erreichen. In der RST dagegen werden Felder als maßgeblich betrachtet, aus denen dann zu Messgrössen gehörende Dichten konstruiert werden. Die Elektodynamik wird demgemäß auch nicht mehr verändert, sondern nur umformuliert, um als Eichfeld in die eichkovariante Ableitung der Materiefelder eingehen zu können. Entsprechend anders versteht sich auch der Begriff der Operatoren $\mathcal{O}$, die in (2.89) verwendet werden. Sie sind Matrixdarstellungen von Gruppen oder deren Liealgebren von Gruppen, die in den Vektorfasern wirken, aus denen die materiellen Feldwerte stammen. Ihre Anbindung an beobachtbare Grössen entsteht durch die Verwendung der durch sie abgebildeten Felder zusammen mit den Feldern selber sowie deren Ableitungen in den entsprechenden Dichten. Dieser Zusammenhang ist deutlich mittelbarer als die direkte Postulierung der Eigenwerte als mögliche Ergebnisse einer Messung in der herkömmlichen Theorie. Folglich sind auch die Restriktionen denen sie unterliegen deutlich weniger unmittelbar bzw. eindeutig als die

direkte Forderung nach Hermitizität zur Sicherstellung reeller Eigenwerte an die Operatoren der probabilistischen Theorie. Es genügt die sich durch (2.89) auf den Operator $\mathcal{O}$ übertragende Symmetrie der Dichte O.
Wegen der Bildungsvorschrift (2.89) und der Definition der Inentsitätsmatrix (2.19a) müsste $\mathcal{O}$ nicht mal in der im vorigen Kapitel aufgestellten Dynamik auftreten, um mit den Feldern der Theorie, egal welchen, in Verbindung zu stehen. Die Erhaltungsgleichungen der Dichten erfordern aber mindestens eine Quellgleichung für $\mathcal{O}$, so dass die in den Bewegugnsgleichungen auftretenden Operatoren wie $\mathcal{H}_\mu$ und v_{de} natürliche Kandidaten zu dessen Konstruktion sind, sofern man nicht zusätzliche Divergenzgleichungen postulieren möchte.
Anhand der Energie - Impulsdichte der Materiefelder ${}^{(\mathrm{mat})}T_{\mu\nu}$ und der Materiestromdichten $k_{a\mu}$, $k_{de\mu}$ soll dieses Verfahren erläutert werden. Dabei wird auch die Bedeutung der Erhaltungsgleichung (2.15a) für eben die Erhaltung dieser beiden Dichten ersichtlich.
Für skalare Teilchen wird der *materielle Energie - Impulsoperator* ${}^{(\mathrm{mat})}\mathcal{T}_{\mu\nu}$ folgendermaßen aus der hamiltonschen 1 - Form als dem Hauptkonstruktionselement und dem Massenoperator zusammengesetzt:

$$
{}^{(\mathrm{mat})}\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2c^2}\left\{\bar{\mathcal{H}}_\mu \mathcal{M}^{-1}\mathcal{H}_\nu + \bar{\mathcal{H}}_\nu \mathcal{M}^{-1}\mathcal{H}_\mu - g_{\mu\nu}\left(\bar{\mathcal{H}}^\lambda \mathcal{M}^{-1}\mathcal{H}_\lambda - \mathcal{M}c^4\right)\right\} \ . \tag{2.90}
$$

Im Fall freier Teilchen erfüllt die daraus gebildete Dichte

$$
{}^{(\mathrm{mat})}T_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\left\{\mathcal{I}\cdot {}^{(\mathrm{mat})}\mathcal{T}_{\mu\nu}\right\} \tag{2.91}
$$

die Energie - Impulserhaltung

$$
\partial^{\mu\,(\mathrm{mat})}T_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\{\mathcal{D}^\mu\left(\mathcal{I}\cdot {}^{(\mathrm{mat})}\mathcal{T}_{\mu\nu}\right)\} = 0\ , \tag{2.92}
$$

vermöge der Beziehungen (2.13c), (2.20a) und besonders der Quellgleichung (2.15a), bzw. (2.56c), (2.63a) und (2.59) für Diracteilchen; sind Koppelungen der Teilchen durch Eichfelder oder ein externes Potential vorhanden, gilt (2.92) natürlich nicht mehr, da jetzt der Energie - Impulstensor natürlich um einen Eichfeldanteil ${}^{(\mathrm{eich})}T_{\mu\nu}$ erweitert werden muss, um die Energie - Impulserhaltung des gesamten Systems korrekt erfassen zu können. Dieser wird aber nicht hier aus einem Operator abgeleitet, sondern in Kapitel (4) im Rahmen des Noethertheorems angegeben, denn dieses Teilkapitel besitzt, neben der Aufgabe einer kurzen Einführung in den älteren Formalismus der RST, das hauptsächliche Anliegen, die zu den Lagrangedichten führende Idee zu schildern. Zu diesem Zweck sind die beiden ausgewählten Beispiele aber ausreichend.
Auch an der Aufstellung der Operatoren, die zu eichkovariant erhaltenen Strömen $k_{a\mu}$ führen, hat $\mathcal{H}_\mu$ Anteil. Außer ihrer Bedeutung als Grundlage für die beobachtbaren Ladungen des Systems zu dienen, kommt diesen Dichten die viel wesentlichere Aufgabe zu in (2.18) die Quellen für die Eich - und Permutationspotentiale $\mathcal{A}_\mu$ und $\mathcal{X}_\mu$ zu stellen. Streng genommen erwächst ihnen erst aus dieser Aufgabe die Bedeutung als Erhaltungs-

grössen, da wegen

$$D^\nu D^\mu F_{a\mu\nu} \equiv 0 \tag{2.93a}$$
$$D^\nu D^\mu Y_{de\mu\nu} \equiv 0 \ , \tag{2.93b}$$

zwingend

$$D^\nu k_{a\nu} \equiv 0 \tag{2.94a}$$
$$D^\nu k_{de\nu} \equiv 0 \tag{2.94b}$$

zu gelten hat. Es ist also nicht weiter erstaunlich, daß neben der Hamiltonschen 1 - Form die Basismatrizen α_a der Liealgebra der Eichpotentiale und des Eichfeldstärketensors sowie die Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe nach denen $\mathcal{X}_\mu$ und $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$ entwicklet werden, auf gleiche Art in die Definition der *Geschwindigkeitsoperatoren* $u_{a\mu}$ und $u_{de\mu}$ eingehen

$$u_{a\mu} = \frac{1}{2c^2} \left(\alpha_a \mathcal{H}_\mu + \bar{\mathcal{H}}_\mu \alpha_a \right) \mathcal{M}^{-1} \tag{2.95a}$$
$$u_{de\mu} = \frac{1}{2c^2} \left(\chi_{de} \mathcal{H}_\mu + \bar{\mathcal{H}}_\mu \chi_{de} \right) \mathcal{M}^{-1} \ , \tag{2.95b}$$

welche dann die Stromdichten

$$k_{a\mu} = \mathrm{tr} \left\{ \mathcal{I} \cdot u_{a\mu} \right\} \tag{2.96a}$$
$$k_{de\mu} = \mathrm{tr} \left\{ \mathcal{I} \cdot u_{de\mu} \right\} \tag{2.96b}$$

bilden, deren Erhaltung gemäß(2.94)

$$D^\mu k_{a\mu} = \mathrm{tr} \left\{ \mathcal{D}^\mu \left(\mathcal{I} \cdot u_{a\mu} \right) \right\} = 0 \tag{2.97a}$$
$$D^\mu k_{de\mu} = \mathrm{tr} \left\{ \mathcal{D}^\mu \left(\mathcal{I} \cdot u_{de\mu} \right) \right\} = 0 \ , \tag{2.97b}$$

neben (2.20a) vor allem wieder (2.15a) sicherstellt. Solche kovariant erhaltenen Grössen lassen sich bekanntlich durch Aufnahme der auf den linken Seite von (2.97) auftretenden Kommutatoren (${C_{de}}^{a_2 d_3 e_3} {A_{a_1}}^\mu Y_{d_3 e_3 \mu\nu}$ und ähnliche) in die Ströme zu echt erhaltenen umwandeln:

$$j_{a\nu} = k_{a\nu} + l_{a\nu} \tag{2.98a}$$
$$\begin{aligned} l_{a\nu} = {} & {C_a}^{a_2\, d_3 e_3} {A_{a_2}}^\mu Y_{d_3 e_3 \mu\nu} + {C_a}^{d_2 e_2\, a_3} {X_{d_2 e_2}}^\mu F_{a_3 \mu\nu} \\ & + {C_a}^{d_2 e_2\, d_3 e_3} {X_{d_2 e_2}}^\mu Y_{d_3 e_3 \mu\nu} \end{aligned} \tag{2.98b}$$
$$\partial^\nu j_{a\nu} \equiv 0 \tag{2.98c}$$

$$j_{de\nu} = k_{de\nu} + l_{de\nu} \tag{2.98d}$$

$$
\begin{aligned}
l_{de\nu} &= C_{de}{}^{a_2\,d_3e_3} A_{a_2}{}^{\mu} Y_{d_3e_3\mu\nu} + C_{de}{}^{d_2e_2\,a_3} X_{d_2e_2}{}^{\mu} F_{a_3\mu\nu} \\
&\quad + C_{de}{}^{d_2e_2\,d_3e_3} X_{d_2e_2}{}^{\mu} Y_{d_3e_3\mu\nu} \qquad (2.98e) \\
\partial^{\nu} j_{de\nu} &\equiv 0\ . \qquad (2.98f)
\end{aligned}
$$

Die Namensgebung der Geschwindigkeitsoperatoren beruht auf der älteren Darstellung der RST, wie sie in [16] nachgelesen werden kann. Dort kann am Beispiel der Ströme der fluiddynamische Charakter der RST sehr gut gezeigt werden, wobei die Stromoperatoren in die Ströme gerade die Kinetik des Konstruktes einbringen, während die Intensitätsmatrix das "zu bewegende Fluid", d.h die als Teilchendichte interpretierte Komponente erbringt. In Grundzügen kann diese Konzept auch aus (2.96) abgelesen werden. Gemäß (2.19b) sind in der Intensitätsmatrix die Dichten $|\phi^i_A|^2$ sowie Überlappdichten der Form $\phi^i_A \bar{\phi_{jB}}$ enthalten. Diesen Dichten fügen die Geschwindigkeitsoperatoren $u_{a\mu}$, $u_{de\mu}$ gerade die zum Stromkonzept benötigte Kinematik hinzu.
(2.98c) stellt die an die Hartree - Fockgleichungen angebundene Interpretation der RST vor einige Probleme, denn durch diese Verbindung werden auch die Grundkonzepte des Teilchenbildes in die RST eingeführt. Dazu gehört auch die Vorstellung, daß die erhaltene Ladung eines (massiven) Teilchens vollständig von dessen Wellenfunktion getragen wird. (2.98c) widerspricht dieser Vorstellung, denn an diesem Erhaltungssatz nehmen genauso die Potentiale $A^a{}_\mu$, Koeffizienten $X^{de}{}_\mu$ sowie Feldstärken $F^a{}_{\mu\nu}$ und $Y^{de}{}_{\mu\nu}$ teil, was durch die dauerhafte Verwendung der $\mathfrak{u}\,(N)$ - Struktur verursacht wird. Dadurch kann die Erhaltungsgrösse, die mit (2.98c) zusammenhängt nicht mehr eindeutig dem Materieanteil $k^a{}_\nu$ zugeordnet werden. Diesen Punkt zu klären ist eines der zentralen Anliegen dessen was in dieser Arbeit noch folgt. Damit ist nicht die in Teilkapitel 2.1.3 in dessen Abschnitt über die Erweiterung des Feldstärketensors beschriebene einfache Variante gemeint, in der die $X^{de}{}_\mu$ mit entsprechenden $A^a{}_\mu$ identifiziert und die Strukturkonstanten des Vektorraumes $\mathfrak{u}(N)$, in den die $\mathcal{X}_\mu$ eingefügt sind, nicht beachtet werden. Dieser Weg führt zwar zu einer schnellen Lösung des Problems, da jetzt die Stöme $l^a{}_\mu$ (2.98b) nicht mehr auftreten, nimmt der Theorie aber die gerade erarbeiteten Freiheitsgrade. Der Weg, der deshalb im Folgenden beschritten wird, besteht darin, die ganze $\mathfrak{u}\,(N)$ als Generatoren eine Liesymmetrie zu verwenden, d.h. die volle mögliche kontinuierliche und im Rahmen der Faserbündeltheorie auch lokal anwendbare Gruppe $U\,(N)$ zu verwenden, statt eine Permutationssymmetrie einzuführen. Dadurch verliert die RST, beabsichtigt, die Anbindung an die Hartree - Focktheorie, behält aber zusätzliche Freiheitsgrade in der Wechselwirkung, die über die reine Eichwechselwirkung hinausreichen. Im übrigen stellen die Beiträge (2.98b) zum Strom $j_{a\nu}$ (2.98c) den wesentlichen der nach (2.18) in Aussicht gestellten Punkte dar, in dem der Strombegriff der RST von dem in der Standardtheorie abweicht.
Im Diracfall lauten der materielle Energie - Impuls - Operator

$$
{}^{(\mathrm{mat\ D})}\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left\{ \Gamma_\mu \cdot \mathcal{H}_\nu + \bar{\mathcal{H}}_\nu \cdot \Gamma_\mu + \Gamma_\nu \cdot \mathcal{H}_\mu + \bar{\mathcal{H}}_\mu \cdot \Gamma_\nu \right\}\ , \qquad (2.99)
$$

und die Geschwindigkeitsoperatoren:

$$u^{\mathrm{D}}_{a\mu} = \Gamma_\mu \alpha^{\mathrm{D}}_a \tag{2.100a}$$
$$u^{\mathrm{D}}_{de\mu} = \Gamma_\mu \chi^{\mathrm{D}}_{de}\ . \tag{2.100b}$$

An die Stelle der Quellgleichung (2.15a) tritt hier natürlich (2.59), wenn es um die Frage der Divergenzfreiheit der zugehörigen Dichten geht. Die Probleme bei der Interpretation des echt erhaltenen Gesamtstromes ${j^{a\,\mathrm{D}}}_\mu$, der sich aus Materie - und permutativ verwendeten $\mathfrak{u}\,(N)$ - Anteilen zusammensetzt, besteht auch hier.
Mittels der Definitionen (2.19a) für $\mathcal{I}$ und der RSG (2.12a), bzw. (2.62a) und (2.55a), lassen sich diese Dichten konkrete Ausdrücke zuordnen, die ihre Verwandschaft mit den entsprechenden Dichten der konventionellen Theorie zeigen:

$$\begin{aligned}{}^{(\mathrm{mat})}T_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{2} I^{AB} \left\{ D_\mu \phi^\ell_A D_\nu \bar{\phi}_{Bm} + D_\nu \phi^\ell_A D_\nu \bar{\phi}_{Bm} - g_{\mu\nu} \left(D^\lambda \phi^\ell_A D_\lambda \bar{\phi}_{Bm} - c^4 \phi^\ell_A \bar{\phi}_{Bn} \left(\mathcal{M}^2\right)^n{}_m \right) \right\} \\ \cdot \left(\mathcal{M}^{-1}\right)^m{}_\ell \end{aligned} \tag{2.101}$$

$$k_{a\mu} = \frac{\hbar}{2c} I^{AB} \left(\phi^\ell_A D_\mu \bar{\phi}_{Bm} - D_\mu \phi^\ell_A \bar{\phi}_{Bm} \right) \left(\alpha_a\right)^m{}_n \left(\mathcal{M}^{-1}\right)^n{}_\ell \tag{2.102}$$

$$k_{de\mu} = \frac{\hbar}{2c} I^{AB} \left(\phi^\ell_A D_\mu \bar{\phi}_{Bm} - D_\mu \phi^\ell_A \bar{\phi}_{Bm} \right) \left(\chi_{de}\right)^m{}_n \left(\mathcal{M}^{-1}\right)^n{}_\ell \tag{2.103}$$

$${}^{(\mathrm{mat\ D})}T_{\mu\nu} = \frac{i}{4} I^{AB} \left\{ {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu D_\nu {}^n\psi_B + {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\nu D_\mu {}^n\psi_B - D_\mu\, {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\nu {}^n\psi_B - D_\nu\, {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu {}^n\psi_B \right\} \tag{2.104}$$

$$k^{\mathrm{D}}_{a\mu} = i I^{AB} \cdot {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu \left(\alpha_a\right)^n{}_m {}^m\psi_B \tag{2.105}$$

$$k^{\mathrm{D}}_{de\mu} = i I^{AB} \cdot {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu \left(\chi_{de}\right)^n{}_m {}^m\psi_B\ . \tag{2.106}$$

Betrachtet man zunächst die spinoriellen Ausdrücke (2.104) und (2.105), erkennt man, dass an die Stelle der Produkte eines Spinors mit sich selbst, seiner eichkovarianten Ableitung oder eines seiner Produkte mit Operatormatrizen, wie $\bar{\psi}\mathcal{A}_\mu\psi$, aus den bekannten Dichten, jetzt Summen von Produkten treten, deren Summanden jeweils aus den Spinoren ${}^\ell\psi_B$ aufgebaut sind die in der RST einem Teilchen zugeordnet sind, z.B.

$$\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu \psi \to {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu D_\nu {}^n\psi_B = {}_1\overline{\psi}_A \gamma_\mu D_\nu {}^1\psi_B + {}_2\overline{\psi}_A \gamma_\mu D_\nu {}^2\psi_B + \dots\ . \tag{2.107}$$

Dabei müssen in den Einzelprodukten nicht einmal gleiche Teilchenspinoren miteinander multipliziert werden, wie der Ausdruck ${}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu \left(\chi_{de}\right)^n{}_m {}^m\psi_B$ für nichtdiagonale Matrizen χ_{de} zeigt. Solche Terme sind durchaus auch in den bekannten Feldtheorien enthalten, so z.B. aus der Quantenchromodynamik mit ihrem Spinortriplett und der Eichgruppe $SU(3)$. Dort sind sie aber immer mit kontinuierlichen, lokalen Eichwechselwirkungen verbunden, während sie in der RST in der bisher angegebenen Formulierung mit der globalen, diskreten Permutationsgruppe zusammenhängen; siehe in Teilkapitel 2.1.3 den

Abschnitt über die Permutationsgruppe in der Liealgebra $\mathfrak{u}(N)$. Hier sind solche Terme die Quellen für die Permutationskoeffizienten $\mathcal{X}_\mu$, da sie die Ströme $k^{de}{}_\nu$ auf der rechten Seite der verallgemeinerten Maxwellgleichung für (2.41b) bilden, welche die $\mathcal{X}_\mu$ bzw. die $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$ ja befolgen sollen. Zu diesem Zweck besitzten sie dann auch eine sinnvolle Form, denn daßder Austausch zwischen zwei Teilchen vom Überlapp ihrer Wellenfunktionen bestimmt wird, ist sicher ein bedenkenswertes Konzept.
Zusätzlich zur Summenbildung über den Teilchenindex wird auch über die Zustandsindices A, B summiert. (2.107) verallgemeinert sich also weiter zu

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu \psi \rightarrow I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A \gamma_\mu D_\nu\, {}^n\psi_B \\ = I^{11}\left({}_1\overline{\psi}_1 \gamma_\mu D_\nu\, {}^1\psi_1 + {}_2\overline{\psi}_1 \gamma_\mu D_\nu\, {}^2\psi_1 + \ldots\right) \\ + I^{21}\left({}_1\overline{\psi}_2 \gamma_\mu D_\nu\, {}^1\psi_2 + {}_2\overline{\psi}_2 \gamma_\mu D_\nu\, {}^2\psi_1 + \ldots\right) + \ldots \quad .\end{aligned} \tag{2.108}$$

Reduziert man die Summen auf nur ein Element gleichen Teilchen - und Zustandindexes, erhält man ersichtlich die Standardtheorie.
Es liegt nun Nahe die gezeigte Verallgemeinerung der Standardausdrücke direkt in den konventionellen Lagrangedichten anzuwenden, was im übernächsten Kapitel geschieht.

Teil II.

Zwischenbilanz

3. Zwischenbilanz und Ausblick auf die folgenden Kapitel

Bisher wurde eine Vielteilchentheorie auf der Ebene der Feldtheorien vorgestellt, die zur Beschreibung jedes Klein - Gordonteilchens (Diracteilchens) einen Summanden $\kappa_i\Big(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^1)^i, (U(1))^i\Big)$ $\Big(\sigma_i\Big(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^4)^i, \big(U^{\mathrm{D}}(1)\big)^i\Big)\Big)$ in der Whitneysumme (2.10) ((2.48)) zur Verfügung stellt, bzw. dessen Faser $\mathbb{C}^1$ ($\mathbb{C}^4$). Über die in Teilkapitel 2.1.2 (2.2.3) vorgestellte hamiltonsche 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$ ($\mathcal{H}_\mu^{\mathrm{D}}$) erhalten fluiddynamische Gemische, denen in der Dichtemarixformulierung der bekannten Quantenmechanik ähnlich, Einzug in die Theorie. Durch die Verwendung der in der Liealgebra enthaltenen Permutationsgruppe werden in Teilkapitel 2.1.3 (2.2.3) Austauschphänomene in die Beschreibung der Vielteilchensysteme aufgenommen. Als Folge davon lassen sich die Bewegunggsgleichungen der materiellen Felder (2.13a) ((2.57a)) mit $\mathcal{A}_\mu + \mathcal{X}_\mu$ statt nur $\mathcal{A}_\mu$ als relativistische Verallgemeinerungen der Hartree - Fockgleichungen auffassen. Durch diese Auffassung ergeben sich aber ernstzunehmende Probleme, denn dadurch wird die der RST zugrunde liegende Summenstruktur mit der Produktstruktur der Standardtheorie verbunden. Diese Produktstruktur der (freien) Vielteilchenwellenfunktion ist wesentlich für den Begriff eines einzelnen Teilchens in der QFT, während das Whiteysummenbündel mit seiner additiven Struktur diese tragende Funktion in der RST übernimmt. Es werden mit anderen Worten in der Anbindung der RST an die Hartree - Fockmethode zwei grundsätzlich verschiedene Teilchenkonzepte miteinander in Verbindung gebracht, was zwangsläufig zu Schwierigkeiten führen muß. Die fehlende Möglichkeit im Rahmen der permutativen RST mit den Strömen $l_{a\nu}$ (2.98b) (mit gleichem Aussehen im Diracfall) konsistent umzugehen, ist ein deutliches Beispiel hierfür.
Es steht somit die Frage im Raum, ob sich für eine Vielteilchentheorie auf der Ebene der Feldtheorien eine eigenständige Idee eines einzelnen (oder besser, auch im Hinblick auf das Kommende: vereinzelten) Teilchens finden läßt, die alleine auf dem Konzept der Whitneysumme beruht, ohne auf die Produktstruktur der QFT zurückzugreifen.
Die Antwort auf diese Frage ist ja. Die Begründung dieser Bejahung ist das Kernanliegen dieser Arbeit und wird in den folgenden Kapiteln ausgearbeitet. Dazu wird von einem Systemspinor ausgegangen, der aus N Diracspinoren besteht und somit als maximale unitäre Symmetriegruppe die Gruppe $U^{\mathrm{D}}(N)$ zulässt. Deren Liealgebra wiederum ist der Vektorraum der antihermitischen $N \times N$ - Matrizen $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$. Das zugehörige Spinorbündel ist demnach $\Upsilon\big(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U^{\mathrm{D}}(N)\big)$. Im deutlichen und gewollten Unterschied

zum Bündel (2.48) ist es kein Whitneysummenbündel. Der wesentliche Unterschiewd zwischen diesen beiden Spinorbündeln liegt weniger in der Faser als in ihren Strukturgruppen. $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ besitzt die volle Gruppe $U^{\mathrm{D}}(N)$ als Strukturgruppe, während $\Sigma\left(\oplus_{i=1}^N E_i,q,M_1^4,\oplus_{i=1}^N(\mathbb{C}^4)^i,\times_{i=1}^N\left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i\right)$ (2.48) nur über die deutlich einfachere Produktgruppe $\times_{i=1}^N\left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i$ verfügt. Damit ist es diesem, wie auch allen anderen Whitneysummenbündel insbesondere unmöglich, die einzelnen $\mathbb{C}^4$ - Abschnitte seiner Faser miteinander in Beziehung zu setzen.
Aus diesem Blickwinkel kann der Unterschied zwischen Σ (2.48) und $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ auch so formuliert werden, daß die Gruppe $U^{\mathrm{D}}(N)$ die Faser das Bündels Υ weit weniger stark segmentiert. Genau diese Eigenschaft soll zur Beschreibung des Austausches zwischen Teilchen dienen. Hieran wird der Bruch mit der bisherigen Form der Theorie nun vollends sichtbar: Es wird von Anfang an von einer *vollständigen* $U^{\mathrm{D}}(N)$ - Symmetrie der Theorie ausgegangen, mit *vollständiger* Liealgebra $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$, anstatt der weit geringeren Liesymmetrie $\times_{i=1}^N\left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i$, deren Liealgebra $\oplus_{i=1}^N\left(\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(1)\right)^i$ erst noch auf die Algebra $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ erweitert werden muß , damit Austauschvorgänge beschreiben werden können. Die neu hinzugekommenen Terme werden zudem als Vertreter der Permutationsgruppe aufgefasst und nicht als Generatoren einer kontinierulichen Symmetrie. Die Betonung der *vollständigen* $U^{\mathrm{D}}(N)$ - Symmetrie mit einer *vollständigen* Liealgebra $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ zielt genau auf diesen Punkt. Ab jetzt wird nicht nur eine komplette Liealgebra $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ von Anfang an vorausgesetzt, sie wird von hier an auch als solche verwendet. D.h. speziell ihre nebendiagonalen Matrizen werden als Generatoren der lokalen, kontinuierlichen $SU^{\mathrm{D}}(N)$ verwendet. Damit sollen die Schwierigkeiten umgangen werden, die sich bei der Vereinigung der Liesymmetrie $\times_{i=1}^N\left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i$ und der globalen Permutationsgruppe unter dem Dach der Liealgebra $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ ergeben haben, und die am deutlichsten durch die Schwierigkeiten der bisherigen RST mit den Strömen (2.98b) zum Ausdruck kommen.
Da das Bündel $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ kein Whitneysummenbündel mehr ist, stellt sich die Frage, welche Rolle diese Struktur in Folgenden noch spielen kann. Die Antwort darauf wird ausnutzen, daß die Strukturgruppe $\times_{i=1}^N\left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i$ des Whitneysummenbündels (2.48) eine Untergruppe von $U^{\mathrm{D}}(N)$ ist, genauso wie $\oplus_{i=1}^N\left(\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(1)\right)^i$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ ist. Die für ein Whitneysummenbündel charakteristische Form der Strukturgruppe ist demzufolge im Bündel $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ enthalten, und kann zutage treten, wenn die sie umgebenden $SU^{\mathrm{D}}(N)$ - Elemente entsprechend beschränkt werden. Um an dieser Stelle gleich einem Mißverständnis vorzubeugen: **Damit wird nicht gesagt, daß die Generatoren dieser Symmetriefreiheitsgrade wieder zur Dartstellung der Permutationsgruppe umfunktioniert werden. Die Beschränkung wird diejenigen Gruppenparameter Λ betreffen der $U^{\mathrm{D}}(N)$, mit denen die $\mathfrak{su}^{\mathrm{D}}(N)\subset\mathfrak{u}^{\mathrm{D}}(N)$ Generatoren ihre $SU^{\mathrm{D}}(N)\subset U^{\mathrm{D}}(N)$ - Elemente erzeugen.**
Anders gesagt ist das Whitneysummenbündel (2.48) mit seiner Segmentierung der Faser

als eine Art “Grenzwert” in $\Upsilon\left(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ enthalten. Wie sich zeigen wird, kann nur in diesem Grenzwert von einzelnen (vereinzelten) Teilchen gesprochen werden. Die Whitneysumme ist also maßgebend für den Teilchenbegriff, ihre Struktur ist nur nicht beständig realisiert. Das heißt aber im Umkehrschluß daß es nicht immer möglich sein wird, von einzelnen Teilchen zu sprechen. Mit anderen Worten wird es umso weniger möglich sein, von einzelnen Teilchen zu sprechen, je stärker die $\mathfrak{su}^{\mathrm{D}}(N)$ - und $SU^{\mathrm{D}}(N)$ - Elemente der Theorie Einfluß nehmen. Hinter diesem Verschwinden des Teilchenbegriffs steht dann auch das Verständnis von verwickelten Zuständen in der Yang - Millsform der RST.

Der letzte un der vorletzte Satz weisen eigentlich in die verkehrte Richtung, denn am Anfang des letzten Absatzes wurden die Whitneysumme und mit ihr der Teilchengeriff ja als Grenzwert betrachtet, der sich aus der Situation mit stark am System beteiligter SU^{D} - Symmetrie ergibt, d.h. einer Situation in der von einzelnen Teilchen gar nicht gesprochen werden kann. Sie wird sich auch als diejenige erweisen, in der alle Freiheitsgrade (Freiheitsgrade dürfen in diesem Zusammenhang nicht mit den Teilchen eines Systems identifiziert werden!) des Systems miteinander wechselwirken. Der formlae Ausdruck dafür diesen Zustand als den Ausgangspunkt für die Beschreibung eines physikalischen Systems zu nehmen, von dem aus sich alles Weitere ergibt, ist der Ansatz das System durch das Bündel $\Upsilon\left(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ mit der vollen Strukturgruppe $U^{\mathrm{D}}(N)$ zu beschreiben.

Damit ist das Vorgehen der Standardtheorie umgekehrt worden und der programmatische Anspruch an diese Arbeit aus der Einleitung wird verwirklicht. Statt vom Begriff freier Teilchen ausgehend die Beschreibung ihrer Wechselwirkung zu erarbeiten (ein Weg, dem auch die permutative RST durch Bildung des Whitneysummenbündels und der Erweiterung der Liealgebra von dessen Strukturgruppe folgt), wird der Begriff eines wechselwirkenden Systems in die Mitte gestellt, dessen “Grenzwert” erst den Begriff eines Teilchens ergibt.

Teil III.

Die Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie

4. Die Lagrangedichte der RST

In diesem Kapitel die Verwirklichung der im Teil “Zwischenbilanz” dargelegten Idee Austausch und Wechselwirkung zusammen innerhalb der größtmöglichen unitären Liestrukturgruppe eines Faserbündels zu beschreiben, begonnen. Da somit auch die Austauschwechselwirkung in die lokalen Symmetrien aufgenommen wird, deren Einfluß auf die Physik eines Systems, das durch Faserbündel beschrieben wird, am besten durch das Noethertheorem greifbar gemacht werden, ist es sinnvoll, vor allen weiteren Untersuchungen, eine passende Lagrangedichte aufzustellen. Bei deren Aufstellung muß zuerst einmal berücksichtigt werden, daß mit ihr Vielteilchensystem bereits auf der Ebene der Feldtheorien beschrieben werden sollen, was einige Anforderungen an die Dimensionierung der (spinoriellen) Faser, die in sie eingeht, zur Folge hat sowie auf die Darstellung der Lorentzgruppe, die auf diese Faser wirkt. Dem Verständnis dieser Faser und ihrer Lorentzsymmetrie sind die ersten beiden Abschnitte der ersten Teilkapitel der Unterkapitel 4.1 über die Lagrangedichte im Diracfall und 4.2 im Klein - Gordonfall gewidmet. Danach wird eine Metrik in der Faser der materiellen Felder eingeführt, die mehr Freiheitsgrade besitzt als diejenige, die in der Standardtheorie verwendet wird. Tatsächlich werden sich die zusätzlichen Freiheitsgrade in Unterkapitel 5.2.1 als dahingehend nützlich erweisen, daß sie im Zusammenspiel mit der Strukturgruppe des Faserbündels den Austausch zwischen unterschiedlichen Teilchen bereits auf der Grundlage der in diesem Kapitel vorgestellten Prinzipien unterbinden, d.h. weitere Annahmen werden für den Fall einer Faser, die verschiedene Teilchen beschreiben soll, nicht mehr benötigt.
Bis zu diesem Punkt wird die maximale unitäre Strukturgruppe (Liegruppe), die die Faser erlaubt als Einheit behandelt, auch was ihre Metrik betrifft, die wie ihr Gegenstück in der Faser der materiellen Felder, die einfache Form der bekannten Feldtheorien übersteigt. Der zentrale Punkt der Unterteilung der unitären Symmetrie wird in Teilkapitel 4.1.2 beschrieben. Da zur Zeit noch kein konkreter Fall betrachtet wird, gibt dieses Teilkapitel die Kernpunkte der Idee wieder, an denen sich jede Bearbeitung eines Modellsystems auf der Grundlage der Yang - Millsform der RST zu orientieren hat. In dieser allgemeinen Form mag die Symmetrieverminderung etwas konturlos erscheinen, aber um zu verhindern, daß sich der Vorgang im Gestrüpp der Rechnung spezieller Modelle verliert, ist es angebracht, seine wesentlichen Gedanken frei von solchen Ablenkungen darzulegen.
Es schließt sich dann in 4.1.3 die Betrachtung der Noetherströme an, die von der Idee der Unterteilung der Symmetrie am deutlichsten betroffen sind bzw. die tragenden Objekte sind, um die hinter diesem Vorgang stehende Idee in den Gleichungen, die ein System beschreiben, umzusetzen. Im hierauf folgende Teilkapitel 4.1.4 über die Bewegungsgleichun-

gen der Felder zeigt sich dies bereits im allgemeinen Fall an den Yang - Millsgleichungen der Potentiale der unitären Symmetrie. Den Abschluß bilden die Teilkapitel über den Energie - Impulstensor 4.1.5 und die Drehimpulsdichte 4.1.6.

4.1. Der Diracfall

4.1.1. Die Bausteine der Lagrangedichte

Nimmt man in der bekannten symmetrischen und eichinvarianten Lagrangedichte des Diracfeldes und des Eichfeldes

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu\right)\psi - \left(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu\right)\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\psi + 2iM\bar{\psi}\psi\right) - \frac{1}{4}K_{fg}F^{g\mu\nu}F^f{}_{\mu\nu}\ , \tag{4.1}$$

die folgenden Ersetzungen vor

$$\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu\right)\psi \to I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu\left(\partial_\mu\,{}^n\psi_B + \left(\mathcal{U}_\mu\right)^n{}_m\,{}^m\psi_B\right) = I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu D_\mu\,{}^n\psi_B \tag{4.2a}$$

$$\left(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu\right)\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\psi \to I^{AB}\left(\partial_\mu\,{}_n\overline{\psi}_A - {}_m\overline{\psi}_A\left(\mathcal{U}_\mu\right)^m{}_n\right)\cdot\gamma^\mu\,{}^n\psi_B = I^{AB}D_\mu\,{}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu\,{}^n\psi_B \tag{4.2b}$$

$$m\bar{\psi}\psi \to I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A M^n{}_m\,{}^m\psi_B \tag{4.2c}$$

$$F^f{}_{\mu\nu} \to V^a{}_{\mu\nu}\ , \tag{4.2d}$$

erhält man die Diraclagrangedichte der RST

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}I^{AB}\left({}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu D_\mu\,{}^n\psi_B - D_\mu\,{}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu\,{}^n\psi_B + 2i\,{}_n\overline{\psi}_A M^n{}_m\,{}^m\psi_B\right) - \frac{1}{4}K_{ab}V^{a\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu}\ , \tag{4.3}$$

mit der leicht zu ersehenden Aufteilung in Materieanteil $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ und Eichfeldanteil $\mathcal{L}_\mathrm{F}$

$$\mathcal{L}_\mathrm{M} = \frac{i}{2}I^{AB}\left({}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu D_\mu\,{}^n\psi_B - D_\mu\,{}_n\overline{\psi}_A\cdot\gamma^\mu\,{}^n\psi_B + 2i\,{}_n\overline{\psi}_A M^n{}_m\,{}^m\psi_B\right) \tag{4.4a}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{F} = -\frac{1}{4}K_{ab}V^{a\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu} \tag{4.4b}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{M} + \mathcal{L}_\mathrm{F}\ . \tag{4.4c}$$

Dem Verständnis der Objekte auf den rechten Seiten von (4.2a) bis (4.2d) sind im Folgenden jeweils eigene Abschnitte gewidmet.
Wie aus (4.1) - (4.4) bereits zu ersehen ist, gilt ab hier $\hbar = c = 1$.

Der Systemspinor Ψ, seine eichkovariante Ableitung $\mathcal{D}_\mu\Psi$ und seine Symmetrietransformationen

Das materielle System wird durch ein $4N$ - Tupel $\Psi = \left(\psi^1, \ldots, \psi^N\right)^T$ beschrieben, dessen einzelne Elemente ψ^j in Vierergruppen zu N Spinoren ${}^n\psi$ zusammengefaßt sind

$$\Psi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^4 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \psi^{4i-3} \\ \vdots \\ \psi^{4i} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \psi^{4N-3} \\ \vdots \\ \psi^{4N} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\psi \\ \vdots \\ {}^i\psi \\ \vdots \\ {}^N\psi \end{pmatrix} . \tag{4.5}$$

In dieser Form wird das N - Tupel Ψ als *Systemspinor* bezeichnet.
Im Unterschied zur Standardtheorie soll ein Spinor ${}^n\psi$ unter geeigneten Umständen tatsächlich ein *Teilchen* beschreiben und nicht eine ganze Teilchen*sorte* vertreten.
Soll die (fluiddynamische) Mischung von mehreren dem System zugänglichen Zuständen erfaßt werden, sind die dazu notwendigen einzelnen Systemspinoren zusätlich mit dem Zustandsindices A, B, etc. zu versehen: $\Psi \rightarrow \Psi_B$, ${}^n\psi \rightarrow {}^n\psi_B$.
Vom reinen Aussehen her ist (4.5) natürlich dieselbe Konstruktion wie (2.49c). Im Unterschied zu (2.49c) ist (4.5) aber als Schnitt des Bündels $\Upsilon\big(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right) \subset U\left(4N\right)\big)$ definiert. Da die Strukturgruppe dieses Bündels die vollständige Gruppe $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ umfaßt, nimmt die Konnexions - 1 - Form $\mathcal{U}_\mu \otimes \mathrm{d}x^\mu$ des Bündels ihre Werte in $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ an, d.h. in der eichkovarianten Ableitung des Systemspinors Ψ und seiner Komponentenspinoren[§] ${}^n\psi$ tritt die Liealgebra $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ vertreten durch $\mathcal{U}_\mu = U^a{}_\mu \upsilon_a$ auf:

$$\mathcal{D}_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + \mathcal{U}_\mu\Psi \tag{4.6a}$$
$$D_\mu {}^n\psi = {}^n(\mathcal{D}_\mu\Psi) = \partial_\mu {}^n\psi + U^a{}_\mu \left(\upsilon_a\right)^n{}_m \cdot {}^m\psi \tag{4.6b}$$
$$\mathcal{U}_\mu = U^a{}_\mu \upsilon_a \tag{4.6c}$$
$$\{\upsilon_a\} : \text{Basis für } \mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$$
$$a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right) .$$

Anders als in Teil 1 werden *alle* Generatoren υ_a als Generatoren der Gruppe $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ verwendet; eine Zweckentfremdung von einigen dieser Generatoren zur Darstellung der

[§] "Komponentenspinoren" ${}^n\psi$ sind nicht zu verwechseln mit den "Spinorkomponenten" ψ^j

Permutationsgruppe findet nicht mehr statt. In die Transformation $\mathcal{S}$ von Ψ

$$\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\Lambda^a(x)\upsilon_a} \tag{4.7}$$

$$\Psi' = \mathcal{S}\Psi = \mathrm{e}^{\Lambda^a(x)\upsilon_a}\Psi \ , \tag{4.8}$$

sind also *alle* Generatoren υ_a eingebunden, von denen auch jeder einen eigenen zeit - und ortsabhängigen Koeffizienten $\Lambda^a(x)$ besitzt. Folgerichtig erstreckt sich das inhomogene Transformationsverhalten über das ganze $\mathcal{U}_\mu$, in dem ja jeder Generator υ_a samt seinem eigenen *Potential*koeffizienten $U^a{}_\mu$ vertreten ist, und nicht nur über Teile davon

$$\mathcal{U}'_\mu = \mathcal{S}\mathcal{U}_\mu\mathcal{S}^{-1} - \partial_\mu\mathcal{S}\cdot\mathcal{S}^{-1} \ , \tag{4.9}$$

wobei die Transformation $\mathcal{S}$ auch hier wieder ohne Ausnahmen die *ganze* $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ umfaßt: $\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\Lambda^a(x)\upsilon_a}$.
Mit (4.9) transformiert sich $\mathcal{D}_\mu\Psi$ unter der ganzen Gruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ homogen

$$(\mathcal{D}_\mu\Psi)' = \mathcal{S}(\mathcal{D}_\mu\Psi) = \mathrm{e}^{\Lambda^a(x)\upsilon_a}(\mathcal{D}_\mu\Psi) \ . \tag{4.10}$$

Einige Anmerkungen zur Notation

Die Symmetrie des betrachteten $4N$ - Tupels ist bei etwas genauerem Hinsehen bereits einmal reduziert worden. Ein $4N$ - komponentiges Objekt läßt zunächst einmal die Wirkung einer Darstellung der Lorentzgruppe (Poincarégruppe) L^{4N} (P^{4N}) zu, die bei Anwendung auf Ψ alle seine $4N$ Komponenten miteinander in Beziehung setzt. Erst wenn aus dieser Lorentztransformation (Poincarétransformationen) nur diejenigen zugelassen werden, die blockdiagonal sind, wobei ein einzelnes dieser blockdiagonalen Elemente der spinoriellen Darstellung der Lorentztransformationen entspricht

$$\begin{gathered} L^{4N} \rightarrow L^N = \mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}},\dots,\mathrm{e}^{\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\right\} = \otimes_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}}\left(\mathrm{e}^{\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\right)^{\mathrm{j}} \\ \left(P^{4N} \rightarrow P^N : \left\{\epsilon^j,\dots,\epsilon^{j+3}\right\} \rightarrow \epsilon^n\mathbb{1}_{4\times4}\right) \ , \end{gathered} \tag{4.11}$$

ist die Behandlung von Ψ in der unterteilten Form (4.5) gerechtfertigt.
Völlig analog läßt Ψ auch erst einmal die Anwendung der Gruppe $U(4N)$ zu. Der Übergang zur reduzierten Lorentzsymmetrie (Poincarésymmetrie) erzwingt dann auch den Übergang zu der N - dimensionalen Untergruppe von $U(4N)$, in der die Gruppenelemente darauf reduziert werden, auf Objekte mit je 4 Komponenten, sprich Spinoren, mit nur einem einheitlichen Koeffizienten zu wirken. Betrachtet man z.B die rechte obere Ecke einer $U(4N)$ - Transformation mit den Elementen $U^i{}_j$, $i = 4N-3,\dots,4N$; $j = 1,\dots,4$ werden diese Elemente zu

$$\left\{U^i{}_j\right\} \rightarrow U^1{}_N \cdot \mathbb{1}_{4\times4} \ . \tag{4.12}$$

Genau diese erste Reduktion der Symmetrie kommt in der Bezeichnung von ${}^n\psi$ für die Spinoren zum Ausdruck, mit der sie von den Komponenten ψ^j eines eigentlich eine

höhere Symmetrie zulassenden Objektes unterschieden werden. Die daraus notwendig folgende Reduktion der Strukturgruppe wird durch das doppelt gestrichene $\mathbb{N}$ zusammen mit dem den Index 4×4 bei der Bezeichnung der Dimension des Raumes, auf den die Gruppe jetzt wirkt, kenntlich gemacht: $4N \to \mathbb{N}_{4\times4}$. Die Verwendung des doppelt gestrichenen N soll an die Entstehung der Operatoren $\mathbb{1}_{4\times4}$ in der Strukturgruppe, die durch die Reduktion der Lorentzsymmetrie hervorgerufen wird, erinnern.
Diese Notation mag übertrieben haarspalterisch erscheinen, vor allem weil diese Reduktion der Symmetrie nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, ja noch nicht einmal ansatzweise ausgearbeitet ist, abgesehen von diesem Abschnitt. Es ist aber nützlich sich ihrer bewußt zu sein, da sie vor allem zum Ende des Kapitels 5 auf recht natürliche Weise immer wieder aufscheint, vor allem wenn es darum geht Wege zu finden auf denen die RST hinsichtlich Teilchenerzeugung und - vernichtung u.ä. über ihren jetzigen Entwicklungsstand hinaus weiterentwickelt werden kann.
Konkret zeigt sich die erste Symmetriebeschränkung, vor deren Hintergrund die der unitären Gruppe vonstatten geht, bereits schon bei der Beschreibung verschiedener Ladungen, da hierbei angenommen werden muß, daß für die Teilchen positiver Ladung die Aufpunktsverschiebung der Poincarétransformationen als $-\epsilon\,(x^\mu)$ im Gegensatz zu $+\epsilon\,(x^\mu)$ bei den Teilchen negativer Ladung durchgeführt wird, um zu verhindern, daß die Energie - Impulsdichte negative Werte annehmen kann. In den hier umrissenen Vorgang ist diese Annahme sicher eingebettet, denn der blockdiagonale Grenzwert der höheren Symmetrie muß keinesfall in allen Teilen so gleich auszufallen, wie es (4.11) darstellt.
Der Grenzwert aus (4.11) hat die Form einer Gruppe eines Whitneysummenbündels, wie sie schon in Teil 1 zur Definition einzelner Teilchen in der Gesamtfaser verwendet wurde. Im Gegensatz zu dort tritt die Whitneysumme (4.11) aber als eine Art Grenzwert einer höheren Symmetrie hervor, anstatt als grundlegend fest, d.h. unveränderlich, angenommen zu werden, wie es bei der Bildung eines Whitneysummenbündels eben der Fall ist.
Der Übergang $L^{4N} \to L^4$, d.h. das Heraustreten einer Whitneysummenstruktur, kann in seinen Grundzügen als Blaupause für das betrachtet werden, was in der $U\,(\mathbb{N}_{4\times4})$ noch folgt (Es liegt kein Tippfehler vor: gemeint ist wirklich eine nochmalige Beschränkung der $U\,(\mathbb{N}_{4\times4})$, die in einem ersten Schritt aus der $U\,(4N)$ hervorgegangen ist.) In Bezug auf diesen Ausblick liegt eine Betonung auf “heraustreten”, denn bei der noch eingehend zu beschreibenden Beschränkung der $U\,(\mathbb{N}_{4\times4})$ wird die Symmetrie des Systems nie soweit beschränkt werden, daß nur noch die Symmetrie vorliegt, die auch ein Whitneysummenbündel besitzt. Diese Struktur wird nur “sichtbar”, ist also als eine Art Grenzwert zu verstehen, der nie ganz erreicht wird.
Die Γ^μ als

$$\Gamma^\mu = \oplus_{j=1}^{N} \left(\gamma^\mu\right)^j \ , \tag{4.13}$$

verstehen sich jetzt wie die Lorentzgruppe L^4 selber als Operatoren, die aus einem höheren Operator hervorgegangen sind ($\Gamma^\mu \subset \mathcal{O}^\mu$).

Abschließend kann noch die Überlegung angestellt werden, ob sich mit einer dynamisierten Variante des Überganges in (4.11) nicht Zugang zur Erzeugung und Vernichtung von Teilchen erhalten läßt. Die rechte Seite von (4.11) wurde bereits als in dieser Form nicht zwingend beschrieben, was sich auch dahingehend verallgemeinern läßt, daß statt N fermionischer Darstellungen der Lorentzgruppe auch eine entsprechende Anzahl einer bosonischen Variante (Spin 1 oder, etwas langweiliger, Spin 0) erscheinen können, oder Mischformen von beiden Fällen. Ein dynamischer Übergang zwischen diesen Möglichkeiten verändert dann auch die Grundlage dafür, von was für Teilchen überhaupt gesprochen werden kann.

Der Feldstärketensor $\mathcal{V}_{\mu\nu}$

Die Feldstärke, die in (4.3) eingeht, ist nun natürlich in Bezug auf das volle $\mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times4})$-Potential $\mathcal{U}_\mu$ zu bilden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{U}_\nu - \partial_\nu \mathcal{U}_\mu + [\mathcal{U}_\mu, \mathcal{U}_\nu] && \text{(4.14a)}\\
\mathcal{V}_{\mu\nu} &= V^a{}_{\mu\nu} \upsilon_a \\
&= \left(\partial_\mu U^a{}_\nu - \partial_\nu U^a{}_\mu + C^a{}_{bc} U^b{}_\mu U^c{}_\nu\right) \upsilon_a && \text{(4.14b)}\\
V^a{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu U^a{}_\nu - \partial_\mu U^a{}_\nu + C^a{}_{bc} U^b{}_\mu U^c{}_\nu && \text{(4.14c)}\\
C^a{}_{bc} &: \ \ \text{Strukturkonstanten von } \mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times4})\\
a, b, c &= 1, \ldots, \dim \mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times4}) \ .
\end{aligned}
$$

Die eichkovariante Ableitung von $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ bezieht sich jetzt natürlich durch Verwendung von $\mathcal{U}_\mu$ (4.6c) ebenso auf $\mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times4})$, wie $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ selber:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\lambda \mathcal{V}_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \mathcal{V}_{\mu\nu} + [\mathcal{U}_\lambda, \mathcal{V}_{\mu\nu}] && \text{(4.15a)}\\
D_\lambda V^a{}_{\mu\nu} &= (\mathcal{D}_\lambda \mathcal{V}_{\mu\nu})^a = \partial_\lambda V^a{}_{\mu\nu} + C^a{}_{bc} U^b{}_\lambda V^b{}_{\mu\nu} \ ; && \text{(4.15b)}
\end{aligned}
$$

gleiches gilt für das homogene Transformationsverhalten von $\mathcal{V}_{\mu\nu}$

$$
\mathcal{V}_{\mu\nu} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{V}_{\mu\nu} \cdot \mathcal{S}^{-1} \ , \tag{4.16}
$$

in dem die Verwendung von $\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\Lambda^a(x)\upsilon_a}$ (4.7) vollständig konsistent mit dem Rest der Theorie ist.

Die Liemetrik $\mathcal{K}$

Der unitäre Feldanteil (4.4b) wird wie in der bekannten Theorie als Skalarprodukt von $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ mit sich selber aufgefasst

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}\,(\mathcal{V}_{\mu\nu}, \mathcal{V}^{\mu\nu}) &= V^a{}_{\mu\nu} V^{b\mu\nu} \mathcal{K}\,(\upsilon_a, \upsilon_b) = V^a{}_{\mu\nu} V^{b\mu\nu} K_{ab} \ , && \text{(4.17a)}\\
K_{ab} &\doteqdot \mathcal{K}\,(\upsilon_a, \upsilon_b) \ , && \text{(4.17b)}
\end{aligned}
$$

nur wird als Standardform für dieses Skalarprodukt nicht automatisch die Spurform $K_{ab} = \mathrm{tr}\{\upsilon_a \upsilon_b\}$ verwendet. Vielmehr wird dessen Aussehen zunächst offen gelassen, um die Selbstwechselwirkung der Teilchen je nach betrachtetem System angemessen behandeln zu können. Eine in letzter Zeit erfolgreich verwendete Form für diesen Zweck besteht in der Erweiterung der Spurmetrik um den Term $\mathrm{tr}\{\upsilon_a\}\,\mathrm{tr}\{\upsilon_b\}$

$$K_{ab} = c_1 \mathrm{tr}\{\upsilon_a \upsilon_b\} + c_2 \mathrm{tr}\{\upsilon_a\}\,\mathrm{tr}\{\upsilon_b\} \ . \tag{4.18}$$

Unabhängig von der genauen Art der Bildungsvorschrift soll grundsätzlich die Metrik mit der eichkovarianten Ableitung verträglich sein, also kovariant konstant,

$$D_\mu K_{ab} = \partial_\mu K_{ab} - U^c{}_\mu C^d{}_{ca} K_{db} - U^c{}_\mu C^d{}_{cb} K_{ad} \equiv 0 \ , \tag{4.19}$$

was gleichbedeutend mit der Aussage ist, daß der Bündelzusammenhang das Skalarprodukt in der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ erhält. Für konstante K_{ab} ist (4.19) nichts anderes als die Forderung nach total antisymmetrischen Strukturkonstanten

$$C_{bda} = -C_{adb} \ . \tag{4.20}$$

Kommt man der Bedingung (4.19) mit Spurkonstruktionen der Art (4.18) nach, endet man automatisch bei (4.20); siehe z.B. [10].
Im vorliegenden Fall bezieht sich die Invarianzbedingung natürlich, (4.19) zeigt es auch ganz klar, auf die volle $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ - Symmetrie. Im Folgenden werden bei der Anwendung von (4.19) folglich immer die Strukturkonstanten $C^a{}_{bc}$ der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ verwendet, ebenso immer die Koeffizienten $U^a{}_\mu$ aller Generatoren υ_a. Diese Vorgehensweise begründet sich darin, daß $\mathcal{K}$ immer eine Metrik im ganzen Vektorraum $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ darstellt; eine Einschränkung auf einen Unterraum dieser Algebra findet nicht statt.

Die Spinormetrik $\mathcal{I}$

Neben dieser Metrik in der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ enthält (4.3) noch eine weitere Metrik für die (Vektor)Spinorfaser, die ebenfalls über die Standardform hinaus erweitert werden kann. Zuerst sammelt man dazu alle Zustandspinoren Ψ_B in einem Gesamtspinor[§]

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \vdots \\ \Psi_K \end{pmatrix} \ ; \ \text{K: Anzahl der } \mathbb{N}_{4\times4}\text{-spinorigen Zustände,} \tag{4.21}$$

[§]Bei den Zuständen Ψ_B, die dem System zuänglich sind, handelt es sich um endlich viele, wie es bei der Betrachtung von statistischen Gemischen üblich ist. Zu genau diesem Zweck ist die Indizierung mit B bzw. die unterschiedlichen Ψ_B eingeführt worden; siehe oben und Teilkapitel 2.1.2 Gl. (2.19a). Der Übergang zu unendlichen vielen Zuständen mag bedenkenswert sein, erfordert aber den Übergang zu unendlichdimensionalen Vektorräumen. In Unterkapitel 5.3 wird dieser Gedanke in veränderter Form nochmal aufgegriffen.

und faßt dessen eichkovariante Ableitung als

$$\mathcal{D}_\mu \vec{\Psi} = \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \vdots \\ \Psi_K \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \vdots \\ \Psi_K \end{pmatrix} + \mathcal{U}_\mu \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{4N\times 4N} & \dots & \mathbb{O}_{4N\times 4N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{4N\times 4N} & \dots & \mathbb{1}_{4N\times 4N} \end{pmatrix}_{K\times K} \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \vdots \\ \Psi_K \end{pmatrix} , \tag{4.22}$$

auf. Man kann dadurch die Ausdrücke der Art $I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A \cdot \gamma^\mu D_\mu\, {}^n\psi_B$ als ausgeschriebenes Skalarprodukt des Typs

$$\mathcal{I}\left(\vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right) = I^{AB} \bar{\Psi}_A \Psi_B = I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A \cdot {}^n\psi_B \tag{4.23a}$$

$$\bar{\Psi}_A \Psi_B = {}_n\overline{\psi}_A \cdot {}^n\psi_B \;, \tag{4.23b}$$

also als

$$\mathcal{I}\left(\vec{\Psi}, \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\Psi}\right) = I^{AB} \bar{\Psi}_A \cdot \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi_B = I^{AB}\,{}_n\overline{\psi}_A \cdot \gamma^\mu D_\mu\, {}^n\psi_B \tag{4.24a}$$

$$\bar{\Psi}_A \cdot \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi_B = {}_n\overline{\psi}_A \cdot \gamma^\mu D_\mu\, {}^n\psi_B \tag{4.24b}$$

ansehen. Die Definition der eichkovarianten Ableitung von $\vec{\Psi}$ (4.22), bei der das $U\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$ - Potential $\mathcal{U}_\mu$ eines $\mathbb{N}_{4\times 4}$ - spinorigen Zustandes gleichberechtigt auf alle betrachteten Zustände wirkt, ist weit weniger merkwürdig als sie auf den ersten Blick wirkt, denn gemäß (2.105) gehen in dessen materielle Quellen alle möglichen Zustände des Systems ein. $\mathcal{U}_\mu$ ist also von vorneherein das Potential des ganzen, alle K möglichen Zustände umfassenden Systems und nicht auf einen Zustand Ψ_B beschränkt.

Einführung der Koppelungsmatrix $I^n{}_\ell$ in die Spinormetrik

(4.23b), die in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_A \Psi_B &= {}_n\overline{\psi}_A \delta^n{}_\ell\, {}^\ell\psi_B \\ &= \left({}_1\overline{\psi}_A, \quad \dots, \quad {}_N\overline{\psi}_A\right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & \mathbb{O}_{4\times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{4\times 4} & \dots & \mathbb{1}_{4\times 4} \end{pmatrix}_{\mathbb{N}_{4\times 4}\times \mathbb{N}_{4\times 4}} \begin{pmatrix} {}^1\psi_B \\ \vdots \\ {}^N\psi_B \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{4.25}$$

lautet, ist bei weitem nicht die einzige Form für das Skalarprodukt in der Spinorfaser. Die Einheitsmatrix kann durch eine Matrix mit mehr Struktur ersetzt werden, wodurch die einzelne Komponentenspinoren ${}^n\psi_B$ der $\mathbb{N}_{4\times 4}$ - spinorigen Zustände miteinander in

Beziehung gesetzt werden. Der allgemeinste Fall lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & \mathbb{O}_{4\times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{4\times 4} & \dots & \mathbb{1}_{4\times 4} \end{pmatrix}_{N\times N} \to \begin{pmatrix} I^1{}_1\mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & I^1{}_N\mathbb{1}_{4\times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I^N{}_1\mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & I^N{}_N\mathbb{1}_{4\times 4} \end{pmatrix} = \{I^n{}_\ell\} \tag{4.26a}$$

$$ {}_n\overline{\psi}_A \cdot I^n{}_\ell \gamma^\mu\, {}^\ell\psi_B = \begin{pmatrix} {}_1\overline{\psi}_A, & \dots, & {}_N\overline{\psi}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^1{}_1\mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & I^1{}_N\mathbb{1}_{4\times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I^N{}_1\mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & I^N{}_N\mathbb{1}_{4\times 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1\psi_B \\ \vdots \\ {}^N\psi_B \end{pmatrix} . \tag{4.26b}$$

Faßt man nun $I^n{}_\ell$ und I^{AB} zu

$$\begin{aligned} \left\{I^{ABn}{}_\ell\right\}^{AB} &= I^{AB}\left\{I^n{}_\ell\right\} = I^{AB} \begin{pmatrix} I^1{}_1\mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & I^1{}_N\mathbb{1}_{4\times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I^N{}_1\mathbb{1}_{4\times 4} & \dots & I^N{}_N\mathbb{1}_{4\times 4} \end{pmatrix} \\ A, B &= 1, \dots, K \\ n, l &= 1, \dots, \mathbb{N}_{4\times 4} \end{aligned} \tag{4.27}$$

zusammen, überträgt sich diese Verallgemeinerung folgendermaßen in $\mathcal{I}(\vec{\Psi}, \vec{\Psi})$ (4.23a)

$$\mathcal{I}\left(\vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right) = {}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_\ell\, {}^\ell\psi_B \, . \tag{4.28}$$

Im Gegensatz zu γ^μ löst $I^{ABn}{}_\ell$ die vierkomponentige Struktur der einzelnen Spinoren nicht auf, weshalb

$$\left[I^{ABn}{}_\ell, \gamma^\mu\right] = 0 \tag{4.29}$$

gilt.
Da die derart hergestellten Beziehungen zwischen den Teilchen der Zustandsspinoren nicht von den Zuständen, die sie aufbauen, abhängen sollen, besitzt $I^{ABn}{}_\ell$ für jedes Paar von Zustandsindices A und B dieselbe Unterstruktur $I^n{}_\ell$.
Für die Metrik $\mathcal{I}$ gilt wie für $\mathcal{K}$, die Forderung nach Erhalt der Metrik durch die Konnexion im Spinorbündel, was durch ihre kovariante Konstanz ausgedrückt wird

$$D_\mu I^{ABn}{}_\ell = 0 \tag{4.30a}$$

$$\partial_\mu I^{ABn}{}_\ell + (\mathcal{U}_\mu)^n{}_m I^{ABm}{}_\ell - (\mathcal{U}_\mu)^m{}_\ell I^{ABn}{}_m = 0 \tag{4.30b}$$

$$\partial_\mu I^{ABn}{}_\ell + U^a{}_\mu (\upsilon_a)^n{}_m I^{ABm}{}_\ell - U^a{}_\mu (\upsilon_a)^m{}_\ell I^{ABn}{}_m = 0 \, . \tag{4.30c}$$

Die ungewöhnliche Indexstellung der Metrikkomponenten ($I^n{}_\ell \neq 0!!$) beruht darauf, daß die Spiegelung des Imaginäteiles, die in einer hermitischen Metrik einer der Spinoren durch den Übergang zu seinem adjungierten Spinor erfährt, hier im Spinor selber ausgeführt wird, und nicht durch die Metrik, bzw. deren Komponenten. Besgate Spiegelung läßt sich bei entsprechend komplexifizierter Wahl des metrischen Tensor aber auch mit den Metrikkomponenten bewerkstelligen; siehe z.B. [8]. Im vorliegenden Fall ist es aber bequemer mit dem (deshalb) hier verwendeten Verfahren zu arbeiten.

Die endgültige Form der Lagrangedichte

Mit diesen Überlegungen kann die Lagrangedichte folgendermassen geschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left\{\mathcal{I}\left(\Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right) - \mathcal{I}\left(\vec{\Psi}, \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\Psi}\right) + 2i\mathcal{I}\left(\mathcal{M}\vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right)\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{K}\left(\mathcal{V}_{\mu\nu}, \mathcal{V}^{\mu\nu}\right) \ . \tag{4.31}$$

Wegen der in $\vec{\Psi} \rightarrow \overline{\vec{\Psi}}$Spiegelung ist $\mathcal{I}\left(\Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right)$ *nicht* symmetrisch in seinen Argumenten und folglich die ersten beiden Terme in (4.31) *nicht* gleich:

$$\mathcal{I}\left(\Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right) = {}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_\ell \gamma^\mu D_\mu {}^\ell\psi_B \tag{4.32a}$$

$$\mathcal{I}\left(\vec{\Psi}, \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\Psi}\right) = \gamma^\mu D_\mu \, {}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_\ell {}^\ell\psi_B \ . \tag{4.32b}$$

Möchte man als einheitliches Konstruktionselement der Metriken in $\mathcal{L}$ die Spurbildung verwenden, bietet sich unter Rückgriff auf die Herkunft der Übergänge (4.2a) - (4.2c) folgende Form an:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{i}{2}\mathrm{tr}\left\{I^{AB}\overline{\Psi}_A \otimes \left(\left\{I^n{}_\ell\right\}\mathcal{D}_\mu \Psi_B\right) - I^{AB}\mathcal{D}_\mu \overline{\Psi}_A \otimes \left(\left\{I^n{}_\ell\right\}\Psi_B\right) + 2iI^{AB}\left(\overline{\Psi}_A\right) \otimes \left(\left\{I^n{}_\ell\right\}\mathcal{M}\Psi_B\right)\right\} \\ & - \frac{1}{4}c_1 \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\mu\nu}\right\} - \frac{1}{4}c_2 \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}^{\mu\nu}\right\} \cdot \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\right\} \ .\end{aligned} \tag{4.33}$$

Abschließend lauten die Zwischenergebnisse der Variation der Lagrangedichte (4.31) nach den Felder ${}_n\overline{\psi}_A$, ${}^n\psi_B$ und $U^a{}_\mu$ sowie deren Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, {}_\ell\overline{\psi}_C} = \frac{i}{2} I^{CB\ell}{}_n \left(\gamma^\mu D_\mu {}^n\psi_B + U^a{}_\mu \left(\upsilon_a\right)^n{}_m {}^m\psi_B + 2iM^n{}_m {}^m\psi_B\right) \tag{4.34a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, {}^\ell\psi_C} = \frac{i}{2} I^{ACn}{}_\ell \left({}_m\overline{\psi}_A \gamma^\mu U^a{}_\mu \left(\upsilon_a\right)^m{}_n - D_\mu \, {}_n\overline{\psi}_A \cdot \gamma^\mu + 2i \, {}_m\overline{\psi}_A M^m{}_\ell\right) \tag{4.34b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^{c\,\beta}} = \frac{i}{2} \, {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\beta I^{ABn}{}_\ell \left(\upsilon_c\right)^\ell{}_m {}^m\psi_B + \frac{i}{2} \, {}_m\overline{\psi}_A \left(\upsilon_c\right)^m{}_n \gamma_\beta I^{ABn}{}_\ell {}^\ell\psi_B - K_{ab}C^a{}_{cd}U^{d\,\nu}V^b{}_{\beta\nu} \tag{4.34c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \, {}_\ell\overline{\psi}_C\right)} = -\frac{i}{2} I^{CB\ell}{}_n \gamma^\beta \, {}^n\psi_B \tag{4.34d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \, {}^\ell\psi_C\right)} = \frac{i}{2} I^{ACn}{}_\ell \, {}_n\overline{\psi}_A \gamma^\beta \tag{4.34e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\gamma U^{c\,\beta}\right)} = -K_{cb}V^b{}_{\gamma\beta} \ . \tag{4.34f}$$

4.1.2. Die Beschränkung der Symmetrie

Die kontinuierliche Gruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ wird in zwei verschiedene Symmetriebereiche mit unterschiedlichen Vorrangsstufen zueinander aufgeteilt. Der erste ist die kontinuierliche *Eichsymmetrie* $E(\mathbb{N}_{4\times4})$, die durch eine Unteralgebra $\mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4})$ der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ generiert wird

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}} = \mathrm{e}^{\Lambda^f(x)\alpha_f} \tag{4.35a}$$

$$\{\alpha_f\} : \text{ Generatoren von } E(\mathbb{N}_{4\times4}) \text{ d.h. Basis von } \mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4}) \tag{4.35b}$$

$$f = 1, \ldots, \dim \mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4})$$

$$\mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4}) \subset \mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4}) \ .$$

Diese Symmetrie soll ohne Einschränkungen an die Λ^f gelten, also voll. Auf ihr sollen auch sämtliche beobachtbare Größen und die Begrifflichkeit eines einzelnen Teilchens beruhen. Bei dieser Aufgabe spielen ihre Eichinvarianten eine tragende Rolle. Der Begriff eines einzelnen Teilchens soll allerdings nicht dauerhaft gelten, es genügt wenn er für schwache bis nicht vorhandene Wechselwirkung der spinoriellen Freiheitsgrade existiert.
Der zweite Bereich ist die kontinuierliche *Restsymmetrie* $U(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus E(\mathbb{N}_{4\times4})$, deren Generatoren β_y den Vektorraum $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus \mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4})$ aufspannen

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}} = \mathrm{e}^{\Lambda^y(x)\beta_y} \tag{4.36a}$$

$$\{\beta_y\} : \text{ Generatoren von } U(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus E(\mathbb{N}_{4\times4}) \text{ d.h. Basis von } \mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus \mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4}) \tag{4.36b}$$

$$y = \dim \mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times4}) + 1, \ldots, \dim \mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4}) \ .$$

Es ist der oben angegebene Verzicht auf einen beständig verfügbaren Teilchenbegriff, der das Fortbestehen der Symmetrietransformationen, die nicht zum Bereich der Eichtransformationen gehören, ermöglicht. (Dieser Sachverhalt kann auch andersherum formuliert werden: durch die Existenz der Restsymmetrie ist der Teilchenbegriff nicht in allen Situationen vorhanden.) Allerdings müßen die $\Lambda^y(x)$ so beschränkt werden, daß sich der Begriff eines einzelnen Teilchens spätestens dann herausbildet, wenn die spinoriellen Freiheitsgrade des Systems nur noch schwach bis hin zu gar nicht mehr miteinander wechselwirken. Wie der Verzicht auf einen dauerhaften Teilchenbegriff das völlige Abschalten der Restsymmetrie verhindert, bewirkt in Bezug auf die $\Lambda^y(x)$, daß sie nicht konstant sein müssen; eine Beschränkung ihres Wertebereichs genügt völlig. Der Fall konstanter Werte ist darin natürlich als Extremfall enthalten.
Die Tatsache, daß mit den Generatoren β_y, die keine volle Eichsymmetrie generieren, immer noch ein gewisses Maß an lokaler Symmetrie verbunden bleibt, trägt der Restsymmetrie ihren (vorläufigen) Namen ein. Dieser macht auch deutlich, daß hier keine Symmetriebrechung erfolgt, nach der die betroffene Symmetriefreiheitsgrade bestenfalls noch global auftreten können, sondern tatsächlich nur eine Verminderung der Symmetrie durch Beschränkung des für die $\Lambda^y(x)$ zugänglichen Wertebereiches.

Daß die Restsymmetrie die auf der Eichsymmetrie beruhende Begriffsbildung nicht stören soll, spiegelt sich in der Art und Weise wider, in der die Eichsymmetrie $\mathcal{S}_{\text{Eich}}$ (4.35) und die Restsymmetrie $\mathcal{S}_{\text{Rest}}$ (4.36) die Gesamttransformation $\mathcal{S}$ bilden. Es gilt entweder

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{Eich}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Rest}} \ , \tag{4.37}$$

oder

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{Rest}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Eich}} \ . \tag{4.38}$$

Die Betonung im letzten Satz liegt auf dem *oder*, d.h. (4.37) und (4.38) sind *nicht* gleich. Dahinter steht die Tatsache, daß die Generatoren der Eichsymmmetrie *nicht* identisch mit den $\mathbb{N}_{4\times4}$ Casimiroperatoren der Gruppe $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ sind, $\mathcal{S}_{\text{Eich}}$ und $\mathcal{S}_{\text{Rest}}$ folglich nicht kommutieren, weshalb (4.37) nicht in (4.38) überführt werden kann. Wären die α_f gleich den Casimiroperatoren, müßte keine Beschränkung der $\Lambda^y\left(x\right)$ gefordert werden. Diese Forderung wird gerade durch die nichtkommutativität der β_y mit den α_f notwendig.

Die Idee der Symmetrieaufteilung und - Verminderung, die in (4.37) und (4.38) zum Ausdruck kommt, ist vielmehr folgende: Jede Transformation $\mathcal{S}$ der Art (4.37) oder (4.38) ist immer noch ein Element der $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$, da sowohl $\mathcal{S}_{\text{Eich}}$ als auch $\mathcal{S}_{\text{Rest}}$ Elemente von $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ sind, kann also mit geeigneten Transformationsparametern $\Lambda^a_{\text{Ges}}\left(x\right)$ per Exponentialabbildung aus der Liealgebra $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ heraus erzeugt werden

$$\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\Lambda^a_{\text{Ges}}(x)\upsilon_a} \ . \tag{4.39}$$

Da nur Transformationen der Art (4.37) oder (4.38) zugelassen sind, sind die geeigneten Gruppenparameter der Gesamttransformation auf diejenigen Polynome beschränkt, die sich für die $\Lambda^a_{\text{ges}}\left(x\right)$ durch die allgemeine Form der **B**aker - **C**ampbell - **H**ausdorffrelation, siehe z.B. [3], aus den rechten Seiten von (4.37) oder (4.38) ergeben. Die $\Lambda^a_{\text{Ges}}\left(x\right)$ sind demnach Polynome in den $\left\{\Lambda^f\left(x\right)\right\} \cup \left\{\Lambda^y\left(x\right)\right\} = \left\{\Lambda^a\left(x\right)\right\}$

$$\Lambda^a_{\text{Ges}}\left(x\right) = P^a\left[\Lambda^f\left(x\right), \Lambda^y\left(x\right)\right] \ . \tag{4.40}$$

Anstatt die Casimiroperatoren für die α_f zu verwenden, mit denen dann alle β_y kommutieren, was beliebige $\Lambda^a\left(x\right)$ nach sich zieht, werden die Gruppenparameter in der Exponentialabbildung aus der Algebra $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ in die Gruppe $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ auf die Polynome (4.40) beschränkt, die durch BCH aus den Gruppenelementen (4.37) und (4.38) hervorgehen. (Im letzten Satz liegt die Betonung auf dem *und*, denn beide Formen bezeichnen verschiedenen Elemente der $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$, was i.A. zu verschiedenen Polynomen führt, die jedes für sich, unabhängig von den anderen, zugelassen sind.)

Da die Polynome (4.40), die sich per BCH aus (4.37) und (4.38) ergeben, mitunter etwas unschön sind (... ja, ja, schon gut: nur mitunter sind die Polynome die sich per BCH ergeben schön), ist es besser im konkreten Fall mit der Produktform $\mathcal{S}_{\text{Eich}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Rest}}$ oder $\mathcal{S}_{\text{Rest}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Eich}}$ zu arbeiten. In der Gruppe selber ist es auch egal, ob das Element $\mathcal{S}$

durch die Produktdarstellung gewonnen wurde oder durch die Exponentialabbildung. Den Unterschied zwischen der Arbeit mit Casimiroperatoren einer Gruppe oder einer allgemeinen Aufteilung der Symmetrie mit unterschiedlichen Rangstufen der einzelnen Bereiche hinsichtlich der Begriffsbildung wird erst durch die Herausarbeitung der zugelassenen Polynome der Gruppenparameter richtig deutlich.
Innerhalb der zugelassenen Polynome sind die $\Lambda^y(x)$ noch auf ihren beschränkten Wertebereich eingegrenzt.
Nach der Beschränkung der Symmetrie lauten die homogenen Transformationsgesetze von Ψ (4.8), $\mathcal{D}_\mu\Psi$(4.10) und $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ (4.16).

$$\Psi' = \mathrm{e}^{P^a\left[\Lambda^f(x),\,\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\right]\upsilon_a} \cdot \Psi \;\forall \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f\alpha_f(x)\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot\Psi \\ \\ \mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f\alpha_f(x)\right)\cdot\Psi \end{cases} \tag{4.41a}$$

$$(\mathcal{D}_\mu\Psi)' = \mathrm{e}^{P^a\left[\Lambda^f(x),\,\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\right]\upsilon_a} \cdot (\mathcal{D}_\mu\Psi) \;\forall \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot \\ (\mathcal{D}_\mu\Psi) \\ \\ \mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\cdot \\ (\mathcal{D}_\mu\Psi) \end{cases} \tag{4.41b}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_{\mu\nu} &= \mathrm{e}^{P^a\left[\Lambda^f(x),\,\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\right]\upsilon_a} \cdot \mathcal{V}_{\mu\nu}\cdot \mathrm{e}^{-P^a\left[\Lambda^f(x),\,\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\beta_y\right]\upsilon_a} \\ &\forall \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\mathcal{V}_{\mu\nu}\mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot \\ \mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right) \\ \\ \mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\mathcal{V}_{\mu\nu}\mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\cdot \\ \mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right) \end{cases} . \end{aligned} \tag{4.41c}$$

Das inhomogene Transformationsverhalten von $\mathcal{U}_\mu$ (4.9) wird zu

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'_\mu &= \mathrm{e}^{P^a\left[\Lambda^f(x),\,\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\right]\upsilon_a} \cdot \mathcal{U}_\mu\cdot \mathrm{e}^{-P^a\left[\Lambda^f(x),\,\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\beta_y\right]\upsilon_a} \\ &\forall \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\cdot\mathcal{U}_\mu\cdot\mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Rest}}\cdot\mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Eich}} - \left[\partial_\mu\left(\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^a(x)\,\alpha_f\right)\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. +\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\cdot\partial_\mu\left(\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)\,\beta_y\right)|_{\mathrm{Beschr}}\right)\right] \\ \\ \mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\cdot\mathcal{U}_\mu\cdot\mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Eich}}\cdot\mathcal{S}^{-1}_{\mathrm{Rest}} - \left[\partial_\mu\left(\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)\,\beta_y\right)|_{\mathrm{Beschr}}\right)\cdot\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^f(x)\,\alpha_f\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. +\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}\left(\Lambda^y(x)|_{\mathrm{Beschr}}\,\beta_y\right)\cdot\partial_\mu\left(\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}\left(\Lambda^a(x)\,\alpha_f\right)\right)\right] \end{cases} . \end{aligned} \tag{4.42}$$

Dieses Teilkapitel stellt natürlich nur die allgemeine Idee der Symmetrieverminderung vor; anders gesagt, ist das Programm, das von (4.35) bis (4.42) vorgestellt wird, nichts anderes als eine Absichtserklärung, die im konkreten Fall erst noch umgesetzt werden muß. Besonders die Begründung des Teilchenbegriffes auf der Eichgruppe und seine nicht dauerhaft bestehende Existenz durch die Anwesenheit der Restsymmetrie bedürfen der Betrachtung einer konkreten Aufteilung der unitären Symmetrie der Spinorfaser. Genau jenes geschieht im Kapitel 5 über die Systeme dreier Fermionen, speziell in dessen zentralem Teilkapitel 5.1.5 über die Normierung der Ströme. Wer jetzt gleich die Umsetzung der gerade Aufgestellten Prinzipien sehen möchte, sollte zu den angegebenen Stellen vorblättern.

Eine weitere Aussage, die die Idee der Symmetrieverminderung auch im allgemeinen Rahmen etwas konkreter werden läßt, kann noch getroffen werden. Wie schon im Teil 2 und in den vorhergehenden Teilkapiteln dieses Kapitels erwähnt, soll der Teilchenbegriff in der RST durch Bezug auf die Whitneysumme enstehen. Unter Bezug ist im Fall der Yang - Millsform der RST zu verstehen, daß das im Bündel $\Upsilon\left(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)\right)$ immer stärker eine Whitneysummenstruktur sichtbar wird, je mehr das System auf einen (Grenz)Fall zuläuft, in dem es einen Teilchenbegriff erlaubt. Die Betonung liegt auf "sichtbar werden", d.h. in der Strukturgruppe $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ von $\Upsilon\left(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)\right)$ tritt die Struktur einer Whitneysumme durch Beschränkung der einbettenden Symmetrie nur soweit hervor, daß sie als Referenzpunkt verwendet werden kann. Sie ist also selbst in den (Grenz)Fällen, in denen von einzelnen Teilchen gesprochen werden kann, nicht vollständig vollständig, im Sinne von allein vorherrschend, vorhanden. Bei einem solchen vorgehen kommen den Elementen der Strukturgruppe, die sich blockartig um die Hauptdiagonale der Matrixdarstellung der Strukturgruppe befinden, eine tragende Bedeutung zu. (bedenkt man das Aussehen der Matritzen solcher Eichgruppen, ist es durchaus gerechtfertigt von ihnen als Rückgrat" der Theorie zu sprechen.) Bei nur geringer spinorieller Dimension der Faser des Bündels kann diese referenzielle Untergruppe natürlich kaum mehr sein als eine $U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)$, für große Dimension $\mathbb{N}_{4\times4}$ der Spinorfaser, kann dann auch z.B an eine $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) \times \left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ oder ähnliches gedacht werden. Die Umgebung dieser blockdiagonalen Eichgruppen muß und darf sogar, wie schon gesagt, gar nicht vollständig seiner Anwendung als Symmetrietransformationen der Faser beraubt werden.

Kapitel 5 gibt genau hierfür ein Beispiel für den gerade beschriebenen Prozeß. Die $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Symmetrien um die Eichgruppe $U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)$ verschwinden nicht vollständig, es verbleibt genug um damit Austauschwechselwirkung zu beschreiben. Welche Form die Theorie bei einer höheren Eichgruppe, als der in 5 verwendeten, annimmt, kann aus diesem fundamentalen Beispiel ohne weiteres entnommen werden.

Die Beschränkung der Symmetrie durch die Beschränkung der $\Lambda^y\left(x\right)$ sieht zunächst so aus, als würde sie dem System von außen auferlegt; es ist auch sicher nicht falsch die Symmetrieverminderung von dieser Warte aus zu betrachten. Allerdings besteht auch

kein Grund anzunehmen, die Transformationsgesetze (4.41) und (4.42) könnten sich nicht dynamisch aus (4.8), (4.9), (4.10) und (4.16) und ergeben, eine Dynamik für die $\Lambda^a(x)$ vorausgesetzt. Da auch die Transformationen (4.41) und (4.42) immer noch alle Generatoren der $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ einbeziehen, es werden ja nur die Koeffizienten $\Lambda^F(x)$ der Generatoren β_y beschränkt, nicht die Generatoren selber aus den Symmetrietransformationen, denen das System unterliegt, entfernt, ist es durchaus denkbar, daß eine Dynamik der $\Lambda^a(x)$ eine Untermenge $\Lambda^y(x)$ sich derart entwickeln läßt, daß sie nur noch die Werte annehmen, die einer Beschränkung, die zu einem Teilchenbegriff führt, entsprechen. Anders gesagt haben beide Betrachtungsweisen der Symmetriebeschränkung ihre Berechtigung. Der Weg über die äußere Vorgabe der Beschränkung ist nichts Anderes, als sich zu überlegen unter welchen Bedingungen aus der Gruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ ein Teilchenbegriff hervortreten kann. Stellt man nun noch den bisher existierenden dynamischen Feldern noch die Gruppenparameter $\Lambda^a(x)$ zur Seite (Der Gedanke mußte einfach in dieser Arbeit auftauchen, damit ich mich der Ketzerei auch wirklich schuldig mache), ist klar, welchen (Grenz-)Fällen die Dynamik zustreben muß damit ein Teilchenbegriff entstehen kann. Existieren mehrere solcher (Grenz-)Fälle, ermöglicht eine Dynamik der $\Lambda^a(x)$ gegebenenfalls den Übergang zwischen diesen. Das beinhaltet auch, daß die Generatoren υ_a dynamisch vom Set der $\{\alpha_f\} \subset \{\upsilon_a\}$ zu dem der $\{\beta_y\} \subset \{\upsilon_a\}$ überwechseln können und umgekehrt. Die Zuordnung der einzelnen υ_a zu einer der Untermengen $\{\alpha_f\}$ oder $\{\beta_y\}$ wird ja gerade durch die Beschränkungen getroffen, denen ihre jeweiligen Koeffizienten $\Lambda^a(x)$ unterliegen. Ansonsten ist und bleibt die kontinuierliche unitäre Symmetrie der Theorie immer die volle kontinuierliche $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ - Symmetrie.
Dadurch, daß die Gruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ nicht in zwei Untergruppen zerlegt wird, sondern als ganze Gruppe verwendet wird, deren einzelnen Elementen unterschiedliche Freiheitsgrade bei ihrer Anwendung zuerkannt werden, ist es auch unerheblich, daß die β_y im allgemeinen keine Liealgebra bilden.
Eine wirkliche *Reduktion* der Symmetrie in dem Sinne, daß bestimmte Symmetriefreiheitsgrade, d.h. bestimme Generatoren, ausgeschlossen werden, wird mitunter von der Koppelungsmatrix $I^n{}_\ell$ der Spinormetrik $\mathcal{I}$ durch die Nebenbedingung (4.30) erzwungen. Da in solchen Fällen die Einträge von $I^n{}_\ell$ nicht alle gleich sind, was zu Teilchen mit unterschiedlichen Ladungen führt, also Teilchen, die voneinander verschieden sind und demnach auch nicht austauschwechselwirken sollen, ist ein Wegfall z.B der Generatoren, die diese Austauschkoppelung mit den anderen spinoriellen Freiheitsgraden des Systems vermitteln, nicht nur kein Problem, sondern eine willkommene Eigenschaft der Theorie. Teilkapitel 5.2.1 gibt ein Beispiel hierfür.
Die unterschiedlichen Transformationsfreiheiten, die mit den einzelnen Generatoren $\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}$ zusammenhängen, werden auch in den Potentialen $U^a{}_\mu$ der Theorie sichtbar gemacht, in dem diese in die Sets $\left\{A^f{}_\mu\right\}$ und $\{B^y{}_\mu\}$ unterteilt werden:

$$\mathcal{U}_\mu = \mathcal{A}_\mu + \mathcal{B}_\mu \tag{4.43a}$$

$$U^a{}_\mu \upsilon_a = A^f{}_\mu \alpha_f + B^y{}_\mu \beta_y \tag{4.43b}$$

$$\mathcal{A}_\mu = A^f{}_\mu \alpha_f \tag{4.43c}$$

$$A^f{}_\mu = U^f{}_\mu \tag{4.43d}$$
$$\mathcal{B}_\mu = B^y{}_\mu \beta_y \tag{4.43e}$$
$$B^y{}_\mu = U^y{}_\mu \tag{4.43f}$$
$$a, b, c = 1, \ldots, \mathrm{dimU}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right) \tag{4.43g}$$
$$f, g, h = 1, \ldots, \mathrm{dimE}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right) \tag{4.43h}$$
$$x, y, z =, \mathrm{dimE}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right) + 1, \ldots, \mathrm{dimU}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right) \ . \tag{4.43i}$$

Gleiches geschieht mit den Feldstärken $V^a{}_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{V}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu} \tag{4.44a}$$
$$\begin{aligned} V^a{}_{\mu\nu}\upsilon_a &= F^f{}_{\mu\nu}\alpha_f + G^y{}_{\mu\nu}\beta_y \\ &= \left(\partial_\mu A^f{}_\nu - \partial_\nu A^f{}_\mu + C^f{}_{ab}U^a{}_\mu U^b{}_\nu\right)\alpha_f \\ &\quad + \left(\partial_\mu B^y{}_\nu - \partial_\nu B^y{}_\mu + C^y{}_{ab}U^a{}_\mu U^b{}_\nu\right)\beta_y \end{aligned} \tag{4.44b}$$
$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F^f{}_{\mu\nu}\alpha_f \tag{4.44c}$$
$$F^f{}_{\mu\nu} = V^f{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^f{}_\nu - \partial_\nu A^f{}_\mu + C^f{}_{ab}U^a{}_\mu U^b{}_\nu \tag{4.44d}$$
$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = G^y{}_{\mu\nu}\beta_y \tag{4.44e}$$
$$G^y{}_{\mu\nu} = V^y{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^y{}_\nu - \partial_\nu B^y{}_\mu + C^y{}_{ab}U^a{}_\mu U^b{}_\nu \ . \tag{4.44f}$$

Die mittlerweile wahrscheinlich bereits zu Tode erwähnte Beibehaltung der Gruppe $U\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$ als solche, zeigt sich in (4.44d) und (4.44f) noch einmal deutlich. Die Kommutatoranteile von $F^f{}_{\mu\nu}$ und $G^y{}_{\mu\nu}$ erfaßen sowohl für $F^f{}_{\mu\nu}$ als auch für $G^y{}_{\mu\nu}$ jeweils alle Strukturkonstanten der $U\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$, d.h. die entsprechenden Kommutatoren aller Generatoren υ_a miteinander, und nicht nur die der Untermengen $\{\alpha_f\}$, wenn es um $F^f{}_{\mu\nu}$ geht und $\{\beta_y\}$ bei Bildung von $G^y{}_{\mu\nu}$. Die beiden Symmetriesektionen werden keinesfalls als voneinander getrennt behandelt. Es entstehen folglich auch Mischterme der Art $A^f{}_\mu B^y{}_\nu$ etc. und $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ wird selbst im Fall einer abelschen Eichwechselwirkung nicht zu einem reinen Rotationsausdruck.

Die $A^f{}_\mu$ gehören zu den Generatoren α_f der Eichsymmetrie und werden dementsprechend als *Eichpotentiale* bezeichnet; aus demselben Grund erhalten die $F^a{}_{\mu\nu}$ die Bezeichnung *Eichfeldstärken*. Wegen ihrer Zuordnung zu den Generatoren der Restsymmetrie β_y erhalten die $B^y{}_\mu$ und die $G^y{}_{\mu\nu}$ die Namen *Potentiale der Restsymmetrie* und *Feldstärken der Restsymmetrie*. Unter vorwegnahem der Ergebnisse aus Kapitel 5 und als Tribut an die Bequemlichkeit werden die $B^y{}_\mu$ auch dann schon als *Austauschpotentiale* bezeichnet, wenn dieses aus dem Entwicklungsstand des betrachteten Systems noch gar nicht ersichtlich ist; gleiches gilt für die Bezeichnung der $G^y{}_{\mu\nu}$ als *Austauschfeldstärken*. Im Gegensatz zu Permutationskoeffizienten X^{de_μ} und der Permutationsfeldstärke $Y^{de}{}_{\mu\nu}$ aus Kapitel 2 sind $B^y{}_\mu$ und $G^y{}_{\mu\nu}$ tatsächlich Potentiale und Feldstärken im Sinne einer Eichtheorie, denn die Generatoren β_y, denen sie als Koeffizienten dienen, treten als Generatoren

einer lokalen kontinuierlichen Symmetrie $\mathcal{S}_{\text{Rest}}$ (4.36a) auf; sie sind ein Teil der Strukturgruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ des Bündels $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U(\mathbb{N}_{4\times4})\right)$, in dem Ψ lebt. Somit ist die Anwesenheit von $\mathcal{B}_\mu$ in der eichkovarianten Ableitung zwingend, damit es über sein, genauso zwingendes, in (4.9) bzw. (4.42) enthaltenes, inhomogenes Transformationsverhalten die Homogenität der Transformation von $\mathcal{D}_\mu\Psi$ unter allen Transformationen der Strukturgruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ des Bündels $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U(\mathbb{N}_{4\times4})\right)$ sicherstellt. Im weiteren Unterschied zu Kapitel 2 wird die eichkovariante Ableitung um keinen Term erweitert; sie tritt unverändert, ohne Erweiterungen oder Verminderungen, in der Form auf, die die Strukturgruppe des Bündels $\Upsilon\left(E,\pi,M_1^4,\mathbb{C}^{4N},U(\mathbb{N}_{4\times4})\right)$ von seinem eichkovarianten Ableitungsbegriff verlangt.
Wird nur von *Potentialen* und *Feldstärken* gesprochen, sind *alle* Potentiale ${U^a}_\mu$ bzw. alle Feldstärken ${V^a}_{\mu\nu}$ gemeint. Dadurch wird nicht nur ausgesagt, daß diese zusammengefaßte Bezeichnung generell möglich ist, weil sich beide Sorten von Potentialen immer unter dem Dach der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ versammelt bleiben (und auch weil die ganze Menge $\{{U^a}_\mu\} = \left\{{A^f}_\mu\right\} \cup \{{B^y}_\mu\}$ immer eine Menge von Potentialen bleibt, s.o.), sondern auch, daß die Unterteilung der Strukturgruppe im Augenblick keine Rolle spielt.
Die auf die Gruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ bezogenen eichkovarianten Ableitungen der einzelnen Objekte der Theorie lesen sich nach der Aufteilung des Potentials $\mathcal{U}_\mu$ (4.43) und der Feldstärke $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ (4.44) als

$$\mathcal{D}_\mu\Psi_A = \partial_\mu\Psi_A + \mathcal{U}_\mu\Psi_A = \partial_\mu\Psi_A + \mathcal{A}_\mu\Psi_A + \mathcal{B}_\mu\Psi_A \tag{4.45a}$$

$$D_\mu\, {}^\ell\psi = \partial_\mu\, {}^\ell\psi_A + {U^a}_\mu \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_n\, {}^n\psi_A = \partial_\mu\, {}^\ell\psi_A + {A^f}_\mu \left(\alpha_f\right)^\ell{}_n\, {}^n\psi_A + {B^y}_\mu \left(\beta_y\right)^\ell{}_n\, {}^n\psi_A \tag{4.45b}$$

$$\mathcal{D}^\mu\mathcal{V}_{\mu\nu} = \partial^\mu\mathcal{V}_{\mu\nu} + [\mathcal{U}^\mu,\mathcal{V}_{\mu\nu}] = \partial^\mu {V^a}_{\mu\nu}\upsilon_a + {C^a}_{bc}U^{b\mu}{V^c}_{\mu\nu} \tag{4.45c}$$

$$D^\mu {F^f}_{\mu\nu} = \partial^\mu {F^f}_{\mu\nu} + {C^f}_{bc}U^{b\mu}{V^c}_{\mu\nu} \tag{4.45d}$$

$$D^\mu {G^x}_{\mu\nu} = \partial^\mu {G^x}_{\mu\nu} + {C^x}_{bc}U^{b\mu}{V^c}_{\mu\nu} \tag{4.45e}$$

$$\begin{aligned} D_\mu K_{ab} &= \partial_\mu K_{ab} - {U^d}_\mu {C^c}_{da} K_{cb} - {U^d}_\mu {C^c}_{db} K_{ac} \\ &= \partial_\mu K_{ab} - \left({A^f}_\mu {C^c}_{fa} + {B^x}_\mu {C^C}_{xa}\right) K_{cb} - \left({A^f}_\mu {C^c}_{fa} + B^x_\mu {C^c}_{xb}\right) K_{ac} \end{aligned} \tag{4.45f}$$

$$\begin{aligned} D_\mu {I^{ABn}}_\ell &= \partial_\mu {I^{ABn}}_\ell + (\mathcal{U}_\mu)^n{}_m {I^{ABm}}_\ell - (\mathcal{U}_\mu)^m{}_\ell {I^{ABn}}_m \\ &= \partial_\mu {I^{ABn}}_\ell + \left((\mathcal{A}_\mu)^n{}_m + (\mathcal{B}_\mu)^n{}_m\right) {I^{ABm}}_\ell - \left((\mathcal{A}_\mu)^m{}_\ell - (\mathcal{B}_\mu)^m{}_\ell\right) {I^{ABn}}_m \end{aligned} \tag{4.45g}$$

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{M} = \partial_\mu\mathcal{M} + [\mathcal{U}_\mu,\mathcal{M}] = \partial_\mu\mathcal{M} + [\mathcal{A}_\mu,\mathcal{M}] + [\mathcal{B}_\mu,\mathcal{M}]\ . \tag{4.45h}$$

Bezüglich der Kommutatorterme in (4.45d) und (4.45e) gilt das nach (4.44) Gesagte. Daß die $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ - Struktur der Theorie unangetastet bleibt, zeigt sich auch im inhomogenen Transformationsverhalten *beider* Sorten von Potentialen $\mathcal{A}_\mu$ und $\mathcal{B}_\mu$. Die

Aufteilung (4.43) tastet die Gültigkeit von (4.9) bzw. (4.42) für *alle* Teile von $\mathcal{U}_\mu$ nicht an.

4.1.3. Die Noetherströme

Zu jedem Generator υ_a gehört ein Noetherstrom

$$j_{a\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\beta {}^\ell\psi_C\right)} \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C - {}_m\overline{\psi}_C \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\beta {}_\ell\overline{\psi}_C\right)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\beta U^{c\gamma}\right)} \left(\upsilon_a^{\mathrm{ad}}\right)^c{}_b U^{b\gamma} \ . \tag{4.46}$$

Mit den Ableitungen der Lagrangedichte (4.34d) - (4.34f) lautet (4.46)

$$j_{a\beta} = \frac{i}{2} \left({}_n\overline{\psi}_C \gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B \right) - K_{cd} C^d{}_{ab} V^c{}_{\beta\gamma} U^{b\gamma} \ . \tag{4.47}$$

Die Aufteilung der $j_{a\beta}$ in einen Materie- und einen Potentialanteil kann direkt an (4.47) abgelesen werden:

$$j_{a\beta} = k_{a\beta} + l_{a\beta} = K_{ab} k^b{}_\beta + K_{ab} l^b{}_\beta \tag{4.48a}$$

$$\begin{aligned} k_{a\beta} &= \frac{i}{2} \left({}_n\overline{\psi}_C \gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B \right) \\ &= K_{ab} \frac{i}{2} \left({}_n\overline{\psi}_C \gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\upsilon^b\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\upsilon^b\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B \right) \end{aligned} \tag{4.48b}$$

$$l_{a\beta} = C_{abc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} = K_{ad} C^d{}_{bc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} \ . \tag{4.48c}$$

Für jeden der Ströme $j_{a\beta}$ sichert das Noethertheorem den Erhaltungssatz

$$\partial^\beta j_{a\beta} \equiv 0 \ . \tag{4.49}$$

Für die Aufteilung (4.48) folgt daraus

$$\partial^\beta k_{a\beta} = -\partial^\beta l_{a\beta} \ . \tag{4.50}$$

Die Quelle von $\partial^\beta k_{a\beta}$ bzw. $\partial^\beta l_{a\beta}$

$$\partial^\beta k_{a\beta} = -\partial^\beta l_{a\beta} = -U^b{}_\beta C^c{}_{ba} \cdot {}_n\overline{\psi}_C I^{ACn}{}_\ell \left(\upsilon_c\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C \ , \tag{4.51}$$

ist genau der Ausdruck, der benötigt wird, um die Gleichung (4.50) in einen eichkovarianten Erhaltungssatz für $k_{a\beta}$ umzuwandeln:

$$D^\beta k_{a\beta} \equiv 0 \ . \tag{4.52}$$

Da dieser Ausdruck keine echten Erhaltungsgrößen liefert, spielt er im Folgenden, besonders bei der Diskussion des Teilchenbegriffes in der RST, eine untergeordnete Rolle.

Bei kontravarianter Stellung des Liealgebraindexes a (der die *ganze* Liealgebra $\mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$ ausschöpft; siehe z.B. (4.6c)) nehmen die Ströme die Form

$$j^a{}_\beta = K^{ab} j_{b\beta} = \frac{i}{2}\left({}_n\overline{\psi}_C \gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\upsilon^a\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\upsilon^a\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B\right) + C^a{}_{bc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} \tag{4.53}$$

an. Der Liealgebraindex a wird mit $\left\{K^{ab}\right\}$, der Inversen der Metrik $\mathcal{K}$ (4.17) in der Algebra $\mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$, gehoben und mit der Metrik (4.17) $\{K_{ab}\}$ selber gesenkt. Dieses vorgehen überträgt sich auf die Materie - und Potentialanteile (4.48b) und (4.48c), so daß diese Anteile von $j^a{}_\beta$ als

$$k^a{}_\beta = K^{ab} k_{b\beta} \tag{4.54a}$$

$$l^a{}_\beta = K^{ab} l_{b\beta}\ ; \tag{4.54b}$$

erscheinen, wobei die Aufteilung von $j^a{}_\beta$ in einen Materiefeld - und einen Potentialfeldanteil auch wiederum direkt aus (4.53) abgelesen werden kann. Gleichung (4.54a) wird aber gleich noch von Nutzen sein.
Bei konstanten Elementen K^{ab} und K_{ab}, d.h. $\partial_\mu K^{ab} = \partial_\mu K_{ab} \equiv 0$ als Zusatzbedingung zu (4.45f), folgt aus (4.49) die gleiche Aussage für die $j^a{}_\beta$:

$$\partial^\beta j^a{}_\beta \equiv 0 \tag{4.55}$$

Sind die K_{ab} und K^{ab} nur kovariant konstant ($\mathcal{D}_\mu k_{a\beta} = \mathcal{D}_\mu K^{ab} \equiv 0$), muß die Aussage (4.55) auf dem Umweg über die Einzeldichten $k_{a\beta}$ und $l_{a\beta}$ gewonnen werden. Wegen (4.45f) ($\rightsquigarrow D_\mu K^{ab}$) gilt mit (4.52) auch

$$D^\beta k^a{}_\beta = D^\beta \left(K^{ab} k_{b\beta}\right) \equiv 0\ . \tag{4.56}$$

Die Zusatzterme zur rein partiellen Ableitungen der eichkovarianten Ableitungen von $k^a{}_\beta$ sind auch hier gerade gleich der rein partiellen Divergenz des Potentialanteiles $l^a{}_\beta$, weshalb aus (4.56) das kontravariante Gegenstück zu (4.50) folgt

$$\partial^\beta k^a{}_\beta = -\partial^\beta l^a{}_\beta\ . \tag{4.57}$$

Somit ergibt sich für $j^a{}_\beta = k^a{}_\beta + l^a{}_\beta$ wieder (4.55).
Hinsichtlich der Bewegungsgleichungen der Feldstärken $V^a{}_{\gamma\beta}$ sind die $j^a{}_\beta$ (4.53) , Überraschung, Überrraschung, die Quellen dieser Divergenzgleichungen.
Die Gliederung der Generatoren $\{\upsilon_a\}$ in Generatoren der Eichsymmetrie $\{\alpha_f\}$ und Generatoren der Restsymmetrie $\{\beta_y\}$ mit

$$\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}\ , \tag{4.58}$$

zieht eine entsprechende Gliederung der Ströme (4.53) ((4.47)) nach sich. Zu den Eichgeneratoren $\alpha_f = \upsilon_f,\ f = 1, \ldots, \dim E\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$ bzw zu dessen kontravarianten Versionen

$\alpha^f = \upsilon^f = K^{fb}\upsilon_b$ gehören die (kontravarianten) *Eichströme* $j^f{}_\beta = K^{fb}$

$$j^f{}_\beta = k^f{}_\beta + l^f{}_\beta = \frac{i}{2}\left({}_\ell\overline{\psi}_C\gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\alpha^f\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\alpha^f\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B\right) + C^f{}_{bc}U^{a\gamma}V^b{}_{\beta\gamma} \tag{4.59}$$

$\alpha_f = \upsilon_f$
$f = 1 \ldots, \dim E\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$.

Die Menge der Ströme aus (4.53) mit Bezug zu den kontravarianten Generatoren der Restsymmetrie $\beta^y = \upsilon^y = K^{yb}\upsilon_b$ (und dadurch mit direktem und ausschließlichem Bezug zu den kontravarianten Generatoren der Restsymmetrie β_y, da K^{ab} und K_{ab} keine Einträge der Art K^{ay} enthält, um sicherzustellen, daß die kontravarianten β^y ausschließlich aus β_y bestehen, d.h. die gleiche Aufteilung der Symmetrie in ko - wie in kontravarianter Form der Generatoren besteht; gleiches gilt natürlich auch für die α_f und α^f von oben) sind die *Ströme der Restsymmetrie*

$$j^y{}_\beta = k^y{}_\beta + l^y{}_\beta = \frac{i}{2}\left({}_\ell\overline{\psi}_C\gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\beta^y\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\beta^y\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B\right) + C^y{}_{ab}U^{a\gamma}V^b{}_{\beta\gamma} \tag{4.60}$$

$\beta_x = \upsilon_x$
$x = \dim \mathcal{E}\left(N\right) + 1, \ldots, \dim U\left(N\right)$.

Aus Gründen der Bequemlichkeit wird, wie schon bei den Generatoren β^y/β_y, die Bezeichnung *Austauschströme* für die $j^y{}_\mu$ vor der eigentlichen Begründung dieser Bezeichnung verwendet.
Die Materie - und Eichanteile $k^f{}_\beta$ und $l^f{}_\beta$ der Eichströme sind diejenigen Ausdrücke aus (4.54) mit $a = a|_{1,\ldots \dim E(\mathbb{N}_{4\times 4})}$

$$k^f{}_\beta = \frac{i}{2}\left({}_\ell\overline{\psi}_C\gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\alpha^f\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\alpha^f\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B\right) \tag{4.61a}$$
$$l^f{}_\beta = C^f{}_{bc}U^{a\gamma}V^b{}_{\beta\gamma} \ , \tag{4.61b}$$

und die Materie - und Eichanteile $k^y{}_\beta$ und $l^y{}_\beta$ der Ströme der Restsymmetrie sind der Anteil von (4.54) mit $a = a|_{\dim E(\mathbb{N}_{4\times 4}),\ldots,\dim U(\mathbb{N}_{4\times 4})}$

$$k^y{}_\beta = \frac{i}{2}\left({}_\ell\overline{\psi}_C\gamma_\beta I^{ACn}{}_\ell \left(\beta^y\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C + {}_m\overline{\psi}_C \left(\beta^y\right)^m{}_\ell \gamma_\beta I^{CB\ell}{}_n {}^n\psi_B\right) \tag{4.62a}$$
$$l^y{}_\beta = C^y{}_{ab}U^{a\gamma}V^b{}_{\beta\gamma} \ . \tag{4.62b}$$

Die Aufteilung der Noetherströme in die zwei angegebenen Sets ist nicht nur rein formaler Natur. Die Eichströme, genauer die ihnen zugehörigen Erhaltungsgrößen, sollen die Grundlage für den Teilchenbegriff der Yang - Millsform der RST bilden, der bei entsprechenden Randbedingungen zutage tritt. Folglich müssen sie unter Eichtransformationen

invariant bleiben, damit die Erhaltungsgrößen von fundamentaler Bedeutung in jeder Eichung dieselben sind. Weiterhin sind die Transformationen der Restsymmetrie so zu beschränken, daß diese Begriffsbildung durch $\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}$ nicht zunichte gemacht wird. Diese zweite Bedingung wird sich im konkreten Fall als etwas schwächer erweisen, als die erste, d.h. der Formalismus wird unter der eingeschränkten Restsymmetrie nicht streng invariant sein, wie unter den Eichtransformationen, sondern "nur" begriffsinvariant.
Da mit den Erhaltungsgrößen der Ströme der Restsymmetrie keine direkte Bildung invarianter Begriffe betrieben wird, können sie in verschiedenen Eichungen verschiedene Werte annehmen; dasselbe gilt für die Transformationen unter der Restsymmetrie. Es ist dann aber sicherzustellen, daß diese Erhaltungsgrößen, Ströme oder den Feldstärken ${G^y}_{\mu\nu}$ nicht beobachtbar sind.
Daß hier eine im Grundsatz immer vorhandene $U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ - Symmetrie Verwendung findet, wird in den Eichströmen (4.59) abermals sehr deutlich, denn der Potentialanteil ${l^f}_\beta$ (4.61b) ist selbst bei abelschen Eichwechselwirkungen *immer* vorhanden, im Unterschied zu den bekannten Theorien. Die ${l^f}_\beta$ sind dabei keineswegs nur auf Eichpotentiale und Eichfeldstärken beschränkt, wie die Verwendung von $U^{a\gamma}$ und ${V^b}_{\beta\gamma}$ in (4.61b) zum Ausdruck bringt. Es sind vor allem genau die Terme mit Potentialen und Feldstärken der Restsymmetrie, die in Kapitel 5, außer in speziellen Situationen, keine eindeutige Zuordnung der Erhaltungsgröße des Stromes zum materiellen Anteil ${k^f}_\beta$ zulassen werden. Diese im Allgemeinen fehlende Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung macht es unmöglich den Teilchenbegriff in der RST beständig aufrecht zu erhalten, wodurch die RST ihren Begriff der Austauschwechselwirkung erhält. Man beachte, daß hierbei der Teilchenbegriff in engem Zusammenhang eben durch die Terme, die der permutativen RST in Teil I noch grundsätzliche Probleme bereitet haben , d.h. durch Wechselspiel des Systemspinors mit seiner lokalen, kontinuierlichen $U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ - Symmetrie entsteht und vergeht, wodurch der Konfliktpunkt aus Teil I zur eigentlichen Stärke der Theorie wird.

4.1.4. Die Bewegungsgleichungen der Felder

Die Diracgleichungen

Unter Verwendung von (4.34a), (4.34d), Beachtung der Nebenbedingungen (4.19) und (4.30a), sowie der Tatsache, daß im Allgemeinen die ${I^{ABn}}_\ell$ ungleich Null sein sollen, wird die Bewegungsgleichung für ${}^\ell\psi_B$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, {}^\ell\overline{\psi}_C} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta\, {}^\ell\overline{\psi}_C \right)} \right) = 0 \,, \tag{4.63}$$

zu

$$i\gamma^\beta D_\beta\, {}^\ell\psi_B - {M^\ell}_m\, {}^m\psi_B = 0 \,. \tag{4.64}$$

Das komplex konjugierte Feld erfüllt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, {}^\ell\psi_C} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta\, {}^\ell\psi_C \right)} \right) = 0 \,, \tag{4.65}$$

also mittels (4.34b) und (4.34e)

$$i\gamma^{\beta} D_{\beta\,\ell}\overline{\psi}_A + M^m{}_{\ell\,m}\overline{\psi}_A = 0\ . \tag{4.66}$$

Die Untergliederung der Symmetrie findet sich in diesen Gleichungen in der Darstellung (4.45b) der eichkovarianten Ableitung wieder.

Die Yang - Millsgleichungen

Ebenso ergibt sich aus

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^{c\beta}} - \partial^{\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\gamma}U^{c\beta}\right)}\right) = 0\ , \tag{4.67}$$

mit (4.19), (4.30a), (4.34c), (4.34f) und (4.59)

$$\begin{gathered}\partial^{\gamma} V^a{}_{\gamma\beta} = -j^a{}_{\beta} \\ a = 1, \ldots, \dim U\left(\mathbb{I}_{4\times4}\right)\ .\end{gathered} \tag{4.68}$$

Da die $I^n{}_{\ell}$ ($I^{ABn}{}_{\ell} = I^{AB}\left\{I^n{}_{\ell}\right\}$; siehe (4.27)) direkt in den Strömen $j^a{}_{\beta}$ (4.53) auftreten, bestimmen sie auf welche Weise der Materiefeldanteil der Ströme als Quellen der $V^a{}_{\mu\nu}$ auftreten und damit, wie die einzelnen materiellen Quellterm über die Potentiale $U^a{}_{\mu}$ auf die anderen Teilchen wirken. Deshalb tragen die $I^n{}_{\ell}$ den bereits verwendeten Namen "Koppelungselemente" oder "Elemente der Koppelungsmatrix" ($\left\{I^n{}_{\ell}\right\}$).
Der Anteil $l^a{}_{\beta}$ (4.54b) von $j^a{}_{\beta}$ ist exakt der Term, der benötigt wird, um aus der partiellen Ableitung von $V^a{}_{\gamma\beta}$ eine eichkovariante zu machen

$$D^{\gamma} V^a{}_{\gamma\beta} = -k^a{}_{\beta}\ . \tag{4.69}$$

Auf der rechten Seite der Yang - Millsgleichungen bleibt dann nur noch der Materiestrom (4.54a) stehen.
Da die Untergliederung der Symmetrie eingeführt wird, um den mit den vollen Eichströmen $\left\{j^f{}_{\beta}\right\} \subset \left\{j^a{}_{\beta}\right\}$ (4.53) verbundenen (echten) Erhaltungsgrößen eine bevorzugte Rolle einzuräumen, ist für den Rest der Arbeit die "Langform" (4.67) gegenüber (4.69) die sinnvollere und im Folgenden auch ausschließlich verwendete Form der Yang - Millsgleichungen.
Die Aufteilung (4.58) unterteilt (4.68) in einen Satz Bewegungsgleichungen für die Eichpotentiale/Eichfeldstärken $A^f{}_{\beta}/F^f{}_{\gamma\beta}$

$$\begin{gathered}\partial^{\gamma} F^f{}_{\gamma\beta} = j^f{}_{\beta} \\ f = 1, \ldots, \dim E\left(\mathbb{I}_{4\times4}\right)\ ,\end{gathered} \tag{4.70}$$

und einen für die Potentiale/Feldstärken der Restsymmetrie $B^y{}_{\beta}/G^y{}_{\gamma\beta}$

$$\begin{gathered}\partial^{\gamma} G^y{}_{\gamma\beta} = j^y{}_{\beta} \\ y = \dim E\left(\mathbb{I}_{4\times4}\right) + 1, \ldots, \dim U\left(\mathbb{I}_{4\times4}\right)\ .\end{gathered} \tag{4.71}$$

Die erneute Kontraktion von (4.68) ((4.70), (4.71)) mit ∂^γ ergibt den Erhaltungssatz (4.55). Wer Probleme damit hat, das Noethertheorem auch bei einer eingeschränkten Symmetrie gelten zu lassen, kann auf diese Argumentation für die Erhaltung der Ströme der Restsymmetrie (4.60) zurückgreifen.
Die Aufteilung von (4.68) ergibt exakt die Aufteilung von Feldstärken und Strömen, die in den vorhergehenden Teilkapiteln bereits unabhängig voneinader eingeführt worden ist.
Da die Austauschströme als Quellen der Feldgleichungen für die $B^y{}_\beta / G^y{}_{\gamma\beta}$ dienen, die wiederrum in eichinvarianten Kombinationen ein ständiger Anteil der Eichströme sind, nehmen die $j^y{}_\beta$ mittelbar Anteil am Teilchenbild der RST. Solange sie, und damit ihre Erhaltungsgrößen, nur eichkovariant sind, darf dieser Einfluß aber nicht direkt meßbar sein, was im konkreten Einzelfall immer zu überprüfen ist.

4.1.5. Der Energie - Impulstensor

Neben den Eichsymmetrien führt die Unveränderlichkeit der Lagrangedichte (4.3) unter Poincaretransformationen zur Erhaltung der Energie - Impulsdichte $\Theta_{\alpha\beta}$ und der Drehimpulsdichte $M_{\lambda\alpha\beta}$.
Erstere lautet mit (4.34)

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\alpha\, {}^\ell\psi_C\right)}\partial_\beta\, {}^\ell\psi_C + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\alpha\, {}_\ell\overline{\psi}_C\right)}\partial_\beta\, {}_\ell\overline{\psi}_C + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\alpha U^{b\gamma}\right)}\partial_\beta\, U^{b\gamma} - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}\ , \tag{4.72}$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} I^{ACn}{}_\ell\, {}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha\partial_\beta\, {}^\ell\psi_C - \frac{i}{2} I^{CB\ell}{}_n\partial_\beta\, {}_\ell\overline{\psi}_C\gamma_\alpha\, {}^n\psi_B - K_{ab}V^a{}_{\alpha\gamma}\partial_\beta U^{b\gamma} - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}\ . \tag{4.73}$$

Die fehlende Symmetrie im Feldanteil von (4.73) wird mittels des Symmetrisierungsverfahren von Belinfante [3] durch Addition des Divergenztermes

$$K_{ab}\partial^\sigma\left(V^b{}_{\alpha\sigma}U^a{}_\beta\right) = K_{ab}\left(K^{bc}j_{c\alpha}U^a{}_\beta + C^b{}_{de}U^{d\nu}V^e{}_{\alpha\nu}U^a{}_\beta + V^b{}_{\alpha\sigma}\partial^\sigma U^a{}_\beta\right) \tag{4.74}$$

behoben:

$$T_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} + K_{ab}\partial^\sigma\left(V^b{}_{\alpha\sigma}U^a{}_\beta\right)\ , \tag{4.75}$$

und somit:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\Big(& {}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m D_\beta\, {}^m\psi_B - D_\beta\, {}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_m\gamma_\alpha\, {}^m\psi_B \\ & - g_{\alpha\beta}\left({}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_m\gamma^\mu D_\mu\, {}^m\psi_B - D_\mu\, {}_n\overline{\psi}_A\gamma^\mu I^{ABn}{}_m\, {}^m\psi_B + 2i\, {}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_\ell M^\ell{}_m\, {}^m\psi_B\right)\Big) \\ & + K_{ab}\left(V^a{}_{\alpha\mu}V^{b\mu}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}V^a{}_{\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu}\right)\ . \end{aligned} \tag{4.76}$$

$T_{\alpha\beta}$ teilt sich wie üblich in einen Materieanteil $T^{(\mathrm{M})}_{\alpha\beta}$ und einen Feldstärkeanteil $T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta}$ auf

$$T_{\alpha\beta} = T^{(\mathrm{M})}_{\alpha\beta} + T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} \tag{4.77a}$$

$$\begin{aligned}T^{(\mathrm{M})}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\big({}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m D_\beta\,{}^m\psi_B - D_\beta\,{}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_m\gamma_\alpha\,{}^m\psi_B \\ - g_{\alpha\beta}\big({}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_m\gamma^\mu D_\mu\,{}^m\psi_B - D_\mu\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma^\mu I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B + 2i\,{}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_\ell M^\ell{}_m\,{}^m\psi_B\big)\big)\end{aligned} \tag{4.77b}$$

$$T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} = K_{ab}\left(V^a{}_{\alpha\mu}V^{b\mu}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}V^a{}_{\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu}\right) \ . \tag{4.77c}$$

Im Anteil der Materiefelder $T^{(\mathrm{M})}_{\alpha\beta}$ ist der Term $g_{\alpha\beta}\mathcal{L}_\mathrm{M}$ wegen der Bewegungsgleichungen (4.64) und (4.66) gleich Null. Der verbleibende Rest lässt sich ein einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Term, $T^{(\mathrm{M\,s})}_{\alpha\beta}$ und $T^{(\mathrm{M\,as})}_{\alpha\beta}$, aufspalten

$$T_{\alpha\beta} = T^{(\mathrm{M\,s})}_{\alpha\beta} + T^{(\mathrm{M\,as})}_{\alpha\beta} \tag{4.78a}$$

$$\begin{aligned}T^{(\mathrm{M\,s})}_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\big({}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m D_\beta\,{}^m\psi_B + {}_n\overline{\psi}_A\gamma_\beta I^{ABn}{}_m D_\alpha\,{}^m\psi_B - D_\beta\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B \\ - D_\alpha\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma_\beta I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B\big)\end{aligned} \tag{4.78b}$$

$$\begin{aligned}T^{(\mathrm{M\,as})}_{\alpha\beta} &= \frac{i}{4}\big({}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m D_\beta\,{}^m\psi_B - {}_n\overline{\psi}_A\gamma_\beta I^{ABn}{}_m D_\alpha\,{}^m\psi_B - D_\beta\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B \\ &\quad + D_\alpha\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma_\beta I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B\big) \\ &= \frac{i}{8}\left(\partial^\sigma\left({}_n\overline{\psi}_A I^{ABn}{}_m\left(\gamma_\alpha\gamma_\sigma\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\sigma\gamma_\alpha\right){}^m\psi_B\right)\right) \ ,\end{aligned} \tag{4.78c}$$

von denen der antisymmetrische (4.78c) nur einen Divergenzterm beiträgt, weshalb man sich auf den symmetrischen beschränken kann, um eine vollständig symmetrische Dichte zu erhalten

$$T_{\alpha\beta} = T^{(\mathrm{M\,s})}_{\alpha\beta} + T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} \tag{4.79a}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{i}{4}\big({}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m D_\beta\,{}^m\psi_B + {}_n\overline{\psi}_A\gamma_\beta I^{ABn}{}_m D_\alpha\,{}^m\psi_B - D_\beta\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma_\alpha I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B \\ &\quad - D_\alpha\,{}_n\overline{\psi}_A\gamma_\beta I^{ABn}{}_m\,{}^m\psi_B\big) \\ &\quad + K_{ab}\left(V^a{}_{\alpha\mu}V^{b\mu}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}V^a{}_{\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu}\right) \ .\end{aligned} \tag{4.79b}$$

Eine Unterteilung der Generatoren in Eich- und Austauschgeneratoren $\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}$ schlägt sich in den eichkovarianten Ableitungen gemäß (4.45a) nieder, wird aber vor allem im Feldanteil $T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta}$ sichtbar

$$T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} = K_{fg}\left(F^f{}_{\alpha\gamma}F^{g\gamma}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^f{}_{\mu\nu}F^{g\mu\nu}\right) + K_{xy}\left(G^x{}_{\alpha\gamma}G^{y\gamma}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}G^x{}_{\mu\nu}G^{y\mu\nu}\right) \ . \tag{4.80}$$

Der Term mit K_{fx} entfällt, da Eich- und Austauschgeneratoren in kontra- wie in kovarianter Basis getrennt bleiben muüssen; siehe auch die Bemerkung nach (4.59).

Aus der Lagrangedichte (4.31) lässt sich mit den kanonisch konjugierten Impulsdichten

$$\pi_{{}^{\ell}\psi_C} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\, {}^{\ell}\psi_C\right)} = \frac{i}{2} I^{ACn}{}_{\ell}\, {}_{n}\overline{\psi}_A \gamma^0 = \frac{i}{2} I^{ACn}{}_{\ell}\, {}_{n}\psi_A^\dagger \tag{4.81a}$$

$$\pi_{{}_{\ell}\overline{\psi}_C} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\, {}_{\ell}\overline{\psi}_C\right)} = \frac{i}{2} I^{CB\ell}{}_{n}\, {}^{n}\psi_B \gamma^0 \tag{4.81b}$$

$$\pi_{U^{c\beta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 U^{c\beta}\right)} = -K_{cb} V^{b0}{}_{\beta}\ , \tag{4.81c}$$

noch die **Hamiltondichte** (nicht zu verwechseln mit der Hamiltonschen 1-Form $\mathcal{H}_\mu$!)

$$\mathcal{H} = \pi_{{}^{\ell}\psi_C} \partial_0 {}^{\ell}\psi_C + \pi_{{}_{\ell}\psi^*_C} \partial_0 {}_{\ell}\psi_C + \pi_{U^{c\beta}} \partial_0 U^{c\beta} - \mathcal{L} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} I^{ACn}{}_{\ell} \left(-\, {}_{n}\overline{\psi}_A \gamma^i D_i\, {}^{\ell}\psi_C + D_i\, {}_{n}\overline{\psi}_A \gamma^i\, {}^{\ell}\psi_C - 2i\, {}_{m}\overline{\psi}_A M^m{}_n\, {}^{\ell}\psi_C - 2\, {}_{n}\overline{\psi}_A \gamma^0 U_0\left(\upsilon\right)^{\ell}{}_{m}\, {}^{m}\psi_C \right) \\ &\quad + K_{ab} \left(\frac{1}{4} V^a{}_{\mu\nu} V^{b\mu\nu} - V^{a0}{}_{\beta} \partial_0 U^{b\beta} \right)\ , \end{aligned} \tag{4.83}$$

gewinnen, die mit $\Theta^0{}_0 = g^{0\mu}\Theta_{\mu 0}$ aus (4.73) übereinstimmt

$$\mathcal{H} = \Theta^0{}_0 = g^{0\mu}\Theta_{\mu 0}\ , \tag{4.84}$$

also auch in der RST als Energiedichte interpretiert werden kann.

4.1.6. Die Drehimpulsdichte

Den $SO(1,3)$-Drehungen ist die Drehimpulsdichte $M_{\lambda\alpha\beta}$ zugeordnet

$$\begin{aligned} M_{\lambda\alpha\beta} = &\frac{\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda\, {}^{\ell}\psi_C\right)} \left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right) {}^{\ell}\psi_C + \frac{\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda\, {}_{\ell}\overline{\psi}_C\right)} \left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right) {}_{\ell}\overline{\psi}_C \\ &+ \frac{\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda U^{c\mu}\right)} \left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right) U^{c\mu} \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda\, {}^{\ell}\psi_C\right)} \left(\frac{1}{2}\left[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\right]\right)^{\ell}{}_{m}\, {}^{m}\psi_C + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda\, {}_{\ell}\overline{\psi}_C\right)} \left(\frac{1}{2}\left[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\right]\right)^{m}{}_{\ell}\, {}_{m}\overline{\psi}_C \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda U^{c\mu}\right)} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu} \end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned} M_{\lambda\alpha\beta} = &\frac{i}{2}\, {}_{n}\overline{\psi}_A I^{ACn}{}_{\ell} \gamma_\lambda \cdot \left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right) {}^{\ell}\psi_C - \frac{i}{2} \left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right) {}_{\ell}\overline{\psi}_C \cdot I^{CB\ell}{}_{n} \gamma_\lambda\, {}^{n}\psi_B \\ &- K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right) U^{c\mu} \\ &+ \frac{i}{4} I^{ACn}{}_{\ell}\, {}_{n}\overline{\psi}_A \gamma_\lambda \left(\left[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\right]\right)^{\ell}{}_{m}\, {}^{m}\psi_C - \frac{i}{4}\, {}_{m}\overline{\psi}_C \left(\left[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\right]\right)^{m}{}_{\ell}\, {}_{\ell}\overline{\psi}_C I^{CB\ell}{}_{n} \gamma_\lambda\, {}^{n}\psi_B \\ &- K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu}\ , \end{aligned} \tag{4.86}$$

mit der üblichen Aufteilung in Bahndrehimpuls, erzeugt durch die Generatoren der Lorentzgruppe $SO(1,3)$ und Spindrehimpuls, dem die Generatoren $\Sigma_{\mu\nu} = [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ der universellen Überdeckungsgruppe $\mathrm{Spin}(1,3)$ der $SO(1,3)$ zugrunde liegen:

$$M_{\lambda\alpha\beta} = L_{\lambda\alpha\beta} + S_{\lambda\alpha\beta} \tag{4.87a}$$

$$\begin{aligned} L_{\lambda\alpha\beta} = {} & \frac{i}{2}\, {}_n\overline{\psi}_A I^{ACn}{}_\ell \gamma_\lambda \cdot (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, {}^\ell\psi_C - \frac{i}{2}(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, {}_\ell\overline{\psi}_C \cdot I^{CB\ell}{}_n \gamma_\lambda {}^n\psi_B \\ & - K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, U^{c\mu} \end{aligned} \tag{4.87b}$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda\alpha\beta} = {} & \frac{i}{4} I^{ACn}{}_\ell\, {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\lambda \left([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C - \frac{i}{4}\, {}_m\overline{\psi}_C \left([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]\right)^m{}_\ell\, {}_\ell\overline{\psi}_C I^{CB\ell}{}_n \gamma_\lambda {}^n\psi_B \\ & - K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu}\ . \end{aligned} \tag{4.87c}$$

Beide Anteile $L_{\lambda\alpha\beta}$ und $S_{\lambda\alpha\beta}$ zerfallen jeweils für sich noch einmal in Materie- und Potentialanteile

$$L_{\lambda\alpha\beta} = L^{(\mathrm{M})}_{\lambda\alpha\beta} + L^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} \tag{4.88a}$$

$$L^{(\mathrm{M})}_{\lambda\alpha\beta} = \frac{i}{2}\, {}_n\overline{\psi}_A I^{ACn}{}_\ell \gamma_\lambda \cdot (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, {}^\ell\psi_C - \frac{i}{2}(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, {}_\ell\overline{\psi}_C \cdot I^{CB\ell}{}_n \gamma_\lambda {}^n\psi_B \tag{4.88b}$$

$$L^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{ab} V^b{}_{\lambda\mu} (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, U^{c\mu} \tag{4.88c}$$

$$S_{\lambda\alpha\beta} = S^{(\mathrm{M})}_{\lambda\alpha\beta} + S^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} \tag{4.88d}$$

$$S^{(\mathrm{M})}_{\lambda\alpha\beta} = \frac{i}{4} I^{ACn}{}_\ell\, {}_n\overline{\psi}_A \gamma_\lambda \left([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]\right)^\ell{}_m {}^m\psi_C - \frac{i}{4}\, {}_m\overline{\psi}_C \left([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]\right)^m{}_\ell\, {}_\ell\overline{\psi}_C I^{CB\ell}{}_n \gamma_\lambda {}^n\psi_B \tag{4.88e}$$

$$S^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{ab} V^b{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu}\ . \tag{4.88f}$$

Hier zeigt die Aufteilung der Generatoren $\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_x\}$, wegen der nicht auftretenden eichkovarianten Ableitung, keine Auswirkungen in den Ausdrücken der Materiefelder (4.88b) und (4.88e). Dagegen tritt sie in den Feldanteilen (4.88c) und (4.88f) wiederum sehr deutlich zu Tage:

$$L^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{fg} F^g{}_{\lambda\mu} (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, A^{f\mu} - K_{xy} G^y{}_{\lambda\mu} (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)\, B^{x\mu} \tag{4.89a}$$

$$S^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{fg} F^g{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) A^{f\nu} - K_{xy} G^y{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) B^{x\nu}\ . \tag{4.89b}$$

4.2. Der Klein - Gordonfall

Dieses Unterkapitel ist mit seiner Zielsetzung die Lagrangedichte des Klein - Gordonfalles der Yang - Mills - RST einzuführen der Zwilling des vorhergehenden über die Lagrangedichte des Diracfalles. Deswegen gleicht auch sein Aufbau dem seines Vorgängers, Inhaltlich kann vieles übertragen werden. Sobald die Anwendung der Lorentzgruppe, vor allem in Bezug auf deren erste Reduktion, und der unitären Strukturgruppe an den

Klein - Gordonfall angepaßt ist, können die Ausführungen hinsichtlich der Aufteilung der unitären Symmetrie in direkter Analogie aus Unterkapitel 4.1 übernommen werden. Dementsprechend findet eine erneute Diskussion dieses Vorganges hier nicht mehr statt; es wird im Folgenden auch häufig auf den vorangegangenen Ausführungen verwiesen. Wo dieses nicht der Fall sein und Unklarheiten bestehen, sollte ein Blick auf die entsprechenden Stellen in 4.1 Abhilfe schaffen.

4.2.1. Die Bausteine der Lagrangedichte

Ausgangspunkt ist die konventionelle eichinvariante Lagrangedichte des geladenen Klein - Gordon - Feldes

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^* - \mathcal{A}^\mu \phi^*) \cdot (\partial_\mu \phi + \mathcal{A}_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} K_{fg} F^f{}_{\mu\nu} F^{g\mu\nu} \ , \tag{4.90}$$

in der die nachfolgenden Ersetzungen vorgenommen werden

$$(\partial^\mu \phi^* - \mathcal{A}^\mu \phi^*) \to (\partial^\mu \phi^*_{nA} - (\mathcal{U}^\mu)^m{}_n \phi^*_{mA}) = D^\mu \phi^*_{nA} \ , \tag{4.91a}$$

$$(\partial_\mu \phi - \mathcal{A}_\mu \phi) \to (\partial_\mu \phi^n{}_B - (\mathcal{U}_\mu)^n{}_m \phi^m{}_B) = D_\mu \phi^n{}_B \ , \tag{4.91b}$$

$$(\partial^\mu \phi^* - \mathcal{A}^\mu \phi^*) \cdot (\partial_\mu \phi + \mathcal{A}_\mu \phi) \to D^\mu \phi^*_{nA} I^{ABn}{}_\ell D_\mu \phi^l{}_B = \mathcal{I}\left(\mathcal{D}_\mu \vec{\Phi}, \mathcal{D}^\mu \vec{\Phi}\right) \ , \tag{4.91c}$$

$$m^2 \phi^* \phi \to \phi^*{}_{Al} M^\ell{}_k \mathcal{I}^{ABk}{}_m M^m{}_n \phi^n{}_B = \mathcal{I}\left(\mathcal{M}\vec{\Phi}, \mathcal{M}\vec{\Phi}\right) \ , \tag{4.91d}$$

$$F^f{}_{\mu\nu} \to V^a{}_{\mu\nu} \ . \tag{4.91e}$$

um zur Mehrteilchenlagrangedichte der RST für Klein - Gordon - Teilchen zu gelangen:

$$\mathcal{L} = I^{ABn}{}_\ell D^\mu \phi^*_{nA} D_\mu \phi^l{}_B - \phi^*{}_{lA} M^\ell{}_k \mathcal{I}^{ABk}{}_m M^m{}_n \phi^n{}_B - \frac{1}{4} K_{ab} V^a{}_{\mu\nu} V^b{}_{\mu\nu} \tag{4.92}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{I}\left(\mathcal{D}_\mu \vec{\Phi}, \mathcal{D}^\mu \vec{\Phi}\right) - \mathcal{I}\left(\mathcal{M}\vec{\Phi}, \mathcal{M}\vec{\Phi}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{K}\left(\mathcal{V}_{\mu\nu}, \mathcal{V}^{\mu\nu}\right) \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathrm{tr}\left\{ I^{AB}\left(\mathcal{D}_\mu \overline{\Phi}_A\right) \otimes \left(\left\{I^n{}_\ell\right\} \mathcal{D}^\mu \Phi_B\right) - \left(\overline{\Phi}_A \mathcal{M}\right) \otimes \left(\left\{I^n{}_\ell\right\} \mathcal{M}\Phi_B\right)\right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} c_1 \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\mu\nu}\right\} + \frac{1}{4} c_2 \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}^{\mu\nu}\right\} \cdot \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\right\} \ .\end{aligned} \tag{4.94}$$

Deren Aufteilung in einen Materie - und einen Potentialanteil fällt direkt ins Auge:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{M} + \mathcal{L}_\mathrm{F} \tag{4.95a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{M} &= I^{ABn}{}_\ell D^\mu \phi^*_{nA} D_\mu \phi^l{}_B - \phi^*{}_{Al} M^\ell{}_k \mathcal{I}^{ABk}{}_m M^m{}_n \phi^n{}_B \\ &= \mathcal{I}\left(\mathcal{D}_\mu \vec{\Phi}, \mathcal{D}^\mu \vec{\Phi}\right) - \mathcal{I}\left(\mathcal{M}\vec{\Phi}, \mathcal{M}\vec{\Phi}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left\{ I^{AB}\left(\mathcal{D}_\mu \overline{\Phi}_A\right) \otimes \left(\left\{I^n{}_\ell\right\} \mathcal{D}^\mu \Phi_B\right) - \left(\overline{\Phi}_A \mathcal{M}\right) \otimes \left(\mathcal{M}\Phi_B\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.95b}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{F} = -\frac{1}{4} K_{ab} V^a{}_{\mu\nu} V^b{}_{\mu\nu} \tag{4.95c}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\mathcal{K}\left(\mathcal{V}_{\mu\nu}, \mathcal{V}^{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{1}{4}c_1 \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\mu\nu}\right\} - \frac{1}{4}c_2 \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}^{\mu\nu}\right\} \cdot \mathrm{tr}\left\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\right\} \ .
\end{aligned}
$$

Der Systemvektor Φ und seine eichkovariante Ableitung $\mathcal{D}_\mu\Phi$

Die Vielteilchenelemente verstehen sich analog zu denen aus Teilkapitel 4.1. Dementsprechend sind die ${\phi^n}_B$ die Unterkomponenten des Zustandsvektors

$$
\Phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^N \end{pmatrix} , \tag{4.96}
$$

die sich jeweils mit einem eigenen Element einer blockdiagonalen Lorentztransformation transformieren. Da es sich hier um N skalare Felder handelt, besteht die reduzierte Form der Lorentztransformation von Φ analog zu (4.11), die jetzt keines der Elemente von Φ mehr mit einem anderen in Beziehung setzt, schlicht aus dem N - dimensionalen $\mathbb{1}_{n\times N}$ - Operator. Im Gegensatz zu (4.5) werden nicht einmal mehr Untergruppen der Komponenten des allgemeinen Zustandstupels gebildet, der *Systemvektor* besteht aus N einzelnen skalaren Feldern, weshalb er auch als *Systemskalar* bezeichnet werden kann. Da somit die Anzahl an Untereinheiten ϕ^n gleich der Zahl der ursprünglichen Komponenten ϕ^j von Φ ist, wird auf ein Versetzung des Indexes n der Untereinheiten, die die Lorentzgruppe in ihrerh reduzierten Form definiert, verzichtet. Dieses ist allerdings eine Besonderheit des Klein - Gordonfalles.
Sollen dem System mehrere Zustände im Sinne einer Betrachtung einer statistischen Gemischformulierung wie im Dichtematrixformalismus der bekannten Theorien zugänglich sein, sind die Systemvektoren Φ noch mit zusätzlichen Zustandsindices A, B, etc. zu versehen: $\Phi \to \Phi_A$; $\phi^n \to {\phi^n}_A$.
Die deutlich stärkere Segmentierung von Φ im Vergleich mit Ψ (4.5), die die Reduktion der Lorentzgruppe hier verursacht, findet sich in der unitären Strukturgruppe des Bündels, in dem Φ lebt, nicht wieder. Sie bleibt diejenige $U(N)$, die sie von Anfang an war. Ein Übergang entsprechend dem, der in (4.12) stattfindet, entfällt, was zur Folge hat, daß eine Notationsänderung nicht stattfindet. (Was für Bosonen, die sich unter der Spin - 1 - Darstellung der Lorentzgruppe transformieren natürlich nicht mehr gilt; skalare Teilchen vereinfachen manche Sachverhalte zu stark, als daß sie als fundamentale Beispiele dienen könnten, auf deren Grundlage die richtigen Verallgemeinerungen für allgemeine Systeme erarbeitet werden können.) Ebensowenig wird die Bezeichnung der Liealgebra $\mathfrak{u}(N)$, die in der eichkovarianten Ableitung von Φ

$$
\mathcal{D}_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + \mathcal{U}_\mu\Phi \tag{4.97a}
$$

$$
\begin{aligned}
D_\mu \phi^n = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^n &= \partial_\mu \phi^n + U^a{}_\mu (\upsilon_a)^n{}_m \phi^m && (4.97b)\\
\mathcal{U}_\mu &= U^a{}_\mu \upsilon_a && (4.97c)\\
\{\upsilon_a\} :&\quad \text{Basis für } \mathfrak{u}(N)\\
a &= 1, \ldots, \dim \mathfrak{u}(N) \ ,
\end{aligned}
$$

durch die Potentiale $\mathcal{U}_\mu$ zum Zuge kommt, geändert.

Die Behandlung der Symmetrien

Nachdem nun klar ist, wie die Symmetriegruppen aus dem Unterkapitel (2.50) über den Diracfall an den Klein - Gordonfall angepaßt werden, brauchen der Feldstärketensor $\mathcal{V}_{\mu\nu}$, seine eichkovariante Ableitung und die des Potentials $\mathcal{U}_\mu$ nicht erneut angegeben werden. Es sind die Ausdrücke (4.14), (4.15) und (4.10) mit der Ersetzung $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times 4}) \to \mathfrak{u}(N)$. Für die sonstigen Symmetriebetrachtungen die in 4.1.1 und 4.1.2angestellt werden gilt dasselbe: Nach Ersetzung der Diracformen der betreffenden Gruppen durch ihre Klein - Gordonform, gelten die bereits angegebenen Ausführungen genauso für den Klein - Gordonfall. Am deutlichsten sichtbar wird die Unterteilung der Strukturgruppe in eine Eichsymmetrie mit Generatoren $\alpha_f \subset \upsilon_a$ und unbeschränkten Gruppenparametern $\Lambda^f(x)$ sowie eine Restsymmetrie mit $\beta_y \subset \upsilon_a$ und beschränkten Gruppenparametern $\Lambda^y(x) = \Lambda^y(x)|_{\text{beschr}}$, $\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}$, wieder in den der daraus folgenden Aufteilung des Potentials $\mathcal{U}_\mu$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_\mu &= \mathcal{A}_\mu + \mathcal{B}_\mu && (4.98a)\\
U^a{}_\mu \upsilon_a &= A^f{}_\mu \alpha_f + B^x{}_\mu \beta_x && (4.98b)\\
a, b, c &= 1, \ldots, \mathrm{dimU}\,(\mathrm{N}) && (4.98c)\\
f, g, h &= 1, \ldots, \mathrm{dimE}\,(\mathrm{N}) && (4.98d)\\
x, y, z &=, \mathrm{dimE}\,(\mathrm{N}) + 1, \ldots, \mathrm{dimU}\,(\mathrm{N}) \ , && (4.98e)
\end{aligned}
$$

und der Feldstärke $\mathcal{V}_{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mu\nu} &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu} && (4.99a)\\
V^a{}_{\mu\nu} \upsilon_a &= F^f{}_{\mu\nu} \alpha_f + G^x{}_{\mu\nu} \beta_x && (4.99b)\\
&= \left(\partial_\mu A^f{}_\nu - \partial_\nu A^f{}_\mu + C^f{}_{ab} U^a{}_\mu U^b{}_\nu\right) \alpha_f\\
&\quad + \left(\partial_\mu B^x{}_\nu - \partial_\nu B^x{}_\mu + C^x{}_{ab} U^a{}_\mu U^b{}_\nu\right) \beta_x \ , && (4.99c)
\end{aligned}
$$

abgesehen von den Folgen für die Noetherströme.
Die Metrik in $\mathfrak{u}(N)$ ist die Liemetrik $\mathcal{K}$ (4.17), die der Verträglichkeitsbedingung (4.19) unterliegt.

Die Metrik $\mathcal{I}$ und die kompakte Form der Lagrangedichte

Im Materieanteil findet auch hier die Vektorfasermetrik $\mathcal{I}$ Eingang, die im Vektorraum des Gesamtvektors $\vec{\Phi}$ definiert ist

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_I \\ \vdots \\ \Phi_K \end{pmatrix} , \tag{4.100}$$

wobei der Ate N skalare Felder enthaltende Zustand in Komponentenform folgendermaßen aussieht

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} \phi^1{}_A \\ \vdots \\ \phi^N{}_A \end{pmatrix} , \tag{4.101}$$

d.h. in kompakter Schreibweise

$$\mathcal{I}\left(\vec{\Phi}, \vec{\Phi}\right) = \phi^*_{nA} I^{ABn}{}_\ell \phi^\ell{}_B \tag{4.102}$$

Die eichkovariante Ableitung von $\vec{\Phi}$ wird als

$$\mathcal{D}_\mu \vec{\Phi} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \Phi_I \\ \vdots \\ \Phi_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_\mu \cdot \mathbb{1}_{N\times N} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{U}_\mu \cdot \mathbb{1}_{N\times N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_I \\ \vdots \\ \Phi_K \end{pmatrix} \tag{4.103}$$

aufgefasst. $\mathcal{M}$ versteht sich in dieser Schreibweise aufgeweitet entsprechend $\mathcal{U}_\mu$. Diese eingeschränkte Wirkungsweise von $\mathcal{U}_\mu$ und $\mathcal{M}$ hängt mit der Aufteilung von $\vec{\Phi}$ in gemischbildende Unterzustände zusammen, wie sie (4.101) zeigt.
$\mathcal{I}$ unterliegt immer noch der metrischen Konsistenzbedingung (4.30a), wie auch $\mathcal{K}$ seiner Konsistenzbedingung (4.19) unterliegt

$$D_\mu I^{ABn}{}_\ell = 0$$
$$D_\mu K_{ab} = 0 \; .$$

Auf diese Metriken und die Begriffe (4.100) - (4.103) gründet sich die die kompakte Schreibweise (4.93) der Lagrangedichte. Hierin kann natürlich $\vec{\Phi}$ durch $\vec{\Phi}_{\mathbb{R}}$ ersetzt werden, analog zu dem Vorgehen ab (4.21) bis (4.28), um mit dem zugehörigen Verständnis von $I^{ABn}{}_\ell$ die Spiegelung $\phi^n \rightarrow \phi^*_n$ durch die Metrik ausdrücken zu können.
Der Spurausdruck (4.94) umfaßt beide Metriken, auch die in der Vektorfaser, basierend auf einem einheitlichen Konstruktionsbegriff.

Zwischenergebnisse der Variation

Die Zwischenergebnisse der Variation von (4.92) nach den beteiligten Feldern lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\ell{}_C} = D^\mu \phi^*_{nA} I^{ACn}{}_m U^a{}_\mu \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell - \phi^*_{nA} M^n{}_k I^{ACk}{}_m M^m{}_\ell \tag{4.104a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{lC}} = -U^a{}_\mu \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_n I^{CBn}{}_m D^\mu \phi^m{}_A - M^\ell{}_k I^{CBk}{}_m M^k{}_m \phi^m{}_B \tag{4.104b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^{c\,\beta}} = D_\beta \phi^*_{nA} I^{ABn}{}_m \left(\upsilon_c\right)^m{}_k \phi^k{}_B - \phi^*_{kA} \left(\upsilon_c\right)^k{}_n I^{ABn}{}_m D_\beta \phi^m{}_B - K_{ab} C^a{}_{cd} U^{d\,\nu} V^b{}_{\beta\nu} \tag{4.104c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi^\ell{}_C\right)} = D^\beta \phi^*_{An} I^{ACn}{}_\ell \tag{4.104d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi^*_{lC}\right)} = I^{CB\ell}{}_m D^\beta \phi^m{}_B \tag{4.104e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\gamma U^{c\,\beta}\right)} = -K_{cb} V^b{}_{\gamma\beta} \tag{4.104f}$$

4.2.2. Die Noetherströme

Die Noetherströme

$$j_{a\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\beta \phi^\ell{}_C\right)} \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_m \phi^m{}_C - \phi^*_{mC} \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\beta \phi^*_{lC}\right)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\beta U^{c\gamma}\right)} \left(\upsilon^{\mathrm{ad}}_a\right)^c{}_b U^{b\gamma} \,, \tag{4.105}$$

lauten vermöge (4.104d) - (4.104f) in kovarianter Form

$$j_{a\beta} = D_\beta \phi^*_{nA} I^{ABn}{}_\ell \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_m \phi^m{}_B - \phi^*_{mA} \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell I^{AB\ell}{}_n D_\beta \phi^n{}_B - K_{dc} C^d{}_{ab} V^c{}_{\beta\gamma} U^{b\gamma} \,, \tag{4.106}$$

und in kontravarianter, erhalten durch Hebung des Liealgebraindexes mit der $\mathfrak{u}(N)$ - Metrik K^{ab}

$$\begin{aligned} j^a{}_\beta &= K^{ab} j_{b\beta} \\ &= D_\beta \phi^*_{nA} I^{ABn}{}_\ell \left(\upsilon^a\right)^\ell{}_m \phi^m{}_B - \phi^*_{mA} \left(\upsilon^a\right)^m{}_\ell I^{AB\ell}{}_n D_\beta \phi^n{}_B + C^a{}_{bc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} \,. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Sie teilen sich folgendermaßen in einen Materie - und einen Feldanteil:

$$j_{a\beta} = k_{a\beta} + l_{a\beta} = K_{ab} k^b{}_\beta + K_{ab} l^b_\beta \tag{4.108a}$$

$$\begin{aligned} k_{a\beta} &= D_\beta \phi^*_{An} I^{ABn}{}_\ell \left(\upsilon_a\right)^\ell{}_m \phi^m{}_B - \phi^*_{mA} \left(\upsilon_a\right)^m{}_\ell I^{AB\ell}{}_n D_\beta \phi^n{}_B \\ &= K_{ab} \left(D_\beta \phi^*_{An} I^{ABn}{}_\ell \left(\upsilon^b\right)^\ell{}_m \phi^m{}_B - \phi^*_{mA} \left(\upsilon^b\right)^m{}_\ell I^{AB\ell}{}_n D_\beta \phi^n{}_B \right) \end{aligned} \tag{4.108b}$$

$$l_{a\beta} = C_{abc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} = K_{da} C^d{}_{bc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} \tag{4.108c}$$

Das Noethertheorem garantiert die Erhaltung der Ströme (4.106)

$$\partial^\beta j_{a\beta} \equiv 0 \ , \tag{4.109}$$

was gleichermaßen für die kontravarianten Ströme $j^a{}_\beta$ gilt

$$\partial^\beta j^a{}_\beta \equiv 0 \ . \tag{4.110}$$

Gilt nur $\mathcal{D}_\mu k_{a\beta} = 0$ und nicht schon $\partial_\mu K_{ab}$, greift dieselbe Argumentation wie nach (4.55), um aus (4.109) (4.110) abzuleiten.
Die Gliederung (4.58) der Strukturgruppe führt zu einem Satz von *Eichströmen*

$$\begin{aligned} j_{f\beta} &= k_{f\beta} + l_{f\beta} \\ &= D_\beta \phi^*_{An} I^{ABn}{}_\ell \left(\alpha_f\right)^\ell{}_m \phi^m{}_B - \phi^*_{mA} \left(\alpha_f\right)^m{}_\ell I^{AB\ell}{}_n D_\beta \phi^n{}_B + C_{fbc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} \qquad (4.111a) \\ \alpha_f &= \upsilon_f \\ f &= 1, \ldots, \dim E\left(N\right) \ , \end{aligned}$$

und einem Satz von *Strömen der Restsymmetrie*

$$\begin{aligned} j_{x\beta} &= k_{x\beta} + l_{x\beta} \\ &= D_\beta \phi^*_{An} I^{ABn}{}_\ell \left(\beta_x\right)^\ell{}_m \phi^m{}_B - \phi^*_{mA} \left(\beta_x\right)^m{}_\ell I^{AB\ell}{}_n D_\beta \phi^n{}_B + C_{xbc} U^{b\gamma} V^c{}_{\gamma\beta} \qquad (4.112a) \\ \beta_x &= \upsilon_x \\ x &= \dim E\left(N\right) + 1, \ldots, \dim U\left(N\right) \ . \end{aligned}$$

Die kontravarianten Ströme (4.107) sind die Quellen der Divergenzgleichungen für die $V^a{}_{\mu\nu}$; nach deren Unterteilung in $F^f{}_{\mu\nu}$ und $G^y{}_{\mu\nu}$ sind die Quellen für die $F^f{}_{\mu\nu}$ die kontravarianten Versionen von (4.111a), die der $G^y{}_{\mu\nu}$ die $j^y{}_\beta = K^{yb} j_{b\beta}$ aus (4.112a)

4.2.3. Die Bewegungsgleichungen

Die Klein - Gordongleichungen

Anwendung von (4.104b) und (4.104e) macht die Euler - Lagrangegleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\ell{}_C} - \partial_\beta \left(\frac{\mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi^\ell{}_C\right)} \right) = 0 \ , \tag{4.113}$$

zu

$$D^\beta D_\beta \phi^\ell{}_B - M^\ell{}_m M^m{}_k \phi^k{}_B = 0 \ . \tag{4.114}$$

Ebenso wird aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\ell{}_C} - \frac{\mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi^\ell{}_C\right)} = 0 \ , \tag{4.115}$$

mit (4.104a) und (4.104d)

$$D^\beta D_\beta \phi^*_{lA} - \phi^*_{mA} M^m{}_n M^n{}_\ell = 0 \ . \tag{4.116}$$

Dabei sind die Bedingungen (4.19) und (4.30a) zu beachten, sowie daß i.A. $I^{ABn}{}_\ell \neq 0$ gilt. Auch die Forderung $\left[\mathcal{M}, \left\{I^{ABn}{}_\ell\right\}\right] = 0$ ist zu beachten. Da $\mathcal{M}$ immer diagonal gewählt wird (der Gedanke an nichtdiagonale Massenterme mag reizvoll sein, hat sich bisher aber als nicht notwendig erwiesen) , stellt diese Forderung keine allzu große Einschränkung dar.

Die Yang - Millsgleichungen

Die Potentiale erfüllen wegen (4.104c), (4.104f) und (4.107)

$$\frac{\mathcal{L}}{\partial U^{c\,\beta}} - \partial_\beta \left(\frac{\mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\gamma U^{c\,\beta} \right)} \right) = 0 \ , \tag{4.117}$$

als

$$\partial^\gamma V^a{}_{\gamma\beta} = -j^a{}_\beta \ . \tag{4.118}$$

Die Potentialanteile $l^a{}_\beta = K^{ab} j_{b\beta}$ von $j^a{}_\beta$ sind genau der Kommutatoranteils der eichkovarianten Divergenz von $V^a{}_{\gamma\beta}$, so daß (4.117) auch kompakter geschrieben werden kann:

$$D^\gamma V^a{}_{\gamma\beta} = -k^a{}_\beta \ . \tag{4.119}$$

Ein Massenfaktor der $\frac{1}{M_k}$ kann für massive Bosonen mittels der Metrik $\mathcal{I}$ in die Ströme eingeführt werden $I^{ABn}{}_\ell \rightarrow \frac{1}{M_k} I^{ABn}{}_\ell$.
Die Aufteilung der Generatoren der Gruppe $U(N)$ in $\{\upsilon_a\} \rightarrow \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}$ zeigt sich wie im Diracfall in der Aufteilung der Yang - Millsgleichungen (4.118)

$$\partial^\gamma F^f{}_{\gamma\beta} = -j^f{}_\beta \tag{4.120a}$$

$$\partial^\gamma G^y{}_{\gamma\beta} = -j^y{}_\beta \ . \tag{4.120b}$$

Außer in den Generatoren und den Kommutatortermen findet sich im Klein - Gordon - Fall die Unterteilung der Eichgruppe auch in den eichkovarianten Ableitungen von Φ in den Quellen der Feldstärken wieder: $\partial_\mu \Phi + \mathcal{U}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \mathcal{A}_\mu \Phi + \mathcal{B}_\mu \Phi$.

4.2.4. Der Energie - Impulstensor

Die allgemeine Definition der kanonischen Energie - Impuls - Dichte

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\alpha \phi^\ell{}_C \right)} \partial_\beta \phi^\ell{}_C + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\alpha \phi^*_{lC} \right)} \partial_\beta \phi^*_{lC} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\alpha U^{b\gamma} \right)} \partial_\beta U^{b\gamma} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} \ , \tag{4.121}$$

wird durch (4.104d) - (4.104f) zu

$$\Theta_{\alpha\beta} = D_\alpha \phi^*_{An} I^{ABn}{}_\ell \partial_\beta \phi^\ell{}_B + \partial_\beta \phi^*_{lA} I^{AB\ell}{}_m D_\alpha \phi^m{}_B - K_{ab} V^a{}_{\alpha\gamma} \partial_\beta U^{b\gamma} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} \ . \tag{4.122}$$

Deren ausbleibende Symmetrie wird durch die Addition des belinfanteschen Divergenztermes

$$K_{ab}\partial^\sigma\left(V^b{}_{\alpha\sigma}U^a{}_\beta\right) = K_{ab}\left(K^{bc}j_{c\alpha}U^a{}_\beta + C^b{}_{de}U^{d\nu}V^e{}_{\alpha\nu}U^a{}_\beta + V^b{}_{\alpha\sigma}\partial^\sigma U^a{}_\beta\right)\ , \tag{4.123}$$

erreicht:

$$T_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} + K_{ab}\partial^\sigma\left(V^b{}_{\alpha\sigma}U^a{}_\beta\right) \tag{4.124a}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= D_\alpha\phi^*_{nA}I^{ABn}{}_\ell D_\beta\phi^\ell{}_B + D_\beta\phi^*_{nA}I^{ABn}{}_\ell D_\alpha\phi^\ell{}_B \\ &\quad + g_{\alpha\beta}\left(I^{ABn}{}_\ell D^\mu\phi^*_{nA}D_\mu\phi^\ell{}_B - \phi^*{}_{Al}M^\ell{}_k\mathcal{I}^{ABk}{}_m M^m{}_n\phi^n{}_B\right) \\ &\quad + K_{ab}\left(V^a{}_{\alpha\gamma}V^{b\gamma}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}V^{a\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu}\right)\ . \end{aligned} \tag{4.124b}$$

$T_{\alpha\beta}$ zeigt die übliche Aufteilung in einen Materieanteil und einen Feldanteil:

$$T_{\alpha\beta} = T^{(\mathrm{M})}_{\alpha\beta} + T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} \tag{4.125a}$$

$$\begin{aligned} T^{(\mathrm{M})}_{\alpha\beta} &= D_\alpha\phi^*_{nA}I^{ABn}{}_\ell D_\beta\phi^\ell{}_B + D_\beta\phi^*_{nA}I^{ABn}{}_\ell D_\alpha\phi^\ell{}_B \\ &\quad + g_{\alpha\beta}\left(I^{ABn}{}_\ell D^\mu\phi^*_{nA}D_\mu\phi^\ell{}_B - \phi^*{}_{Al}M^\ell{}_k\mathcal{I}^{ABk}{}_m M^m{}_n\phi^n{}_B\right) \end{aligned} \tag{4.125b}$$

$$T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} = K_{ab}\left(V^a{}_{\alpha\gamma}V^{b\gamma}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}V^{a\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu}\right)\ . \tag{4.125c}$$

Außer in der eichkovarianten Ableitung $\partial_\mu\Psi + \mathcal{U}_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + \mathcal{A}_\mu\Psi + \mathcal{B}_\mu\Psi$ zeigt sich der Vorgang (4.58) besonders im Feldanteil $T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta}$

$$T^{(\mathrm{F})}_{\alpha\beta} = K_{fg}\left(F^a{}_{\alpha\gamma}F^{g\gamma}{}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{f\mu\nu}F^g{}_{\mu\nu}\right) + K_{xy}\left(G^x{}_{\alpha\gamma}G^{y\gamma}_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}G^{x\mu\nu}G^y{}_{\mu\nu}\right)\ . \tag{4.126}$$

Der Übergang zur **Hamiltondichte** (nicht zur Hamiltonschen 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$!) geschieht mit den kanonisch konjugierten Impulsdichten

$$\pi_{\phi^\ell{}_C} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\,\phi^\ell{}_C\right)} = D^0\phi^*_{An}I^{ACn}{}_\ell \tag{4.127a}$$

$$\pi_{\phi^*_{lC}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\,\phi^*_{lC}\right)} = I^{CB\ell}{}_m D^0\phi^m{}_B \tag{4.127b}$$

$$\pi_{U^{c\beta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 U^{c\beta}\right)} = -K_{cb}V^{b0}{}_\beta\ , \tag{4.127c}$$

$$\mathcal{H} = \pi_{\phi^\ell{}_C}\partial_0\,\phi^\ell{}_C + \pi_{\phi^*{}_{lC}}\partial_0\,\phi^*_{lC} + \pi_{U^{c\beta}}\partial_0 U^{c\beta} - \mathcal{L} \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned} &= \partial^0\phi^*_{nA}\partial_0 I^{ABn}{}_\ell\phi^\ell{}_B + \phi^*_{mA}\left(\mathcal{U}\right)^m{}_n I^{ABn}{}_\ell\left(\mathcal{U}\right)^\ell{}_k\phi^k{}_B - D^i\phi^*_{nA}D_I\phi^\ell{}_B \\ &\quad + \phi^*_{mA}M^m{}_n I^{ABn}{}_\ell M^\ell{}_k\phi^k{}_B + K_{ab}\left(\frac{1}{4}V^{a\mu\nu}V^b{}_{\mu\nu} - V^{a0}{}_\beta U^{b\beta}\right)\ . \end{aligned} \tag{4.129}$$

Der Vergleich mit $\Theta^0{}_0 = g^{0\mu}\Theta_{\mu 0}$ aus (4.122) zeigt deren Übereinstimmung

$$\mathcal{H} = \Theta^0{}_0 = g^{0\mu}\Theta_{\mu 0} \ . \tag{4.130}$$

Mithin kann die Hamiltondichte als Energiedichte angesehen werden.

4.2.5. Die Drehimpulsdichte

Zum Schluß soll die Aufmerksamkeit der Drehimpulsdichte gewidmet werden. Sie gewinnt ihre Klein - Gordonform aus der allgemeinen Definition

$$\begin{aligned} M_{\lambda\alpha\beta} = & \frac{\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda \phi^\ell{}_C\right)} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) \phi^\ell{}_C + \frac{\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda \phi^*_{lC}\right)} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) \phi^*_{lC} \\ & + \frac{\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda U^{c\mu}\right)} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) U^{c\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\lambda U^{c\mu}\right)} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu} \ , \end{aligned} \tag{4.131}$$

durch (4.104d) - (4.104f)

$$\begin{aligned} M_{\lambda\alpha\beta} = & D_\lambda \phi^*_{An} I^{ACn}{}_\ell \cdot \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) \phi^\ell{}_C + \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) \phi^*_{lC} \cdot I^{CB\ell}{}_m D_\lambda \phi^m{}_B \\ & - K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) U^{c\mu} - K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu} \ . \end{aligned} \tag{4.132}$$

Wer sich den Spaß nicht nehmen lassen will, die Aufteilung von (4.132) in einen Materie - und eine Feldanteil selber zu erraten, sollte die folgenden Zeilen nicht lesen:

$$M_{\lambda\alpha\beta} = M^{\mathrm{M}}_{\lambda\alpha\beta} + M^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} \tag{4.133a}$$

$$M^{\mathrm{M}}_{\lambda\alpha\beta} = D_\lambda \phi^*_{An} I^{ACn}{}_\ell \cdot \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) \phi^\ell{}_C + \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) \phi^*_{lC} \cdot I^{CB\ell}{}_m D_\lambda \phi^m{}_B \tag{4.133b}$$

$$M^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) U^{c\mu} - K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu} \ . \tag{4.133c}$$

Naturgemäß beinhaltet hier nur der Feldanteil einen Spindrehimpuls:

$$M^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} = L^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} + S^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} \tag{4.134a}$$

$$L^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) U^{c\mu} \tag{4.134b}$$

$$S^{\mathrm{F}}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{cb} V^b{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) U^{c\nu} \ . \tag{4.134c}$$

Auch hier spiegelt sich im Feldanteil die Symmetrieaufteilung (4.58) am deutlichsten wider

$$L^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{fg} F^g{}_{\lambda\mu} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) A^{f\mu} - K_{xy} G^y{}_{\lambda\mu} \left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) B^{x\mu} \tag{4.135a}$$

$$S^{(\mathrm{F})}_{\lambda\alpha\beta} = -K_{fg} F^g{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) A^{f\nu} - K_{xy} G^y{}_{\lambda\mu} \left(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_\beta{}^\mu\right) B^{x\nu} \ . \tag{4.135b}$$

Anteile mit den Metrikkoeffizienten K_{fx} entfallen wegen der Notwendigkeit beim Wechsel zwischen ko - und kontravarianter Schreibweise die Eichgeneratoren υ_f und die Austauschgeneratoren υ_x, bzw. υ^f und υ^x, nicht zu mischen.

5. Systeme dreier Fermionen

In diesem Kapitel werden an einem Modellsystem detailliert alle diejenigen Eigenschaften der Theorie ausgearbeitet, die im letzten Kapitel in allgemeiner Form bereits angelegt wurden. Das betrifft vor allem den zentralen Punkt der Aufteilung der Symmetrie der Theorie aus Teilkapitel 4.1.2 in eine volle lokale Eichsymmetrie und eine eingeschränkte lokale Restsymmetrie und die Auswirkungen diese Vorganges auf die Aussagekraft der RST, d.h. die Ausdrücke für Meßgrößen in der RST und ihre Interpretation. Die meiste Aufmerksamkeit sollte dabei die Tatsache in 5.1.5 genießen, daß die Verankerung des Begriffes eines einzelnen (vereinzelten) Teilchens in der Eichsymmetrie des Systems eine Einschränkung der Restsymmetrie nach sich zieht, die diese zu einer Austauschsymmetrie macht, d.h. Austauschphänomene erhalten ohne weiteres Postulat in die Theorie Einzug.
Dieser Vorgang kann natürlich nur anhand eines konkreten Modells ausgearbeitet werden, da hierbei die konkrete Form der Eichgruppe und der Restsymmetrie, die sie übrig läßt, eine tragende Rolle spielen; wie sehr, zeigt der Vergleich der hier verwendeten Aufteilung der $U(3_{4\times4})$ mit der bekannten Aufteilung in $U(\mathbb{1}_{12\times12}) \times SU(3_{4\times4})$ in Unterkapitel 5.4.
Das gewählte Beispiel ist ein System aus drei Elektronen, also dreier bezüglich Masse und Ladung gleicher Fermionen, die elektromagnetisch miteinander wechselwirken. Das Beispiel ist ideal, weil ein Dreiteilchensystem bereits allgemein genug ist, um auch die Fälle mit höherer Teilchenzahl zu erschließen, wie das Beispiel des streng paarweisen Charakters der Austauschwechselwirkung zeigen wird, da er erst ab drei Spinoren auch wirklich als paarweise auffallen kann. Einem Zweiteilchensystem ist diese Möglichkeit naturgemäß nicht gegeben. Andererseits ist ein Dreiteilchensystem noch recht gut handhabbar im Vergleich zum formalen Aufwand, der bei höherer Dimension der Spinorfaser getrieben werden muß.
Was für die Spinorfaser gilt, ist auch für die Strukturgruppe richtig. Deren Aufteilung in eine volle $U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$ - Eichsymmetrie und die Restsymmetrie $U(3_{4\times4}) \setminus (U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}))$ macht bereits alle wichtigen Züge dieses für die RST grundlegend typischen Vorganges klar. Auf dieser Grundlage wird dann auch ersichtlich, wie Systeme zu behandeln sind, die beim Aufbau der Eichgruppe anstatt der einfachen Gruppe $U(\mathbb{1}_{4\times4})$, die nur einen Spinor betrifft, höhere Gruppen wie z.B. die Gruppe $U(\mathbb{1}_{12\times12}) \times SU(3_{4\times4})$ erfordern, die eine Gruppe von drei Spinoren anspricht; mit anderen Worten, wie Systeme zu behandeln sind, deren einzelne Zustände selber eine Unterstruktur besitzen. Unterkapitel 5.4 befaßt sich damit, zusammen mit den bereits angesprochenen Fragen, die im Zusammenhang mit der Aufteilung der Gruppe $U(3_{4\times4})$

zu $U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times SU(3_{4\times4})$ und der RST enstehen.
Vor diesem Abschluß des Kapitels werden noch die Auswirkungen der Nebenbedingungen, denen die Spinormetrik $\mathcal{I}$ und die Massenmatrix $\mathcal{M}$ unterliegen, auf die zuvor ausgearbeitete Begriffswelt des betrachteten Modellsystems gezeigt. Besonders erbaulich ist dabei, daß mit den Komponenten $I^n{}_\ell$ von $\mathcal{I}$ und $M^n{}_l$ von $\mathcal{M}$ die Ladungen und Massen der Teilchen verändert werden können, wobei durch die Bedingungen, denen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{M}$ unterliegen, automatisch die Austauschsymmetrie zwischen den nun ungleichen Teilchen unterbunden wird; eine zusätzliche Annahme oder Postulat für die Behandlung ungleicher Teilchen ist also ebensowenig notwendig wie für die gleicher Teilchen.
Die Möglichkeit, die Spinoren des Systems unterschiedlich im Formalismus auftreten zu lassen, die die $I^n{}_\ell$ bieten, sind so weitreichend, daß sie wahrscheinlich die Grundlage für den Einbau der Beschreibung von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen in die RST darstellen; Unterkapitel 5.3 beschäftigt sich mit diesem Ausblick. Generell wird in den letzten Unterkapiteln die Tendenz, neben dem gesicherten Stand der Theorie auch Anknüpfungspunkte für weitere Entwicklungen zu zeigen, zunehmend stärker.

5.1. Drei Fermionen gleicher Masse und Ladung

Zuerst werden in 5.1.1 mit der Anzahl an verwendeten Spinoren, den Einträgen der Massenmatrix $\mathcal{M}$ und den Komponenten von $I^{ABn}{}_\ell$ die grundlegenden Charakteristika des Systems festgelegt. Aus der Dimension von Ψ und seiner Unterteilung durch die Lorentzgruppe folgt dann auch selbiges für die unitären Gruppe. Deren Aufteilung in volle Eichsymmetrien und eingeschränkte Restsymmetrien beantwortet zunächst nur die Frage nach der Art der Eichwechselwirkungen. Bevor der Charakter der Restsymmetrie im Teilkapitel 5.1.2 anhand ihrer dort gezeigten Wirkungen auf das System erst plausibel und im Teilkapitel 5.1.5 durch ihre sich hier ergebenden notwendigen Einschränkung streng als Austauschsymmetrie begründet wird, werden zuvor die Charakteristika in den allgemeinen Formalismus aus Kapitel 4.1 eingearbeitet.
Zuerst erhalten $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^{-1}$ ihr Aussehen entsprechend der für $\mathfrak{u}(3_{4\times4}) \subset \mathfrak{gl}(3_{4\times4})$ gewählten Basis. Mit ihr ist es auch möglich, eine konkrete Form für die eichkovarianten Ableitungen der Spinoren, der Feldstärken und natürlich die Feldstärken selber anzugeben, da das (Struktur-)Potential $\mathcal{U}_\mu$ nach ihr entwickelt werden kann.
Selbiges gilt in 5.1.3 für die Ströme, in 5.1.4 für die Bewegungsgleichungen und für die konkrete Form des Energie-Impulstensors in 5.1.6. Als beobachtbare Größe ist er von den Folgen aus 5.1.5 über die Normierung der Ströme besonders betroffen, was sich in entsprechenden Beiträgen in diesem, dieses Unterkapitel abschließende, Teilkapitel niederschlägt.

5.1.1. Die Festlegung der Spinorfaser, der Spinormetrik, der Symmetrieaufteilung und der Liemetrik

Die Dimension der Spinorfaser, die Teilchenmassen und das Aussehen der Spinormetrik

Da ein System, bestehend aus drei Fermionen, beschrieben werden soll, weist Ψ_B drei Spinoren auf. Eine Gemischbeschreibung ist für das System nicht vorgesehen, weshalb der Mischungsindex B entfällt:

$$\Psi = \begin{pmatrix} {}^1\psi \\ {}^2\psi \\ {}^3\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \\ \psi^5 \\ \psi^6 \\ \psi^7 \\ \psi^8 \\ \psi^9 \\ \psi^{10} \\ \psi^{11} \\ \psi^{12} \end{pmatrix} . \tag{5.1}$$

Die ersten vier Komponenten bilden den Spinor ${}^1\psi$, die Komponenten fünf bis acht den Spinor ${}^2\psi$ und die Komponenten neun bis zwölf den Spinor ${}^3\psi$:

$${}^1\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \tag{5.2a}$$

$${}^2\psi = \begin{pmatrix} \psi^5 \\ \psi^6 \\ \psi^7 \\ \psi^8 \end{pmatrix} \tag{5.2b}$$

$${}^3\psi = \begin{pmatrix} \psi^9 \\ \psi^{10} \\ \psi^{11} \\ \psi^{12} \end{pmatrix} . \tag{5.2c}$$

Alle drei Spinoren sollen Teilchen konstanter und gleicher Masse entsprechen

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \begin{pmatrix} M^1{}_1\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & M^2{}_2\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & M^3{}_3\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & M\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & M\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \\ &= M \cdot \mathbb{1}_{12\times12} \ , \end{aligned} \tag{5.3}$$

wodurch sofort die Bedingung (2.56b) an den Massenoperator $\mathcal{M}$ erfüllt ist. Wegen der fehlenden Mischung kann von den I^{AB} aus (4.27) nur ein Element der Hauptdiagonalen ungleich Null sein

$$I^{II} = 1 \tag{5.4a}$$

$$I^{AB} = 0 \ \text{ für } \ A, B \neq I \ . \tag{5.4b}$$

Der Anteil $I^n{}_\ell$ besitzt die einfache Struktur konstanter und gleicher Einträge

$$I^n{}_\ell = \delta^n{}_l \mathbb{1}_{4\times4} \tag{5.5a}$$

$$n, l = 1, 2, 3 \quad , \tag{5.5b}$$

womit (4.30) sofort für die Gruppe $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ erfüllt ist, der maximal möglichen Symmetriegruppe für drei Spinoren.

Die kovarianten Generatoren $\boldsymbol{v_a}$ der $\boldsymbol{U}\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Struktur

Die Liealgebra $\mathfrak{u}\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ wird von den Generatoren v_a, $a = 1, \ldots, 9$ aufgespannt, die sich aufteilen in die aktiven Eichgeneratoren der elektromagnetischen Wechselwirkung $U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)$

$$\alpha_1 = v_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & -i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.6a}$$

$$\alpha_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.6b}$$

$$\alpha_3 = v_3 = \begin{pmatrix} -i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & -i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.6c}$$

und die der passiven Austauschgeneratoren von $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) \backslash \left(U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\right)$

$$v_4 = \beta_4 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.7a}$$

$$\upsilon_5 = \beta_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ -i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.7b}$$

$$\upsilon_6 = \beta_6 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & -i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.7c}$$

$$\upsilon_7 = \beta_7 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \beta_4^\dagger \tag{5.7d}$$

$$\upsilon_8 = \beta_8 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & i\mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \beta_5^\dagger \tag{5.7e}$$

$$\upsilon_9 = \beta_9 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ i\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \beta_6^\dagger\,. \tag{5.7f}$$

Auf Grund der Diagonalität der Spinormetrik $\mathcal{I}$ (5.5) bleibt die Beschreibung der Austauschwechselwirkung allein den Generatoren β_x, $x = 4, \ldots, 9$ und ihren Koeffizienten ${B^x}_\mu$ vorbehalten.
Augenscheinlich sind vor allem die Austauschgeneratoren (5.7a) - (5.7f) nicht in der üblichen antihermiteschen Darstellung der $\mathfrak{u}(3, \mathbb{C})$ angegeben, sondern in einer Variante der $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ - Basis aus [4] in ihrer Diracversion gemäß (4.12) mit $\alpha_1 = -\upsilon_{11}$, $\alpha_2 = -\upsilon_{22}$, $\alpha_3 = -\upsilon_{33}$ und $\beta_4 = -\upsilon_{23}$, $\beta_5 = -\upsilon_{31}$, $\beta_6 = -\upsilon_{12}$, $\beta_7 = \upsilon_{32}$, $\beta_8 = \upsilon_{13}$, $\beta_9 = \upsilon_{21}$. Deswegen haben die Entwicklungskoeffizienten $\frac{e}{4\pi}{A^1}_\mu$, $\frac{e}{4\pi}{A^2}_\mu$, $\frac{e}{4\pi}{A^3}_\mu$ und $\frac{e}{4\pi}{B^4}_\mu, \ldots, \frac{e}{4\pi}{B^9}_\mu$[§]in

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_\mu &= \frac{e}{4\pi}{U^a}_\mu \upsilon_a = \frac{e}{4\pi}{A^f}_\mu \alpha_f + \frac{e}{4\pi}{B^x}_\mu \beta_x \qquad (5.8a)\\
&= \frac{e}{4\pi}\left({A^1}_\mu\alpha_1 + {A^2}_\mu\alpha_2 + {A^3}_\mu\alpha_3 + {B^4}_\mu\beta_4 + {B^5}_\mu\beta_5 + {B^6}_\mu\beta_6 + {B^7}_\mu\beta_7 + {B^8}_\mu\beta_8 + {B^9}_\mu\beta_9\right)\\
&= \frac{e}{4\pi}\left({A^1}_\mu\alpha_1 + {A^2}_\mu\alpha_2 + {A^3}_\mu\alpha_3 + {B^4}_\mu\beta_4 + {B^5}_\mu\beta_5 + {B^6}_\mu\beta_6 + {B^7}_\mu\beta_4^\dagger + {B^8}_\mu\beta_5^\dagger + {B^9}_\mu\beta_6^\dagger\right)
\end{aligned}$$

[§]Die Koppelungskonstanten werden als Teil der Entwicklungskoeffizienten angesehen. In Kapitel 4 ist ihr explizites Erscheinen noch nicht notwendig, weshalb die Koeffizienten nicht ausführlich angegeben wurden. Bei einem konkreten Modellsystem ist ihr Auftreten natürlich zwingend. Die Notation ${U^a}_\mu$ geht jetzt also in $\frac{e}{4\pi}{U^a}_\mu$ über.

$$a = 1, \ldots, 9$$
$$f = 1, 2, 3$$
$$x = 4, \ldots, 9 \quad ,$$

für die Gültigkeit von $\overline{\mathcal{U}_\mu} = -\mathcal{U}_\mu$ die Bedingungen (2.29a) und (2.29b) zu befolgen:

$$A^{f*}{}_\mu = A^f{}_\mu \in \mathbb{R} \tag{5.9a}$$
$$B^{4/5/6*}{}_\mu = -B^{7/8/9}{}_\mu \; . \tag{5.9b}$$

Die nichtverschwindenden $\mathfrak{gl}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ - Strukturkonstanten dieser Darstellung von $\mathfrak{u}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ sind:

$$C^1{}_{58} = i \qquad C^1{}_{69} = -i \tag{5.10a}$$
$$C^2{}_{47} = -i \qquad C^2{}_{69} = i \tag{5.10b}$$
$$C^3{}_{47} = i \qquad C^3{}_{58} = -i \tag{5.10c}$$
$$C^4{}_{24} = i \qquad C^4{}_{34} = -i \qquad C^4{}_{89} = i \tag{5.10d}$$
$$C^5{}_{15} = -i \qquad C^5{}_{35} = i \qquad C^5{}_{79} = -i \tag{5.10e}$$
$$C^6{}_{16} = i \qquad C^6{}_{26} = -i \qquad C^6{}_{78} = i \tag{5.10f}$$
$$C^7{}_{27} = -i \qquad C^7{}_{37} = i \qquad C^7{}_{56} = i \tag{5.10g}$$
$$C^8{}_{18} = i \qquad C^8{}_{38} = -i \qquad C^8{}_{46} = -i \tag{5.10h}$$
$$C^9{}_{19} = -i \qquad C^9{}_{29} = i \qquad C^9{}_{45} = i \; . \tag{5.10i}$$

Die Liemetrik $\mathcal{K}$

Vermöge (5.6a) - (5.7f) erhält die Liemetrik $\mathcal{K}$ (4.18),

$$K_{ab} = c_1 \mathrm{tr}\,\{v_a v_b\} + c_2 \mathrm{tr}\,\{v_a\}\,\mathrm{tr}\,\{v_b\} \quad ,$$

die folgende Form

$$\mathcal{K} = \{K_{ab}\} = \begin{pmatrix} -8c_1 - 64c_2 & -4c_1 - 64c_2 & -4c_1 - 64c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4c_1 - 64c_2 & -8c_1 - 64c_2 & -4c_1 - 64c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4c_1 - 64c_2 & -4c_1 - 64c_2 & -8c_1 - 64c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{5.11}$$

mit der Inversen $\mathcal{K}^{-1} = \left\{K^{ab}\right\}$

$$\mathcal{K}^{-1} = \left\{K^{ab}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{-3c_1-32c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & \frac{c_1+16c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & \frac{c_1+16c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1+16c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & \frac{-3c_1-32c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & \frac{c_1+16c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1+16c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & \frac{c_1+16c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & \frac{-3c_1-32c_2}{16\left(c_1^2+12c_1c_2\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4c_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4c_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4c_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.12}$$

Damit die inverse Abbildung überhaupt existiert muß die Determinante von $\mathcal{K}$ ungleich Null sein

$$\det \mathcal{K} = -256 c_1^2 \left(c_1 + 12 c_2\right) \neq 0 \;, \tag{5.13}$$

weshalb für die Konstanten c_1 und c_2 der Zusammenhang

$$c_1 = -12 c_2 \tag{5.14}$$

untersagt ist.
Des weiteren gelten zwischen den Komponenten der Metriken offensichtlich die Beziehungen

$$K^{11} = K^{22} = K^{33} \tag{5.15a}$$

$$K^{ab} = K^{ba} \quad , \quad a \neq b \tag{5.15b}$$

$$K^{11} - K^{12} = -\frac{1}{4c_1} = -K^{47} \tag{5.15c}$$

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} \tag{5.15d}$$

$$K_{ab} = K_{ba} \quad , \quad a \neq b \tag{5.15e}$$

$$K_{11} - K_{12} = -4c_1 = -K^{47} \; . \tag{5.15f}$$

Die kontravarianten Generatoren υ^a der $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$ - Symmetrie

Da die Metrik $\mathcal{K}$ der Liealgebra $\mathfrak{u}(3, \mathbb{C})$ nicht kroneckerdeltaförmig ist, besitzen die Liealgebra und ihr dualer Vektorraum unterschiedliche Basen $\{\upsilon_a\}$ und $\{\upsilon^a\}$. Letztere hängt mit ersterer über

$$\upsilon^a = K^{ab} \upsilon_b \tag{5.16}$$

zusammen. Aus (5.6a) - (5.7f) wird dann mit (5.12) die folgende Menge von Basisvektoren:

$$\upsilon^1 = \alpha^1 = \begin{pmatrix} -i\left(K^{12}+K^{13}\right)\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & -i\left(K^{11}+K^{13}\right)\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\left(K^{11}+K^{12}\right)\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.17a}$$

$$\upsilon^2 = \alpha^2 = \begin{pmatrix} -i\left(K^{22}+K^{23}\right)\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & -i\left(K^{21}+K^{23}\right)\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\left(K^{21}+K^{22}\right)\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.17b}$$

$$\upsilon^3 = \alpha^3 = \begin{pmatrix} -i\left(K^{32}+K^{33}\right)\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & -i\left(K^{31}+K^{33}\right)\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\left(K^{31}+K^{32}\right)\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.17c}$$

$$\upsilon^4 = \beta^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & iK^{47}\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \upsilon^{7\dagger} = K^{47}\upsilon_7 \tag{5.17d}$$

$$\upsilon^5 = \beta^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & iK^{58}\mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \upsilon^{8\dagger} = K^{58}\upsilon_8 \tag{5.17e}$$

$$\upsilon^6 = \beta^6 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ iK^{69}\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \upsilon^{9\dagger} = K^{69}\upsilon_9 \tag{5.17f}$$

$$\upsilon^7 = \beta^7 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -iK^{74}\mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \upsilon^{4\dagger} = K^{74}\upsilon_4 \tag{5.17g}$$

$$\upsilon^8 = \beta^8 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ -iK^{85}\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \upsilon^{5\dagger} = K^{85}\upsilon_5 \tag{5.17h}$$

$$\upsilon^9 = \beta^9 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & -iK^{96}\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix} = \upsilon^{6\dagger} = K^{96}\upsilon_6 \ . \tag{5.17i}$$

Die Elemente K^{ab} können (5.12) entnommen werden.
Die wesentliche Änderung gegenüber der Basis (5.6a) - (5.7f) vollzieht sich in den Generatoren α^f, $f = 1,2,3$, der aktiven Eichgeneratoren, wohingegen der Satz der β^x, abgesehen von Faktor $K^{u(u+3)} = K^{(u+3)u} = \frac{1}{4c_1}$; $u = 4,5,6$; lediglich aus paarweiser Umbenennung der hermetischen Paare β_u, β_{u+3}, $u = 4,5,6$, besteht. Weiterhin ist zu beachten, daß durch K^{ab} die Generatoren der Eichwechselwirkung und die der Restsymmetrie nicht miteinander vermischt werden; gleiches gilt für K_{ab}. Diese, hier erfüllte, allgemeine Vorgabe an die Metrik und ihre Inverse ist zwingend, denn die Symmetrieverminderung der vollen lokalen Strukturgruppe $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ in einen unbeschränkten Eichanteil $E(\mathfrak{Z}_{4\times4}) = \exp\left\{\Lambda^f(x)\alpha_f\right\}$ und einen beschränkten Restsymmetrieanteil $U(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \setminus E(\mathfrak{Z}_{4\times4}) = \exp\{\Lambda^x\beta_x\}$, $\Lambda^x \neq \Lambda^x(x)$ ist streng einzuhalten, wegen der unterschiedlichen Aufgaben, die beiden Teilen zukommt.
Mit Hilfe der kontravarianten Generatoren können die Ströme ${j^a}_\mu$ direkt aus (4.53) konstruiert werden, ohne den Umweg über die Umwandlung $K^{ab}j_{\beta\mu}$ ihrer kovarianten Form nehmen zu müssen.
Weiterhin kann $\mathcal{U}_\mu$ anstatt nach (5.6a) - (5.7f) nun auch nach (5.17) entwickelt werden:

$$\mathcal{U}_\mu = \frac{e}{4\pi}U_{a\mu}\upsilon^a = \frac{e}{4\pi}A_{f\mu}\alpha^f + \frac{e}{4\pi}B_{x\mu}\beta^x \tag{5.18a}$$

$$= \frac{e}{4\pi}\left(A_{1\mu}\alpha^1 + A_{2\mu}\alpha^2 + A_{3\mu}\alpha^3 + B_{4\mu}\beta^4 + B_{5\mu}\beta^5 + B_{6\mu}\beta^6 + B_{7\mu}\beta^7 + B_{8\mu}\beta^8 + B_{9\mu}\beta^9\right) \tag{5.18b}$$

$$= \frac{e}{4\pi}\left(A_{1\mu}\alpha^1 + A_{2\mu}\alpha^2 + A_{3\mu}\alpha^3 + B_{4\mu}\beta^4 + B_{5\mu}\beta^5 + B_{6\mu}\beta^6 + B_{7\mu}\beta^{4\dagger} + B_{8\mu}\beta^{5\dagger} + B_{9\mu}\beta^{5\dagger}\right) \tag{5.18c}$$

$$a = 1,\ldots,9$$
$$f = 1,2,3$$
$$x = 4,\ldots,9\ .$$

$\overline{\mathcal{U}}_\mu = -\mathcal{U}_\mu$ erzwingt auch hier die paarweise Abhängigkeit der $B_{x\mu}$ voneinander, ebenso wie die Reellwertigkeit der $A_{f\mu}$:

$$A^*_{f\mu} = A_{f\mu} \in \mathbb{R} \tag{5.19a}$$

$$B^*_{u\mu} = -B_{(u+3)\mu} \tag{5.19b}$$

$$f = 1,2,3$$
$$u = 4,5,6\ .$$

Wegen $\beta^u = \frac{1}{4c_1}\beta_{u+3}$ bzw. $\beta^{u+3} = \frac{1}{4c_1}\beta_u$ und $B_{u\mu} = 4c_1{B^{u+3}}_\mu$, $B_{(u+3)\mu} = 4c_1{B^u}_\mu$ ändert sich im Austauschanteil von (5.18) gegenüber dem von (5.8) nichts. Die paarweise Um-

benennung der zueinander hermetischen Operatorpaare wird durch die entsprechende Umbenennung der zugehörigen Koeffizientenpaare gerade aufgehoben, wobei sich auch die Metrikkomponenten $K^{u(u+3)} = K^{(u+3)u} = \frac{1}{4c_1}$ und $K_{u(u+3)} = K_{(u+3)u} = 4c_1$ gegenseitig aufheben. Die Auswirkungen dieses Basiswechsels liegen allein im Eichanteil, der in (5.18) und (5.8) unterschiedlich ausfällt, was zuerst beim Vergleich der kontravarianten Entwicklung des Potentialanteils der eichkovarianten Ableitung gemäß (5.18) mit seiner kovarianten Formulierung (5.8) deutlich wird. Weiterhin treten Änderungen in den Bewegungsgleichungen der $A_{f\mu}$ zutage, da deren Quellen nun die kovarianten Ströme $j_{f\mu}$ sind, die sich von den kontravarianten $j^f{}_\mu$ unterscheiden.
Diese Änderungen betreffen aber nicht die prinzipielle Art der Wechselwirkungen, sondern nur ihr spezifisches Aussehen, wie man es bei einem Basiswechsel auch erwartet. Der allgemeine Formalismus aus Kapitel 4 erhält also nur ein anderes Aussehen, aber sein eigentliches Wesen wird nicht verändert. Aus diesem Grund wird die Darstellung des Formalismus in der kontravarianten Basis (5.17) nicht weiter verfolgt.

Die eichkovariante Ableitung der Spinoren

Die erweiterte kovariante Ableitung der RST (2.57b) wird mit den Festlegungen (5.6a) - (5.7f) zu

$$\begin{aligned}
D_\mu {}^1\psi &= \partial_\mu {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^2{}_\mu + A^3{}_\mu\right){}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}B^6{}_\mu {}^2\psi + \frac{ie}{4\pi}B^8{}_\mu {}^3\psi && (5.20a)\\
&= \partial_\mu {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^2{}_\mu + A^3{}_\mu\right){}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}B^6{}_\mu {}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}B^{5*}{}_\mu {}^3\psi\\
D_\mu {}^2\psi &= \partial_\mu {}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu + A^3{}_\mu\right){}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}B^4{}_\mu {}^3\psi + \frac{ie}{4\pi}B^9{}_\mu {}^1\psi && (5.20b)\\
&= \partial_\mu {}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu + A^3{}_\mu\right){}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}B^4{}_\mu {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}B^{6*}{}_\mu {}^1\psi\\
D_\mu {}^3\psi &= \partial_\mu {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu + A^2{}_\mu\right){}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}B^5{}_\mu {}^1\psi + \frac{ie}{4\pi}B^7{}_\mu {}^2\psi && (5.20c)\\
&= \partial_\mu {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu + A^2{}_\mu\right){}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}B^5{}_\mu {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}B^{4*}{}_\mu {}^2\psi\,.
\end{aligned}$$

Im Anteil der Eichpotentiale der eichkovarianten Ableitungen (5.20) treten jetzt zwei Potentiale auf, die auf den Spinor eines Teilchens wirken; z.B. $A^2{}_\mu$ und $A^3{}_\mu$ in der Ableitung (5.20a) des Spinors ${}^1\psi$. Da das System aus zwei weiteren Teilchen besteht, die mit ${}^1\psi$ elektromagnetisch wechselwirken, liegt die Vermutung nahe, dass im Materieanteil der Quellen für $A^2{}_\mu$ ${}_2\overline{\psi}\gamma_\mu {}^2\psi$ auftritt, in der Quelle für $A^3{}_\mu$ ${}_3\overline{\psi}\gamma_\mu {}^3\psi$ und sonst nur noch ein Anteil von ${}_1\overline{\psi}\gamma_\mu {}^1\psi$, um die Selbstwechselwirkung des ersten Teilchens zu vermitteln, ähnlich dem Anteil, der diese bereits im Fall zweier Teilchen vermittelt hat. Die Ströme in Unterkapitel 5.1.3 und die Bewegungsgleichungen in 5.1.4 werden aber zeigen, daß im allgemeinen Fall die Quelle für $A^2{}_\mu$ aus allen drei Dichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\mu {}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\mu {}^2\psi$ und ${}_3\overline{\psi}\gamma_\mu {}^3\psi$ besteht. Dieses Potential vermittelt an ${}^1\psi$ also nicht nur die Selbstwechselwirkung und die Fremdwechselwirkung mit Teilchen ${}^2\psi$, sondern auch einen Teil der

Fremdwechselwirkung mit ${}^3\psi$. Analoges gilt für ${A^1}_\mu$ und ${A^3}_\mu$. Nur im Fall verschwindender Selbstwechselwirkung wird jedem Potential ${A^f}_\mu$ die Dichte ${}_n\overline{\psi}\gamma_\mu\alpha_f\,{}^n\psi$ *eines* Teilchens $n = 1, 2$ oder 3 zugeordnet sein.
Betrachtet man nun die Terme der Potentiale der Restsymmetrie, sieht man die durch sie vermittelte paarweise Koppelung je zweier Teilchen. So wird z.B. der Spinor ${}^1\psi$ durch ${B^8}_\mu$, d.h. durch β_8, über die Eichwechselwirkung hinaus an ${}^3\psi$ gekoppelt. Die zugehörige Koppelung von ${}^3\psi$ an ${}^1\psi$ geschieht durch die zu ${B^8}_\mu$ negativ komplex konjugierte Größe ${B^5}_\mu = -{B^{8*}}_\mu$, bzw. den hermitesch konjugierten Operator $\beta_5 = \beta_8^\dagger$. Diese beiden Potentiale ${B^5}_\mu$, ${B^8}_\mu$ und Generatoren β_5, β_8 treten bei der analogen Koppelung der jeweiligen anderen Teilchenpaare miteinander durch die anderen ${B^x}_\mu$ und β_x nicht in Erscheinung. Die Wechselwirkung der Restsymmetrie (die sich noch als Austauschwechselwirkung erweisen wird) tritt also paarweise auf und erhält dadurch einen streng internen Charakter in folgendem Sinne: Da kein drittes Teilchen Anteil am Austauschpotential[§] je zweier Teilchen hat, ist ein Nachweis der Felder ${B^x}_\mu$ im Sinne einer Eichwechselwirkung nicht möglich. Das soll sagen, daß im Gegensatz z.B. zum elektrodynamischen Feld einer beliebigen Anzahl von Ladungen, das durch eine zusätzliche Probeladung gerade durch Wechselwirkung dieses Eichfeldes mit der Probeladung, also die Anbindung der zusätzlichen Ladung an das Eichfeld, "vermessen" werden kann, eben genau diese Anbindung eines zusätzlichen Teilchens an das Austauschfeld zweier bereits vorhandener Teilchen nicht stattfindet. Vielmehr existieren jetzt zwei zusätzliche Austauschfelder, die dem neuen Systempartner die Bildung eines Austauschpaares mit jeweils (nur) einem der beiden anderen Teilchen ermöglichen.
Mittelbar hat die Austauschwechselwirkung allerdings Auswirkungen auf Teilchen außerhalb eines Paares. Durch die eichkovarianten Ableitung (4.45d) und die nichtverschwindenden Kommutatoren der Eichgeneratoren α_f mit den Austauschgeneratoren β_x, siehe (5.10), treten die ${B^x}_\mu$ in den Bewegungsgleichungen der ${A^f}_\mu$ auf, die wiederum diesen Einfluß durch die eichkovariante Ableitung (5.20) an die Spinoren weitergeben. In Kapitel 5.1.4 über die Yang - Millsgleichungen wird dieser Mechanismus ausführlich besprochen.
Im übernächsten Unterkapitel, im Anschluß an die Besprechung der Feldstärken und deren eichkovarianter Ableitungen wird auf diese Wirkungsweise der Generatoren der Restsymmetrie ausführlich eingegangen.
Abschließend sei angemerkt, daß die Austauschpotentiale auch wegen ihres eigenständigen Auftretens z.B. im Energie - Impulstensor direkt an meßbaren Größ en teilhaben, und damit alles Andere als Behelfskonstrukte zur rein phänomenologischen Beschreibung von Austauschvorgängen sind. Allerdings wird die Besprechung dieses Vorgangs in 5.1.6 das Eingehen *aller* Austauschfelder des Systems in diese Meßgröße zeigen, wodurch wieder keines der Austauschfelder *einzeln* zugänglich ist.

[§]Diese eigentliche vorgreifende Bezeichnung der Restsymmetrie und ihrer Objekte wird im Folgenden der Einfachheit wegen noch häufiger auftreten

Die Feldstärken und deren eichkovariante Ableitung

Die Beibehaltung der $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Symmetrie der Theorie zeigt sich nicht nur in den Austauschpotentialen in der eichkovarianten Ableitung der Spinoren, sondern erzeugt auch Zusatzterme in den Eichfeldstärken $F^f{}_{\mu\nu}$; die Austauschfeldstärken $G^x{}_{\mu\nu}$ verdanken ihre Existenz überhaupt erst der Beibehaltung von Potentialtermen über die der Eichsymmetrie hinaus. Auf welche Weise Konflikte mit der eigentlichen $(U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}))$ - Eichsymmetrie vermieden werden, wurde schon in Teilkapitel 4.1.2 umrissen, und wird bei der ausführlichen Umsetzung dieser Vorgaben für den hiesigen Fall in den kommenden Teilkapiteln 5.1.2 und 5.1.5, besonders in letzterem, sehr deutlich. Für den Moment soll die darauf vorbereitende Betrachtung des Aufbaues der Feldstärken im Mittelpunkt stehen.
Teilt man die $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Feldstärke

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mu\nu} &= V^a{}_{\mu\nu}\upsilon_a \\ &= \partial_\mu\mathcal{U}_\nu - \partial_\nu\mathcal{U}_\mu + [\mathcal{U}_\mu,\mathcal{U}_\nu] = \left(\partial_\mu U^a{}_\nu - \partial_\nu U^a{}_\mu + C^a{}_{bc}U^b{}_\mu U^c{}_\nu\right)\upsilon_a \\ a,b,c &= 1,\ldots,9\end{aligned} \tag{5.21}$$

entsprechend (4.44) mit den $\mathfrak{gl}(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Generatoren (5.6a) - (5.7f) auf, erhält man[§]:

$$\begin{aligned}V^a{}_{\mu\nu}\upsilon_a &= F^f{}_{\mu\nu}\alpha_f + G^x{}_{\mu\nu}\beta_x \\ f &= 1,2,3 \\ x &= 4,\ldots,9\end{aligned} \tag{5.22a}$$

$$F^f{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^f{}_\nu - \partial_\nu A^f{}_\mu + \frac{e}{4\pi}C^f{}_{ab}U^a{}_\mu U^b{}_\nu \tag{5.22b}$$

$$F^1{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^1{}_\nu - \partial_\nu A^1{}_\mu + \frac{ie}{4\pi}\left(B^5{}_\mu B^8{}_\nu - B^8{}_\mu B^5{}_\nu\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(B^6{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu B^6{}_\nu\right) \tag{5.22c}$$

$$F^2{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^2{}_\nu - \partial_\nu A^2{}_\mu - \frac{ie}{4\pi}\left(B^4{}_\mu B^7{}_\nu - B^7{}_\mu B^4{}_\nu\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(B^6{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu B^6{}_\nu\right) \tag{5.22d}$$

$$F^3{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^3{}_\nu - \partial_\nu A^3{}_\mu + \frac{ie}{4\pi}\left(B^4{}_\mu B^7{}_\nu - B^7{}_\mu B^4{}_\nu\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(B^5{}_\mu B^8{}_\nu - B^8{}_\mu B^5{}_\nu\right) \tag{5.22e}$$

$$G^x{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^x{}_\nu - \partial_\nu B^x{}_\mu + \frac{e}{4\pi}C^x{}_{ab}U^a{}_\mu U^b{}_\nu \tag{5.22f}$$

$$\begin{aligned}G^4{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^4{}_\nu - \partial_\nu B^4{}_\mu &+ \frac{ie}{4\pi}\left(B^8{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu B^8{}_\nu\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^2{}_\mu B^4{}_\nu - B^4{}_\mu A^2{}_\nu\right) \\ &- \frac{ie}{4\pi}\left(A^3{}_\mu B^4{}_\nu - B^4{}_\mu A^3{}_\nu\right)\end{aligned} \tag{5.22g}$$

$$G^5{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^5{}_\nu - \partial_\nu B^5{}_\mu - \frac{ie}{4\pi}\left(B^7{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu B^7{}_\nu\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu B^5{}_\nu - B^5{}_\mu A^1{}_\nu\right)$$

[§]Entsprechend der Anmerkung § auf Seite 125 geht $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ in $\frac{4\pi}{e}\mathcal{V}_{\mu\nu}$ über.

$$- \frac{ie}{4\pi} \left(A^3{}_\mu B^5{}_\nu - B^5{}_\mu A^3{}_\nu \right) \tag{5.22h}$$

$$G^6{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^6{}_\nu - \partial_\nu B^6{}_\mu + \frac{ie}{4\pi} \left(B^7{}_\mu B^8{}_\nu - B^8{}_\mu B^7{}_\nu \right) + \frac{ie}{4\pi} \left(A^1{}_\mu B^6{}_\nu - B^6{}_\mu A^1{}_\nu \right)$$

$$- \frac{ie}{4\pi} \left(A^2{}_\mu B^6{}_\nu - B^6{}_\mu A^2{}_\nu \right) \tag{5.22i}$$

$$G^7{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^7{}_\nu - \partial_\nu B^7{}_\mu + \frac{ie}{4\pi} \left(B^5{}_\mu B^6{}_\nu - B^6{}_\mu B^5{}_\nu \right) - \frac{ie}{4\pi} \left(A^2{}_\mu B^7{}_\nu - B^7{}_\mu A^2{}_\nu \right)$$

$$+ \frac{ie}{4\pi} \left(A^3{}_\mu B^7{}_\nu - B^7{}_\mu A^3{}_\nu \right) \tag{5.22j}$$

$$G^8{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^8{}_\nu - \partial_\nu B^8{}_\mu - \frac{ie}{4\pi} \left(B^4{}_\mu B^6{}_\nu - B^6{}_\mu B^4{}_\nu \right) + \frac{ie}{4\pi} \left(A^1{}_\mu B^8{}_\nu - B^8{}_\mu A^1{}_\nu \right)$$

$$+ \frac{ie}{4\pi} \left(A^3{}_\mu B^8{}_\nu - B^8{}_\mu A^3{}_\nu \right) \tag{5.22k}$$

$$G^9{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^9{}_\nu - \partial_\nu B^9{}_\mu + \frac{ie}{4\pi} \left(B^4{}_\mu B^5{}_\nu - B^5{}_\mu B^4{}_\nu \right) - \frac{ie}{4\pi} \left(A^1{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu A^1{}_\nu \right)$$

$$+ \frac{ie}{4\pi} \left(A^2{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu A^2{}_\nu \right) \ . \tag{5.22l}$$

An dieser Stelle ist zunächst eine Bemerkung über die Bezeichnungsweisen angebracht: Werden die Begriffe “Potential”, “Potentialfeld” und “Feldstärke” nicht näher bezeichnet, sind durch sie immer *beide* Arten von Potentialen oder Feldstärken gemeint, also Eichpotentiale (- feldstärken) und Austauschpotentiale (- feldstärken). Diese Bezeichnungsweise findet vor allem immer dann Anwendung, wenn die vollständige $U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ - Symmetrie der Theorie untersucht wird, in die beide Arten von Potentialen und Feldstärken eingebettet sind, siehe (5.21) und (5.22a) oben, d.h., wenn die unterschiedlichen Rollen, die die Mengen von Generatoren $\{\alpha_f\}$ und $\{\beta_y\}$ spielen, und die daraus folgenden unterschiedliche Interpretation beider Potential - /Feldstärkearten, momentan nicht von Belang sind.
Wegen $\alpha_f^\dagger = -\alpha_f$ und $\beta_{7/8/9}^\dagger = \beta_{4/5/6}$ haben die Entwicklungskoeffizienten von $\mathcal{V}_{\mu\nu} = V^a{}_{\mu\nu} v_a$ aus (5.4a) $F^{f*}{}_{\mu\nu} = F^f{}_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ und $G^{7/8/9*}{}_{\mu\nu} = -G^{4/5/6}{}_{\mu\nu}$ zu erfüllen, was auch tatsächlich der Fall ist, wie man (5.22b) - (5.22l) entnimmt.
Die beibehaltene $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$ - Symmetrie ergibt schon in den Eichfeldstärken $F^f{}_{\mu\nu}$ (5.22b) - (5.22e) der eigentlichen Eichsymmetrie merkliche Veränderungen. Denn obwohl diese als $\left(U\left(\mathbb{1}_{4\times 4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times 4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times 4}\right)\right)$ abelsch ist, reduzieren sich die $F^f{}_{\mu\nu}$ nicht zu den sonst für Elektromagnetismus üblichen reinen Rotationsausdrücken $\partial_\mu A^f{}_\nu - \partial_\nu A^f{}_\mu$. Vielmehr werden diese Rotationen durch Produkte von Austauschpotentialen gemäß den Kommutatoren der Liealgebra $\mathfrak{u}\left(\mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$, ausgedrückt in den Generatoren der höherdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{gl}\left(\mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$, ergänzt. Dabei bestehen die Produkte der Austauschpotentiale gerade immer aus jenen Potentialpaaren $B^w{}_\mu$, $B^{w+3}{}_\mu$, $w = 4, 5, 6$, die auch die Austauschwechselwirkung zwischen jeweils zwei Spinoren in den eichkovarianten Ableitungen (5.20a) - (5.20c) vermitteln. Somit entstehen insbesondere in den Eichfeldstärken keine Produkte eines Eichpotentials mit einem Austauschpotential, wodurch kein Eich-

potential unmittelbar mit einem Austauschpotential verbunden wird, und deshalb auch auf diesem Weg kein dritter Spinor außerhalb des Austauschpaares an der paarweisen Austauschwechselwirkung teilhaben kann. Der streng interne Charakter dieses Vorganges bleibt also erhalten. Mittelbar nimmt der Austausch natürlich Einfluß auf die Entwicklung des Systems, da die Zusatzterme Eingang in die Bewegungsgleichungen der ${A^f}_\mu$ erhalten und dadurch Einfluß auf die raumzeitliche Entwicklung der Eichpotentiale nehmen, den diese dann über die eichkovariante Ableitung in den Bewegungsgleichungen der Spinoren auch an solche weitergeben, die nicht Teil eines Austauschpaares sind. So wirkt ${A^1}_\mu$ z.B. auf ${}^2\psi$, der mit ${}^1\psi$ durch ${B^6}_\mu$ und ${B^9}_\mu$ “intern” gekoppelt ist. Neben den Produkttermen dieses Paares treten allerdings noch die Produktterme des Paares ${B^5}_\mu$ und ${B^8}_\mu$ in der Feldstärke ${F^1}_{\mu\nu}$ (5.22c) auf, die den Austausch zwischen ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ organisieren. Obwohl für ${}^2\psi$ nicht direkt einsehbar, nimmt die Gegenwart dieser Austauschwechselwirkung durch das Potential ${A^1}_\mu$ Einfluß auf die Entwicklung von Teilchen ${}^2\psi$. Analoges gilt für die anderen Kombinationen von Eichpotentialen und Spinoren, auf die sie wirken. Weiterhin zeigt sich dieses Muster bei den eichkovarianten Ableitungen der Feldstärken weiter unten in den Produktpaaren $B^{u\mu}$ und ${G^{u+3}}_{\mu\nu}$. Durchbrochen wird es erst im Aufbau der Austauschfeldstärken ${G^x}_{\mu\nu}$ (5.23e) - (5.23k). Durch die Strukturkonstanten der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ werden in den Kommutatortermen nun auch Produkte von Eich- und Austauschpotentialen gebildet. Allerdings nehmen diese Terme später in den Bewegungsgleichungen nur Einfluß auf die Entwicklung der ${G^x}_{\mu\nu}$, mithin der zugehörigen ${B^x}_\mu$, also von Größen, die sich in den eichkovarianten Ableitungen der Spinoren und den Eichfeldstärken als abgekapselt gegenüber Beobachtung erwiesen haben. Insofern findet die Ankopplung der Eichfelder an die Austauschfelder an der falschen Stelle statt, um sie direkter Meßbarkeit zugänglich zu machen. Die ebenfalls stattfindende Verbindung der Austauschfelder verschiedener Spinorpaare untereinander unterliegt der gleichen Beschränkung.

(Zudem koppeln die Austauschpotentiale eines Spinorpaares nur an Eichpotentiale, die im Fall verschwindender Selbstwechselwirkung jeweils genau einem Spinor aus dem Spinorpaar des Austauschpotentials zugeordnet werden können, womit wieder kein außenstehender Spinor beteiligt ist. Z.B. stehen im Ausdruck für ${G^4}_{\mu\nu}$ (5.22g) Produkte von ${A^2}_{\mu/\nu}$ und ${A^3}_{\mu/\nu}$ mit ${B^4}_{\mu/\nu}$, die ohne Selbstwechselwirkung ${}_2\overline{\psi}\gamma_\mu {}^2\psi$ bzw. ${}_3\overline{\psi}\gamma_\mu {}^3\psi$ als materielle Quellen besitzen werden. Genau zwischen diesen beiden Spinoren vermittelt aber ${B^4}_\mu$ den Austausch. Ferner wirkt ${A^3}_\mu$ zwar in der Ableitung (5.20a) direkt auf ${}^1\psi$, allerdings zusammen mit ${A^2}_\mu$, wodurch die Beiträge von ${B^4}_\mu/{B^6}_\mu$ keine Rolle spielen, denn in (5.22d) und (5.22e) gehen die entsprechenden Produktterme mit entgegengesetztem Vorzeichen, ansonsten aber genau gleich ein. Deshalb treten sie in der zusammengesetzten Größe ${F^2}_{\mu\nu} + {F^3}_{\mu\nu}$ und deren Bewegungsgleichung überhaupt nicht in Erscheinung. Für $\rightsquigarrow$ ${}^1\psi$ ist jedoch wegen des Eichpotentialterms ${A^2}_\mu + {A^3}_\mu$ in der eichkovarianten Ableitung nur diese zusammengesetzte Grösse von Bedeutung. Die verbleibenden Zusatzterme in ${F^2}_{\mu\nu}$ und ${F^3}_{\mu\nu}$ bestehen mit ${B^6}_\mu/{B^9}_\mu$ und ${B^5}_\mu/{B^8}_\mu$ genau aus den Austauschfeldern, die den Austausch zwischen ${}^1\psi$ und jeweils ${}^2\psi$ sowie ${}^3\psi$ vermitteln, wodurch nur Information übertragen wird, über die das Teilchen durch seine eichkovariante Ableitung ohnehin schon viel direkter verfügt.)

Bedingt durch die Verwendung der Strukturkonstanten der Liealgebra $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ findet sich das oben beschriebene Muster der Kommutatorterme auch in der eichkovarianten Ableitung der Feldstärken (5.22) wieder. Sie lauten bei Spezialisierung von (4.45c)-(4.45e) auf den Dreiteilchenfall durch Anwendung der Basis (5.6a)-(5.7f) und der Strukturkonstanten (5.10):

$$
\begin{aligned}
D^\mu F^f{}_{\mu\nu} &= \partial^\mu F^f{}_{\mu\nu} + \frac{e}{4\pi} C^f{}_{ab} U^{a\mu} V^b{}_{\mu\nu} \\
&= \partial^\mu F^f{}_{\mu\nu} + \frac{e}{4\pi}\left(C^f{}_{gh} A^{g\mu} F^h{}_{\mu\nu} + C^f{}_{gy} A^{g\mu} G^y{}_{\mu\nu} + C^f{}_{yh} B^{y\mu} F^h{}_{\mu\nu} + C^f{}_{xy} B^{x\mu} G^y{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23a}
$$

$$
D^\mu F^1{}_{\mu\nu} = \partial^\mu F^1{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{5\mu} G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu} G^5{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{6\mu} G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu} G^6{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.23b}
$$

$$
D^\mu F^2{}_{\mu\nu} = \partial^\mu F^2{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu} G^7{}_{\mu\nu} - B^{7\mu} G^4{}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{6\mu} G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu} G^6{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.23c}
$$

$$
D^\mu F^3{}_{\mu\nu} = \partial^\mu F^3{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu} G^7{}_{\mu\nu} - B^{7\mu} G^4{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{5\mu} G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu} G^5{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.23d}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\mu G^x{}_{\mu\nu} &= \partial^\mu G^x{}_{\mu\nu} + \frac{e}{4\pi} C^x{}_{ab} U^{a\mu} V^b{}_{\mu\nu} \\
&= \partial^\mu G^x{}_{\mu\nu} + \frac{e}{4\pi}\left(C^x{}_{gh} A^{g\mu} F^h{}_{\mu\nu} + C^x{}_{gy} A^{g\mu} G^y{}_{\mu\nu} + C^x{}_{yh} B^{y\mu} F^h{}_{\mu\nu} + C^x{}_{xy} B^{x\mu} G^y{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23e}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\mu G^4{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^4{}_{\mu\nu} &+ \frac{ie}{4\pi}\left(B^{8\mu} G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu} G^8{}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{2\mu} - A^{3\mu}\right) G^4{}_{\mu\nu} \\
&- \frac{ie}{4\pi} B^{4\mu}\left(F^2{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23f}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\mu G^5{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^5{}_{\mu\nu} &- \frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu} G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu} G^7{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{3\mu}\right) G^5{}_{\mu\nu} \\
&+ \frac{ie}{4\pi} B^{5\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23g}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\mu G^6{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^6{}_{\mu\nu} &+ \frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu} G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu} G^7{}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right) G^6{}_{\mu\nu} \\
&- \frac{ie}{4\pi} B^{6\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23h}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\mu G^7{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^7{}_{\mu\nu} &+ \frac{ie}{4\pi}\left(B^{5\mu} G^6{}_{\mu\nu} - B^{6\mu} G^5{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{2\mu} - A^{3\mu}\right) G^7{}_{\mu\nu} \\
&+ \frac{ie}{4\pi} B^{7\mu}\left(F^2{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23i}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\mu G^8{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^8{}_{\mu\nu} &- \frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu} G^6{}_{\mu\nu} - B^{6\mu} G^4{}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{3\mu}\right) G^8{}_{\mu\nu} \\
&- \frac{ie}{4\pi} B^{8\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.23j}
$$

$$D^\mu G^9{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^9{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu}G^5{}_{\mu\nu} - B^{5\mu}G^4{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right)G^9{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}B^{9\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.23k}$$

Auch hier reduzieren sich die Ausdrücke für die Eichfelder trotz abelscher Eichwechselwirkung durch die beibehaltenen $\mathfrak{u}\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \setminus (\mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \oplus \mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \oplus \mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4})) = \mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \setminus \mathfrak{e}\,(\mathbb{1}_{4\times4}) = \mathfrak{b}\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \subset \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ - Terme nicht auf rein partielle Divergenzen, ähnlich den Eichfeldstärken (5.22b) - (5.22e) selber, die keine reinen Rotationsausdrücke sind. Vielmehr entstehen Zusatzterme aus Produkten von je einem Austauschpotential $B^u{}_\mu$ und einer Austauschfeldstärke $G^{u+3}{}_{\mu\nu}$, die zueinander korrespondieren, da sie die Austauschwechselwirkung je nur eines Spinorpaares beschreiben. Es entstehen also wiederum keine direkten Verbindungen von Eichgrößen und Austauschpotentialen; wegen der Verwendung der gleichen Strukturkonstanten, die dieses schon bei den Feldstärken selber verursacht haben, zwangsläufig nicht.

Ebenso spiegelt sich der Aufbau der Austauschfeldstärken selber in dem ihrer eichkovarianten Ableitungen wider. Zwar finden sich hier Produkte von passiven Potentialen und aktiven Feldstärken, aber zum einen treten sie bei der Behandlung von Größen auf, die sich gegenüber den Eichwechselwirkungen als verschlossen gezeigt haben, zum anderen sind sie durch diese Produkte nur mittelbare Träger von Informationen über den Austausch zweier Spinoren an einen dritten.

Wenn die Produkte von Potentialfeldern und Feldstärken[§] betrachtet werden, um deren Koppelung untereinander zu diskutieren, ist natürlich von nichts anderem die Rede als von den Wechselwirkungen der Potentialfelder untereinander, denn die diskutierten Terme treten ja als Potentialanteil der eichkovarianten Ableitung der Feldstärken auf, und dieser Anteil beschreibt gerade die Wechselwirkung eines Feldes mit den anderen Konstituenten des betrachteten Systems. Neben der Frage, ob durch die Wechselwirkung der Potentiale untereinander die Austauschpotentiale Messungen zugänglich werden, muß die Diskussion des Wechselwirkungsanteils der eichkovarianten Ableitung der Feldstärken mindestens ebenso dringend die Frage nach der Art der Austauschwechselwirkung der Potentialfelder beantworten. In der Standardtheorie sind Austauschphänomene nicht nur auf materielle Teilchen beschränkt, oder anders ausgedrückt, das (Anti -) Symmetrisierungspostulat ist nicht nur auf materielle Teilchen anzuwenden, sondern umfaßt ebenso Eichfelder wie das elektromagnetische bzw. die Photonen als Träger der elektromagnetischen Wechselwirkung. Wenn die Beschreibung der Austauschwechselwirkung durch die Potentialfelder der Restsymmetrie einer $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Symmetrie, also durch die Strukturgruppe $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ Bestand haben soll, muß die Beschreibung der Austauschwechselwirkung der Potentiale untereinander zwingend auf dieselbe Art erfolgen. (5.23) zeigt aber, daß sich das bei den Spinoren verwendete Vorgehen exakt auf die Feldstärken übertragen lässt. So koppelt z.B. $B^5{}_\mu\ F^1{}_{\mu\nu}$ an $G^8{}_{\mu\nu}$, während das zu ihm negativ

[§] Zur Erinnerung: Wenn die Begriffe “Potential”, “Potentialfeld” und “Feldstärke” nicht näher bezeichnet werden, sind durch sie immer *beide* Arten von Potentialen oder Feldstärken gemeint, also Eichpotentiale (- feldstärken) und Austauschpotentiale (- feldstärken).

komplex konjugierte Feld ${B^8}_\mu$ ${G^8}_{\mu\nu}$ an ${F^1}_{\mu\nu}$ bindet, gleiches gilt für ${F^3}_{\mu\nu}$. Auf diese Weise verbindet ${B^5}_\mu$ weiterhin ${G^7}_{\mu\nu}$ mit ${G^6}_{\mu\nu}$ und ${G^9}_{\mu\nu}$ mit ${G^4}_{\mu\nu}$, während das zu ihm negativ komplex konjugierte Feld ${B^8}_\mu$ ${G^4}_{\mu\nu}$ an ${G^9}_{\mu\nu}$ und ${G^6}_{\mu\nu}$ an ${G^7}_{\mu\nu}$ bindet. Verkürzt läßt sich also sagen, daß das Potentialpaar ${B^5}_\mu/{B^8}_\mu$ die Austauschwechselwirkung der Feldstärkenpaare ${G^4}_{\mu\nu}/{G^7}_{\mu\nu}$ und ${G^6}_{\mu\nu}/{G^9}_{\mu\nu}$ vermittelt. Entsprechende, baugleiche Produkte zwischen Potentialen und Feldstärken sind für die Austauschwechselwirkung der anderen Potentialpaare zuständig. Wie im Fall der (massiven) Fermionen wird die Austauschwechselwirkung wieder paarweise vermittelt, anders als im fermionischen Fall ist hier allerdings ein Potentialpaar für die Austauschbindung mehrerer Feldstärken zuständig. So ist im angesprochen Beispiel ${B^5}_\mu/{B^8}_\mu$ für die Koppelung von ${F^1}_{\mu\nu}$ und ${F^3}_{\mu\nu}$ mit ${G^5}_{\mu\nu}/{G^8}_{\mu\nu}$ und ${G^4}_{\mu\nu}/{G^7}_{\mu\nu}$ mit ${G^6}_{\mu\nu}/{G^9}_{\mu\nu}$ verantwortlich. Daß sich die Austauschpotentiale bzw. die Austauschfeldstärken trotz dieser Mehrfachfunktion der direkten Meßbarkeit entziehen, ist im vorhergehenden Abschnitt besprochen worden.
Die zusätzliche Zuständigkeit für den Austausch der Feldstärken untereinander verleiht den Austauschpotentialen Eigenständigkeit gegenüber den (massiven) fermionischen Feldern, denn ihre Gegenwart ist nicht von der Existenz solcher massiven Teilchen abhängig. Die Ströme im übernächsten Unterkapitel 5.1.3, sowie die Yang-Millsgleichungen werden dieses deutlich zeigen. Zuvor soll aber noch die genaue Art, in der Austauschphänomenen, d.h. der Ununterscheidbarkeit von Teilchen, in der RST Rechnung getragen wird, an einem Beispiel erläutert werden.

5.1.2. Die Wirkungsweise der eingeschränkten Symmetriefreiheitsgrade

Die Wirkung auf die fermionischen Felder

Laut (5.20a) und (5.20c) vermitteln die Potentiale ${B^5}_\mu$ und ${B^8}_\mu = -{B^{5*}}_\mu$ die Austauschwechselwirkung zwischen den Teilchen ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$. Folglich sind die zugehörigen Generatoren die der eingeschränkten Transformation $\mathcal{S}_{13} = \exp\{\Lambda^x \beta_x\}$, des Gesamtspinors $\Psi = ({}^1\psi, {}^2\psi, {}^3\psi)^T$ (5.1), β_5 (5.7b) und $\beta_8 = \beta_5^\dagger$ (5.7e):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{13} &= \exp\left\{\begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & i\Lambda^8 \mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ -i\Lambda^5 \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix}\right\} = \exp\left\{\begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -i\Lambda^{5*} \mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ -i\Lambda^5 \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \end{pmatrix}\right\} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(|\Lambda^5|)\cdot \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \frac{i\Lambda^{5*}}{|\Lambda^5|}\sin(|\Lambda^5|)\cdot \mathbb{1}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \frac{i\Lambda^5}{|\Lambda^5|}\sin(|\Lambda^5|)\cdot \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \cos(|\Lambda^5|)\cdot \mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} . \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt $\Lambda^8 = -\Lambda^{5*}$ wegen $\Lambda^5\beta_5 + \Lambda^8\beta_8 \stackrel{!}{=} -(\Lambda^5\beta_5 + \Lambda^8\beta_8)^\dagger$.
Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß $\mathcal{S}_{13}$ eine Transformation der Spinorfaser ist und keine der Raumzeit. Mit anderen Worten ist $\mathcal{S}_{13}$ (5.24)

zwar ein Element der dreidimensionalen Darstellung der Gruppe $SU(2)$, wirkt aber auf die dreispinorige Faser $\Psi = ({}^1\psi, {}^2\psi, {}^3\psi)^T$ (5.1) und nicht auf die Raumzeit, steht also in keinster Weise mit der Lorentzgruppe $SO(1,3)$ in Zusammenhang, d.h. korrespondiert mit keinem Element ihres Drehanteils $SO(3)$. Die Wirkung von $\mathcal{S}_{13}$ auf Ψ ist also wirklich als eine Drehung in der Spinorfaser um die Achse, die ${}^2\psi$ markiert, zu verstehen:

$$\Psi' = \mathcal{S}_{13}\Psi = \left\{ (\mathcal{S}_{13})^\ell{}_n {}^n\psi \right\} = \begin{pmatrix} \cos(|\Lambda^5|) \cdot {}^1\psi + \frac{i\Lambda^{5*}}{|\Lambda^5|} \sin(|\Lambda^5|) \cdot {}^3\psi \\ {}^2\psi \\ \frac{i\Lambda^5}{|\Lambda^5|} \sin(|\Lambda^5|) \cdot {}^1\psi + \cos(|\Lambda^5|) \cdot {}^3\psi \end{pmatrix} . \tag{5.25}$$

Hierbei werden nur die erste Komponente von ${}^1\psi$ mit der ersten von ${}^3\psi$, also ψ_1 mit ψ_9, die zweite Komponente von ${}^1\psi$, ψ_2, mit der zweiten von ${}^3\psi$, ψ_{10}, usw. gemischt, die Anordnung dieser Komponenten im Spinor wird also nicht verändert. Dies bleibt der Lorentzgruppe vorbehalten, und die wirkt, noch einmal ausdrücklich gesagt, hier *nicht*. Mit $|\Lambda^5| = \frac{\pi}{2}$ wird Ψ' (5.25) zu

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \frac{2i\Lambda^{5*}}{\pi} {}^3\psi \\ {}^2\psi \\ \frac{2i\Lambda^5}{\pi} {}^1\psi \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

Für den Spezialfall eines rein imaginären Λ^5, $\Lambda^5 = i\Theta$, $\Theta \in \mathbb{R}$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$, siehe oben, erhält man eine $SO\,(2)$ - Drehung:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} -{}^3\psi \\ {}^2\psi \\ {}^1\psi \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

Schaltet man der Transformation $\mathcal{S}_{13}$ (5.24) eine Spiegelung $\mathcal{S}_{\mathrm{Sp}}$ der ersten Achse nach

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Sp}} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{4\times4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{4\times4} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} , \tag{5.28}$$

erhält man, wiederum mit $\Theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Psi' = \mathcal{S}_{\mathrm{Sp}}\mathcal{S}_{13}\Psi = \begin{pmatrix} {}^3\psi \\ {}^2\psi \\ {}^1\psi \end{pmatrix} . \tag{5.29}$$

In beiden Fällen vertauschen die Spinoren ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ ihre Plätze, im ersten Fall mit dem fermionischen Vorzeichenwechsel in einer Komponente, den man aus der Standardtheorie gewohnt ist. Zu diesem Vorzeichen wird in Kürze noch Einiges zu sagen sein. Zunächst aber ist zu bemerken, daß mit Hilfe der passiven Symmetriegeneratoren zwar ein Platztausch der Wellenfunktionen ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ verursacht werden kann, der im Spezialfall eines rein imaginären Λ^5 mit der Wirkung des Permutationsoperators in der Standardtheorie vergleichbar ist[§] (d.h. Spinor 1, die Komponenten $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4$ von Ψ, befinden sich jetzt im Zustand ${}^3\psi'$, während Spinor 3, die Spinorkomponenten $\psi^9, \psi^{10}, \psi^{11}, \psi^{12}$ von Ψ, jetzt der Zustand ${}^1\psi'$ zugeordnet ist), die Ähnlichkeit beider Theorien nach diesem Vergleich allerdings schon ihr Ende finden muß. Denn in der Standardtheorie wird der Gleichberechtigung aller Zustandsvektoren eines Systems, die durch Permutation entstehen, durch das (Anti-) Symmetrisierungspostulat Rechnung getragen, mithin durch die Bildung einer normierten Linearkombination aller gleichberechtigten Zustandsvektoren. Im Gegensatz dazu wird in der RST **entweder** der Gesamtspinor Ψ des Systems verwendet **oder** der Gesamtspinor $\Psi' = \exp\{\Lambda^x \beta_x\}\,\Psi$, aber nie beide gleichzeitig in einer Linearkombination oder ähnlichem. Dieser Unterschied beruht auf der Verwendung des Faserbündelformalismus zur Beschreibung von Austauschphänomenen, dessen tieferer Sinn es ja gerade ist, alle Faserspinoren (-vektoren), die durch die Wirkung einer Eichgruppe aufeinander abgebildet werden können, als äquivalent zur Beschreibung eines Systems zu klassifizieren, weshalb es egal ist, welchen Repräsentanten genau man aus dieser Äquivalenzklasse auswählt. Wegen der Invarianz der Beschreibung des Systems unter der Symmetriegruppe genügt es, mit einem der vielen gleichberechtigten Systemspinoren zu arbeiten, was sich die RST für die Beantwortung der Frage nach dem "richtigen" Systemspinor eines Systems mit ununterscheidbaren Teilchen zunutze macht, in dem sie $U(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus E(\mathbb{N}_{4\times4})$-, hier $U(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \setminus (U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}))$-, äquivalente Spinoren verwendet. Die Auswirkungen auf die Meßwerte, die im Falle eines Systems identischer Teilchen aus der Nichteindeutigkeit des Zustandsvektors entstehen, werden durch die notwendigerweise in der eichkovarianten Ableitung (5.20) und (5.23) auftretenden Potentiale ${B^x}_\mu$ in die Theorie eingebracht, sowie durch die aus ihnen bestehenden Feldstärken (5.22). Ihren tatsächlichen Einfluß auf die meßbaren Größen zeigt z.B. ihre Anwesenheit im Energie-Impulstensor; siehe (4.76) und weiter unten in $T_{\mu\nu}$ (5.80) für den Dreiteilchenfall.

Im Vergleich dazu sind in der Standardtheorie die Meßergebnisse eben nicht unabhängig von der Wahl der als gleichberechtigt eingestuften Zustandsvektoren, was zur Verwendung der bekannten bosonischen oder fermionischen Linearkombinationen dieser Vektoren zur Lösung des Auswahlproblems führt. Durch die Bildung des Skalarproduktes dieses summierten Zustandsvektors entstehen dann die bekannten Auswirkungen auf die Vorhersage von Meßergebnissen.

Interessanterweise vertauschen hier gerade die grundlegenden Strukturen beider Theorien zur Beschreibung von Vielteilchensystemen. Während die RST eine Summenstruktur zur Benennung dessen, was für ein Teilchen an Freiheitsgraden zur Verfügung stehen soll, aufweist (siehe die Struktur ihrer Lorentzgruppe) und für den Äquivalenzbegriff der gleichberechtigten Zustandsvektoren auf eine Quotientenbildung zurückgreift, wird

[§]Dieser, ohnehin oberflächliche Vergleich kann auch wirklich nur für den angegebenen Spezialfall von $\mathcal{S}_{13}$ durchgeführt werden; die Koeffizienten im allgemeinen Fall (5.26) sind den Permutationen gänzlich fremd.

der Teilchenbegriff in der Standardtheorie durch eine Produktstruktur geprägt und der maßgebliche Zustandsvektor durch eine Summation gebildet.
Betrachtet man alleine die Transformationen des Zustandsspinors Ψ mitsamt der Invarianz der Theorie unter diesen Transformationen, gibt es keinen Grund die Transformation als ortsunabhängige Phasentransformationen mit $\Lambda^y \neq \Lambda^y(x)$ zu wählen, solange nur die Eichgruppe $E(\mathbb{N}_{4\times4}) \subset U(\mathbb{N}_{4\times4})$, die die Wechselwirkungen beschreibt, nicht mit der Austauschgruppe $U(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus E(\mathbb{N}_{4\times4})$ vermengt wird, damit Wechselwirkung und Austausch zwei voneinander getrennte Phänomene bleiben. Formal gefaßt soll demnach entweder

$$\mathcal{S} = \exp\left\{\Lambda^f \alpha_f\right\} \cdot \exp\left\{\Lambda^x \beta_x\right\} \ , \tag{5.30}$$

oder

$$\mathcal{S} = \exp\left\{\Lambda^x \beta_x\right\} \cdot \exp\left\{\Lambda^f \alpha_f\right\} \ , \tag{5.31}$$

gelten. Auf die genaue Umsetzung dieser Forderung durch die Einschränkung der Koeffizienten der nicht kommutierenden Generatoren aus $\{\upsilon_a\}$ mittels der Baker - Campbell - Hausdorffrelation wird im Kapitel 5.1.5 über die Normierung der Ströme genau eingegangen.
Die obige Festlegung von $|\Lambda^5| = \frac{\pi}{2}$ hat mit den Bedingungen (5.30) und (5.31) nichts zu tun. Sie kann zum jetzigen Zeitpunkt eher als Wahl für die Herausarbeitung eines sehr griffigen Beispiels verstanden werden, das sich besonders gut für den gegenüberstellenden und letztlich abgrenzenden Vergleich mit der Standardtheorie eignet. Ohne weitere Bedingungen wären alle anderen Werte für Λ^y im Rahmen der RST ebensogut möglich. Allerdings erzwingt die Forderung nach strenger Trennung zwischen Wechselwirkung und Austausch noch eine Beschränkung der Werte, die die $\Lambda^y(x)$ annehmen dürfen. So lassen die Transformationen der Feldstärken ${V^a}_{\mu\nu}$, die mit Transformationen in der Spinorfaser notwendig einhergehen, die geforderte Trennung nicht für alle Werte der $\Lambda^y(x)$ zu. Im vorliegenden Fall muß ihre Wertebereich z.B. durch $|\Lambda^y(x)| = n\frac{\pi}{2}$ auf Kreise in der komplexen Ebene beschränkt werden, wie der Abschnitt über die Wirkungsweise der Austauschpotentiale auf die Feldstärken in Teilkapitel 5.1.2 zeigen wird. Selbst die dort angestellten Betrachtungen dringen noch nicht ganz bis zu den Wurzeln der Beschränkung der Restsymmetrien vor. Diese können erst im Kapitel 5.1.5 über die Normierung der Ströme gezeigt werden. Die vorherigen Betrachtungen sind dann ganz klar Folgen der Ergebnisse dieses Kapitels. Sie werden nur deshalb vorgezogen, um die Bezeichung der Restsymmetrie als Austauschsymmetrie zumindest plausibel zu machen und dadurch weitere sprachliche Verrenkungen bei der Bezeichnung der Generatoren β_x, ihrer Symmetrien, Potentiale, Feldstärken etc. zu verhindern.

Der Zusammenhang von Teilchenspin und Teilchenbegriff der RST mit der Lorentzgruppe

Auf dem Hintergrund des Faserbündelformalismus zeigt sich auch die Unabhängigkeit des fermionischen Charakters der Teilchen von der Art der Austauschtransformationen, ob also eine Drehung der Art (5.25) mit oder ohne Spiegelung wie z. B. (5.28) ausgeführt wird. Denn solange der Formalismus unter solchen Spiegelungen invariant bleibt, können die damit aus einem Referenzspinor Ψ erzeugten Spinoren Ψ' als Mitglieder der Menge der zum Zweck der Beschreibung des Systems äquivalenten Spinoren angesehen werden. Das Minuszeichen, das (5.27) von (5.29) unterscheidet (gezeigt im Spezialfall einer $SO\,(2_{4\times4})$ - Drehung), ist also in Bezug auf den Spin des Teilchens nicht aussagekräftig. Es erscheint im vorliegenden Zusammenhang nur sehr natürlich und damit "richtiger" als das Pluszeichen in (5.29), da es sich im Rahmen einer Transformation ergibt, die kontinuierlich aus der Einheitsmatrix hervorgeht, und zudem im Moment gerade ein spinorielles System betrachtet wird. Diese "natürliche Richtigkeit" verschwindet aber sofort, wenn man bedenkt, daß ein System aus drei Bosonen, also z.B. aus drei Klein - Gordonteilchen, bis auf die Vereinfachung $\mathbb{1}_{4\times4} \rightarrow 1$ den selben Potentialanteil wie das vorliegende System dreier Spinoren besitzt, und für solche Systeme erscheint das dort analog zu (5.26) auftretende Minuszeichen als "falsch". Hieraus jetzt zu folgern, fermionische System sollten in ihrem Austauschtransformationen nur auf ungespiegelte beschränkt werden, und die bosonischen müssten zwingend immer zusammen mit einer Spiegelung ausgeführt werden, löst das Problem der ungewohnten Freiheit bei der Vorzeichenwahl der zueinander äquivalenten Systemspinoren aber keinesfalls. Denn die Transformation, die in der Faser der massiven Felder ausgeführt wird, überträgt sich mittels der adjungierten Darstellung dieser Transformation direkt in den Potentialanteil des Systems, der sowohl bei massiven fermionischen als auch bei massiven bosonischen Teilchen bosonisch ist. Mit der zwangsweise eingeführten Spiegelung ließe sich folglich zwar der massive Teil eines bosonischen Systems in die gewohnte Handhabung der Vorzeichen einfügen, im ebenso bosonischen Potentialanteil träte dann aber ein Vorzeichenwechsel einiger Felder auf, der wiederum "unbosonisch" erscheint. Der übernächste Abschnitt über die Wirkung der Austauschtransformation auf die Feldstärken wird dieses zeigen.

Die Festlegung des Spins eines Teilchens bleibt demnach der Lorentzgruppe vorbehalten, also wie sich ein n - Tupel des Gesamttupels des Systems unter der Lorentztransformation transformiert. Die Lorentzgruppe für das Gesamttupel weist dabei eine Blockdiagonalstruktur auf, die das Aufsuchen einer Whitneysummenstruktur als Referenzpunkt der Theorie widerspiegelt: Zu diesem Sachverhalt sei auf die entsprechenden Stellen in den vorhergehenden Kapiteln verwiesen. Die Aufteilung, die in (5.1) und (5.2) stattfindet, ist ein Beispiel dafür wie aus einem 12 - Tupel ein System von drei Fermionen herausgeprägt wird, indem die Lorentzgruppe des 12 - Tupels eine Blockdiagonalstruktur einnimmt, bei der jeder Block der Lorentztransformation eines einzelnen Spinors entspricht. Jede dieser Transformationen besitzt den bekannten Generator

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] \ , \tag{5.32}$$

der durch die Bildung der direkten Summe

$$\Sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \oplus \sigma_{\mu\nu} \oplus \sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & \mathbb{O}_{4\times 4} & \mathbb{O}_{4\times 4} \\ \mathbb{O}_{4\times 4} & \sigma_{\mu\nu} & \mathbb{O}_{4\times 4} \\ \mathbb{O}_{4\times 4} & \mathbb{O}_{4\times 4} & \sigma_{\mu\nu} \end{pmatrix} \ , \tag{5.33}$$

den blockdiagonalen Generator der folglich ebenso blockdiagonalen Lorentzgruppe für das 12 - Tupel (5.1) ergibt, die ihm die Struktur dreier fermionischer 4 - Tupel, mithin die dreier fermionischer Teilchen gibt.
Verwendet man die direkte Summe der γ_μ aus (2.51) mit $N = 3$ kann $\Sigma_{\mu\nu}$ auch folgendermaßen angegeben werden:

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\right] \ . \tag{5.34}$$

Die dem Formalismus hinsichtlich des Teilchenbegriffes sein Gesicht gebende Whitneysumme, wodurch er im Gegensatz zur Standardtheorie steht, wird im Generator $\Sigma_{\mu\nu}$ sowohl in seiner Form (5.33) als auch in den Γ_μ's in (5.33) deutlich sichtbar. Genau diese Form des Generators für die Lorentzgruppe eines 12 - Tupels ergibt sich, wenn das Whitneysummenbündel aus drei einzelnen Spinorbündeln mit je einem Spinor als Faser über der Raumzeit gebildet wird. Bei diesem Vorgang wird das Bündel allerdings aus bestehenden Spinoren, d.h. Teilchen mit einer vorgefertigten Charakteristik, gebildet, während sich (5.33) als eine Möglichkeit einer blockdiagonalen Lorentzgruppe für ein 12 - Tupel versteht, die aus einer höheren Darstellung der Lorentzgruppe durch deren Beschränkung entsteht. Eine andere Ausgestaltung wäre z.B.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & \mathbb{O}_{4\times 4} & \mathbb{O}_{4\times 4} \\ \mathbb{O}_{4\times 4} & \sigma_{\mu\nu} & \mathbb{O}_{4\times 4} \\ \mathbb{O}_{4\times 4} & \mathbb{O}_{4\times 4} & g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} \end{pmatrix} \ ,$$

wodurch dann die letzten vier Komponenten eines 12 - Tupels als die Komponenten eines Spin - 1 - Feldes, wie z.B. $\mathcal{U}_\mu$, festgelegt werden. Es würde dadurch ein System aus zwei Fermionen und einem Boson entstehen. Die RST zieht also ihren Teilchenbergriff daraus, daß sie die Blockdiagonalstruktur ihrer Lorentztransformation für ein allgemeines N - Tupel von Komponenten, das in einem zugehörigen (Vektor -) Faserbündel definiert ist, auch als die Lorentztransformation ausdrücken kann, die sich bei der Bildung der Whitneysumme von Faserbündeln mit entsprechenden Einzelfasern ergibt. “Entsprechende Einzelfasern” meint dabei jeweils Vektor - und Spinorfasern, welche aus den Abschnitten des Gesamttupels bestehen, die von einem Block der (blockdiagonalen) Lorentzgruppe transformiert werden. Allerdings ist diese reine Summenbildung aus Einzelbündeln in ihrer (Eich -) Potentialstruktur ärmer als der RST - Formalismus, denn die Struktur eines

Whitneysummenbündels überträgt sich nur bedingt in den Potentialanteil der RST, im Gegensatz zu den Eichpotentialanteilen der "echten" Whitneysummenbündel, die zur vergleichenden Ausbildung des Teilchenbegriffes herangezogen werden. Für das Beispiel des dreispinorigen Systems bedeutet dies, eben aufgrund der Zusammenfassung von je vier Komponenten des 12 - Tupels zu je einem Fermion durch die Lorentzgruppe mit den Generatoren (5.33), die Reduzierung der $U(12)$ auf die $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$, die dann noch in Eich - und Austauschanteile $E\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) = \left(U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\right)$ und $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) \setminus E\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ zerlegt wird. Damit ist aber der Potentialanteil der RST noch deutlich verschieden vom reinen $\left(U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right) \times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\right)$ - Potential eines Summenbündels bestehend aus drei Spinoren mit jeweiliger $U(1)$ - Symmetrie. Die Lorentzgruppe verursacht demgemäß die Reduzierung der Dimension des Potentialanteils auf die Anzahl der Teilchen, die sie herausprägt, aber nicht die Reduzierung des Potentialanteils auf den eines reinen Summenbündels. Diese zusätzliche Struktur, die die Yang - Millsform der RST besitzt, ist ja gerade der markante Unterschied zur Standardtheorie, der in dieser Arbeit, und besonders in diesem Kapitel, ausführlich diskutiert wird.

Wenn im vorangehenden Abschnitt von verschiedenen Varianten der Blockdiagonalstruktur der Lorentzgruppe eines N - Tupels die Rede ist, schwingt dabei natürlich im Hintergrund die Vorstellung mit, daß das N - Tupel eigentlich eine höherdimensionale Lorentzgruppe besitzt, die alle Komponenten dieses Tupels miteinander in Beziehung setzt, und daß diese ursprüngliche Symmetrie sich durch einen dynamischen Prozeß vermindert, wobei eine der verschiedenen möglichen Blockdiagonalstrukturen am Ende steht. Eine solche Dynamik existiert allerdings noch **nicht**. Sie gehört mit zum Problemkreis der für die RST noch zu entwickelnden Teilchenerzeugung und - vernichtung und somit zu den offenen Fragen, die mit den möglichen Erweiterungen des Formalismus in Beziehung stehen. Zu dieser Kategorie zählt auch der Inhalt des nächsten Abschnittes, der nochmals die Frage nach dem Spincharakter der Teilchen in der RST und etwaig auftretenden Vorzeichen aufgreift.

Abschließend soll noch angemerkt werden, daß sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Darstellung der Lorentzgruppe und dem Charakter der Teilchen wahrscheinlich besser mit der in Kapitel 2 präsentierten relativistischen Schrödingergleichung klären läßt. Dort ergibt im Unterkapitel 2.1 die Kontraktion der RSG (2.55a) mit Γ^μ die Diracgleichungen (2.57a), zusammengefaßt in (2.56a), die den Spin der Teilchen festlegt. Γ^μ bzw. die γ^μ sind aber gerade Teil des Generators (5.33) bzw. (5.32) der spinoriellen Darstellung der Lorentzgruppe, auch *weil* sie in der (den) Diracgleichung(en) auftreten. Die RSG (2.55a) hingegen ist eine sehr allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung, die als Bewegungsgleichung hinter allen Bewegungsgleichungen für Felder stehen soll. Man sieht an diesem Vorgang, bei dem aus einem allgemeinen $4N$ - Tupel und seiner Bewegungsgleichung durch Kontraktion mit dem für Spinoren charakteristischen Operator Γ^μ N Gleichungen für Spinoren entstehen, deutlicher als oben die Herausarbeitung der Teilchenzahl und vor allem - art aus einem sehr allgemeinen Objekt durch einen entsprechenden Operator. Was den Formalismus aus Kapitel 2 für die Frage nach einer dynamischen Entwicklung der charakteristischen Operatoren des Systems besonders interessant macht, ist die Dynamik des Hamiltonoperators $\mathcal{H}_\mu$, in die z.B. Γ^μ in (2.59) engstens eingebunden ist, dort sogar durch den Generator der Lorentzgruppe $\Sigma^{\mu\nu}$. Die Ausarbeitung der verschiedenen Formen von (2.59) für verschiedene Darstellungen der Lorentztransformationen und ihre Rückwirkung auf die RSG kann durchaus als die RST - Realisierung der Wignerschen Idee angesehen werden, daß die in der Natur auftretenden Teilchen den Realisierungen der Lorentzgruppe entsprechen.

Die Wirkung auf die Feldstärken

Die adjungierte Darstellung der Generatoren β_5 und β_8 lauten:

$$\upsilon_5^{\mathrm{ad}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.35a}$$

$$\upsilon_8^{\mathrm{ad}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.35b}$$

Daraus ergibt sich die adjungierte Darstellung der Transformation $\mathcal{S}_{13}$ (5.24)

$$\mathcal{S}_{13}^{\mathrm{ad}} = \exp\left\{\Lambda^5 \upsilon_5^{\mathrm{ad}} + \Lambda^8 \upsilon_8^{\mathrm{ad}}\right\} \ , \tag{5.36}$$

bei der, aus denselben Gründen wie bei (5.24), wieder $\Lambda^8 = -\Lambda^{5*}$ gilt. Die einzelnen Elemente dieser etwas raumgreifenden Matrix können unten aus den transformierten ${F^{f}}'_{\mu\nu}$ und ${G^{x}}'_{\mu\nu}$ herausgelesen werden.

Als Transformation, die aus der allgemeinen $U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ - Struktur der RST folgt, die wiederum in den Faserbündelformalismus einzuordnen ist, der einen Rahmen für die Freiheit der Darstellung einer Theorie gewährt, transformiert (5.36) ausschließlich die Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$, ohne daß diese Transformation auf die Lorentzgruppe zurückzuführen wäre. Gleiches gilt ja schon für ihr Gegenstück (5.24) in der Spinorfaser. Und auch wenn

die Achsen, um die jetzt gedreht wird, abstrakter als die der Raumzeit sind, tragen die Drehungen ihre Bezeichnung als Mitglieder der $SO(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ zu Recht, da beide das Skalarprodukt in ihren jeweiligen Wirkungsräumen invariant lassen, ihrem Status als Mitglieder der $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Faserbündelstruktur ihrer Theorie entsprechend. So bleibt K_{ab} (5.11) unter (5.36) invariant; ebenso $I^n{}_\ell$ (5.5) unter (5.24). Der zweite Fall ist wegen der Gleichheit von $I^n{}_\ell$ und $\delta^n{}_\ell \mathbb{1}_{4\times4}$ etwas langweilig. Im Kapitel 5.2 wird $I^n{}_\ell$ dann aber Formen besitzen, die den Zusammenhang zwischen dieser Metrik und den Austauschtransformationen deutlich interessanter werden lassen.
Anders als (5.24) transformiert (5.36) nicht nur zwei Komponenten des Vektors $\vec{V}_{\mu\nu} = \{V^a{}_{\mu\nu}\} = \left(F^1{}_{\mu\nu}, F^2{}_{\mu\nu}, F^3{}_{\mu\nu}, G^4{}_{\mu\nu}, G^5{}_{\mu\nu}, G^6{}_{\mu\nu}, G^7{}_{\mu\nu}, G^8{}_{\mu\nu}, G^9{}_{\mu\nu} \right)^T$, sondern bis auf $F^2{}_{\mu\nu}$ alle:

$$F^{1\prime}{}_{\mu\nu} = F^1{}_{\mu\nu} \cos^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + F^3{}_{\mu\nu} \sin^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + \left(\Lambda^5 G^5{}_{\mu\nu} + \Lambda^{5*} G^8{}_{\mu\nu}\right) \frac{i}{|\Lambda^5|} \sin\left(2\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37a}$$

$$F^{3\prime}{}_{\mu\nu} = F^1{}_{\mu\nu} \sin^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + F^3{}_{\mu\nu} \cos^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) - \left(\Lambda^{5*} G^5{}_{\mu\nu} + \Lambda^5 G^8{}_{\mu\nu}\right) \frac{i}{|\Lambda^5|} \sin\left(2\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37b}$$

$$G^{4\prime}{}_{\mu\nu} = G^4{}_{\mu\nu} \cos\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + G^9{}_{\mu\nu} \frac{i\Lambda^{5*}}{|\Lambda^5|} \sin\left(\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37c}$$

$$G^{5\prime}{}_{\mu\nu} = \left(\Lambda^5 F^1{}_{\mu\nu} + \Lambda^{5*} F^3{}_{\mu\nu}\right) \frac{i}{|\Lambda^5|} \sin\left(2\left|\Lambda^5\right|\right) + G^5{}_{\mu\nu} \cos^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + G^8{}_{\mu\nu} \left(\frac{i\Lambda^{5*}}{|\Lambda^5|}\right)^2 \sin^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37d}$$

$$G^{6\prime}{}_{\mu\nu} = G^6{}_{\mu\nu} \cos\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + G^7{}_{\mu\nu} \frac{i\Lambda^5}{|\Lambda^5|} \sin\left(\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37e}$$

$$G^{7\prime}{}_{\mu\nu} = G^6{}_{\mu\nu} \frac{i\Lambda^{5*}}{|\Lambda^5|} \sin\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + G^8{}_{\mu\nu} \cos\left(\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37f}$$

$$G^{8\prime}{}_{\mu\nu} = \left(\Lambda^5 F^1{}_{\mu\nu} + \Lambda^{5*} F^3{}_{\mu\nu}\right) \frac{i}{|\Lambda^5|} \sin\left(2\left|\Lambda^5\right|\right) + G^5{}_{\mu\nu} \left(\frac{i\Lambda^5}{|\Lambda^5|}\right)^2 \sin^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + G^8{}_{\mu\nu} \cos^2\left(\left|\Lambda^5\right|\right) \tag{5.37g}$$

$$G^{9\prime}{}_{\mu\nu} = G^4{}_{\mu\nu} \frac{i\Lambda^5}{|\Lambda^5|} \sin\left(\left|\Lambda^5\right|\right) + G^9{}_{\mu\nu} \cos\left(\left|\Lambda^5\right|\right) \ . \tag{5.37h}$$

Diese hohe Anzahl an Transformationen, die mit der einfachen Drehung (5.24) bzw. (5.25) zusammenhängen, mag zunächst überraschend wirken, ist bei genauerer Betrachtung aber tatsächlich notwendig. Denn im Gefolge der eichkovarianten Ableitungen der Feldstärken (5.23) ist schon darauf eingegangen worden, daß die Felder $B^5{}_\mu$ und $B^8{}_\mu$ als Koeffizienten der adjungierten Darstellungen β_5^{ad} und β_8^{ad} von β^5 und β^8, angewandt in der Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{Z}_{4\times4})$, nicht nur $F^1{}_{\mu\nu}$ und $F^3{}_{\mu\nu}$ an die Austauschfeldstärken $G^5{}_{\mu\nu}/G^8{}_{\mu\nu}$ koppeln, sondern auch $G^4{}_{\mu\nu}/G^7{}_{\mu\nu}$ an $G^6{}_{\mu\nu}/G^9{}_{\mu\nu}$. Es sind genau diese Kop-

pelungen, die in (5.37) wiedergegeben sind. Dabei erklärt die indirekte Verbindung der Eichfeldstärke ${F^1}_{\mu\nu}$ an ${F^3}_{\mu\nu}$ über den Umweg der Anbindung an die Austauschfeldstärken ${G^5}_{\mu\nu}/{G^8}_{\mu\nu}$, siehe (5.23b) und (5.23d), die Vermischung aller dieser vier Komponenten miteinander. Eben diese Vermischung von Eichfeldstärken und Austauschfeldstärken, die *nicht* auftreten soll, erzwingt die oben angesprochene Festlegung von $|\Lambda^5|$ auf den Wert $\frac{\pi}{2}$, bei dem, wegen $\sin\pi = 0^{\S}$, die Eichfeldstärken und die Austauschfeldstärken gerade jeweils unter sich bleiben. (Eine Eichwechselwirkung, die neben den Generatoren α_1, α_2 und α_3 auch β_5 und β_8 mit einschließen würde, unterläge dieser Einschränkung nicht.)
Weiterhin zeigt die spinorielle Transformation einen einfachen Grund, warum die Austauschfeldstärken ${G^4}_{\mu\nu}$, ${G^7}_{\mu\nu}$, ${G^6}_{\mu\nu}$ und ${G^9}_{\mu\nu}$ mittransformiert werden müssen: Sie vermitteln den Austausch zwischen dem zweiten Platz im Gesamtspinor Ψ mit den Plätzen eins und drei, an denen jetzt Mischungen ${}^1\psi'$ und ${}^3\psi'$ der ursprünglichen Platzinhaber ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ stehen. Diesem Sachverhalt hat die zugehörige Austauschwechselwirkung Rechnung zu tragen.
Mit $|\Lambda^5| = \frac{\pi}{2}$ wird (5.37) zu:

$$ {F^{1\prime}}_{\mu\nu} = {F^3}_{\mu\nu} \tag{5.38a} $$
$$ {F^{3\prime}}_{\mu\nu} = {F^1}_{\mu\nu} \tag{5.38b} $$
$$ {G^{4\prime}}_{\mu\nu} = \frac{2i\Lambda^{5*}}{\pi}{G^9}_{\mu\nu} \tag{5.38c} $$
$$ {G^{5\prime}}_{\mu\nu} = \left(\frac{2i\Lambda^5}{\pi}\right)^2 {G^8}_{\mu\nu} \tag{5.38d} $$
$$ {G^{6\prime}}_{\mu\nu} = \frac{2i\Lambda^{5*}}{\pi}{G^7}_{\mu\nu} \tag{5.38e} $$
$$ {G^{7\prime}}_{\mu\nu} = \frac{2i\Lambda^5}{\pi}{G^6}_{\mu\nu} \tag{5.38f} $$
$$ {G^{8\prime}}_{\mu\nu} = \left(\frac{2i\Lambda^{5*}}{\pi}\right)^2 {G^5}_{\mu\nu} \tag{5.38g} $$
$$ {G^{9\prime}}_{\mu\nu} = \frac{2i\Lambda^5}{\pi}{G^4}_{\mu\nu} \; . \tag{5.38h} $$

Passend zum Platzwechsel ${}^1\psi \to \frac{2i\Lambda^5}{\pi}{}^3\psi$, ${}^3\psi \to \frac{2i\Lambda^{5*}}{\pi}{}^1\psi$ der Spinoren in (5.26) finden demnach im Anteil der Austauschfeldstärken die zugehörigen Platzwechsel statt. Im Spezialfall $\Lambda^5 = i\Theta$, $\Theta \in \mathbb{R}$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$ gehen die aus Spin - 1 - Feldern bestehenden ${G^6}_{\mu\nu}$ und ${G^9}_{\mu\nu}$ in ${G^{7\prime}}_{\mu\nu}$ und ${G^{4\prime}}_{\mu\nu}$ mit einem Vorzeichenwechsel über, der “unbosonisch” erscheint. Die Zuordnung der Potentiale in den ${G^x}_{\mu\nu}$ zu den Feldern mit Spin 1 geschieht,

§Der Wert $\left|\Lambda^5\right| = 0$ führt zur identischen Transformation in beiden Räumen, $\mathcal{S}_{13} = {\delta^n}_m \cdot \mathbb{1}_{4\times4}$ und $\mathcal{S}_{13}^{\mathrm{ad}} = \mathbb{1}_{9\times9}$, während für $\left|\Lambda^5\right| = \pi$ $\mathcal{S}_{13} = \mathrm{diag}\{-\mathbb{1}_{4\times4}, \mathbb{1}_{4\times4}, -\mathbb{1}_{4\times4}\}$ und $\mathcal{S}_{13}^{\mathrm{ad}} = \mathrm{diag}\{1,1,1,-1,1,-1,-1,1,-1\}$ entstehen, also im wesentlichen wieder die Einheitstransformationen.

in Analogie zur früher erfolgten Zuordnung der Spinoren zu den Spin - $\frac{1}{2}$ - Feldern, durch die Darstellung, die die Lorentzgruppe bei der Wirkung auf die Potentiale besitzt.
Dieses ist das im Vergleich zur Standardtheorie merkwürdige Vorzeichenverhalten des Potentialanteils der RST unter Austauschtransformationen, das bei der Diskussion der Austauschtransformationen in der Spinorfaser angekündigt wurde. Da aber das Verständnis des Teilchenaustausches in der RST deutlich von dem der Standardtheorie verschieden ist, was deutlich an der Mathematik zu ersehen ist, die zu seiner Beschreibung verwendet wird, wobei die bereits oben zu diesem Punkt durchgeführte ausführliche Diskussion auch hier greift, wenn das Spinorbündel durch die Liealgebra ersetzt wird, ist der Wechsel der Vorzeichen mitnichten merkwürdig oder gar falsch, sondern bezogen auf den verwendeten Formalismus sogar zwingend notwendig. Der Übergang von ${D_\mu}^3\psi$ in $-{D_\mu}^1\psi$ wäre ohne die Vorzeichenwechsel in (5.38c) und (5.38f) gar nicht möglich; siehe (5.20a) und (5.20c).
Auch durch die adjungierte Darstellung der Spiegelung (5.28), die zusammen mit (5.24) für den Spezialfall eines rein imaginären Λ^5 zu (5.29) führt, ergibt keine Transformation mit "gewohnten" Vorzeichen, denn die adjungierte Darstellung von $\mathcal{S}_{\mathrm{Sp}} \cdot \mathcal{S}_{13}$ ergibt (wieder unter der Voraussetzung $\Lambda^5 = i\Theta$)

$$F^{1\prime}{}_{\mu\nu} = F^3{}_{\mu\nu} \tag{5.39a}$$
$$F^{3\prime}{}_{\mu\nu} = F^1{}_{\mu\nu} \tag{5.39b}$$
$$G^{4\prime}{}_{\mu\nu} = -G^9{}_{\mu\nu} \tag{5.39c}$$
$$G^{5\prime}{}_{\mu\nu} = -G^8{}_{\mu\nu} \tag{5.39d}$$
$$G^{6\prime}{}_{\mu\nu} = -G^7{}_{\mu\nu} \tag{5.39e}$$
$$G^{7\prime}{}_{\mu\nu} = -G^6{}_{\mu\nu} \tag{5.39f}$$
$$G^{8\prime}{}_{\mu\nu} = -G^5{}_{\mu\nu} \tag{5.39g}$$
$$G^{9\prime}{}_{\mu\nu} = -G^4{}_{\mu\nu} \,. \tag{5.39h}$$

Zudem tritt bei dieser Transformation ein "unfermionisches" Vorzeichen in der Spinorfaser auf. Die Vorzeichenfrage ist aber gar keine; sie ist vielmehr nur das sichtbarste Zeichen dafür, wie unterschiedlich die RST und die Standardtheorie den Vorgang des Austausches behandeln. Um genau diesen, letztendlich in der verwendeten Mathematik wurzelnden Unterschied herauszuarbeiten, werden die in der RST eigentlich völlig unproblematischen bosonischen Vorzeichenwechsel so ausführlich behandelt.
Wie schon erwähnt, ist der hier angegebene Grund für die Beschränkung der Λ^x, für die Λ^5 als stellvertretendes Beispiel dient, plausibel, aber noch nicht die tiefere Begründung für die Einschränkungen der Restsymmetrie $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \backslash (U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U\,(\mathbb{1}_{4\times4}))$, die bei der Normierung der Ströme angegeben wird. Die Wirkung und Beschränkung wird deshalb bereits vor der Normierung besprochen, um die bereits häufig verwendeten Termini "Austauschsymmetrie", "Austauschtransformation", usw., deren Verwendung sprachliche Verrenkungen bei der Bezeichnung der Nicht - Eichsymmetrien verhindert, wie z.B die unterschiedliche Benennung dieser Symmetrien vor und nach dem Kapitel

über die Normierungen, sinngemäß verständlich zu machen.

5.1.3. Die Ströme

Die Ströme mit kontravarianter Stellung des Faserindexes a lassen sich mit (5.4), (5.5) und (5.17) aus (4.53) gewinnen. Alternativ können mit (5.6) und (5.7) aus (4.47) auch erst die Ströme mit kovarianter Stellung von a formuliert werden, um dann mit (5.12) durch $j^a{}_\nu = K^{ab} j_{b\nu}$ die kontravariante Version zu erhalten. Das Ergebnis für die den *Eichgeneratoren* α^f (5.17a) - (5.17c) zugeordneten *Eichströme* $j^f{}_\nu$ ist beide Male:

$$\begin{aligned}
j^1{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\Big(\big(K^{12}+K^{13}\big)\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi + \big(K^{11}+K^{13}\big)\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi + \big(K^{11}+K^{12}\big)\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi\Big) \\
&\quad + \frac{ie}{4\pi}\big(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu}G^5{}_{\mu\nu}\big) - \frac{ie}{4\pi}\big(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\big) && (5.40a) \\
k^1{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\Big(\big(K^{12}+K^{13}\big)\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi + \big(K^{11}+K^{13}\big)\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi + \big(K^{11}+K^{12}\big)\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi\Big) && (5.40b) \\
l^1{}_\nu &= \frac{ie}{4\pi}\big(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu}G^5{}_{\mu\nu}\big) - \frac{ie}{4\pi}\big(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\big) && (5.40c) \\
&= -\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\big(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu}\big) + \frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\big(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^2{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\Big(\big(K^{22}+K^{23}\big)\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi + \big(K^{21}+K^{23}\big)\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi + \big(K^{21}+K^{22}\big)\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi\Big) \\
&\quad - \frac{ie}{4\pi}\big(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu} - B^{7\mu}G^4{}_{\mu\nu}\big) + \frac{ie}{4\pi}\big(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\big) && (5.40d) \\
k^2{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\Big(\big(K^{22}+K^{23}\big)\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi + \big(K^{21}+K^{23}\big)\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi + \big(K^{21}+K^{22}\big)\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi\Big) && (5.40e) \\
l^2{}_\nu &= -\frac{ie}{4\pi}\big(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu} - B^{7\mu}G^4{}_{\mu\nu}\big) + \frac{ie}{4\pi}\big(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\big) && (5.40f) \\
&= \frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\big(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu}\big) - \frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\big(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^3{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\Big(\big(K^{32}+K^{33}\big)\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi + \big(K^{31}+K^{33}\big)\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi + \big(K^{31}+K^{32}\big)\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi\Big) \\
&\quad + \frac{ie}{4\pi}\big(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu} - B^{7\mu}G^4{}_{\mu\nu}\big) - \frac{ie}{4\pi}\big(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu}G^5{}_{\mu\nu}\big) && (5.40g) \\
k^3{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\Big(\big(K^{32}+K^{33}\big)\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi + \big(K^{31}+K^{33}\big)\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi + \big(K^{31}+K^{32}\big)\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi\Big) && (5.40h) \\
l^3{}_\nu &= \frac{ie}{4\pi}\big(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu} - B^{7\mu}G^4{}_{\mu\nu}\big) - \frac{ie}{4\pi}\big(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu}G^5{}_{\mu\nu}\big) && (5.40i) \\
&= -\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\big(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu}\big) + \frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\big(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu}\big)
\end{aligned}$$

Zu den *Generatoren der Restsymmetrie* (Austauschgeneratoren) (5.17d)-(5.17i) gehören die *Ströme der Restsymmetrie* (Austauschströme) ${j^x}_\nu$:

$$\begin{aligned} {j^4}_\nu = &-\frac{e}{4\pi}K^{47}\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^2\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{8\mu}{G^9}_{\mu\nu} - B^{9\mu}{G^8}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{2\mu} - A^{3\mu}\right){G^4}_{\mu\nu} \\ &-\frac{ie}{4\pi}B^{4\mu}\left({F^2}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.41a}$$

$${k^4}_\nu = -\frac{e}{4\pi}K^{47}\,{}_3\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^2\psi = -{k^{7*}}_\nu \tag{5.41b}$$

$${l^4}_\nu = \frac{ie}{4\pi}\left(B^{8\mu}{G^9}_{\mu\nu} - B^{9\mu}{G^8}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{2\mu} - A^{3\mu}\right){G^4}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}B^{4\mu}\left({F^2}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}\right) \tag{5.41c}$$

$$\begin{aligned} {j^5}_\nu = &-\frac{e}{4\pi}K^{58}\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu}{G^9}_{\mu\nu} - B^{9\mu}{G^7}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{3\mu}\right){G^5}_{\mu\nu} \\ &+\frac{ie}{4\pi}B^{5\mu}\left({F^1}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.41d}$$

$${k^5}_\nu = -\frac{e}{4\pi}K^{58}\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^3\psi = -{k^{8*}}_\nu \tag{5.41e}$$

$${l^5}_\nu = -\frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu}{G^9}_{\mu\nu} - B^{9\mu}{G^7}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{3\mu}\right){G^5}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}B^{5\mu}\left({F^1}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}\right) \tag{5.41f}$$

$$\begin{aligned} {j^6}_\nu = &-\frac{e}{4\pi}K^{69}\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^1\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu}{G^8}_{\mu\nu} - B^{8\mu}{G^7}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right){G^6}_{\mu\nu} \\ &-\frac{ie}{4\pi}B^{6\mu}\left({F^1}_{\mu\nu} - {F^2}_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.41g}$$

$${k^6}_\nu = -\frac{e}{4\pi}K^{69}\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^1\psi = -{k^{9*}}_\nu \tag{5.41h}$$

$${l^6}_\nu = +\frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu}{G^8}_{\mu\nu} - B^{8\mu}{G^7}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right){G^6}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}B^{6\mu}\left({F^1}_{\mu\nu} - {F^2}_{\mu\nu}\right) \tag{5.41i}$$

$$\begin{aligned} {j^7}_\nu = &\frac{e}{4\pi}K^{74}\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^3\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{5\mu}{G^6}_{\mu\nu} - B^{6\mu}{G^5}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{2\mu} - A^{3\mu}\right){G^7}_{\mu\nu} \\ &+\frac{ie}{4\pi}B^{7\mu}\left({F^2}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.41j}$$

$${k^7}_\nu = \frac{e}{4\pi}K^{74}\,{}_2\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^3\psi = -{k^{4*}}_\nu \tag{5.41k}$$

$$\begin{aligned} {l^7}_\nu = &+\frac{ie}{4\pi}\left(B^{5\mu}{G^6}_{\mu\nu} - B^{6\mu}{G^5}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{2\mu} - A^{3\mu}\right){G^7}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}B^{7\mu}\left({F^2}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}\right) \\ &= -{l^{4*}}_\nu \end{aligned} \tag{5.41l}$$

$$\begin{aligned}
j^8{}_\nu &= \frac{e}{4\pi} K^{85}\, {}_3\overline{\psi}\gamma_\mu\, {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu}G^6{}_{\mu\nu} - B^{6\mu}G^4{}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{3\mu}\right) G^8{}_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{ie}{4\pi} B^{8\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu}\right) && (5.41\text{m}) \\
k^8{}_\nu &= \frac{e}{4\pi} K^{85}\, {}_3\overline{\psi}\gamma_\mu\, {}^1\psi = -k^{5*}{}_\nu && (5.41\text{n}) \\
l^8{}_\nu &= -\frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu}G^6{}_{\mu\nu} - B^{6\mu}G^4{}_{\mu\nu}\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{3\mu}\right) G^8{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi} B^{8\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu}\right) \\
&= -l^{5*}{}_\nu && (5.41\text{o})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^9{}_\nu &= \frac{e}{4\pi} K^{96}\, {}_1\overline{\psi}\gamma_\mu\, {}^2\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu}G^5{}_{\mu\nu} - B^{5\mu}G^4{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right) G^9{}_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{ie}{4\pi} B^{9\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right) && (5.41\text{p}) \\
k^9{}_\nu &= \frac{e}{4\pi} K^{96}\, {}_1\overline{\psi}\gamma_\mu\, {}^2\psi = -k^{6*}{}_\nu && (5.41\text{q}) \\
l^9{}_\nu &= +\frac{ie}{4\pi}\left(B^{4\mu}G^5{}_{\mu\nu} - B^{5\mu}G^4{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right) G^9{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi} B^{9\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right) \\
&= -l^{6*}{}_\nu && (5.41\text{r})
\end{aligned}$$

Die Aufteilung in einen Materieanteil $k^a{}_\nu$ und einen Potentialanteil $l^a{}_\nu$ folgt sowohl in (5.40) als auch (5.41) dem in die kontravariante Schreibweise übertragenen Muster (4.48).

5.1.4. Die Bewegungsgleichungen

Mit den eichkovarianten Ableitungen der Spinoren (5.20) und der Feldstärken (5.23), den Feldstärken selber (5.22) sowie den Strömen (5.40) und (5.41) sind alle Bestandteile des allgemeinen Formalismus aus Kapitel 4 auf den Dreiteilchenfall mit elektromagnetischer Wechselwirkung spezialisiert worden, die notwendig sind, um die Bewegungsgleichungen der beteiligten Felder und Potentiale für diesen Fall angeben zu können; zuerst die Diracgleichungen der Spinoren, dann die Yang - Millsgleichungen der Potentiale.

Die Bewegungsgleichungen der Spinoren

Aus (4.64) ergeben sich mit der Matrix $M \cdot \mathbb{1}_{12\times 12}$ (5.3) der drei gleichen Spinormassen und den eichkovarianten Ableitungen der Spinoren (5.20a), (5.20b) und (5.20c) die folgenden drei Diracgleichungen, je eine für jeden der drei Spinoren (5.2a), (5.2b) und (5.2c):

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu\, {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^2{}_\mu + A^3{}_\mu\right) {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi} B^6{}_\mu\, {}^2\psi + \frac{ie}{4\pi} B^8{}_\mu\, {}^3\psi\right) + iM\, {}^1\psi = 0 \qquad (5.42\text{a})$$

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu\, {}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu + A^3{}_\mu\right) {}^2\psi - \frac{ie}{4\pi} B^4{}_\mu\, {}^3\psi + \frac{ie}{4\pi} B^9{}_\mu\, {}^1\psi\right) + iM\, {}^2\psi = 0 \qquad (5.42\text{b})$$

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi} \left(A^1{}_\mu + A^2{}_\mu \right) {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi} B^5{}_\mu {}^1\psi + \frac{ie}{4\pi} B^7{}_\mu {}^2\psi \right) + iM\,{}^3\psi = 0\,. \tag{5.42c}$$

Abgesehen von den offensichtlichen Koppelungen dieser Gleichungen durch das Auftreten aller drei Spinoren an den Potentialtermen ist die räumliche und zeitliche Entwicklung eines Spinors auch indirekt an die beiden anderen gebunden, da diese auch in den Quellen der Feldstärkegleichungen des nächsten Abschnittes erscheinen.
Die "Langformen" der eichkovarianten Ableitungen, wie sie in den Klammern in (5.42) stehen, wird bei der Bestimmung der Normierung nützlich sein.

Die Bewegungsgleichungen der Potentiale

Aus (4.68), deren rechte Seiten die Ströme $j^a{}_\nu$ sind, folgen mit der in (4.43a) - (4.44c) angegebenen Aufteilung $\{U^a{}_\mu\} = \left\{A^f{}_\mu\right\} \cup \{B^x{}_\mu\} \to \{V^a{}_{\mu\nu}\} = \left\{F^f{}_{\mu\nu}\right\} \cup \{G^x{}_{\mu\nu}\}$, wobei jetzt $a = 1, \ldots, 9$, $f = 1, 2, 3$ und $x = 4, \ldots, 9$ gilt, unter Verwendung von (5.40) das Set der Yang - Millsgleichungen für die $F^f{}_{\mu\nu}$ (5.22c), (5.22d) und (5.22e)

$$\partial^\mu F^1{}_{\mu\nu} = -k^1{}_\nu - l^1{}_\nu \tag{5.43a}$$
$$\partial^\mu F^2{}_{\mu\nu} = -k^2{}_\nu - l^2{}_\nu \tag{5.43b}$$
$$\partial^\mu F^3{}_{\mu\nu} = -k^3{}_\nu - l^3{}_\nu\,, \tag{5.43c}$$

sowie durch Verwendung von (5.41) dasjenige für die $G^x{}_{\mu\nu}$ (5.22g) - (5.22l)

$$\partial^\mu G^4{}_{\mu\nu} = -k^4{}_\nu - l^4{}_\nu \tag{5.44a}$$
$$\partial^\mu G^5{}_{\mu\nu} = -k^5{}_\nu - l^5{}_\nu \tag{5.44b}$$
$$\partial^\mu G^6{}_{\mu\nu} = -k^6{}_\nu - l^6{}_\nu \tag{5.44c}$$
$$\partial^\mu G^7{}_{\mu\nu} = -k^7{}_\nu - l^7{}_\nu \tag{5.44d}$$
$$\partial^\mu G^8{}_{\mu\nu} = -k^8{}_\nu - l^8{}_\nu \tag{5.44e}$$
$$\partial^\mu G^9{}_{\mu\nu} = -k^9{}_\nu - l^9{}_\nu\,. \tag{5.44f}$$

Die Potential/Feldstärkeanteile $l^a{}_\nu$ der Ströme $j^a{}_\nu = k^a{}_\nu + l^a{}_\nu$ sind in beiden Fällen gleich den Kommutatortermen der eichkovarianten Ableitungen, vergleiche (5.23).
Auch hier ermöglicht die "Langform" der Bewegungsgleichungen mit ausgeschriebenen eichkovarianten Ableitungen einen besseren Einblick in die Normierung der Ströme.

5.1.5. Die Normierung der Ströme und das Teilchenbild der RST

Durch die Art, wie die Ströme normiert werden, wird viel über das Teilchenbild der RST und das Verständnis der Wechselwirkungen ausgesagt. Genau genommen werden erst durch die Festlegung der Normierung viele Aspekte des Teilchenbildes der RST scharf gefaßt, und damit der Teilchenbegriff wirklich gefestigt, sowie sein Geltungsbereich festgelegt.

Dieser demnach über die Festlegung von Kopplungskonstanten und Ladungen hinaus wichtige Vorgang der Normierung erhält deshalb ein eigenes Unterkapitel, anstatt bei den Strömen mitbehandelt zu werden.
Gemäß der logischen Struktur der RST geschieht dieses in einem Abschnitt über die Eichströme und einem über die Austauschströme. In ersterem werden durch die Normierungen auch die Metrikkomponenten K^{fg}, $f, g = 1, 2, 3$ festgelegt, wodurch dann wiederum die Parameter c_1 und c_2 bestimmt sind und damit auch die Elemente K^{xy}, $x, y = 4, \ldots, 9$ aus (5.12).
Die Einteilung der Abschnitte beruht auf der Unterteilung der Symmetrien in der RST. Obwohl in ihren Generatoren streng voneinander getrennt, beziehen sich die Vorstellungen, die in die Normierung der jeweiligen Stromsorten einfließen, nicht nur auf die Art der namentlich zugehörigen Wechselwirkung; vor allem die Norm der Eichströme hat sowohl mit der Natur der Eichwechselwirkung zu tun als auch mit der der Austauschwechselwirkung.
Weiterhin besitzen beide Stromsorten einen gleichberechtigen Anteil am Teilchenbegriff. Der darin zum Ausdruck kommende Zusammenhang dieses Begriffes mit der Strukturgruppe ist Inhalt der restlichen Abschnitte.

Die Eichströme

Gemäß dem Noethertheorem ist jeder der drei Ströme ${j^1}_\nu$, ${j^2}_\nu$ und ${j^3}_\nu$ (5.40a), (5.40d) und (5.40g) eine quellfreie Dichte

$$\partial^\nu {j^f}_\nu \equiv 0 \qquad f = 1, 2, 3\ , \tag{5.45}$$

weshalb die räumlichen Integrale der Nullkomponenten jeder dieser Dichten eine zeitlich erhaltene Größe ist:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\ {j^f}_0 = z^f = const \qquad f = 1, 2, 3\ . \tag{5.46}$$

In jeder der Dichten (5.40a), (5.40d) und (5.40g) übernehmen die Einzeldichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$ und ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ unterschiedliche Rollen, wie aus den verschiedenen Koeffizienten aus Summen der Metrikkomponenten abgelesen werden kann. Für alle weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, erst einmal (5.12) $K^{11} = K^{22} = K^{33}$ und $K^{fg} = K^{gf}$, $g \neq f$, $f, g = 1, 2, 3$ zu entnehmen. Betrachtet man nun z.B. ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$ wird es demnach in ${j^1}_\nu$ mit $2K^{12}$ anders gewichtet als in ${j^2}_\nu$ und in ${j^3}_\nu$ mit $K^{11} + K^{13}$, in denen es dieselbe Rolle spielt. Ferner enthalten ${j^2}_\nu$ und ${j^3}_\nu$, nicht aber ${j^1}_\nu$, Einzeldichten mit demselben Koeffizienten $K^{11} + K^{13}$; in ${j^2}_\nu$ ist dies ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ und in ${j^3}_\nu$ ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$. Analoge Aussagen gelten für die anderen beiden Einzeldichten.

Jede der drei Dichten $j^1{}_\nu$, $j^2{}_\nu$ und $j^3{}_\nu$ ist unter der allgemeinen Eichtransformation $E\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) = U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$

$$\mathcal{S}\left(\Lambda^f \alpha_f\right) = \exp\left\{\begin{pmatrix} -i\,(\Lambda^2+\Lambda^3) & 0 & 0 \\ 0 & -i\,(\Lambda^1+\Lambda^3) & 0 \\ 0 & 0 & -i\,(\Lambda^1+\Lambda^2) \end{pmatrix}\right\} \tag{5.47}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\left(\Lambda^2+\Lambda^3\right)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\left(\Lambda^1+\Lambda^3\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-i\left(\Lambda^1+\Lambda^2\right)} \end{pmatrix}$$

$$= \exp\left\{\begin{pmatrix} -i\,(\Lambda^2+\Lambda^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \times \exp\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\,(\Lambda^1+\Lambda^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\times \exp\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\,(\Lambda^1+\Lambda^2) \end{pmatrix}\right\}\,,$$

invariant. Dabei ist die Anordnung der Elemente der Transformation völlig egal. Die Transformation $\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\Lambda^1+\Lambda^3\right)}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\Lambda^1+\Lambda^2\right)}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\Lambda^2+\Lambda^3\right)}\right)$ liefert die gleichen Invarianzen wie die ursprüngliche Transformation oder jede andere Anordnung der Elemente S^{11}, S^{22} und S^{33}. Da alle drei Generatoren $\alpha_{f=1,2,3}$ der $U(\mathbb{1}_{4\times4})$ - Transformationen dieselbe Kopplungskonstante mit sich führen, d.h. dieselbe Eichinvarianz beschreiben, folglich vertauscht werden können, kommt jeder der Transformationen auch dieselbe Erhaltungsgröße zu.

$$z^1 \equiv z^2 \equiv z^3 \doteqdot z\,. \tag{5.48}$$

Die gerade getroffenen Aussagen hinsichtlich der Eichinvarianz gelten unverändert auch für die Einzeldichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$, ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ und $B^{u\,\mu}G^{u+3}{}_{\mu\nu}$, $B^{(u+3)\,\mu}G^{u}{}_{\mu\nu}$, $u = 4,5,6$. Ganz offensichtlich ist jede für sich invariant unter $U(\mathbb{1}_{4\times4})$ - Transformationen, wobei es unerheblich ist, welche der Transformationen S^{11}, S^{22} oder S^{33} zum Zuge kommt. Demzufolge spielt keine Dichte gegenüber den anderen beiden eine gesonderte Rolle.
Auf die Folgen, die die Vertauschbarkeit der Elemente der Eichgruppe hervorruft, wird in späteren Abschnitten noch in aller Ausführlichkeit eingegangen. Dabei wird es sich als fundamental wichtig für den Teilchenbegriff der RST erweisen, daß diese Vertauschbarkeit in den Stromdichten wie in deren Konstituenten, den Einzeldichten, gleichermaßen auftritt. Sie hängt auch eng damit zusammen, welche Elemente aus der Menge der Austauschtransformationen $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \setminus (U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U\,(\mathbb{1}_{4\times4}))$ neben der

Eichgruppe zugelassen sind, und in welcher Form sie auftreten dürfen: völlig frei oder beschränkt.
Unter allgemeinen Austauschtransformationen aus $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)\setminus\left(U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\right)$ sind natürlich weder die Einzeldichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$ oder ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ noch die Stromdichten invariant. Allerdings müssen, wie gesagt, solche Transformationen nicht vollständig ausgeschlossen werden, sondern nur auf diejenigen beschränkt werden, die den Begriffsapparat, der mit der Eichgruppe $U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)$ sowie der Austauschbarkeit ihrer Elemente untereinander zusammenhängt, invariant lassen. Um welchen es sich dabei genau handelt, soll im Folgenden herausgearbeitet werden.
Für diese Herausarbeitung sind die Noetherströme als solche allerdings nicht geeignet. Vielmehr werden Linearkombinationen aus $j^1{}_\nu$, $j^2{}_\nu$ und $j^3{}_\nu$ benötigt, auf die sich die oben angegebenen Eigenschaften selbstverständlich, meist direkt, übertragen.
Betrachtet man die Diracgleichung (5.42a) für Teilchen ${}^1\psi$ oder seine eichkovariante Ableitung (5.20a), sieht man, daß ${}^1\psi$ an die Eichwechselwirkung durch die Summe $A^2{}_\mu+A^3{}_\mu$ der Eichpotentiale $A^2{}_\mu$ und $A^3{}_\mu$ gekoppelt ist. Folglich sind hinsichtlich der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Eichwechselwirkung, die ${}^1\psi$ erfährt, die summierten Bewegungsgleichungen (5.43b) und (5.43c) von Belang. Die Quelle dieser aufsummierten Divergenzgleichungen ist die Summe der Ströme $j^2{}_\nu$ und $j^3{}_\nu$. Gleichartige Argumentationen lassen sich für die Eichwechselwirkung von ${}^2\psi$ und ${}^3\psi$ führen, mit dem Ergebnis, daß die Quellen der von ihnen gespürten Eichwechselwirkungen die Kombinationen $j^1{}_\nu+j^3{}_\nu$ und $j^1{}_\nu+j^2{}_\nu$ sind. Da die Normierung der Ströme nicht willkürlich erfolgt, sondern direkten Bezug zu der von ihnen zwischen den Teilchen eines Systems vermittelten Wechselwirkung haben soll, ist es im vorliegenden Fall sinnvoll, für die Festlegung aller von der Normierung betroffenen Größen, wie z.B. der Metrikkomponenten K^{fg}, die die Koppelungsstärke zwischen den Strömen, genauer den Einzeldichten, und den Feldstärken festlegen, anstatt der Noetherströme ihre oben angegebenen Linearkombinationen zu betrachten, die sich aus den Summen der in den eichkovarianten Ableitungen auftretenden Eichpotentialen ableiten, mit anderen Worten von der Form der tatsächlich wirkenden Eichwechselwirkungen. Die nachfolgende Diskussion stützt sich also auf die Dichten

$$\begin{aligned} j^2{}_\nu+j^3{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\left(K^{11}+3K^{12}\right)\left({}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi+{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi\right)+\frac{e}{4\pi}\cdot 2\left(K^{11}+K^{12}\right){}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \\ &\quad -\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu}\right)+\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\left(B^{5\mu}G^8{}_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.49a}$$

$$\begin{aligned} j^1{}_\nu+j^3{}_\nu &= \frac{e}{4\pi}\left(K^{11}+3K^{12}\right)\left({}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi+{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi\right)+\frac{e}{4\pi}\cdot 2\left(K^{11}+K^{12}\right){}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi \\ &\quad +\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu}\right)-\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}G^7{}_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.49b}$$

$$j^1{}_\nu+j^2{}_\nu = \frac{e}{4\pi}\left(K^{11}+3K^{12}\right)\left({}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi+{}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi\right)+\frac{e}{4\pi}\cdot 2\left(K^{11}+K^{12}\right){}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$$

$$-\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\left(B^{5\mu}G^{8}{}_{\mu\nu}\right)+\frac{e}{4\pi}\mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}G^{7}{}_{\mu\nu}\right)\ . \tag{5.49c}$$

Die Anteile mit dem Koeffizienten $K^{11}+3K^{12}$ sind dabei die Quellen der Wechselwirkungen zwischen einem Teilchen und den anderen des Systems, der sogenannten Fremdwechselwirkung. Da die Eichwechselwirkung die bekannte elektromagnetische sein soll, mit der bereits eingeführten Kopplungskonstanten $\frac{e}{4\pi}$ ist für den Koeffizienten $K^{11}+3K^{12}$

$$K^{11}+3K^{12}=1 \tag{5.50}$$

zu fordern.
Hingegen verursachen die Terme mit dem Koeffizienten $2\left(K^{11}+K^{12}\right)$ die Selbstwechselwirkungen der Teilchen. Sie können nicht mit derselben Stärke wie die Fremdwechselwirkungsterme an die Feldstärken koppeln, da die Bedingung

$$2\left(K^{11}+K^{12}\right)=1 \tag{5.51}$$

zu

$$K^{11}=K^{12}=\frac{1}{4} \tag{5.52}$$

und damit, über das daraus folgende $\det\mathcal{K}^{-1}=0$, zu einer Metrik ohne Inverse führen.
Für

$$K^{11}=-K^{12}=\frac{1}{2} \tag{5.53}$$

entfällt die Selbstwechselwirkung.
Weiterhin sind in dieser Art der Selbstwechselwirkung eines Teilchens, die durch die eigene Stromdichte in den Quellen seiner Eichwechselwirkung verursacht werden, keine virtuellen Vorgänge enthalten, bei denen aus einem strukturierten Vakuum (also einem Vakuum, das nur bezüglich einer geeigneten Mittelwertbildung “leer” ist) Energie und Impuls entnommen und zurückgegeben werden, oder kurzfristig ein zusätzliches e^+ - e^- Ladungspaar als Quelle für die Eichpotentiale zur Verfügung steht, ohne daß dieser Vorgang direkt meßbar wäre, analog zur Selbstenergie oder der Vakuumpolarisation der Standardtheorie.
Die Einzeldichten treten in keiner einzelnen der drei Dichten aus dem Satz (5.49) in einer Weise auf, die völlig äquivalent zu ihrem Auftreten in einer der anderen Dichten aus dieser Menge ist. Der Unterschied zwischen der Funktion als Quelle einer Fremdwechselwirkung oder einer Selbstwechselwirkung fällt sofort auf und kann an dem Koeffizienten, mit dem die jeweilige Dichte auftritt, abgelesen werden. Aber auch in ihren Wirkungsweisen als Ursprünge der Fremdwechselwirkungen sind die Einzeldichten in den verschiedenen Strömen nicht völlig gleich, da sie diese Funktion immer zusammen mit einer zweiten Dichte ausfüllen, die sich von der in der anderen Dichte, in der sie mit gleicher Aufgabe erscheinen, unterscheidet. Z.B. wirkt ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi$ in (5.49a) als Quelle

der Selbstwechselwirkung von ${}^1\psi$, in (5.49b) als Quelle der Fremdwechselwirkung, die ${}^2\psi$ erfährt, zusammen mit ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$, während sie in (5.49c) als Partnerdichte für die Fremdwechselwirkung bezüglich ${}^3\psi$ ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$ besitzt. Auf diese Vereinzelung der Dichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$ und ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$, die darin zum Ausdruck kommt, wird im übernächsten Abschnitt noch einmal zurückzukommen sein. Sie ist keine Eigenheit der Summenströme (5.49), sondern ist schon in den "originalen" Noetherströmen (5.40) vorhanden, was dort an ihren jeweils unterschiedlichen Koeffizienten in den verschiedenen Ausdrücken abgelesen werden kann; siehe die Anmerkungen nach (5.46). In seiner dortigen abstrakten Form ist dieser Unterschied jedoch physikalisch nicht interpretierbar.
Hinsichtlich der Austauschwechselwirkung, die in den Dichten (5.49) durch die Ausdrücke $\mathfrak{Im}\,(B^{u\mu}G^{u+3}{}_{\mu\nu})$, $u = 4, 5, 6$, vertreten wird, ist es wichtig zu bemerken, daß sich diese Anteile immer so kombinieren, daß keine Terme auftreten, die dem Austausch der Teilchen in den Fremdwechselwirkungstermen zugeordnet sind. So heben sich z.B. bei der Bildung des Quellstromes (5.49b) der Eichwechselwirkung, die auf ${}^2\psi$ wirkt, die Terme mit $\mathfrak{Im}\,(B^{5\mu}G^{8}{}_{\mu\nu})$ aus (5.40a) und (5.40g) an jedem Punkt der Raumzeit exakt gegeneinander weg; es verbleiben die Ausdrücke $\mathfrak{Im}\,(B^{6\mu}G^{9}{}_{\mu\nu})$ und $\mathfrak{Im}\,(B^{4\mu}G^{7}{}_{\mu\nu})$. Da laut (5.20) $B^5{}_\mu/B^8{}_\mu$ und ihre Feldstärken $G^5{}_{\mu\nu}/G^8{}_{\mu\nu}$ die Teilchen ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ austauschkoppeln, während $B^4{}_\mu/B^7{}_\mu$, $G^4{}_{\mu\nu}$, $G^7{}_{\mu\nu}$ selbiges für ${}^2\psi$ und ${}^3\psi$ und $B^6{}_\mu/B^9{}_\mu$, $G^6{}_{\mu\nu}/G^9{}_{\mu\nu}$ für ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$ tun, erhält ${}^2\psi$ über die zusätzlichen Quellen seiner Eichwechselwirkung keinen Einblick in die Austauschwechselwirkung zwischen ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$. Dieses Muster wiederholt sich auch in (5.49a) und (5.49c). Im Allgemeinen bestehen somit die zusätzlichen Quellen der Eichwechselwirkung jeweils nur aus den Austauschpotentialen und - feldstärken, mit denen das Teilchen, dessen Quellstrom für die Eichwechselwirkung gerade betrachtet wird, an die beiden Anteile in der Fremdwechselwirkung durch seine (erweiterte) eichkovariante Ableitung ohnehin schon austauschgekoppelt ist. Zu dieser paarweisen Abgeschlossenheit der Austauschwechselwirkung siehe auch die Diskussionen im zweiten Absatz nach (5.20) sowie nach (5.22) und (5.23).
Auf der technischen Seite fußen die neuen Quellterme der Eichfeldstärken auf der Tatsache, daß der Satz von Generatoren (5.6) der Eichwechselwirkungen einen Vektorraum aufspannen, der neben dem Generator $\mathbb{1}_{12\times12}$ der Gruppe $U(\mathbb{1}_{12\times12})$ auch die beiden spurfreien Generatoren mit Elementen auf der Hauptdiagonalen der Gruppe $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ umfaßt. Genau diese $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile in den hier gewählten Generatoren α_1, α_2 und α_3 kommutieren nicht mit den nebendiagonalen Generatoren β_x (5.7) der $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$, was zu den aus Austauschpotentialen und ihren Feldstärken bestehenden Quelltermen für die Eichfeldstärken führt. Die Auswirkungen der $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile der Eichgeneratoren werden sich auch in den Quellströmen der Austauschfeldstärken zeigen.
Physikalisch begründet sich die Wahl der drei Eichgeneratoren (5.6) anstatt des einfacher zu handhabenden $U(\mathbb{1}_{12\times12})$ durch die damit zusammenhängenden drei eichinvarianten Stromdichten (5.40) bzw. (5.49) und ihren Erhaltungsgrößen, womit sich erst der Forderung, drei unabhängige Teilchen mit jeweils einer Elementarladung zu beschreiben, nachkommen läßt. Mit dem Generator $U(\mathbb{1}_{12\times12})$ hängt zwar ebenfalls eine Erhaltungsgröße mit elektromagnetischem Charakter zusammen, jedoch nur *eine*, die keinem der

drei Spinoren des Systems eindeutig zugeordnet werden kann; Unterkapitel 5.4 befaßt sich eingehender mit diesem Fall.
Wegen der beibehaltenen Einbettung der Eichgruppe $U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$ in die maximal mögliche unitäre Symmetrie $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ des Systems kann die für die Begrifflichkeit dreier einzelner Teilchen mit jeweiliger Ladung gemäß der drei gleichartigen Eichtransformationen notwendige Eichsymmetrie aller drei Eichströme nur unter Mitwirkung, d.h. Beschränkung, der Restsymmetrie $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) \setminus \left(U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})\right)$ erreicht werden. Die Normierung der zu den Generatoren β_x der Restsymmetrie gehörigen Ströme wird bei der letztendlichen Normierung der Eichströme, in denen sich der Teilchenbegriff der RST ja widerspiegeln soll, durchaus ihren Anteil haben, was sich durch die Gegenwart der Terme $\mathfrak{Im}\left(B^{u\mu} G^{u+3}{}_{\mu\nu}\right)$ in den Eichströmen bereits angedeutet hat. Bevor ab dem übernächsten Abschnitt die abschließende Festlegung der maßgeblichen Invarianten erfolgt, die zu (5.49) gehören und sich aus (5.46) zusammensetzen, sowie ihre Symmetrien betrachtet werden, muß folglich zuvor im nächsten Abschnitt auf den Aufbau der Austauschströme eingegangen werden.

Die Austauschströme

Wie schon die Stromdichten der Eichgeneratoren sind auch die der Austauschgeneratoren $j^4{}_\nu$ bis $j^9{}_\nu$, (5.41a), (5.41d), (5.41g), (5.41j), (5.41m) und (5.41p) quellfrei,

$$\partial^\nu j^x{}_\nu \equiv 0 \qquad x = 4, \ldots, 9 \, , \tag{5.54}$$

und folglich die räumlichen Integrale ihrer Nullkomponenten zeitlich konstante Größen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\; j^x{}_0 = g_*^x = \mathit{const} \qquad x = 4, \ldots, 9 \, . \tag{5.55}$$

Wegen

$$j^u{}_\nu = -j^{(u+3)*}{}_\nu \qquad u = 4, 5, 6 \, , \tag{5.56}$$

gilt auch

$$g_*^u = -g_*^{(u+3)*} \, . \tag{5.57}$$

Anders als die Ströme der Eichgeneratoren sind die der Austauschgeneratoren nicht eichinvariant unter der Gruppe $U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$. Ihre lorentzinvarianten Größen g_*^x können demnach nicht beobachtet werden. Weiterhin kann für die Aussage der

Quellfreiheit (5.54) der ${j^x}_\nu$ nicht immer das Noethertheorem herangezogen werden. Falls ein Generator in der Beschreibung des Systems verbleibt, dessen Symmetrietransformation nicht mehr angewandt werden darf, verbleibt zur Sicherung der Aussage (5.54) für seinen Strom nur die Bewegungsgleichung, in der er als Quelle dient, aus der wegen der Antisymmetrie von ${G^x}_{\mu\nu}$ obiger Erhaltungssatz für ${j^x}_\nu$ folgt. In den hier betrachteten Systemen tritt dieser Fall jedoch nicht auf. Entweder ist mit den Austauschgeneratoren noch eine Restsymmetrie verbunden, oder sie treten gar nicht erst auf; zu letzterem Punkt siehe das Unterkapitel 5.2.
Passend zur Funktion der Potentialfelder, denen sie als Quellen dienen, bestehen die Austauschströme nur aus Termen, die den Überlapp zweier Felder beschreiben. Dies gilt sowohl für die spinoriellen Felder als auch für die Potentiale selber, da die Austauschpotentiale Austauschphänomene bei beiden Arten von Feldern beschreiben, wie im Abschnitt über die eichkovariante Ableitung der Spinoren und dem über die der Feldstärken ausführlich dargelegt worden ist. Einiges Augenmerk sollte auf die Weise, in der die Eichpotentiale ${A^f}_\mu$ und Eichfeldstärken ${F^f}_{\mu\nu}$ in den Austauschströmen auftreten, gerichtet werden. Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die Generatoren der Gruppe $U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$, α_1, α_2 und α_3, (5.6), nicht nur den Generator $\mathbb{1}_{12\times12}$ der Gruppe $U(\mathbb{1}_{12\times12})$ umfassen, sondern auch die beiden spurfreien Generatoren der Gruppe $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ mit Einträgen auf der Hauptdiagonalen. Es sind genau diese $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile der Eichgeneratoren, die nicht mit den Austauschgeneratoren β_x (5.7) kommutieren, und somit die Anwesenheit der Austauschterme in den Eichströmen ${j^f}_\nu$ und der Eichterme in den Austauschströmen ${j^x}_\nu$ hervorrufen. Daß sich in letzteren genau die $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile der Eichgeneratoren wiederfinden, wird ersichtlich, wenn man den Eichanteil der Theorie statt bezüglich der Generatoren α_f (5.6) in Bezug auf die folgende Basis ausdrückt, in der durch die zwei spurfreien Generatoren mit Elementen ausschließlich auf der Hauptdiagonalen den $\mathfrak{su}(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Elementen der Algebra $\mathfrak{u}(\mathbb{1}_{4\times4}) \oplus \mathfrak{u}(\mathbb{1}_{4\times4}) \oplus \mathfrak{u}(\mathbb{1}_{4\times4})$ besser bzw. voll Rechnung getragen wird:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -i \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} = -i\mathbb{1}_{12\times12} \tag{5.58a}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = \frac{i}{3} \begin{pmatrix} -2\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.58b}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{3}(-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{i}{3} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & -2\cdot\mathbb{1}_{4\times4} \end{pmatrix} . \tag{5.58c}$$

Die zugehörigen Potentiale

$$\tilde{A}^1{}_\mu = \frac{2}{3}\left(A^1{}_\mu + A^2{}_\mu + A^3{}_\mu\right) \tag{5.59a}$$
$$\tilde{A}^2{}_\mu = A^2{}_\mu - A^3{}_\mu \tag{5.59b}$$
$$\tilde{A}^3{}_\mu = A^2{}_\mu - A^1{}_\mu\ , \tag{5.59c}$$

und Feldstärken

$$\tilde{F}^1{}_{\mu\nu} = \frac{2}{3}\left(F^1{}_{\mu\nu} + F^2{}_{\mu\nu} + F^3{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.60a}$$
$$\tilde{F}^2{}_{\mu\nu} = F^2{}_{\mu\nu} - F^3{}_{\mu\nu} \tag{5.60b}$$
$$\tilde{F}^3{}_{\mu\nu} = F^2{}_{\mu\nu} - F^1{}_{\mu\nu}\ , \tag{5.60c}$$

ergeben zusammen mit den Strukturkonstanten $\tilde{C}^y{}_{fx}$ der Basis (5.58)[§]

$$\tilde{C}^4{}_{24} = \tilde{C}^{7*}{}_{27} = i \tag{5.61a}$$
$$\tilde{C}^5{}_{25} = \tilde{C}^{8*}{}_{28} = -i \qquad \tilde{C}^5{}_{35} = \tilde{C}^{8*}{}_{38} = i \tag{5.61b}$$
$$\tilde{C}^6{}_{36} = \tilde{C}^{9*}{}_{39} = -i\ , \tag{5.61c}$$

die Potentialanteile $\tilde{l}^x{}_\nu$ der Austauschströme bezüglich (5.58)[¶]

$$\begin{aligned}\tilde{l}^4{}_\nu &= \tilde{l}^{7*}{}_\nu \\ &= \frac{ie}{4\pi}\tilde{A}^{2\mu}G^4{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}B^{4\mu}\tilde{F}^2{}_{\mu\nu} + i\frac{ie}{4\pi}\left(B^{8\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^8{}_{\mu\nu}\right) = l^4{}_\nu\end{aligned} \tag{5.62a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{l}^5{}_\nu &= \tilde{l}^{8*}{}_\nu \\ &= \frac{ie}{4\pi}\left(\tilde{A}^{3\mu} - \tilde{A}^{2\mu}\right)G^5{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}B^{4\mu}\left(\tilde{F}^3{}_{\mu\nu} - \tilde{F}^2{}_{\mu\nu}\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\right) = l^5{}_\nu\end{aligned} \tag{5.62b}$$

$$\begin{aligned}\tilde{l}^6{}_\nu &= \tilde{l}^{9*}{}_\nu \\ &= -\frac{ie}{4\pi}\tilde{A}^{3\mu}G^6{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}B^{6\mu}\tilde{F}^3{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{7\mu}G^8{}_{\mu\nu} - B^{8\mu}G^7{}_{\mu\nu}\right) = l^6{}_\nu\ .\end{aligned} \tag{5.62c}$$

Die Gleichheit zwischen den $\tilde{l}^x{}_\nu$ und den $l^x{}_\nu$ gilt wegen (5.59b) - (5.60c). In (5.62a) und (5.62c) können die Ausdrücke $\tilde{A}^f{}_\nu$ und $\tilde{F}^f_{\mu\nu}$ direkt gegen ihre rechten Seiten aus (5.62) ausgetauscht werden. Besonders an diesen Stromdichten sieht man also, daß die

§Angegeben sind zum einen nur die nichtverschwindenden Strukturkonstanten, und zum anderen nur die, die zur Bildung der Ströme $\tilde{l}^x{}_\nu$ von Bedeutung sind und sich wirklich gegenüber denen in (5.10) geändert haben.

¶Da sich die β_x, die für das Aussehen der Materieanteile $k^x{}_\nu$ der Austauschströme maßgeblich sind, nicht ändern, bleiben diese Materieanteile unverändert. Änderungen können nur in den Potentialanteilen auftreten, weil deren Aussehen hauptsächlich durch die Strukturkonstanten bestimmt wird.

Eichpotentiale und - feldstärken sich auch dann in den Austauschstömen so kombinieren, daß sie die $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile der Liealgebra $\mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4})\oplus\mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4})\oplus\mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times4})$ einbringen, wenn sie bezüglich der Basis $\{\alpha_f\}$ (5.6) ausgedrückt werden, in der auf den ersten Blick die $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile nicht ausdrücklich hervortreten. Für (5.58b) ergibt sich dieselbe Aussage nach kurzer Rechnung. Neben denjenigen Quelltermen der Eichfeldstärken, die aus Austauschgrößen bestehen, treten die $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile, die der Eichsymmetrie innewohnen, in den Austauschströmen noch an einer weiteren Stelle zutage; hier sogar in ihrer reinen Form. Mit dieser Herausarbeitung der $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Anteile der Eichsymmetrie soll aber nicht ausgesagt werden, daß die zugehörigen Symmetriefreiheitsgrade plötzlich dem Rest der $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Symmetrie der Theorie, der in den Austauschanteilen vorliegt, zugeschlagen wird, die Austauschsymmetrie nun also die ganze $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ umfasst. Die hauptdiagonalen $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Generatoren verbleiben bei den Eichfreiheiten des Systems, und die fehlende Kommutativität mit den nebendiagonalen $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Generatoren β_x wird noch eine gewichtige Rolle bei der Einschränkung der Restsymmetrie $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \setminus U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$ spielen.
Der Ursprung der fehlenden Eichinvarianz, die Tatsache, daß die Austauschströme nur aus Termen bestehen, die den Überlapp zweier Felder, von materieller Felder wie von Potentialen und Feldstärken, beschreiben, erweist sich im Hinblick auf den Teilchenbegriff, der aus den Eichströmen herausgearbeitet werden soll, als äußerst nützlich. Bei fehlender Überschneidung der Materiefelder entsteht eine Unterabteilung der Theorie, die alleine den Austauschpotentialen und - feldstärken gewidmet ist. Da somit im Bedarfsfall der Anteil der Austauschfelder in den Eichströmen alleine zu normieren ist, ist ein erster Schritt in Richtung der Vereinzelung, d.h. Individualisierung, der Felder des Systems getan. Das heißt, es besteht zunächst auf grundsätzlicher Ebene die Möglichkeit, die Austauschgrößen unabhängig von den Materiefeldern zu betrachten, vorausgesetzt die Materiefelder überschneiden sich nicht. Diese starke Lokalisierung der Materiefelder beinhaltet natürlich gerade auch die Aussage ihrer Vereinzelung voneinander, worauf sich der Begriff einer einzeln meßbaren Ladung begründen läßt. Neben dieser Bedingung für einen Teilchenbegriff existiert noch eine weitere zwingend notwendige Voraussetzung den Überlapp der Materiefelder und der Austauschfelder betreffend. Der oben angeführte "Bedarfsfall", in dem eine Normierung der Austauschfelder unabhängig von den Materiefeldern durchführbar sein soll, bezeichnet nichts anderes als die Situation, in der sich die Materiefelder nicht mit den Austauschfeldern überschneiden. In diesem Fall sind einzeln durchfühbare Normierungen der Materie - und der Austauschanteile der ${j^f}_\nu$ sogar zwingend notwendig, wie die Betrachtung der Quellen von ${k^f}_\nu$ und ${l^f}_\nu$ aus (5.40) zeigt:

$$\partial^\nu {k^1}_\nu = -\partial^\nu {l^1}_\nu = \frac{ie}{4\pi}\left(-{}_1\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^3\psi {B^8}_\nu - {}_3\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^1\psi {B^5}_\nu + {}_2\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^1\psi {B^9}_\nu + {}_1\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^2\psi {B^6}_\nu\right) \quad (5.63a)$$

$$\partial^\nu {k^2}_\nu = -\partial^\nu {l^2}_\nu = \frac{ie}{4\pi}\left(-{}_2\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^1\psi {B^9}_\nu - {}_1\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^2\psi {B^6}_\nu + {}_3\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^2\psi {B^7}_\nu + {}_2\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^3\psi {B^4}_\nu\right) \quad (5.63b)$$

$$\partial^\nu {k^3}_\nu = -\partial^\nu {l^3}_\nu = \frac{ie}{4\pi}\left(-{}_3\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^2\psi {B^7}_\nu - {}_2\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^3\psi {B^4}_\nu + {}_1\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^3\psi {B^8}_\nu + {}_3\overline{\psi}\gamma^\nu\,{}^1\psi {B^5}_\nu\right) \quad (5.63c)$$

Überlappen sich die Materiefelder nicht, liefern die Ströme ${k^f}_\nu$ und ${l^f}_\nu$, $f = 1, 2, 3$, bereits jeweils für sich erhaltene Größen. Damit die so entstandenen neuen Erhaltungssätze dynamisch aus den alten hervorgehen können, *muß* die Normierung der ${l^f}_\nu$ auf die Normierung der ${j^x}_\nu$, $x = 4, \ldots, 9$, die bei fehlender Überschneidung der ${}^n\psi$ als reine ${l^x}_\nu$ nur den Austauschfeldern zugeordnet sind, zurückzuführen sein. Durch diese Rückführung der Austauschfeldanteile in den Eichströmen alleine auf den Austauschsektor der Theorie werden die ${k^f}_\nu$ derart vollständig von den ${l^f}_\nu$ abgekoppelt, daß die Erhaltungssätze der Eichsymmetrie alleine für die Dichten der Materieteilchen zur Verfügung stehen. Die drei ${l^f}_\nu$ korrespondieren dabei tatsächlich zu den sechs ${l^x}_\nu$, da wegen ${l^u}_\nu = -{l^{(u+3)*}}_\nu$ nur drei der letzteren voneinander unabhängig sind. Im nächsten Abschnitt wird dieses Puzzlestück mit den vorhergehenden zum Gesamtbild der Normierung der Ströme zusammengesetzt. Dabei wird auch die folgende Aussage über die Quellen der Terme $\partial^\nu \mathfrak{Im}\,(B^{u\mu}{G^{u+3}}_{\mu\nu})$, die sich direkt aus den Gleichungen (5.44) herleiten läßt, von Bedeutung sein. Multipliziert man (5.44d) mit $B^{4\nu}$, (5.44a) mit $B^{7\nu}$, subtrahiert die so entstandenen Gleichungen, führt einige elementare Umformungen durch und verfährt analog mit den Gleichungspaaren $B^{5\nu}\cdot$(5.44e)/$B^{8\nu}\cdot$(5.44b) sowie $B^{6\nu}\cdot$(5.44f)/$B^{9\nu}\cdot$(5.44c), erhält man:

$$i\partial^\nu \mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}{G^7}_{\mu\nu}\right) = -\frac{e}{4\pi}\left({}_2\overline{\psi}\gamma_\mu{}^3\psi B^{4\mu} + {}_3\overline{\psi}\gamma_\mu{}^2\psi B^{7\mu}\right) = -\frac{ie}{4\pi}\mathfrak{Im}\left({}_2\overline{\psi}\gamma_\mu{}^3\psi B^{4\mu}\right) \tag{5.64a}$$

$$i\partial^\nu \mathfrak{Im}\left(B^{5\mu}{G^8}_{\mu\nu}\right) = -\frac{e}{4\pi}\left({}_3\overline{\psi}\gamma_\mu{}^1\psi B^{5\mu} + {}_1\overline{\psi}\gamma_\mu{}^3\psi B^{8\mu}\right) = -\frac{ie}{4\pi}\mathfrak{Im}\left({}_3\overline{\psi}\gamma_\mu{}^1\psi B^{5\mu}\right) \tag{5.64b}$$

$$i\partial^\nu \mathfrak{Im}\left(B^{6\mu}{G^9}_{\mu\nu}\right) = -\frac{e}{4\pi}\left({}_1\overline{\psi}\gamma_\mu{}^2\psi B^{6\mu} + {}_2\overline{\psi}\gamma_\mu{}^1\psi B^{9\mu}\right) = -\frac{ie}{4\pi}\mathfrak{Im}\left({}_1\overline{\psi}\gamma_\mu{}^2\psi B^{6\mu}\right)\ . \tag{5.64c}$$

Bei verschwindender Überlappung der Spinoren sind demnach schon die einzelnen Summanden, aus denen ${l^1}_\nu$, ${l^2}_\nu$ und ${l^3}_\nu$ bestehen, erhalten und nicht erst ihre Summen[§]. Weiterhin zeigt (5.49), auf welche Weise die Doppelaufgabe, den Austausch sowohl zwischen den Spinoren als auch zwischen den Potentialen zu vermitteln, im Potentialanteil der Theorie aufgeteilt ist: Sein imaginärer Teil ist für die Austauschwechselwirkung der Spinoren verantwortlich, während der reelle Teil es für die Potentiale ist. Addiert man die Gleichungspaare von oben, die zu (5.49) geführt haben, ergeben sich Ausdrücke für $\partial^\nu \mathfrak{Re}\,(B^{u\mu}{G^{u+3}}_{\mu\nu})$, deren Quellen sich im wesentlichen auf die Überschneidung der Potentiale konzentrieren. (In den Quellen der imaginären Ausdrücke oben spielen die Überschneidungen der Spinoren die Hauptrolle; die $B^{u\mu}$ können zwar auch Null gesetzt

[§]Anstatt die Rechnung hierzu in aller Breite durchzuführen, kann man sich auch überlegen, daß im Fall eines vierspinorigen Systems die ${l^x}_\nu$ aus drei Termen des Typs $\mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}{G^7}_{\mu\nu}\right)$ bestehen. Bei solchen Ausdrücken ist es nicht mehr möglich, daß die nichtmateriellen Quellen der verschiedenen Summanden in $\partial^\nu {l^x}_\nu$ nur gleich sein müssen, wie in (5.63), weil jetzt immer die Quelle eines Summanden nicht abgepaart werden kann. Im Fall von vier Spinoren müssen die nichtmateriellen Quellen der Summanden also einzeln verschwinden. Da sie und die Summanden, die die ${l^x}_\nu$ bilden, vom Aufbau her mit denen im Fall dreier Spinoren (und ebenso mit denen im Fall von $n \geq 4$ Spinoren) identisch sind, verschwinden auch die Quellen der Summanden $\mathfrak{Im}\left(B^{u\mu}{G^{u+3}}_{\mu\nu}\right)$ im vorliegenden Fall für sich alleine

werden, um die Ausdrücke quellfrei zu machen, aber durch verschwindende Felder wird das System vereinfacht. Viel interessanter ist es, die Auswirkungen eines schwachen oder fehlenden Überlapps der Spinoren zu betrachten.) Diese Ausdrücke sind länglich sowie für die Diskussion des Teilchenbegriffes der Spinoren im Folgenden nicht von Bedeutung und werden deshalb nicht angegeben.
Die gerade durchgeführte Diskussion ist mit Bezug auf die Eichströme mit den Noetherströmen (5.40) geführt worden. Sie ist aber umstandslos, auch wegen (5.64), auf die observablen Ströme (5.49) übertragbar.
Abschließend ist noch anzugeben, daß die materiellen Quellen drei hinsichtlich der Eichwechselwirkung gleiche Dichten sind. Da die Austauschwechselwirkung diese durch die Eichwechselwirkung aufgestellte Gleichheit nicht durchbrechen soll, darf sich keine Teilchenpaarung dadurch absondern, daß sich ihre Austauschwechselwirkung gegenüber der der anderen Paarungen im Vergleich stärker oder schwächer gestaltet. Die Austauschpotentiale und -feldstärken sind mithin als untereinander prinzipiell gleichgestellt zu behandeln, was schlußendlich zu gleichen Konstanten g_*^u, $u = 4, 5, 6$, (5.55) führt:

$$g_*^4 \equiv g_*^5 \equiv g_*^6 \doteqdot g_* \tag{5.65a}$$
$$g_*^7 \equiv g_*^8 \equiv g_*^9 \doteqdot -g_*^* \, . \tag{5.65b}$$

Die Festlegung der Normierungskonstanten und der Teilchenbegriff der RST

Im vorletzten und besonders im letzten Abschnitt sind alle Vorbereitungen getroffen worden, die Stromdichten ${j^f}_\nu$ in (5.46) derart stark zu lokalisieren, daß die Integrale (5.46) in jeweils fünf einzelne zerfallen. Jeder einzelne dieser Beiträge soll unter den Umständen der starken Lokalisierung für sich erhalten sein, wodurch z dann aus fünf einzelnen Beiträgen bestimmt wird. Weiterhin ist jeder dieser lokalisierten Einzelbeiträge direkt einem Spinor oder einem Produkt aus Potential und Feldstärke zugeordnet, was den Begriff eines einzelnen Teilchens mit den einzelnen Spinoren und Potentialen/Feldstärken verbindet.
Die einzelnen Dichten, die die Eichströme (5.40) aufbauen, werden also so stark lokalisiert, daß sie ihren Beitrag zum Integral auf der linken Seite von (5.46) in einem endlichen Volumen V_i liefern. Dabei soll keine der materiellen Dichten im Raumgebiet einer anderen zusammengezogen werden. Mit anderen Worten sollen sich die spinoriellen Wellenfunktionen nicht überlappen. Bereits nach (5.63) wurde festgestellt, daß unter diesen Bedingungen die materiellen Stromdichten ${k^f}_\nu$ und die Austauschanteile ${l^f}_\nu$ der Eichströme jeweils für sich erhalten sind. Ebenso wurde dort nach (5.64) die Feststellung getroffen, daß bei verschwindendem Überlapp der Spinoren jeder der Austauschanteile für sich erhalten ist. Da die Einzelstromdichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu{}^2\psi$ und ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu{}^3\psi$ dieselben Quellen wie die Dichten $B^{u\mu}{G^{u+3}}_{\mu\nu}$, für die die gerade getroffene Aussage gilt, besitzen, sind auch sie unter den gegenwärtigen Bedingungen je für sich quellfrei. Insgesamt zerfallen die drei Erhaltungsgrößen (5.46), wie angekündigt, in fünf einzelne Integrale,

wenn die materiellen Dichten so stark lokalisiert sind, daß sie sich nicht überschneiden:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}\, j^1{}_0 = {}& 2K^{12}\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_1} d^3\vec{r}\; {}_1\overline{\psi}\gamma_0\, {}^1\psi + \left(K^{11}+K^{12}\right)\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_2} d^3\vec{r}\; {}_2\overline{\psi}\gamma_0\, {}^2\psi \\ & + \left(K^{11}+K^{12}\right)\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_3} d^3\vec{r}\; {}_3\overline{\psi}\gamma_0\, {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}\int\limits_{V_5} d^3\vec{r}\, \mathfrak{Im}\left(B^{5\mu}G^8{}_{\mu 0}\right) \\ & + \frac{ie}{4\pi}\int\limits_{V_6} d^3\vec{r}\, \mathfrak{Im}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu 0}\right) = z \end{aligned} \tag{5.66a}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}\, j^2{}_0 = {}& \left(K^{11}+K^{12}\right)\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_1} d^3\vec{r}\; {}_1\overline{\psi}\gamma_0\, {}^1\psi + 2K^{12}\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_2} d^3\vec{r}\; {}_2\overline{\psi}\gamma_0\, {}^2\psi \\ & + \left(K^{11}+K^{12}\right)\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_3} d^3\vec{r}\; {}_3\overline{\psi}\gamma_0\, {}^3\psi + \frac{ie}{4\pi}\int\limits_{V_4} d^3\vec{r}\, \mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}G^7{}_{\mu 0}\right) \\ & - \frac{ie}{4\pi}\int\limits_{V_6} d^3\vec{r}\, \mathfrak{Im}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu 0}\right) = z \end{aligned} \tag{5.66b}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}\, j^3{}_0 = {}& \left(K^{11}+K^{12}\right)\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_1} d^3\vec{r}\; {}_1\overline{\psi}\gamma_0\, {}^1\psi + \left(K^{11}+K^{12}\right)\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_2} d^3\vec{r}\; {}_2\overline{\psi}\gamma_0\, {}^2\psi \\ & + 2K^{12}\frac{e}{4\pi}\int\limits_{V_3} d^3\vec{r}\; {}_3\overline{\psi}\gamma_0\, {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}\int\limits_{V_4} d^3\vec{r}\, \mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}G^7{}_{\mu 0}\right) \\ & + \frac{ie}{4\pi}\int\limits_{V_5} d^3\vec{r}\, \mathfrak{Im}\left(B^{5\mu}G^8{}_{\mu 0}\right) = z\,. \end{aligned} \tag{5.66c}$$

Dadurch entstehen aber nicht etwa fünfzehn unterschiedliche Größen, sondern die Zahl der für sich erhaltenen lokalisierten Integrale entspricht immer noch der Zahl der sechs ursprünglichen Erhaltungssätze (5.46) und (5.55), da $j^1{}_0$, $j^2{}_0$ und $j^3{}_0$ aus den folgenden sechs Integralen in unterschiedlichen Zusammensetzungen bestehen:

$$\int\limits_{V_1} d^3\vec{r}\; {}_1\overline{\psi}\gamma_0\, {}^1\psi = z^\psi \tag{5.67a}$$

$$\int\limits_{V_2} d^3\vec{r}\; {}_2\overline{\psi}\gamma_0\, {}^2\psi = z^\psi \tag{5.67b}$$

$$\int\limits_{V_3} \mathrm{d}^3\vec{r}\ {}_3\overline{\psi}\gamma_0\ {}^3\psi = z^\psi \tag{5.67c}$$

$$\int\limits_{V_4} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathfrak{Im}\left(B^{4\mu}G^7{}_{\mu 0}\right) = z^{\mathrm{B}}\left(g_*\right) \tag{5.67d}$$

$$\int\limits_{V_5} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathfrak{Im}\left(B^{5\mu}G^8{}_{\mu 0}\right) = z^{\mathrm{B}}\left(g_*\right) \tag{5.67e}$$

$$\int\limits_{V_6} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathfrak{Im}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu 0}\right) = z^{\mathrm{B}}\left(g_*\right) \tag{5.67f}$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset \ \ , \ \ i \neq j \ \ , \ \ i,j = 1,\ldots,6\ . \tag{5.67g}$$

Im letzten Abschnitt wurde ausführlich die Zuordnung der Normierungsbedingungen (5.67d) - (5.67f) zu den, unter den gegebenen Umständen allein auf die Austauschgrößen bezogenen, Erhaltungssätzen der Austauschströme besprochen. Auf Grund dieses Bezuges sind (5.67d), (5.67e) und (5.67f) hinsuchtlich (5.66a) - (5.67c) als bereits bestimmt zu betrachten, so daß diesen drei Gleichungen nur noch die Normierung (5.67a) - (5.67c) der drei Einzelstromdichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_0\,{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_0\,{}^2\psi$ und ${}_3\overline{\psi}\gamma_0\,{}^3\psi$ obliegt. Die Anzahl der zu normierenden Größen entspricht somit immer noch der Zahl der Erhaltungssätze.
Damit die gerade durchgeführte Aufspaltung der Erhaltungssätze (5.66) in die Einzelintegrale (5.67) Bestand haben kann, müssen neben den Spinoren und Potentialen auch deren Ableitungen der Bedingung der starken Lokalisierung genügen; mit anderen Worten ausgedrückt, haben auch $\partial_\mu{}^n\psi$ und $\partial_\mu B^x{}_\nu$ spätestens ab der Oberfläche ∂V_i der Lokalisationsvolumina zu verschwinden. Dies ist zwingend notwendig, um die Gültigkeit des gaußschen Satzes, der für die Erhaltungssätze ja eine zentrale Rolle spielt, auch weiterhin zu gewährleisten. Der Terminus "auch weiterhin" bezieht sich auf die Tatsache, daß die üblichen Forderungen nach hinreichend stark abfallenden Feldern und Ableitungen bei Annäherung an die Grenzfläche ∂V_∞ beim gerade geschilderten Verfahren ins Endliche verlegt worden sind, d.h. der übliche Ort ihres spätesten Verschwindens von ∂V_∞ auf die jeweiligen Grenzflächen ∂V_i verlegt wurde.
Durch die maßgebliche Bezugnahme auf räumliche Volumina, über die integriert wird und in denen sich die Spinoren und Austauschpotentiale nicht überschneiden dürfen, sind die Aufspaltungen der Eich- und Austauscherhaltungssätze (5.46) und (5.55) in die Einzelnormierungen (5.67) natürlich abhängig vom gewählten Koordinatensystem, also nicht lorentzinvariant. Sie sind aber sehr wohl lorentzkovariant, denn wegen der Invarianz der Aufspaltung der Gruppe $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ in $U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$ und Restsymmetrie $U\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right) \setminus \left(U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})\right)$ sind die Erhaltungssätze (5.46) und (5.55) invariant und mit ihnen die grundlegenden Eich- und Austauschsymmetrien, die durch die Lokalisierung auf je einen Spinor oder ein Austauschpotential übertragen werden, was (5.67) wiedergibt. Demnach ist das "wo" der Übergabe der Begriffe, die die Symmetrien begründen, vom Bezugssystem abhängig, aber nicht die Begriffe selber, also

das “was” übergeben wird. Im vorliegenden Fall wird demzufolge ein Elektron in jedem Bezugssystem als Elektron wahrgenommen, nur der Ort, an dem es lokalisiert genug auftritt, um einzeln gemessen werden zu können, hängt vom gewählten Bezugssystem ab.
Weiterhin kann unter den gegebenen Voraussetzungen wegen ${B^x}_\mu \equiv 0$ (damit die ${G^x}_{\mu\nu}$ sicher gleich Null sind) in den Volumina V_1, V_2 und V_3, in denen die Spinoren lokalisiert sind, deren eichkovariante Ableitung (5.20) keine Zusatzterme ausgleichen, die durch etwaige ortsabhängige Austauschtransformationen $\mathcal{S}_{\text{Austausch}}$ entstehen. Die Λ^x müssen deshalb in den Volumina der Spinoren konstant sein. Dabei müssen aber diese Transformationen, die wie z.B. $\mathcal{S}_{13}$ (5.24) immer zwei Spinoren miteinander in Beziehung setzen, nicht in beiden Volumina der betroffenen Teilchen den gleichen konstanten Wert besitzen. Es genügt, wenn der Bedingung konstanter $\Lambda^x|_{V_i}$, die ${B^x}_\mu = 0$ stellt, mit lokal verschiedenen konstanten Werten nachgekommen wird; genaueres dazu befindet sich im diesem folgenden Abschnitt über die Beschränkung der Austauschfreiheitsgrade. Zusammen mit den dort hergeleiteten Einschränkungen wird dann deutlich, daß die lokal konstanten $\Lambda^x|_{V_i}$ die Austauschtransformationen global erscheinen lassen, obwohl weder in den Raumbereichen zwischen den lokalisierten Spinoren eine derartige Forderung existiert, noch eine Austauschtransformationen in den verschiedenen Volumina denselben konstanten Wert besitzen muß.
Den Austauschausdrücken $B^{u\mu}{G^{u+3}}_{\mu\nu}$ werden eigene Lokalisationsvolumina V_4, V_5 und V_6 zugewiesen, die sich nicht mit den Volumina der Spinoren überscheiden, um sicherzustellen, daß die Normierungskonstanten z^ψ und die sich daraus ergebenden meßbaren Größen wirklich einem spinoriellen Feld ${}^n\psi$ zugewiesen werden können. Zwar ist für die Trennung der Integrale (5.67a) - (5.67c) von den Integralen (5.67d) - (5.67e) sowie die Trennung der Spinoren untereinander die Forderung nach sich nicht überschneidenden Spinorfeldern ausreichend, aber ein auf lokalisierte Felder aufbauender Teilchenbegriff gerät durch zwei in einem Volumen lokalisierte Felder in Schwierigkeiten. So muß z.B. für eine mit $z^\psi + z^{\mathrm{B}}$ in Zusammenhang stehende Größe, die wiederholt meßbar sein soll, immer sichergestellt sein, daß auch tatsächlich immer beide Felder in einem Volumen vorhanden sind, es sei denn eine der Konstanten wird auf Null festgesetzt, was selbst für z^{B} nicht zwingend ist. Selbst wenn dieses garantiert werden kann, werden immer noch Felder, die sich unter verschiedenen Darstellungen der Lorentzgruppe transformieren, zu einer Einheit zusammengefügt. Dadurch entsteht eine Meßgröße $\sim (z^\psi + z^{\mathrm{B}})$, deren Spin mit den möglichen Werten $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ nicht eindeutig festgelegt ist, im Widerspruch zu dem Bemühen durch die Erhaltungssätze, die eindeutigen Kenngrößen eines Teilchens festzulegen.
Diesen Bemühungen sind aber auch im vorliegenden Fall Grenzen gesetzt. Zunächst einmal ist die Trennung der Integrale (5.46) und (5.55) in die Einzelteile (5.67) auf Grund nicht überlappender Spinoren außer im Fall wirklich δ - förmiger Stromdichten natürlich nur in sehr guter Näherung etwa durch Gauß - oder Lorentzkurven realisierbar. Jede hierauf aufbauende Begrifflichkeit geht allerdings verloren, sobald der Überlapp der Spinordichten nicht mehr (näherungsweise) Null ist. Laut (5.63) sind die ${k^f}_\nu$ und

${}^{lf}{}_{\nu}$ nun nicht mehr für sich erhalten; die Austauschströme $j^{x}{}_{\nu}$ (5.41) nicht mehr allein auf die Potentiale und Feldstärken bezogen und die Spinoren ohnehin nicht mehr voneinander zu trennen, so daß die Zuordnung von einzelnen, sich nicht überschneidenden Volumina zu einzelnen Feldern hinfällig ist. Die Erhaltungssätze gelten nur noch in ihren "globalen", das soll heißen in ihren alle Anteile der Ströme umfassenden Formen (5.46) und (5.55), ohne auf die Aufspaltung (5.67) zurückführbar zu sein. Hat man allerdings z in der lokalisierten Situation durch die z^{ψ} und z^{B}, aus denen es besteht, festgelegt, gilt dieser Wert auch für alle anderen Verhältnisse der Felder zueinander. Hierdurch wird sichtbar, auf welche Weise der Begriff "Teilchen" in der RST zu verstehen ist. Der Zustand nicht voneinander getrennter Felder ist für die RST ja eben nicht der Ausnahmezustand, sondern, als Inbegriff ständig miteinander wechselwirkender Teilchen, gerade ihr Kernanliegen. Dabei sind nur in dem Sinne "Teilchen" in der (dauerhaften) Wechselwirkungszone vorhanden, als daß den beteiligten Feldern durch Lokalisierung und daraus folgender Aufspaltung der Erhaltungssätze individuelle Konstanten zugewiesen werden können. Der Verlust der individuellen Zuordnung der Invarianten zu den einzelnen Freiheitsgraden des Systems ist bei Licht besehen gar keiner. Denn bei der Betrachtung von Vielteilchensystemen werden die einzelnen Komponenten des Systems gar nicht aufgelöst; vielmehr werden die Eigenschaften des ganzen Systems bestimmt. So sind die Energieniveaus von Mehrelektronenatomen, den bisherigen Modellsystemen der RST, und deren Differenzen, d.h. die Spektrallinien, Ausdruck der Wechselwirkung Elektronen der Hülle untereinander und mit dem Kern. Eine Zuordnung der einzelnen Elementarladungen e^{-} der Hüllenelektronen zu einzelnen Spinoren findet bei der Messung solcher Spektrallinien nicht statt. Da das Ziel der Messung die Bestimmung des Verhaltens aller Ladungen zueinander ist, braucht sie auch nicht stattzufinden. Eine theoretische Beschreibung dieses Verhältnisses kann demnach auf die feste Zuordnung der Ladungen zu bestimmten Freiheitsgraden der beschreibenden Felder ohne Verlust der Aussagekraft verzichten. Da eine eine derartige feste Zuordnung, wie oben beschrieben, mit starken Forderungen an die Beschreibung verbunden ist, kann im Gegenteil eher von einem Zugewinn an Aussagekraft durch Zugewinn an Freiheiten gesprochen werden, anstatt von einem Verlust, den die Theorie im Hinblick auf ihre Aussagekraft erfährt. Gleichwohl steht der Begriff eines einzelnen Teilchens, wenn notwendig, zur Verfügung, etwa bei der Beschreibung eines Ionisationsvorganges eines mehrelektronigen Atoms. Der Übergang zwischen einzelnen Teilchen und einem System ohne definitive Zuordnung der Konstanten kann sogar kontinuierlich beschrieben werden.

Zum oben besprochenen Grenzfall nicht überlappender und deshalb einzelner Teilchen sind einige Anmerkungen zu machen. Zuerst einmal heißt "einzeln" nicht "unterscheidbar". Den Spinoren ${}^{n}\psi$, $n = 1, 2, 3$, wird in (5.67a) - (5.67c) die gleiche Konstante z^{ψ} zugewiesen als Ausdruck der gleichartigen Eichfreiheiten, denen sie unterliegen. Auch im sich nicht überschneidenden Zustand ist es egal, welcher Eichfreiheit die Spinoren zugeordnet werden, weshalb die Spinoren und die aus ihnen gebildeten Einzeldichten untereinander vertauscht werden können, ohne die Aussagen der Theorie zu verändern. Anders gesagt, ist es gleichgültig, welche Dichte in welchem Volumen lokalisiert wird. Die Be-

schreibung dieser Vertauschbarkeit durch die kontinuierlichen $SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Freiheitsgrade, die der Theorie über die Eichfreiheiten hinaus belassen wurden, ist Inhalt des nächsten Abschnittes über die Beschränkung dieser zusätzlichen Symmetrien. Dabei wird besonderes Augenmerk auf der Tatsache liegen, daß die Forderung nach Ungestörtheit der Eichfreiheitsgrade durch die zusätzlichen Symmetrien diese genau so weit einschränkt, daß sie die angesprochene Vertauschung der Spinoren und ihrer Dichten liefern. Die Eichfreiheiten generieren in diesem Sinne den für Systeme identischer Teilchen notwendigen Begriff des Austausches, wobei dieser hier auf den *kontinuierlichen* Symmetrien, die die Generatoren β_x erzeugen, basiert, im Gegensatz zur Anwendung der *globalen* Permutationsgruppe in der konventionellen Theorie. Sowohl die Eichsymmetrien als auch die Austauschsymmetrie fußen auf den lokalen $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ - Symmetrien, statt mit den lokalen Symmetrien für die Eichfreiheiten und einer globalen für die Austauschvorgänge zwei unterschiedliche Arten von Gruppen zu bemühen.
Weiterhin bedeutet "einzeln" nicht zwingend "frei von elektromagnetischer Wechselwirkung". Die Eichpotentiale ${A^f}_\mu$ treten in den Eichströmen nicht auf. Anders als die Austauschpotentiale können sie deshalb keinen Einfluss auf die Normierung der spinoriellen Einzeldichten nehmen. Folglich müssen sie in Lokalisationsvolumina der Spinoren nicht den Wert Null annehmen. Existierende elektromagnetische Wechselwirkung setzt allerdings eine gewisse Nähe der Ladungsträger voraus; sollen die Ladungen immer noch eindeutig den Spinoren zuzuordnen sein, sind den Ausdehnungen der einzelnen Spinoren Grenzen gesetzt[§], damit Überlappungen der Wellenfunktionen und der damit zusammenhängende, oben geschilderte, Zusammenbruch des Teilchenbegriffs verhindert wird. Vor dem Hintergrund dieser Möglichkeit ist noch einmal auf die Aufspaltung (5.67) einzugehen, um deren Anwendungsbereich zu präzisieren. Als Grundlage für die Gültigkeit von (5.67) wurde bereits festgestellt, daß die Forderung nach Verschwinden aller Felder und ihrer Ableitungen im Unendlichen für jedes Feld auf den Rand ∂V_i seines endlichen Volumens V_i zu verlegen ist. Läßt man den Abstand zwischen diesen Volumina anwachsen, um sie im idealen Grenzfall unendlich weit voneinander zu trennen, mündet die Forderung, die (5.67) zugrunde liegt, in die Forderung nach im Unendlichen hinreichend schnell abfallenden Feldern. Dabei entfernt sich der Begriff eines in seinem Volumen als einzeln wahrnehmbaren Teilchens von dem eines Punktteilchens, denn mit steigendem Abstand der Grenzflächen kann das von ihnen eingeschlossene Volumen vergrößert werden. Dahinter steht natürlich die Einsicht, daß der beschriebene Grenzfall physikalisch ohnehin nur näherungsweise zu erreicht werden kann und die physikalischen Kriterien für sein Eintreten bei steigendem Abstand der Grenzflächen auch dann noch erfüllt sind, wenn man die Größe des eingeschlossenen Volumens im Verhältnis zum Abstand langsam genug anwachsen läßt. Eine solche Situation auseinanderstrebender Freiheitsgrade

[§]Eine zweite Variante, den Spinoren eindeutig ihre Konstanten zuzuordnen, besteht darin, lokale Ladungsverschiebungen von den Spinoren zu den Austauschpotentialen und umgekehrt zuzulassen, unter der Bedingung, daß diese lokalen Änderungen sich global exakt ausgleichen. Die Wahl von stark lokalisierten Feldern kann als der Extremfall dieses Vorganges angesehen werden, bei dem die lokalen Verschiebungen Null sind.

eines Systems liegt durchaus im Bereich der möglichen Zustände eines Systems, z.B. ein durch Ionisation aus einem Atomverband herausgelöstes Elektron oder allgemeiner ein System von Teilchen, die sich nach einem Streuprozeß wieder voneinander entfernen. Die Forderungen, die die Vereinzelung (5.67) stellt, werden vom System hierbei alleine durch seine Dynamik immer besser erfüllt. Es entwickelt sich somit von sich aus in eine Situation, in der seine Freiheitsgrade als einzelne Teilchen wahrgenommen werden können, wobei durch die anwachsende Entfernung auch die Begriffe "frei" und "einzeln" sich immer stärker einander annähern.
In der umgekehrten Richtung schrumpfen die Lokalisationsvolumina für sich nicht überschneidende Felder zusehends, d.h. die (5.67) zugrunde liegenden Bedingungen spalten sich immer stärker von der Forderung nach im Unendlichen auf Null abfallenden Feldern ab. Die Anforderung, sich nicht zu überscheiden, wird dadurch immer stärker zu einer zusätzlichen Zwangsbedingung, die zwar gestellt werden kann, um den Begriff eines "einzelnen" Teilchens beizubehalten, aber dem System starke Beschränkungen auferlegt. Dieses Bild hat sehr starke Ähnlichkeit mit den Punktteilchen der QFT mit all seinen Folgen für die Beschreibung der Wechselwirkungen der Teilchen, die während der Begründung für die Aufstellung der RST anhand der Bethe - Salpeter - Gleichung gerade als maßgebliche Ursachen für die Schwierigkeiten der QED/QFT, gebundene Zustände zu beschreiben, benannt wurden. Aus diesem Grund wird die Annahme stets lokalisierter Teilchen innerhalb der RST strikt abgelehnt. Als direkte Folge beschreibt sie ihre Freiheitsgrade nur als im oben angegebenen Grenzfall als autark wahrnehmbar. Sollte dennoch einer dieser Freiheitsgrade auch im wechselwirkenden, besonders im gebundenen, Zustand vereinzelt auftreten, muß die Dynamik des Systems zu diesem Zustand geführt haben, indem sie das System sich in eine Richtung hat entwickeln lassen, in der die dazu notwendigen Bedingungen erfüllt werden. Hier ist noch zu betonen, daß dieser Vorgang tatsächlich auch nur einen Freiheitsgrad betreffen kann, während die anderen im nicht individuellen Zustand verbleiben; siehe als Ausgangspunkt für diese Aussage (5.64).
Zusammenfassend kann man nun festhalten, daß mit den Austauschpotentialen und den über die Yang - Mills - Gleichungen (5.44) eng mit ihnen zusammenhängenden Quellen der ${k^f}_\nu$ und ${l^f}_\nu$ Instanzen in der RST vorhanden sind, die entscheiden, ob ein Freiheitsgrad des Systems, speziell ein spinorieller, für sich mit einer Erhaltungsgröße versehen ist oder nicht. Der Teilchenbegriff wird also kontrolliert aufgegeben und nicht eher unbeabsichtigt wie in der QFT. Diese kontrollierte Aufgabe betrifft darüberhinaus auch nur die identischen Teilchen, die dieselbe Ladung tragen. Die Bedingung (4.30) sorgt bei Spinoren mit ungleichen Einträgen ${I^n}_\ell$ in der Liemetrik, was bei einem Eintrag mit umgekehrtem Vorzeichen gegenüber den anderen gerade einer umgekehrten Ladung entspricht, bei konstanten Einträgen für das Verschwinden der Austauschsymmetrie. Der Kern, im oben als Beispiel eines gebundenen Vielteilchensystems angeführten mehrelektronigen Atoms, kann folglich immer von seiner Elektronenhülle unterschieden werden. In Unterkapitel 5.2 wird diese Auswirkung der Bedingung (4.30) ausführlich beschrieben. Unterkapitel 5.4 befaßt sich dann mit der Frage, wie durch ein Zusammenwirken von

nichtkonstanten $I^n{}_\ell$ und Änderungen in den Einschränkungen der $SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Symmetrie die strikte Unterscheidung zwischen Spinoren mit unterschiedlichen Einträgen in der Liemetrik aufgehoben werden kann.
Die gerade ausführlich besprochene Aufspaltung der Noetherströme ist direkt auf ihre meßbaren Zusammensetzungen (5.49) übertragbar, was nun schlußendlich auf die Festlegung der Konstanten z^ψ führt. Mit (5.50) und (5.67) folgt aus (5.49):

$$z = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \left(j^2{}_0 + j^3{}_0\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \left(j^1{}_0 + j^3{}_0\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \left(j^1{}_0 + j^2{}_0\right) =$$

$$= \frac{e}{4\pi} z^\psi + \frac{e}{4\pi}\left(1 - 2K^{12}\right) z^\psi \tag{5.68}$$

Mit der völlig überraschenden Wahl

$$z^\psi = 1 \tag{5.69}$$

enthält nun jeder der drei meßbaren Eichströme (5.49) zwei Elementarladungen e in seinem Fremdwechselwirkungsanteil zugewiesen, ausgehend von der Tatsache, daß jeder dieser Anteile zwei Integrale der Art (5.67a) - (5.67c) enthält, die je ein einzelnes Elektron repräsentieren sollen. Genau genommen verhalten sich die spinoriellen Einzeldichten mit dieser Wahl neutral gegenüber den Koppelungskonstanten K^{fg} und $I^n{}_\ell$, was auch in zweierlei Hinsicht geboten ist. (Zur Erinnerung: Laut (4.53) bestimmen nicht nur die K_{ab} die Koppelungsstärke der Spinordichten, sondern auch die $I^{ABn}{}_\ell$. Durch die Wahlen (5.4) und (5.5) ist jenes nur nicht mehr sichtbar.)
Erstens soll die Wahl der z^ψ auch für andere Situationen gültig sein, z.B. in Systemen mit zwei negativen und einer positiven Ladung. Ein solcher Ladungswechsel wird für $z^\psi = 1$ durch das Umkehren eines Vorzeichens einer der Komponenten $I^n{}_\ell$ erreicht; siehe Unterkapitel 5.2. Die Wahl (5.69) besitzt demnach allgemeinere Gültigkeit als für den gerade betrachteten Fall dreier gleicher Ladungen, da durch sie jede der Einzeldichten den Betrag einer Elementarladung zuordnet, unabhängig vom Vorzeichen.
Zweitens treten die Einzeldichten immer zweimal als Quellen einer Fremdwechselwirkung auf und einmal als Quelle der Selbstwechselwirkung. Legt man eine spezielle Wahl von z^ψ unter Bezugnahme auf die Rolle der Dichten als Quellen der Fremdwechselwirkung fest, können Probleme mit ihren Rollen in der Selbstwechselwirkung entstehen und umgekehrt. (5.69) verhindert dieses durch Verlagerung der Frage nach der Koppelungsstärken der Dichten in den verschiedenen Rollen auf die Koeffizienten K^{fg} und $I^n{}_\ell$.
Anknüpfend an die gerade herausgestellte Doppelrolle der Einzeldichten, soll das Verhältnis der Selbstwechselwirkungsanteile in den Strömen zu den einzeln nachweisbaren Ladungen in der vorangegangenen Diskussion, die sich auf die spinoriellen Einzeldichten stützt, geklärt werden. Zunächst ist diese Diskussion rein technisch auf der Basis der Noetherströme (5.40) erfolgt, um dann auf die beobachtbaren Ströme (5.49) übertragen zu werden. Im Zusammenhang mit diesen wurde z^ψ zwar neutral gewählt, aber

die Festlegung (5.50) ist bereits so getroffen worden, daß damit im Grenzfall einzelner Teilchen den Fremdwechselwirkungsanteilen in (5.49) die Ladung $2e$ zugesprochen wird, die mit (5.67a) - (5.67c) in zwei einzelne Ladungen e zerfällt, oder besser gesagt aus ihnen zusammengesetzt ist. Den Fremdwechselwirkungsanteilen wird also gegenüber dem Selbstwechselwirkungsanteil Vorrang eingeräumt. Die Begründung dafür ist folgende: Die Ströme (5.49) sind jeweils Quellen für Potentiale, die auf einen Spinor wirken. Im Hinblick auf die Meßbarkeit der Ladungen im Fremdwechselwirkungsanteil wird dieser Spinor als das dazu notwendige Testteilchen angesehen; die Namensgebung der beobachtbaren Ströme beruht gerade auf dieser Ansicht. Soll nun (Eich-)Selbstwechselwirkung ein grundsätzlich vorhandener Prozeß sein, muß, wegen fehlender anderer Potentiale, diese von denen mitgetragen werden, die auch die Wechselwirkung mit den anderen Teilen des Systems übertragen, wodurch die Anwesenheit eines entsprechenden Quelltermes vonnöten ist. In Bezug auf die vorangegangene Herausarbeitung des Begriffes eines einzelnen Teilchens stehen aber die beiden Dichten im Fremdwechselwirkungsanteil im Vordergrund. Zudem ist nur in diesem Bezug die Festlegung (5.50) verständlich, denn für ihre Aufstellung wurde ja gerade angenommen, daß ein Teilchen die beiden anderen spürt. Im verschränkten Zustand ist diese Aussage gar nicht möglich, da die Austauschausdrücke in die Ladungserhaltung miteinbezogen werden müssen. Allerdings braucht die so getroffene Festlegung nicht mehr geändert zu werden, wenn einer der beteiligten Freiheitsgrade z.B. durch Vorzeichenänderung oder auch Massenänderung dauerhaft von den anderen unterscheidbar wird. Ebenso ist diese Festlegung konsistent mit der dynamischen Vereinzelung nur des bewirkten Spinors alleine. Die Ladung $2e$ kann dann zwar nicht auf die Spinoren in den Fremdwechselwirkungsquellen exakt aufgeteilt werden, das nun autarke Teilchen wechselwirkt aber immer noch mit der Gesamtladung $2e$. Auf die Nichtbeobachtbarkeit der Austauschpotentiale, die diesen Vorgang der Ladungsverschmierung zwischen je zwei Spinoren mittragen, ist bereits im zweiten Absatz nach (5.53) ausführlich eingegangen worden. Sie ist auch der Grund für die Nichtbeobachtbarkeit der Ladung z^B, die mit den zusätzlichen Freiheitsgraden der Theorie zusammenhängt, obwohl die Ausdrücke $B^{u\mu}G^{u+3}{}_{\mu\nu}$ an sich eichinvariant sind.

Das Verschwinden dieser Ausdrücke durch gegenseitiges Aufheben in (5.68) ist auf die Anzahl $n = 3$ der Spinoren zurückzuführen; für $n \geq 4$ sind solche Terme durchaus zugegen. Leider ist es bisher aber weder gelungen, ihre Normierungskonstante $z^B(g_*)$ durch Anwendung der Theorie auf atomare Systeme zu bestimmen, noch durch grundsätzliche Überlegungen herzuleiten. Von dieser Seite aus ist bisher eine Normierung auf Null favorisiert worden, echte Aussicht auf eine Beantwortung dieser Frage bieten aber wahrscheinlich erst Modellsysteme, bei denen die Gravitation mitberücksichtigt werden muß, da im Energie - Impulstensor die Gesamtheit der Austauschfeldstärken meßbar anwesend ist.

Die bisherige Favorisierung des Wertes Null für z^B beruht ebenso wie der Wert Eins für z^ψ auf der vorhin geschilderten Grenzwertsituation vereinzelter Spinoren. Tritt hier der ideale Grenzfall unendlich weit voneinander entfernter Ladungsträger ein, entfällt auch die Eichwechselwirkung, und das System kann als in einer Art Grundzustand befindlich betrachtet werden. Für die jetzt von den Spinoren abgekoppelten bosonischen Potentiale ${B^x}_\mu$ wäre es dann fast als natürlich anzusehen, daß sie sich alle sowohl im selben Zustand als auch im gleichen Raumvolumen einfinden. Im vorliegenden Fall dreier Teilchen heben sich unter diesen Voraussetzungen in (5.43) bereits die Austauschquellen der Eichfeldstärken gegenseitig weg; durch die fehlenden $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Quellen tragen die ${A^f}_\mu$ und ${F^f}_{\mu\nu}$ mit ihren materiellen Quellen im unendlichen Abstand zum Lokalisationsvolumen der ${B^x}_\mu$ nichts zu den entsprechenden Ausdrücken auf den rechten Seiten von (5.44) bei, die Ausdrücke in $B^{x\mu}{G^y}_{\mu\nu}$ alleine fehlen ohnehin, so daß die Quellen der Austauschfeldstärken zu Null werden; die Austauschpotentiale und die Integranden der Integrale (5.67d) - (5.67f) schließen sich an. Für z^B folgt der Wert Null. Das paarweise Aufheben der Austauschausdrücke ist allerdings ein Spezialfall, der nur für $n = 3$ auftritt. Trotzdem bleibt für kohärente Austauschpotentiale der Wert Null für z^B gültig, denn, wie bereits erwähnt, spielen im Volumen der ${B^x}_\mu$ die materiellen Quellen der ${A^f}_\mu$ keine Rolle. Neben dem reinen $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Charakter, mit dem die Eichfeldstärken und - potentiale in die Yang - Millsgleichungen der ${G^x}_{\mu\nu}$ eingehen, spielen nun auch nur noch ihre $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Quellen eine Rolle[§], weshalb sie im Volumen der $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Austauschpotentiale als zu ihnen äquivalent behandelt werden dürfen, d.h. mit ihnen und folglich auch untereinander kohärent sind. Dann entfallen aber die Differenzen ${A^2}_\mu - {A^3}_\mu$, ${F^2}_{\mu\nu} - {F^3}_{\mu\nu}$ etc., und die Quellen der ${G^x}_{\mu\nu}$ sind wieder Null, mit den bereits geschilderten Folgen. Das Verschwinden der Austauschpotentiale fügt sich mit der Tatsache zusammen, daß zwischen kohärenten Potentialen im selben Zustand kein Austausch mehr zu vermitteln ist, für den die ${B^x}_\mu$ ebenso verantwortlich sind wie für den zwischen den ${}^n\psi$; siehe die Diskussion nach (5.23).

Mit ihrem mittleren Verschwinden erfüllen die Austauschpotentiale zwar auf einfache Art die Anforderungen, die der Grenzfall einzelner Teilchen an sie stellt, verhindern aber auch interessante Fragestellungen. So wäre es bedenkenswert, die Idee des Quark - Confinements des MIT - Bag - Modells zu übernehmen und sich zu fragen, ob die ${B^x}_\mu$ die Lokalisierung der Teilchen unterstützen, indem sie um deren Volumina einen Druck aufbauen, der die Spinoren an ihrer Ausbreitung hindert. Durch ein solches Modell wären die ${B^x}_\mu$ zuerst einmal durch das ständige Vorhandensein von Punktteilchen indirekt nachweisbar und im Energie - Impulstensor durch ihren jetzt ständigen Beitrag zur Gravitation direkten Messungen zugänglich.

Die Beschränkung der Austauschsymmetrie

Um den Begriff einzelner Teilchen $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - invariant zu belassen, ist es notwendig, bei solchen Transformationen die Integrale (5.67) nicht zu ändern. Die Eichtransformationen $E\,(\mathbb{N}_{4\times4}) = U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4})$ erfüllen diese Bedingung offensichtlich uneingeschränkt; sie verdanken ihren Namen genau dieser Eigenschaft. Ebenso offensichtlich gilt die Invarianzforderung unter der uneingeschränkten Wirkung der durch

[§]Nebenbei sei angemerkt, daß in diesem Bild die ${F^f}_{\mu\nu}$ einen sehr ausgeprägten bilokalen Charakter besitzen, der sehr gut seinen Doppelcharakter als $U\,(\mathbb{1}_{4\times4})$ - und $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Feldstärke widerspiegelt.

die Generatoren β_x (5.7) erzeugten $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ - Transformationen nicht. Betrachtet man z.B. die Dichten ${}_1\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^1\psi'$ und ${}_3\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^3\psi'$ des Spinors $\Psi' = \mathcal{S}_{13}\Psi$ (5.25)

$$\begin{aligned} {}_1\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^1\psi' = {}&{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \cdot \cos^2\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) + {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi \cdot \sin^2\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) \\ &+ \left[{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi \cdot \Lambda^5\,(x) - {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \cdot \Lambda^{5*}\,(x)\right] \cdot \frac{i}{\left|\Lambda^5\,(x)\right|} \sin\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) \cos\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) \end{aligned} \tag{5.70a}$$

$$\begin{aligned} {}_3\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^3\psi' = {}&{}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi \cdot \cos^2\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) + {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \cdot \sin^2\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) \\ &- \left[{}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi \cdot \Lambda^5\,(x) + {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \cdot \Lambda^{5*}\,(x)\right] \cdot \frac{i}{\left|\Lambda^5\,(x)\right|} \sin\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right) \cos\left(\left|\Lambda^5\,(x)\right|\right)\ , \end{aligned} \tag{5.70b}$$

folgt aus der ursprünglichen Normierung (5.67) keinesfalls die gleiche Aussage für ${}_1\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^1\psi'$ oder ${}_3\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^3\psi'$. Erst die schon bekannte Beschränkung

$$\begin{gathered} \left|\Lambda^5\,(x)\right| = n\frac{\pi}{2} \\ n = 1, 2, 3, \dots\ , \end{gathered} \tag{5.71}$$

oder

$$\begin{gathered} \left|\Lambda^5\,(x)\right| = n\pi \\ n = 1, 2, 3, \dots\ , \end{gathered} \tag{5.72}$$

führen zum gewünschten Ziel. Aufbauend auf den so entstandenen Dichten

$${}_1\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^1\psi' = {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi \quad \vee \quad {}_1\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^1\psi' = {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \tag{5.73a}$$

$${}_3\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^3\psi' = {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi \quad \vee \quad {}_3\overline{\psi}'\gamma_\nu\,{}^3\psi' = {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi\ , \tag{5.73b}$$

die eine reine Vertauschung der ursprünglichen sind, können wieder Integrale der Art (5.67a) - (5.67c) gebildet werden. Analoges gilt für die Ausdrücke $B^{u\mu}G^{u+3}{}_{\mu\nu}$ unter der eingeschränkten Transformation $\mathcal{S}_{13}^{\text{ad}}$ (5.36) und die Integrale (5.67d) - (5.67f):

$$B^{4\prime\mu}G^{7\prime}{}_{\mu\nu} = B^{9\mu}G^{6}{}_{\mu\nu} \quad \vee \quad B^{4\prime\mu}G^{7\prime}_{\mu\nu} = B^{4\mu}G^{7}{}_{\mu\nu} \tag{5.74a}$$

$$B^{5\prime\mu}G^{8\prime}{}_{\mu\nu} = B^{8\mu}G^{5}{}_{\mu\nu} \quad \vee \quad B^{5\prime\mu}G^{8\prime}{}_{\mu\nu} = B^{5\mu}G^{8}{}_{\mu\nu} \tag{5.74b}$$

$$B^{6\prime\mu}G^{9\prime}{}_{\mu\nu} = B^{7\mu}G^{4}{}_{\mu\nu} \quad \vee \quad B^{6\prime\mu}G^{9\prime}{}_{\mu\nu} = B^{6\mu}G^{9}{}_{\mu\nu}\ . \tag{5.74c}$$

Zu beachten ist der Umstand, daß nur der *Betrag* des Transformationsparameters $\Lambda^5\,(x)$ global ein Vielfaches von π sein muß; $\Lambda^5\,(x)$ selber kann jeden Wert auf den dadurch festgelegten Kreisen in der komplexen Ebene annehmen, weshalb mit den Austauschtransformationen immer noch Lokalität verbunden ist. Diese Lokalität bedingt natürlich ein inhomogenes Transformationsverhalten auch des Austauschanteils $\mathcal{B}_\mu\Psi$ der eichkovarianten Ableitung, um deren homogenes Transformationsverhalten sicherzustellen. Andererseits haben auch die Austauschtransformationen Anteil am inhomogenen Transformationsverhalten von $\mathcal{A}_\mu$. Es muß also wirklich immer die inhomogene Transformation von ganz $\mathcal{U}_\mu$ (mit Beschränkungen) (4.42) vorgenommen werden. Z.B. lautet $\mathcal{U}'_\mu$ unter $\mathcal{S}_{13}$, wenn die Beschränkung $|\Lambda^5(x)| = \frac{n\pi}{2}$[§]durch

$$\Lambda^5(x) = \frac{n\pi}{2}\mathrm{e}^{i\varphi_{13}(x)} \tag{5.75}$$

berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}'_\mu = &\begin{pmatrix} -i\left({A^1}_\mu + {A^2}_\mu\right)\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & {B^7}_\mu\mathrm{e}^{-i\varphi_{13}(x)}\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & -i{B^5}_\mu\mathrm{e}^{-2i\varphi_{13}(x)}\cdot\mathbb{1}_{4\times4} \\ -{B^4}_\mu\mathrm{e}^{i\varphi_{13}(x)}\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & -i\left({A^1}_\mu + {A^3}_\mu\right)\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & {B^9}_\mu\mathrm{e}^{-i\varphi_{13}(x)}\cdot\mathbb{1}_{4\times4} \\ i{B^8}_\mu\mathrm{e}^{2i\varphi_{13}(x)}\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & {B^6}_\mu\mathrm{e}^{i\varphi_{13}(x)}\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & -i\left({A^2}_\mu + {A^3}_\mu\right)\cdot\mathbb{1}_{4\times4}\end{pmatrix}\\ &- \begin{pmatrix} -i\partial_\mu\varphi_{13}(x)\cdot\mathbb{1}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & +i\partial_\mu\varphi_{13}(x)\cdot\mathbb{1}_{4\times4}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.76}$$

Zu beachten ist hier, daß zwei Elemente der Hauptdiagonalen, also Eichpotentiale, bei einer *Austauschtransformation* durch den Zusatzterm $\partial_\mu\mathcal{S}_{13}\cdot\mathcal{S}_{13}^{-1}$ modifiziert werden; notwendigerweise, wie eine rein partielle Ableitung von Ψ' (5.26) zeigt.
Die Austauschtransformationen der RST unterscheiden sich demnach von den globalen Permutationen der Standardtheorie nicht nur durch ihren Ursprung, den sie in kontinuierlichen $SU(\mathbb{N}_{4\times4})$ - Transformationen haben, sondern auch dadurch, daß sie diesen charakteristischen Unterschied auch beibehalten. Er geht selbst im Grenzfall vereinzelter Teilchen, der ${B^x}_\mu \equiv 0$ erfordert wo ${}^n\psi \neq 0$, was $\Lambda^y(x)|_{V_i} = const$ in diesen Volumina nach sich zieht, nie ganz verloren. Denn die Begriffsbildung, die in diesem Grenzfall geschieht, ist auch dann noch möglich, wenn ein $\Lambda^y(x)$, das zwei Spinoren koppelt, in jedem der zwei beteiligten Volumina unterschiedliche konstante Werte vom ihm zugewiesenen Kreis in der komplexen Ebene annimmt, deren stetiger Übergang ineinander in den spinorfreien Raumbereichen mit ${B^x}_\mu \neq 0$, ${}^n\psi \equiv 0$ stattfindet.
Trotz der Gemeinsamkeit, kontinuierliche Transformationen zu sein, besteht zwischen den Austauschtransformationen und den vollen Eichtransformationen ein Unterschied. Letztere sind in ihrer Lokalität nicht nur unbeschränkt, sondern lassen auch Größen wie z.B. die Stromdichten invariant. Dagegen bleibt unter den Austauschtransformationen nur die physikalische Begriffswelt unverändert. Am nachdrücklichsten veranschaulichen dies die spinoriellen Einzeldichten. Solange aus der Normierung, die in einer Konfiguration des Systemspinors $\Psi = ({}^1\psi, {}^2\psi, {}^3\psi)^T$ mittels (5.67) erfolgt, auch die artgleiche in einer

[§]Es wird nur der interessante Fall mit $\sin\left(\left|\Lambda^5(x)\right|\right) = 1$ betrachtet. $\left|\Lambda^5\right| = n\pi \to \cos\left(\left|\Lambda^5(x)\right|\right) = 1$ führt, wie schon erwähnt, im wesentlichen zur 1 - Transformation.

anderen Anordnung $\Psi' = \left(\frac{2i\Lambda^5}{\pi}{}^3\psi, {}^2\psi, \frac{2i\Lambda^{5*}}{\pi}{}^1\psi\right)^T$ folgt, sind in Bezug auf die Physik, die sie ergeben, beide zueinander äquivalent. Die Dichte ${}_1\overline{\psi}'\gamma_\nu{}^1\psi'$ ist aber ersichtlich nicht gleich der Dichte ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu, {}^1\psi$, d.h. nicht im streng mathematischen Sinne invariant.
Anstatt nun aber wie in der Standardtheorie eine (gewichtete) Summe über diese und alle anderen Möglichkeiten in die Theorie einzuführen, um der Gleichberechtigung aller möglichen Anordnung der einzelnen Zustände ${}^n\psi$ Rechnung zu tragen, wird hier der Austausch sowie die mit ihm zusammenhängenden Phänomene mit den Mitteln beschrieben, die die Faserbündeltheorie zur Behandlung solcher Äquivalenzen anbietet. Die Aussagen des Formalismus sind invariant gegenüber der Wahl der Reihenfolge der ${}^n\psi$. Dazu müssen in der eichkovarianten Ableitungen (5.20) und (5.23) die zusätzlichen Potentiale ${B^x}_\mu$ und Feldstärken ${G^x}_{\mu\nu}$ auftreten; durch sie, und nicht durch die Summe aller Permutationen, nimmt der Teilchenaustausch Einfluß auf die Entwicklung und die Meßwerte des betrachteten Systems. Durch die Gegenwart dieser zusätzlichen Potentiale in den Bewegungsgleichung (5.42), (5.43) und (5.44) ist dies leicht einzusehen. Daneben haben sie durch die Terme $B^{u\mu}{G^{u+3}}_{\mu\nu}$ in den Eichströmen Anteil am Verlust des Begriffes eines definierten Zustandes, denn (auch) durch die Mitwirkung dieser Terme können in der Situation einander überlappender Spinorfelder die Aussagen der eichinvarianten Erhaltungssätze nicht mehr eindeutig einzelnen Feldern zugeordnet werden; siehe hierzu den ausführlichen vorangegangenen Abschnitt. An dem dort beschriebenen Vorgang läßt sich noch einmal deutlich machen, wie unterschiedlich die konventionelle Theorie und die RST Entanglement behandeln. In der bekannten Theorie wird der Unwissenheit über die genaue Zuordnung der beteiligten Teilchen, die anfangs durch Messung genau einem Zustand zugewiesen waren, zu den Zuständen in der Wechselwirkungszone dadurch Rechnung getragen, daß die Summe aller möglichen Permutationen dieser Zuordnungen verwendet wird. Im Gegensatz dazu arbeitet die RST immer nur mit einem Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse der Systemspinoren. Während Wechselwirkung vorherrscht, kann aber keinem der darin enthaltenen Einzelspinoren eindeutig eine Kenngröße wie z.B. die Ladung zugeordnet werden; die Aussagen der eichinvarianten Erhaltungssätze erstrecken sich in dieser Situation über mehrere Felder, die nicht einmal zur selben Darstellung der Lorentzgruppe gehören. Die Möglichkeit, von einem definierten Zustand zu sprechen, wurde also aufgelöst, indem die dazu nötigen charakterisierenden Erhaltungsgrößen allen Mitgliedern des Systems ununterscheidbar gleichermaßen zugeteilt werden.
Die Beschreibung der Austauschsymmetrie im Rahmen der kontinuierlichen Symmetrien der Yang-Millstheorien bietet gegenüber dem normalen Vorgehen einen Vorteil: Sie muß nicht extra postuliert werden. Allein die Forderung nach einem invarianten Teilchenbegriff, der in die $U(\mathbb{N}_{4\times4})$-Symmetrie der Theorie eingebettet sein soll, führt durch die dazu notwendige Reduzierung der restlichen Symmetriefreiheitsgrade zu einer Form für diese, die genau dem Begriff der Austauschsymmetrie entspricht. Im Gegensatz dazu steht das (Anti-)Symmetrisierungspostulat der konventionellen Theorie.
Mit der Rückführung der Austauschsymmetrie auf kontinuierliche Symmetrien steht diese Arbeit auch im Gegensatz zu der Rückführung der RST auf die Hartree-Focknäherung

durch Rupp und Verschl in [14] und [15]. Die Hartree - Fockmethode steht auf dem Fundament des (Anti -)Symmetriesierungspostulats, wodurch es mit der Permutationsgruppe verbunden ist. Folgerichtig werden in [14] und [15] die Matrizen von der Art der β_x (5.7) nicht als Generatoren der $SU\,(\mathfrak{3}_{4\times4})$ aufgefaßt, sondern als Darstellung der Permutationsgruppe. Da diese globale Gruppe, vor allem auch weil sie keine Liegruppe ist, von den lokalen Symmetrien der Yang - Millstheorien nicht mit erfaßt wird, muß die Anwesenheit der zusätzlichen Elemente in der eichkovarianten Ableitung gesondert postuliert werden, wie es in Teil 1 in Teilkapitel 2.1.3 geschieht.
Die über die Verbindung mit der Hartree - Fockmethode angestrebte Anbindung der RST an die bekannte Theorie ist schwierig, bedingt vor allem durch die voneinander verschiedenen Konzepte zur Beschreibung eines Vielteilchensystems: die Produktwellenfunktionen (der freien Zustände) der Standardtheorie und die Whitneysummen der RST. Als Beispiel für diese Schwierigkeiten kann man die Potentialterme $B^{u\mu}G^{u+3}{}_{\mu\nu}$ in den Eichströmen anführen. Solche Terme sind in der normalen Theorie für den Fall reinen Elektromagnetismus' nicht bekannt; analoge Ausdrücke in den Quellen der elektromagnetischen Felder treten nur in der $SU\,(\mathfrak{2}_{4\times4})$ - Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung auf. Entsprechend unmöglich ist es, sie durch Vergleich der RST mit der Hartree - Focktheorie eines rein elektromagnetisch wechselwirkenden Systems zu interpretieren. Der Unterschied zwischen beiden Theorien, den die Gegenwart von nichtmateriellen Quellen in den Quellströmen der $F^f{}_{\mu\nu}$ (5.43) ausdrückt, mündet in die oben geschilderte unterschiedliche Auffassung von Entanglement.
Die Reduktion der Symmetrien des Systems ist hier, trotz der schon bekannten Bedingungen (5.71) und (5.72), noch einmal aufgegriffen worden, weil nach (5.26) die Bedingungen nur in Vorschau auf diesen Abschnitt angegeben wurde und die Begründung dieser Wahl nach (5.37) nur auf der Trennung der Eichfeldstärken von den Austauschfeldstärken beruht, also nur zwei Sektoren der Theorie strikt auseinanderhält. Daß durch (5.71) und (5.72) im Detail die begriffliche Invarianz der Kernelemente (5.67) der Theorie sichergestellt wird, ist dort noch nicht zu erkennen. Vielmehr sollte man, dem Weg von oben folgend, im Umkehrschluß argumentieren: Aus der Erhaltung des Teilchenbegriffes folgt die Reduktion von $\mathcal{S}_{\text{Austausch}}$, wie z.B. $\mathcal{S}_{13}$ (5.24), auf eine reine Austauschsymmetrie, sowohl im Spinorraum, als auch in der Liealgebra, wobei in letzterer dadurch auch die verschiedenen Potentiale streng voneinander getrennt werden.
Abschließend muß noch die genaue Form der jetzt noch möglichen Gesamttransformationen geklärt werden; sie lautet:

$$\mathcal{S}_{\text{Gesamt}} = \mathcal{S}_{\text{Austausch}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Eich}} = \mathrm{e}^{\Lambda^x \beta_x} \cdot \mathrm{e}^{\Lambda^f \alpha_f} \tag{5.77}$$

oder

$$\mathcal{S}_{\text{Gesamt}} = \mathcal{S}_{\text{Eich}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Austausch}} = \mathrm{e}^{\Lambda^f \alpha_f} \cdot \mathrm{e}^{\Lambda^x \beta_x} \ . \tag{5.78}$$

Daß die beiden unterschiedlichen Arten von Transformationen nur in in sich geschlossener Form nacheinander ausgeführt werden dürfen, liegt nicht in den verschiedenen Begriffen

von Invarianz, die mit ihnen verbunden sind, begründet, sondern vielmehr in der simplen Tatsache, daß die Generatoren α_f der Eichsymmetrie Anteile an der Algebra $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ besitzen, die im allgemeinen nicht mit den restlichen $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ - Generatoren β_x kommutieren; siehe (5.58) bis (5.62) und den darauf folgenden Absatz. Dadurch können Transformationen entstehen, die Eich - und Austauschparameter miteinander vermischen, wodurch wiederum unter ihnen weder der Eichanteil der Theorie invariant ist, noch eine reine Austauschsymmetrie vorliegt, z.B. bei einer Transformation die $\mathcal{S}_{13} = \mathrm{e}^{\Lambda^5\beta_5+\Lambda^8\beta_8}$ (5.24) und $\mathcal{S}_{\text{Eich}} = \mathrm{e}^{\Lambda^2\alpha_2}$ in der Form $\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\Lambda^2\alpha_2+\Lambda^5\beta_5+\Lambda^8\beta_8}$ zusammenführt.
Gleichwohl sind (5.77) und (5.78) immer noch Elemente der Gruppe $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$, die durch ein geeignetes Element der Liealgebra $\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ erzeugt werden können. Dieses steht durch die Baker - Campbell - Hausdorffrelation mit den Exponenten rechten Seiten von (5.77) und (5.78) in Beziehung. Aus der Liealgebra sind demnach nur noch die Elemente zugelassen, deren Koeffizienten der Generatoren sich durch BCH als Polynome $P^a\left(\Lambda^f,\Lambda^x\right)$ der Generatorkoeffizienten Λ^f, Λ^x der oben angegebenen Produktausdrücke ausdrücken lassen:

$$\mathcal{S}_{\text{Gesamt}} = \mathrm{e}^{P^a\left(\Lambda^f,\Lambda^x\right)\upsilon_a}\;. \tag{5.79}$$

5.1.6. Der Energie - Impulstensor

Mit der Festlegung der spinoriellen Dimension $N = 3$ (5.2) der Faser (5.1), der zugehörigen Wahl von $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ zur Strukturgruppe mit Basis $\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_x\}$ (5.6), (5.7) sowie den Komponenten $I^{ABn}{}_{\ell}$ (5.4), (5.5) der Spinormetrik und K_{ab} (5.11) der Liemetrik liest man fast direkt aus (4.79b) die Energie - Impulsdichte des betrachteten Systems ab:

$$T_{\mu\nu} = T^{\text{Dirac}}_{\mu\nu} + T^{\text{Eich}}_{\mu\nu} + T^{\text{Austausch}}_{\mu\nu} \tag{5.80a}$$

$$T^{\text{Dirac}}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\sum_{n=1}^{3}\left({}_n\overline{\psi}\gamma_\mu D_\nu\,{}^n\psi + {}_n\overline{\psi}\gamma_\nu D_\mu\,{}^n\psi - D_\nu\,{}_n\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^n\psi - D_\mu\,{}_n\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^n\psi\right) \tag{5.80b}$$

$$\begin{aligned} T^{\text{Eich}}_{\mu\nu} = {} & K_{11}\left(F^1{}_{\mu\gamma}F^{1\gamma}{}_\nu + F^2{}_{\mu\gamma}F^{2\gamma}{}_\nu + F^3{}_{\mu\gamma}F^{3\gamma}{}_\nu\right) \\ & + \frac{1}{4}K_{11}g_{\mu\nu}\left(F^1{}_{\beta\gamma}F^{1\beta\gamma} + F^2{}_{\beta\gamma}F^{2\beta\gamma} + F^3{}_{\beta\gamma}F^{3\beta\gamma}\right) \\ & + K_{12}\left(F^1{}_{\mu\gamma}F^{2\gamma}{}_\nu + F^2{}_{\mu\gamma}F^{1\gamma}{}_\nu + F^1{}_{\mu\gamma}F^{3\gamma}{}_\nu + F^3{}_{\mu\gamma}F^{1\gamma}{}_\nu + F^2{}_{\mu\gamma}F^{3\gamma}{}_\nu + F^3{}_{\mu\gamma}F^{2\gamma}{}_\nu\right) \\ & + \frac{1}{2}K_{12}g_{\mu\nu}\left(F^1{}_{\beta\gamma}F^{2\beta\gamma} + F^1{}_{\beta\gamma}F^{3\beta\gamma} + F^2{}_{\beta\gamma}F^{3\beta\gamma}\right) \end{aligned} \tag{5.80c}$$

$$\begin{aligned} T^{\text{Austausch}}_{\mu\nu} = {} & + K_{47}\left(G^4{}_{\mu\gamma}G^{7\gamma}{}_\nu + G^7{}_{\mu\gamma}G^{4\gamma}{}_\nu + G^5{}_{\mu\gamma}G^{8\gamma}{}_\nu + G^8{}_{\mu\gamma}G^{5\gamma}{}_\nu + G^6{}_{\mu\gamma}G^{9\gamma}{}_\nu + G^9{}_{\mu\gamma}G^{6\gamma}{}_\nu\right) \\ & + \frac{1}{2}K_{47}g_{\mu\nu}\left(G^4{}_{\beta\gamma}G^{7\beta\gamma} + G^5{}_{\beta\gamma}G^{8\beta\gamma} + G^6{}_{\beta\gamma}G^{9\beta\gamma}\right) \end{aligned} \tag{5.80d}$$

Dabei sind die eichkovarianten Ableitungen $D_\mu {}^n\psi$ diejenigen aus (5.20).
Die Gesamtenergie des Systems ist das Integral über die Zeit - Zeitkomponente von (5.80)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\, T_{00} \ , \tag{5.81}$$

und die Impulse P_i des Systems sind die Integrale über die Zeit - Raumkomponenten von (5.80)

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\, T_{0i} \ . \tag{5.82}$$

Wie der Austauschanteil (5.80d) zeigt, haben die Austauschfeldstärken und - potentiale nicht nur indirekt über die Diracgleichungen (5.42), d.h. über die raumzeitliche Entwicklung der Spinoren, die in (5.80b) eingehen, Anteil, sondern nehmen durch eigene Terme direkt an den Meßgrößen (5.81) und (5.82) teil. Neben der alleine sie betreffenden Sektion (5.80d) sind sie auch durch Terme der Art ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu B^6{}_\mu{}^2\psi$ etc. aus den eichkovarianten Ableitungen im Materieanteil direkt vertreten. Es treten dabei aber *immer alle* Austauschfeldstärken und - potentiale auf. Somit ist keine dieser Größen *einzeln* meßbar.
Unter den Voraussetzungen, die die Aufspaltung (5.67) der Eichströme und den damit zusammenhängenden Begriff eines einzelnen Teilchens ergeben haben, zerfallen auch (5.81) und (5.82) in einzelne Ausdrücke. Ein Spinor mit nur ihm zugewiesener Ladung wird demnach durch die seinem Volumen zugeordneten Impulse und Energie mit eben diesen Meßgrößen individuell ausgestattet. Die bekannten Beschränkungen (5.71) und (5.72) sorgen dann dafür, daß die in einer Eichung festgelegten Energien und Impulse auch in allen anderen noch erlaubten dieselben sind.
Wie schon bei den Eichströmen die Zuordnung der Ladungen geht hier die individuelle Zuordnung der Energien und Impulse zu den einzelnen Feldern verloren, wenn sich die Spinoren anfangen zu überlappen. Im ersten Schritt in diese Richtung beginnen die noch lokalisierten Elektronen, ohne sich überschneidende Wellenfunktionen, über die Eichpotentiale miteinander wechselzuwirken, womit durch die Potentiale $A^f{}_\nu$ die reinen Spinorterme $\int_{V_1} \mathrm{d}^3\vec{r}\ {}_1\overline{\psi}\gamma_0\partial_\nu {}^1\psi$ etc. in (5.81) und (5.82) zu $\int_{V_1} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \big({}_1\overline{\psi}\gamma_0\partial_\nu {}^1\psi + {}_1\overline{\psi}\gamma_\mu {}^1\psi\,(A^2{}_\nu + A^3{}_\nu)\big)$ etc. werden. Während die Ladungen noch eindeutig ihren Spinoren zugewiesen werden können, werden Energie und Impuls der Volumina V_i bereits jetzt in jedem V_i gleichermaßen Spinoren und Eichpotentialen zugewiesen; die Integrale bleiben auch nur deshalb auf die V_i beschränkt, weil noch ${}^n\psi = \partial_\nu{}^n\psi \equiv 0$ für $\vec{r} \notin V_i$ gilt. Der nun existierende Eichfeldanteil (5.80c) erlaubt in (5.81) und (5.82) wegen fehlender solcher Beschränkungen für die $A^f{}_\nu$ schon keine Integrationen über einzelne Volumina mehr. Der Term proportional zu K_{11} in der ersten Zeile von (5.80c) vertritt in den Anteilen, die die Eichwechselwirkung in (5.81) und (5.82) verursacht, die Beiträge der elektromagnetischen Selbstwechselwirkung; für $K_{11} \leftrightarrow K^{11} = -K^{12} = \frac{1}{2}$ entfällt er, zusammen

mit allen anderen Beiträgen die die Selbstwechselwirkung quer durch den Formalismus besitzt.
Im nächsten Schritt mit sich überschneidenden Spinoren können die Austauschpotentiale ${B^x}_\mu$ (außer durch sehr rigide Nebenbedingungen) nicht mehr aus den Raumbereichen der Spinoren herausgehalten werden und umgekehrt. Als bereits ausführlich behandelte Folge davon verschwindet wegen der nun nur noch als Einheit behandelbaren Erhaltungssätze die Zuordnung der Ladungen zu einzelnen Feldern. Auf der Grundlage derselben Argumente, die dazu führen, sind die Integrale (5.81) und (5.82) ebenso nicht mehr in einzelne Ausdrücke zerlegbar, bestimme Anteile der Energie und des Impulses können also auch nicht mehr nur einzelnen Feldern zugeordnet werden. Selbst wenn dies gelänge, könnte immer noch nicht von Energie oder Impuls eines vereinzelten Teilchens gesprochen werden, denn die dazu charakteristische Zuordnung der Ladung zu nur einem Feld existiert weiterhin nicht.
Das Verschwinden des Teilchenbegriffes liegt bisher alleine an den Symmetrien, die die Strukturgruppe des Systems über die reine Eichsymmetrie hinaus einbringt, selbst im Energie-Impulstensor, der der Lorentzsymmetrie des Systems zugeordnet ist, nicht seinen unitären Yang-Millssymmetrien. Andererseits weist der Generator (5.33) der Lorentzgruppe für $\Psi = ({}^1\psi, {}^2\psi, {}^3\psi)$ nur eine reine Blockdiagonalstruktur (reine direkte Summenstruktur) auf, während in der Strukturgruppe die blockdiagonale Struktur der reinen Eichgruppe, d.h. die Summenstruktur ihrer Liealgebra, durch nebendiagonale Elemente der Restsymmetrie begleitet wird. Dabei ist die Restsymmetrie gerade so weit eingeschränkt, daß sie die auf der Basis der Eichgruppe gebildeten Begriffe der RST nicht ändert. Es stellt sich nach diesem Vergleich fast von selber die Frage, ob mit der Lorentzgruppe nicht ähnlich verfahren werden kann, um das Verschwinden des Teilchenbegriffes ohne Rückgriff auf die Yang-Millssymmetrien des Systems alleine im Energie-Impulstensor zu verankern. Die Frage besteht also aus der Frage nach einer Lorentzsymmetrie des Systems, in die die blockdiagonale Form (5.33) eingebettet ist, und wie deren zusätzliche Freiheitsgrade eingeschränkt werden müssen, um alles auf (5.33) Aufbauende invariant zu lassen. Dabei ist wie bei der Strukturgruppe eine Begriffsinvarianz gefragt, keine streng mathematische Invarianz. Die Suche nach zusätzlichen Elementen der Lorentzgruppe kann man schon im ersten Schritt der Reduktion der Symmetrien des Systems beginnen. Zur Erinnerung: $\Psi = ({}^1\psi, {}^2\psi, {}^3\psi)$ ensteht durch die Zusammenfassungen (5.2) von je vier Komponenten des zwölfkomponentigen Objektes in (5.1). Diese Zusammenfassung ist Ausdruck für genau die Herausbildung des Generators (5.33) aus der übergeordneten Lorentzsymmetrie des den drei Spinoren übergeordneten zwölfkomponentigen Objektes. Einen geeigneteren Rahmen findet die gerade umrissene Fragestellung wahrscheinlich, wenn sie mit ortsabhängigen Generatoren der Lorentzsymmetrie angegangen wird, also allgemein relativistisch.
An dieser Stelle sei dann auch nocheinmal darauf eingegangen, warum Modellsysteme mit Gravitationswechselwirkung besonders geeignet sind die Austauschfelder für sich näher zu untersuchen, obwohl die Austauschgrößen *immer* mindestens durch (5.80d) in

$T_{\mu\nu}$ bzw. E und $\vec{P}$ vertreten sind, im Fall verschränkter Systeme auch durch die zugehörigen Potentialterme der eichkovarianten Ableitungen in (5.80b). In Systemen, in denen sich alle Felder stark überlappen, leisten die Austauschpotentiale ihren Beitrag aber immer zusammen mit allen anderen Feldern. Für die bisherigen atomaren Modellsysteme heißt das, ein vom Atom ausgesandtes Photon trägt in seiner Energie und seinem Impuls immer nur die Summe aller entsprechender Änderungen der Untersysteme (5.80b) - (5.80d) vom Atom weg, die dann einzeln zu identifizieren sind, was umso besser gelingt, je mehr über die einzelnen Untersysteme bekannt ist, selbst dann aber nicht immer exakt möglich sein muß. Die Nebenbedingung eines bestimmten Wertes für E kann durchaus von mehreren unterschiedlichen Konfigurationen der Teilsysteme von $T_{\mu\nu}$ erfüllt werden, welche dann durch die Daten, die das Photon liefert, im Rückschluß nicht unterschieden werden können; siehe hierzu auch oben die nicht mehr eindeutige Zuordnung der Gesamtenergie oder des Gesamtimpulses zu einzelnen Feldern.
Eine für nur an den Austauschpotentialen durchgeführte Untersuchung günstige Situation liegt bei sich nicht überlappenden Spinoren vor, da dann jedem der Untersysteme zu $T_{\mu\nu}$ eigene Raumbereiche zugewiesen sind. Da weiterhin die Austauschpotentiale streng paarweise koppeln, kann der Inhalt des Volumens der ${B^x}_\mu$ nicht durch eine $U(N)$ - Eichwechselwirkung "ausgemessen" werden. Andererseits besitzt der für solche Eichwechselwirkungen "leer" aussehende Raumbereich wegen (5.80d) sehr wohl Gravitationswechselwirkung mit seiner Umgebung, deren alleinige Urheber die ${B^x}_\mu$ sind.
Im Rahmen atomarer Modelle zeigt E (5.81) eine Aufspaltung in diskrete, voneinander verschiedene Niveaus. Ein allgemeines Quantisierungsprinzip, das dann auch klären müßte, warum die z^ψ vor und nach der Teilnahme der zugehörigen ${}^n\psi$ an Wechselwirkungen immer die eine gleiche Größe e (oder eventuell Vielfache davon) besitzen und nicht etwa kontinuierlich alle Werte zwischen 0 und z zeigen, ist bisher noch nicht gefunden. Der normale Weg der Überführung der Felder einer Theorie in Operatoren nach dem Vorbild der QFT steht hier jedoch nicht offen, wegen der dabei zwangsweise miteinander kollidierenden Mehrteilchenbegriffe; dem der RST den der QFT hinzuzufügen muß zu Problemen führen. Eventuell bieten die Methoden der Quantenloopgravitation einen Weg zur Diskretisierung der RST.
Die hier für $T_{\mu\nu}$ durchgeführte Diskussion kann in der vorliegenden Form auch für die Drehimpulsdichte des vorliegenden Dreiteilchensystems, die aus (4.86) folgt, geführt werden. Da im Prinzip die gleichen Aussagen wie hier folgen, nur eben für die Bahn- und Eigendrehimpulse statt der Energie und linearen Impulse der Felder, wird darauf verzichtet.
Im Hinblick auf das nächste Unterkapitel sei noch erwähnt, daß in jedem der Terme von (5.80b) grundsätzlich die Koppelungsmatrix ${I^n}_\ell$ der Spinormetrik auftritt, was nach der Wahl (5.5) nur nicht mehr auffällt; vergleiche auch die allgemeine Form (4.79b).

5.2. Drei Fermionen mit unterschiedlichen Ladungen und Massen

In diesem Unterkapitel werden die Auswirkungen der Nebenbedingungen (4.19) und (4.30) dargelegt, wenn die Einträge der Massenmatrix $\mathcal{M} = \{M^n{}_l\}$ bzw.der Spinormetrik $\mathcal{I} = \{I^n{}_\ell\}$ nicht mehr gleich sind. Im Fall unterschiedlicher, aber konstanter hauptdiagonaler Einträge erzwingen sie das Entfallen der Austauschsymmetrie zwischen den Spinoren, die unterschiedlichen Einträgen $M^n{}_l$ bzw. $I^n{}_\ell$ zugeordnet sind, indem sie die Verwendung der Generatoren der Austauschsymmetrie zwischen den betroffenen Spinoren unterbinden. Sind die Einträge von $\mathcal{M}$ oder $\mathcal{I}$ zusätzlich zur ihrer Ungleichheit auch nichtkonstant, darf die Symmetrie zwischen den Spinoren zu unterschiedlichen Einträgen zwar bestehenbleiben, muß jetzt aber zu den Eichsymmetrien gerechnet werden. Die Zustände, die die unter dieser Eichwechselwirkung zusammengefaßten Spinoren beschreiben, sind wegen der nun zwingend nichtkonstanten Massen $M^n{}_l$ und Koppelungsgrößen $I^n{}_\ell$, die einen Zustand charakterisieren, wahrscheinlich nicht stabil.
Das Hauptaugenmerk liegt in diesem Unterkapitel allerdings auf der ersten Variante. Sie wird im Rahmen des Modellsystems dreier Fermionen für den Fall ungleicher Einträge in der Koppelungsmatrix $I^n{}_\ell$ der Spinormetrik $\mathcal{I}(\Psi, \Psi)$ beschrieben. Ausgehend von der Auswertung der Nebenbedingung (4.30) werden die Auswirkungen ihrer Ergebnisse auf den Rest der Theorie geschildert. Der Betrachtung der $I^n{}_\ell$ wird trotz formal gleicher Ausgangspunkte der Vorzug vor der Betrachtung der $M^n{}_l$ gegeben, da sie durch ihre Gegenwart in allen Skalarprodukten der Theorie weitreichenderen Einfluß auf deren Aussagen besitzen als die Massen, die nur an einigen wenigen Punkten eingehen. So bilden die $I^n{}_\ell$, durch das, was im Folgenden über ihren Einfluß herausgearbeitet wird, die Grundlage für die ersten Ansätze zur Beschreibung von Erzeugungs - und Vernichtungsprozessen in der RST in Teilkapitel 5.3; die $M^n{}_l$ könnten solches niemals leisten. Nach der Beschreibung der Auswirkungen der verschiedenen $I^n{}_\ell$ ist es deshalb auch nicht schwer, ausgehend von der Angabe des Aussehens der Nebenbedingung für die $M^n{}_l$ in Teilkapitel 5.2.2, deren Auswirkungen an den betreffenden Stellen der Theorie ohne weitere Anleitung nachzuvollziehen.
Der Fall nichtkonstanter oder paritätsverletzender $I^n{}_\ell$ wird erst im Zusammenhang des Unterkapitels 5.4 seine Bedeutung zeigen.

5.2.1. Drei Fermionen unterschiedlicher Ladung

Die Gleichung (4.30), wie im übrigen auch (4.19), ist nichts anderes als die Forderung nach einer Metrik $\mathcal{I}$ im Spinorbündel, die mit der Konnexion in diesem Bündel verträglich ist, d.h. nach einem Skalarprodukt in den Spinorfasern, das unter der Strukturgruppe des Bündels erhalten ist: siehe z.B. [8,10,11,17]. Warum mit der Massenmatrix $\mathcal{M}$ in der RST ein drittes Objekt diese Bedingung erfüllt, ohne auf den ersten Blick eine Matrix mit metrischen Funktionen zu sein, ist bisher ungeklärt.

In Bezug auf die Strukturgruppe eines Bündels sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Strukturgruppe in der RST die vollen Eichsymmetrien und die eingeschränkten Rest - oder Austauschsymmetrien umfaßt, wobei es im Folgenden gerade die Austauschsymmetrien sind, die mit der Metrik $\mathcal{I}$ abgestimmt werden sollen.
Die Frage nach der Verträglichkeit der Metrik mit der Konnexion ist im Kern die Frage nach den Isometrien der Metrik. Diese läßt sich bekanntlich von zwei Seiten stellen. Entweder kann ausgehend von der Metrik eine passende Konnexion gesucht werden, oder bei vorgegebenen Symmetrien wird eine entsprechende Metrik gesucht. Das bekannteste Beispiel für das erste Verfahren sind die Levi - Civitakonnexionen, das zweite Vorgehen wird meist durch die Frage nach den Killingvektoren einer Symmetrie realisiert.
Die Frage nach der Verträglichkeit von Metrik und Konnexion wird im Folgenden zwar ausgehend von einer vorgegebenen Metrik angegangen, kann aber tatsächlich auch von der anderen Seite aus betrachtet werden: Wenn zwischen zwei Spinoren keine Austauschwechselwirkung herrscht, weil sie verschiedenartige Teilchen repräsentieren, welche Form hat dann die Metrik in den Spinorfasern? An der Art der Fragestellung, besser gesagt an der Tatsache, daß die Frage nach fehlender Austauschwechselwirkung zwischen ungleichen Teilchen auf diese Weise gestellt werden kann, wird noch einmal ganz klar der Unterschied zwischen der Behandlung des Austausches in der Standardtheorie und in der RST herausgestellt. In der RST ist die Austauschsymmetrie Teil der unitären Symmetrien des Systems, die durch die Strukturgruppe der Theorie vertreten werden, und nicht die zusätzlich angenommene Symmetrie der Permutationsgruppe. Diese läßt als diskrete Gruppe das Killingverfahren nicht einmal im Ansatz zu.
Die in der oben angeführten Literatur angegebenen Ausdrücke für metrische Kompatibilität und Killinggleichung unterscheiden sich in einer Indexstellung und folglich in einem Vorzeichen von den hier verwendeten Ausdrücken für $I^n{}_\ell$. Dessen für eine Metrik ungewöhnliche Indexstellung ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß die $I^n{}_\ell$ die Spiegelung nicht enthalten, die einer der in die Metrik eingehenden Spinoren beim Übergang zu seinem adjungierten Spinor in seinem Imaginärteil erfährt; siehe auch die Bemerkung nach (4.30).

Ein Beispiel für die Isometrien allgemeiner Spinormetriken: die Symmetrien der Spinormetriken mit ungleichen Hauptdiagonalelementen

Entwickelt man $\mathcal{I} = \{I^n{}_\ell\}$ nach den Generatoren α_f (5.6)

$$\mathcal{I} = I^1\alpha_1 + I^2\alpha_2 + I^3\alpha_3 \ , \tag{5.83}$$

d.h.

$$I^1{}_1 = iI^2 + iI^3 \tag{5.84a}$$
$$I^2{}_2 = iI^1 + iI^3 \tag{5.84b}$$
$$I^3{}_3 = iI^1 + iI^2 \tag{5.84c}$$
$$I^n{}_\ell = 0 \quad \text{für} \quad n \neq l \ , \tag{5.84d}$$

und wertet mit dieser Darstellung die Bedingung (4.30) aus, erhält man

$$\partial_\mu \mathcal{I} + U^a{}_\mu I^f \left[\upsilon_a , \alpha_f \right] = 0 \tag{5.85a}$$

$$\left(\partial_\mu I^b + U^a{}_\mu I^f C^b{}_{af} \right) \upsilon_b = 0 \; . \tag{5.85b}$$

Das ist im Einzelnen

$$\partial_\mu I^f = 0 \quad , \quad f = 1,2,3 \tag{5.86a}$$

$$B^4{}_\mu \left(I^2{}_2 - I^3{}_3 \right) = 0 \tag{5.86b}$$

$$B^5{}_\mu \left(I^3{}_3 - I^1{}_1 \right) = 0 \tag{5.86c}$$

$$B^6{}_\mu \left(I^1{}_1 - I^2{}_2 \right) = 0 \; . \tag{5.86d}$$

Die Gleichungen für $a \supset x = 7, 8, 9$ ergeben die Gleichungen (5.86b), (5.86c) und (5.86d) mit $B^7{}_\mu$, $B^8{}_\mu$ und $B^9{}_\mu$ anstatt $B^4{}_\mu$, $B^5{}_\mu$, $B^6{}_\mu$; wegen $B^u{}_\mu = -B^{(u+3)*}{}_\mu$; $u = 4, 5, 6$; ergeben sich daraus aber keine zusätzlichen Bedingungen.
Zuerst einmal sind infolge von (4.30) bzw. (5.85) die Elemente der Hauptdiagonalen von $\mathcal{I}$ bei verschwindenden Nebendiagonalelementen zwangsläufig konstant. Weiterhin reduzieren sich durch ihre Abwesenheit die Gleichungen (5.86a) - (5.86c), die aus (5.85) für $a \supset x = 4, 5, 6$ folgen, auf die Aussage, daß entweder ein Paar der $I^f{}_f$'s gleich oder das entsprechende Austauschpotential $B^u{}_\mu$ Null ist, um die gestellte Forderungen zu erfüllen. Die Austauschpotentiale korrespondieren dabei derart zu den Indices der Liemetrikelemente, daß zusammen mit einem Paar Spinorindices immer das Potential auftritt, das die betreffenden Spinoren miteinander austauschkoppelt. So ist $B^4{}_\mu / B^6{}_\mu$ für die Austauscheffekte zwischen ${}^2\psi$ und ${}^3\psi$ zuständig, $B^5{}_\mu / B^8{}_\mu$ für die zwischen ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ und $B^6{}_\mu / B^9{}_\mu$ für jene zwischen ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$.
Nach der Wahl

$$I^3{}_3 \neq I^2{}_2 = I^1{}_1 = 1 \tag{5.87}$$

existiert nur noch der Austausch zwischen ${}^1\psi$ und ${}^2\overline{\psi}$, denn $B^4{}_\mu / B^7{}_\mu$ und $B^5{}_\mu / B^8{}_\mu$ müssen jetzt verschwinden, damit (5.86b) und (5.86c) erfüllt sind. $I^1{}_1$ und $I^2{}_2$ wurden gleich Eins gesetzt, um direkten Anschluß an die vorhergehenden Kapitel zu erhalten. In deren Rahmen der elektromagnetischen Wechselwirkung dreier Elementarladungen ist für $I^3{}_3$ hauptsächlich der Wert -1 von Interesse, die Ungleichheit der Koppelungselemente ist aber laut (5.86) nicht auf diesen Gegensatz beschränkt. Um einen Einblick in die allgemeineren Möglichkeiten, die die Koppelungsmatrix $\{I^n{}_\ell\}$ bietet, zu geben, wird im Folgenden $I^3{}_3$ kein genauer Wert zugewiesen. Es ermöglicht so, sich ein Bild vom allgemeinen Auftreten von $I^1{}_1$ und $I^2{}_2$ zu verschaffen, die in zu $I^3{}_3$ analoger Weise in die Theorie eingehen.
Die Bedingung $B^4{}_\mu \equiv B^5{}_\mu \equiv 0$ besagen im strengen Sinne eigentlich nicht das identische Verschwinden der Felder, sondern das Nichtauftreten der zugehörigen Generatoren β_4/β_7 und β_5/β_8 im Formalismus. In ihren Auswirkungen sind diese Aussagen meistens äquivalent zueinander, am Beispiel von Gleichung (5.85a) läßt sich jedoch ein Unterschied

zeigen, der für die Herleitung der Bewegungsgleichungen von Systemen mit unterschiedlichen ${I^n}_\ell$ an einer Stelle von Bedeutung ist. Treten bereits in (5.85a) die Generatoren β_4 und β_5 nicht auf, entstehen die die Gleichungen (5.86a) und (5.86b) erst gar nicht, Probleme mit der Nebenbedingung (4.30) auch nicht. In 5.85a ist ${B^4}_\mu/{B^7}_\mu$ und ${B^5}_\mu/{B^8}_\mu$ Null zu setzen tatsächlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Generatoren β_4/β_7 und β_5/β_8, die aus dieser Gleichung folgenden Aussagen sind durch das Nichtauftreten einiger Gleichungen jedoch etwas anders als aus der allgemeinen Formulierung der Bedingungen zu gewinnen und dann anzuwenden. Das Killingverfahren wird grundsätzlich vor dem Aufstellen der Gleichungen eines Systems angewandt, und um nichts anderes handelt es sich hier. Da jedoch die maximal mögliche $U\left(\mathbb{N}_{4\times 4} = \mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$ - Symmetrie, hier speziell ihr $SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$ - Anteil, vermindert wird, ist sein Gleichungsystem gutmütig genug, um durch reines Nullsetzen der Koeffizienten der betroffenen Symmetrien bis auf wenige Ausnahmen die gleichen Ergebnisse zu liefern wie das streng angewandte Killingverfahren.
Die allgemeine Lagrangedichte für fermionische Materiefelder (4.31) ist ein zur immer neben ihr gültigen Bedingung (4.30) im Hinblick auf die Wirkung von ${B^4}_\mu \equiv {B^5}_\mu \equiv 0$ ähnlicher Ort. Dort bewirken diese Forderungen das Verschwinden der zugehörigen Generatoren aus der Quelle aller anderen Aussagen der Theorie; folglich tritt keine mit ihnen oder ihrer Symmetrie zusammenhängende Aussage auf, vor allem keine Noetherströme, das Resultat des Killingverfahrens. Wie gerade erwähnt, ist im Zusammenhang mit den Yang - Millsgleichungen der maximalen $U\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$ - Symmetrie eines Systems dieser Unterschied zum reinen Nullsetzen einiger Austauschpotentiale im bereits aufgestellten Formalismus nur an einigen wenigen Orten von Bedeutung. An der entsprechenden Stelle wird darauf genauer eingegangen.

Die Bewegungsgleichungen der Spinoren und Potentiale

Für die Diracgleichungen eines Systems mit zwei gleichen und einem davon verschiedenen Spinor ist es egal, ob erst in den Gleichungen (5.42) die von den Gleichungen (5.86b) und (5.86c) betroffenen Potentiale Null gesetzt werden, oder bereits vor der Variation die Austauschsymmetrie zwischen ${}^3\psi$ und ${}^1\psi$ sowie ${}^2\psi$ samt ihrer Generatoren aus der Lagrangedichte entfernt wird. Das Ergebnis ist beide Male

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu {}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}\left({A^2}_\mu + {A^3}_\mu\right){}^1\psi - \frac{ie}{4\pi}{B^6}_\mu {}^2\psi \right) + iM\,{}^1\psi = 0 \tag{5.88a}$$

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu {}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}\left({A^1}_\mu + {A^3}_\mu\right){}^2\psi + \frac{ie}{4\pi}{B^9}_\mu {}^1\psi \right) + iM\,{}^2\psi = 0 \tag{5.88b}$$

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu {}^3\psi - \frac{ie}{4\pi}\left({A^1}_\mu + {A^2}_\mu\right){}^3\psi \right) + iM\,{}^3\psi = 0\,. \tag{5.88c}$$

In den Ausdrücken in Klammern erkennt man die eichkovariante Ableitung der Spinoren, die den neuen Verhältnissen im System angemessen ist. Sie ist es, die in der

Lagrangedichte dieses Systems verwendet wird. Mit $\Psi = ({}^1\psi, {}^2\psi, {}^3\psi)^T$, (5.1), kann sie kompakt angegeben werden als

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \left(A^f{}_\mu \alpha_f + B^6{}_\mu \beta_6 + B^9{}_\mu \beta_9\right) \Psi \; . \tag{5.89}$$

Nur noch zwischen den Spinoren ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$ herrscht Austauschkoppelung, während alle drei Spinoren ohne Ausnahme der elektromagnetischen Eichwechselwirkung des Systems unterliegen. Das besagt auch, daß außer der Fremdwechselwirkung durch die Potentiale $A^1{}_\mu$ und $A^2{}_\mu$ immer noch auch die Selbstwechselwirkung von ${}^3\psi$ übermittelt wird; die Quellen der Feldstärken in deren im nächsten Absatz angegebenen Bewegungsgleichungen zeigen dies ebenfalls deutlich.
Abgesehen von der Eichwechselwirkung mit dem dritten Spinor sind (5.88a) und (5.88b) von genau der Form, die ein System bestehend aus nur zwei gleichen Teilchen besitzt. Diese Aussage erstreckt sich auch auf die Feldstärken $V^a{}_{\mu\nu}$, die durch die geringere Symmetrie des $(2+1)$ - Teilchenfalles gegenüber (5.22) in verringerter Anzahl und einfacherem Aufbau auftreten:

$$F^1{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^1{}_\nu - \partial_\nu A^1{}_\mu - \frac{ie}{4\pi}\left(B^6{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu B^6{}_\nu\right) \tag{5.90a}$$

$$F^2{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^2{}_\nu - \partial_\nu A^2{}_\mu + \frac{ie}{4\pi}\left(B^6{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu B^6{}_\nu\right) \tag{5.90b}$$

$$F^3{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^3{}_\nu - \partial_\nu A^3{}_\mu \tag{5.90c}$$

$$G^6{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^6{}_\nu - \partial_\nu B^6{}_\mu + \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu B^6{}_\nu - B^6{}_\mu A^1{}_\nu\right) - \frac{ie}{4\pi}\left(A^2{}_\mu B^6{}_\nu - B^6{}_\mu A^2{}_\nu\right) \tag{5.90d}$$

$$G^9{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^9{}_\nu - \partial_\nu B^9{}_\mu - \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu A^1{}_\nu\right) + \frac{ie}{4\pi}\left(A^2{}_\mu B^9{}_\nu - B^9{}_\mu A^2{}_\nu\right) \; . \tag{5.90e}$$

Welchen Einfluß genau das Kopplungselement $I^3{}_3$ auf die elektromagnetische Wechselwirkung hat, und warum sich durch diesen Einfluß ${}^3\psi$ von ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$ absetzt, zeigen die Bewegungsgleichungen der Potentiale

$$\begin{aligned}\partial^\mu F^1{}_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi}\Big(&\left(K^{12}+K^{13}\right) {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu {}^1\psi + \left(K^{11}+K^{13}\right) {}_2\overline{\psi}\gamma_\nu {}^2\psi + \left(K^{11}+K^{12}\right) I^3{}_3 \cdot {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu {}^3\psi\Big) \\ &- \frac{ie}{4\pi}\left(B^{6\mu} G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu} G^6{}_{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{5.91a}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu F^2{}_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi}\Big(&\left(K^{22}+K^{23}\right) {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu {}^1\psi + \left(K^{21}+K^{23}\right) {}_2\overline{\psi}\gamma_\nu {}^2\psi + \left(K^{21}+K^{22}\right) I^3{}_3 \cdot {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu {}^3\psi\Big) \\ &+ \frac{ie}{4\pi}\left(B^{6\mu} G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu} G^6{}_{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{5.91b}$$

$$\partial^\mu F^3{}_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi}\Big(\left(K^{32}+K^{33}\right) {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu {}^1\psi + \left(K^{31}+K^{33}\right) {}_2\overline{\psi}\gamma_\nu {}^2\psi + \left(K^{31}+K^{32}\right) I^3{}_3 \cdot {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu {}^3\psi\Big) \tag{5.91c}$$

$$\partial^\mu G^6{}_{\mu\nu} = -\frac{e}{4\pi} {}_2\overline{\psi}\gamma_\mu {}^1\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right) G^6{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi} B^{6\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.91d}$$

$$\partial^\mu G^9{}_{\mu\nu} = +\frac{e}{4\pi}\,{}_1\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^2\psi - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right)G^9{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}B^{9\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right)\ . \tag{5.91e}$$

Bringt man die Potentialterme von den Stromseiten der Gleichungen (5.91) auf die linken Seiten, ergeben sich die eichkovarianten Divergenzen, sprich Ableitungen, der Feldstärken

$$D^\mu F^1{}_{\mu\nu} = \partial^\mu F^1{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.92a}$$

$$D^\mu F^2{}_{\mu\nu} = \partial^\mu F^2{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}\left(B^{6\mu}G^9{}_{\mu\nu} - B^{9\mu}G^6{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.92b}$$

$$D^\mu F^3{}_{\mu\nu} = \partial^\mu F^3{}_{\mu\nu} \tag{5.92c}$$

$$D^\mu G^6{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^6{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right)G^6{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}B^{6\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right) \tag{5.92d}$$

$$D^\mu G^9{}_{\mu\nu} = \partial^\mu G^9{}_{\mu\nu} + \frac{ie}{4\pi}\left(A^{1\mu} - A^{2\mu}\right)G^6{}_{\mu\nu} - \frac{ie}{4\pi}B^{6\mu}\left(F^1{}_{\mu\nu} - F^2{}_{\mu\nu}\right)\ , \tag{5.92e}$$

die die neuen Symmetrieverhältnisse im System widerspiegeln.
Durch die Ersetzungen $F^1{}_{\mu\nu}/F^2{}_{\mu\nu} \to A^1{}_\mu/A^2{}_\mu$ und $G^6{}_{\mu\nu}/G^9{}_{\mu\nu} \to B^6{}_\mu/B^9{}_\mu$ erhält man die entsprechenden Ausdrücke für die Potentiale.
Die Dichte ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ hebt sich in ihrer Funktion als Quelle der elektromagnetischen Wechselwirkung, übrigens auch der Selbstwechselwirkung, von den anderen beiden Einzeldichten offensichtlich durch ihren Koeffizienten $I^3{}_3$ ab. Dessen Größe gibt also die im Vergleich zu ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$ veränderte Ladung, die ${}^3\psi$ trägt, wieder. Mit $I^3{}_3 = -1$ erhält man ein Teilchen mit der Antiladung zu der von ${}^1\psi$ und ${}_2\overline{\psi}$.
Das System der Bewegungsgleichungen (5.92) ist der besagte Ort, an dem es nicht egal ist, ob erst die Symmetrie des Systems der Metrik angepaßt und dann variiert wird, oder erst variiert und dann die Symmetrie der Metrik angepaßt wird. Das erste Verfahren liefert genau die angegebenen Gleichungen, während beim zweiten Weg nach Nullsetzen der Potentiale $B^4{}_\mu$, $B^5{}_\mu$, $B^7{}_\mu$ und $B^8{}_\mu$ in (5.43) und (5.44) zusätzlich zu (5.92) noch die Reste der Gleichungen (5.44a), (5.44b), (5.44d), (5.44e) bestehen bleiben:

$${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi = 0 \tag{5.93a}$$

$${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi = 0 \tag{5.93b}$$

$${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi = 0 \tag{5.93c}$$

$${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi = 0\ . \tag{5.93d}$$

Diese Gleichungen sind offensichtlich nur durch ${}^3\psi \equiv 0$ zu erfüllen, wodurch das System auf ein Zweiteilchensystem reduziert wird, was nicht beabsichtigt ist. Hier muß demnach beachtet werden, daß die verschwindenden Potentiale eigentlich das grundsätzliche Verschwinden eines Symmetriefreiheitsgrades der Theorie bedeuten, denn die unzulässigen Überlappterme in (5.93) sind gerade auf die Existenz der Generatoren β_4, β_5, β_7 und β_8 der nun nicht mehr benötigten Symmetrien in der Lagrangedichte zurückzuführen.

Die Ströme und ihre Normierungen

Die gesamte Argumentation des Teilkapitels 5.1.5 über die Normierung der Ströme kann ohne Umschweife auf die Dichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$ und ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$ übertragen werden, mit allen Folgen für die Zuordnung des Begriffes eines einzelnen Teilchens zu den Spinoren ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$, wenn die Potentiale $B^4{}_\mu/B^6{}_\mu$ und $B^5{}_\mu/B^8{}_\mu$ samt ihrer Bewegungsgleichungen keine Beachtung finden.
Im Gegenteil dazu nimmt ${}^3\psi$ an den Vorgängen des Teilkapitels (5.1.5) gar nicht mehr teil. Die Einzelstromdichte ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ ist, bedingt durch die nun geringere Symmetrie des Systems, immer quellfrei

$$\partial^\nu \left({}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi\right) = 0\;. \tag{5.94}$$

Mit anderen Worten kann in keiner Situation, selbst wenn ${}^3\psi$ noch so stark mit den anderen beiden Spinoren überlappt, die durch den zu (5.94) gehörigen Erhaltungssatz festgelegte Ladung $I^3{}_3 z^\psi \neq I^2{}_2 z^\psi \equiv I^1{}_1 z^\psi$ über die Austauschpotentiale an die anderen Spinoren übertragen werden, wie es noch die Quellen der Dichten $k^f{}_\nu$ und $l^f{}_\nu$ in (5.63) erlauben; diese Ladungsübertragung bleibt nun allein den Ladungen der Spinoren ${}^1\psi$ und ${}_2\overline{\psi}$ vorbehalten. Folglich löst sich der Teilchenbegriff für ${}^3\psi$ niemals auf.
Im System der Noetherströme auf den rechten Seiten von (5.91) spiegelt sich diese Tatsache nicht nur im Fehlen der dafür zwingend notwendigen Austauschströme zwischen ${}^3\psi$ und den anderen beiden Spinoren sowie der zugehörigen Feldstärken wider, vgl. mit (5.43) und (5.44), sondern auch in der jetzt rein partiellen Ableitung von $F^3{}_{\mu\nu}$ (5.92c), die einen unter rein partieller Divergenz quellfreien Materiestrom $k^3{}_\nu$ zur Folge hat. $k^3{}_\nu$ folgt bei verringerter Symmetrie der Lagrangedichte in der Form, in der er in (5.91c) auftritt, auch direkt als Eichstrom aus dem Noethertheorem.

Der Energie - Impulstensor

Der vorläufige Diracanteil des Energie - Impulstensors des $(2+1)$ - Teilchensystems lautet:

$$\begin{aligned} T^{\text{Dirac}}_{\mu\nu} = & \sum_{n=1}^{2} {}_n\overline{\psi}\gamma_\mu D_\nu\,{}^n\psi + {}_n\overline{\psi}\gamma_\nu D_\mu\,{}^n\psi - D_\mu\,{}_n\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^n\psi - D_\nu\,{}_n\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^n\psi \\ & + I^3{}_3 \left\{ {}_3\overline{\psi}\gamma_\mu \left(\partial_\nu\,{}^3\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\nu + A^2{}_\nu\right){}^3\psi\right) + {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu \left(\partial_\mu\,{}^3\psi + \frac{ie}{4\pi}\left(A^1{}_\mu + A^2{}_\mu\right){}^3\psi\right)\right\} \\ & - I^3{}_3 \left\{D_\mu\,{}_n\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^n\psi + D_\nu\,{}_n\overline{\psi}\gamma_\mu\,{}^n\psi\right\}\;. \end{aligned} \tag{5.95}$$

Der Unterschied zur Dichte (5.80) des 3 - Teilchensystems liegt in der Verwendung der eichkovarianten Ableitungen $D_\mu\,{}^n\psi$ aus (5.89), die keine Austauschkopplungen zwischen ${}^3\psi$ und den beiden anderen Spinoren mehr enthalten. Folgerichtig entfallen alle Beiträge

zu Energie und Impuls dieser nicht mehr stattfindenden Wechselwirkung. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes sind die ersten beiden Terme in ${}^3\psi$ ausgeschrieben worden; die beiden folgenden nehmen analoge Gestalt an.
(5.95) kann deshalb nur als vorläufig angesehen werden, weil die Metrikkomponente ${I^3}_3$ explizit auftritt, wodurch Energie und Impuls unzulässig direkt durch die Kopplungsstärke der Wechselwirkungen beeinflußt werden. Die Unzulässigkeit dieses Einflusses ersieht man daraus, daß sie auch für freie Teilchen (${U^a}_\mu \equiv 0$) bestehen bleibt. Die Lösung des Problems besteht darin, die (infinitesimalen) Nullpunktsverschiebungen $\delta x_\mu = \epsilon_\mu$ des dritten Spinors zu $\frac{1}{{I^3}_3}\epsilon_\mu$ zu modifizieren. Die Verwendung dieser Modifizierung bei der Herleitung des Energie - Impulstensors durch das Noethertheorem hebt gerade den zusätzlichen Faktor ${I^3}_3$ auf, den die Terme in ${}^3\psi$ mitführen.
Betrachtet man speziell den Wert ${I^3}_3 = -1$, der bei den Yang - Millsgleichungen (5.91a) - (5.91c) dazu führt, daß durch ${}^3\psi$ ein Teilchen mit zu ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$ umgekehrtem Ladungsvorzeichen beschrieben wird, verhindert die Modifikation negative Beitrge zur Energie. Nach der Modifikation der Lorentztransformation des Spinors ${}^3\psi$, der das Antiteilchen zu ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ beschreibt, bewegt sich dieses Antiteilchen mit den Teilchen vorwärts in der Zeit, erfährt aber eine Verschiebung des Koordinatenursprunges, speziell des Nullpunktes der Zeit, die dem der Teilchen entgegengesetzt ist. Dieser Vorgang besitzt eine Entsprechung in der Standardtheorie, in der Teilchen und Antiteilchen den gleichen Poincarétransformationen unterzogen werden, die Antiteilchen sich aber rückwärts in der Zeit bewegen. Dadurch finden die Verschiebungen des Ursprungs der Zeitachse ebenso antiparallel zur zeitlichen Ausbreitung statt wie in der RST.
Außer in $T^{\text{Dirac}}_{\mu\nu}$ tritt der Faktor ${I^3}_3$ auch in den ${}^3\psi$ betreffenden Termen der Drehimpulsdichte (4.86) auf (genauer gesagt verschwinden die dort noch sichtbaren Faktoren ${I^1}_1$ und ${I^2}_2$ beim Übergang zum Dreiteilchenfall durch ${I^1}_1 = {I^2}_2 = 1$). Die Generatoren der Spin - $\frac{1}{2}$ - Darstellung der $SO\,(1,3)$ - Drehungen des Spinors ${}^3\psi$ müssen also im Vergleich zu (5.33) auch mit dem Faktor $\frac{1}{{I^3}_3}$ versehen werden, um die Drehimpulse eines Teilchens nicht von seiner Kopplung an andere Teilchen abhängen zu lassen:

$$\Sigma^{(2+1)}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \oplus \sigma_{\mu\nu} \oplus \frac{1}{{I^3}_3}\sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \sigma_{\mu\nu} & \mathbb{O}_{4\times4} \\ \mathbb{O}_{4\times4} & \mathbb{O}_{4\times4} & \frac{1}{{I^3}_3}\sigma_{\mu\nu} \end{pmatrix} . \tag{5.96}$$

Nach Einführung des zusätzlichen Faktors kann der Spin von ${}^3\psi$ nicht mehr direkt aus seiner Lorentztransformation herausgelesen werden, sondern nur noch aus seinem Beitrag zum Spinanteil der Drehimpulsdichte. Dieser Drehimpulsdichte wird in der RST aber, genau wie $T_{\mu\nu}$ und den Eichströmen, die Aufgabe übertragen, die meßbaren Größen eines Systems zu enthalten. Aus eben diesem Grund werden ja die Poincarétransformationen derart abgeändert, daß die veränderte Kopplung des dritten Teilchens an die anderen Teilchen nur in den von einer solchen Änderung betroffenen Eichströmen auftritt, und eine davon unabhängige charakteristische Größe wie der Spinanteil des Teilchens in der Spindichte auch tatsächlich unbeeinflußt bleibt.

Da die Form (5.96) des Generators der Lorentztransformation des Systemspinors Ψ eigenartig erscheinen mag, sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß die direkten Summen sowohl der Liealgebra der Eichtransformationen als auch der Lorentztransformationen zusammen zwar das Rückgrat des Teilchenbegriffes in der RST bilden, aber immer als Ergebnis einer Reduktion einer größeren Symmetrie gedacht sind. Die Entstehung des Teilchenbegriffes innerhalb der Strukturgruppe zeigt dieses sehr deutlich. Die Gruppe $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ ermöglicht es erst, von drei unabhängigen Ladungen zu sprechen, wenn die Transformationen, die durch die nebendiagonalen Generatoren β_x erzeugt werden, derart eingeschränkt sind, daß die $(U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U(\mathbb{1}_{4\times4}))$ - Invarianz als alleinige volle Invarianz dasteht. Für die Lorentztransformationen gilt grundsätzlich nichts Anderes. Erst die Reduktion der Lorentztransformation des zwölfkomponentigen Objekts auf der rechten Seite von (5.1) auf eine, deren Liealgebra die Struktur einer direkten Summe wie (5.33) oder (5.96) aufweist, ermöglicht die Zusammenfassung (5.2) von je vier Elementen zu einem Spinor[§]. Auf welche dieser direkten Summen sich die größere Liealgebra des ursprünglich zwölfdimensionalen Objektes genau zurückzieht, ergibt dann erst das Teilchenbild, von dem gesprochen werden kann. Für den Teilchenbegriff ist es also nur von Bedeutung, *daß* eine Summenstruktur ensteht, auf die Bezug genommen werden kann, und weniger, *welche* genau zur Verfügung steht; siehe auch die Diskussion nach (5.34) zu diesem Punkt, sowie (4.11)ff.
Die Auswirkungen der Andersartigkeit von Teilchen drei gegenüber dem ersten und zweiten hat auf den Austauschanteil des Energie - Impulstensors weit weniger weitreichende Auswirkungen. Im Vergleich zu (5.80d) entfallen schlicht alle Terme, bis auf die, die ${G^6}_{\mu\nu}/{G^9}_{\mu\nu}$ enthalten:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Austausch}} = K_{69}\left\{{G^6}_{\mu\gamma}{G^{9\gamma}}_{\nu} + {G^9}_{\mu\gamma}{G^{6\gamma}}_{\nu} + \frac{1}{2}\left({G^6}_{\beta\gamma}G^{9\beta\gamma}\right)\right\} \quad . \tag{5.97}$$

Gleiches gilt für den Austauschanteil der Drehimpulsdichte.
Der Eichanteil (5.80c) bleibt beim Übergang von drei Teilchen zu $(2+1)$ Teilchen un-

[§]An dieser Stelle sind zwei weitere Bemerkungen angebracht. Zum ersten findet die ungewöhnlich ausführliche Einführung der Spinoren in (5.1) und (5.2) vor dem Hintergrund der gerade angegebenen Auffassung statt. Die Indizierung der Spinoren auf der linken Seite des Symbols ψ wurde ebenso in Bezug auf diese Auffassung gewählt: Sie soll die Spinoren als Untereinheiten eines Objektes mit einer eigentlich größeren Symmetrie kennzeichnen, wobei die Bildung der Untereinheiten durch eine Reduzierung dieser übergeordneten Symmetrie auf eine ihrer Untergruppen hervorgerufen wird.
Des weiteren sollte angemerkt werden, daß die Reduzierung der Austauschsymmetrie, wie sie in 5.1.5 geschieht, bereits die zweite Verminderung der unitären Symmetrie des Systems ist. Zu einem zwölfdimensionalen Vektor gehört natürlich auch eine Gruppe $U(12)$, die durch die Verminderung der vollen Lorentzgruppe auf diejenige mit Summengeneratoren des Typs (5.96) und der zugehörigen Entstehung dreier Spinoren in einem ersten Schritt auf eine $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ reduziert wird. Es ist diese erste Reduzierung, die in der dauerhaften Indizierung der auf Spinoren wirkende Gruppendimension mit "4×4" zum Ausdruck kommt (bzw. ihr Fehlen durch den Index 12×12)
Zur Idee, in der Lorentzgruppe außer den (Block -)Elementen der Hauptdiagonalen auch solche auf den Nebendiagonalen ähnlich denen der Austauschsymmetrie zuzulassen, siehe das Teilkapitel 5.1.6 über den Energie - Impulstensor dreier gleicher Teilchen.

verändert, ebenso der entsprechende Anteil des Drehimpulses.

Die Beibehaltung aller Symmetriefreiheitsgrade bei ungleichen Elementen der Spinormetrik: nichtkonstante Einträge und Paritätsverletzung

Sollen trotz ungleicher (hauptdiagonaler) Elemente der Spinormetrik alle Generatoren β_x samt ihrer Symmetriefreiheitsgrade beibehalten werden, ist die erste Möglichkeit, auf die man durch (5.85) geführt wird, die nichtkonstanter $I^n{}_\ell$. Zum ersten erzwingt diese Variante aber sofort, daß alle diese Elemente ungleich Null sind, was einige Probleme in Bezug auf den Formalismus und seine Interpretation mit sich bringt.
Zum zweiten ist hierfür sicher auch eine eigene Sektion der $I^n{}_\ell$ in der Lagrangedichte des Systems nötig, die eigene Bewegungsgleichungen für die Metrikkomponenten ergibt sowie eigene Anteile an den Erhaltungsgrössen und anderen Bewegungsgleichungen, die über ihre jetzigen Beteiligungen hinausgehen. Diesen Weg weiter zu verfolgen mag reizvoll sein, ist aber sicher kein kleiner Entwicklungsschritt und im Moment dementsprechend weder angegangen worden, geschweige denn verfügbar.
Eine bereits verfügbare Methode besteht im Einbau von Paritätsverletzungen in die Wechselwirkungen. Dazu drückt man zunächst $I^3{}_3$, das (5.87) unterliegt, durch

$$I^3{}_3 = I^1{}_1 + \Delta I^3{}_3 \;, \tag{5.98}$$

aus. In $\mathcal{I}^{(2+1)}$ wird durch die Projektoren $\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2}$ und $\frac{\mathbb{1}_{4\times4}+\gamma_5}{2}$ auf die links - bzw. rechtshändigen Zustände der Spinoren bereits die Paritätsverletzung der Theorie eingeführt:

$$\mathcal{I}^{(2+1)} = \begin{pmatrix} I^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & I^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & I^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} + \Delta I^3{}_3\frac{\mathbb{1}_{4\times4}+\gamma_5}{2} \end{pmatrix} . \tag{5.99}$$

Im nächsten Schritt werden ebenso die Generatoren (5.6) durch

$$\alpha_1 = \upsilon_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} \\ \mathbb{0}_{4\times4} & -iI^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} & \mathbb{0}_{4\times4} \\ \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} & -iI^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} - i\Delta I^3{}_3\frac{\mathbb{1}_{4\times4}+\gamma_5}{2} \end{pmatrix} \tag{5.100a}$$

$$\alpha_2 = \upsilon_2 = \begin{pmatrix} -iI^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} & \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} \\ \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} \\ \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} & -iI^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} - i\Delta I^3{}_3\frac{\mathbb{1}_{4\times4}+\gamma_5}{2} \end{pmatrix} \tag{5.100b}$$

$$\alpha_3 = \upsilon_3 = \begin{pmatrix} -iI^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} & \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} \\ \mathbb{0}_{4\times4} & -iI^1{}_1\frac{\mathbb{1}_{4\times4}-\gamma_5}{2} & \mathbb{0}_{4\times4} \\ \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} & \mathbb{0}_{4\times4} \end{pmatrix} \tag{5.100c}$$

ersetzt und (5.7) durch die dort aufgeführten Generatoren multipliziert mit $I^1{}_1 \frac{\mathbb{1}_{4\times 4}-\gamma_5}{2}$. Bezüglich (5.98) besitzt $\mathcal{I}^{(2+1)}$ (5.99) die Komponenten

$$I^1 = I^2 = -\frac{i}{4}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} - \gamma_5\right) - \frac{i}{4}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} + \gamma_5\right) \tag{5.101a}$$

$$I^3 = -\frac{i}{4}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} - \gamma_5\right) \ . \tag{5.101b}$$

$\mathcal{I}$ (5.99) erfüllt die Nebenbedingung (4.30) für $\partial_\mu \mathcal{I} \equiv 0$ und bei Anwesenheit aller paritätsverletzender $U\left(\mathbb{N}_{4\times 4} = \mathfrak{Z}_{4\times 4}\right)$ - Generatoren dadurch, daß der Anteil $\Delta I^3{}_3 \cdot \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} + \gamma_5\right)$ bei der Auswertung des Kommutators wegen der Projektoreigenschaften von $\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} - \gamma_5\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} + \gamma_5\right)$, speziell $\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} - \gamma_5\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} + \gamma_5\right) = 0$, keine Rolle spielt.
In diesem Fall zu behaupten, ${}^3\psi$ würde nur mit seinem zu ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ "passenden" Anteil $\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{4\times 4} - \gamma_5\right) {}^3\psi$ mit diesen beiden Austausch vollziehen, klingt etwas eigenartig. Es scheint daher geeigneter, alle Symmetrien des Systems als Eichwechselwirkungen anzusehen.

5.2.2. Drei Fermionen unterschiedlicher Masse

Die Nebenbedingung (2.56c) wird auf dieselbe Weise ausgewertet wie (4.30). Dazu brauchen in (5.83) - (5.86) nur die I^f und die $I^n{}_\ell$, $f, \ell, n = 1, 2, 3$, durch M^f und $M^n{}_\ell$ ersetzt werden. Die zu (5.87) analoge Wahl

$$M^3{}_3 \neq M^2{}_2 = M^1{}_1 = M \ , \tag{5.102}$$

hat dieselben Folgen wie (5.87) selber, angefangen von der Diskussion, die direkt nach dieser Gleichung folgt, über die Diracgleichung (5.88c), jetzt mit dem Massenterm $M^3{}_3 \cdot {}^3\psi$, bis hin zum Energie - Impulstensor. In jenem tritt allerdings $M^3{}_3$ im Gegensatz zu $I^3{}_3$ nicht auf; gleiches gilt für die Drehimpulsdichte. Die Änderungen, die $I^3{}_3$ in den Poincarétransformationen des Spinors ${}^3\psi$ verursacht, zieht $M^3{}_3$ nicht nach sich. Ebensowenig verändert es natürlich das Auftreten der Dichte $\overline{{}_3\psi}\gamma_\nu {}^3\psi$ in den Eichströmen. Deren verringerte Anzahl an bosonischen Quellen der Art $B^{u\mu} G^{u+3}{}_{\mu\nu}$ verursacht es aber in derselben Art wie $I^3{}_3$.
Im Hinblick auf atomare Modelle eröffnet die Fähigkeit der Theorie, adäquat mit verschiedenen Massen und Ladungen umzugehen, die Möglichkeit, ohne großen Umstand durch $I^3{}_3 = -Ze$ und $M^3{}_3 = m_{\mathrm{Kern}}$ einen Atomkern mit Ladung $-Ze$ und Masse m_{Kern} in das Vielteilchensystem aufzunehmen. Wegen der Beschreibung durch nur eine Wellenfunktion besitzt er allerdings keine Unterstruktur. (5.88) und (5.92) zeigen, daß er mit seinen Elektronen nicht austauschwechselwirkt, aber voll in die elektromagnetische Wechselwirkung des Systems eingebunden ist, was sowohl für seine Fremdwechselwirkung mit der Hülle als auch für seine Selbstwechselwirkung gilt, die immer noch durch $A^1{}_\mu$ und $A^2{}_\mu$ mitübertragen wird. Der Einfluß dieser Potentiale auf die Entwicklung

des Kernteilchens muß mit der Form gegen die Größe der Masse $M^3{}_3$ abgeschätzt werden. Ist sie genügend groß und/oder bei einem fast punktförmigen Kern die Dichten der Elektronen am Ort des Kerns sehr klein, kann die elektromagnetische Kraft, die die Elektronen auf den Kern ausüben, vernachlässigt werden, und (5.88c) wird endgültig zur freien Diracgleichung. Verzichtet man auf die Interpretation von ${}^3\psi$ als Atomkern, besonders seine Punktförmigkeit, lässt sich durch $|M^3{}_3| \gg |A^1{}_\mu|, |A^2{}_\mu|$ auch ein externes, d.h. vom System nicht beeinflußtes Potential vorgeben, dessen Träger ${}^3\psi$ nur seine freie Diracgleichung erfüllen muß. Bei dieser Diskussion ist zu beachten, daß durch $|M^3{}_3| \gg |A^1{}_\mu|, |A^2{}_\mu|$ nur die elektromagnetische Wechselwirkung, die auf ${}^3\psi$ wirkt, keine Beachtung mehr findet, nicht aber umgekehrt dessen Wirkung auf ${}^1\psi$ und ${}^3\psi$ entfällt; die Quellströme in (5.91a) - (5.91c) bleiben unverändert.
Auf dieser Grundlage läßt sich die Auswertung von $|M^3{}_3| \gg 1$ für einen punktförmigen Kern noch etwas verfeinern. Durch die Vernachlässigung der Potentiale $A^1{}_\mu$ und $A^2{}_\mu$ in (5.88c) entfällt zunächst auch dessen Selbstwechselwirkung. Betrachtet man aber die materiellen Quellströme der fraglichen Potentiale genauer, spielen nur diejenigen Anteile keine Rolle, deren Auswirkungen am Kernort bzw. gegen $M^3{}_3$ vernachlässigbar sind, was für die Dichte ${}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi$ sicher nicht gilt. Die Potentiale bzw. die eichkovariante Ableitung, die in (5.88c) eingeht, kann als solche beibehalten werden, wenn die Stromdichten der Elektronen in den Quellen der in ihr enthaltenen Eichpotentiale entfallen.

5.3. Ein erster Ausblick auf die Teilchenerzeugung und - vernichtung in der RST

Teilkapitel 5.2.1 hat offensichtlich gemacht, daß die Komponenten $I^n{}_\ell$ der Spinormetrik direkten Einfluß darauf besitzen, wie ein Spinor in die Theorie eingeht. Das macht sie zu naheliegenden Objekten, deren Weiterentwicklung die Beschreibung von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen in der RST ermöglichen könnte. Tatsächlich verschwindet in Teilkapitel 5.2.1 durch die Wahl $I^3{}_3 = 0$ ${}^3\psi$ aus allen Dichten, die Meßgrößen zugrunde liegen, wie den Quellen der $F^f{}_{\mu\nu}$ (5.91c) oder $T^{\mathrm{Dirac}}_{\mu\nu}$ (5.95), wobei die, für den Fall $I^3{}_3 = 0$ ohnehin nicht definierte, Modifizierung der Lorentztransformation selbstverständlich ausgesetzt werden muß.
Im Unterschied zu seinem Verschwinden in diesen Dichten bleibt die Diracgleichung (5.88c) des dritten Teilchens bestehen. Die Anbindung an die beiden anderen Spinoren ist auch beim jetzigen Wert von $I^3{}_3$ immer noch rein elektromagnetisch, denn unter den von $I^1{}_1$ und $I^2{}_2$ verschiedenen Werten nimmt der Wert Null keine Sonderstellung ein. Die rechte Seite von (5.88c) muß jetzt aber nicht mehr gleich Null sein, denn in der Herleitung der Bewegungsgleichungen der Spinoren in 4.1.4 ergibt sich dies unter der Voraussetzung $I^n{}_\ell$ ungleich Null, die hier verletzt wird. Im Ganzen existiert ${}^3\psi$ neben ${}^1\psi$ und ${}^2\psi$ als eine Art "Geisterteilchen", das von den beiden anderen so lange nicht wahrgenommen wird, wie seine Metrikkomponente verschwindet. Während dieser Zeit besitzt es eine

eigene, gegebenenfalls sogar inhomogene, Diracgleichung, in die die elektromagnetischen Potentiale ${A^1}_\mu$ und ${A^2}_\mu$ eingehen, so daß ${}^3\psi$ seinerseits durch die Eichwechselwirkung an die anderen beiden Spinoren gekoppelt bleibt. Selbstwechselwirkung erfährt es dabei nicht, denn nur die Dichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi$ und ${}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi$ erscheinen noch in (5.91).
Der vorletzte Satz hat es bereits zum Ausdruck gebracht: dieses Modell der Teilchenerzeugung benötigt räumlich und zeitlich veränderliche ${I^n}_\ell$. Damit besteht neben der Erfüllung von (4.30) für ungleiche Teilchen ein viel grundlegenderer Anreiz, deren Dynamik zu entwickeln.
Die gerade vorgestellte Idee hat allerdings ein Manko. Das in den Meßgrößen nicht auftretende Teilchen wird zwar bereits mit eigener Bewegungsgleichung mitgeführt (deren eventuelle Inhomogenität beim Übertritt ${I^3}_3 \neq 0$ natürlich verschwinden müßte; ferner sollte zum Zwecke der Ladungserhaltung noch ein weiteres Teilchen diesen Übergang zum entgegengesetzten Ladungsvorzeichen vollziehen), die auch von “existierenden” Teilchen des Systems beeinflußt wird, so daß der Gedanke aufkommt, hier läge Erzeugung aus einem strukturierten Vakuum vor. Dem ist aber durch das, durch ${I^3}_3 = 0$ verursachte, strikte Verschwinden von ${}^3\psi$ im Rest des Systems jede Möglichkeit genommen, auf das eigentliche System Einfluß zu nehmen. Da eine Einflußnahme durchaus wünschenswert wäre, ist eine andere Variante, Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse zu beschreiben, überdenkenswert. Sie beruht auf dem Vorzeichenwechsel, der in $T^{\mathrm{Dirac}}_{\mu\nu}$ (5.95) notwendig war, um bei ${I^3}_3 = -1$ negative Beiträge zu verhindern. Zieht man zur Beschreibung eines $\mathbb{N}_{4\times4}$ - Teilchensystems zusätzlich $2\mathbb{M}_{4\times4}$ Teilchen mit jeweils $\mathbb{M}_{4\times4}$ Ladungsvorzeichen $+1$ und $\mathbb{M}_{4\times4}$ Ladungsvorzeichen -1 hinzu und ändert bei letzteren das Vorzeichen in den Poincarétransformationen *nicht*, ergibt sich die Möglichkeit, den Beitrag der $2\mathbb{M}_{4\times4}$ zusätzlichen Teilchen zu $T_{\mu\nu}$ anfänglich verschwinden zu lassen. Hierzu sind je ein Teilchen und ein Antiteilchen mit gleichen Wellenfunktionen anzusetzen. Dadurch verschwindet auch der Beitrag der in alle Wechselwirkungen voll eingebundenen zusätzlichen Teilchen zur Eichwechselwirkung, außer der Selbstwechselwirkung. Im Verlauf der zeitlichen Entwicklung des Systems wird durch diese volle Einbindung die anfänglich perfekte Situation gegenseitigen Herausmittelns der $2\mathbb{M}_{4\times4}$ “Vakuumteilchen”[§] sicher aufgehoben. Mit anderen Worten nehmen das $\mathbb{N}_{4\times4}$ - Teilchensystem und das “Vakuum” Einfluß aufeinander, der aber nicht zu Veränderung der in der Situation mit sich herausmittelndem $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Teilsystem festgelegten Erhaltungsgrößen führen kann. Diese Aussage gilt aber nur global, lokal kann der “unperfekte” Zustand des $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Systems durchaus zu Beiträgen zu Energie, Impuls oder Ladung führen, die nicht alleine durch das “eigentliche” $\mathbb{N}_{4\times4}$ - Teilchensystem erklärt werden können.
Der Unterschied im globalen Beitrag zu $T_{\mu\nu}$ zwischen den $\mathbb{N}_{4\times4}$ Teilchen und denen des $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Untersystems liegt in den Vorzeichen ihrer jeweiligen Poincarétransformationen. Im ersteren Untersystem sind sie derart zueinander eingestellt, daß die einzelnen

[§] Eine Beschränkung von $\mathbb{M}_{4\times4}$ ist auf Anhieb nicht ersichtlich, so daß $\mathbb{M}_{4\times4} \to \infty$ und daraus folgende Divergenzen der Theorie zunächst nicht ausgeschlossen sind. Auch an dieser Stelle ist an diesem eher groben Vorschlag noch einiges an Arbeit zu leisten.

Beiträge sich durch diese Vorzeichen nicht gegeneinander aufheben können, im zweiten Untersystem ist gerade das Umgekehrte der Fall. Damit ein Paar des $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Systems zu einem vollwertigen Träger von Energie und Impuls werden, d.h. zum "eigentlichen" System übertreten kann, muß beim Antiteilchen des betreffenden Paares der in 5.2.1 im Abschnitt über den Energie - Impulstensor besprochene Vorzeichenwechsel in seiner Poincarétransformation stattfinden. Die zu einem Erzeugungsprozeß notwendige Dynamik, die im ersten Vorschlag noch direkt die ${I^n}_\ell$ betroffen hat, ist hier in ihr Umfeld verschoben worden (die Modifikation der Poincarétransformationen wird ja durch das Aussehen der ${I^n}_\ell$ bestimmt). Sie gehört nun zum Themenbereich der Reduzierung der Symmetrien eines höherdimensionalen, einbettenden Systemvektors; siehe dazu die Abschnitte über den Energie - Impulstensor in 5.2.1 und 5.1.6 sowie (5.34)ff. Dieser ist noch alles andere als erschöpfend behandelt, die zur Teilchenerzeugung und - vernichtung notwendige Dynamik der entsprechenden Elemente folglich auch noch nicht verfügbar.
Abschließend sind noch einige Worte über die Potentiale in diesen Vorschlägen angebracht. Im Rahmen des ersten verschwinden nur die materiellen Felder aus dem eigentlichen System, die Anzahl der Potentiale bleibt gleich. Hinsichtlich der Eichpotentiale stellt dies kein Problem dar, denn wenn alle Spinoren durch den Wert Null ihrer Koppelungselemente verschwunden sind, müßen noch Felder existieren, die ihre Energie und ihren Impuls aufnehmen können. Weiterhin trägt ${A^3}_\mu$ in (5.88a) und (5.88b) gemäß seiner Quellen in (5.91c) für ${I^3}_3 = 0$ immer noch zur Selbstwechselwirkung von ${}^1\psi$ uns ${}^3\psi$ bei.
Wird andererseits ein Teilchen - Antiteilchenpaar erzeugt, muß die dazu notwendige Energie bereits im System vorhanden sein; sind noch keine anderen materiellen Felder vorhanden, sind auch hier wieder existierende Potentialfelder vonnöten. Die Eichpotentiale und - feldstärken sind also immer vorhanden, nur ihr Beitrag zu Energie und Impuls ändert sich; von einer "Vernichtung" eines der ${A^f}_\mu$ bzw. einer der ${F^f}_{\mu\nu}$ kann man nur sprechen, wenn sein/ihr Beitrag zu $T_{\mu\nu}$ etc. verschwindet.
Bezüglich der Austauschpotentiale gerät der erste Vorschlag in einige Schwierigkeiten, wenn ein Paar in einem bereits bestehenden materiellen System erzeugt wird, denn zu mindestens einer der neuen Ladungen existieren nun bereits gleichnamige, mit denen sie austauschwechselwirken sollte. Wie oben erwähnt, verhindert der Wert Null seines Koppelungselementes aber deren Vorhandensein bzw. viel grundsätzlicher das Vorhandensein der zugehörigen Generatoren. Eine Paarerzeugung ist dann mit sicher nicht einfach zu handhabenden Unstetigkeiten in der Symmetrie des Systems verbunden. Dem zweiten Modell ist dieses Problem fremd, da zwischen dem $\mathbb{N}_{4\times4}$ - Teilchensystem und dem $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Vakuumsystem immer volle Wechselwirkung besteht, d.h. Eich - und Austauschwechselwirkung; das Vakuumsystem ist ja prinzipiell auch vollständig "anwesend", mittelt sich in den materiellen Anteilen der Meßgrößen jedoch anfangs noch lokal vollständig heraus, später nur noch global. Dieses Vorgehen bringt es aber mit sich, daß z.B. im Energie - Impulstensor immer ein Anteil aus Eich - und Austauschgrößen besteht, der sich selbst in der Situation mit perfektem Vakuum nicht herausmittelt. Er vertritt dabei nicht nur die Wechselwirkungen der Konstituenten des $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Systems untereinander,

sondern auch deren Wechselwirkungen mit dem $\mathbb{N}_{4\times4}$ - Teilchensystem. Da gerade diese Wechselwirkungen des Systems mit dem Vakuum die erwünschte Besonderheit dieses Vorschlages sind, wird bei seiner Weiterentwicklung bei der Festlegung des Energienullpunktes einiges Augenmerk darauf zu richten sein, welche Rolle die gerade genannten zusätzlichen Beiträge zu $T_{\mu\nu}$ bei diesem Vorgang spielen sollen; sie einfach als Untergrund abzutun und zu ignorieren, wird nicht ausreichen.

5.4. Drei Spinoren unter der Gruppe $\boldsymbol{U(\mathbb{1}_{12\times12}) \times SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})}$

Der Unterschied zwischen der Aufteilung der Gruppe $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ in

$$U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) = U\,(\mathbb{1}_{12\times12}) \times SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \ , \tag{5.103}$$

und der bisher verwendeten Unterteilung in

$$U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) = E\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \times (U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) \setminus E\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})) \tag{5.104a}$$

$$E\,(\mathfrak{Z}_{4\times4}) = U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \times U\,(\mathbb{1}_{4\times4}) \ , \tag{5.104b}$$

liegt vor allem in der Anzahl der zur Verfügung stehenden eichinvarianten Ströme. Man sollte besser sagen: in der beabsichtigten Anzahl der eichinvarianten Ströme, denn die Aufteilung (5.104) zeigt gemäß den vorhergehenden Kapiteln die ihr zugedachten Invarianzen nur bei entsprechenden Einschränkungen der Restsymmetrie, die Teil der $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ ist. Genau dieser Unterschied in der Behandlung der $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Invarianzen in den beiden Aufteilungen (5.103) und (5.104) ist im Folgenden das Thema.
In der Aufteilung (5.103) existiert bekanntlich nur die Eichinvariante

$$j_\mu^{(\mathbb{1}_{12\times12})} \sim {}_1\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^1\psi + {}_2\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^2\psi + {}_3\overline{\psi}\gamma_\nu\,{}^3\psi \ , \tag{5.105}$$

die zwar unter allen $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Transformationen, besonders unter allen $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Transformationen, streng invariant ist, dafür aber immer nur die gemeinsame Normierung aller drei Spinordichten erlaubt. Im Rahmen der RST ist es demnach grundsätzlich unmöglich, die Argumentation aus 5.1.5 anzuwenden, um so jedem der Spinoren zumindest in geeigneten Situationen die Bedeutung eines einzelnen Teilchens zuzuordnen.
Im Gegensatz dazu erlaubt die Aufteilung (5.104) im Zusammenwirken mit den Beschränkungen (5.71) und (5.79) (wobei die Schreibweise (5.104a) genau genommen erst durch (5.80) ermöglicht wird) die drei invarianten[§] Ströme (5.40), die bei geeigneten Randbedingungen zusammen mit (5.41) die Einzelnormierungen (5.67) ergeben. Die

[§]"Invariant" und weiter unten "transformationsinvariant" bedeuten hier die zusammengefaßte Eich- und Austauschinvarianz der RST. Im Zusammenhang mit der RST gilt auch hier die schon von den Potentialen und Feldstärken bekannte Bezeichnungsweise: Der Begriff Transformation ohne weitere Erläuterung umfaßt beide Arten von Transformationen, Eichtransformationen sind die durch die α_f mit unbeschränkten Λ^f erzeugten Transformationen, und Austauschtransformationen werden durch die β_x mit beschränkten Λ^x generiert.

Invarianz der genannten Ströme bzw. der Einzelnormierungen gilt streng aber nur unter der Gruppe $E(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ (5.104b). Unter den eingeschränkten $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Transformationen wie z.B. $\mathcal{S}_{13}$ (5.24) gilt nur eine Begriffsinvarianz, d.h. aus den für den Teilchenbegriff in der RST grundlegenden Einzelnormierungen (5.67) in einer Eichung folgt eine artgleiche Einzelnormierung in jeder anderen erlaubten Eichung, also der gleiche Begriff eines einzelnen (vereinzelten) Teilchens. Die "erlaubten $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Eichungen" sind die durch (5.71) und (5.79) eingeschränkten $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Transformationen der nebendiagonalen Generatoren (5.7), d.h. die Austauschtransformationen. Anders dagegen sind die Koeffizienten der $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Generatoren mit Elementen auf der Hauptdiagonalen unbeschränkt, denn ihre Generatoren sind Teil der uneingeschränkten Eichinvarianzen $E(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ (5.104b).
Auf den ersten Blick läßt sich der Unterschied zwischen (5.103) und (5.104) an diesen Generatoren festmachen. Sind sie in der Form (5.58b) und (5.58c), oder ähnlich, Mitglieder der Generatoren, deren zugehörigen Strömen wegen fehlender (Eich)Invarianz keine beobachtbaren Größen zugeordnet werden können, liegt der Fall (5.103) mit seinen Folgen für einen Teilchenbegriff im Rahmen der RST vor. Sind die hauptdiagonalen Generatoren der $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ hingegen wie in (5.6) Teil derjenigen (infinitesimalen) Symmetrien, zu denen über ihre transformationsinvarianten Ströme beobachtbare Größen gehören, liegt der Fall (5.104) vor.
Diese Zuordnung erscheint etwas willkürlich, und tatsächlich fällt bei genauerem Hinsehen auf, daß die Unterscheidung, ob zu den in Frage stehenden Generatoren invariante Ströme und folglich beobachtbare Größen gehören, durch die Beschränkung der mit den nebendiagonalen Generatoren (5.7) verbundenen Symmetrien getroffen wird. Zu diesem Punkt sollte zuerst erwähnt werden, daß die Argumentation in Teilkapitel 5.1.5 auch dann funktioniert, wenn die drei Eichströme ${j^f}_\mu = {k^f}_\nu + {l^f}_\nu$, $f = 1, 2, 3$, in Bezug auf die Generatoren $\tilde{\alpha}^f$ (5.58) gebildet werden statt durch die Generatoren α^f (5.6). Und andererseits sind die Ströme (5.40) der Generatoren α_f (5.6) nicht invariant, wenn die Symmetrien der β_x nicht durch (5.71) und (5.79) eingeschränkt werden. Die Frage, ob (5.103) oder (5.104) vorliegt, wird demnach im Bereich der Symmetrien mit nebendiagonalen Generatoren entschieden. Mit anderen Worten kommt den α_f (5.6) bzw. $\tilde{\alpha}_f$ (5.58) ihre übergeordnete Bedeutung passiv zu, der Übergang von (5.103) zu (5.104) wird aktiv im gerade genannten Bereich der $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ bzw. $\mathfrak{u}(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ vollzogen. An diese Feststellung schließt sich direkt die ketzerische Frage an, ob die Parameter der Gruppe $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ $\{\Lambda^a\} = \left\{\Lambda^f\right\} \cup \{\Lambda^x\}$, $a = 1, \ldots, 9 = \{f = 1, 2, 3\} \cup \{x = 4, \ldots, 9\}$, nicht als Felder des physikalischen Systems aufgefasst werden sollten, mit eigener Sektion in der Lagrangedichte, d.h. eigener Dynamik etc., und in Wechselwirkung mit den bisherigen Freiheitsgraden stehend, um dem System die Möglichkeit zu eröffnen, die Beschränkungen (5.71) und (5.79) selbst hervorzubringen und dadurch den Übergang von (5.103) zu (5.104).
Der gerade angedachte Vorgang besitzt einige Ähnlichkeit mit dem Higgsmechanismus der QFT's, schon alleine deshalb, weil die Λ^a, bedingt durch die Tatsache, daß ohne weitere Raum - Zeitindices etc. immer nur eines als skalarer Koeffizient zu einem der

Generatoren $v_a = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_x\}$ gehört, eine Sammlung skalarer Felder darstellen, die als solche als Klein - Gordonfelder in die Theorie aufgenommen werden müßten. Weiterhin sind sie aktiv an der Verminderung der Symmetrie des Systems beteiligt. An dieser Stelle enden aber die Gemeinsamkeiten, denn die Λ^a sollen durch die Symmetrieverminderung den Potentialen $B^x{}_\mu$ keine Masse verschaffen; die Gleichungen (5.44) beinhalten keinen Masseterm. Ebenso bricht der Übergang von (5.103) zu (5.104) die vorhandene $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Symmetrie des Systems keinesfalls so gründlich wie das Higgspotential es z.B. in der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung tut. Dort kann, sobald das Higgsfeld im Minimum seines Selbstwechselwirkungspotentials angelangt ist, außer einer verbliebenen $U(\mathbb{1}_{4\times4})$ - Restsymmetrie keine $SU(2_{4\times4})$ - Transformation mehr vorgenommen werden; siehe z.B. [1]. Im Vergleich dazu sind (5.71) und (5.79) weniger restriktiv, da sie die von der Verringerung betroffenen Symmetriefreiheitsgrade nicht völlig verbieten. In den von ihnen gesetzten Grenzen ist sogar noch Lokalität der betroffenen Λ^x möglich. Aus diesem Grund ist in der RST auch nur von einer Symmetrieverminderung die Rede und nicht von einer Symmetriebrechung. Diese Namensgebung weist auch darauf hin, daß neben der ursprünglichen Erhaltungsgröße (5.105) jetzt zwar zwei weitere existieren, die es unter den richtigen Umständen ermöglichen, den drei Spinoren des Systems den Begriff eines einzelnen Teilchens zuzuweisen, die Symmetrie also soweit verringert ist, daß die einzelnen Dichten in (5.105) auch tatsächlich einzeln wahrgenommen werden können, diese aber noch äquivalent zueinander sind, in dem Sinne, daß sie gleiche Ladung und Masse besitzen, also untereinander austauschbar sind. Dagegen sind in der elektroschwachen Theorie den Spinoren des Systems nach Brechung der Symmetrie mit dem elektromagnetisch ungeladenen Neutrino und dem geladenen Elektron zwei völlig voneinander verschiedene Teilchen zugeordnet (von der Betrachtung der Massen ganz abgesehen).

Nach dem gerade Gesagten steht die RST mit der Behandlung ihrer $U(N)$ - Symmetrie zwischen der vollständigen $SU(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ - Symmetrie der QCD und der gänzlich gebrochenen $SU(2_{4\times4})$ - Symmetrie der elektroschwachen Theorie. Tatsächlich lassen sich einige Punkte der RST mit Entsprechungen in jeweils einer der beiden anderen Theorien abgleichen. So wird z.B. die nach der Symmetriebrechung verbleibende $U(\mathbb{1}_{4\times4})$ - Symmetrie der elektroschwachen Theorie durch einen Generator erzeugt, der in seiner Form den α_f (5.6) ähnlich ist. Das heißt, in beiden Theorien haben die verbleibenden vollen Symmetrien einen teilweisen SU - Charakter; siehe (5.57)ff für Genaueres zu diesem Punkt. In beiden Theorien macht sich diese Tatsache durch die Anwesenheit von Vektorpotentialen in den Quellen der elektromagnetischen Feldstärken bemerkbar: den Austauschgrößen $B^{u\mu}G^{u+3}{}_{\mu\nu}$ in der RST und den geladenen Weakonen W^+/W^- in der GSW - Theorie. In letzterer ist die Anwesenheit der W^+/W^- in den Quellen der elektromagnetischen Feldstärke gerade dafür verantwortlich, daß in einem entsprechenden Streuprozeß die Ladung (kurzfristig) von einem der besagten Vektorbosonen getragen werden kann anstatt von einem Spinor. Der Vorgang aus 5.1.5, der bei stark miteinander wechselwirkenden Teilchen für den Verlust der Möglichkeit sorgt von einem einzelnen Teilchen zu sprechen, ist der gerade angesprochenen Ladungsübertragung auf ein Vektorboson recht ähnlich.

Dadurch, daß sich alle Felder, die in einen der invarianten Erhaltungssätze eingehen, im selben Raumvolumen befinden, kann der betreffende Erhaltungssatz nicht mehr in einzelne Normierungsbedingungen zerlegt werden. Als Folge kann weder einem Spinor noch einem der Austauschpotentiale eindeutig eine Ladung zugeordnet werden. Die Betonung bei dem gerade angestellten Vergleich und auch bei den noch folgenden liegt allerdings auf dem Wort *ähnlich*, völlig gleich sind sich die Theorien auch in ihren Kontaktpunkten nicht, sie sollen es auch gar nicht sein. Eine Grenze der Vergleichbarkeit wird natürlich dadurch gezogen, daß in der QCD und in der GSW die Feldtheorien einer Quantisierung unterworfen werden; für die RST ist ein solcher Prozeß zumindest nicht nach dem Standardvorgehen vorgesehen; die Probleme, die daraus resultieren, sind schon angesprochen worden. Eine Folge dieses Unterschiedes ist, daß in der elektroschwachen Theorie die Weakonen eindeutig von den Elektronen unterscheiden. In der RST hingegen wird der gerade beschriebenen Prozeß der Ladungsübertragung dazu genutzt, den beteiligten Feldern ihre Individualität zu nehmen, indem mit der Ladung eine der charakterisierenden Größen niemandem mehr eindeutig zugeordnet werden kann. Weiterhin wird ein ursprünglich ladungstragender Spinor selbst dann nicht zum Neutrino, wenn die Ladung gerade zufällig vollständig von den Austauschfeldern getragen wird; in seiner Diracgleichung steht immer noch der Masseterm, und die ${B^x}_\mu$ besitzen niemals einen in ihren Yang - Millsgleichungen. Es sollte auch niemand auf die Idee kommen unter diesen Gleichungen, die Quellgleichung für das Z^0 - Feld zu suchen; sie existiert gewollt schlicht nicht. Der Eins - zu - Eins - Vergleich der Austauschpotentiale mit den weakonischen Feldern funktioniert noch aus einem anderen Grund nicht. Die Austauschkoppelung findet, wie bereits ausführlich diskutiert, streng paarweise statt, weshalb die Austauschpotentiale durch ein drittes Teilchen nicht meßbar sind. Diese Eigenschaft teilen sie mit den gluonischen Feldern der QCD, die die starke Wechselwirkung immer nur zwischen zwei Quarks mit passender Farbladung tragen. Damit soll aber nicht im entferntesten ausgesagt werden, die Elektronen in der RST würden Farbladung tragen. Hier wird nur ein mit aller Vorsicht zu genießender Vergleich zwischen den einander ähnlichen Auswirkungen angegeben, die die Verwendung von formal gleichen unitären Symmetrien in allen drei Theorien nach sich zieht. Prägnant zusammengefaßt läßt sich dieser Vergleich vielleicht so beschließen: Alle drei Theorien starten in einer Situation, in der ihre spinoriellen Freiheitsgrade individuell nicht faßbar sind. Durch Verminderung der vollen unitären Symmetrie lassen die RST und die GSW dann genau dieses zu, die RST behält aber gegenüber dem sehr umfassenden Symmetriebruch der GSW ihre SU - Freiheitsgrade in eingeschränkter Form bei, die wiederum in der QCD vollständig bestehen bleiben. Durch diese Mittelstellung besitzt die RST mit Vorsicht zu behandelnde, aber nicht ganz unnütze Vergleichspunkte mit den Theorien auf den beiden Enden der Skala der Symmetriebeschränkung.
Zum Schluß soll (5.103) noch dazu benutzt werden, zu zeigen wie die RST mit Teilchen, die eine innere Struktur aufweisen, umgehen und damit höhere Wechselwirkungen

beschreiben kann. An die Stelle der Eichgruppe (5.104b) tritt dazu die Gruppe

$$\begin{aligned} & E\left(\mathfrak{Z}_{12\times12}\right) \\ & \quad = \left(U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)\right)\times\left(U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)\right)\times\left(U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)\right)\ . \end{aligned} \tag{5.106}$$

Die mit den $U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)$ - Symmetrien zusammenhängenden Ströme der Art (5.105) ersetzen jetzt die drei $U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)\times U\left(\mathbb{1}_{4\times4}\right)$ - Ströme (5.40), und die Restsymmetrie $U\left(\mathfrak{Z}_{12\times12}\right)\setminus E\left(\mathfrak{Z}_{12\times12}\right)$, die an die Stelle des zweiten Terms in (5.104a) tritt, wird durch Generatoren β_x(5.7) generiert, bei denen die $\mathbb{1}_{4\times4}$ durch $\mathbb{1}_{12\times12}$ ersetzt wurden. Es ensteht dadurch ein System aus drei miteinander elektromagnetisch wechselwirkenden Zuständen, die jeweils noch eine eigene volle $SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Untersymmetrie besitzen. Damit die internen Eichungen sich nicht untereinander vermengen und dadurch Probleme verursachen, muß die Austauschsymmetrie, wie gerade beschrieben, immer die vollständigen $U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Zustände miteinander vertauschen, nicht aber einzelne Konstituenten aus verschiedenen solcher Zustände untereinander.
(5.104) beschreibt natürlich nichts anderes als den weißen oder farblosen Zustand der QCD, so daß man beim gerade skizzierten System an ein System aus Teilchen wie Neutronen oder Protonen, die ihrerseits aus Quarks bestehen, denken kann. Sollen jetzt den einzelnen Unterspinoren der $U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Zustände die voneinander verschiedenen Ladungen der u - und d - Quarks durch die Koppelungsmatrix ${I^n}_\ell$[§] bei voll wirkender starker Wechselwirkung zugewiesen werden, muß zwischen den verschieden geladenen Spinoren gemäß Teilkapitel 5.2.1 eine Paritätsverletzung eingeführt werden. Eine genaue Untersuchung dieses und anderer Modelle mit Zuständen mit Unterstruktur steht noch aus. Die elektroschwache Wechselwirkung auf diese Weise in die RST zu implementieren gibt Anlaß zu der Fragestellung ob die $SU\left(\mathfrak{2}_{4\times4}\right)$ - Zustände vollständig untereinader ausgetauscht werden müssen, oder die außer Kraft gesetzte Symmetrie zwischen Neutrino und Elektron den Austausch der einzelnen Konstituenten der $U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Zustände erlaubt.
Es mag zunächst mal wieder etwas eigenwillig klingen, aber die Unterstruktur einzelner Zustände braucht in der RST nicht auf eine $SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - oder $SU\left(\mathfrak{2}_{4\times4}\right)$ - Symmetrie beschränkt zu bleiben. Eine höherdimensionale $SU\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ - Symmetrie zu betrachten ist im Hinblick auf den Vakuumsbegriff des zweiten Vorschlages zur Erzeugung und Vernichtung in 5.3 sinnvoll. Die $SU\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right)$ - Symmetrien erlauben es ja nicht, einen ihrer Spinoren als "einzeln" zu klassifizieren, geschweige denn aus seinem Verbund herauszulösen. Sobald sich also Teile des $2\mathbb{M}_{4\times4}$ - Systems aus 5.3 durch eine hochdimensionale SU - Symmetrie beschreiben lassen, liegt in dem Sinne ein "echtes" Vakuum oder der Sockel des Vakuumsystems vor, als daß aus ihm keine Teilchen mehr erzeugt werden

[§] ${I^n}_\ell$ zerfällt dabei offensichtlich in 36 einzelne Hauptdiagonalelemente, d.h. es ist weit feiner unterteilt als die Symmetriegruppen. Ein Zustand aus drei gleichwertigen Spinoren bzgl. ${I^n}_\ell$ erfordert eine solche Feinunterteilung natürlich nicht. Für den Austausch zwischen mehreren $U\left(\mathbb{1}_{12\times12}\right)\times SU\left(\mathfrak{Z}_{4\times4}\right)$ - Zuständen mit verschiedenen "groben" ${I^n}_\ell\cdot\mathbb{1}_{12\times12}$ gilt 5.95 in Analogie.

können. Der zu diesem $SU(2\mathbb{M}_{4\times 4})$ - System gehörende Energieinhalt könnte für die Festsetzung des Energienullpunktes des ganzen Systems aussagekräftig sein.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Die Kapitel 4 und 5 haben gezeigt, daß sich die Vorgaben aus der Einleitung und der Zwischenbilanz in 3 konsistent umzusetzen lassen: mit einer Feldtheorie, der viele Feldfreiheitsgrade gegeben werden sowie die maximale unitäre Symmetrie entsprechend der Anzahl und Art der Feldfreiheitsgrade, kann ein System vieler Freiheitsgrade, besonders vieler miteinander dauerhaft wechselwirkender Freiheitsgrade, beschrieben werden, ohne eine Feldquantisierung bemühren zu müssen. Damit die Freiheitsgrade der Yang-Millsform der relativistischen Schrödingertheorie mit dem Begriff eines einzelnen Teilchens synonym werden, sind grundlegend entsprechende Beschränkungen der maximalen unitären Symmetrie vorzunehmen, d.h. eine Aufteilung dieser Symmetrie in eine unbeschränkte Eichsymmetrie, die entsprechend der Wechselwirkung, die wirken soll, gewählt wird, und eine beschränkte Restsymmetrie, die gerade soweit eingeschränkt wird, daß sie die Begriffsbildungen, die auf der Eichsymmetrie beruhen, nicht stört. Grundsätzlich aber ist der Teilchenbegriff vom Verfahren der Quantisierung abgekoppelt.
Als Fortschritt darf auch gelten, daß in der Beschreibung des Teilchenaustausches die lokale unitäre Strukturgruppe die globale Permutationsgruppe abgelöst hat, wodurch Wechselwirkung und Austausch auf einer einheitlichen Grundlage stehen; genau genommen unterscheiden sich beide nur noch durch die Freiheiten, die die Gruppenparameter ihrer Generatoren besitzen.
Selbst unter der Voraussetzung der Beschränkung der Restsymmetrie ist nur in Spezialfällen, deren gängigster die Situation sehr weit voneinander entfernter, nicht wechselwirkender Feldfreiheitsgrade ist, möglich von Teilchen zu sprechen, also von Freiheitsgraden mit eindeutig zugeordneten charakteristischen Erhaltungsgrößen. Im Allgemeinen ist diese Zuordnung nicht möglich, da die Erhaltungssätze der charakteristischen Größen, in dieser Arbeit vor allem die der (Hyper-)Ladung, sich eben nur in einigen speziellen Fällen in die für die Synonymisierung zwingend notwendigen einzeln erhaltenen Summanden zerlegen lassen. Andersherum gesagt, existiert in den allermeisten Fällen in der Yang-Millsform der relativistischen Schrödingertheorie kein Teilchenbegriff, speziell in der, auch dauerhaften, Wechselwirkungszone nicht. Auf diese Weise ist eine der Ursachen für die Probleme, die die Quantenfeldtheorie gerade bei der Beschreibung von gebundenen Zuständen hat, ausgeschaltet. Um wievieles die Modellierung von gebundenen Systemen hierdurch einfacher und besser wird, zeigt z.B. die Betrachtung heliumartiger Atome auf der Grundlage der RST in [18], wo die Energiedifferenzen zwischen den angeregten Singulettzuständen $1s2s^1S_0$ und dem Grundzustand $1s^{21}S_0$ für Kernladungszahlen zwischen $z_{\text{ex}} = 2$ und $z_{\text{ex}} = 100$ berechnet und mit experimentellen Werten verglichen werden. Mit eher einfach aufgebauten Wellenfunktionen für die Hüllelektronen und mit

verhältnismäßig einfacher Numerik werden Resultate erzielt, die nur wenige Prozent von den experimentellen Daten abweichen. Um Vorhersagen mit demselben Grad an Genauigkeit zu erreichen, sind andere Methoden gezwungen einen deutlich höheren Aufwand zu betreiben. In diesem Vergleich tritt die hohe innere Konsistenz der in dieser Arbeit beschriebenen Grundlagen, auf denen das RST - Modell der heliumartigen Systeme beruht, erneut deutlich zutage.
Als weiteres Beispiel für die Fähigkeiten der Beschreibung von Vielteilchensystemen mit einer RST - Feldtheorie vieler Freiheitsgrade kann [19] dienen, in der der Mechanismus aus Teilkapitel 5.2.1, wenn auch in abgewandelter Form, sehr gute Dienste leistet.
Neben der Möglichkeit, als Grundlage zur konkreten Beschreibung von atomaren oder ähnlichen gebundenen Zuständen zu dienen, bietet der Formalismus aus den Kapiteln 4 und 5 auch, oder vor allem, die vielfältigen Weiterentwicklungsmöglichkeiten, die auf grundlegende Fragestellungen in der Physik zielen.
Zuerst einmal besteht die Frage, ob es bei einem ohnehin abwesenden Teilchenbegriff in der Wechselwirkungszone überhaupt notwendig ist, die zu seinem Entstehen notwendigen Unterteilungen und Beschränkungen der unitären Symmetrie des Systems in dieser Situation aufrecht zu erhalten. Mit anderen Worten stellt sich die Frage nach einer Dynamik der Gruppenparameter $\Lambda^a(x)$, die nur in den Spezialfällen, in denen ein Teilchenbegriff existieren soll, die dazu notwendigen Restriktionen eines Teiles der maximal möglichen unitären Symmetrie des Systems liefert, und ansonsten diese Symmetrie unbeschränkt lässt.
Die Erweiterung der Lagrangedichte kann in einem ersten Schritt verhältnismäßig einfach vollzogen werden. Bereits im Unterkapitel 5.4 ist festgestellt worden, daß die $\Lambda^a(x)$ dazu wie skalare Felder behandelt werden können, d.h. die Erweiterung besteht in einem klein - gordonartigen Anteil der Form

$$\mathcal{L} = D^\mu \Lambda^{a*} D_\mu \Lambda^a - V\left[\Lambda^{a*}; \Lambda^a\right] \ . \tag{6.1}$$

Dabei ist $D_\mu \Lambda^a$

$$\begin{aligned} D_\mu \Lambda^a &= \partial_\mu \Lambda^a + U^c{}_\mu \left(\upsilon_c^{\mathrm{ad}}\right)^a{}_b \Lambda^b = \partial_\mu \Lambda^a + U^c{}_\mu C^a{}_{cb} \Lambda^b \\ a, b, c &= 1, \ldots, \dim U\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right) \ . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Als Koeffizient vor den υ_a übernehmen die Λ^a demnach die eichkovariante Ableitung der mit ihnen in Bezug auf die Basis, der sie als Koeffizienten dienen, verwandten Objekte $U^a{}_\mu$ und $V^a{}_{\mu\nu}$.
Als Folge dieser Erweiterung tritt z.B. im Eichstrom $j^1{}_\mu$ (5.40a) jetzt der Zusatzterm

$$j^1{}_\mu \left[\Lambda^{a*}(x)\, ; \Lambda^a(x)\right] \cong D_\mu \Lambda^{a*} C^1{}_{ab} \Lambda^b - \Lambda^{a*} C^1{}_{ab} D_\mu \Lambda^b \tag{6.3}$$

auf. Die Beschränkung $|\Lambda^y(x)| = \frac{n\pi}{2} \vee n\pi$ findet hierdurch direkten Eingang in eine Meßgröße.
Das eigentliche Problem liegt in der Ausarbeitung des Selbstwechselwirkungstermes

$V[\Lambda_a^*;\Lambda^a]$, der sehr wahrscheinlich, in Anlehnung an den Higgsmechanismus, die Ursache für Beschränkung der $\Lambda^y(x)$ sein muß ; es erscheint unwahrscheinlich, daß die über die eichkovariante Ableitung vermittelte Wechselwirkung der $\Lambda^a(x)$ mit dem Rest des System dazu bereits ausreicht.
Weiterhin sollte überprüft werden, ob die hier ausgearbeiteten Konzepte für viele Freiheitsgrade mit hochdimensionaler Symmetriegruppe auch gewinnbringend auf die vollständigen Funktionensysteme angewandt werden können, nach denen die (wenigen) Felder der Ausgangstheorien der Quantenfeldtheorie entwickelt werden, und durch die die QFT erst ihren Vielteilchenbegriff erhält.
Am dringendsten Geboten scheint aber die Übertragung der Konzepte dieser Arbeit auf die Lorentzgruppe einer Feldtheorie mit sehr vielen Feldfreiheitsgraden. Bereits am Anfang von Kapitel 4 wurde festgestellt, daß die Lorentzgruppe durch die Art ihrer Blockdiagonalstruktur entscheidenenden Einfluß darauf nimmt, welche und wieviele separate Freiheitsgrade die Theorie besitzt. Die Symmetriebeschränkung der $U(\mathbb{N}_{4\times4})$ in Kapitel 4 bzw. der $U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ in Kapitel 5 findet ja vor dem Hintergrund der bereits ausgeführten Reduktion der Darstellung der Lorentzgruppe des zugrunde liegenden Bündels statt, wie dort ausführlich diskutiert wurde. Die Bezeichnungen der der Dimensionen in denen die Gruppen wirken durch die Operatorschreibweisen dieser Dimensionen, ist die Folge der Restriktion einer hochdimensionalen Darstellung der Lorentzgruppe auf eine einfacheren in ihr enthaltene Untergruppe. Im Zusammenhang mit dem Energie - Impulstensor in Teilkapitel 5.1.6 wurde dann auch schon festgestellt, daß die Übertragung der Symmetrieverminderung aus der hochdimensionalen unitären Gruppe auf die Darstellung der Lorentzgruppe mit der höchstmöglichen Dimension, die dem Bündel Υ zur Verfügung steht, durchaus dieselben Auswirkungen auf den Teilchenbegriff und das Verständnis von Austauschphänomenen haben könnte, wie sie die unitäre Gruppe und ihre Beschränkung hat. Nach einer solchen Übertragung wären dann aber alle Aspekte, die zur Existenz oder eben Nichtexistenz eines Teilchenbegriffes beitragen unter dem Dach einer Gruppe zusammengebracht. Der gerade angedachte Vorgang der Dynamisierung der Symmetriebeschränkung in seiner vollen Form würde in diesem Zusammenhang einen ersten gewichtigen Beitrag zur Frage nach den Erzeugungs - und Vernichtungsprozeßen innerhalb der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie leisten. Denn mit sich verändernder Beschränkung der Symmetrie der Darstellung der Lorentzgruppe des umfassenden Bündels $\Upsilon(\ldots,U(4N))$ um die es hier geht, ändert sich auch die Art der separaten Freiheitsgrade und damit die Art der möglichen Teilchen selbst bei endlicher Dimension $4N$ der Faser des Bündels. So könnten bereits jetzt vier Klein - Gordonfelder in einen Spinor übergehen, in dem sich die entsprechenden Elemente der L^{4N} so ändern, daß sie die ihnen anvertrauten Elemente der Fasern nicht mehr alleine je für sich sondern zusammengefaßt mit einer Spindarstellung der Lorentzgruppe in vier Dimensionen transformieren; Umgekehrtes ist natürlich auch denkbar. (Dieser Vorgang macht auch die Dynamisierung der Metrik $\mathcal{I}$, d.h. ihrer Komponenten $I^n{}_\ell$ zwingend notwendig; das Set aus dem einen Fall wird im anderen im Allgemeinen nicht sinnvoll verwendbar sein.)
Der erste Schritt zur Verwirklichung dieser Idee ist wieder einfach. Die eichkovarianten

Ableitung müssen zuerst nach den bereits bekannnten Mustern auf ihre allgemeinrelativistische Form umgearbeitet werden und die Lagrangedichte um die bekannnten Anteile der allgemeinen Relativistätstheorie erweitert werden, denn nichts Anderes als die Hinzunahme der Gravitationswechselwirkung bedeutet die Dynamisierung der Lorentzsymmetrie der Vektorfaser von Υ. Die Schwierigkeiten fangen dann mit Auswahl der "richtigen" hochdimensionalen Darstellung der Lorentzgruppe für die Vektorfaser von Υ an. Sie werden auch auf keinen Fall geringer, wenn man bedenkt, daß für die vollständige Beschreibung von Erzeugungs - und Vernichtungsprozeßen die Dimension der Vektorfaser auf (überabzählbar?) Unendlich erweitert werden muß, wie in Unterkapitel 5.3 dargelegt wird. In Bezug auf die hierbei ganz sicher enstehenden Divergenzen besteht die nicht ganz unberechtigte Hoffnung, daß sich gut beherrschen lassen, da man sie sich wissentlich einhandelt, d.h. ihren genauen Ursprung kennt.
Die Übertragung der Symmetriebeschränkung auf die Darstellung der Lorentzgruppe der Bündels eines Vielteilchensytemes bringt zusätzlich noch den Vorteil eventuell Anschluß an die Quantenloopgravitation zu finden und dadurch an einen Quantisierungsbegriff der bisher noch fehlt. Die QLG bzw. ihr Vorgehen in dieser Hinsucht wäre hierfür ein aussichtsreicher Kandidat, da sie zum Zwecke der Quantisierung andere Methoden als die QFT verwendet. Mit denen der letzteren Theorie muß die RST, wie bereits mehrfach geschildert, in Konflikt geraten.
Die Methoden der QLG in Bezug auf die noch ausstehende allgemeine Quantisierung der RST näher zu untersuchen, ist sicher auch außerhalb einer gravitativen Form der Yang - Mills - RST, d.h. im Hinblick auf ihre Form mit unitärer (dynamischer) Symmetriebeschränkung, sinnvoll.

Symbolverzeichnis

$(-+++)$, $(+---)$ äquivalente Signaturen der Metrik g über M_1^4 oder $\mathbb{R}_1^4$

${(\mathcal{A}_\mu)^i}_j$ .... Komponenten der Liealgebradarstellungsmatrix von $\mathcal{A}_\mu$

${(\mathcal{U}_\mu)^i}_j$ .... Elemente der Liealgebradarstellungsmatrix von $\mathcal{U}_\mu$

${(\upsilon_a)^i}_j$ .... Matrixelemente von υ_a

$|\psi_k>$, $<\psi_k|$ .... Zustandsket(- vektor)und Zustandsbra(- vektor) der konventionellen Quantenmechanik

(U_i, τ_i) .... Karte eines Bündels über U_i

$\{(U_i, \tau_i)\}$ .... Atlas eines Bündels

$< A >$ .... Mittelwert der Observablen A

$\frac{\partial}{\partial t}$ .... partielle zeitliche Ableitung

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ∂_μ .... kovariante partielle Ableitung nach x^μ

$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, ∂^μ .... kontravariante partielle Ableitung nach x_μ

$\alpha_f^{\mathrm{ad}} = \upsilon_f^{\mathrm{ad}}$ .... adjungierte Darstellung von $\alpha_f = \upsilon_f$

$\Delta {I^3}_3 = {I^3}_3 - {I^1}_1$ .... Differenz zwischen den Elementen der Kopplungsmatrix zweier Felder mit unterschiedlichen (Hyper -)Ladungen

α_a^{D} .... Generatoren der Liealgebra einer unitären Eichgruppe bei der Anwendung auf Spinoren, d.h. die skalaren Einträge der Darstellungsmatrizen α_a oder $\tilde{\alpha}_a$ werden jeweils durch die skalaren Einträge multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt; der Index a zeigt an, daß sie zusammen mit der Permutationsgruppe in der eichkovarianten Ableitung verwendet werden

α_a, $\tilde{\alpha}_a$ .... Generatoren der Liealgebra einer unitären Eichgruppe; der Index a zeigt an, daß sie zusammen mit der Permutationsgruppe in der eichkovarianten Ableitung verwendet werden

$\alpha_f = \upsilon_f$ .... Generatoren der Eichsymmetrien von Υ, die wiederum eine Untergruppe von dessen Strukturgruppe sind

α_{S} .... Feinstrukturkonstante

$\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$ .... alternative Generatoren der Eichsymmetrie $E(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$, die deren $SU(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ - Anteil besser zur Geltung bringt

$\beta_y^{\mathrm{ad}} = \upsilon_y^{\mathrm{ad}}$ .... adjungierte Darstellung von $\beta_y = \upsilon_y$

$\beta_y = \beta_y$ .... Generatoren der Restsymmetrien von Υ, die wiederum eine Teilmenge von dessen Strukturgruppe sind, d.h. sie sind aus der Menge der Transformationen der Strukturgruppe ohne die Eichgruppe

χ_{ab}, χ_{de}, usw. .... Matrizen zur Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{gl}(n)$; Bezeichnungsweise, die verwendet wird, wenn die Liealgebra der Eichgruppe zusammen mit der Darstellung der Permutationsgruppe ausgedrückt werden soll

$\tilde{\chi}_{kl}^{(+)}$, $\tilde{\chi}_{kl}^{(-)}$, usw. ..... Basiselemente der Liealgebra $\mathfrak{u}(n)$; Bezeichnungsweise, die verwendet wird, wenn die Matrizen dieser Basis, die nur Elemente auf der Nebendiagonalen besitzen, zur Darstellung der Permutationsgruppe verwendet werden

χ_{ab}^{D}, χ_{de}^{D} .... Matrizen zur Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{gl}(n)$ bei der Anwendung auf Spinoren, d.h. die skalaren Einträge der Darstellungsmatrizen von $\mathfrak{gl}(n)$ werden jeweils durch die skalaren Einträge multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt; Bezeichnungsweise, die verwendet wird, wenn die Liealgebra der Eichgruppe zusammen mit der Darstellung der Permutationsgruppe zusammenfassend ausgedrückt werden sollen

$\delta^a{}_b$, δ_{ab}, δ^{ab} .... Kroneckerdelta

$\Gamma(M, E)$ .... Menge aller Schnitte eines Vektorbündels, vergleichbar mit der Menge aller Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ einer riemannschen Mannigfaltigkeit

Γ^μ, Γ_μ .... direkte Summe von N Matrizen γ^μ bzw. γ_μ, ersetzen die γ-Matrizen, wenn es um den Schnitt Ψ geht

γ^μ, γ_μ .... diracsche Gammamatrizen

$\kappa_i\left(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^1)^i, (U(1))^i\right)$ Klein - Gordonbündel, d.h. ein Vektorbündel mit Faser $\mathbb{C}^1$ und Strukturgruppe $U(1)$

$\Lambda^a(x)$ .... Gruppenparameter bei der Erzeugung einer Lietransformation $\mathcal{S}$ der Strukturgruppe von Υ aus der Liealgebra dieser unitären Gruppe mittels Exponentialabbildung

$\Lambda^a_{\text{Gesamt}} = P^a\left[\Lambda^f(x), \Lambda^y(x)\right]$ durch die allgemeine Baker - Campbell - Hausdorffrelation enstandener Gruppenparameter der Transformation $\mathcal{S}_{\text{gesamt}} = \mathcal{S}_{\text{Eich}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Rest}}$ oder $\mathcal{S}_{\text{gesamt}} = \mathcal{S}_{\text{Rest}} \cdot \mathcal{S}_{\text{Eich}}$

$\Lambda^f(x)$ .... Gruppenparameter bei der Erzeugung einer Lietransformation $\mathcal{S}_{\text{Eich}}$ der Eichgruppe von Υ, die ein Teil der Strukturgruppe von Υ ist, aus der Liealgebra die die α_f bilden, mittels Exponentialabbildung

$\Lambda^y(x)$ .... Gruppenparameter bei der Erzeugung einer Lietransformation $\mathcal{S}_{\text{Rest}}$ der Rest - oder Austauschsymmetrie von Υ, die ein Teil der Strukturgruppe von Υ ist, aus dem Vektorraum, den die β_y bilden, mittels Exponentialabbildung; die $\Lambda^y(x)$ sind so zu beschränken, daß die Restsymmetrie begrifflich nicht mit der Eichsymmetrie kollidiert; hierbei spielt die Tatsache, daß die β_y keine Liealgebra bilden, keine Rolle, denn es wird somit nur die gesamte Liealgebra $\mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times4})$ betrachtet, deren Gruppenparameter in beschränkte ($\Lambda^y(x)$) und unbeschränkte ($\Lambda^f(x)$) zerfallen und nicht zwei getrennte Untergruppen von $U(\mathbb{N}_{4\times4})$

$\Lambda^y(x)|_{\text{Beschr}}$ .... Form von $\Lambda^y(x)$, bei der dessen Beschränkung besonders betont wird

μ_m .... Generatoren, die die mit den Massenpotentialen $\mathcal{M}_\mu$ zusammenhängende Symmetrie generieren; ihre genaue Art ist noch ungesichert, es spricht aber Vieles für die Generatoren der Lorentzgruppe

ω_a, ω_b .... Basiselemente der Liealgebra der Strukturgruppe G, mit anderen Worten Generatoren der Strukturgruppe G

ϕ .... Klein - Gordonfeld

Φ, Φ_A, Φ_B, usw. .... vektorwertige Schnitte des Whitneysummenbündels $\mathcal{K}$, bestehend aus N einzelnen $\mathbb{C}^1$ - Schnitten ϕ_i (Klein - Gordonfeldern)(in **Kapitel 2**) ; **ab Kapitel 4** Schitt(e) von $\Upsilon(\ldots, U(N))$; da mit einem solchen Schnitt ein System mit N Klein - Gordonfreiheitsgraden, d.h. skalaren Freiheitsgraden, beschrieben wird Systemvektor oder auch Systemskalar genannt; die Indicierung mit A, B, usw. zeigt an, daß mehr als ein solcher Schnitt betrachtet wird,

	d.h. daß dem System steht im Sinne der Gemische mehr als ein Zustand zur Verfügung
ϕ^i; ${\phi^i}_A$, ${\phi^i}_B$	Klein - Gordonfeld, d.h. ein $\mathbb{C}^1$ - wertiger Schnitt des Klein - Gordonbündels κ_i (in **Kapitel 2**) bzw. Komponente des Schnittes Φ von $\Upsilon(\ldots, U(N))$ (**ab Kapitel 4**); die Indicierung mit A, B usw. zeigt an, daß mehr als ein solcher Schnitt betrachtet wird, d.h. daß dem System im Sinne der Gemische mehr als ein Zustand zur Verfügung steht
$\phi^* i$; ${\phi^{i*}}_A$, ${\phi^{i*}}_B$	komplex konjugiertes Klein - Gordonfeld, d.h. ein $\mathbb{C}^1$ - wertiger Schnitt des Klein - Gordonbündels κ_i (in **Kapitel 2**) bzw. Komponente des Schnittes Φ von $\Upsilon(\ldots, U(N))$(**ab Kapitel 4**); die Indicierung mit A, B usw. zeigt an, daß mehr als ein solcher Schnitt betrachtet wird, d.h. daß dem System im Sinne der Gemische mehr als ein Zustand zur Verfügung steht
Φ_*	konstanter N - Vektor
π	**Kapitel 1**: Projektion des Totalraumes E eines Bündels auf dessen Basisraum M, die Formen π_1, π_2, π_i tec. gehören zu den entsprechend indicierten Bündeln **Rest der Arbeit**: Kreiszahl
$\pi^{-1}(p)$; $\pi_1^{-1}(p)$, $\pi_2^{-1}(p)$	inverse Abbildung der Projektion π über einem Punkt p des Basisraumes, die die lokale Faser F_p in E ergibt; die indicierten Formen gehören zu den entsprechend bezeichneten Bündeln
$\pi_{{}^\ell\psi_C}$	kanonisch konjugierter Impuls zu ${}^\ell\psi_C$
$\pi_{\overline{{}^\ell\psi}_C}$	kanonisch konjugierter Impuls zu $\overline{{}^\ell\psi}_C$
$\pi_{\phi^\ell_C}$	kanonisch konjugierter Impuls zu ϕ^ℓ_C
$\pi_{{U^a}_\mu}$	kanonisch konjugierter Impuls zu ${U^a}_\mu$
ψ	Diracspinor
Ψ, Ψ_A, Ψ_B usw.	**in Kapitel 2**: vektorwertige Schnitte des Whitneysummenbündels Σ, bestehend aus N einzelnen $\mathbb{C}^4$ - Schnitten ${}^i\psi$ (Diracfeldern); **ab Kapitel 4**: Schnitt(e) des Bündels $\Upsilon(\ldots, U(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset U(4N))$; da mit einem solchen Schnitt ein System mit N Diracfreiheitsgraden beschrieben wird Systemspinor genannt; die Indicierung mit A, B, usw. zeigt an, daß mehr als ein solcher Schnitt betrachtet wird, d.h. daß dem System steht im Sinne der Gemische mehr als ein Zustand zur Verfügung

${}^{i}\psi$, ${}^{\ell}\psi$, ${}^{m}\psi$, ${}^{n}\psi$, ${}^{1}\psi$ usw. Komponentenspinoren von Ψ; nicht zu verwechseln mit den Spinorkomponenten ψ^i eines einzelnen Komponentenspinors; eine zusätzliche Indicierung mit A, B, usw. zeigt an, daß sie zu verschiedenen Zustandsspinoren $\overline{\Psi}_A$, $\overline{\Psi}_B$, usw. gehören, die verschiedene Zustände des Systems im Sinne der Zustandsgemische vertreten

${}_{i}\overline{\psi}$, ${}_{\ell}\overline{\psi}$, ${}_{m}\overline{\psi}$, ${}_{n}\overline{\psi}$, usw. .. adjungierte Komponentenspinoren zu ${}^{i}\psi$, ${}^{\ell}\psi$,${}^{m}\psi$, ${}^{n}\psi$; eine zusätzliche Indicierung mit A, B, usw. zeigt an, daß sie zu verschiedenen adjungierten Zustandsspinoren $\overline{\Psi}_A$, $\overline{\Psi}_B$, usw. gehören, die verschieden Zustände des Systems im Sinne der Zustandsgemische vertreten

ψ^i, ψ^{4i-3}, ψ^N, usw. . Spinorkomponenten eines einzelnen Komponentenspinors ${}^{i}\psi$; nicht mit einem solchen Komponentenspinor zu verwechseln; eine zusätzliche Indicierung mit A, B, usw. zeigt an, daß sie zu verschiedenen Zustandsspinoren Ψ_A, Ψ_B, usw. gehören, die verschieden Zustände des Systems im Sinne der Zustandsgemische vertreten

$\overline{\psi}_i$, $\overline{\psi}_{4i-3}$, $\overline{\psi}_N$, usw. . adjungierte Spinorkomponenten eines einzelnen adjungierten Komponentenspinors ${}_{i}\overline{\psi}$; nicht mit einem solchen adjungierten Komponentenspinor zu verwechseln; eine zusätzliche Indicierung mit A, B, usw. zeigt an, daß sie zu verschiedenen adjungierten Zustandsspinoren $\overline{\Psi}_A$, $\overline{\Psi}_B$, usw. gehören, die verschiedene Zustände des Systems im Sinne der Zustandsgemische vertreten

Ψ_* .... konstanter N - Vektor

ρ .... Dichtematrix(- operator) zur Beschreibung statistischer Gemische

$\rho\,(t_{ij})$ usw. .... Matrixdarstellung der Übergangsfunktion t_{ij}, wobei $\rho\,(G)$ die Matrixdarstellung der Strukturgruppe G in einem Vektorraum ist

ρ_k .... Dichtematrix(- operator) des Zustandes $|\psi_k>$

ρ_{nn}, ρ_{nm} .... Haupt - und Nebendiagonalelemente der Dichtematrix ρ

$\Sigma\left(\oplus_{i=1}^{N} E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^{N}\left(\mathbb{C}^4\right)^i, \times_{i=1}^{N}\left(U^{\mathrm{D}}\left(1\right)\right)^i\right)$ Whitneysummenbündel aus N Diracbündeln σ_i

$\Sigma^{\mu\nu}$ .... Generator der Lorentzgruppe für Ψ

$\sigma_i\left(E_i, p_i, M_1^4, (\mathbb{C}^4)^i, \left(U^{\mathrm{D}}(1)\right)^i\right)$ Diracbündel, d.h. ein Vektorbündel mit Vektorfaser $\mathbb{C}^4$ und Strukturgruppe $U^{\mathrm{D}}(1)$; der Index i zeigt an, daß die Bestandteile zum $i$ten Bündel gehören

$\tau_i(p)$, $\tau_j(p)$, $\tilde{\tau}_i(p)$, $\tilde{\tau}_j(p)$ lokale Trivialisierungen eines Bündels über den Punkten $p \in U_i$ bzw. $p \in U_j$; werden, wenn dadurch keine Unklarheiten auftreten können, auch kurz mit τ_i usw. bezeichnet; als $\tau_{1,i}$, $\tau_{2,i}$ usw. gehören sie zu dem entsprechend indicierten Bündel

$\tau_i^{-1}(p)$ usw. .... inverse Abbildung einer lokalen Trivialisierung

$\Theta_{\mu\nu}$ .... kanonischer, d.h. unsymmetrischer Energie - Impulstensor der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie

$\Upsilon\big(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U(\mathbb{N}_{4\times 4})\big)$ Kurzform von $\Upsilon\big(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset U(4N)\big)$ bei der die Symmetriebeschränkung des Hintergrundes nur noch durch die Benennung der Strukturgruppe als $U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ vertreten wird

$\Upsilon\big(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset U(4N)\big)$ Vektorbündel, mit dem ab Kapitel 4 die Ideen aus der Einleitung und Kapitel 3 im Falle eines Systems aus N Diracfeldern verwirklicht werden; die Einordnung der Strukturgruppe $U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ in die größere $U(4N)$ besagt, daß die Betrachtung eines N - spinorigen Systemes auf dem Hintergrund einer größeren unitären Symmetrie stattfindet, die auf den betrachteten Fall hin beschränkt wird

$\Upsilon\left(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U^{\mathrm{D}}(N)\right)$ Vektorbündel, mit dessen Struktur ab Kapitel 4 die in der Einleitung und Kapitel 3 geäußerten Ideen für ein System aus N Diracfelder verwirklicht werden; andere Bezeichnung für $\Upsilon\big(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{4N}, U(\mathbb{N}_{4\times 4})\big)$

$\Upsilon\left(E, \pi, M_1^4, \mathbb{C}^{N}, U(N)\right)$ Vektorbündel, mit dessen Struktur ab Kapitel 4 die in der Einleitung und Kapitel 3 geäußert Ideen für ein System aus N Klein - Gordonfelder verwirklicht werden; die Ähnlichkeit zum entsprechenden Bündel für N Diracfelder ist durchaus beabsichtigt, da sich beide Systeme nur durch die Segmentierung der Faser durch die Lorentzgruppe unterscheiden; siehe die Teilkapitel 4.1.1 und 4.2.1 für Genaueres

υ_a .... Generatoren der unitären Strukturgruppe von Υ

υ_a^{ad} .... adjungierte Darstellung von υ_a

$\varphi_{ij}(x)$, $(\varphi_5(x))$ .... Argument $\arg \Lambda^y(x)$ der auf $|\Lambda^y(x)| = n\pi \vee \frac{n\pi}{2}$ beschränkten Gruppenparameter $\Lambda^y(x)$ der Restsymmetrie $U(\mathfrak{Z}_{4\times 4}) \setminus E(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$

$\vec{\Phi}$ .... Gesamtvektor oder auch Gesamtskalar, in dem alle im Sinne eines Gemisches dem System zugänglichen Zustände, d.h. Systemvektoren (Systemskalare) Φ_A gesammelt werden

$\vec{\Psi}$ .... Gesamtspinor, in dem alle im Sinne eines gemisches dem System zugänglichen Zustände, d.h. Systemspinoren Ψ_A, gesammeelt werden

$\vec{B}$ .... magnetisches Feld

$\vec{E}$ .... elektrisches Feld

$\vec{s}_n$ .... Basisvektoren der Vektorfaser eines Vektorfaserbündels, ihre Gesamtheit über das Bündel sind sie eine Zusammenfassung n voneinander linear unabhängiger Schnitte, ein sogenannter Rahmen oder Koordinatenrahmen

$\vee\!\!\!=$ .... "oder gleich", wobei das "oder" hinsichtlich der rechten Seite dieses Symbols im einschließenden Sinn, nicht im ausschließenden Sinn verwendet wird

$\mathcal{A}^{\mathrm{D}}{}_{\mu}$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der auf eine unitäre Eichgruppe bezogenen Konnexionen von entsprechenden Vektorbündeln, also ein Vektorpotential der Eichgruppe, bei der Anwendung auf Spinoren; dazu werden die Komponenten der Liealgebra der Eichgruppe, auf die sich $\mathcal{A}_\mu$ bezieht, durch diese Komponenten multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt

$\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{A}^{(i)}{}_\mu$, $\mathcal{A}^{(1)}{}_\mu$, $\mathcal{A}^{(N)}{}_\mu$ lokaler, liealgebrawertiger Anteil der jeweils auf ihre unitären Eichgruppen bezogenen Konnexionen von entsprechenden Vektorbündeln, also Vektorpotentiale der Eichgruppe; die Indicierung zeigt an, daß die zugehörigen einzelnen Bündel Teil eines Whitneysummenbündels sind

$\mathcal{A}_\mu = U^f{}_\mu \upsilon_f$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der Konnexion $\mathcal{U}_\mu$ von $\Upsilon(\ldots, U(\mathbb{N}_{4\times 4}))$, der sich auf die unitäre Eichgruppe $E(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset U(\mathbb{N}_{4\times 4})$ ($E(N) \subset U(N)$) bezieht, d.h. ein Eichvektorpotential der Yang-Millsform der relativistischen Schrödingertheorie bei der Anwendung auf Spinoren (Skalare)

$\mathcal{B}_\mu = U^y{}_\mu \upsilon_y$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der Konnexion $\mathcal{U}_\mu$ von $\Upsilon(\ldots, U(\mathbb{N}_{4\times 4}))$, der sich auf die kontinuierliche unitäre Restsymmetrie

$(U(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus E(\mathbb{N}_{4\times4})) \subset U(\mathbb{N}_{4\times4})$ ($(U(N) \setminus E(N)) \subset U(N)$) bezieht, d.h. ein Vektorpotential der Rest - oder Austauschsymmetrie der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie bei der Anwendung auf Spinoren (Skalare)

$\mathcal{D}_\mu$, $\mathcal{D}^\mu$ .... lokale eichkovariante Ableitung

$\mathcal{E}_n$ .... (Unter -)Eigenraum zu einem Eigenwert a_n einer Observablen A

$\mathcal{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der auf eine unitären Eichgruppen bezogenen Krümmung eines entsprechenden Vektorbündels, also der Feldstärketensor der Eichgruppe, bei der Anwendung auf Spinoren; dazu werden die Komponenten der Liealgebra der Eichgruppe, auf die sich $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ bezieht, durch diese Komponenten multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times4}$ ersetzt

$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der Krümmung eines Bündels bezüglich einer unitären Eichgruppe, d.h. der Feldstärketensor der Eichgruppe

$\mathcal{F}_{\mu\nu} = V^f{}_{\mu\nu}\upsilon_f$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der Bündelkrümmung $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ von $\Upsilon(\ldots, U(\mathbb{N}_{4\times4}))$, der sich auf die unitäre Eichgruppe $E(\mathbb{N}_{4\times4}) \subset U(\mathbb{N}_{4\times4})$ ($E(N) \subset U(N)$) bezieht, d.h. der Eichfeldstärketensor der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie bei der Anwendung auf Spinoren (Skalare)

$\mathcal{G}\ell(N)$ .... Gruppe der linearen Transformationen in N Dimensionen

$\mathcal{G}\ell(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ .... Gruppe der linearen Transformationen in drei spinoriellen ($3 \to \mathfrak{Z}_{4\times4}$) Dimensionen

$\mathcal{G}\ell(\mathbb{N}_{4\times4})$ .... Gruppe der linearen Transformationen in N spinoriellen ($N \to \mathbb{N}_{4\times4}$) Dimensionen

$\mathcal{G}_{\mu\nu} = G^y{}_{\mu\nu}\upsilon_y$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der Bündelkrümmung $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ von $\Upsilon(\ldots, U(\mathbb{N}_{4\times4}))$, der sich auf die unitäre Restsymmetrie $(U(\mathbb{N}_{4\times4}) \setminus E(\mathbb{N}_{4\times4})) \subset U(\mathbb{N}_{4\times4})$ ($(U(N) \setminus E(N)) \subset U(N)$) bezieht, d.h. der Feldstärketensor der Rest - oder Austauschsymmetrie der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie bei der Anwendung auf Spinoren (Skalare)

$\mathcal{H}$ .... Hamiltondichte; nicht zu verwechseln mit der hamiltonschen 1 - Form $\mathcal{H}_\mu$

$\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mu}, \mathcal{H}'^{\mathrm{D}}_{\mu}$ .... $\mathfrak{gl}(4N)$ - wertige hamiltonsche 1 - Form der permutativen relativistischen Schrödingertheorie in der Form zur Anwendung auf Spinoren; im Gegensatz zu den anderen mit dem Superscript D versehenen Objekten zeigt die keine einfache Verwandtschaft zu ihrem Pendant ($\mathcal{H}_{\mu}$) , sie ist echt $\mathfrak{gl}(4N)$ - wertig

$\mathcal{H}_{\mu}$ .... $\mathfrak{gl}(N)$ - wertige 1 - Form der RST, die hamiltonsche 1 - Form genannt wird, da sie in der relativistischen Schrödingergleichung ähnliche Aufgaben übernimmt, wie der Hamiltonoperator $\hat{H}$ der konventionellen Quantenmechanik in der Schrödingergleichung

$\mathcal{I}(x)$ .... ortsabhängige Intensitätsmatrix der permutativen relativistischen Schrödingertheorie

$\mathcal{I}(\Psi, \Psi)$ .... Form von $\mathcal{I}$, wenn dem System nur die Freiheitsgrade eines einzelnen Systemspinors Ψ zur Verfügung gestellt werden

$\mathcal{I}\left(\vec{\Psi}, \vec{\Psi}\right)$ .... Spinormetrik, d.h. die Metrik in der Faser von Υ, in der die spinoriellen Felder Ψ_A mit N spinoriellen Freiheitsgraden leben

$\mathcal{I}^{\mathrm{D}}(x)$ .... ortsabhängige Intensitätsmatrix der permutativen relativistischen Schrödingertheorie im Diracfall

$\mathcal{J}_{\nu}$ .... Stromoperator der permutativen relativistischen Schrödingertheorie

$\mathcal{K}\left(\oplus_1^N E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^N (\mathbb{C}^1)^i, \times_{i=1}^N (U(1))^i\right)$ Whitneysummenbündel aus N Klein- Gordonbündeln κ_i

$\mathcal{K}(\mathcal{V}^{\mu\nu}, \mathcal{V}_{\mu\nu}) = V^{a\mu\nu} V^{b}{}_{\mu\nu} \mathcal{K}(\upsilon_a, \upsilon_b)$ Liemetrik, d.h. die Metrik in der Liealgebra der Strukturgruppe von Υ

$\mathcal{DM}_{\mu}$ .... eichkovariante Ableitung, die zusätzlich zum Vektorpotentiale $\mathcal{U}_{\mu}$ noch Massenpotentiale $\mathcal{M}_{mu}$ beinhaltet

$\mathcal{M}$ .... Massenoperator, der den einzelnen Klein - Gordon - oder Diracfeldern ϕ^i bzw. ${}^i\psi$ eines $\mathbb{N}_{4\times 4}$ - feldrigen Zustandes Φ oder Ψ ihre Massen m^i zuweist

$\mathcal{M}^{\mathrm{D}}$ .... Massenoperator der einzelnen Diracfeldern ihre Massen $m^i \mathbb{1}_{4\times 4}$ zuweist; wird mit dem Superscript D nur verwendet, wenn gleichzeitig auch Klein - Gordonfelder betrachtet werden, sonst nur mit $\mathcal{M}$ bezeichnet

$\mathcal{M}_{\mu}$ .... Massenpotential

$\mathcal{O}$ .... **in Unterkapitel 2.4**: ein observabler Operator

$\mathcal{O}^{\mu}$ .... (noch unbestimmter) Operator, der den Lorentztransformationen L^{4N} in Dimensionen $\gg 4$ zugeordnet ist, und Γ^{μ} einbettend beinhaltet

$\mathcal{P}\left(a_n\right)$ .... Wahrscheinlichkeit den Eigenwert a_n einer Observablen A zu messen

$\mathcal{R}_{\mu\nu}$, $\mathcal{R}'_{\mu\nu}$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der lokalen Bündelkrümmung, d.h. in der Physik ein Feldstärketensor

$\mathcal{S}$ .... **Kapitel 2**: Transformation der Faser eines Vektorbündels, die sich aus einer Eichtransformation $\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}$ und einer Permutation $\mathcal{S}_{\mathrm{Perm}}$ zusammensetzt
ab Kapitel 4: Transformation aus der unitären Strukturgruppe der Faser eines Vektorbündels, d.h. sie setzt sich aus einer Eichtransformation $\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}} \in U\left(N\right)$ und einer Transformation der Restsymmetrie $\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}} \in U\left(N\right)$ zusammen

$\mathcal{S}_{13}^{\mathrm{ad}}$ .... adjungierte Darstellung von $\mathcal{S}_{13}$

$\mathcal{S}_{13}$ .... kontinuierliche Austauschtransformation bzw. Transformation der Restsymmetrie, die den ersten und den dritten Spinor eines Systems betrifft

$\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}$ .... unitäre Eichtransformation

$\mathcal{S}_{\mathrm{Perm}}$ .... Permutation

$\mathcal{S}_{\mathrm{Rest}}$ .... beschränkte kontinuierliche unitäre Transformation aus der unitären Strukturgruppe eines Vektorbündels ohne dessen Eichtransformationen

$\mathcal{S}_{\mathrm{Sp}}$ .... Spiegelungen

${}^{(\mathrm{mat})}\mathcal{T}_{\mu\nu}$ .... materieller Energie - Impulsoperator der permutativen relativistischen Schrödingertheorie (pRST)

$\mathcal{U}_{\mu}$, $\mathcal{U}'_{\mu}$ .... lokaler, liealgebraweriger Anteil der auf die unitäre *Strukturgruppe* $U\left(\mathbb{N}_{4\times4}\right) \subset U\left(4N\right)$ $\Big(U\left(N\right)$ für skalare Freiheitsgrade$\Big)$ von $\Upsilon\left(\ldots \mathbb{C}^{4N}, U\left(U\mathbb{N}_{4\times4}\right)\right)$ $\Big(\Upsilon\left(\ldots, \mathbb{C}^{N}, U\left(N\right)\right)\Big)$ bezogene Konnexion, also ein Vektorpotential der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie bei der Anwendung auf Spinoren (Skalare)

$\mathcal{V}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu}$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der Krümmung des Bündels Υ, bezüglich dessen unitärer Strukturgruppe, also der Feldstärketensor der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie

$\mathcal{W}_\mu$, $\mathcal{W}'_\mu$ .... lokaler, liealgebrawertiger Anteil der lokalen, auf seine Strukturgruppe G bezogenen Konnexion eines Vektorbündels

$\mathcal{X}^{\mathrm{D}}_\mu$ .... Matrixdarstellung der globalen Permutationsgruppe, umgearbeitet, um in der eichkovarianten Ableitung neben den Eichpotentialen verwendet werden zu können, hier in ihrer Form zur Anwendung auf Spinoren; dazu werden die Komponenten der Darstellungsmatrizen χ_{de} durch diese Komponenten multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt

$\mathcal{X}_\mu$, $\mathcal{X}'_\mu$ .... Matrixdarstellung der globalen Permutationsgruppe, umgearbeitet, um in der eichkovarianten Ableitung neben den Eichpotentialen verwendet werden zu können

$\mathcal{Y}_{\mu\nu}$ .... Permutationsfeldstärke der permutativen relativistischen Schrödingertheorie

$\mathcal{Y}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ .... Permutationsfeldstärke der permutativen relativistischen Schrödingertheorie bei Anwendung auf Spinoren; zu diesem Zweck werden die Komponenten der Darstellungsmatrizen χ_{de} durch diese Komponenten multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt

$\mathbb{O}_{4\times 4}$ .... Nulloperator im $\mathbb{C}^4$

$\mathbb{O}_{4N\times 4N}$ .... Nulloperator im $\mathbb{C}^{4N}$; kann unter gegebenen Umständen aus N Operatoren $\mathbb{O}_{4\times 4}$ bestehen, muß es aber nicht

$\mathbb{1}_{4\times 4}$ .... Einsoperator im $\mathbb{C}^4$

$\mathbb{1}_{4N\times 4N}$ .... Einsoperator im $\mathbb{C}^{4N}$; dieser Vektorraum muß nicht zwingend zur Darstellung von N Spinoren verwendet werden, d.h. $\mathbb{1}_{4N\times 4N}$ wird nicht zwingend in N blockdiagonale aus Einsoperatoren $\mathbb{1}_{4\times 4}$ unterteilt

$\mathbb{C}^k$ .... komplexer Vektorraum der Dimension k

$\mathbb{R}^4_1$ .... Minkowskiraum

$\mathbb{R}^k$ .... reeller Vektorraum der reellen Dimension k

$\mathfrak{e}(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset \mathfrak{u}(\mathbb{N}_{4\times 4})$. Liealgebra von $E(\mathbb{N}_{4\times 4})$

$\mathfrak{gl}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ .... Liealgebra der Gruppe $\mathcal{G}\ell\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$

$\mathfrak{gl}\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$ .... Liealgebra der Gruppe $\mathcal{G}\ell\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$

$\mathfrak{su}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ .... Liealgebra der Gruppe $SU\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$

$\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ .... Liealgebra der Strukturgruppe G, bzw. der Gruppen G_1 und G_2 der Bündel B_1 und B_2

$\mathfrak{u}\,(N)$ .... Liealgebra der unitären Strukturgruppe $U\,(N)$ von $\Upsilon\,(\ldots, U\,(N))$

$\mathfrak{u}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ .... Liealgebra der Gruppe $U\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$

$\mathfrak{u}\,(\mathbb{1}_{4\times 4})$ .... Liealgebra der Gruppe $U\,(\mathbb{1}_{4\times 4})$

$\mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset \mathfrak{u}\,(4N)$ .. Liealgebra der Gruppe $U\,(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset U\,(4N)$

$\mathfrak{X}\,(M)$ .... Menge aller Vektorfelder der riemannschen Geometrie, vergleichbar mit der Menge aller Schnitte $\Gamma\,(M, E)$ eines Vektorbündels

a .... **in Kapitel 1**: Element der Strukturgruppe G
in Kapitel 2: Element der Indexmenge der Generatoren der Eichsymmetrie, wenn sie zusammen mit der Permutationsgruppe in der eichkovarianten Ableitung verwendet werden
ab Kapitel 4: Element der Indexmenge der Generatoren, Potentiale, Feldstärken usw., der Strukturgruppe eines Bündels, d.h. Element der Indexmenge $(a, b, c) = (f, g, h) \cup (x, y, z)$

A^a_μ, $A^{a_1}_\mu$ .... Komponenten von $\mathcal{A}_\mu$ bezüglich der Generatoren α_a, die die Permutationsgruppe zu Partnern haben

$A^f{}_\mu = U^f{}_\mu$ .... Komponenten von $\mathcal{A}_\mu$, d.h. von $\mathcal{U}_\mu$ bezüglich der Untermenge der Eichgeneratoren $\{\alpha_f\} = \{\upsilon_f\} \subset \{\upsilon_a\}$ der Strukturgruppe von Υ

$\tilde{A}^1{}_\mu$, $\tilde{A}^2{}_\mu$, $\tilde{A}^3{}_\mu$ .... Komponenten von $\mathcal{A}_\mu$ bezüglich der Generatoren $\tilde{\alpha}_{f=1,2,3}$ (in Kapitel 5.1.5 im Fall dreier fermionischer Freiheitsgrade)

$B\,(E, \pi, M, F, G)$ .... allgemeines Faserbündel

$B^y{}_\mu = U^y{}_\mu$ .... Komponenten von $\mathcal{B}_\mu$, d.h. $\mathcal{U}_\mu$ bezüglich der Untermenge der Generatoren der Austauschsymmetrie $\{\beta_y\} = \{\upsilon_y\} \subset \{\upsilon_a\}$ der Strukturgruppe von Υ

$B_1\,(E_1, \pi_1, M, F_1, G_1)$ indicierte Form von B, findet, auch mit den Indices $2, i$ o.ä., immer dann Anwendung, wenn mehr als ein Bündel betrachtet wird

c .... Lichtgeschwindigkeit, wie $\hbar$ eine andere Darstellung der 1

$C^a{}_{bc}$ .... Strukturkonstanten von $\mathfrak{u}\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$

$C^{a_1}_{a_2 d_3 e_e}$, $C^{a_1}_{d_2 e_2 a_3}$,$C^{a_1}_{d_2 e_2\, d_3 e_3}$ usw. Strukturkonstanten von $\mathfrak{gl}\,(N)$ bezüglich der Basis χ_{de}

$\tilde{C}^4{}_{24}$ usw. .... Strukturkonstanten von $\mathfrak{u}\,(\mathfrak{Z}_{4\times 4})$ bezüglich der Basis $\{\tilde{\alpha}_f\} \cup \{\beta_y\}$

c_1, c_2 .... konstante Faktoren der in dieser Arbeit verwendeten konkreten Form der Liemetrik $\mathcal{K}$; sie haben Einfluß auf die Koppelungsstärke der Fremd - und Selbstwechselwirkung der Felder eines Systems

$D : \mathfrak{X}\,(M) \times \mathfrak{X}\,(M) \to \mathfrak{X}\,(M)$ Konnexion, auch Zusammenhang genannt, der riemannschen Geometrie

D_μ, D^μ .... Komponente der eichkovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu$, d.h. $\mathcal{D}_\mu$ und $\mathcal{D}^\mu$ wirken auf Komponenten ϕ^i, ${}^i\psi$, $A^f{}_\mu$, $F^f{}_{\mu\nu}$ usw. von Φ,Ψ, $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ usw.

e .... **Kapitel 1**: neutrales Element der Strukturgruppe G eines Bündels
Kapitel 2: Element der Indexmenge der Darstellungsmatrizen der Permutationsgruppe, damit auch Element der Indexmenge aller Koeffizienten dieser Darstellungsmatrizen
ab Kapitel 5: in der Kombination $\frac{e}{4\pi}$ u.ä. die Elementarladung

E; E_1, E_2, E_i .... **in Kapitel 1**: Totalraum eines Faserbündels; die indicierten Formen sind die Totalräume der entsprechend indicierten Bündel
ab Kapitel 4: E: Energie

$E\,(\mathbb{N}_{4\times 4}) \subset U\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$ Eichgruppe der Faser von $\Upsilon\,(\ldots, U\,(\mathbb{N}_{4\times 4}))$; als solche Teil von der Strukturgruppe $U\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$ dem die kontinuierliche Rest - oder Austauschsymmetrie $U\,(\mathbb{N}_{4\times 4}) \setminus E\,(\mathbb{N}_{4\times 4})$ zur Seite gestellt ist

e_μ, e_ν .... lokale Basisvektoren im Tangentialraum T_pM einer riemannschen Mannigfaltigkeit

f, f' .... **Kapitel 1**: Punkte der Faser F
ab Kapitel 4: Liealgebraindex der Eichpotentiale aus der Indexmenge (f, g, h)

F; F', F^1, F^2 .... Faserraum eines Faserbündels; die indicierten Formen sind die Faserräume der entsprechend indicierten Bündel

$F^a{}_{\mu\nu}$ .... **Kapitel 2**: Komponenten von $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ bezüglich der Generatoren α_a einer unitären Eichsymmetrie, die zusammen mit der Permutationsgruppe auftreten

$F^f{}_{\mu\nu} = F^f{}_{\mu\nu}$ .... Komponenten von $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, d.h. von $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ bezüglich der Untermenge der Eichgeneratoren $\{\alpha_f\} = \{\upsilon_f\} \subset \{\upsilon_a\}$ der Strukturgruppe von Υ

$F^f{}_{\mu\nu} = V^f{}_{\mu\nu}$ .... **Kapitel 4 und folgende**: Komponenten von $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ bezüglich der Eichgeneratoren $\alpha_f = \upsilon_f$ der unitären Strukturgruppe von Υ, die zusammen mit den Generatoren $\beta_y = \upsilon_y$ der Rest - oder Austauschsymmetrie auftreten

F_p, $F(p)$ .... lokale Faser in E, definiert als das Bild von $p \in M$ unter π^{-1}

g .... Element aus $\mathcal{G}l\,(N)$

G, G_1, G_2 .... Strukturgruppe eines Bündels bzw. des jeweiligen Bündels B_1, B_2

g^i_{*j} .... Elemente von g_*

g^x_* .... Normierungskonstante der Nullkomponente j^x_0 des $x$ten Noetherstromes $j^x{}_\mu$

$G^y{}_{\mu\nu} = U^y{}_\mu$ .... Komponenten von $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, d.h. $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ bezüglich der Untermenge der Generatoren der Austauschsymmetrie $\{\beta_y\} = \{\upsilon_y\} \subset \{\upsilon_a\}$ der Strukturgruppe von Υ

g^{D} .... Element aus $\mathcal{G}l\,(4N)$

$g_i\,(p)$, $g_i^{-1}\,(p)$, usw. .. Elemente der Strukturgruppe G und ihre inversen Abbildungen, die verschiedene lokale Trivialisierungen $\tau_{i,p}$ und $\tilde{\tau}_{i,p}$ über *derselben* offenen Menge U_i miteinander in Beziehung setzen; sie vertreten also die Eichfreiheiten eines Bündels; die sparsamer indicierten Formen g_i, g_i^{-1}, g und g^{-1} werden verwendet, wenn dadurch keine Uneindeutigkeiten entstehen können

g_* .... **Kapitel 2**:konstante hermitische $N \times N$ - Matrix
ab Kapitel 4:einheitliche Normierungskonstante, wenn alle Noetherströme $j^x{}_\mu$ auf den selben Wert, eben g_*, normiert werden

g^{D}_* .... konstante hermitische $4N \times 4N$ - Matrix

$g_{\mu\nu} = g\,(e_\nu, e_\mu)$ ...... Komponenten der Metrik g einer riemannschen Mannigfaltigkeit

$\hat{H}$ .... Hamiltonoperator der nichtrelativistischen Standardquantenmechanik

$\hbar$ .... plancksches Wirkungsquantum h geteilt durch 2π, also eine andere Darstellung der 1

$I^{ABn}{}_{\ell}$ .... Kompponente von $\mathcal{I}$, die Komponentenspinoren ${}^{\ell}\psi$, ${}^{n}\psi$ aus *verschiedenen* Systemspinoren Ψ_A, Ψ_B miteinander in Beziehung setzt

I^{AB} .... **Kapitel 2**:Entwicklungskoeffizient von $\mathcal{I}\,(x)$ bezüglich einer Tensorproduktbasis aus Zuständen $\{\Phi_A\}$ oder $\{\Psi_A\}$
ab Kapitel 4: Komponente der Metrik $\mathcal{I}\left(\vec{\Psi},\vec{\Psi}\right)$ bzw. $\mathcal{I}\left(\vec{\Phi},\vec{\Phi}\right)$ bezüglich der mehrfachen Zustände $\{\Psi_A\}$ bzw. $\{\Phi_a\}$ eines gemisches von Zuständen

$I^{n}{}_{\ell}$ .... Komponente von $\mathcal{I}$, die Komponentenspinoren ${}^{\ell}\psi$, ${}^{n}\psi$ *eines* Systemspinors Ψ miteinander in Beziehung setzt; die ungewöhnliche Indexstellung ($I^{n}{}_{\ell} \neq \delta^{n}{}_{\ell}$!!) hängt damit zusammen, daß mit $I^{n}{}_{\ell}$ nicht die in ${}^{n}\psi \to \overline{{}_{n}\psi}$ enthaltene Spiegelung des Imaginärteiles von ${}^{n}\psi$ ausgeführt wird

id_M .... identische Abbildung des durch den Index bezeichneten Raumes, hier der Basisraum M

$j^{a}{}_{\mu} = K^{ab} j_{\beta\mu}$ .... kontravariante Version von $j_{a\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{ab} bzw. K_{ab} verwendet

$j^{f}{}_{\mu} = K^{fb} j_{\beta\mu}$ .... kontravariante Version von $j_{a\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{fb} bzw. K_{fb} verwendet

$j^{y}{}_{\mu} = K^{yb} j_{\beta\mu}$ .... kontravariante Version von $j_{y\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{yb} bzw. K_{yb} verwendet

$j_{a\mu}$ .... **in Unterkapitel 2.4**: Komponente des pRST - Gesamtstromes bezüglich der Generatoren α_a
ab Kapitel 4 Noetherstrom zum Symmetriegenerator υ_a von Υ

$j_{de\mu}$ .... Komponente des pRST - Gesamtstromes bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe

$j_{f\mu}$ .... Noetherstrom zum Symmetriegenerator $\alpha_f = \upsilon_f$ von Υ

$j_{y\mu}$ .... Noetherstrom zum Symmetriegenerator υ_y von Υ

$k^{a}{}_{\mu} = K^{ab} k_{b\mu}$ .... kontravariante Version von $k_{a\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{ab} bzw. K_{ab} verwendet

$k^{f}{}_{\mu} = K^{fb} k_{b\mu}$ .... kontravariante Version von $k_{a\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{fb} bzw. K_{fb} verwendet

$k^y{}_\mu = K^{yb} k_{b\mu}$ .... kontravariante Version von $k_{y\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{yb} bzw. K_{yb} verwendet

$k^{\mathrm{D}}_{a\mu}$ .... **in Unterkapitel 2.4**: Anteil der materiellen Diracfelder an den pRSTGesamtstromkomponenten $j_{a\mu}$ bezüglich der Generatoren α_a

$k^{\mathrm{D}}_{de\mu}$ .... Anteil der materiellen Diracfelder an den pRST - Gesamtstromkomponenten $j_{de\mu}$ bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe

$k_{a\mu}$ .... **in Unterkapitel 2.4**: Anteil der materiellen Felder an den pRST - Gesamtstromkomponenten $j_{a\mu}$ bezüglich der Generatoren α_a
ab Kapitel 4: Anteil der materiellen Felder des **Noetherstromes** zum Symmetriegenerator υ_a von Υ

$K_{ab} = \mathcal{K}\left(\upsilon_a, \upsilon_b\right)$ ..... Komponenten der Liemetrik bezüglich der Generatoren υ_a von $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$ bzw. $\mathfrak{u}\left(N\right)$

$k_{de\mu}$ .... Anteil der materiellen Felder an den pRST - Gesamtstromkomponenten $j_{de\mu}$ bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe

$k_{f\mu}$ .... Anteil der materiellen Felder des Noetherstromes zum Symmetriegenerator $\alpha_f = \upsilon_f$ von Υ

$K_{fg} = \mathcal{K}\left(\alpha_f, \alpha_g\right)$ .... Komponenten der Liemetrik bezüglich der Untermenge der Eichgeneratoren $\{\alpha_f\} = \{\upsilon_f\} \subset \{\upsilon_a\}$ von $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$ bzw. $\mathfrak{u}\left(N\right)$

$K_{xy} = \mathcal{K}\left(\beta_x, \beta_y\right)$ .... Komponenten der Liemetrik bezüglich der Untermenge der Generatoren der Restsymmetrie (Austauschsymmetrie) $\{\beta_y\} = \{\upsilon_y\} \subset \{\upsilon_a\}$ von $\mathfrak{u}\left(\mathbb{N}_{4\times 4}\right)$ bzw. $\mathfrak{u}\left(N\right)$

$k_{y\mu}$ .... Anteil der materiellen Felder des Noetherstromes zum Symmetriegenerator $\beta_y = \upsilon_y$ von Υ

L^{4N} .... bezeichnet eine $4N$ - dimensionale Darstellung der Lorentzgruppe

$l^a{}_\mu = K^{ab} l_{b\mu}$ .... kontravariante Version von $l_{a\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{ab} bzw. K_{ab} verwendet

$l^f{}_\mu = K^{fb} l_{b\mu}$ .... kontravariante Version von $l_{a\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{fb} bzw. K_{fb} verwendet

$l^y{}_\mu = K^{yb} l_{b\mu}$ .... kontravariante Version von $l_{y\mu}$; zum Heben und Senken des Liealgeraindexes wird die Liemetrik K^{yb} bzw. K_{yb} verwendet

$L^{\mathrm{D}}_{\lambda\mu\nu}$ .... Bahndrehimpulsanteil der materiellen Felder an $M_{\lambda\mu\nu}$

$L^{\mathrm{F}}_{\lambda\mu\nu}$ .... Bahndrehimpulsanteil der Potentiale und Feldstärken an $M_{\lambda\mu\nu}$

$L_{\lambda\mu\nu}$ .... Bahndrehimpulsanteil von $M_{\lambda\mu\nu}$

$l_{a\mu}$ .... **in Unterkapitel 2.4**: Anteil der Eichfelder und Eichfeldstärken an den pRST - Gesamtstromkomponenten $j_{a\mu}$ bezüglich der Generatoren α_a
ab Kapitel 4: Anteil der Potentialfelder und Feldstärken des **Noetherstromes** zum Symmetriegenerator υ_a von Υ

$l_{de\mu}$ .... Anteil der Permutationskoeffizienten X^{de}_{μ} und der Permutationsfeldstärken an den pRST - Gesamtstromkomponenten $j_{de\mu}$ bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe

$l_{f\mu}$ .... Anteil der Potentialfelder und Feldstärken des Noetherstromes zum Symmetriegenerator $\alpha_f = \upsilon_f$ von Υ

$l_{y\mu}$ .... Anteil der Potentialfelder und Feldstärken des Noetherstromes zum Symmetriegenerator $\beta_y = \upsilon_y$ von Υ

M .... Basisraum eines Faserbündels

M (**ab Kapitel 4**), m Komponente(n) des Massenoperators $\mathcal{M}$, wenn die Massen aller materiellen Felder ${}^i\psi$ oder ϕ^i gleich sind

m^1, m^i, m^N .... Komponenten des Massenoperators $\mathcal{M}$, also die Massen einzelner Felder ϕ^i oder ${}^i\psi$

M^4_1 .... riemannsche Mannigfaltigkeit,deren Metrik die Signatur $(+---)$ oder $(-+++)$ aufweist

${M^n}_m$ .... Elemente des Massenoperators von $\mathcal{M}$, alternative Form zu m^i, die ab Kapitel 4 verwendet wird

${M^m}_\mu$ .... Komponenten von $\mathcal{M}_\mu$ bezüglich μ_m

$M_{\lambda\mu\nu}$ .... Drehimpulsdichte der Yang - Millsform der relativistischen Schrödingertheorie

O .... **in Unterkapitel 2.4**: eine meßbare Größe

p, p', p_0, p_1, p_2 ...... Punkte des Basisraumes M eines Bündels

$P\,(M,G) = P\,(E,\pi,M,G,G)$ Prinzipalbündel der Strukturgruppe G

$P^a \left[\Lambda^f (x), \Lambda^y (x)\right]$ .. (Baker-Campbell-Hausdorff-)Polynom in $\Lambda^f (x)$ und $\Lambda^y (y)$

P^{4N} .... bezeichnet eine $4N$-dimensionale Darstellung der Poincarégruppe

P_i .... Impulse eines Systems, die durch räumliche Integration über T_{0i} gewonnen werden

p_i .... Projektion des $i$ten Dirac-oder Kleingordonbündels σ_i oder κ_i

P_n .... Projektor auf den (Unter-)Eigenraum $\mathcal{E}_N$ eines Eigenwertes a_n einer Observablen A

q .... alleinstehend ein Punkt des Basisraumes M eines Bündels; in der Sequenz $\oplus_{i=1}^N E_i, q, M_1^4, \oplus_{i=1}^N (\mathbb{C}^4)^i, \times_{i=1}^N \left(U^{\mathrm{D}} (1)\right)^i$ o.ä. bezeichnet es die Projektion des betreffenden Whitneysummenbündels

$q\Phi$, $q\Psi$ .... Projektion eines Whitneysummenbündels, die auf einen Schnitt dieses Bündels wirkt, im Beispiel die Schnitte von $\mathcal{K}$ und Σ

${R^a}_{\mu\nu}$, ${R'^a}_{\mu\nu}$ usw. .... Komponenten von $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ usw. bezüglich der Basis $\{\omega_a\}$ der Liealgebra

S, S_0 .... vektorwertiger Schnitt aus der Menge der Schnitte eines Vektorbündels $\Gamma (M, E)$, als solcher auch oft direkt als Vektor behandelt

s, s_1, s_2 .... Schnitt eines Bündels: Abbildung seines Basisraumes M in seinen totalen Raum E derart, daß für das Bild $s (p)$ $\pi \circ s (p) = p$ gilt

S^{11}, S^{22}, S^{33} .... Hauptdiagonalelemente von $\mathcal{S}_{\mathrm{Eich}}$ in drei (spinoriellen) Dimensionen, also alle deren Elemente

S^ℓ, S^n .... Komponenten eines vektorwertigen Schnittes bezüglich der Basis $\{\vec{s}_n\}$ der Vektorfaser, d.h. der Basis der Bildraumes

$S^{\mathrm{D}}_{\lambda\mu\nu}$ .... Spindrehimpulsanteil der materiellen Felder an $M_{\lambda\mu\nu}$

$S^{\mathrm{F}}_{\lambda\mu\nu}$ .... Spindrehimpulsanteil der Potentiale und Feldstärken an $M_{\lambda\mu\nu}$

s_i .... lokaler Schnitt über U_i; kann durch Einschränkung eines globalen Schnittes s auf $U_i \subset M$ entstehen

$S_{\lambda\mu\nu}$ .... Spindrehimpulsanteil von $M_{\lambda\mu\nu}$

$SO (3, 1)$ .... spezielle Orthonormale Gruppe in $3+1$ Dimensionen, d.h. Invarianzgruppe der Metrik mit der Signatur $(- + ++)$ bzw. $(+ - --)$; mit anderen Worten die Orstdarstellung der Lorentzgruppe

$SO\,(\mathfrak{2}_{4\times4})$ .... spezielle orthogonale Gruppe in zwei spinoriellen $(\,2 \rightarrow \mathfrak{2}_{4\times4}\,)$ Dimensionen

$SU\,(12)$ .... spezielle unitäre Gruppe in 12 Dimensionen

$SU\,(2)$ .... spezielle unitäre Gruppe in zwei Dimensionen

$SU\,(2\mathbb{M}_{4\times4})$ .... spezielle unitäre Gruppe in $2\mathbb{M}_{4\times4}$ spinoriellen $(\,2M \rightarrow 2\mathbb{M}_{4\times4}\,)$ Dimensionen

$SU\,(3)$ .... spezielle unitäre Gruppe in drei Dimensionen

$SU\,(N)$ .... spezielle unitäre Gruppe in N Dimensionen

$SU\,(\mathfrak{3}_{4\times4})$ .... spezielle unitäre Gruppe in drei Dimensionen bei der Anwendung auf Spinoren; die Operatordrei $\mathfrak{3}_{4\times4}$ zeigt an, daß sie aus der $SU\,(12) \subset U\,(12)$ durch deren entsprechende Restriktion entstanden ist

$SU\,(\mathfrak{2}_{4\times4})$ .... spezielle unitäre Gruppe in zwei spinoriellen $(\,2 \rightarrow \mathfrak{2}_{4\times4}\,)$ Dimensionen

$t_{ij}^{B_1\oplus B_2}\,(p)$ .... Übergangsfunktionen eines Whitneysummenbündels

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{F}}$ .... Anteil der Feldstärken an $T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{M\,as}}$ .... antisymmetrischer Anteil der materiellen Felder an $T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{M\,s}}$ .... symmetrischer Anteil der materiellen Felder an $T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{M}}$ .... Anteil der materiellen Felder an $T_{\mu\nu}$

T_pM .... Tangentialraum einer riemannschen Mannigfaltigkeit M

$T_{\mu\nu}$ .... aus $\Theta_{\mu\nu}$ durch Symmetrisierung entstandene symmetrische Energie - Impulsdichte der Yang - Millform der relativistischen Schrödingertheorie

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{Austausch}}$ .... Anteil der Austauschpotentiale ${B^y}_\mu$ und der Austauschfeldstärken ${G^y}_{\mu\nu}$ an $T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{Dirac}}$ .... Anteil der Diracfelder an $T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}^{\mathrm{Eich}}$ .... Anteil der Eichpotentiale ${A^f}_\mu$ und der Eichfeldstärken ${F^f}_{\mu\nu}$ an $T_{\mu\nu}$

${}^{(\mathrm{mat})}T_{\mu\nu}$ .... materielle Energie - Impulsdichte der permutativen relativistischen Schrödingertheorie (pRST)

$^{(\text{mat D})}T_{\mu\nu}$ .... Energie - Impulsdichte der Diracmaterie der permutativen relativistischen Schrödingertheorie (pRST)

$t_{ij}(p)$, $\tilde{t}_{ij}(p)$, $t_{ij}^{-1}(p)$, $\tilde{t}_{ij}^{-1}(p)$ Übergangsfunktionen, die einem Punkt $p \in U_i \cap U_j$ ein Element aus der Strukturgruppe G zuweisen, das wiederum die voneinander verschiedenen lokalen Trivialisierungen τ_i und τ_j über U_i und U_j der Faser F_p miteinander in Beziehung setzt, d.h. die unterschiedlichen Faserkoordinaten f_i und f_j von F_p; die zusätzlich indicierten Formen wie $t_{1,ij}(p)$, $t_{2,ij}(p)$ gehören zu den entsprechend indicierten Bündeln; Besteht keine Gefahr von Unklarheiten durch das weglassen des Punktes p, werden die Übergangsfunktionen auch kurz mit t_{ij} bezeichnet

u, u' .... Elemente der Faser $\pi^{-1}(U_i)$ eines Prinzipalbündels; die indicierten Formen u_1, u_2 weisen die Zugehörigkeit der einzelne Elemente zu verschiedenen Bündeln aus

$U(12)$ .... unitäre Gruppe in zwölf Dimensionen

$U(1)$ .... unitäre Gruppe in einer Dimension

$U(2)$ .... unitäre Gruppe in zwei Dimensionen

$U(3)$ .... unitäre Gruppe in drei Dimensionen

$U(4N)$ .... unitäre Gruppe in $4N$ Dimensionen

$U(N)$ .... unitäre Gruppe in N Dimensionen

$U(\mathfrak{Z}_{4\times4})$ .... unitäre Gruppe in drei Dimensionen bei der Anwendung auf Spinoren; die Operatordrei $\mathfrak{Z}_{4\times4}$ zeigt an, daß sie aus der $U(12)$ durch deren entsprechende Restriktion entstanden ist

$U(\mathbb{1}_{4\times4})$ .... unitäre Gruppe in einer Dimension bei der Anwendung auf Spinoren; die Operatoreins $\mathbb{1}_{4\times4}$ zeigt an, daß sie aus der $U(4)$ durch deren entsprechende Restriktion entstanden ist

$U(\mathbb{N}_{4\times4}) \subset U(4N)$. Darstellung der N - dimensionalen unitären Symmetrie zur Anwedung auf N Spinoren; das Symbol $\mathbb{N}_{4\times4}$ vertritt die Operatoren $\mathbb{1}_{4\times4}$, die dadurch entstehen, daß in der einbettenden Gruppe $U(4N)$ eine Reduktion vorgenommen wird

${U^a}_\mu = {A^f}_\mu + {B^y}_\mu$ ... Komponenten von $\mathcal{U}_\mu = \mathcal{A}_\mu + {B^y}_\mu$ bezüglich der Generatoren $\{\upsilon_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}$ der unitären Strukturgruppe von Υ

$U^{\mathrm{D}}(1)$ .... Darstellung der Gruppe $U(1)$ zur Anwendung auf Spinoren, d.h. die skalaren Einträge der Matrizen der $U(N)$ werden jeweils durch die skalaren Einträge multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt

$U^{\mathrm{D}}(N)$ .... Darstellung der Gruppe $U(N)$ zur Anwendung auf Spinoren, d.h. die skalaren Einträge der Matrizen der $U(N)$ werden jeweils durch die skalaren Einträge multipliziert mit $\mathbb{1}_{4\times 4}$ ersetzt

$u^{\mathrm{D}}_{a\mu}$ .... Diracversionen der Geschwindigkeitsoperatoren der permutativen relativistischen Schrödingertheorie bezüglich der Generatoren α_a; werden zur Bildung der materiellen Ströme $k^{\mathrm{D}}_{a\mu}$ verwendet

$u^{\mathrm{D}}_{de\mu}$ .... Diracversion der Geschwindigkeitsoperatoren der permutativen relativistischen Schrödingertheorie bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe; werden zur Bildung der materiellen Ströme $k^{\mathrm{D}}_{de\mu}$verwendet

$u_{a\mu}$ .... Geschwindigkeitsoperatoren der permutativen relativistischen Schrödingertheorie bezüglich der Generatoren α_a; werden zur Bildung der materiellen Ströme $k_{a\mu}$ verwendet

$u_{de\mu}$ .... Geschwindigkeitsoperatoren der permutativen relativistischen Schrödingertheorie bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe; werden zur Bildung der materiellen Ströme $k_{de\mu}$verwendet

$V^a{}_{\mu\nu} = F^f{}_{\mu\nu} + G^y{}_{\mu\nu}$ Komponenten von $\mathcal{V}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu}$ bezüglich der Generatoren $\{v_a\} = \{\alpha_f\} \cup \{\beta_y\}$ der unitären Strukturgruppe von Υ

V^k, V^{m+n}; V^m_1, V^n_2 . Vektorraum der Dimesion k bzw. $m+n$; die indicierten Formen gehören als Vektorfasern zu entsprechend indicierten Bündeln

V^m_{1,p_1}, V^n_{2,p_2} .... m-dimensionaler Vektorraum(-faser) des Bündels B_1 über p_1 bzw. n-dimensionaler Vektorraum(-faser) des Bündels B_2 über p_2

V_i .... endliche Lokalisationsvolumina der jeweiligen Einzeldichten $k^f{}_\mu$ und $l^f{}_\mu$

V_∞ .... Volumen, das alle endlichen V_i umfaßt

∂V_∞ .... “Oberfläche des Volumens V_∞, das alle endlichen V_i umfasst

$W^a{}_\mu$, $W^b{}_\mu$ usw. ..... Komponenten von $\mathcal{W}_\mu$ bezüglich der Generatoren ω_a

$X = \cup_i U_i \times F$ ...... Vorstufe zum totalen Raum eines Bündels das aus den einzelnen direkten Produkten $U_i \times F$ gebildet wird

$X/\sim$ .... totaler Raum E eines Bündels aus lokalen direkten Produkten $U_i \times F$, der eine Äquivalenzklasse von X bezüglich einer geeigneten Relation ist

x^μ, x'^μ .... Koordinaten im Tangentialraum T_pM einer riemannschen Mannigfaltigkeit M_1^4, mit anderen Worten lokale Ortskoordinaten

X_μ^{de}, X_μ^{1N}, X_μ^{12}, $X_\mu^{d_3e_3}$ usw. Entwicklungskoeffizienten von $\mathcal{X}_\mu$ bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe

$\tilde{X}_\mu^{(+)kl}$, $\tilde{X}_\mu^{(-)kl}$ .... Entwicklungskoeffizienten von $\mathcal{X}_\mu$ bezüglich der Darstellungsmatrizen $\tilde{\chi}_{kl}^{(+)}$, $\tilde{\chi}_{kl}^{(-)}$

$Y_{\mu\nu}^{de}$ .... Entwicklungkoeffizient von $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$ bezüglich der Darstellungsmatrizen χ_{de} der Permutationsgruppe

z .... einheitliche Normierungskonstante, wenn alle Noetherströme ${j^f}_\mu$ auf den selben Wert, eben z, normiert werden

z^ψ .... einheitliche Normierungskonstante der Nullkomponenten ${}_1\overline{\psi}\gamma_0{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_0{}^2\psi$, usw. der Einzelstromdichten ${}_1\overline{\psi}\gamma_\mu{}^1\psi$, ${}_2\overline{\psi}\gamma_\mu{}^2\psi$ usw.

z^f .... Normierungkskonstante der Nullkomponente ${j^f}_0$ des $f$ten Noetherstromes ${j^f}_\mu$

$z^{\mathrm{B}} = z^{\mathrm{B}}(g_*)$ .... einheitliche Normierungskonstante der Nullkomponenten $\mathfrak{Im}\,(B^{4\mu}{G^7}_{\mu 0})$, $\mathfrak{Im}\,(B^{5\mu}{G^8}_{\mu 0})$, usw. der Einzeldichten aus Austauschpotentialen und -feldstärken $\mathfrak{Im}\,(B^{4\mu}{G^7}_{\mu\nu})$, $\mathfrak{Im}\,(B^{5\mu}{G^8}_{\mu\nu})$ usw.

Literaturverzeichnis

[1] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1&2. Cambridge University Press, New York, 1996.

[2] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Quantenelektrodynamik*, volume 7 of *Theoretische Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.

[3] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Feldquantisierung*, volume 7A of *Theoretische Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993.

[4] Walter Greiner. *Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung*, volume 8 of *Theoretische Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.

[5] Walter Greiner, Stefan Schramm, and Eckart Stein. *Quantum Chromodynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

[6] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

[7] Lee Smolin. An invitation to loop quantum gravity. *arXiv:hep-th/0408048; submitted to Reviews of Modern Physics*, Mai 2006.

[8] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol, 1996.

[9] Dale Husemoller. *Fibre Bundles*. Springer, New York: Heidelberg, 1994.

[10] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[11] Barrett O'Neill. *Semi - Riemannian Geometry*. Academic Press, London, 1983.

[12] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloë. *Quantum Mechanics*, volume 1. Hermann and John Wiley & Sons, Inc., Paris, 1977.

[13] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloë. *Quantum Mechanics*, volume 2. Hermann and John Wiley & Sons, Inc., Paris, 1977.

[14] S. Rupp. Relativistic wave equations for many-particle quantum systems. *Phys. Rev.*, A 67:034101, 2003.

[15] Mario Verschl and M. Sorg. Relativistic schrödinger theorie and the hartree-fock approach. *Foundation of Physics*, 33(6)(33):893, 2003.

[16] Stefan Rupp. *2-Teilchensysteme in der Relativistischen Schrödingertheorie*. Dissertation, Universität Stuttgart, Fakultät Physik, 2001.

[17] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, New York, 1972.

[18] Ruth Gräbeldinger, Peter Schust, Michael Mattes, and Manfred Sorg. Relativistic energy levels of para-helium. arxiv.org/abs/physics/0609081.

[19] Thorsten Beck and Manfred Sorg. Positive and negative charges in relativistic schrödinger theory. arxiv.org/abs/hep-th0609164.

[20] P. Schust, M. Mattes, and M. Sorg. Quantum entanglement in relativistic three-particle system. *Found. Phys*, 34:99, 2004.

[21] P. Schust, F. Stary, M. Matthes, and M. Sorg. Self-energy and action principle in relativistic schrödinger theory. *Found. Phys*, 35(6):1043, 2005.

Lebenslauf

Name:	Peter Schust
geboren am:	25.4.1974
in:	Berlin - Tempelhof
15.6.1993:	Abitur am Herdergymnasium der Stadt Minden
1.7.1993 bis 30.6.1994:	Wehrdienst beim Luftwaffenausbildungsregiment 2, Weert, Niederlande und der Technischen Kompanie 132 in Rendsburg
1.10.1994 - 30.9.1995	Studium der Luft - und Raumffahrttechnik an der Universität Stuttgart
1.10.1995 - 30.3.1996	Physikstudium an der Universität Stuttgart
1.4.1996 - 22.8.1997	Physikstudium bis zum Vordiplom an der Universität Osnabrück
1.10.1997 - 27.3.2001	Hauptstudium Physik an der Universität Stuttgart
27.3.2000 - 27.3.2001	Diplomarbeit am II. Institut für Theoretische Physik der Universität Stuttgart Hauptberichter: Prof. Dr. U. Weiß, Betreuer: Dr. M. Sorg
27.3.2001	Abschluß des Studiums mit dem Grad Diplomphysiker
seit 1.11.2001	Promotion am II. Institut für Theoretische Physik der Universität Stuttgart Hauptberichter: Prof. Dr. U. Weiß, Betreuer: Dr. M. Sorg