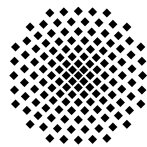


Zur Topologie quasiperiodischer Tilings

Diplomarbeit von
Oliver Krimmel

Hauptberichter: Prof. Dr. H.-R. Trebin
Mitberichter: Prof. Dr. M. Fähnle

Universität Stuttgart



Institut für Theoretische und Angewandte Physik
Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Tilingräume als topologische Räume	11
1.1. Grundlegende Definitionen	11
1.2. Klassifikation quasiperiodischer Tilings	16
1.3. Räume von Tilings	20
1.4. Klassifikation von Tilingräumen	24
1.5. Die Lokale Struktur von Ω_T	25
1.6. Topologische Invarianten von Ω_T	28
2. Die ganzzahlige Čech-Kohomologie von Substitutionstilings	34
2.1. Konstruktion von Ω_T	34
2.2. Darstellung von Ω_T durch inverse Limites	42
2.3. Die zelluläre Kohomologie der Anderson-Putnam-Komplexe	46
2.4. Symmetrieeigenschaften der Anderson-Putnam-Komplexe	48
3. Die ganzzahlige Čech-Kohomologie von Projektionstilings	50
3.1. Die Methode der atomaren Hyperflächen	50
3.2. Konstruktion der Menge Y_r	54
3.3. Darstellung von Ω_T durch inverse Limites	57
3.4. Tilings der Kodimension 1	64
3.5. Tilings der Kodimension 2	66
3.6. Tilings der Kodimension 3	72
3.7. Torsion in der ganzzahligen Kohomologie von Projektionstilings	75
4. Die rationale und die reelle Čech-Kohomologie von Tilingräumen	78
5. Die Čech-Kohomologie des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings	81
5.1. Berechnung der Kohomologie über das Substitutionsverfahren	82
5.2. Berechnung der Kohomologie über die Methode der atomaren Hyperflächen	90
6. Die Čech-Kohomologie des gefärbten oktagonalen Tilings mit Pfeilen	96
6.1. Berechnung der Kohomologie über das Substitutionsverfahren	97
6.2. Berechnung der Kohomologie über die Methode der atomaren Hyperflächen	101

7. Die Čech-Kohomologie von Anderson-Putnam-Komplexen höherer Ordnung	105
7.1. Verallgemeinerte Darstellung von Ω_T durch einen inversen Limes	105
7.2. Anderson-Putnam-Komplexe der Fibonacci-Kette	106
7.3. Anderson-Putnam-Komplexe des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings . . .	115
8. Zur geometrischen Interpretation von Kohomologiegruppen	117
9. Ausblick auf die K-Theorie	125
10. Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick	132
A. Algebraische Grundlagen	133
A.1. Definitionen und Sätze über abelsche Gruppen	133
A.2. Sätze über Gruppenhomomorphismen	134
A.3. Quotientenräume und Smithsche Normalform	135
A.4. Homologische Algebra	136
B. Topologische Grundlagen	141
B.1. Mengentheoretische Topologie	141
B.2. Algebraische Topologie	144
B.3. Homologie- und Kohomologietheorie	149
C. Graphische Darstellung des gefärbten OP-Tilings	166
D. Graphische Darstellung der Substitutionsregeln	167
D.1. Das gefärbte QR-Tiling	167
D.2. Das gefärbte OP-Tiling	169
E. Graphische Darstellung der Tiles mit einem Kragen beim GQR-Tiling	172
F. Matrizen zur Berechnung nach dem Substitutionsverfahren	176
F.1. Das gefärbte Quadrat-Rechteck-Tiling	176
F.2. Das gefärbte oktagonale Tiling mit Pfeilen	180
Literaturverzeichnis	184

Einleitung

Symmetrien spielen in der Physik eine wichtige Rolle, da sie häufig eine einfachere Formulierung von Theorien erlauben und zur Abfassung von Erhaltungssätzen gewisser physikalischer Größen führen.

In der Theorie der Festkörper ist die Translationssymmetrie der Anordnung der Atome von besonderer Bedeutung, da sich dadurch der Begriff eines kristallinen Festkörpers definieren lässt. Neben Translationssymmetrie können Kristallgitter weitere Symmetrien aufweisen, z.B. Rotationssymmetrie. D.h., es gibt mindestens eine Symmetrieachse, um die der (als unendlich ausgedehnt und ideal angenommene) Kristall um einen bestimmten Winkel $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$ gedreht werden kann, so dass ursprünglicher und gedrehter Kristall weder lokal noch global auf irgendeine Weise zu unterscheiden sind. Mathematisch lässt sich zeigen, dass bei einem Kristallgitter eine solche Symmetrie nur für die Ordnungen $n = 1, 2, 3, 4$ und 6 möglich ist.

Im Jahre 1984 berichteten Shechtman et al. von der Entdeckung eines neuen Zustandes von Festkörpern (später als Quasikristall oder quasikristalline Phase bezeichnet), dessen atomare Struktur keine Translationssymmetrie aufweist, während sich bei Röntgenbeugungsexperimenten jedoch (wie bei Kristallen) scharfe Peaks zeigen [SBGC]. Diese können aber - im Gegensatz zum Beugungsmuster von Kristallen - auch z.B. fünf- oder zehnzählige Symmetrie aufweisen (siehe Abbildung 0.1.).

Als mathematisches Modell für ideale Quasikristalle können Dekorationen quasiperiodischer Parkettierungen (Tilings) des \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 dienen; dies sind aperiodische Überdeckungen des \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 durch Geraden-, Flächen- bzw. Volumenstücke, welche sich nicht überlappen dürfen. Die Überdeckungen genügen dabei einigen zusätzlichen Bedingungen - beispielsweise der Bedingung der Repetitivität; darunter lässt sich anschaulich verstehen, dass man aus der lokalen Umgebung eines Punktes nicht auf seine Position im Tiling schließen kann - und haben außerdem die Eigenschaft, dass das Röntgenbeugungsmuster eines Festkörpers, der durch Dekoration eines solchen Tilings mit Atomen modelliert wird, scharfe Peaks aufweist. Quasiperiodische Tilings lassen sich z.B. durch Projektion von Gitterpunkten auf einen (irrationalen) Schnitt durch ein höherdimensionales Gitter erhalten (siehe Abbildung 1.3.). Diese Eigenschaft lässt sich auch als geometrisch anschauliche Definition der Quasiperiodizität verwenden.

Ein Ansatz für die theoretische Untersuchung von idealen Quasikristallen kann also darin bestehen, quasiperiodische Tilings zu betrachten. Dabei stellt man fest, dass viele Eigenschaften des Quasikristalls aus lokalen Eigenschaften des quasiperiodischen Tilings abgeleitet werden können. Beispielsweise kann das effektive Potential, welches an einem Punkt im Festkörper wirkt, in erster Näherung aus den Potentialen der Atome bestimmt werden, welche dem Punkt am nächsten sind. Kennt man also für jeden Punkt im Festkörper dessen lokale Umgebung, so kann man näherungsweise das effektive Potential an dieser Stelle bestimmen.

Zusätzlich zu diesen lokalen Informationen werden jedoch auch globale Informationen benötigt - beispielsweise, um das Beugungsmuster des Quasikristalls bestimmen zu können. Man muss also sowohl das Tiling als Ganzes als auch für jeden beliebigen Punkt P im Tiling die lokale Umgebung von P kennen, um alle physikalischen Eigenschaften des zugehörigen Quasikristalls untersuchen zu können. Nun gibt es für einen vorgegebenen Quasikristall aber nicht nur eine Möglichkeit, diesen durch ein Tiling T zu modellieren, sondern er kann z.B. auch durch alle Tilings modelliert werden, welche Translate von T sind - allgemeiner gesprochen eignen sich dafür alle Tilings, die lokal nicht von T unterscheidbar sind. Man kann dann all diese Tilings in einer Menge zusammenfassen und die lokale Struktur der Tilings durch eine geeignete Topologie berücksichtigen, mit der man diese Menge versieht; man erhält einen topologischen Raum.

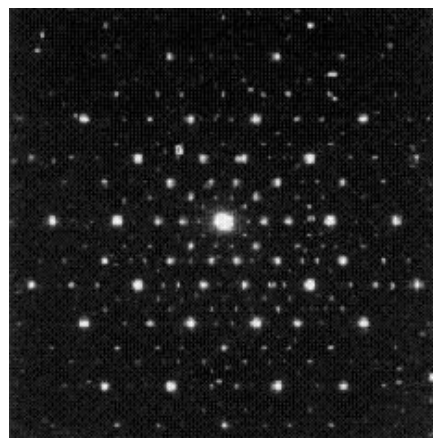


Abbildung 0.1.: Beugungsbild von Al-CuFe

Eine Untersuchung dieses topologischen Raumes erfolgt dann mit Methoden der algebraischen Topologie. Man ordnet dem Raum mittels eines geeigneten Funktors bestimmte algebraische Größen (vornehmlich Gruppen) zu, die ihn charakterisieren - z.B. ordnet der k -te singuläre Kohomologiefunktor jedem topologischen Raum eine abelsche Gruppe zu, die k -te singuläre Kohomologiegruppe. Diese lässt sich explizit aus den Eigenschaften des Raumes berechnen. Sind diese Größen für zwei verschiedene Räume unterschiedlich (d.h. die Gruppen nicht isomorph), so kann man z.B. schließen, dass die Räume aus topologischer Sicht ebenfalls verschieden (d.h. nicht homöomorph) sind. Insbesondere bedeutet dies, dass die Kohomologiegruppen zur Klassifikation von Quasikristallen beitragen.

Abgesehen vom mathematischen Reiz solcher topologischer Untersuchungen ergeben sich auch physikalische Anwendungen. Beispielsweise lassen sich Aussagen über die Zustandsdichte eines Teilchens in einem eindimensionalen Quasikristall treffen, indem man dem zuvor konstruierten topologischen Raum eine geeignete Algebra (genauer gesagt eine C^* -Algebra) zuordnet. Anschließend analysiert man die K -Theorie dieser C^* -Algebra, wobei

die entsprechenden K -Gruppen in direktem Zusammenhang zu den Kohomologiegruppen des topologischen Raumes stehen.

In dieser Arbeit wollen wir topologischen Untersuchungen für verschiedene quasiperiodische Tilings der Dimensionen 1 und 2 durchführen. Algebraische Untersuchungen unter Verwendung von Methoden der Gruppenkohomologie wurden bereits für Kristalle [Hil] und Quasikristalle im Fourierraum durchgeführt [FR], während topologische Untersuchungen quasiperiodischer Tilings unter Verwendung von Kohomologiegruppen z.B. in [FHK1],[Ka] durchgeführt wurden (jeweils mit verschiedenen Methoden), für den Fall von Substitutionsstilings schließlich auch in [AP].

Die Hauptziele unserer Untersuchungen sind dabei die folgenden:

Zunächst wollen wir bestehende mathematische Formalismen früherer Arbeiten und Vorträge, welche auf Anderson, Putnam, Kalugin und Sadun zurückgehen (insbesondere [AP] und [Ka], sowie [Sa1] - [Sa4]) einheitlich darstellen (unter Verwendung der in der algebraischen Topologie üblichen Notation). Dazu wollen wir alle für die Berechnungen relevanten algebraischen und topologischen Sätze zusammenstellen und, wo nötig, beweisen. Die bestehende Theorie soll dabei - so weit möglich - einheitlich auf den Fall ganzzahliger Koeffizienten erweitert werden (dies bezieht sich auf die Arbeit [Ka]); im ganzzahligen Fall müssen dann (im Gegensatz zur Formulierung mit rationalen oder reellen Koeffizienten) noch eventuelle Torsionsuntergruppen berücksichtigt werden. Die so dargestellten Methoden werden dann an zwei (komplizierteren) Tilings der Dimension 2 exemplarisch dargestellt.

Ferner sollen einige der in [AP] und [Ka] mathematisch dargestellten topologischen Sachverhalte geometrisch veranschaulicht werden. Da wir uns bei den Berechnungen nach den Ideen von [Ka] zumeist in einem vierdimensionalen Raum aufhalten, ist dies nicht immer möglich, während das Verfahren nach [AP] eine Veranschaulichung in den meisten Fällen zulässt. Insbesondere wollen wir einige Überlegungen über die geometrische Interpretation des oben genannten Torsionsteils in unseren Kohomologiegruppen anstellen.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Wir beginnen unsere Betrachtungen nach einem einführenden Abschnitt über die wichtigsten Begriffe und Grundlagen der Theorie von Tilings mit der Definition einer für unsere Untersuchungen geeigneten Klasse topologischer Räume, die wir als Tilingräume (bezüglich Translationen) bezeichnen wollen sowie einer kurzen Beschreibung ihrer topologischen Eigenschaften (im Kapitel 1). Wir untersuchen, welche sinnvollen topologischen Invarianten (darunter verstehen wir algebraische Größen, welche den Raum charakterisieren) einem allgemein definierten Tilingraum zugeordnet werden können und wie diese gegebenenfalls konkret zu berechnen sind.

Anschließend wollen wir beschreiben, wie wir Tilingräume in konkreten Fällen konstruieren können und wie die Berechnung der zugehörigen Kohomologiegruppen (diese werden sich als die geeigneten topologischen Invarianten herausstellen) vonstatten geht. Dies wollen

wir in Kapitel 2 für quasiperiodische Tilings darstellen, die durch eine Substitutionsabbildung erzeugt werden können - diese Methode geht auf Anderson und Putnam zurück - andererseits in Kapitel 3 auch für solche Tilings, welche mittels der Methode der atomaren Hyperflächen für den Fall, dass die Hyperflächen die Form von Polytopen (bzw. im zweidimensionalen Fall die Form von Polygonen) haben, gewonnen werden können, wobei wir uns des auf Kalugin zurückgehenden Formalismus' bedienen. Dies stellt wie bereits erwähnt eine Verallgemeinerung der Arbeit [Ka] dar, indem wir die dortigen Methoden auf den Fall beliebiger, endlich erzeugter abelscher Kohomologiegruppen erweitern.

Den Zusammenhang mit den Berechnungen in [AP] und [Ka] stellen wir dann kurz in Kapitel 4 her. In dieser Arbeit wurden Kohomologiegruppen mit rationalen Koeffizienten berechnet und es stellt sich heraus, dass unsere Berechnungen dieselben Ergebnisse liefern, wenn wir den Torsionsteil unserer Gruppen "weglassen".

Schließlich wollen wir für zwei spezielle zweidimensionale Tilings, welche sowohl durch Substitutions- als auch Hyperflächenverfahren erzeugt werden können, die Berechnungen der ersten drei Kohomologiegruppen (bis auf Isomorphie) explizit durchführen: Für das gefärbte Quadrat-Rechteck-Tiling (im Kapitel 5) und für das gefärbte oktagonale Tiling mit Pfeilen (im Kapitel 6).

In Kapitel 7 werfen wir einen kurzen Blick auf ein in [Sa6] erwähntes, auf Gähler zurückgehendes Verfahren, welches theoretisch die Berechnung der Kohomologiegruppen für quasiperiodische Tilings unabhängig von deren Konstruktionsverfahren gestattet, wobei wir uns wegen der Komplexität der Berechnungen auf ein eindimensionales Tiling und einen einfachen Fall eines zweidimensionalen Tilings beschränken wollen.

In Kapitel 8 wollen wir schließlich einen Ansatz für die geometrische Interpretation der Torsion in der zweiten Kohomologiegruppe eines Substitutions-Tilingraumes aus zweidimensionalen Tilings gewinnen. Dabei wollen wir notwendige Bedingungen sowie eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines nichttrivialen Torsionsteils in der zweiten Kohomologiegruppe formulieren und beweisen.

In Kapitel 9 werfen wir dann noch einen (wegen der Komplexität des Themas sehr flüchtigen) Blick auf die K -Theorie und schlagen so eine Brücke zur physikalischen Anwendung der Topologie quasiperiodischer Tilings. Wir stellen dazu dar, wie sich eine geeignete C^* -Algebra für unseren Tilingraum konstruieren lässt, wie man deren K -Gruppen (bei bekannten Kohomologiegruppen) berechnen kann und welche physikalischen Informationen in der K -Theorie enthalten sind.

Abrunden wollen wir unsere Untersuchungen schließlich mit zwei mathematischen Anhängen über algebraische und topologische Grundlagen, in denen alle verwendeten Sätze zusammengestellt sind. Dies ist sinnvoll, um die in den verschiedenen Arbeiten und der Fachliteratur verwendete (teilweise uneinheitliche) Notation zusammenzustellen, aber auch, um unabhängig von weiterer Spezialliteratur zu sein.

Vorbemerkung und Übersicht über die verwendeten Symbole

Für Mengen wollen wir in dieser Arbeit den Mengenbegriff von Cantor benutzen, auch für den Fall, dass die Elemente der Menge wiederum Mengen sind.

Die Bezeichnung $t \in \mathbb{R}^d$ kann sowohl einen Punkt P im \mathbb{R}^d beschreiben als auch eine Translation, d.h. eine Verschiebung um einen Vektor, welcher in Betrag und Richtung mit dem Vektor übereinstimmt, der vom Ursprung zum Punkt P weist. Welche Bezeichnung jeweils gemeint ist, ist aus dem Zusammenhang ersichtlich.

Die in der Arbeit häufiger verwendeten Symbole sowie deren Bedeutung sind in nachfolgender Übersicht aufgelistet. Kommen einem Symbol mehrere Bedeutungen zu, so sind diese durch Schrägstriche getrennt:

Symbol	Bedeutung
A	Arrangement affiner verdickter Tori
\tilde{A}	Arrangement gewöhnlicher affiner Tori
A_T	diskrete C^* -Algebra für Tilingräume
$B^d(r)$	abgeschlossene, d -dimensionale Hyperkugel mit Radius r
β^2	Einbettungsabbildung
C	Kettenkomplex, Kokettenkomplex
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
$C_n(X; G)$	n -te singuläre oder zelluläre Kettengruppe mit Koeffizienten in G
$C_{p,q}$	Kettengruppen des Mayer-Vietoris-Doppelkomplexes
$C^n(X; G)$	n -te singuläre oder zelluläre Kokettengruppe mit Koeffizienten in G
∂_n	n -te singuläre oder zelluläre Randabbildung von C_n nach C_{n-1}
∂^n	n -te singuläre oder zelluläre Korandabbildung von C^n nach C^{n+1}
∂, d	Differentiale
Δ_q	q -dimensionaler Standardsimplex
d_{in}	innere Metrik
d_{loc}	lokale Metrik
$diam$	Durchmesser
dim	Dimension eines Vektorraumes/Simplex
\mathcal{E}	Äquivalenzklassen
\mathbb{E}^d	d -dimensionaler Euklidischer Raum

$E_{p,q}^r$	r -te Spektralgruppen bezüglich der Homologie
$E_{p,q}^\infty$	Grenzwert einer Spektralsequenz aus $E_{p,q}^r$
Γ	Gitter
Γ^k	Translationsmodul von Tori
Γ_k	k -ter Anderson-Putnam-Komplex, Approximation an Ω_T
γ_k	durch Substitution induzierte Abbildung auf Γ_k
γ_k^*	zu γ_k transponierte Abbildung
$H_n(X; G)$	n -te singuläre oder zelluläre Homologiegruppe mit Koeffizienten in G
$\check{H}^*(U)$	Čech-Kohomologie einer Überdeckung
$\check{H}^*(X)$	Čech-Kohomologie eines topologischen Raumes
$H^n(X; G)$	n -te singuläre oder zelluläre Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in G
$H^*(X; G)$	singuläre oder zelluläre Kohomologie mit Koeffizienten in G , Kohomologiering
Hom	Hom-Funktor
Im	Bild einer Abbildung
inf	Infimum, größte untere Schranke
K	Körper / Mayer-Vietoris-Doppelkomplex
K_0	nullte K -Gruppe einer C^* -Algebra
K_1	erste K -Gruppe einer C^* -Algebra
K^i	i -te topologische K -Gruppe
Ker	Kern einer Abbildung
$\mathcal{N}(U)$	Nerv einer offenen Überdeckung
\mathbb{N}	natürliche Zahlen
\mathbb{N}_0	natürliche Zahlen einschließlich 0
\mathcal{O}_T	Orbit eines Tilings
Ω	Tilingraum
Ω_S	Substitutionsspezies
Ω_T	Abschluss des Orbits von T
Ω_k	inverser Limes von Γ_k unter γ_k^*
ω	Substitutionsabbildung
$O(d)$	Gruppe der orthogonalen $d \times d$ -Matrizen
$\pi_0(X, x_0)$	Menge der Wegkomponenten bezüglich des Basispunktes x_0
$\pi_1(X, x_0)$	Fundamentalgruppe bezüglich des Basispunktes x_0
$\pi_k(X, x_0)$	k -te Homotopiegruppe bezüglich des Basispunktes x_0
\mathbb{Q}	rationale Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{R}^d	d -dimensionaler reeller \mathbb{R} -Vektorraum
$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$	d -dimensionaler Torus
$Rang$	Rang einer Gruppe/eines Moduls
$\mathcal{S}(A)$	Smithsche Normalform einer Matrix A
S^d	abgeschlossene d -dimensionale Einheitssphäre
σ	Simplex, Kette, Kokette
$Supp$	Träger, d.h. Menge der Punkte, die von einem Tile überdeckt werden
T^d	d -dimensionaler Torus
τ	Simplex/Kette/Kokette/Spurabbildung
Tor	Torsionsprodukt

\mathcal{U}	offene Überdeckung
U	Trägermenge
X_r	Approximation an Ω_T
Y_r	Approximation an eine Menge nichtsingulärer Tilings
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{Z}_k	Restklassen modulo k , Torsionsmodul
\mathbb{Z}^d	d -dimensionaler ganzer \mathbb{Z} -Modul
\oplus, \bigoplus	direkte Summe
\otimes	Tensorprodukt von \mathbb{Z} -Moduln
$\overset{\circ}{M}$	Menge der inneren Punkte von M
\emptyset	leere Menge
$/$	Quotientenbildung von Moduln über Hauptidealringen
\setminus	Ausschluss ("ohne")
\cup, \bigcup	Vereinigung / cup-Produkt
\cap, \bigcap	Durchschnitt
\sim_E	Äquivalenzrelation bzgl. eigentlicher Euklidischer Bewegungen
$\ \cdot\ $	Norm

Abbildungsverzeichnis

0.1. Beugungsbild von AlCuFe: Zehnzählige Symmetrie	2
1.1. Ausschnitt aus einem Penrose-Tiling	12
1.2. Zur Definition der Periodizität	14
1.3. Zur Erzeugung eines quasiperiodischen Tilings	16
1.4. Symmetrie des oktagonalen Tilings und des Penrose-Tilings	17
1.5. Zur Definition der lokalen Ableitbarkeit	18
1.6. Ausschnitt aus dem Pinwheel-Tiling	19
1.7. Zur Kontrahierbarkeit des \mathbb{R}^2	21
1.8. Homotopieklassen geschlossener Wege in T^2	25
1.9. Zur Herleitung der lokalen Struktur von Ω_T	26
1.10. Zur lokalen Struktur von Ω_T beim oktagonalem Tiling	26
1.11. ϵ -Umgebung von Ω_T beim oktagonalem Tiling	27
1.12. Benachbarte ϵ -Umgebungen von Ω_T beim oktagonalem Tiling	28
2.1. Die Fibonacci-Kette	35
2.2. Prototiles der Fibonacci-Kette	35
2.3. Substitution der Fibonacci-Kette	35
2.4. Nachweis der Substitutionseigenschaft der Fibonacci-Kette	36
2.5. Die lokale Isomorphieklasse der Fibonacci-Kette	36
2.6. Deflation der Fibonacci-Kette	38
2.7. Zur Definition eines erweiterten Substitutionssystems	39
2.8. Zur Definition des Kragens eines Prototiles	40
2.9. Zweidimensionale Prototiles mit Kragen	41
2.10. Veranschaulichung des nullten Anderson-Putnam-Komplexes	43
2.11. Zum inversen Limes der Anderson-Putnam-Komplexe	44
2.12. Der erste Anderson-Putnam-Komplex der Fibonacci-Kette	47
3.1. Vom zweidimensionalen Gitter zum zweidimensionalen Torus	51
3.2. Das Bild des physikalischen Raumes unter π	52
3.3. Zur Methode der atomaren Hyperflächen	52
3.4. Zur Bestimmung der Gittervektoren beim gefärbten oktagonalem Tiling (1)	53
3.5. Zur Bestimmung der Gittervektoren beim gefärbten oktagonalem Tiling (2)	53
3.6. Singulärer Fall bei der Fibonacci-Kette	54

3.7.	Projektion von Gitterpunkten auf eine Mannigfaltigkeit	55
3.8.	Projektion von Gitterpunkten mit Einschränkungen	56
3.9.	Zur Rationalitätsbedingung	56
3.10.	Darstellung eines zweidimensionalen verdickten Torus'	57
3.11.	Zur Verdünnbarkeit verdickter Tori	63
3.12.	Zur Konstruktion von A^Δ	64
5.1.	Das gefärbte QR-Tiling	81
5.2.	Entstehung des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings	82
5.3.	Entstehung der Hyperflächen des gefärbten QR-Tilings	82
5.4.	Prototiles des gefärbten QR-Tilings	83
5.5.	Zerlegung des QR-Tilings in Prototiles erster Ordnung	83
5.6.	Die Substitutionsabbildung des gefärbten QR-Tilings	84
5.7.	Zum Nachweis der FTB-Eigenschaft	85
5.8.	Zur Identifikation der Vertices	86
5.9.	Der Komplex Γ_0 des gefärbten QR-Tilings	86
5.10.	Zur Bestimmung von Γ^1 beim gefärbten QR-Tiling	90
5.11.	Zur Bestimmung von Γ^2 beim gefärbten QR-Tiling	90
5.12.	Zur Bestimmung der Tori-Schnittpunkte beim gefärbten QR-Tiling	91
6.1.	Das gefärbte OP-Tiling	96
6.2.	Prototiles des gefärbten OP-Tilings	96
6.3.	Das Hyperflächensystem des gefärbten OP-Tilings	97
6.4.	Prototiles erster Ordnung beim gefärbten OP-Tiling	98
6.5.	Die Substitution des gefärbten OP-Tilings (1)	98
6.6.	Die Substitution des gefärbten OP-Tilings (2)	98
6.7.	Die Substitution des gefärbten OP-Tilings (3)	99
6.8.	Der nullte Anderson-Putnam-Komplex beim OP-Tiling	100
6.9.	Zur Bestimmung der verbotenen Tori beim gefärbten OP-Tiling	101
7.1.	Ausschnitt aus der Fibonacci-Kette	107
7.2.	Der Komplex Γ_0 der Fibonacci-Kette	107
7.3.	Der Komplex Γ_2 der Fibonacci-Kette	108
7.4.	Der Komplex Γ_3 der Fibonacci-Kette	109
7.5.	Der Komplex Γ_4 der Fibonacci-Kette	110
7.6.	Der Komplex Γ_5 der Fibonacci-Kette	112
7.7.	Der Komplex Γ_6 der Fibonacci-Kette	114
8.1.	Die Prototiles des oktagonalen Ammann-Beenker-Tilings	119
8.2.	Zur Torsion in der Kohomologie des gefärbten QR-Tilings	121
8.3.	Zur Torsion in der Kohomologie des gefärbten OP-Tilings	122
9.1.	Die integrierte Zustandsdichte im eindimensionalen Quasikristall	130

B.1. Zellzerlegung der Kleinschen Flasche	153
B.2. Die orientierte Zellzerlegung der Kleinschen Flasche	154
B.3. Der Spektralkomplex E^1 für zweidimensionale Tilings	162
C.1. Ausschnitt aus dem gefärbten OP-Tiling	166
D.1. Die Substitutionsabbildung des gefärbten QR-Tilings im Detail (1)	167
D.2. Die Substitutionsabbildung des gefärbten QR-Tilings im Detail (2)	168
D.3. Die Substitutionsabbildung des gefärbten OP-Tilings im Detail (1)	169
D.4. Die Substitutionsabbildung des gefärbten OP-Tilings im Detail (2)	170
D.5. Die Substitutionsabbildung des gefärbten OP-Tilings im Detail (3)	171
E.1. Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling (1)	172
E.2. Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling (2)	173
E.3. Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling (3)	174
E.4. Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling (4)	175

1. Tilingräume als topologische Räume

1.1. Grundlegende Definitionen

Bevor wir den Gegenstand unserer topologischen Untersuchungen, den Tilingraum, definieren, wollen wir zunächst einige in dieser Arbeit verwendete grundlegende Begriffe zusammenstellen.

1.1.1. Tiles und Tilings

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist der d -dimensionale Euklidische Raum \mathbb{E}^d . Zunächst benötigen wir den bereits in der Einleitung (anschaulich) definierten Begriff des Tilings und damit verwandte Begriffe, welche die Grundlage unserer Untersuchungen darstellen. Zuerst ist hier der Begriff des Tiles zu nennen:

Definition 1.1

Unter einem **Tile** wollen wir eine nichtleere, kompakte Menge $t \subset \mathbb{R}^d$ verstehen, welche d -zusammenhängend ist und deren geometrische Form einem d -dimensionalen Polytop entspricht, im Fall des \mathbb{R}^2 also einem Polygon. Die Eckpunkte dieser Polytope wollen wir als **Vertices** bezeichnen, während wir eine Linie, die zwei Vertices verbindet, **Kante** nennen wollen.

Im \mathbb{E}^d gilt wegen der Kompaktheit der Tiles insbesondere, dass diese abgeschlossen und beschränkt sind. Durch die Forderung nach d -Zusammenhang (siehe Definition B.11) schließen wir z.B. Tiles aus, welche "Löcher" enthalten, während die Zusatzbedingung an die geometrische Form z.B. solche Tiles ausschließt, die einen fraktalen Rand haben.

Haben wir eine Anzahl von Tiles vorliegen, so können wir damit Teilmengen des \mathbb{R}^d überdecken. Einen Spezialfall einer solchen Überdeckung stellt ein partielles Tiling dar:

Definition 1.2

Als **partielles Tiling** P bezeichnen wir eine Überdeckung einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ (welche wir als **Trägermenge** bezeichnen wollen) durch eine Menge $\mathcal{T}(P)$ von Tiles, so dass $t_i \cap t_j = \emptyset$ für alle $t_i, t_j \in \mathcal{T}(P)$ mit $i \neq j$ gilt. Die Punkte aus U bezeichnen wir auch als **Punkte** des partiellen Tilings. Die Zahl d heißt **Dimension** des partiellen Tilings.

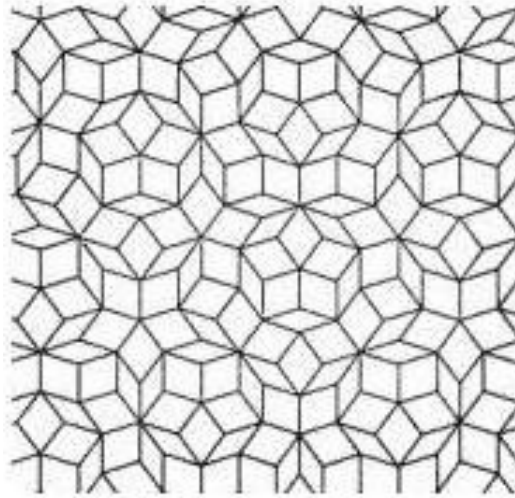


Abbildung 1.1.: Beispiel für ein zweidimensionales Tiling: Das Penrose-Tiling

Zwei Tiles dürfen sich in einem partiellen Tiling also immer nur so schneiden, dass ihr Inneres nicht in der Schnittmenge enthalten ist, d.h. Tiles dürfen sich nicht überlappen, sondern lediglich berühren. Besonders bezeichnet werden die Fälle, in denen U von endlich vielen Tiles überdeckt wird oder in denen $U = \mathbb{R}^d$ gilt:

Definition 1.3

Ist die Anzahl der Tiles in einem partiellen Tiling endlich, so bezeichnen wir das partielle Tiling als **Patch**. Ein partielles Tiling mit $U = \mathbb{R}^d$ heißt **Tiling** T (des \mathbb{R}^d bzw. der Dimension d).

Wir wollen zwei Tiles t_1, t_2 in einem partiellen Tiling als **benachbart** bezeichnen, wenn sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben, d.h. $t_1 \cap t_2 \neq \emptyset$. Zwei benachbarte Tiles sollen sich dabei immer so berühren, dass alle Vertices und Kanten eines Tiles, die in $t_1 \cap t_2$ liegen, Vertices bzw. Kanten beider Tiles sind. Mit dieser Zusatzannahme macht es dann Sinn, von Vertices und Kanten eines Tilings T zu sprechen: Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^d$ heißt **Vertex von** T , wenn er Vertex aller Tiles ist, die P beinhalten. Entsprechend heißt eine Punktmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ **Kante von** T , wenn sie Kante aller Tiles ist, welche mindestens einen Punkt aus K enthalten.

1.1.2. Äquivalenzrelationen von Tiles

Da ein Tiling aus unendlich vielen Tiles besteht, ist es sinnvoll, gewisse Tiles als äquivalent anzunehmen und nur jeweils einen Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse zu betrachten, den wir als **Prototile** bezeichnen wollen. Als Äquivalenzrelation bietet sich die

Äquivalenz von Tiles bezüglich Euklidischer Bewegungen an, d.h. zwei Tiles sollen äquivalent sein, wenn sie durch eine Translation, Rotation (bezüglich des Ursprungs des Tilings) oder Spiegelung auseinander hervorgehen:

Satz 1.4

Sind zwei Tiles bis auf eine Euklidische Bewegungen der Form $A + t$, $A \in O(d)$, $t \in \mathbb{R}^d$ gleich, so wird hierdurch eine Äquivalenzrelation \sim_E definiert.

Beweis. Wir haben Reflexivität, Symmetrie und Transitivität von \sim_E zu zeigen. Zunächst stellen wir fest, dass für jedes Tile t_1 die Beziehung $t_1 \sim_E t_1$ gilt, wenn wir $A = 0$ und $t = 0$ wählen. Da $O(d)$ mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe bildet, sind alle Elemente aus $O(d)$ invertierbar und ihre Inversen sind wiederum in $O(d)$ enthalten. Aus $t_2 = A \cdot t_1 + t$ erhält man dann $t_1 = A^{-1}(t_2 - t) = A' \cdot t_2 + t'$ mit $A' \in O(d)$, $t' \in \mathbb{R}^d$ für beliebige Tiles t_1, t_2 , damit ist die Beziehung $t_1 \sim_E t_2 \Rightarrow t_2 \sim_E t_1$ gezeigt. Schließlich folgt die Transitivität aus der Tatsache, dass $O(d)$ abgeschlossen unter Multiplikation ihrer Elemente ist: Ist $t_1 \sim_E t_2$ und $t_2 \sim_E t_3$, so erhält man aus $t_2 = A \cdot t_1 + t$ und $t_3 = A' \cdot t_2 + t'$ durch Einsetzen $t_3 = A'A \cdot t_1 + A' \cdot t + t' =: A'' \cdot t_1 + t''$ mit $A'' \in O(d)$, $t'' \in \mathbb{R}^d$. \square

Wir haben damit eine Zerlegung der Menge aller Tiles in einem Tiling in nichtleere, disjunkte Klassen gewonnen. Für die weiteren Berechnungen wollen wir uns dabei auf den Spezialfall $A = 0$ beschränken, d.h. wir erklären nur solche Tiles als äquivalent, die durch eine Translation auseinander hervorgehen; die zugehörigen Äquivalenzklassen wollen wir mit ϵ_i bezeichnen (mit $i = 1, 2, 3, \dots$). Man kann die Einschränkung $A = 0$ aufheben (wie wir in Abschnitt 2.4. kurz darstellen werden), um beispielsweise auch Berechnungen an Tilings durchführen zu können, welche mit den in dieser Arbeit beschriebenen Methoden nicht durchführbar wären oder um Berechnungen an Tilings mit Rotationssymmetrie zu vereinfachen (siehe z.B. [ORS], [Sa4]). Wie wir aber später sehen werden, lässt sich eine solche Vereinfachung für unsere Rechenbeispiele nicht vornehmen, so dass eine Beschränkung auf den Fall $A = 0$ in diesen Fällen ausreichend ist.

Für viele Untersuchungen ist es nützlich, verschiedene Tiles innerhalb einer Äquivalenzklasse ϵ_i mit einer Markierung versehen zu können:

Definition 1.5

*Sei $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_i\}$ eine endliche, nichtleere Menge gleichartiger Objekte, die wir als **Markierungen** (bzw. Labels) bezeichnen wollen. Ein Element $(l, t) \in \mathcal{L} \times \epsilon_i$ nennen wir **markiertes Tile**.*

Markierungen können z.B. dann verwendet werden, wenn wir Tiles nicht nur nach ihrer geometrischen Form, sondern auch nach den Tiles in ihrer unmittelbaren Umgebung (d.h. ihrem **Kragen**) unterscheiden wollen (dies wird sich in Kapitel 3 als wichtig erweisen). In diesem Fall können also gleich aussehende Tiles als verschieden identifiziert werden, falls sie verschiedene Markierungen tragen.

1.1.3. Periodische, aperiodische und quasiperiodische Tilings

Eine wichtige Eigenschaft von Tilings stellt deren Periodizität (bzw. Aperiodizität) dar (siehe Abbildung 1.2.):

Definition 1.6

Ein Tiling T des \mathbb{R}^d heißt **k -periodisch**, wenn es k linear unabhängige und von 0 verschiedene Translationsvektoren $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $T = T + n \cdot v_i$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $i = 1, 2, \dots, k$ gilt. Folgt für alle $v \in \mathbb{R}^d, v \neq 0$ aus $T = T + n \cdot v$ die Bedingung $n = 0$, so heißt T **aperiodisch**.

In der Sprache der Gruppentheorie können wir dies auch so ausdrücken: Ein Tiling ist genau dann aperiodisch, wenn seine **Translationsgruppe** G (also die Gruppe, welche von den Translationsvektoren v_1, v_2, \dots, v_k erzeugt wird, zusammen mit der Vektoraddition als Verknüpfung) nur das neutrale Element enthält.

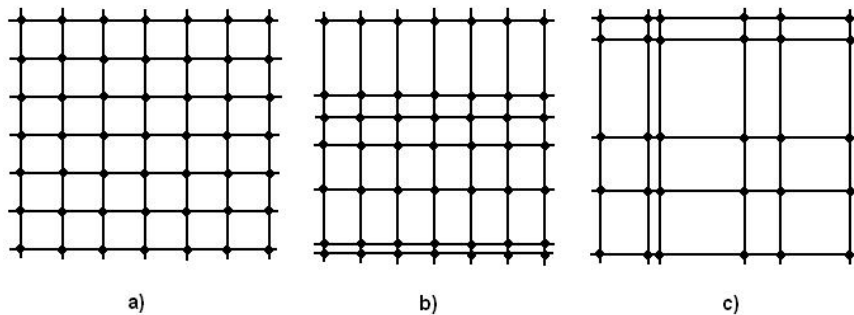


Abbildung 1.2.: a) 2-periodisches Tiling des \mathbb{R}^2 b) 1-periodisches Tiling des \mathbb{R}^2 c) aperiodisches Tiling des \mathbb{R}^2

In unseren Untersuchungen sind wir an einer speziellen Klasse von aperiodischen Tilings interessiert, den **quasiperiodischen** Tilings. Wir wollen in dieser Arbeit eine Definition dieses Begriffes verwenden, der den physikalischen Fragestellungen angepasst ist ¹. Dazu benötigen wir zunächst eine weitere Definition:

Definition 1.7

Ein Tiling heißt **repetitiv**, wenn es für jedes Patch $P \in T$ ein $r \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass es zu jeder d -dimensionalen Hyperkugel $B^d(r)$ mit Radius r in U einen Vektor $t \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $P + t \subset B^d(r)$ gilt.

Repetitivität kann man anschaulich also folgendermaßen verstehen: Ist das Tiling repetitiv, so können wir aus der Form eines Patches nicht eindeutig schließen, an welcher Stelle

¹Für eine mathematische Darstellung für die Quasiperiodizität notwendiger Bedingungen siehe [Fre].

im Tiling es aufgefunden werden kann: Jedes beliebig gewählte Patch kommt in einer Hyperkugel $B^d(r) \subset U$ von endlichem Radius r um jeden beliebigen Punkt vor, wenn wir r groß genug wählen.

Quasiperiodische Tilings stellen nun einen Spezialfall aperiodischer, repetitiver Tilings dar:

Definition 1.8

*Ein aperiodisches Tiling heißt **quasiperiodisch**, wenn es durch Projektion von Punkten auf einen irrationalen Schnitt durch ein höherdimensionales Gitter erhalten werden kann.*

Diese Definition bedarf nun einiger Präzisierung: Sei dazu E_{\parallel} eine $(d - k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und Γ ein d -dimensionales Gitter². E_{\parallel} sei ein bezüglich Γ irrational eingebetteter Unterraum des \mathbb{R}^d ³. Wählt man nun ein d -dimensionales Fenster A und verschiebt dieses entlang E_{\parallel} , wobei alle Gitterpunkte, welche in einem Translat von A enthalten sind, orthogonal auf E_{\parallel} projiziert werden, so können wir die so auf E_{\parallel} erhaltenen Punkte als Vertices eines Tilings auffassen. Ein Tiling, das auf diese Weise entstehen kann, wollen wir als quasiperiodisches Tiling (der Dimension $d - k$) bezeichnen. Die Zahl k bezeichnen wir als die **Kodimension** des Tilings.

Für den Fall $d = 2, k = 1$ ist der Vorgang in Abbildung 1.3. dargestellt: Man wählt ein zweidimensionales Fenster A (im kanonischen Fall hat das Fenster die Form der Einheitszelle des Gitters Γ). A wird entlang einer Geraden E_{\parallel} verschoben, welche so in das Gitter eingebettet ist, dass die Geradensteigung bezogen auf die Richtungen der beiden Vektoren, welche das Gitter aufspannen, irrational ist. Alle Gitteratome, welche in den Bereich des verschobenen Fensters fallen, werden parallel zu einer zu E_{\parallel} orthogonalen Geraden E_{\perp} auf E_{\parallel} projiziert. Betrachtet man die projizierten Punkte als Vertices, so erhalten wir in diesem Fall ein eindimensionales Fibonacci-Tiling, mit dem wir uns noch ausführlich beschäftigen werden.

Eine aus physikalischer Sicht wichtige Eigenschaft ist die bereits in der Einleitung beschriebene Tatsache, dass wir bei einem Röntgenbeugungsexperiment an einem mit Atomen dekorierten quasiperiodischen Tiling eine symmetrische Anordnung von scharfen Bragg-Peaks messen, ähnlich wie bei Kristallen. Dies legt die Vermutung nahe, dass quasiperiodische Tilings trotz ihrer Aperiodizität eine Fernordnung besitzen (d.h. die Tiles können nicht willkürlich auftreten) und zudem eine gewisse Rotationssymmetrie aufweisen (welche jedoch offensichtlich nicht wie bei Kristallen global sein kann). Damit wollen wir uns im nächsten Abschnitt kurz befassen.

²Hier verstehen wir unter einem Gitter zunächst die physikalischen Definition: Der Raum \mathbb{R}^d zusammen mit einer d -periodischen Menge von ausgezeichneten Punkten, den Gitterpunkten.

³Für eine genauere Erklärung siehe Kapitel 3.

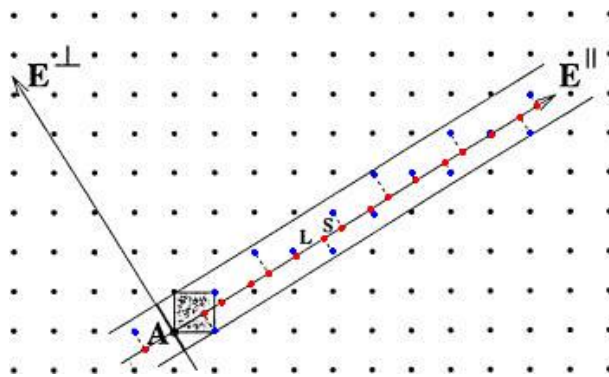


Abbildung 1.3.: Erzeugung eines quasiperiodischen Tilings: Gitterpunkte innerhalb des parallelverschobenen Fensters (blau) werden auf Punkte von $E_{||}$ (rot) projiziert.

1.2. Klassifikation quasiperiodischer Tilings

Wollen wir ein Tiling als Modell eines Quasikristalles verwenden, so benötigen wir dazu Vergleichskriterien, die uns z.B. sagen, wann zwei Tilings denselben Quasikristall modellieren. Ein erstes nützliches Kriterium dieser Art stellt die Unterteilung in **lokale Isomorphie-klassen** dar:

Definition 1.9

Zwei Tilings T, T' des \mathbb{R}^d heißen **lokal isomorph**, wenn jedes Patch aus T auch in T' enthalten ist und umgekehrt. Lokale Isomorphie stellt eine Äquivalenzrelation dar und induziert damit eine Unterteilung der Menge aller Tilings des \mathbb{R}^d in **lokale Isomorphie-klassen (LI-Klassen)**. Es genügt also, statt eines Tilings dessen lokale Isomorphieklasse $[T]$ zu betrachten.

Ein wichtiger Spezialfall von Definition 1.9 ist der, dass sich T und T' nur um eine Translation unterscheiden, offensichtlich sind sie dann lokal isomorph. Die so definierten Klassen erhalten einen speziellen Namen:

Definition 1.10

Als **Orbit** \mathcal{O}_T eines Tilings T bezeichnen wir die Menge \mathcal{O}_T aller Tilings T' mit $\mathcal{O}_T = \{T' | T' = T - t, t \in \mathbb{R}^d\}$, also die Menge aller Tilings, die durch Translation von T entstehen.

Die Bezeichnung "Orbit" rührt daher, dass wir in Definition 1.10 die Translationsgruppe G auf der Menge aller Tilings operieren lassen. Für ein Tiling T ist der Orbit dieser Operation dann definiert als $\{T - t | t \in G\}$, was aber genau unserer Definition von \mathcal{O}_T entspricht. Offensichtlich enthält eine LI-Klasse für jedes in ihr enthaltene Tiling T auch dessen gesamten Orbit.

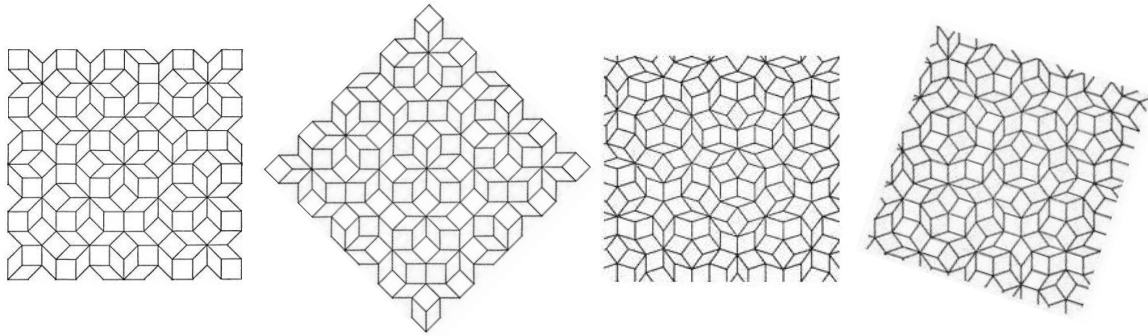


Abbildung 1.4.: Das Ammann-Beenker-Tiling (links) hat achtzählige Symmetrie (Drehung um $2\pi/8$ ergibt ein Tiling in derselben LI-Klasse), während das Penrose-Tiling (rechts) fünfzählige Symmetrie aufweist (hier wurde um $2\pi/5$ gedreht).

Durch Einführung von lokalen Isomorphieklassen macht es Sinn, von Symmetrie aperiodischer Tilings zu sprechen: Betrachten wir z.B. das **Ammann-Beenker-Tiling**: Eine Rotation um ganzzahlige Vielfache des Winkels $\pi/4$ ergibt ein Tiling, welches lokal isomorph zum ursprünglichen Tiling ist, daher hat das Amman-Beenker-Tiling achtzählige Symmetrie (siehe Abbildung 1.4.).

Lokale Isomorphie sieht zwei Tilings als äquivalent an, wenn sie dieselben Patches beinhalten. Wollen wir Quasikristalle mathematisch beschreiben, so ist die Klassifikation nach LI-Klassen jedoch etwas "zu streng", da durchaus Tilings aus verschiedenen LI-Klassen denselben Quasikristall modellieren können. Eine andere Möglichkeit der Klassifizierung stellt deshalb die Definition der **gegenseitigen lokalen Ableitbarkeit** zweier Tilings dar [Ba]:

Definition 1.11

Seien T, T' Tilings des \mathbb{R}^d . T' heißt **lokal ableitbar aus T** (zum Radius r), wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt: Stimmen die Patches in T innerhalb einer Kugel vom Radius r um x und y bis auf eine Translation $x - y$ überein, so stimmt die Menge aller Tiles in T' , die x enthalten mit der Menge aller Tiles in T' , die y enthalten bis auf eine Translation $x - y$ überein. Ist T auch lokal ableitbar aus T' , so heißen T und T' **gegenseitig lokal voneinander ableitbar (MLD = mutually locally derivable)**. Gegenseitige lokale Ableitbarkeit induziert eine Zerlegung der Menge aller Tilings in Äquivalenzklassen.

Man kann also aus einem Tiling T ein lokal aus T ableitbares Tiling T' konstruieren, wenn man alle möglichen Patches mit Radius r in T bestimmt und an die jeweiligen Kugelmittelpunkte in T' äquivalente Tiles setzt (siehe Abbildung 1.5.).

Sind zwei Tilings lokal voneinander ableitbar, so teilen sie viele Eigenschaften, unter anderem Periodizität, Repetitivität und **endliche lokale Komplexität** [Ba].

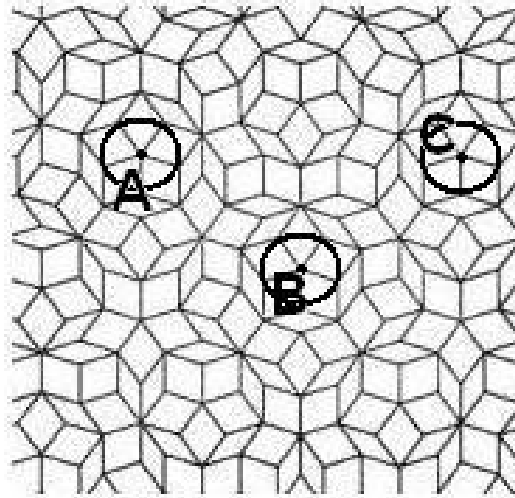


Abbildung 1.5.: Der Radius der Kreise um die Punkte A , B und C betrage r . Ein aus diesem Tiling lokal ableitbares Tiling T' zum Radius r müsste also die Eigenschaft haben, dass die Punkte A , B und C zu denselben Tiles bzw. Tile-Konfigurationen gehören, d.h. die Umgebungen von A , B und C lokal nicht zu unterscheiden sind.

Bei letzterer handelt es sich um eine weitere wichtige Eigenschaft von Tilings, die wir an dieser Stelle nur bezüglich Translation benötigen:

Definition 1.12

Ein Tiling heißt von **endlicher lokaler Komplexität (FLC = Finite Local Complexity)**, wenn es zu jedem Punkt P in U und beliebigem $r \in \mathbb{R}^d$ eine natürliche Zahl n gibt, so dass die Anzahl der Patches, die in einer d -dimensionalen Kugel $B^d(r)$ um P mit Radius r (bis auf Translation) auftreten kann, kleiner oder gleich n ist.

Ein Tiling ist nach unserer bisherigen Definition also genau dann von endlicher lokaler Komplexität, wenn es bis auf Translation eine endliche Anzahl von Tiles gibt. Endliche lokale Komplexität lässt sich auch auf beliebige Kongruenzen verallgemeinern, d.h. wir könnten auch Rotationen und Spiegelungen zulassen. Das Pinwheel-Tiling z.B. (Abbildung 1.6.) ist (nach unserer Definition) nicht von endlicher lokaler Komplexität, wohl aber, wenn wir nur fordern würden, dass es bis auf Translation, Rotation oder Spiegelung eine endliche Anzahl von Tiles geben darf.

Wir werden uns bei unseren weiteren Betrachtungen auf Tilings von endlicher lokaler Komplexität beschränken. Im Fall von Substitutionstilings ist die Endlichkeit der Anzahl der Prototiles nämlich (wie wir später sehen werden) notwendig dafür, endlich erzeugte Koketten-Gruppen des im nächsten Kapitel zu definierenden Tiling-Raumes Ω_T zu erhalten und wir wollen uns in dieser Arbeit ausschließlich auf diesen Fall konzentrieren.

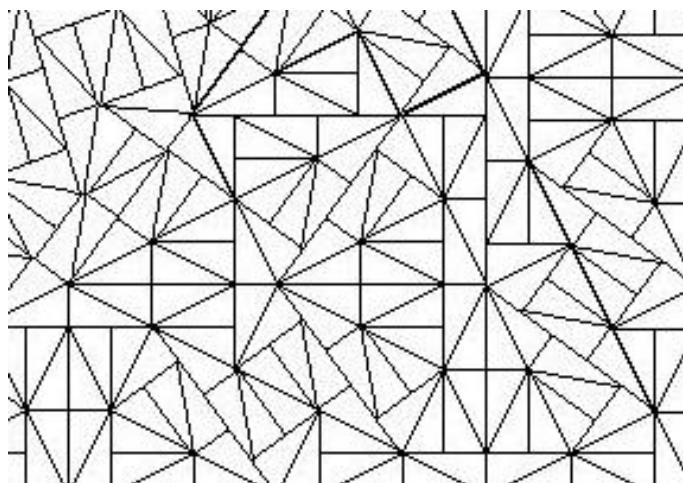


Abbildung 1.6.: Ausschnitt aus dem Pinwheel-Tiling

Lokale Isomorphie und gegenseitige lokale Ableitbarkeit lassen sich nun kombinieren, indem man für ein Tiling T dessen **MLD-Klasse** definiert als die Menge aller Tilings, welche in derselben LI-Klasse liegen wie ein Tiling T' , so dass T und T' gegenseitig lokal voneinander ableitbar sind; insbesondere beinhaltet die MLD-Klasse eines Tilings also dessen LI-Klasse.

In der Praxis stellt es sich in einigen Fällen als schwierig heraus, zu entscheiden, ob zwei quasiperiodische Tilings in derselben MLD-Klasse liegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung ist die, dass die atomaren Hyperflächen (siehe Kapitel 3) der Tilings durch endliche Vereinigung und Schnittbildung auseinander hervorgehen [Ba], dieses Kriterium ist jedoch z.B. für den Fall fraktaler Hyperflächen nicht ohne weiteres anwendbar. In diesem Fall lässt sich das Tiling jedoch oft durch eine Substitution erzeugen, wodurch sich seiner LI-Klasse eine algebraische Größe zuordnen lässt, wenn man diese als topologischen Raum auffasst - ein Ansatz, mit der wir uns im Kapitel 2 befassen wollen. Dabei werden wir feststellen, dass sich die Čech-Kohomologie als geeignete algebraische Größe erweisen wird. Diese trägt dann zur Klassifizierung von Quasikristallen bei, da wir die algebraische Größe der kompletten MLD-Klasse, zu der die LI-Klasse gehört, zuordnen können⁴. Jedoch stellt sie hierdurch keine Möglichkeit einer eindeutigen Klassifizierung dar. Dies hat folgenden Grund:

Die der lokalen Isomorphieklasse zugeordnete Čech-Kohomologie beschreibt die LI-Klasse nicht vollständig. Man kann sich vorstellen, dass man zu den Kohomologiegruppen eines topologischen Raumes gelangt, indem man nur einige der bekannten Informationen über diesen Raum verwendet, während andere unberücksichtigt bleiben.

⁴Dies lässt sich z.B. mit Argumenten zeigen, die das in Kapitel 3 zu entwickelnde Projektionsverfahren verwenden, siehe dazu z.B. auch [Ka].

Zur vollständigen Beschreibung wären weitere topologische Invarianten notwendig, jedoch ist nicht klar, welche Invarianten, oder überhaupt wie viele man benötigen würde.

Die Klassifizierung von Quasikristallen mittels Kohomologiegruppen stellt sich also folgendermaßen dar:

- Liegen zwei Tilings in derselben lokalen Isomorphieklasse oder in zueinander homöomorphen LI-Klassen oder in derselben MLD-Klasse, so sind ihre Kohomologiegruppen isomorph.
- Haben zwei Tilings nicht-isomorphe Kohomologiegruppen, so liegen sie sicher nicht in derselben LI-Klasse bzw. MLD-Klasse.
- Haben zwei Tilings isomorphe Kohomologiegruppen, so lässt sich im Allgemeinen keine Aussage darüber machen, ob sie in derselben LI-Klasse bzw. MLD-Klasse liegen.

1.3. Räume von Tilings

1.3.1. Definition und Eigenschaften von Tilingräumen

In diesem Kapitel wollen wir nun mit der topologischen Untersuchung von Tilings beginnen, dazu benötigen wir zunächst einen geeigneten topologischen Raum. Nahe liegend wäre zunächst, die Menge U , die vom Tiling überdeckt wird (also \mathbb{R}^d) als die dem topologischen Raum zugrundeliegende Menge anzusehen und nach einer geeigneten Topologie zu suchen, welche der Geometrie des Tilings Rechnung trägt. Dies scheitert aber an der Tatsache, dass der \mathbb{R}^d homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, wie die nachfolgende Proposition zeigt:

Proposition 1.13

Der Raum \mathbb{R}^n ist für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ homotopieäquivalent zu einem Punkt, d.h. es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Homotopie $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$, so dass $h(x, 0) = x$ und $h(x, 1) = x_0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, d.h. der \mathbb{R}^n ist kontrahierbar.

Beweis. Wählen wir $x_0 = 0$, so sehen wir unmittelbar, dass die Homotopie $h(x, t) = (1 - t) \cdot x =: h_t(x)$ das Gewünschte leistet (für $n = 2$ siehe dazu Abbildung 1.7).
□

Versuchen wir nun, einem einpunktigen Raum eine der gängigen topologischen Invarianten wie Fundamentalgruppe, höhere Homotopiegruppen, singuläre (Ko-)Homologiegruppen oder Čech-Kohomologiegruppen zuzuordnen, so stellen wir fest, dass diese entweder trivial oder isomorph zu \mathbb{Z} werden. Hierzu betrachten wir zunächst die Homotopiegruppen.

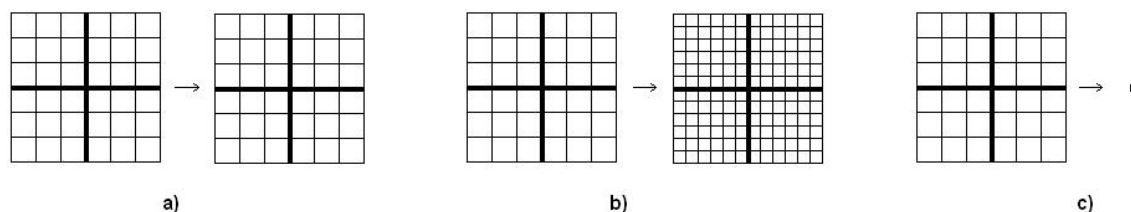


Abbildung 1.7.: Der Raum \mathbb{R}^2 a) unter der Abbildung h_0 b) unter der Abbildung $h_{0,5}$ c) unter der Abbildung h_1

Proposition 1.14

Sei X ein einpunktiger topologischer Raum, dessen Punkt wir mit x_0 bezeichnen. Dann sind die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ und alle höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ trivial.

Beweis. Dies ist genau die Aussage von Satz B.10 □

Für die singulären Homologie- und Kohomologiegruppen sowie für die Čech-Kohomologiegruppen ergibt sich das folgende Resultat:

Proposition 1.15

Sei X ein einpunktiger topologischer Raum. Dann ist $H_0(X; \mathbb{Z}) \simeq H^0(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ und $H_q(X; \mathbb{Z}) = H^q(X; \mathbb{Z}) = 0$ für $q > 0$ sowie $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Beweis. Berechnen wir die singulären Kettengruppen bzw. Kokettengruppen, so stellen wir fest, dass die einzige nichttriviale Gruppe die Gruppe C_0 bzw. C^0 ist; es gilt $C_0 \simeq C^0 \simeq \mathbb{Z}$. Damit sind alle Differentiale trivial und es gilt $\text{Ker}(\partial^0) = \text{Ker}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}$, woraus mit Definition B.15 und Satz B.18 unmittelbar der erste Teil des Satzes folgt. Zur Berechnung der Čech-Kohomologie benutzen wir die Tatsache, dass jede offene Überdeckung eines einpunktigen Raumes aus einem Punkt besteht. Mit Satz B.27 folgt dann $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. □

Die Definition von "Tilingräumen" aus einzelnen Tilings hat uns keinen Nutzen gebracht, da einzelne Tilings aus topologischer Sicht gemäß Proposition 1.13 äquivalent zu Punkten sind, welche natürlich keine geometrischen Informationen der Tilings mehr beinhalten. Um mit unseren topologischen Untersuchungen fortfahren zu können, betrachten wir statt einzelner Tilings nun Mengen von Tilings, d.h. Punktmenge, in denen jeder Punkt einem Tiling entspricht. An diese Mengen stellen wir die Forderung, dass sie abgeschlossen bezüglich Translation und vollständig (bezüglich einer geeigneten Metrik) sind [Sa1].

Definition 1.16

Eine Menge Ω von Tilings zusammen mit einer Topologie τ heißt **Tilingraum** (bezüglich Translationen), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) Für alle $T \in \Omega$ gilt $\mathcal{O}_T \subset \Omega$.
- ii) τ wird durch eine Metrik d auf Ω erzeugt, bezüglich derer Ω vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Bis jetzt haben wir bei der Definition des Tilingraumes noch dasselbe Problem wie im Fall eines einzelnen Tilings: Die einzelnen Punkte in Ω geben keine geometrischen Eigenschaften der ihnen entsprechenden Tilings wieder. Diese geometrischen Informationen müssen also in der Metrik d enthalten sein. Eine geeignete Wahl für eine Metrik stellt z.B. die lokale Metrik dar, die wir im Folgenden stets verwenden wollen [AP]:

Definition 1.17

Stimmen zwei Tilings $t, t' \in \Omega$ auf einer Kugel mit Radius $1/r$ um den Ursprung bis auf Translationen betragsmäßig kleiner oder gleich r überein, so haben sie bezüglich der **lokalen Metrik** d_{loc} einen Abstand

$$d_{loc}(t, t') = \inf(\{1/\sqrt{2}\} \cup \{\epsilon \mid t + u \text{ und } t' + v \text{ stimmen auf } B_{1/\epsilon}(0) \text{ überein für Vektoren } u, v \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|u\|, \|v\| < \epsilon\}).$$

Wir müssen hier das Infimum betrachten, weil zwei Tilings, die auf einer großen Kugel übereinstimmen, natürlich auch auf einer kleinen Kugel übereinstimmen und wir einen eindeutigen Wert für die Metrik benötigen. Der erste Term in der Vereinigung in Definition 1.17 wird benötigt, damit die Metrik auf jeden Fall einen endlichen Wert annimmt.

Mit der lokalen Metrik wird die Menge Ω zu einem metrischen Raum (Ω, d) , welcher gemäß Abschnitt B.1.2 eine Topologie τ induziert.

Ein wichtiges Beispiel für einen Tilingraum stellt der Abschluss des Orbits eines beliebigen Tilings in Ω dar:

Proposition 1.18

Der Abschluss Ω_T des Orbits \mathcal{O}_T eines Tilings T bezüglich der Metrik d ist ein Tilingraum und zwar der kleinste Tilingraum, der T enthält.

Beweis. Die Bedingung $\mathcal{O}_T \subset \Omega_T$ ist offensichtlich erfüllt. Da wir den Abschluss des Orbits \mathcal{O}_T betrachten, ist Ω_T vollständig, also insgesamt ein Tilingraum. \square

Für viele Betrachtungen ist es sinnvoll, den Raum Ω_T zu einem topologischen dynamischen System zu erweitern; wir wollen hier die in [Hir] gegebene Definition wiedergeben und einige wichtige Sätze über solche dynamische Systeme ohne Beweis anführen.

Zunächst wird vorausgesetzt, dass der topologische Raum, der einem topologischen dynamischen System zugrunde liegt, kompakt ist. Dies ist für Ω_T in den für uns relevanten Fällen tatsächlich der Fall, wie z.B. in [Sa6] gezeigt wird:

Satz 1.19

Sei Ω_T wie in Proposition 1.18. Dann ist Ω_T genau dann kompakt, wenn T von endlicher lokaler Komplexität ist.

Da wir endliche lokale Komplexität in dieser Arbeit stets voraussetzen, können wir damit also ein topologisches dynamisches System gemäß [Hir] definieren:

Definition 1.20

*Sei Ω wie in Definition 1.16. Sei $\text{Aut}(\Omega)$ ⁵die Gruppe aller stetigen Bijektionen $g : \Omega \mapsto \Omega$ und G eine beliebige (topologische) Gruppe. Ein Homomorphismus $\mathcal{T} : G \mapsto \text{Aut}(\Omega)$ heißt **Wirkung** von G auf Ω . Das Paar (Ω, \mathcal{T}) bezeichnen wir dann als **topologisches dynamisches System von Tilings**. Die Menge $\mathcal{O}(T')$ aller Tilings, die wir erhalten, wenn wir G auf ein fest gewähltes Tiling T' wirken lassen, nennen wir den **Orbit von T' bezüglich G** .*

Wählen wir für G speziell $(\mathbb{R}^d, +)$ und für \mathcal{T} diejenige Abbildung, die jeder Translation $v \in \mathbb{R}^d$ denjenigen Automorphismus $\Omega \mapsto \Omega$ zuordnet, welcher alle Tilings in Ω um v verschiebt, so erhalten wir ein dynamisches System, welches wir mit (Ω, \mathbb{R}^d) bezeichnen wollen. Setzen wir jetzt $\Omega = \Omega_T$, so entspricht der Orbit aus Definition 1.20 genau der Definition des Orbits aus Definition 1.10.

Eine wichtige Eigenschaft eines topologischen dynamischen Systems ist dessen Minimalität:

Definition 1.21

*Ein topologisches dynamisches System von Tilings heißt **minimal**, wenn jeder Orbit dicht in Ω liegt.*

In [Sa6] wurde nun der folgende Satz gezeigt:

Satz 1.22

Das dynamische System (Ω_T, \mathbb{R}^d) ist genau dann minimal, wenn T repetitiv ist.

Insbesondere folgt aus der Minimalität, dass Ω_T genau der lokalen Isomorphieklasse von T entspricht, wie wir erkennen, wenn wir Definition 1.21 mit Definition 1.9 vergleichen: In jeder (noch so kleinen) Umgebung eines beliebigen Tilings $T' \in \Omega_T$ liegt mindestens ein Punkt P aus dem Orbit eines beliebigen anderen Tilings $T'' \in \Omega_T$. P und T' stimmen

⁵Die Bezeichnung $\text{Aut}(\Omega)$ ist gebräuchlich, da der zugrundeliegende topologische Raum häufig auch eine Gruppenstruktur trägt, so dass gefordert wird, dass die lineare Struktur durch Automorphismen erhalten wird.

damit auf einem (großen) Gebiet um den Ursprung bis auf (kleine) Verschiebungen überein und jedes Patch innerhalb dieses Gebiets kommt natürlich in beiden Tilings vor. Ferner lässt sich noch der folgende Korollar ziehen [AP]:

Korollar 1.23

Sei Ω ein kompakter Tilingraum. Ist das topologische dynamische System (Ω, \mathbb{R}^d) minimal, so ist Ω homöomorph zu Ω_T .

Wie ein Tilingraum nun konkret aussieht, d.h. welche Tilings er enthält, hängt davon ab, auf welche Weise er konstruiert wird. Zwei Konstruktionsverfahren wollen wir in Kapitel 2 und 3 vorstellen.

Haben wir auf die in diesem Abschnitt beschriebene Weise einen topologischen Raum konstruiert, so stellt sich als Nächstes, ähnlich wie im Fall von Tilings in Abschnitt 1.2. die Frage der Vergleichbarkeit, diesmal von Tilingräumen. Da die Struktur eines Tilingraumes wesentlich komplizierter ist als die eines einzelnen Tilings, gibt es hier mehr Vergleichskriterien als die beiden in Abschnitt 1.2. für Tilings erwähnten. Je nachdem, wie "genau" wir die Räume vergleichen wollen, können wir uns für ein geeignetes Kriterium entscheiden.

1.4. Klassifikation von Tilingräumen

Beim Aufstellen der topologischen Invarianten hatten wir gefordert, dass, falls zwei topologische Räume homöomorph sind, deren topologische Invarianten identisch bzw. isomorph sein sollen. Homöomorphie stellt daher sicher ein erstes Vergleichskriterium von Tilingräumen dar. Spezialisieren wir den Begriff der Homöomorphie aus Abschnitt B.1.3 auf unseren Fall, so erhalten wir:

Definition 1.24

Seien Ω_1, Ω_2 Tilingräume. Eine Abbildung $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ heißt Homöomorphismus zwischen Ω_1 und Ω_2 wenn f stetig und bijektiv ist und die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig ist. Ω_1 und Ω_2 heißen homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ gibt.

Da das Bild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen ist, erhält ein Homöomorphismus die Topologie eines Tilingraumes; über die Tilings, die im Raum enthalten sind, wird jedoch keine Aussage gemacht, diese Information kann unter einem Homöomorphismus verloren gehen.

Haben wir nun einen Tilingraum Ω , eine Gruppe G und eine Gruppenwirkung \mathcal{T} gegeben, so ordnet \mathcal{T} nach Definition 1.20 jedem $g \in G$ eine Abbildung $f_g : \Omega \mapsto \Omega$ zu. Damit können wir ein etwas strengeres Vergleichskriterium formulieren, die **topologische Konjugiertheit**.

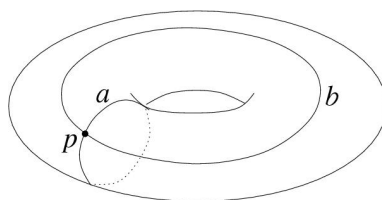


Abbildung 1.8.: a und b sind Repräsentanten der Homotopieklassen geschlossener Wege im Torus.

Definition 1.25

Seien Ω_1, Ω_2 Tilingräume und $(\Omega_1, \mathcal{T}_1), (\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ topologische dynamische Systeme. Die Systeme heißen topologisch konjugiert, wenn es zu jedem Paar $\omega_1 \in \text{Im}(\mathcal{T}_1), \omega_2 \in \text{Im}(\mathcal{T}_2)$ von Abbildungen einen Homöomorphismus $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ gibt, welcher mit den Abbildungen ω_1 und ω_2 kommutiert, d.h. für jedes Tiling $T \in \Omega_1$ gilt die Beziehung $f(\omega_1(T)) = \omega_2(f(T))$.

Topologische Konjugiertheit erhält also neben der Topologie der zugrundeliegenden Räume auch die dynamischen Eigenschaften der zugehörigen dynamischen Systeme. Betrachten wir als Beispiel zwei Tilingräume mit den Abbildungen ω_1 und ω_2 , welche jedes Tiling in Ω_1 bzw. Ω_2 um $t \in \mathbb{R}^d$ verschieben. Sind die dadurch definierten dynamischen Systeme topologisch konjugiert, so gilt $f(T - t) = f(T) - t$.

Ein noch strengeres Äquivalenzkriterium stellt schließlich die Forderung dar, dass die gegenseitige lokale Ableitbarkeit zweier Tilings unter einem Homöomorphismus erhalten bleibt, diese wollen wir als lokale Äquivalenz bezeichnen:

Definition 1.26

Wir wollen zwei Tilingräume Ω_1, Ω_2 als **lokal äquivalent** bezeichnen, wenn sie topologisch konjugiert sind und der zugehörige Homöomorphismus $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ lokal ist und damit insbesondere die gegenseitige lokale Ableitbarkeit erhält, d.h. sind zwei Tilings $T, T' \in \Omega_1$ gegenseitig lokal ableitbar, so sind es auch ihre Bilder $f(T), f(T') \in \Omega_2$.

1.5. Die Lokale Struktur von Ω_T

Von den in Abschnitt 1.3.1. genannten bzw. in Abschnitt B.2.2., B.2.3. und B.3. definierten topologischen Invarianten sind Homologie- bzw. Kohomologiegruppen im Allgemeinen diejenigen, welche einer expliziten Berechnung am leichtesten zugänglich sind. Kennt man jedoch die lokale Struktur eines topologischen Raumes, d.h. kann man Aussagen über seine ϵ -Umgebungen machen, so lassen sich z.B. auch Aussagen über (geschlossene) Pfade treffen, womit wir z.B. die Fundamentalgruppe in vielen Fällen "anschaulich" bestimmen können, wie man am Beispiel des zweidimensionalen Torus' sieht (Abbildung 1.8.).

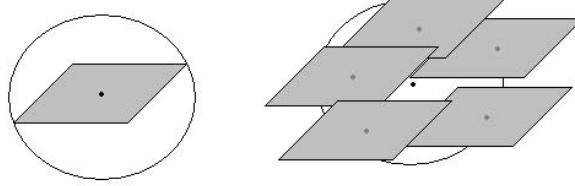


Abbildung 1.9.: Beispiel: Das graue Tile kann stetig innerhalb der Kreisscheibe verschoben werden.

Hier gibt es für jeden Basispunkt P zwei geschlossene Wege a und b , welche sich nicht durch eine Homotopie ineinander überführen lassen. Diese werden durch ganzzahlige Faktoren parametrisiert, da es ja keine Rolle spielt, ob man einen geschlossenen Weg z.B. mehrfach umläuft. Für den zweidimensionalen Torus T^2 gilt also $\pi_1(T^2, P) = \mathbb{Z}^2$. Da der Torus wegzusammenhängend ist, ist die Wahl des Basispunktes unerheblich (siehe Abschnitt B.2.2.) und wir sprechen dann einfach von *der* Fundamentalgruppe des Torus'.

In diesem Kapitel wollen wir uns nun Gedanken über die Struktur der ϵ -Umgebungen in Ω_T machen, wobei wir stets annehmen wollen, dass T repetitiv ist, das dynamische System (Ω_T, \mathbb{R}^d) also minimal ist.

Sei T' ein beliebiges Tiling in Ω_T und $\epsilon > 0$. Wir betrachten das Patch, welches innerhalb einer Kugel vom Radius $1/\epsilon$ um den Ursprung liegt, im Fall von zweidimensionalen Tilings also innerhalb eines Kreises. Die Situation ist in Abbildung 1.9. vereinfacht dargestellt für den Fall, dass das Patch ein einzelnes Tile ist.

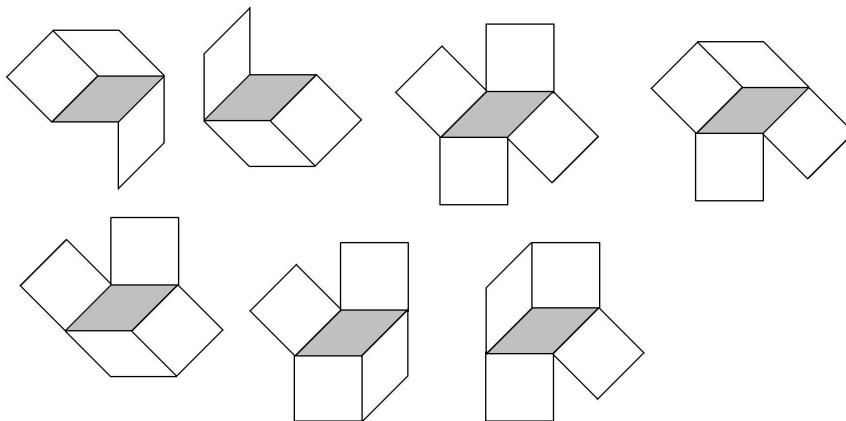


Abbildung 1.10.: Es gibt zum vorgegebenen Radius sieben Möglichkeiten, das Tile zu erweitern, Ω_T besteht also lokal aus sieben "Scheiben".

Die Tilings in der ϵ -Umgebung von T' können nun all diejenigen sein, die dasselbe Patch enthalten, eventuell um eine Strecke $r < \epsilon$ gegenüber seiner Lage in T' verschoben (siehe Abbildung 1.9., rechts), dies sind insbesondere diejenigen Tilings $T \in \mathcal{O}(T')$, für die $T = T' + r$ gilt. Neben diesen Tilings gibt es jedoch zusätzlich eine Anzahl diskreter Möglichkeiten, wie ein Tiling in der ϵ -Umgebung von T' aussehen kann, nämlich alle möglichen Erweiterungen des Patches außerhalb der ϵ -Umgebung. Wir haben dies in Abbildung 1.10. für den Fall des Ammann-Beenker-Tilings illustriert: Um die graue Raute zu erweitern, gibt es sieben Möglichkeiten (unter Erweiterung verstehen wir hier das Anlegen von weiteren Tiles, welche eine Kante mit der Raute teilen).

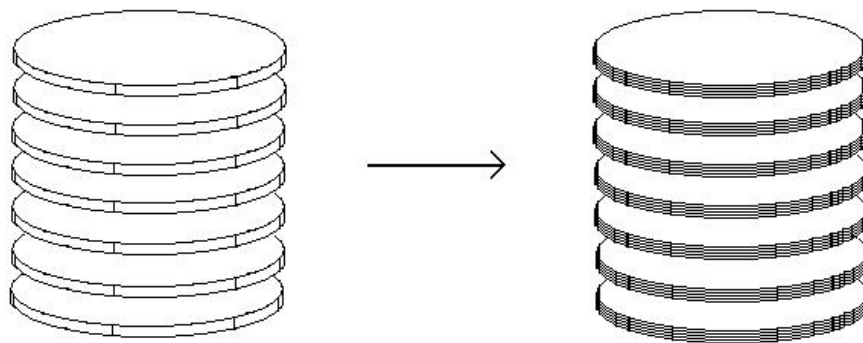


Abbildung 1.11.: ϵ -Umgebung von Ω_T beim oktagonalen Tiling

Damit besteht die ϵ -Umgebung aus sieben Scheiben: Die Position innerhalb einer Scheibe gibt die Lage der Raute bezüglich des Ursprunges an, die Wahl der Scheibe gibt an, welche Erweiterung des Tiles vorgenommen wird. Die in Abbildung 1.10. dargestellten erweiterten Patches lassen sich dann natürlich weiter erweitern, so dass die Scheiben immer feiner unterteilt werden, bis man schließlich (nach unendlich vielen Unterteilungen bzw. für $\epsilon \rightarrow \infty$) den kompletten Tilingraum erhält (Abb.1.11.)

Betrachten wir nun eine Aneinanderlegung von ϵ -Umgebungen. Bleiben wir beim Übergang von einer Umgebung zur nächsten in derselben Scheibe (siehe Abbildung 1.12.), so erfolgt der Übergang stetig, d.h. wir haben einen Pfad. Daraus folgt dann aber, dass die Pfade in Ω_T genau die Orbits sind, denn bleiben wir in derselben Scheibe, so verschieben wir das ursprüngliche Patch ja nur. Wir haben also gezeigt:

Satz 1.27

Die Orbits der in Ω_T enthaltenen Tilings sind Homotopieklassen der geschlossenen Pfade in Ω_T . \square

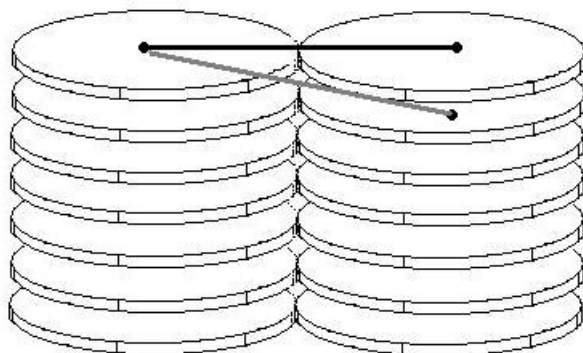


Abbildung 1.12.: Übergang zwischen zwei ϵ -Umgebungen: Stetiger Übergang (oberer Weg) und unstetiger Übergang (unterer Weg).

Die Übergänge zwischen zwei Scheiben sind unstetig; daraus folgt, dass zwei Orbits im Allgemeinen nicht ineinander homotopierbar sind. Mit Definition B.11 folgt nun leicht der folgende Korollar:

Korollar 1.28

Der Raum Ω_T ist zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass Ω_T zusammenhängend ist, da es eine wegzusammenhängende Menge M gibt, welche dicht in Ω_T liegt (dies ist wegen der Minimalität von (Ω_T, \mathbb{R}^d) genau der Orbit von T). Die einzigen Pfadkomponenten in Ω_T (also die möglichen stetigen Verschiebungen) sind nach unseren Überlegungen aber die Orbits und da diese nicht ineinander homotopierbar sind, kann Ω_T nicht wegzusammenhängend sein. \square

Da Wegzusammenhang notwendig für einfachen Zusammenhang ist (Definition B.11), ist Ω_T natürlich auch nicht einfach zusammenhängend.

1.6. Topologische Invarianten von Ω_T

Wir wollen mit unseren Vorarbeiten im letzten Abschnitt in den nachfolgenden Abschnitten Aussagen über Fundamentalgruppe, Homotopiegruppen sowie Homologie- und Kohomologiegruppen von Tilingräumen machen. Dabei wollen wir uns aus auf den Fall $\Omega = \Omega_T$, (T repetitiv) beschränken, da wir in den für uns relevanten Fällen nur topologische Invarianten dieses Tilingraumes zu bestimmen haben.

1.6.1. Fundamentalgruppe und höhere Homotopiegruppen

Wir wollen zunächst die Fundamentalgruppe sowie die höheren Homotopiegruppen von Ω_T betrachten. Wegen Korollar 1.28 macht es keinen Sinn, von **der** Fundamentalgruppe bzw. **der** höheren Homotopiegruppe zu sprechen, da wir nicht annehmen dürfen, dass die Fundamentalgruppe von der Wahl des Basispunktes unabhängig ist. Es geht nun also darum, für jeden Punkt x_0 in Ω_T die Anzahl der Homotopieklassen geschlossener, k -dimensionaler Pfade mit $k > 0$ durch x_0 zu bestimmen. Wir hatten in Abschnitt 1.5. gesehen, dass die Orbits mit den Scheiben in Abbildung 1.11. zu assoziieren sind. Diese Scheiben sind nun offensichtlich kontrahierbar:

Satz 1.29

Für jedes $T \in \Omega_T$ ist $\mathcal{O}(T)$ kontrahierbar.

Beweis. Als Ausgangspunkt für die Kontraktion wählen wir $T \in \mathcal{O}(T)$. Für jedes T' in $\mathcal{O}(T)$ gibt es nach Definition ein $t \in \mathbb{R}^d$ mit $T' = T + t$. Die Abbildung $h(t, k) = T + (1 - k) \cdot t$ ist nun eine Homotopie mit $h(t, 0) = T'$ und $h(t, 1) = T$ (vgl. den Beweis zu Proposition 1.13), damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Wollen wir geschlossene Pfade in den Raum Ω_T abbilden, so müssen diese ganz in den Orbits enthalten sein, da ein Pfad nach Definition stetig ist und ein Übergang zwischen Orbits eine Unstetigkeit bedeuten würde (Abbildung 1.12.). Mittels Proposition 1.14 folgt dann aber unmittelbar, dass die Fundamentalgruppe und die höheren Homotopiegruppen bezüglich jedes Basispunktes trivial sind:

Satz 1.30

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(x_0, \Omega_T)$ sowie die höheren Homotopiegruppen $\pi_k(x_0, \Omega_T)$, $k > 1$ sind für jeden Basispunkt $x_0 \in \Omega_T$ trivial. \square

Diese Aussage ist unabhängig von der Geometrie der Tilings in Ω_T und daher von keinem großen Nutzen. Die nächsten topologischen Invarianten, die wir untersuchen wollen, sind Homologie- bzw. Kohomologiegruppen (siehe Abschnitt B.3.).

1.6.2. Singuläre Homologie- und Kohomologiegruppen eines Tilingraumes

Eine weitere Möglichkeit algebraischer Invarianten sind Homologie- bzw. Kohomologiegruppen. Hier haben wir verschiedene Theorien zur Verfügung (siehe Abschnitte B.3.1., B.3.2., B.3.4.). Da Ω_T keine zelluläre Struktur aufweist, scheidet die zelluläre Theorie aus. Wir betrachten daher zunächst singuläre (Ko-)Homologiegruppen, die für beliebige topologische Räume definiert sind.

Es gilt der folgende Satz [Sa3]:

Satz 1.31

Die nullte singuläre Homologiegruppe $H_0(\Omega_T; \mathbb{Z})$ ist nicht endlich erzeugt, während alle höheren Homologiegruppen $H_k(\Omega_T; \mathbb{Z}), k > 0$ trivial sind.

Beweis. Da nach Satz 1.29 jeder Orbit kontrahierbar ist und die Orbits nicht ineinander homotopierbar sind, können wir Ω_T zu einer Menge aus überabzählbar unendlich vielen unzusammenhängenden Punkten kontrahieren. Nach Definition B.14 gibt es dann überabzählbar unendlich viele 0-Ketten. Da der Raum außerdem keine n -Ketten für $n > 0$ enthält, folgt $C_n = 0$ für $n > 0$ und damit $H_k(\Omega_T; \mathbb{Z}) = 0$ für $k > 0$ \square

Für die singuläre Kohomologie gilt dasselbe Ergebnis. Aus Satz B.18 erhalten wir unmittelbar $H^k(\Omega_T; \mathbb{Z}) = 0, k > 0$. Etwas mehr technischen Aufwand benötigt die Berechnung von $H^0(\Omega_T; \mathbb{Z})$, da die entsprechende Homologiegruppe nicht endlich erzeugt und Satz B.18 daher nicht anwendbar ist. Wir bemerken dazu lediglich, dass falls C_0 nicht endlich erzeugt ist, die entsprechende Kokettengruppe $C^0 = \text{Hom}(C_0; \mathbb{Z})$ ebenfalls nicht endlich erzeugt sein kann. Analog zu Satz 1.31 gilt also:

Satz 1.32

Die nullte singuläre Kohomologiegruppe $H^0(\Omega_T; \mathbb{Z})$ ist nicht endlich erzeugt, während alle höheren Kohomologiegruppen $H^k(\Omega_T; \mathbb{Z}), k > 0$ trivial sind. \square

Dieses Ergebnis ist wiederum unabhängig von der Geometrie der Elemente in Ω_T und daher für unsere Berechnungen nutzlos.

1.6.3. Čech-Kohomologiegruppen eines Tilingraumes

Die erfolgversprechendste topologische Invariante für unsere Zwecke stellt die Čech-Kohomologie dar. Hier wollen wir uns ausschließlich mit den Kohomologiegruppen beschäftigen, da diese rechnerisch einfacher zu bestimmen sind als die zugehörigen Homologiegruppen, weil sie ein besonderes Verhalten unter inversen Limites (siehe Definition B.13) aufweisen. Der nachfolgende Beweis ist etwas abstrakt und erfolgt in mehreren Schritten, die uns zum Hauptsatz über die Čech-Kohomologie von Tilingräumen führen. Wesentliches Beweiselement ist die Tatsache, dass Ω_T homöomorph ist zum inversen Limes einer Sequenz von topologischen Räumen unter stetigen Abbildungen. Der Satz wird hier für allgemeine topologische Räume bewiesen, die diese Eigenschaft aufweisen und in den Kapiteln 2, 3 und 7 dann auf Tilingräume spezialisiert.

Zunächst stellen wir fest, dass nach Definition B.26 die Berechnung der Čech-Kohomologie eines topologischen Raumes X zurückgeführt wird auf die Berechnung der Čech-Kohomologien von offenen Überdeckungen \mathcal{U}_i von X , welche in Definition B.24 eingeführt wurden.

Es geht nun also darum, eine geeignete Menge offener Überdeckungen von X zu finden, deren direkter Limes möglichst einfach berechnet werden kann. Lässt sich X als inverser Limes geeigneter topologischer Räume K_i unter stetigen Abbildungen f_i darstellen (d.h. X ist homöomorph zu einem solchen inversen Limes), so lassen sich derartige Überdeckungen folgendermaßen konstruieren [Sa3]:

Zunächst wollen wir fordern, dass die Räume K_i "minimal" sind. Sie sollen also nur die Punkte beinhalten, die auch wirklich in einem Element des inversen Limes' auftreten (d.h. K_0 soll z.B. nur aus Punkten bestehen, die Bild eines Elementes $x_1 \in K_1$ unter f_1 sind). Ist dies nicht der Fall, so gehen wir zu Räumen \tilde{K}_i über, die diese Bedingung erfüllen, ohne dass sich am inversen Limes etwas ändert. Mit dieser Bedingung stellen wir sicher, dass für jede stetige Abbildung $f_i : K_i \mapsto K_{i-1}$ jede offene Menge U_{i-1} in K_{i-1} Bild einer offenen Menge $f_i^{-1}(U_{i-1})$ in K_i ist. Andererseits wird aber durch jede stetige Abbildung f_i jede offene Menge im Raum K_i auf eine offene Menge in K_{i-1} abgebildet. Damit folgt dann die nachfolgende Proposition:

Proposition 1.33

Sei X ein topologischer Raum, welcher sich als inverser Limes von topologischen Räumen \tilde{K}_i unter stetigen Abbildungen f_i darstellen lässt. Dann gibt es topologische Räume K_i , deren inverser Limes unter den Abbildungen f_i homöomorph zu X ist und für die gilt: Für jede offene Überdeckungen \mathcal{U}'_{i-1} eines der Räume K_{i-1} ist $f_{i-1}^{-1}(\mathcal{U}'_{i-1})$ eine offene Überdeckung des Raumes K_i . \square

Sei jetzt \mathcal{U}'_{i-1} eine offene Überdeckung des Raumes K_{i-1} . Indem wir \mathcal{U}'_{i-1} geeignet verfeinern (siehe Abschnitt B.3.4.), können wir eine gute offene Überdeckung \mathcal{U}_{i-1} von K_{i-1} erhalten. Nach Proposition 1.28 ist dann $f_{i-1}^{-1}(\mathcal{U}'_{i-1})$ eine offene Überdeckung von K_i , diese ist aber im allgemeinen keine gute offene Überdeckung. Durch geeignete Verfeinerung können wir daraus jedoch wieder eine gute offene Überdeckung konstruieren, diese bezeichnen wir mit \mathcal{U}_i . Es gilt also [Sa3]:

Proposition 1.34

Sei X wie in Proposition 1.33. Dann gibt es gute offene Überdeckungen \mathcal{U}_i , $i = 1, 2, \dots$ der topologischen Räume K_i , $i = 1, 2, \dots$ derart, dass jedes \mathcal{U}_{i+1} Verfeinerung von $f_{i+1}^{-1}(\mathcal{U}_i)$ ist. \square

Mit den natürlichen Projektionen $\pi_n : X \mapsto K_n$ können wir dann offene Überdeckungen $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ von X konstruieren, indem wir $\mathcal{V}_n := \pi_n^{-1}(\mathcal{U}_n)$ definieren. Mittels dieser Überdeckungen können wir nach Definition B.26 die Čech-Kohomologie von X darstellen als

$$\check{H}^*(X, \mathbb{Z}) = \varinjlim_{\rho_i} (\check{H}^*(\mathcal{V}_i, \mathbb{Z})). \quad (1.1)$$

Wir benötigen nun einen Hilfssatz [Sa3]:

Hilfssatz 1.35

Seien $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ und $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ wie oben. Dann gilt für alle k mit $0 \leq k \leq n$ die Beziehung $\mathcal{N}(\mathcal{U}_k) = \mathcal{N}(\mathcal{V}_k)$.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass es zu jeder offenen Menge U_k in einer Überdeckung \mathcal{U}_i genau eine offene Menge V_k in \mathcal{V}_i gibt (da die natürliche Projektion bzw. deren inverse Abbildung ein Isomorphismus ist). Sei x nun ein Punkt in K_i , welcher in genau zwei offenen Mengen $U_k, U_l \in \mathcal{U}_i$ liegt. Dann liegt das Bild von x unter π_i^{-1} offensichtlich in genau den beiden Mengen $V_k, V_l \in \mathcal{V}_i$, auf welche die Mengen U_k, U_l unter π_i^{-1} abgebildet werden. Dieselbe Argumentation gilt für Punkte x , welche in genau drei, genau vier, ..., genau k offenen Mengen in \mathcal{U}_i liegen. Nach Definition des Nervs (Definition B.6) gilt daher $\mathcal{N}(\mathcal{U}_k) = \mathcal{N}(\mathcal{V}_k)$ □

Wir kommen jetzt zum zentralen Satz dieser Arbeit über die Čech-Kohomologie, auf dem alle weiteren topologischen Berechnungen aufbauen werden:

Satz 1.36

Sei X ein topologischer Raum, welcher homöomorph ist zum inversen Limes einer Folge von topologischen Räumen K_i , $i = 1, 2, \dots, n$ unter stetigen Abbildungen $f_i : K_i \mapsto K_{i-1}$. Dann gilt für die Čech-Kohomologie von X die Beziehung

$$\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \check{H}^*(\varprojlim_{f_i} K_i; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{f_i^*} (\check{H}^*(K_i; \mathbb{Z})) = \varinjlim_{f_i^*} (H^*(K_i; \mathbb{Z})). \quad (1.2)$$

Die Čech-Kohomologie von X lässt sich also darstellen als direkter Limes der singulären Kohomologien der Räume K_i unter den zu den Abbildungen f_i transponierten Abbildungen f_i^* .

Beweis. Nach Definition B.26 gilt für die Čech-Kohomologie von X die Beziehung

$$\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{\rho_i} (\check{H}^*(\mathcal{U}_i; \mathbb{Z})), \quad (1.3)$$

wobei die Abbildungen ρ_i die kanonischen Einbettungen der Kohomologiegruppen sind. Wählen wir für die Überdeckungen nun speziell die Überdeckungen \mathcal{V}_i aus, so stellen wir zunächst fest, dass die kanonischen Einbettungen zwischen den \mathcal{V}_i durch die Morphismen f_i gegeben sind. Diese induzieren kanonische Einbettungen zwischen den Kettengruppen. Da wir nun aber an Kohomologiegruppen interessiert sind, müssen wir die transponierten Abbildungen der f_i betrachten. Wir erhalten also

$$\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{f_i^*} (\check{H}^*(\mathcal{V}_i; \mathbb{Z})) \quad (1.4)$$

$$= \varinjlim_{f_i^*} (H^*(\mathcal{N}(\mathcal{V}_i); \mathbb{Z})) \quad \text{nach Definition B.24} \quad (1.5)$$

$$= \varinjlim_{f_i^*} (H^*(\mathcal{N}(\mathcal{U}_i); \mathbb{Z})) \quad \text{nach Hilfssatz 1.35} \quad (1.6)$$

$$= \varinjlim_{f_i^*} (H^*(K_i; \mathbb{Z})) \quad \text{nach Korollar B.27} \quad (1.7)$$

□

Satz 1.36 ermöglicht es uns, die Čech-Kohomologie von Ω_T zu berechnen. Dazu muss die Gleichung jedoch erst mit Sinn erfüllt werden, d.h. wir benötigen geeignete topologische Räume K_i und verbindende Morphismen f_i , welche mit den Tilings in Ω_T zusammenhängen.

In zwei Fällen sind diese leicht zu bestimmen: Ist das Tiling durch eine Substitution erzeugt, so tragen die topologischen Räume die Struktur von CW-Komplexen und sind zudem einander geometrisch ähnlich, vom topologischen Standpunkt also gleich, weshalb es dann genügt, einen einzigen Komplex und eine einzige Abbildung zu bestimmen, deren Kohomologie leicht berechnet werden kann [AP]. Diesen Ansatz wollen wir im nächsten Kapitel weiterverfolgen.

Im zweiten Fall, der auf Tilings anwendbar ist, die durch das Projektionsverfahren gewonnen werden können, lassen sich die topologischen Räume K_i aus topologisch-geometrischen Überlegungen gewinnen, indem zunächst singuläre Tilings aus Ω_T ausgeschlossen und anschließend durch Limes-Bildung wieder berücksichtigt werden. Wir berechnen dann statt der Kohomologie von Ω_T die Kohomologie eines zu Ω_T homotopieäquivalenten Objektes. Als geeignetes Objekt hierzu stellt sich das Komplement eines Arrangements von affinen Tori A in einem höherdimensionalen Torus T^N heraus [Ka]. Diesen Weg wollen wir in Kapitel 3 beschreiten.

Schließlich wollen wir in Kapitel 7 noch einen Blick auf den allgemeinen Fall werfen, welcher unabhängig vom jeweiligen Konstruktionsverfahren die Berechnung der Čech-Kohomologie gestattet. Hierzu werden zwar im Allgemeinen unendlich viele Komplexe und verbindende Morphismen benötigt, in vielen Fällen erhalten wir jedoch schon nach endlich vielen Schritten das gewünschte Ergebnis (wie wir anhand der dortigen Rechenbeispiele sehen werden).

2. Die ganzzahlige Čech-Kohomologie von Substitutionstilings

2.1. Konstruktion von Ω_T

Nachdem wir uns im letzten Kapitel mit der Definition und ersten Eigenschaften sowie topologischen Invarianten von Tilingräumen befasst haben, wollen wir in diesem Kapitel eine konkrete Klasse von Tilingräumen konstruieren, welche ausschließlich **Substitutionstilings** enthalten. Dazu müssen wir zunächst erklären, was wir unter einem Substitutionstiling verstehen wollen, dabei orientieren wir uns weitgehend an der Definition in [Fre] bzw. [HL] und beschränken uns dabei wieder auf den Fall, dass Prototiles Repräsentanten von Äquivalenzklassen modulo Translationen sind. Ferner wollen wir nur selbstähnliche Tilings als Substitutionstilings zulassen ¹.

Die eingeführten Begriffe wollen wir jeweils am Beispiel der eindimensionalen Fibonacci-Kette verdeutlichen. Wir beginnen, wie in Kapitel 1 für Tilings, mit der Einführung der grundlegenden Begriffe, wobei zunächst die folgende Definition aus [Fre] übernehmen:

Definition 2.1

Sei $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ eine endliche Menge von Prototiles. Sei ferner $\lambda > 1$ eine reelle Zahl und $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ eine Menge von Patches, so dass für alle $1 \leq k \leq n$ gilt: $\lambda t_k = \bigcup_{t \in P_k} t$, wobei t jeweils ein Tile bezeichne.

Hierdurch wird eine Abbildung ω induziert, die partielle Tilings auf partielle Tilings abbildet. Sei dazu P ein partielles Tiling, dessen Tiles in der Form $t_{i_1} + u_1, t_{i_2} + u_2, \dots$ sind mit $1 \leq i_1, i_2, \dots \leq n$. Diese Abbildung ω ist dann definiert über $\omega(t_{i_1} + u_1, t_{i_2} + u_2, \dots) = (P_{i_1} + \lambda u_1) \cup (P_{i_2} + \lambda u_2) \cup \dots$, wir wollen sie als **Substitutionsabbildung** bezeichnen.

Das Tripel $\mathcal{S} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}, \lambda)$ wollen wir **Substitutionssystem** (oder Substitution) nennen.

Ein Tiling S heißt dann **Substitutionstiling**, falls es für jedes Patch $P \subset S$ eine natürliche Zahl n gibt, so dass $P \subset \omega^n(t_i)$ für irgendein $t_i \in \mathcal{T}$.

Anschaulich besagt die Definition also folgendes: Wir haben zunächst eine endliche Menge \mathcal{P} von Prototiles vorliegen. Jedes Prototile strecken wir um einen vorgegebenen Faktor

¹Für eine Erweiterung auf selbstaffine Tilings siehe z.B. die Bemerkungen in [Fre].

$\lambda > 1$ ². Das so vergrößerte Tile wird daraufhin zerlegt, wobei in der Zerlegung nur Translate von Prototiles aus \mathcal{P} vorkommen dürfen; man spricht dann auch von einem **Prototile erster Ordnung** (oder Supertile erster Ordnung). Wiederholt man diesen Vorgang mit dem Prototile erster Ordnung, so erhält man ein Prototile zweiter Ordnung usw.. Kommt nun jedes Patch in einem vorliegenden Tiling T in irgendeinem Prototile k -ter Ordnung zur Menge \mathcal{T} vor, so ist T ein Substitutionstiling (dieser Substitution). Umgekehrt nennen wir ein beliebiges Tiling S Substitutionstiling, wenn es eine endliche Menge von Prototiles besitzt und es einen Faktor λ gibt, so dass die Bedingungen von Definition 2.1 erfüllt sind.

Die Menge aller Substitutionstilings zu einer vorgegebenen Abbildung ω und einer vorgegebenen Prototile-Menge \mathcal{P} bezeichnen wir als **Substitutionssystem** Ω_S , von welcher wir, nachdem wir sie mit einer Topologie versehen haben, zeigen werden, dass es sich um einen Tilingraum handelt, den Tilingraum Ω_S des Substitutionssystems S .

Beispiel 2.2 (Substitutionsabbildung der Fibonacci-Kette)

Ein Ausschnitt aus der eindimensionalen Fibonacci-Kette sieht folgendermaßen aus:

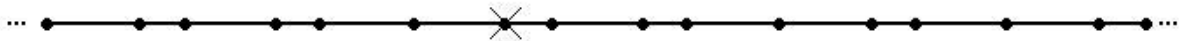


Abbildung 2.1.: Die Fibonacci-Kette

Dabei markiert das Kreuz den Ursprung. Die beiden Prototiles, die bei der Fibonacci-Kette üblicherweise mit 0 und 1 bezeichnet werden, sind



Abbildung 2.2.: Prototiles der Fibonacci-Kette

Die Substitutionsabbildung ω , angewandt auf die Prototiles, ist gegeben durch:

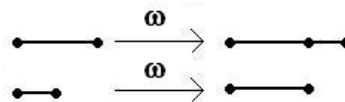


Abbildung 2.3.: Substitution der Fibonacci-Kette

²bezüglich eines vorgegebenen Punktes

Der Nachweis, dass die Fibonacci-Kette ein Substitutionstiling zu der vorgegebenen Substitutionsabbildung (aus Abbildung 2.3.) und der Prototilemenge (aus Abbildung 2.2.) ist, geschieht dadurch, dass wir die Substitution kontinuierlich auf die Prototiles anwenden und überprüfen, ob jedes Patch im Tiling in einem Prototile k -ter Ordnung enthalten ist. Für den Fall von Patches aus zwei Tiles bedeutet das:

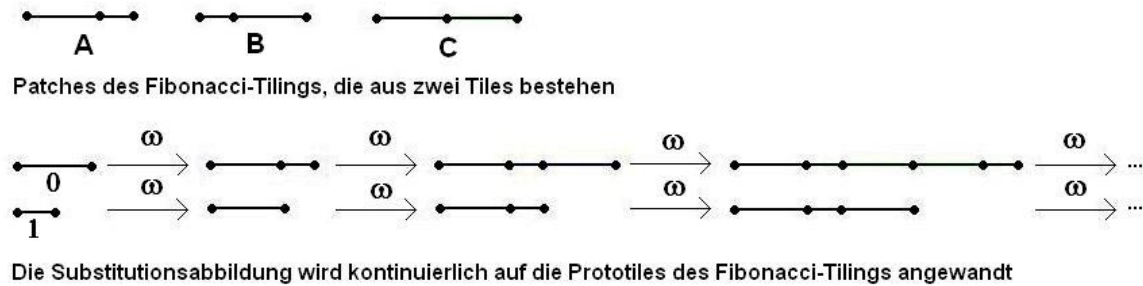


Abbildung 2.4.: Nachweis der Substitutionseigenschaft der Fibonacci-Kette

Wir erkennen, dass Patch A in $\omega(0)$, $\omega^2(1)$ und $\omega^3(1)$ enthalten ist, während B in $\omega^2(0)$, $\omega^3(0)$ und $\omega^3(1)$ und C in $\omega^3(0)$ enthalten ist. Für größere Patches erfolgt der Nachweis analog. Damit können wir Beispiele für weitere Substitutionstilings der hierdurch definierten Substitutionsspezies angeben. Dies sind z.B.:

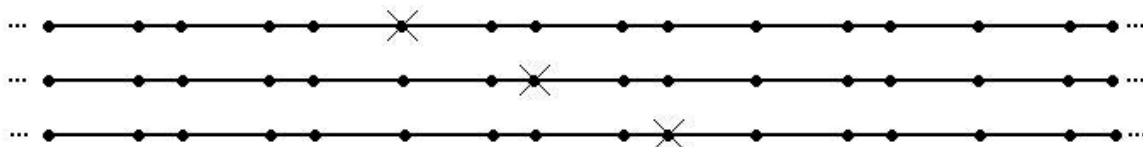


Abbildung 2.5.: Elemente der lokalen Isomorphieklasse der Fibonacci-Kette

Um die Substitutionsabbildung einer Berechnung zugänglich zu machen, verwenden wir die Tatsache, dass sie sich durch eine Matrix darstellen lässt. Damit lassen sich dann bestimmte Eigenschaften der Substitutionsabbildung leicht aus ihrer Darstellungsmatrix bestimmen [AP], [Fre], [Sal]:

Definition 2.3

Die quadratische Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1\dots n}$ wobei m_{ij} gleich der Anzahl der Prototiles vom Index i nach Anwendung von ω auf das Prototile vom Index j ist, bezeichnen wir als die zu ω gehörige **Substitutionsmatrix**. Ist M eine primitive Matrix, d.h. gibt es ein $n \in \mathbb{N}$,

so dass M^n nur positive ganzzahlige Einträge enthält, so bezeichnen wir ω als **primitive Abbildung**.

Unter Primitivität können wir anschaulich die Tatsache verstehen, dass es zu jedem Prototile eine natürliche Zahl k gibt, so dass im Prototile k -ter Ordnung ein Translat jedes Prototiles enthalten ist.

Beispiel 2.4

Im Fall der Fibonacci-Kette können wir die Substitutionsmatrix aus Abbildung 2.3. bestimmen. Im ersten Prototile erster Ordnung ist ein Prototile 1 und ein Prototile 2 enthalten, im zweiten Prototile erster Ordnung ist ein Prototile 1 und kein Prototile 2 enthalten. Wir haben also

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Matrix M und damit auch die Substitution primitiv.

Die Matrix M in Beispiel 2.4 hat den Rang zwei, ist also invertierbar. Dass dies kein Zufall ist, zeigt die nachfolgende Proposition [AP]:

Proposition 2.5

Ist die in Definition 2.1 definierte Abbildung ω bijektiv, so enthält Ω_S keine periodischen Tilings. Dies ist nach Definition 2.3 genau dann der Fall, wenn M maximalen Rang hat.

Beweis. Sei $T \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Wir betrachten eine Kugel im \mathbb{R}^d vom Radius r . Dann gibt es ein $n > 0$ so dass $diam(t_i) > \|v\|/\lambda^n$. Für alle Tiles t_i in T . Sei t ein beliebiges Tile in $\omega^{-n}(T)$. wegen $diam(t) > \lambda^{-n}\|v\|$ berühren sich t und das translatierte Tile $t + \lambda^{-n}\|v\|$. Da die von uns betrachteten Tiles nach Definition beschränkt bezüglich der euklidischen Metrik sind, können die beiden Tiles nicht identisch sein, d.h. es gilt $t \neq t + \lambda^{-n}\|v\|$ oder $\omega^{-n}(T) \neq \omega^{-n}(T) + \lambda^{-n}\|v\|$. Wegen $\omega^{-n}(T) + \lambda^{-n}\|v\| = \omega^{-n}(T + v)$ erhält man daraus unmittelbar $T \neq T + v$, d.h. T ist nicht periodisch. \square

Da wir in dieser Arbeit ausschließlich an aperiodischen Tilings interessiert sind, werden wir im Folgenden die Bijektivität von ω stets voraussetzen. Daraus ergibt sich ein Satz, der für die Bestimmung der Abbildung ω aus einem vorgegebenen Tiling von großer Wichtigkeit ist [Fre], [So2]:

Satz 2.6

Sind alle Elemente in Ω_S aperiodisch, d.h. ist ω nach Proposition 2.5 bijektiv, so ist jedes Tiling eindeutig deflatierbar.

Dies bedeutet nichts anderes, als dass wir aus einem Tiling mit bijektiver Substitutionsabbildung in eindeutiger Weise alle Supertiles bestimmen können.

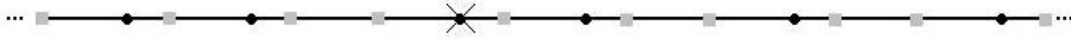


Abbildung 2.6.: Deflation der Fibonacci-Kette

Beispiel 2.7

Wir betrachten wieder die Fibonacci-Kette. Die Matrix M aus Beispiel 2.4 hat die Determinante -1 , daher ist die Matrix über \mathbb{Z} invertierbar und es gibt nach Satz 2.6 für jedes Tiling aus der Substitutionsspezies der Fibonacci-Kette eine eindeutige Deflation; diese ist (für ein willkürlich gewähltes Element aus Ω_S) in Abbildung 2.6. zu sehen (für den Fall der Zerlegung in Prototiles erster Ordnung, die grauen Quadrate stellen die Vertices der Prototiles erster Ordnung dar).

Unsere bisherige Definition einer Substitution ist nun insofern etwas speziell, dass sie einige quasiperiodische Tilings, welche durch eine Substitution gewonnen werden können, ausschließt. Ein Beispiel stellt das Ammann-Beenker-Tiling (Abbildung 1.4.) dar; die Anwendung der Substitution auf ein Prototile t ist in Abbildung 2.7. dargestellt. Nach Definition 2.1 gibt es keine passende Abbildung ω , so dass $\omega(t)$ ähnlich zu t wäre. Anschaulich gesehen macht es jedoch trotzdem Sinn, von einem Substitutionstiling zu sprechen, da alle Bedingungen von Definition 2.1 erfüllt sind, abgesehen von der Forderung $\lambda t_k = \bigcup_{t \in P_k} t$ (denn die Prototiles erster Ordnung überlappen sich). Um dies zu beheben, wollen wir den Begriff des Substitutionstilings etwas ausweiten, wie z.B. in [HL] dargestellt:

Definition 2.8

Seien \mathcal{T} und λ wie in Definition 2.1. $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sei nun eine Menge von Patches derart, dass $\lambda t_k \subseteq \bigcup_{t \in P_k} t$ für alle $1 \leq k \leq n$.

Ferner soll für alle Tiles r in jedem Patch P_i die Bedingung $\text{supp}(r) \cap \text{supp}(\lambda \cdot t_i) \neq \emptyset$ erfüllt sein (das Patch darf also keine "unnötigen" Tiles enthalten).

Außerdem soll die folgende Bedingung erfüllt sein: Jedes Tile s in jedem Patch P_i ist auch im Patch P_j enthalten für alle Prototiles T_j , welche s berühren (diese Bedingung garantiert, dass sich Prototiles erster Ordnung nur so überlappen dürfen, dass der "Überlapp" (also die Schnittmenge der Patches) einem kompletten Prototile entspricht).

Damit lässt sich dann eine Substitutionsabbildung ω wie in Definition 2.1 definieren und alle nachfolgenden Definitionen übertragen sich wörtlich.

Ohne die Erweiterung in Definition 2.8 ließe sich das Ammann-Beenker-Tiling z.B. nur indirekt durch eine Substitution erhalten, indem man die Quadrate in Dreiecke zerlegt (also die Menge der Prototiles erhöht und somit zu einem anderen Substitutionssystem wechselt), auf welche man dann eine Substitution nach Definition 2.1 anwendet.

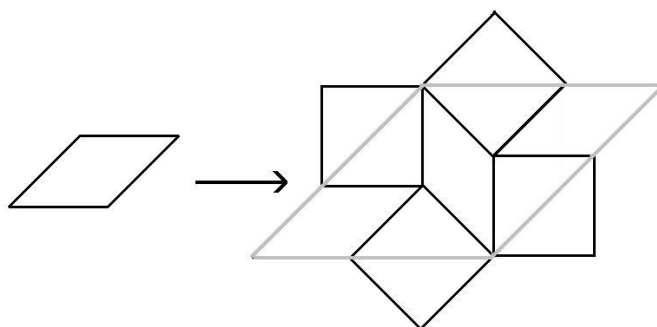


Abbildung 2.7.: Zur Definition eines erweiterten Substitutionssystems

Dies wäre natürlich möglich, allerdings würden sich dadurch die Berechnungen wesentlich verkomplizieren: Bei unserem zweiten Rechenbeispiel würden wir z.B. statt 24 Prototiles 72 Prototiles benötigen.

Nach Einführung der wichtigsten Begriffe ist es nun unser Ziel, zu zeigen, dass Ω_S , versehen mit einer geeigneten Metrik, ein Tilingraum nach Definition 1.16 ist, falls die Substitution primitiv ist:

Satz 2.9

Sei S ein Substitutionstiling und die Menge Ω_S sei die in Definition 2.1 bzw. Definition 2.8 definierte zugehörige Substitutionsspezies, mit der Topologie versehen, welche aus der lokalen Metrik entsteht. Ist die Substitution, welche S erzeugt, primitiv, so gilt $\Omega_S = \Omega_T$ für jedes Tiling $T \in \Omega$ d.h. der Orbit jedes Tilings liegt dicht in Ω_S .

Für den Beweis benötigen wir einen Hilfssatz [Sa1]:

Hilfssatz 2.10

Seien T_1, T_2 Tilings in Ω_S , wobei die Substitution bijektiv und primitiv sei. Dann kommt jedes Patch $P_1 \subset T_1$ auch in T_2 vor und jedes Patch $P_2 \subset T_2$ auch in T_1 .

Beweis. Die Beweisidee stammt aus [Sa1], wir wollen den Beweis hier ausführen. Da T_1 Substitutionstiling ist, gibt es nach Definition 2.1 ein k , so dass $P_1 \subset \omega^k(t)$ für irgendein Prototile t . Es genügt also zu zeigen, dass für jedes Prototile t und jedes $k \in \mathbb{N}$ ein r existiert, so dass $\omega^k(t)$ in einer Kugel mit Radius r in T_2 vorkommt - tatsächlich wollen wir zeigen, dass es ein r gibt, so dass $\omega^k(t)$ in jeder Kugel mit Radius r in T_2 vorkommt. Für $k = 0$ ist einfach zu zeigen, dass ein solches r für jedes beliebige Prototile existiert. Dies folgt aber aus der Primitivität der Substitution: Es gibt ein s , so dass $\omega^s(t')$ für jedes beliebige Prototile t' das Prototile t beinhaltet. Ist ω bijektiv, so existiert nach Satz 2.6 eine eindeutige Deflation von T_2 in Prototiles s -ter Ordnung, wobei in jedem dieser Patches das Prototile t enthalten ist. Das Maximum der Radien dieser Patches ist das gesuchte r .

Betrachten wir nun $\omega^k(t)$ für ein beliebiges k . Zerlegen wir dazu T_2 in Prototiles k -ter Ordnung, so gibt es wegen der Selbstähnlichkeit und der Primitivität ein $l > k$, so dass $\omega^k(t) \subset \omega^l(t'')$ für jedes beliebige Prototile t'' gilt. Eine Zerlegung von T_2 in Prototiles l -ter Ordnung ergibt dann auf dieselbe Weise wie für $k = 0$ den gesuchten Radius. Vertauscht man die Rollen von T_1 und T_2 , so ist auch der zweite Teil des Satzes gezeigt. \square

Beweis von Satz 2.9. Wir nehmen an, dass die Substitution primitiv und bijektiv ist. Damit folgt dann aus der Definition der Menge Ω_T als lokale Isomorphieklasse und Hilfssatz 2.10 unmittelbar Satz 2.9. Alternativ könnten wir für den Beweis von Satz 2.9 auch Korollar 1.23 heranziehen, dieser Weg wird in [AP] beschriftet. \square

Wir haben damit gezeigt, dass jede Substitutionspezies, die durch eine primitive Substitution entsteht, homöomorph zu Ω_T für beliebiges $T \in \Omega_S$ ist. Der Nutzen dieser Überlegungen zeigt sich im nächsten Abschnitt; dort werden wir sehen, dass wir im Fall eines Substitutionstilings auf geometrisch anschauliche Weise eine Folge von topologischen Räumen konstruieren können, deren inverser Limes homöomorph zu Ω_T ist, wodurch wir dann mittels Satz 1.36 die zugehörige Čech-Kohomologie berechnen können.

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir noch eine Eigenschaft von Substitutionstilings definieren, welche für unsere weiteren Betrachtungen von großer Wichtigkeit ist [Sa1]:

Definition 2.11

*Eine Substitution erzwingt den Rand, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle Prototiles n -ter Ordnung dieselben Nachbarn nullter Ordnung haben. Diese Eigenschaft wollen wir auch als **FTB-Eigenschaft** (FTB = Forcing The Border) bezeichnen.*

Beispiel 2.12

Betrachten wir das eindimensionale Fibonacci-Tiling, so stellen wir fest, dass dieses nicht den Rand erzwingt: Egal, wie oft wir die Substitutionsabbildung auf das Prototile 0 anwenden, es gibt immer mehrere Möglichkeiten, das jeweilige Prototile n -ter Ordnung über seinen Rand hinaus zu erweitern (0 kann erweitert werden zu 001, 101, 100. $\sigma(0) = 01$ kann erweitert werden zu 0010, 1010, 0011 usw.).



Abbildung 2.8.: Prototile a) ohne Kragen b) mit Kragen der Fibonacci-Kette

Erzwingt die Substitution den Rand nicht, so ist ein Übergang zu **Tiles mit Kragen** möglich.

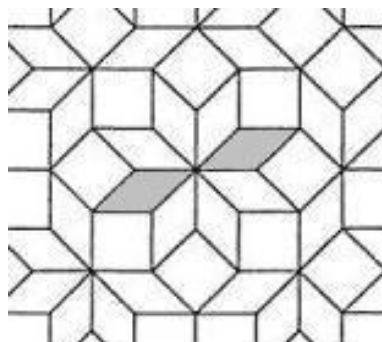


Abbildung 2.9.: Prototiles mit Krägen beim Ammann-Beenker-Tiling: Die grau unterlegten Prototiles sind nicht mehr identisch, da ihre Krägen sich unterscheiden.

Darunter wollen wir Tiles verstehen, von denen bekannt ist, welche Tiles ihnen benachbart sind. Diese benachbarten Tiles werden dann als Krägen bezeichnet (siehe Abbildung 2.8.). Fügt man diesem Krägen auf dieselbe Weise einen weiteren Krägen hinzu usw., so erhält man induktiv ein Tile mit k Krägen, $k \in \mathbb{N}$. Mit $T^{(k)}(t)$ wollen wir das Patch bezeichnen, das man erhält, wenn man das Tile gemeinsam mit seinen k Krägen betrachtet, es gilt also $T^{(k)}(t) := T^{(k-1)}(t) \cup \{t'\}$ ist adjazent zu einem Element aus $T^{(k-1)}(t)$.

Die in Kapitel 1 definierten Äquivalenzklassen von Tiles kann man jetzt unterteilen, indem man den Tiles Markierungen auferlegt: Zwei Prototiles, die in derselben Äquivalenzklasse liegen, bekommen genau dann dieselbe Markierung, wenn sie denselben Krägen haben (siehe Abbildung 2.9.) - dies lässt sich natürlich auch für k Krägen entsprechend durchführen.

Es gilt jetzt der folgende wichtige Satz [Sal]:

Satz 2.13

Sei T ein Substitutionstiling. Dann können wir die Menge der Prototiles durch eine Menge von Prototiles mit Krägen ersetzen, ohne dass sich an der Substitutionsspezies etwas ändert. In diesem Fall erzwingt T dann den Rand.

Beweis. Sei P ein beliebiges Patch aus Tiles mit Krägen. Nach Definition 2.1 gibt es dann ein Prototile t (ohne Krägen), so dass P sowie die Krägen in $\omega^k(t)$ enthalten sind. Dies ist natürlich auch dann der Fall, wenn wir t vorher mit einem Krägen versehen, da die Abbildung ω nur nach geometrisch verschiedenen Tiles unterscheidet, nicht nach deren Krägen. Wir haben also gezeigt, dass wir wiederum ein Substitutionssystem vorliegen haben, dessen Tilings geometrisch von denen des ursprünglichen Systems nicht zu unterscheiden sind. \square

Hier haben wir jetzt jedoch zu beachten, dass die Substitutionsmatrix, bezogen auf Tiles mit Krägen, kein Isomorphismus zu sein braucht, selbst wenn das zugehörige Tiling aperiodisch ist. Dies werden wir in Kapitel 7 anhand der Fibonacci-Kette sehen.

2.2. Darstellung von Ω_T durch inverse Limites

Nachdem wir nun die Konstruktion eines Tilingraumes im Falle von Substitutionstilings untersucht haben, wollen wir uns ansehen, wie wir topologische Invarianten von Ω_S bestimmen können. Nach Satz 1.36 benötigen wir dazu eine Darstellung des Raumes Ω_T durch einen inversen Limes und mit Satz 2.9 folgt dann, dass dieser inverse Limes auch den Raum Ω_S darstellt.

Zunächst geben wir die abstrakte Definition derjenigen Komplexe $K_i =: \Gamma_i$ an, die eine Darstellung des Raumes Ω_S (und damit auch von Ω_T) durch inverse Limites gestatten [AP]:

Definition 2.14

Sei \sim_k eine Relation auf der Menge $\Omega_S \times \mathbb{R}^d$, die zwei Elemente $(T_1, u_1), (T_2, u_2) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ genau dann als äquivalent ansieht, wenn $T^{(k)}(t_1) - u_1 = T^{(k)}(t_2) - u_2$ für $u_1 \in t_1 \in T_1$ und $u_2 \in t_2 \in T_2$ gilt. Diese Relation lässt sich zu einer Äquivalenzrelation auf $\Omega \times \mathbb{R}^d$ ergänzen³. Die Menge aller so erhaltenen Äquivalenzklassen wollen wir Γ_k nennen⁴.

Was bedeutet das nun konkret? Sehen wir uns dazu den Fall $k = 0$ in zwei Dimensionen an. Die obige Äquivalenzrelation sagt folgendes aus: Zwei punktierte Tilings⁵ in Ω_S sind als äquivalent anzusehen, wenn ihre Punktierung in denselben Tiles an derselben Stelle liegt. Die Position der Tiles relativ zum Ursprung spielt dabei keine Rolle (siehe Abbildung 2.10.: Die Tilings A und B sind äquivalent).

Fassen wir alle äquivalenten punktierten Tilings in Äquivalenzklassen zusammen, so lassen sich diese Äquivalenzklassen in einer Punktmenge zusammenfassen, d.h. jeder Punkt entspricht einer Äquivalenzklasse Γ_0 (siehe Abbildung 2.10.). Nun kann es natürlich passieren, dass die Punktierung auf einer Kante oder einem Vertex liegt. In diesem Fall gehört die Punktierung zu zwei oder mehr Äquivalenzklassen und dies muss auch in der Menge Γ_0 berücksichtigt werden: Die Menge trägt also eine zelluläre Struktur (siehe Abbildung 2.10., Tiling C).

Die Lage der Äquivalenzklasse im Komplex gibt also an, an welcher Stelle das Tiling der zugehörigen Äquivalenzklasse punktiert ist. Eine Punktierung ist natürlich nur innerhalb der Tiles selbst (oder auf ihren Kanten oder Vertices) möglich; der Komplex Γ_0 sieht demnach aus wie ein Zellkomplex, der aus Prototiles als Zellen besteht (dies gilt, weil wir angenommen hatten, dass die Tiles keine fraktalen Ränder haben).

³Bei unserer Relation gilt die Transitivität im Allgemeinen nicht. Jedoch kann man die Relation zu einer Äquivalenzrelation ergänzen [AP].

⁴und zusätzlich mit einer Quotiententopologie versehen, um Homologie- bzw. Kohomologiegruppen für Γ_k definieren zu können.

⁵Darunter wollen wir Tilings verstehen, bei denen ein Punkt ausgezeichnet wurde. Wir wollen hier annehmen, dass jedes Tiling punktiert werden kann, ohne dass sich am Raum Ω_T etwas ändert.

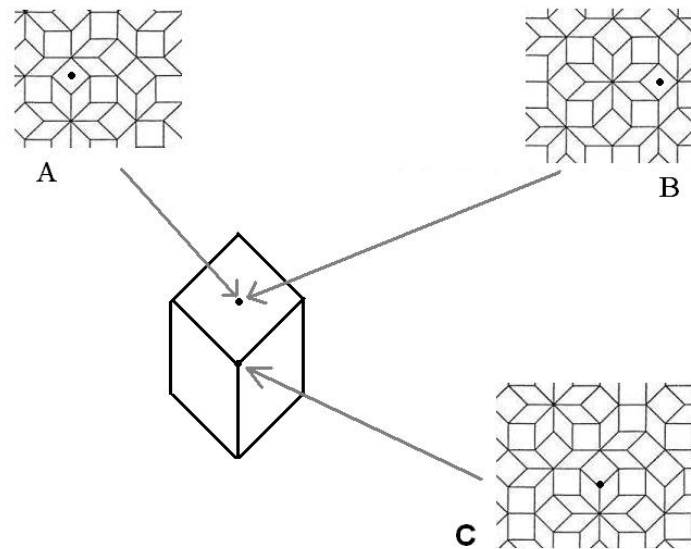


Abbildung 2.10.: Anschauliche Bedeutung des nullten Anderson-Putnam-Komplexes: Die Tilings A und B entsprechen demselben Punkt in Γ_0 . Die Punktierung in C liegt auf einem Vertex, folglich muss auch Γ_0 Vertices besitzen.

Ebenso können wir für Tiles mit einem Kragen, zwei Krägen usw. argumentieren, entsprechend sieht z.B. Γ_1 aus wie ein Zellkomplex, dessen Zellen Prototiles mit einem Kragen sind.

Wie gelangen wir jetzt zum Raum Ω_T ? Fassen wir die Punktierungen als mögliche Positionen des Ursprungs auf, so können wir den Komplex Γ_0 folgendermaßen interpretieren: Jeder Punkt in Γ_0 entspricht allen Tilings in Ω_T , deren Ursprung auf der zur Äquivalenzklasse gehörigen Punktierung liegt. Anschaulich gesagt: Betrachten wir den Komplex Γ_0 , so approximiert er den Raum Ω_T insofern, dass er fordert, dass der Ursprung jedes Tilings in Ω_T in einem der Prototiles (oder auf einer Kante oder einem Vertex) liegen muss.

Dies ist sicher noch nicht die ganze Wahrheit, weil der Komplex Γ_0 natürlich keine Aussagen darüber machen kann, wie das Tiling innerhalb weiterer "Schichten" um den Ursprung herum aussieht. Die Idee ist jetzt folgende: Wir wenden auf die Prototiles die Substitutionsabbildung an und betrachten den Zellkomplex $\Gamma_0^{(1)}$, der entsteht, wenn man die Prototiles erster Ordnung so zusammenklebt, wie die Prototiles nullter Ordnung im Komplex Γ_0 zusammenliegen, d.h. $\Gamma_0^{(1)}$ stellt eine vergrößerte Kopie von Γ_0 dar.

Mit derselben Argumentation wie oben können wir jetzt sagen, dass die Punkte in $\Gamma_0^{(1)}$ denjenigen Tilings entsprechen, deren Ursprung in einem der Prototiles erster Ordnung enthalten ist. Da das Tiling nun aber selbstähnlich ist, sind die Komplexe $\Gamma_0^{(1)}$ und Γ_0 aus topologischer Sicht identisch (die Topologie eines Zellkomplexes unterscheidet ja nicht

nach Größe der Zellen sondern nach Anzahl und relativer Lage). Wiederholen wir dies unendlich oft, so erhalten wir schließlich einen Komplex $\Gamma_0^{(\infty)}$, dessen Punkte dann genau den Ursprüngen aller möglichen Tilings in Ω_S entsprechen.

Betrachten wir nun die Punkte in Γ_0 , welche wir mit x_∞ bezeichnen wollen. Damit haben wir alle Tilings, deren Ursprung in einem der Prototiles liegt. Mit Γ_1 haben wir alle Tilings, deren Ursprung in einem der Prototiles erster Ordnung liegt (diese bezeichnen wir mit $x_{\infty-1}$) usw.

Es läge jetzt nahe, das direkte Produkt der Komplexe zu bilden. Dabei müssen wir aber beachten, dass nicht alle Punkte des direkten Produktes zulässig sind, sondern nur die, die der Lage des Ursprunges in beiden Komplexen Rechnung tragen: Liegt der Ursprung im Komplex Γ_0 in einem Tile t , so muss er natürlich auch in $\Gamma_0^{(1)}$ im Tile t liegen, wenn er der Ursprung ein und desselben Tilings sein soll.

Dies lässt sich mathematisch so ausdrücken: Wir wollen nur diejenigen Paare $(x_\infty, x_{\infty-1})$ von Punkten aus dem direkten Produkt übernehmen, für die $\omega^{-1}(x_{\infty-1}) = x_\infty$ gilt (bzw. $\omega(x_\infty) = x_{\infty-1}$). Man kann das auch so ausdrücken: Die Abbildung ω^{-1} vergisst die zusätzlichen Informationen, die der Komplex $\Gamma_0^{(1)}$ gegenüber Γ_0 beinhaltet.

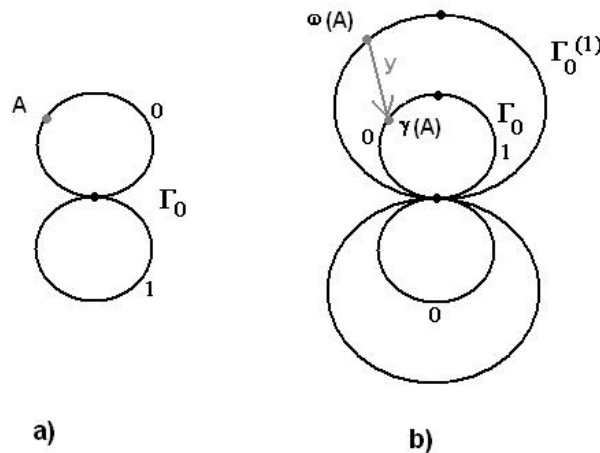


Abbildung 2.11.: a) Der Komplex Γ_0 des Anderson-Putnam-Komplexes b) Der vergrößerte Komplex $\Gamma_0^{(1)}$ nach Anwendung der Abbildung ω auf Γ_0 (großer Komplex) bzw. der Komplex Γ_0 mit zusätzlichen Vertices (kleiner Komplex). Der Punkt A liegt sowohl in a) als auch in b) im Tile 0, gehört daher zum inversen Limes.

Dies muss natürlich auch für die Ursprünge in $\Gamma_0^{(2)}$ gelten, die wir für unser direktes Produkt zulassen: Sie müssen im selben Prototile liegen wie die im Produkt erlaubten Punkte x_0 und

im selben Prototile erster Ordnung wie die erlaubten Punkte x_1 , wenn sie jeweils dasselbe Tiling beschreiben sollen.

Wiederholen wir dies unendlich oft, so erhalten wir eine Sequenz $(x_0, x_1, \dots, x_\infty)$, welche genau einem Tiling zugeordnet werden kann. Dass es sich wirklich um ein Tiling handelt, wird dabei durch die Forderung garantiert, dass die Substitution den Rand erzwingt: In diesem Fall erzwingen wir, dass am Rand jedes Supertiles k -ter Ordnung weitere Tiles liegen und dass das Tiling somit nicht "abbricht".

Ersetzen wir jetzt noch ω durch eine Abbildung γ_0 , welche der Tatsache Rechnung trägt, dass die Komplexe $\Gamma_0, \Gamma_0^{(1)}, \dots, \Gamma_0^{(\infty)}$ identisch sein sollen (dann muss jeder Punkt in einem höheren Komplex um ein geeignetes $y \in \mathbb{R}^d$ verschoben werden, so dass er in Γ_0 zu liegen kommt), so gilt $\gamma_0(x_{k+1}) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe Abbildung 2.11.).

Wir haben damit anschaulich die wesentliche Aussage des folgenden Satzes gezeigt, den wir in etwas allgemeinerer Form formulieren wollen (der exakte Beweis, welcher auch Aussagen darüber macht, wie sich die Topologie der Komplexe auf den inversen Limes überträgt, findet sich in [AP]):

Satz 2.15

Sei Ω_S ein Tilingraum wie in Satz 2.9, wobei die Substitution den Rand erzwingt. Dann gibt es topologische Räume Γ_0, Γ_1 und stetige Abbildungen γ_0, γ_1 , welche durch die Substitutionsabbildung induziert werden, so dass die inversen Limes der Sequenzen

$$\Gamma_0 \xleftarrow{\gamma_0} \Gamma_0 \xleftarrow{\gamma_0} \Gamma_0 \xleftarrow{\gamma_0} \dots \tag{2.1}$$

$$\Gamma_1 \xleftarrow{\gamma_1} \Gamma_1 \xleftarrow{\gamma_1} \Gamma_1 \xleftarrow{\gamma_1} \dots, \tag{2.2}$$

abgekürzt durch

$$\Omega_0 := \varprojlim_{\gamma_0} \Gamma_0 \quad \text{bzw.} \tag{2.3}$$

$$\Omega_1 := \varprojlim_{\gamma_1} \Gamma_1 \tag{2.4}$$

*gemeinsam mit stetigen Abbildungen ω_0 bzw. ω_1 als dynamisches System betrachtet, zu dem dynamischen System (Ω_S, ω) topologisch konjugiert sind. Erzwingt die Substitution den Rand nicht, so sind lediglich (Ω, ω) und (Ω_1, ω_1) topologisch konjugiert. Die Räume Γ_0 und Γ_1 tragen die Struktur eines CW-Komplexes und werden als **nullter** und **erster Anderson-Putnam-Komplex** (AP-Komplex) bezeichnet.*

Betrachten wir den Spezialfall der Dimension 2, so erkennen wir aus Abbildung 2.10., dass für Γ_0 (und analog für Γ_1) der Rand jeder 2-Zelle aus 1-Zellen und der Rand jeder 1-Zelle aus 0-Zellen besteht. Dies wird sich bei unseren Berechnungen als wichtig erweisen, denn in diesem Fall lassen sich die zellulären Differentiale aus Abschnitt B.3.2. in Form einer

Matrix darstellen, welche leicht aus den Anderson-Putnam-Komplexen bestimmt werden kann.

Wenden wir Satz 2.15 nun auf Satz 1.36 an, so erhalten wir den folgenden Hauptsatz über die Berechnung der ganzzahligen Čech-Kohomologie von Substitutionstilings:

Satz 2.16

Sei Ω_S ein Tilingraum, der durch eine Substitution ω erzeugt wird. Für die Čech-Kohomologiegruppen von Ω_S mit ganzzahligen Koeffizienten gilt:

$$\check{H}^*(\Omega_S; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{\gamma_1^*} (\check{H}^*(\Gamma_1; \mathbb{Z})) = \varinjlim_{\gamma_1^*} (H^*(\Gamma_1; \mathbb{Z})). \quad (2.5)$$

Erzwingt die Substitution den Rand, so gilt außerdem:

$$\check{H}^*(\Omega_S; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{\gamma_0^*} (\check{H}^*(\Gamma_0; \mathbb{Z})) = \varinjlim_{\gamma_0^*} (H^*(\Gamma_0; \mathbb{Z})). \quad (2.6)$$

Satz 2.16 besagt also, dass wir zur Berechnung der Čech-Kohomologie von Ω_S lediglich die zelluläre Kohomologie des Anderson-Putnam-Komplexes Γ_1 zu bestimmen brauchen. Ist die Bedingung aus Definition 2.11 für ein Tiling (und damit alle Tilings) in Ω_S erfüllt, so genügt es, die (wesentlich einfacher zu bestimmende) zelluläre Kohomologie des Komplexes Γ_0 zu berechnen.

Zudem brauchen wir die Abbildung γ_0 bzw. γ_1 in expliziter Form. Dazu müssen wir uns jedoch lediglich Abbildung 2.11 ansehen und uns überlegen, wie der linke und der rechte (kleine) Komplex zusammenhängen. Wir erhalten:

Hilfssatz 2.17

Die Abbildung γ_0 ist diejenige Abbildung, die jeden Vertex (jede Kante, jedes Tile) in Γ_0 auf den Vertex (die Kante, das Tile) abbildet, auf den (die) er durch die Substitution ω abgebildet wird. Stellen wir γ_0 als Matrix dar, so ist die Abbildung γ_0^ genau die dazu transponierte Matrix (entsprechendes gilt für Γ_1 bzw. γ_1). \square*

Wir müssen uns jetzt nur noch ansehen, wie die zellulären Kohomologiegruppen konkret zu berechnen sind, dies wollen wir im nächsten Abschnitt tun.

2.3. Die zelluläre Kohomologie der Anderson-Putnam-Komplexe

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie sich Ω_S durch inverse Limites darstellen lässt. Um die Čech-Kohomologie von Ω_S nun mittels Satz 2.16 berechnen zu können, müssen

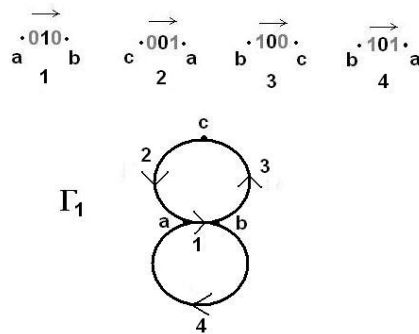


Abbildung 2.12.: Der erste Anderson-Putnam-Komplex der Fibonacci-Kette

wir die zelluläre Kohomologie von Γ_0 bzw. Γ_1 berechnen. Die allgemeine Definition der zellulären Kokettengruppen und der Differentiale ist in Abschnitt B.3.2 gegeben. Wir wollen uns ansehen, von welcher Form diese in unserem konkreten Fall sind. Da die Räume Γ_0 bzw. Γ_1 CW-Komplexe sind, gilt nach Abschnitt B.3.2:

Satz 2.18

Die k -te zelluläre Kokettengruppe eines Anderson-Putnam-Komplexes Γ_i ist isomorph zur k -ten zellulären Kettengruppe, welche durch die k -Zellen in Γ_i erzeugt wird.

Dabei müssen wir gemäß Abbildung B.2 den Zellen eine Orientierung zuordnen, wobei alle Zellen gleicher Dimension üblicherweise dieselbe Orientierung erhalten.

Beispiel 2.19

Wir betrachten den ersten Anderson-Putnam-Komplex der eindimensionalen Fibonacci-Kette. Γ_1 besteht aus vier 1-Zellen und drei 0-Zellen, wie man aus Abbildung 2.12 ablesen kann, also ist $C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$ und $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4$.

Es bleibt nun, die Differentiale zwischen den Kokettengruppen zu bestimmen. Bei unseren Berechnungen liegt der einfache Fall vor, dass die Ränder von $k+1$ -Zellen ausschließlich aus k -Zellen bestehen. Diese lassen sich nun aus dem Anderson-Putnam-Komplex bestimmen, wenn Kanten und Vertices identifiziert sind.

Beispiel 2.20

Wir bestimmen das Differential ∂^0 des ersten Anderson-Putnam-Komplexes der Fibonacci-Kette. Dieser ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Aus den Prototiles lesen wir ab:

$$\partial^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Haben wir auf diese Weise die Differentiale bestimmt, so können wir die Kohomologie der Anderson-Putnam-Komplexe bestimmen. Dabei gehen wir wie in Beispiel B.21 vor.

Beispiel 2.21

Wir wollen die zelluläre Kohomologie des Komplexes Γ_1 im Fall der Fibonacci-Kette bestimmen. Dazu ist der Differentialkomplex

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \rightarrow 0 \tag{2.8}$$

auszuwerten. Mit Beispiel 2.19 wird daraus

$$0 \xrightarrow{\partial^{-1}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial^1} 0 \tag{2.9}$$

Aus Beispiel 2.20 entnehmen wir ferner $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ bzw. $Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^2$, während die beiden anderen Differentiale trivial sind (also alle Elemente auf 0 abbilden). Damit erhalten wir gemäß Abschnitt B.3.2:

$$H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq Ker(\partial^0)/Im(\partial^{-1}) \simeq \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} \tag{2.10}$$

$$H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq Ker(\partial^1)/Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^4/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2 \tag{2.11}$$

Wir haben damit den kompletten Formalismus beisammen, mit dem wir in den Kapiteln 5 und 6 zwei kompliziertere (zweidimensionale) Beispiele detailliert berechnen wollen.

2.4. Symmetrieeigenschaften der Anderson-Putnam-Komplexe

Wir wollen in diesem Abschnitt die im Anschluss an Satz 1.4 gemachte Beschränkung auf den Fall $A = 0$ aufheben und auch Rotationen zulassen, d.h. $A \in SO(d)$. Damit sind also zwei Tiles in einem Tiling nun äquivalent, wenn sie durch eine Translation und/oder Rotation ineinander überführt werden können. Dies könnte man zum Anlass nehmen, die gesamte in Kapitel 1 entwickelte Theorie für einen neuen Tilingraum Ω_R zu entwickeln (insbesondere müsste eine andere Metrik verwendet werden), was wir hier jedoch nicht tun wollen; für eine Einführung in dieses Thema siehe z.B. [ORS],[Sa4].

Die Verallgemeinerung auf Rotationen bringt nun aber auch für die Berechnung der Kohomologiegruppen von Ω_T gewisse Vorteile, nämlich dann, wenn im Anderson-Putnam-Komplex Tiles auftreten, die durch Rotationen ineinander überführt werden können. In diesem Fall kann sich die Anzahl der zu verwendenden Prototiles stark verringern.

Untersuchungen dieser Art verwenden die Tatsache, dass sich bei k -zähliger Symmetrie der Tiles die Kohomologie $H^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ nach irreduziblen Darstellungen zerlegen lässt [ORS]. Hierbei sind (für den Fall der Dimension zwei) die folgenden Punkte zu beachten:

- Alle Tiles und deren rotierte Versionen müssen auch wirklich im Tiling auftreten, andernfalls wäre der Zellkomplex, den man mit dieser Methode bestimmt, zu groß.
- Um Entartungen von Kanten zu vermeiden, müssen sich alle 2-Zellen aus linear unabhängigen 1-Zellen aufspannen lassen.
- Die Abbildungen γ müssen Isomorphismen sein. Wäre dies nicht der Fall, so müsste der direkte Limes genauer untersucht werden. Da man jedoch durch die Zerlegung in irreduzible Darstellungen die jeweiligen Kohomologiegruppen nur bis auf Isomorphie kennt, lässt sich der direkte Limes nicht ohne Weiteres bestimmen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt der folgende Satz:

Satz 2.22

Sei Γ_0 der nullte Anderson-Putnam-Komplex eines Substitutionstilings. Lassen sich Vertices und Kanten so orientieren, dass es Prototiles gibt, welche aus einer Rotation aus anderen Prototiles entstanden sind, andererseits jedes Prototile jedoch auch durch linear unabhängige Ketten aufgespannt werden kann, so lassen sich die Kohomologiegruppen von Γ_0 nach irreduziblen Darstellungen zerlegen, d.h. es gibt Gruppen G_1, G_2, \dots, G_n mit $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n \simeq H^k(\Gamma_0)$.

Auf diesen Aspekt werden wir an dieser Stelle nicht weiter eingehen, da unsere Rechenbeispiele jeweils mindestens eine der obigen Bedingungen verletzen, so dass hier keine Vereinfachung möglich ist. Für Rechenbeispiele dieser Art verweisen wir auf [ORS] und [Sa4].

3. Die ganzzahlige Čech-Kohomologie von Projektionstilings

Wir machen nun bei unseren theoretischen Betrachtungen einen Sprung und betrachten Tilings, die durch eine Projektion erzeugt werden können. Hier kommt ein neues Konzept hinzu: In Kapitel 2 hatten wir uns ausschließlich auf den physikalischen Raum beschränkt, d.h. wir hatten nur den Raum betrachtet, von der vom Tiling überdeckt war. Dies ermöglichte es uns, eine gewisse geometrische Veranschaulichung z.B. der Anderson-Putnam-Komplexe zu finden.

Das Verfahren, das wir im Folgenden beschreiben wollen, verwendet zusätzlich zum physikalischen Raum nun auch einen internen Raum, welcher orthogonal auf dem physikalischen Raum steht und gemeinsam mit ihm einen höherdimensionalen Raum aufspannt. Dadurch werden die Berechnungen wesentlich abstrakter, jedoch hat die Methode z.B. den Vorteil, dass sich Berechnungen einfacher implementieren lassen, da keine geometrischen Formen von Tiles bzw. Tiles mit Kragen identifiziert werden müssen.

Ein hierzu äquivalentes Verfahren wird z.B. in [FHK1] und [FHK2] dargestellt, speziell für die Kodimension 2 in [GaeKe]. Da dieses Verfahren jedoch bereits ausführlich unter dem Gesichtspunkt der Torsion in zweidimensionalen Tilings untersucht wurde [GHK], beschränken wir uns hier auf das Verfahren nach [Ka].

3.1. Die Methode der atomaren Hyperflächen

Wie bereits in 1.1. erklärt, kann man quasiperiodische Tilings definieren als Tilings, welche durch die ebenfalls in Abschnitt 1.1. erklärte Projektionsmethode entstehen. Ein zu diesem Verfahren äquivalentes Verfahren ist die **Methode der atomaren Hyperflächen**, welche für unsere weiteren topologischen Untersuchungen geeignet ist, daher wollen wir diese Methode kurz erläutern [Ka]:

Wir gehen von einem N -dimensionalen periodischen Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ mit zugehöriger Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ von Gittervektoren aus.

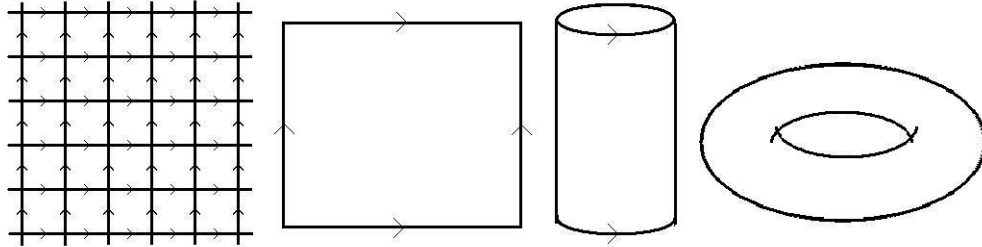


Abbildung 3.1.: Gitterpunkte und gleichgerichtete Kanten im zweidimensionalen Gitter werden identifiziert. Legt man gleiche Vertices und gleichgerichtete Kanten aufeinander, so erhält man einen Torus.

Mittels der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{G}$ können wir \mathcal{G} zu einem N -dimensionalen affinen ¹ Torus aufwickeln, für den Fall der Dimension 2 ist dies in Abbildung 3.1. dargestellt².

An jedem Gitterpunkt liege nun eine $(N - d)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, welche die geometrische Form eines Polytops, im Fall $N - d = 1$ also die Form eines Geradenstückes und für $N - d = 2$ die Form eines Polygons habe; diese wollen wir als **atomare Hyperfläche** bezeichnen.

Sei ferner E_{\parallel} ein d -dimensionaler affiner Unterraum von \mathbb{R}^N mit der Eigenschaft, dass E_{\parallel} nicht in einem rationalen Unterraum von \mathbb{R}^N enthalten ist, d.h. in jedem d -Tupel von Vektoren, das E_{\parallel} aufspannt, soll sich keiner der Vektoren als rationale Linearkombination der Basisvektoren von Γ darstellen lassen. Das Bild von E_{\parallel} unter der natürlichen Projektion von \mathbb{R}^N nach T^N (also die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N / \mathbb{Z}^N : x \mapsto x + \mathbb{Z}^N$) liegt somit dicht in T^N (d.h. in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes aus T^N liegt mindestens ein Punkt von $\pi(E_{\parallel})$, siehe Abbildung 3.2.). E_{\parallel} bezeichnen wir auch als **physikalischen Raum**.

Die atomaren Hyperflächen sollen so ausgerichtet sein, dass sie parallel sind zu einem zu E_{\parallel} orthogonalen, $N - d$ -dimensionalen affinen Unterraum von \mathbb{R}^N , den wir **Orthogonalraum** (oder **internen Raum**) nennen und mit E_{\perp} bezeichnen wollen. Es sollen nun diejenigen Gitterpunkte parallel zu E_{\perp} auf den physikalischen Raum projiziert werden, deren Hyperfläche von E_{\parallel} geschnitten wird. Diese bilden dann die Vertices eines Tilings der Dimension d und der Kodimension $k := N - d$ (für $d = k = 1$ siehe Abbildung 3.3.).

¹affin, weil der Torus nicht zwangsläufig den Ursprung beinhalten muss, was an seiner Topologie jedoch nichts ändert, weshalb wir im weiteren Verlauf immer von einem gewöhnlichen Torus sprechen.

² Γ entspricht damit der mathematischen Definition eines Gitters, welche im Gegensatz zur physikalischen Definition (siehe die Bemerkung nach Definition 1.8) noch mit einer Äquivalenzrelation versehen ist.

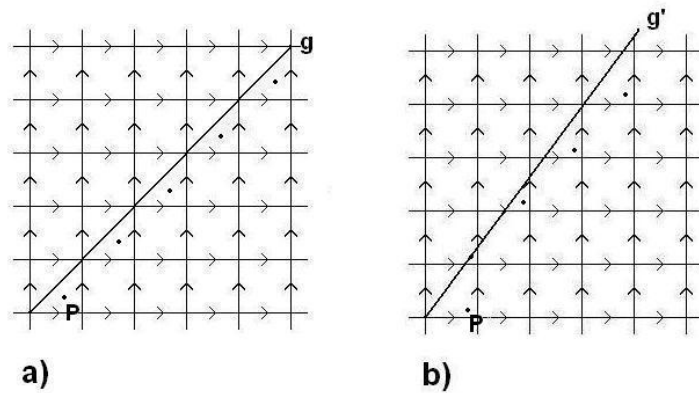


Abbildung 3.2.: a): Das Bild $g := \pi(E_{\parallel})$ liegt nicht dicht im Torus: Es gibt Umgebungen um P , die keinen Punkt von g enthalten. b) $g' := \pi(E_{\parallel})$ liegt dicht im Torus: In jeder Umgebung von P liegt ein Punkt von g' .

An die Orientierung der Hyperflächen stellen wir noch eine **Rationalitätsbedingung** [Ka], die in vielen interessanten Fällen (insbesondere in den von uns untersuchten) erfüllt ist. Wir wollen fordern, dass die Hyperflächen so ausgerichtet sind, dass jede ihrer Randmannigfaltigkeiten in einem bezüglich E_{\perp} rational eingebetteten affinen Unterraum von \mathbb{R}^{N-d} der Dimension $N-d-1$ enthalten ist. Für den Fall zweidimensionaler Hyperflächen bedeutet das einfach, dass diejenigen Geraden, die man erhält, wenn man die Ränder des Polytops verlängert, rationale Steigungen haben (siehe Abbildung 3.9.)³.

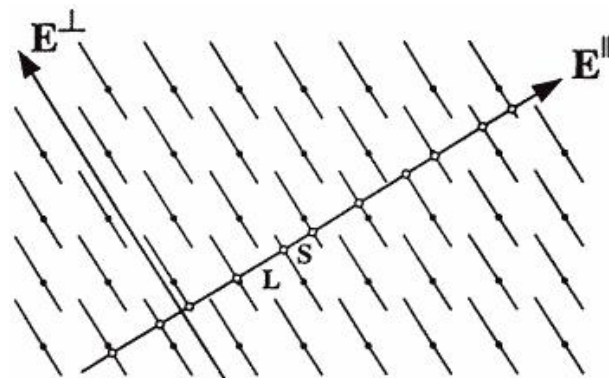


Abbildung 3.3.: Erzeugung der Fibonacci-Kette durch die Methode der atomaren Hyperflächen

Wir wollen nun die Čech-Kohomologie des Tilingraumes Ω_T berechnen, der einem quasi-

³Eine etwas allgemeinere (und abstraktere) Definition der Rationalitätsbedingung findet sich in [Ka].

periodischen Tiling T zugeordnet werden kann, welches durch die Methode der atomaren Hyperflächen entsteht. Für T ist in den meisten Fällen die Form und Ausrichtung der atomaren Hyperflächen bekannt, davon wollen wir auch jetzt ausgehen. Das Gitter Γ ist zwar meistens nicht explizit bekannt, lässt sich aber aus seiner Projektion auf den physikalischen Raum, also aus dem Tiling T , bestimmen:

Beispiel 3.1

Wir wollen das Gitter Γ des **gefärbten oktagonalen Tilings** bestimmen. Dabei handelt es sich hier um das in Kapitel 1 eingeführte Ammann-Beenker-Tiling, dessen Vertices nun zusätzlich mit einer Färbung versehen sind; wir bezeichnen es in diesem Kapitel als "oktagonale", um auf die oktagonale Symmetrie hinzuweisen. Den ersten Gittervektor lesen wir aus Abbildung 3.4. ab.

Wir erhalten $b_1 = e_1 - e_4$. Zur Bestimmung der weiteren Vektoren nutzen wir die lokale Isomorphie des Ammann-Beenker-Tilings unter Drehungen um jeweils $\pi/4$ aus (Abbildung 3.5.).

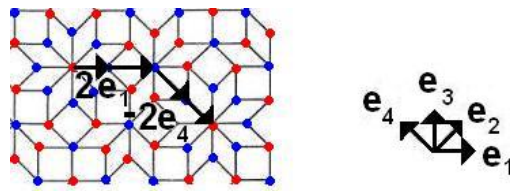


Abbildung 3.4.: Zur Bestimmung der Gittervektoren beim gefärbten oktagonalen Tiling (1)

Wir lesen daraus die Vektoren $b_2 = e_1 + e_2$, $b_3 = e_2 + e_3$ und $b_4 = e_3 + e_4$ mit den in Abbildung 3.4. definierten Richtungen der Einheitsvektoren ab.

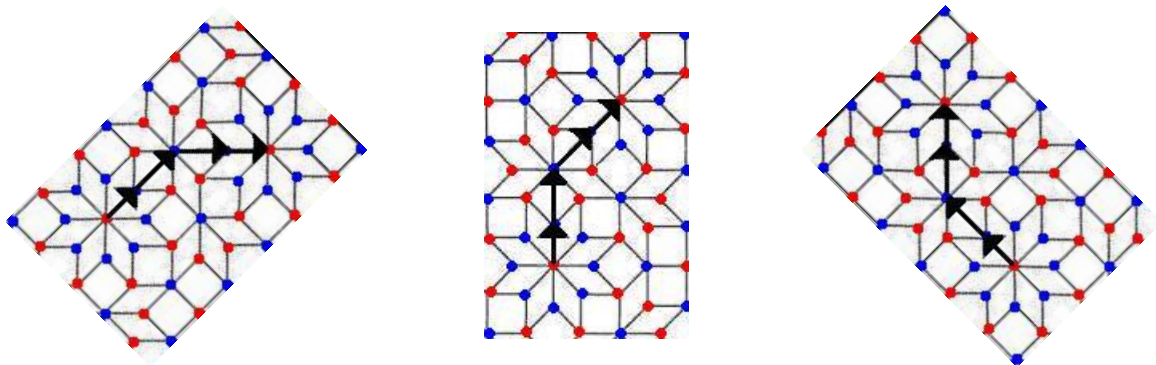


Abbildung 3.5.: Zur Bestimmung der Gittervektoren beim gefärbten oktagonalen Tiling (2)

Für den Fall eines Substitutionstilings hatten wir den Raum Ω_T (wobei T ein uns vorliegendes Tiling war) durch geeignete topologische Räume approximiert, deren inverser Limes isomorph zu Ω_T war. Hier wollen wir nun ähnlich vorgehen und uns überlegen, wie wir den Raum Ω_T bei bekanntem **Hyperflächensystem**, bestehend aus (Γ, F_i) , also einem Gitter und einer Menge von atomaren Hyperflächen mit festgelegter Orientierung, approximieren können.

Wir haben dazu alle quasiperiodischen Tilings zu bestimmen, die in derselben lokalen Isomorphieklasse wie das uns vorliegende Tiling T liegen, dabei wollen wir uns zunächst auf **nicht-singuläre** Tilings beschränken, d.h. wir wollen ausschließen, dass die Schnittmannigfaltigkeit E_{\parallel} den Rand einer atomaren Hyperfläche trifft. In diesem Fall hätten wir nämlich zu entscheiden, ob wir den zugehörigen Gitterpunkt als Vertex im Tiling aufnehmen wollen oder nicht (singulärer Fall), je nachdem, von welcher Richtung aus man die Hyperfläche an den Randpunkt annähert, wie in Abbildung 3.6. dargestellt [Ba].

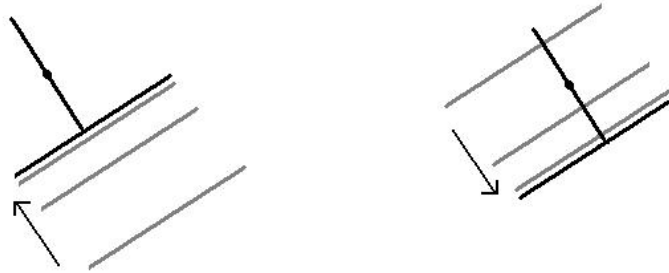


Abbildung 3.6.: Singulärer Fall bei der Fibonacci-Kette: Das singuläre Tiling (schwarze Linie) ergibt sich als Limes regulärer Tilings (graue Linien). Dieser unterscheidet sich, je nachdem, von welcher Seite man sich dem Randpunkt nähert.

3.2. Konstruktion der Menge Y_T

In Kapitel 1 hatten wir festgestellt, dass der Raum Ω_T alle Tilings enthält, die in derselben lokalen Isomorphieklasse wie T liegen. Wir wollen uns nun überlegen, welche Bedingungen unser bisher konstruiertes System aus Hyperflächen und Schnittmannigfaltigkeit erfüllen muss, damit bei Variation der Schnittmannigfaltigkeit quasiperiodische Tilings entstehen, welche in derselben lokalen Isomorphieklasse liegen. Die hier beschriebenen Ideen gehen auf [GrKa] zurück.

Wir ersetzen dazu zunächst E_{\parallel} durch eine beliebige d -dimensionale Mannigfaltigkeit M ; die Menge all dieser möglichen Mannigfaltigkeiten wollen wir mit \mathcal{M} bezeichnen (siehe Abbildung 3.7. für den Fall $d = 1$).

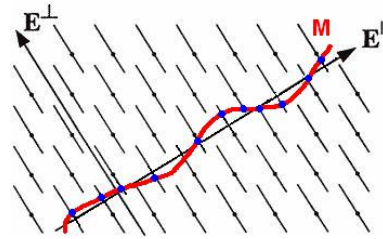


Abbildung 3.7.: Projektion von Gitterpunkten des \mathbb{Z}^2 auf eine beliebige 1-dimensionale Mannigfaltigkeit M . Die blauen Punkte sind *nicht* Vertices eines Tilings in der LI-Klasse der Fibonacci-Kette.

Projektion von Gitterpunkten auf M ergibt natürlich im allgemeinen kein quasiperiodisches Tiling; dies ist nur dann der Fall, wenn M nicht zu stark von E_{\parallel} "abweicht". Anders ausgedrückt: An der lokalen Isomorphieklasse, in der das auf E_{\parallel} projizierte Tiling liegt, ändert sich (näherungsweise) nichts, wenn wir die Fläche E_{\parallel} verschieben oder an einigen Stellen leicht verbiegen, so lange wir darauf achten, dass E_{\parallel} dadurch keine Ränder von Hyperflächen berührt. \mathcal{M} stellt somit eine Approximation an den Orbit von T dar.

Um den Orbit von T aus dieser Näherung nun exakt zu erhalten, müssen wir Elemente aus \mathcal{M} ausschließen und zwar einerseits solche, die den Rand einer Hyperfläche schneiden, andererseits aber auch solche, welche zu stark von E_{\parallel} abweichen. Dies können wir nach der in [GrKa] bzw. [Ka] vorgeführten Idee erreichen, indem wir die Ränder der Hyperflächen parallel zu E_{\parallel} bezüglich der Euklidischen Metrik (d.h. in Form von d -dimensionalen Kugeln mit Radius r) ausdehnen (bzw. "verdicken") und die so erhaltenen d -dimensionalen Flächenstücke als **verbotene Zonen** Y_r annehmen (siehe Abbildung 3.8.). Alle Elemente aus \mathcal{M} , die diese Mengen berühren oder schneiden, werden aus \mathcal{M} ausgeschlossen. Je weiter wir die Zonen Y_r ausdehnen, desto besser wird die Approximation von \mathcal{M} an den Orbit $\mathcal{O}(T)$. Im Limes unendlicher Ausdehnung dürfen die übrigen Elemente aus \mathcal{M} nun überhaupt keine "Welligkeit" mehr aufweisen. \mathcal{M} besteht dann gerade aus denjenigen Elementen, die durch eine Parallelverschiebung aus T hervorgehen, also dem Orbit von T .

Beispiel 3.2

Wir betrachten die eindimensionale Fibonacci-Kette. Die Randmannigfaltigkeit der Hyperflächen entspricht hier einfach einem Punkt. Verdicken wir diesen Punkt parallel zu E_{\parallel} , so liegen die Punkte der verdickten Menge Y_{∞} dicht im Torus T^2 (da E_{\parallel} irrational in T^2 eingebettet ist), d.h. für jeden Punkt P im Torus liegt in jeder Umgebung U von P mindestens ein Punkt von Y_{∞} . Damit muss jede eindimensionale Mannigfaltigkeit M , die durch P geht, parallel zu E_{\parallel} laufen, da M sonst einen Punkt von Y_{∞} berühren würde. Da dies für jeden Punkt P gilt, muss M ein Translat der Geraden E_{\parallel} sein.

In vielen Fällen (so auch in den von uns betrachteten) ist es jedoch nicht nötig, die Ränder unendlich weit zu verdicken: durch die Rationalitätsbedingung wachsen die Verdickungen

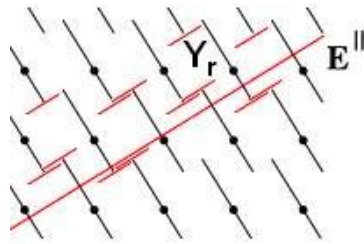


Abbildung 3.8.: Werden die roten Geradenstücke unendlich weit verdickt, so erzwingen wir, dass jedes Element aus \mathcal{M} im Orbit von $E_{||}$ liegt, insbesondere also homotop zu der roten Geraden in der Mitte ist.

für einen endlichen Radius zusammen und wir erhalten eine komplette **verbotene, verdickte Hyperebene** [GrKa], [Ka].

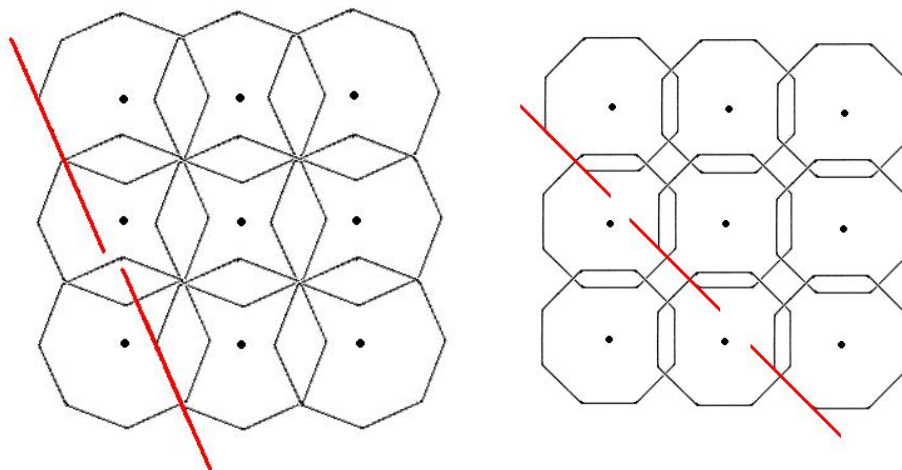


Abbildung 3.9.: Draufsicht auf eine Schicht von oktagonalen Hyperflächen. Im linken Bild verletzen die Hyperflächen die Rationalitätsbedingung, die Verdickungen (rote Linien) wachsen dann nicht zusammen. Im rechten Bild genügen die Hyperflächen der Rationalitätsbedingung und wachsen für einen endlichen Verdickungsradius zusammen.

Die Menge der verbotenen Hyperflächen, welche parallel zueinander sind, nimmt unter diesen Voraussetzungen die Form eines affinen, **verdickten Torus**' an, wenn man die Euklidische Norm, welche die verbotenen Kugeln definiert, durch eine äquivalente Norm ersetzt, bezüglich derer die Verdickungen die Form eines konvexen Polytops aufweisen [Ka]. Für den Fall eines zweidimensionalen Torus' sieht ein entsprechend verdickter Torus aus wie in Abbildung 3.10. dargestellt (wir nehmen an, dass die Verdickungen bei einem Radius

r bezüglich der Polygonnorm zusammenwachsen).

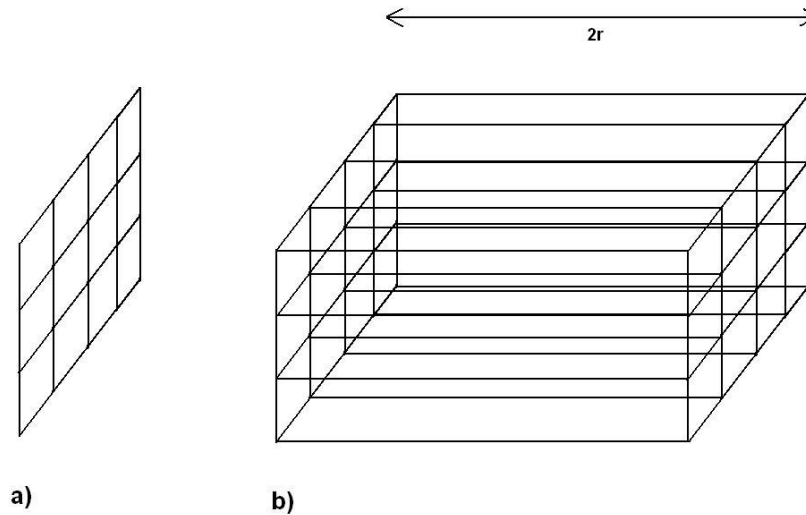


Abbildung 3.10.: Darstellung eines zweidimensionalen verdickten Torus'

Da wir von einer polygonalen Hyperfläche ausgegangen waren, gibt es nur eine endliche Anzahl solcher verdickter Tori, die wir aus T^N ausschließen müssen, um zu garantieren, dass alle Mannigfaltigkeiten in \mathcal{M} zum Orbit von T gehören. Die zugehörigen "unverdickten" Tori lassen sich dabei direkt aus der Projektion der Gittervektoren auf den Orthogonalraum bestimmen, wie wir in den Rechenbeispielen sehen werden. Wir werden im nächsten Abschnitt feststellen, dass es in vielen Fällen (insbesondere in den von uns im Weiteren betrachteten) tatsächlich ausreicht, statt der verdickten Tori die entsprechenden unverdickten Tori zu betrachten.

3.3. Darstellung von Ω_T durch inverse Limites

Im letzten Abschnitt hatten wir gesehen, wie wir den Orbit eines Tilings T zu konstruieren haben: Durch das Ausschließen verbotener verdickter Tori zwingen wir das Hyperflächensystem, nur solche Tilings zu erzeugen, die im Orbit $\mathcal{O}(T)$ enthalten sind. Wir wollen uns nun ansehen, wie wir den Rest der abgeschlossenen Hülle Ω_T konstruieren können.

Dazu betrachten wir zunächst die Mengen, die entstehen, wenn wir aus dem Torus T^N d -dimensionale Kugeln ausschließen, die durch Verdickung der Randmannigfaltigkeiten der Hyperflächen entstehen. Die Punkte in der Menge $T^N \setminus Y_r, r \in \mathbb{R}$ lassen sich mit den

Ursprüngen von nicht-singulären Tilings assoziieren, die innerhalb einer d -dimensionalen Kugel um den Ursprung quasiperiodisch sind [Ka].

Dies kann man folgendermaßen plausibel machen: Man betrachtet alle Mannigfaltigkeiten in \mathcal{M} und definiert auf dieser Menge eine Äquivalenzrelation: Zwei Mannigfaltigkeiten sollen äquivalent sein, wenn der Ursprung an derselben Stelle im Torus liegt (modulo Gittertranslationen). Da jede Mannigfaltigkeit dicht im Torus liegt, gibt es in jeder dieser Äquivalenzklassen einen Repräsentanten, dessen Ursprung gerade "geeignet" liegt. Demnach können wir jedem Punkt in $T^N \setminus Y_r$ ein Tiling aus \mathcal{M} zuordnen, welches die oben erwähnte Eigenschaft hat. Zu beachten ist, dass wiederum (ähnlich wie bei der Konstruktion der Anderson-Putnam-Komplexe) jeder Punkt eine Äquivalenzklasse repräsentiert ⁴

Singuläre Tilings mit dieser Eigenschaft können nun dadurch berücksichtigt werden, dass wir "etwas weniger" als die Mengen Y_r ausschließen: Wir können ein singuläres Tiling darstellen als Limes einer Cauchy-Folge von nicht-singulären Tilings (bezüglich einer geeigneten Metrik), siehe Abbildung 3.6.. Um alle singulären Tilings zu berücksichtigen, müssen wir also dafür sorgen, dass der Limes jeder solcher Cauchy-Folgen in unserer zu erweiternden Menge von Tilings (die wir mit X_r bezeichnen wollen) enthalten ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass X_r abgeschlossen bezüglich einer Metrik ist. Als geeignete Metrik erweist sich z.B. die **innere Metrik** [Ka]:

Definition 3.3

Der Abstand zweier Punkte x, y in $T^N \setminus Y_r$ bezüglich der inneren Metrik entspricht dem Infimum der Euklidischen Länge aller Pfade von x nach y , wobei Punkte aus Y_r vermieden werden. Da $T^N \setminus Y_r$ wegzusammenhängend ist, ist stets ein endlicher Wert für die Metrik definiert. Den Abschluss von $T^N \setminus Y_r$ bezüglich der inneren Metrik wollen wir mit X_r bezeichnen.

Aus geometrischer Sicht sind wir unserem Ziel nun schon etwas näher: Die Mengen X_r lassen sich assoziieren mit den Ursprüngen von Tilings, welche innerhalb einer Kugel vom Radius r um den Ursprung wie Tilings aus der LI-Klasse von T aussehen. Vergrößern wir jetzt den Radius der Kugeln, so erhalten wir einen Raum, welcher den Raum Ω_T etwas besser approximiert. Im Limes unendlicher Ausdehnung erhalten wir dann genau denjenigen Raum, dessen Punkte den Ursprüngen aller Tilings entspricht, die überall quasiperiodisch sind. Dies erinnert uns an Satz 2.15 und in der Tat gilt der folgende Satz [Ka]:

Satz 3.4

Sei X_r der Abschluss der Menge $T^N \setminus Y_r$ bezüglich der inneren Metrik, $(r_i)_{i \in I}$ eine streng monoton steigende Folge reeller Zahlen.

⁴und die Übertragung der Topologie von \mathcal{M} auf die Menge $T^N \setminus Y_r$ ebenfalls gewährleistet werden muss.

Dann gibt es stetige Abbildungen $\iota_i : X_{r_{i+1}} \mapsto X_{r_i}$, induziert durch die Inklusionen $T^N \setminus Y_{r_{i+1}} \mapsto T^N \setminus Y_{r_i}$, so dass

$$\Omega_T \simeq \varprojlim_{\iota_i} (X_{r_i}) \quad (3.1)$$

gilt.

Eine Schwierigkeit gegenüber Kapitel 2 besteht nun in der Berechnung des direkten Limes, da wir, anders als dort die Abbildungen γ_i , die Abbildungen ι_i nicht explizit durch Matrizen gegeben haben. Im letzten Abschnitt hatten wir jedoch gesehen, dass die Mengen $T^N \setminus Y_r$ sich (unter Annahme der Rationalitätsbedingung) ab einem gewissen Wert von r stabilisieren (d.h. die verdickten Tori wachsen zusammen und weitere Vergrößerung von r ändert (aus topologischer Sicht) nichts mehr an der Menge $T^N \setminus Y_r$). Es liegt nun die Vermutung nahe, dass sich auch die Mengen X_r stabilisieren, wenn r groß genug wird. Dies ist tatsächlich der Fall, wie in [Ka] mit einigem Aufwand gezeigt wird, zusätzlich gelten noch einige Homotopieäquivalenzen. Wir geben hier nur das Ergebnis an, ein Beweis findet sich im Anhang von [Ka]:

Satz 3.5

Es gibt ein Arrangement A affiner verdickter Subtori von T^N und eine endliche reelle Zahl $r_0 > 0$ derart, dass $A \subset Y_{r_n}$ für alle $r_n \geq r_0$. Ferner existieren für alle $r_{n+1} > r_n$ Homotopieäquivalenzen $\mu_n : T^N \setminus Y_{r_n} \mapsto X_{r_n}$, $\nu_n : T^N \setminus Y_{r_n} \mapsto T^N \setminus A$ sowie $\iota_n : X_{r_{n+1}} \mapsto X_{r_n}$.

Mit diesen Betrachtungen können wir nun den Hauptsatz über die Kohomologie von Projektionstilings der Kodimension 2 beweisen; diesen wollen wir für den Spezialfall formulieren, den wir für unsere Berechnungen benötigen:

Satz 3.6

Sei T ein quasiperiodisches Tiling der Kodimension 2, das durch Projektion aus einem vierdimensionalen Hyperflächensystem mit polygonalen, zweidimensionalen Hyperflächen entstanden ist. Dann gibt es ein Arrangement A aus endlich vielen zweidimensionalen verdickten Tori, so dass für die Čech-Kohomologie von Ω_T die Beziehung

$$\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^*(T^4 \setminus A; \mathbb{Z})$$

gilt.

Beweis. Wir wollen die Čech-Kohomologie des Raumes Ω_T bestimmen. Da wir nach Satz 3.4 Ω_T als inversen Limes der Räume X_{r_i} darstellen können, gilt zunächst mit Satz 1.36:

$$\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq \varprojlim_{\iota_i^*} (\check{H}^*(X_{r_i}; \mathbb{Z})).$$

Wegen Satz 3.5 stabilisiert sich der Homotopietyp von X_{r_i} aber für endliches r_0 , d.h. die Abbildungen ι_n^* , welche durch die Abbildungen ι_n induziert werden (siehe Beweis von Satz 1.36) werden Isomorphismen, weshalb der direkte Limes den Wert $\check{H}^*(X_{r_0}; \mathbb{Z})$ annimmt:

$$\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq (\check{H}^*(X_{r_0}; \mathbb{Z})).$$

Verwenden wir die Homotopieäquivalenzen aus dem zweiten Teil von Satz 3.5, so erhalten wir schließlich:

$$\check{H}^*(X_{r_n}; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^*(T^N \setminus Y_{r_n}; \mathbb{Z}) \quad \text{mit der Homotopieäquivalenz } \mu_n \quad (3.2)$$

$$\simeq \check{H}^*(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \quad \text{mit der Homotopieäquivalenz } \nu_n. \quad (3.3)$$

□

3.3.1. Die Kohomologiesequenz für Ω_T

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Čech-Kohomologie des Raumes $T^N \setminus A$ zu bestimmen. Hier gilt der folgende Satz, welcher z.B. in [Br] (in etwas größerer Allgemeinheit und mit einigem Aufwand) gezeigt wird:

Satz 3.7

Sei X ein d -dimensionaler topologischer Raum, der die Struktur eines CW-Komplexes trägt. Dann ist $\check{H}^(X; \mathbb{Z}) \simeq H_z^*(X; \mathbb{Z})$, wobei $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ die Čech-Kohomologie und $H_z^*(X; \mathbb{Z})$ die zelluläre Kohomologie bezeichne.*

Nehmen wir nun an, dass die Menge $T^N \setminus A$ eine Zellzerlegung besitzt, so können wir wegen Satz 3.7 statt der Čech-Kohomologie auch die zelluläre und damit wegen Satz B.22 die singuläre Theorie betrachten. Dazu bemerken wir, dass $T^N \setminus A$ einen Teilraum von T^N darstellt; das Paar $(T^N, T^N \setminus A)$ stellt dann ein **Raumpaar** dar (siehe Satz B.30). Für Raumpaare existiert eine lange exakte Kohomologiesequenz, die deren **relative singuläre Kohomologiegruppen** enthält (Satz B.30).

In unserem Fall gilt (im Folgenden sollen Gruppen, deren Koeffizientengruppe nicht angegeben ist, stets Koeffizienten in \mathbb{Z} haben):

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(T^N, T^N \setminus A; \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\alpha^{q-1}} H^{q-1}(T^N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^{q-1}} H^{q-1}(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^q(T^N, T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(T^N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entscheidend für unsere Berechnungen sind nur die Homomorphismen α^i und β^i , daher sind auch nur diese explizit in der Sequenz aufgeführt. Die Kohomologie des Raumpaars $(T^N, T^N \setminus A)$ wirkt in der Sequenz störend. Wir wollen daher die Alexander-Lefschetz-Dualität (siehe z.B. [Br]) auf die Sequenz anwenden. Der Beweis des in dieser Form benötigten Satzes verwendet die Tatsache, dass die Menge A Whitney-stratifiziert ist [Ka]. Wir wollen hier nur das Ergebnis angeben. Es gilt [Ka]:

Satz 3.8

Sei $H^q(T^N, T^N \setminus A; \mathbb{Z})$ die q -te singuläre Kohomologiegruppe eines Raumpaars, bestehend aus einem N -dimensionalen Torus T^N und der Differenzmenge $T^N \setminus A$, beide mit derselben Topologie versehen, wobei A ein Arrangement affiner, verdickter Tori ist. Dann gilt $H^q(T^N, T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \simeq H_{N-q}(A)$.

Damit erhalten wir für unsere lange Kohomologiesequenz:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{N-q+1}(A; \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\alpha^{q-1}} H^{q-1}(T^N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^{q-1}} H^{q-1}(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H_{N-q}(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(T^N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wir haben nun das Problem, dass die Exaktheit der Sequenz alleine nicht ausreicht, um bei Kenntnis von $H_{N-q+1}(A; \mathbb{Z})$ und $H_{N-q}(A; \mathbb{Z})$ die Kohomologiegruppen $H^{q-1}(T^N \setminus A; \mathbb{Z})$ und $H^q(T^N \setminus A; \mathbb{Z})$ zu berechnen, was ja unser Ziel ist. Wir benötigen also weitere Informationen, z.B. über die Homomorphismen β^{q-1} und β^q .

Alternativ könnten wir auch Informationen über α^{q-1} und α^q verwenden, jedoch wird sich bei späteren Berechnungen zeigen, dass die Homomorphismen β^{q-1} und β^q die bessere Wahl darstellen.

Sind die Bilder dieser beiden Abbildungen bekannt, so können wir die Sequenz in mehrere exakte Sequenzen, getrennt nach Dimensionen, aufspalten, wie der nachfolgende Satz zeigt [Ka]:

Satz 3.9

Die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{N-q+1}(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^{q-1}} H^{q-1}(T^N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^{q-1}} H^{q-1}(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \\ \rightarrow H_{N-q}(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(T^N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

ist für $q \in \mathbb{Z}$ äquivalent zu einem System exakter Sequenzen der Form

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^{q-1}) \rightarrow H^{q-1}(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{N-q}(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^q) \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

Beweis. Für den Beweis haben wir nur zu zeigen, dass die untere Sequenz für alle $q \in \mathbb{Z}$ exakt ist, wenn man die Exaktheit der oberen Sequenz voraussetzt. Wir beginnen links. Offensichtlich ist der Kern von $\text{Im}(\beta^{q-1})$ unter der Abbildung β^{q-1} gleich 0 (denn durch die Einschränkung von $H^{q-1}(T^N; \mathbb{Z})$ auf $\text{Im}(\beta^{q-1})$ haben wir ja alle nichttrivialen Kernelemente ausgeschlossen). Die Exaktheit an den nächsten drei Elementen folgt aus der Exaktheit der obigen Sequenz. Die Exaktheit am letzten Element ist offensichtlich: Der Kern der letzten Abbildung ist $\text{Im}(\beta^q)$ und die vorletzte Abbildung ist genau die Abbildung β^q , deren Bild also dem Kern der darauffolgenden Abbildung entspricht. \square

Zur Berechnung der Kohomologiegruppen von Ω_T bleibt nun also noch die Homologie von A zu berechnen, dies wollen wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

3.3.2. Die Homologie von A

Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, dass sich die Berechnung der singulären Kohomologie von Ω_T auf die Berechnung der singulären Homologie von A zurückführen lässt. Die Struktur von A ist für eine Berechnung jedoch zunächst etwas unhandlich. Nun ist die Definition von A aber sehr allgemein, während wir für unsere Berechnungen nur einen Spezialfall benötigen. Wir wollen daher einige zusätzliche einschränkende Forderungen an A stellen.

Zunächst gilt nach [Ka] der folgende Satz:

Satz 3.10

Sei A ein Arrangement affiner, verdickter Tori. Haben alle Elemente in A einen gemeinsamen Schnittpunkt, so gibt es ein Arrangement \tilde{A} von gewöhnlichen affinen Tori, welches zu A homotopieäquivalent ist.

An der Homologie von A ändert sich nichts, wenn wir die verdickten Tori stetig verdünnen. Dies ist in vielen Fällen durchführbar, wobei darauf zu achten ist, dass sich das Schnittverhalten der verdünnten Tori nicht von dem der verdickten Tori unterscheidet (es dürfen keine neuen Schnittpunkte entstehen und alte Schnittpunkte müssen bestehen bleiben). Verdünnung ist nach Satz 3.10 insbesondere dann durchführbar, wenn alle verdickten Tori eine gemeinsame Schnittmenge haben: In diesem Fall können wir einen Punkt P aus der Schnittmenge auswählen, die Schnittmenge zu diesem Punkt kontrahieren und alle Tori in \tilde{A} durch P laufen lassen (siehe Abbildung 3.11). Die Bedingung von Satz 3.10 ist für unsere Rechenbeispiele stets erfüllt, wie wir sehen werden.

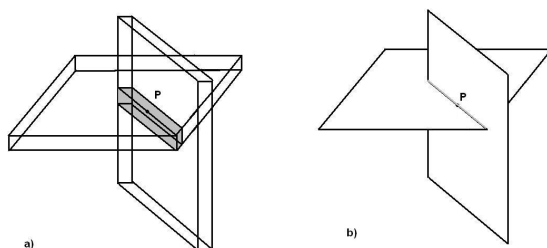


Abbildung 3.11.: Zur Verdünnbarkeit verdickter Tori

Zur Berechnung der Homologie von A wenden wir nun eine spektrale Mayer-Vietoris-Sequenz gemäß Satz B.32 an, da A Vereinigungen und Durchschnitte von topologischen Räumen enthält. Wir benötigen hier nur den Fall, dass sich alle Räume höchstens paarweise schneiden, wie in Abbildung 3.11 bereits dargestellt. Gibt es nämlich Schnittpunkte, in denen sich mehr als zwei Tori schneiden, so kann man den folgenden Satz anwenden [Ka]:

Satz 3.11

Sei \tilde{A} ein Arrangement aus m affinen Tori. Dann ist \tilde{A} homotopieäquivalent zu einem Arrangement A^Δ aus m affinen Tori und $\sum_k n_k$ kontrahierbaren Simplices (bzw. zu $n + 1$ -dimensionalen Hyperflächen homotopieäquivalenten n -dimensionalen Prismen), wobei n_k die Anzahl der Mannigfaltigkeiten angibt, in denen sich k affine Tori schneiden.

Statt eines Beweises wollen wir beschreiben, wie der Raum A^Δ anschaulich konstruiert werden kann. Eine formalere (mengentheoretische) Konstruktion findet sich in [Ka], ebenso ein Beweis für die Homotopieäquivalenz zu A , die wir hier nur anschaulich beschreiben wollen.

Betrachten wir das Arrangement \tilde{A} , so gibt es im allgemeinen Schnittpunkte der Elemente in \tilde{A} , in denen sich mehr als zwei Elemente gleichzeitig schneiden (Abbildung 3.12. a)).

Solche Schnittpunkte können wir nun durch einen Simplex ersetzen, ohne dass wir etwas an der Homologie von A ändern, dazu dehnen wir den Schnittpunkt einfach stetig aus, d.h. beide Räume sind homotopieäquivalent (wir führen sozusagen die Umkehrung zu einer Kontraktion aus). An der Anzahl der Tori in A ändert sich hierdurch natürlich nichts. Zusätzlich kommen jetzt aber noch so viele Simplices zur Menge A hinzu, wie es Schnittpunkte mit einer Schnittzahl größer als 2 gibt. Diese Simplices sind homotopieäquivalent zu Punkten. Man hat nun eine zu A homotopieäquivalente Menge aus Tori und Simplices, in der sich Objekte höchstens paarweise schneiden (Abbildung 3.12. b)).

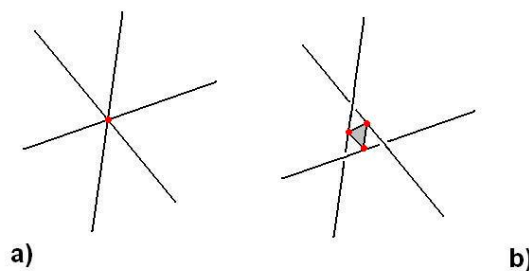


Abbildung 3.12.: a) mehrere affine Tori schneiden sich in einem Punkt b) der Schnittpunkt aus a) wird zu einem Simplex ausgedehnt, so dass sich an einer Stelle nur noch jeweils ein Torus mit einem Simplex schneidet, während sich die Tori nicht mehr gegenseitig schneiden.

Nachdem wir \tilde{A} gegebenenfalls durch A^Δ ersetzt haben, gehen wir für die Berechnung von $H^*(A; \mathbb{Z})$ vor wie in Satz B.32 bzw. in den vorangegangenen Bemerkungen, dies wollen wir in den nächsten Abschnitten für den Fall der Kodimensionen 1, 2 und 3 (für jeweils einen Spezialfall) genauer ausführen.

3.4. Tilings der Kodimension 1

Sehen wir uns nun den Fall der Kodimension 1 etwas genauer an, wobei wir uns auf den Fall von Tilings der Dimension 1 beschränken wollen, da dann die Kohomologie von Ω_T

sicher endlich erzeugt ist.

Wie aus Abbildung 3.8. am Beispiel des Fibonacci-Tilings ersichtlich ist, müssen wir als verbotene Zone zunächst einen einzelnen Punkt aus einem zweidimensionalen Torus ausschließen. Diesen müssen wir unendlich weit verdicken, da wir wegen der irrationalen Lage von $E_{||}$ schließen können, dass verschiedene Verdickungen nicht zusammenwachsen.

Nach einem Argument aus [FHK2] lässt sich der Raum Ω_T jedes Projektionstilings der Kodimension 1 darstellen als Komplettierung von k nulldimensionalen Tori zu einem d -dimensionalen Torus. Ist A (wie im Fall der Fibonacci-Kette) zusammenhängend, so gilt nach Satz B.16 $H_0(A) = \mathbb{Z}$, während alle weiteren Homologiegruppen trivial sind. Von den Sequenzen (3.7) benötigen wir jetzt die ersten drei:

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^{-1}) \rightarrow H^{-1}(T^2 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(T^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow H^0(T^2 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(T^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow H^1(T^2 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^2} H^2(T^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Wir erhalten:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\alpha^0} \mathbb{Z} \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H^0(T^2 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \xrightarrow{\alpha^1} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow H^1(T^2 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha^2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Und damit:

$$H^0(T^2 \setminus A) \simeq \mathbb{Z}, \quad (3.14)$$

$$H^1(T^2 \setminus A) \simeq \mathbb{Z}^2. \quad (3.15)$$

Wir sehen, dass sich das Ergebnis mit den Ergebnissen in [FHK1] deckt, wenn man dort für die Tilingdimension $d = 1$ einsetzt.

3.5. Tilings der Kodimension 2

Wesentlich komplizierter stellt sich der Fall von Tilings mit $d = k = 2$ dar; diesen wollen wir an dieser Stelle etwas ausführlicher betrachten, da wir die Ergebnisse, die wir in diesem Abschnitt erhalten werden für unsere Rechenbeispiele in den Kapiteln 5 und 6 benötigen.

Sei also $d = k = 2$. Zunächst wollen wir einige Aussagen über die Homologie von A treffen: Nach der im Anschluss an Satz 3.11 beschriebenen Konstruktion bestehen die Elemente in A^Δ aus m affinen Tori und $\sum_k n_k$ Simplices. Die Elemente schneiden sich in $\sum_k (k \cdot n_k)$ Punkten, wobei sich nach Konstruktion in jedem Punkt nur zwei Elemente schneiden. Nehmen wir ferner an, dass sich alle Elemente in A^Δ punktweise schneiden (dies ist bei unseren Rechenbeispielen stets der Fall, wie wir sehen werden). Jetzt gehen wir vor wie in Satz B.32 und berechnen die Kettengruppen $C_{p,q}$.

Sind (wie in unserem Fall) alle affinen Tori in A^Δ zweidimensional, so besteht jeder Torus aus einer 2-Kette, zwei 1-Ketten und einer 0-Kette. Jeder der $\sum_k n_k$ Simplices ist kontrahierbar und besteht damit lediglich aus einer 0-Kette. Wir erhalten damit gemäß Abschnitt B.3.7:

$$C_{0,2} = \mathbb{Z}^m, C_{0,1} = \mathbb{Z}^{2m}, C_{0,0} = \mathbb{Z}^{m+\sum_k n_k}, C_{1,0} = \mathbb{Z}^{\sum_k (k \cdot n_k)}. \quad (3.16)$$

Alle anderen Kettengruppen sind trivial (da sich alle Objekte nur punktweise schneiden und es keine Ketten der Ordnung > 2 gibt). Der zugehörige Kettenkomplex sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & C_{0,2} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & C_{0,1} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & C_{0,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (3.17)$$

Nach Satz B.32 haben wir jetzt die Homologiegruppen bezüglich der vertikalen Differentiale ∂ zu berechnen, dies sind die "normalen" Differentiale wie in Abschnitt B.3.1 definiert.

Wir müssen nun also wissen, wie die Differentiale auf die jeweiligen Kettengruppen wirken, oder, anders ausgedrückt, wie die Ränder der jeweiligen Ketten aussehen. Da die Gruppen $C_{0,2}$ und $C_{0,1}$ jedoch ausschließlich Ketten von zweidimensionalen Tori enthalten und die Ränder dieser Ketten bekannt sind, fällt es nicht schwer, die Homologie der Kettenkomplexe zu berechnen. Wir haben

$$0 \rightarrow C_{0,2} \xrightarrow{\partial_2} C_{0,1} \xrightarrow{\partial_1} C_{0,0} \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

womit wir rechnen: $E_{0,2}^1 = H_2 = Ker(\partial_2)/0 = C_{0,2} = \mathbb{Z}^m$, $E_{0,1}^1 = H_1 = Ker(\partial_1)/0 = C_{0,1} = \mathbb{Z}^{2m}$, $E_{0,0}^1 = H_0 = Ker(\partial_0)/0 = C_{0,0} = \mathbb{Z}^{m+\sum_k n_k}$.

Für die zweite Spalte erhalten wir einfach

$$0 \rightarrow C_{1,0} \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

woraus wir auch ohne Kenntnis der Wirkung der Differentiale sofort $E_{1,0}^1 = C_{1,0} = \mathbb{Z}^{\sum_k (k \cdot n_k)}$ ablesen.

Der zugehörige spektrale Komplex sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leftarrow & E_{0,2}^1 & \longleftarrow & 0 \leftarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leftarrow & E_{0,1}^1 & \longleftarrow & 0 \leftarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leftarrow & E_{0,0}^1 & \longleftarrow & E_{1,0}^1 \leftarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0. \end{array} \quad (3.20)$$

Die vertikalen Differentiale sind nach den Überlegungen in Abschnitt B.3.7 trivial. Für das horizontale Differential $\delta : E_{1,0}^1 \mapsto E_{0,0}^1$ erhalten wir den Rang $m + \sum_k n_k - p$, wobei

p für die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in A steht.⁵ Wir erhalten zunächst unmittelbar:

$$E_{0,2}^2 = \mathbb{Z}^m, E_{0,1}^2 = \mathbb{Z}^{2m}. \quad (3.21)$$

Zur Bestimmung der übrigen Komponenten der Spektralsequenz haben wir wieder die Homologie eines Kettenkomplexes zu berechnen:

$$0 \rightarrow E_{1,0}^1 \xrightarrow{\delta} E_{0,0}^1 \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Wir erhalten: $E_{1,0}^2 = Ker(\delta)/0 = \mathbb{Z}^{\sum_k(k \cdot n_k) - (m + \sum_k n_k - p)}$ (unter Verwendung von Satz A.5), also $E_{1,0}^2 = \mathbb{Z}^{-m+p+\sum_k((k-1) \cdot n_k)}$ und $E_{0,0}^2 = E_{0,0}^1/Im(\delta) = \mathbb{Z}^{m+\sum_k n_k - (m + \sum_k n_k - p)} = \mathbb{Z}^p$. Jetzt können wir Satz B.32 anwenden und erhalten für die Homologiegruppen von A :

$$H_0(A; \mathbb{Z}) \simeq E_{0,0}^2 = \mathbb{Z}^p, \quad (3.23)$$

$$H_1(A; \mathbb{Z}) \simeq E_{0,1}^2 \oplus E_{1,0}^2 = \mathbb{Z}^{-m+p+\sum_k((k-1) \cdot n_k)} \oplus \mathbb{Z}^{2m} = \mathbb{Z}^{m+p+\sum_k((k-1) \cdot n_k)}, \quad (3.24)$$

$$H_2(A; \mathbb{Z}) \simeq E_{0,2}^2 = \mathbb{Z}^m. \quad (3.25)$$

Nachdem wir die Homologie von A berechnet haben, verwenden wir das System von exakten Sequenzen (3.7), von dem wir wieder die ersten drei Sequenzen benötigen:

$$0 \rightarrow Im(\beta^0) \rightarrow H^0(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T^4; \mathbb{Z}) \rightarrow Im(\beta^1) \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

$$0 \rightarrow Im(\beta^1) \rightarrow H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(T^4; \mathbb{Z}) \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow 0, \quad (3.27)$$

$$0 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(T^4; \mathbb{Z}) \rightarrow Im(\beta^3) \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

⁵Man kann sich vorstellen, dass δ jedem Schnittpunkt die 0-Kette zuordnet, welche aus der 0-Kette des schneidenden Torus und der 0-Kette des Simplex gebildet wird. Damit erhält man $m + \sum_k n_k$ linear unabhängige Ketten. Das Auftreten von p lässt sich dadurch begründen, dass die Bettizahl von $H_0(A)$ der Anzahl der Zusammenhangskomponenten p entsprechen muss.

Unter Beachtung der Tatsache, dass weder A noch $T^4 \setminus A$ 3-Zykel enthalten ⁶, unter Verwendung der Formel $H^k(T^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$ für die Kohomologie des n -dimensionalen Torus ⁷ und aus der Tatsache, dass Ω_T zusammenhängend ist (Korollar 1.28) erhalten wir mit (3.23) - (3.25):

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow 0, \quad (3.29)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^6 \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow 0, \quad (3.30)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^{m+p+\sum_k \binom{k-1}{n_k}} \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow \text{Im}(\beta^3) \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

Aus (3.29) lässt sich zunächst folgern, dass $\text{Im}(\beta^0) \simeq \mathbb{Z}$ und $\text{Im}(\beta^1) \simeq \mathbb{Z}^4$ gilt. Zu diesem Schluss gelangen wir, wenn wir (3.29) in die beiden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (3.32)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

zerlegen und Beispiel A.16 anwenden. Für $\text{Im}(\beta^3)$ erhalten wir nach Definition der Abbildung $\beta^3 : H^3(T^4; \mathbb{Z}) \mapsto H^3(T^4 \setminus A; \mathbb{Z})$ den Wert $\text{Im}(\beta^3) = 0$ (denn das zu erzeugende Tiling hat Dimension 2 und es können keine 3-Koketten im Tilingraum auftreten). Für $\text{Im}(\beta^2)$ lassen sich zunächst keine allgemeinen Aussagen treffen; diese Gruppe ist für jedes Tiling gesondert zu berechnen. Dazu sehen wir uns an, wie die Abbildung β^2 definiert ist. Wir haben

$$\beta^2 : H^2(T^4; \mathbb{Z}) \mapsto H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}). \quad (3.34)$$

Aus dem Isomorphiesatz (siehe z.B.[Bo]) folgt:

$$\text{Im}(\beta^2) \simeq H^2(T^4; \mathbb{Z}) / \text{Ker}(\beta^2). \quad (3.35)$$

Aus der Exaktheit der Sequenz (3.6) erhalten wir wegen $\text{Ker}(\beta^2) \simeq \text{Im}(\alpha^2)$:

$$\text{Im}(\beta^2) \simeq H^2(T^4; \mathbb{Z}) / \text{Im}(\alpha^2). \quad (3.36)$$

⁶Dies können wir uns anhand der Anderson-Putnam-Methode plausibel machen: Es treten in den Homologiegruppen der AP-Komplexe nur Zellen der Dimension kleiner oder gleich der Tiling-Kodimension auf, dasselbe gilt dann offensichtlich für $T^N \setminus A$, falls das Tiling wie in unseren Beispielen auch durch eine Substitution entstehen kann.

⁷welche sich unmittelbar ergibt, wenn man beachtet, dass alle Differentiale trivial sind und die k -te Kettengruppe den Rang $\binom{n}{k}$ hat.

Nun ist aber aufgrund der Poincaré-Dualität die Abbildung α^2 äquivalent zur Abbildung $H_2(A; \mathbb{Z}) \mapsto H_2(T^4; \mathbb{Z})$, welche durch die Inklusion $A \subset T^4$ induziert wird [Ka]. Wir benutzen für die weitere Berechnung nun ein Argument aus [GHK]:

Die 2-Zellen des 4-dimensionalen Torus werden aufgespannt von den Vektorpaaren (b_1, b_2) , (b_1, b_3) , (b_1, b_4) , (b_2, b_3) , (b_2, b_4) , (b_3, b_4) , welche die Gittervektoren des Gitters Γ darstellen. Kennen wir außerdem die Vektoren, die die Tori aufspannen (die von diesen Vektoren aufgespannten Gitter wollen wir mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ bezeichnen), so erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 3.12

Sei $\beta^2 : H^2(T^N; \mathbb{Z}) \mapsto H^2(T^N \setminus A; \mathbb{Z})$, wobei $0 \leq i \leq N$ gelten soll. Dann gilt

$$Im(\beta^2) = \Lambda_2 \Gamma / \langle \Lambda_2 \Gamma^1, \Lambda_2 \Gamma^2, \dots, \Lambda_2 \Gamma^m \rangle.$$

Wir hatten in Beispiel 3.1 gesehen, dass wir Γ durch dessen Projektion auf den physikalischen Raum bestimmen können, während die Γ^i aus der Form der Hyperfläche zu berechnen sind, wie wir in unseren Rechenbeispielen vorführen wollen.

Zur Berechnung der ersten und zweiten Kohomologiegruppe sind jetzt die folgenden exakten Sequenzen auszuwerten:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^6 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow 0, \tag{3.37}$$

$$0 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^{m+p+\sum_k((k-1) \cdot n_k)} \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow 0. \tag{3.38}$$

Dies lässt sich mit Satz A.11 bewerkstelligen. Wir erhalten für (3.37):

$$0 \rightarrow C_1 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow C_2 \rightarrow 0, \tag{3.39}$$

$$0 \rightarrow C_2 \rightarrow H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow C_3 \rightarrow 0, \tag{3.40}$$

$$0 \rightarrow C_3 \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow C_4 \rightarrow 0, \tag{3.41}$$

$$0 \rightarrow C_4 \rightarrow \mathbb{Z}^6 \rightarrow C_5 \rightarrow 0, \tag{3.42}$$

$$0 \rightarrow C_5 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow C_6 \rightarrow 0. \tag{3.43}$$

Mit Satz A.15 folgt: $C_6 = 0 \Rightarrow C_5 = Im(\beta^2) \Rightarrow C_4 = \mathbb{Z}^{6-Rang(Im(\beta^2))} \Rightarrow C_3 = \mathbb{Z}^{m-6+Rang(Im(\beta^2))}$ bzw. $C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \mathbb{Z}^4$ und damit schließlich $H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \simeq C_2 \oplus C_3$ bzw.

$$H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{m-2+\text{Rang}(Im(\beta^2))}. \quad (3.44)$$

Für (3.38) erhalten wir analog:

$$0 \rightarrow C_1 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow C_2 \rightarrow 0, \quad (3.45)$$

$$0 \rightarrow C_2 \rightarrow H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow C_3 \rightarrow 0, \quad (3.46)$$

$$0 \rightarrow C_3 \rightarrow \mathbb{Z}^{m+p+\sum_k((k-1) \cdot n_k)} \rightarrow C_4 \rightarrow 0, \quad (3.47)$$

$$0 \rightarrow C_4 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow C_5 \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

Und wiederum mit Satz A.15 sukzessive: $C_5 = 0 \Rightarrow C_4 = \mathbb{Z}^4 \Rightarrow C_3 = \mathbb{Z}^{m+p-4+\sum_k((k-1) \cdot n_k)}$ bzw. $C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = Im(\beta^2)$ und damit unmittelbar $H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \simeq C_2 \oplus C_3$ bzw. eingesetzt

$$H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) \simeq Im(\beta^2) \oplus \mathbb{Z}^{m+p-4+\sum_k((k-1) \cdot n_k)}. \quad (3.49)$$

Setzen wir noch $p = 1$ ein, so erhalten wir insgesamt den folgenden Satz, auf dem unsere weiteren Berechnungen basieren:

Satz 3.13

Sei T ein quasiperiodisches Tiling der Kodimension 2, das aus einem vierdimensionalen Hyperflächensystem, bestehend aus einem vierdimensionalen Gitter Γ mit zweidimensionalen polytopen atomaren Hyperflächen durch Projektion entsteht. Dann gibt es ein Arrangement A aus m affinen Tori der Dimension zwei, welche äquivalent zu zweidimensionalen Gittern $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^m$ sind, so dass $\check{H}^(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^*(T^4 \setminus A; \mathbb{Z})$ gilt. Ist A zusammenhängend, so gilt*

$$\begin{aligned} H^0(\Omega_T; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}, \\ H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}^{m-2+\text{Rang}(Im(\beta^2))}, \\ H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) &\simeq Im(\beta^2) \oplus \mathbb{Z}^{m-3+\sum_k((k-1) \cdot n_k)}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet n_k die Anzahl der Punkte, in denen sich k affine Tori aus A gleichzeitig schneiden. Für β^2 gilt ferner

$$\text{Im}(\beta^2) \simeq \Lambda_2\Gamma / \langle \Lambda_2\Gamma^1, \Lambda_2\Gamma^2, \dots, \Lambda_2\Gamma^m \rangle. \quad (3.50)$$

3.6. Tilings der Kodimension 3

In diesem Abschnitt wollen wir noch einen kurzen Blick auf Tilings der Kodimension 3 werfen, wobei wir uns auch hier wieder auf den Fall der Tilingdimension 3 beschränken wollen; unser Gitter Γ hat damit die Dimension 6. Sehen wir uns dazu zunächst die exakten Sequenzen (3.7) an. Wir wollen annehmen, dass die Kohomologiegruppen nur bis einschließlich zur dritten Gruppe nichttrivial sind und dass A wegzusammenhängend ist und nur Tori bis zur Dimension 4 enthält. Dann benötigen wir die folgenden Sequenzen:

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^{-1}) \rightarrow H^{-1}(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_6(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(T^6; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow 0, \quad (3.51)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow H^0(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_5(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow 0, \quad (3.52)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow H^1(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^2} H^2(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow 0, \quad (3.53)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow H^2(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^3} H^3(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^3) \rightarrow 0, \quad (3.54)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^3) \rightarrow H^3(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^4} H^4(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^4) \rightarrow 0, \quad (3.55)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^4) \rightarrow H^4(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^5} H^5(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^5) \rightarrow 0, \quad (3.56)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^5) \rightarrow H^5(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^6} H^6(T^N; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Im}(\beta^6) \rightarrow 0. \quad (3.57)$$

Setzen wir die (nach Anwendung von Satz B.16) bekannten Größen ein, so erhalten wir:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\alpha^0} \mathbb{Z} \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow 0, \quad (3.58)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^0) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \xrightarrow{\alpha^1} \mathbb{Z}^6 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow 0, \quad (3.59)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^1) \rightarrow H^1(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^2} \mathbb{Z}^{15} \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow 0, \quad (3.60)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^2) \rightarrow H^2(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^3} \mathbb{Z}^{20} \rightarrow \text{Im}(\beta^3) \rightarrow 0, \quad (3.61)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^3) \rightarrow H^3(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^4} \mathbb{Z}^{15} \rightarrow \text{Im}(\beta^4) \rightarrow 0, \quad (3.62)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^4) \rightarrow 0 \rightarrow H_1(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^5} \mathbb{Z}^6 \rightarrow \text{Im}(\beta^5) \rightarrow 0, \quad (3.63)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\beta^5) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha^6} \mathbb{Z} \rightarrow \text{Im}(\beta^6) \rightarrow 0. \quad (3.64)$$

Aus (3.64) folgt zunächst $Im(\beta^6) = Im(\beta^5) = 0$. Damit folgt gilt für (3.63): $H_1(A) \simeq \mathbb{Z}^6$ und $Im(\beta^4) = 0$. Aus (3.58) und (3.59) folgt schließlich $Im(\beta^0) \simeq \mathbb{Z}$ und $Im(\beta^1) \simeq \mathbb{Z}^6$.

Damit bleiben die drei Sequenzen

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^6 \rightarrow H^1(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^2} \mathbb{Z}^{15} \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow 0, \quad (3.65)$$

$$0 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow H^2(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^3} \mathbb{Z}^{20} \rightarrow Im(\beta^3) \rightarrow 0, \quad (3.66)$$

$$0 \rightarrow Im(\beta^3) \rightarrow H^3(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^4} \mathbb{Z}^{15} \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad (3.67)$$

auszuwerten. Nehmen wir wieder an, dass die Tori sich so schneiden, dass keine weiteren 4-Ketten in A entstehen, A also m 4-Tori enthält. (3.65) wird dann:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^6 \rightarrow H^1(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\alpha^2} \mathbb{Z}^{15} \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow 0. \quad (3.68)$$

Damit erhalten wir mit den Sätzen A.11 und A.15:

$$H^1(T^N \setminus A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{Rang(Im(\beta^2))+m-9}.$$

Aus den Sequenzen (3.66) und (3.67) können wir noch einige Folgerungen ziehen. Zunächst bemerken wir, dass $H_3(A; \mathbb{Z})$ in unserem Fall eine freie abelsche Gruppe ist - dies folgt aus der "Form" der zugehörigen Spektralkomplexe. Aus der Sequenz (3.66) können wir dann folgern, dass $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z})$ genau dann einen nichttrivialen Torsionsteil hat, wenn $Im(\beta^2)$ einen solchen hat; die beiden nichttrivialen Torsionsteile sind dann identisch. Über die Gruppe $H_2(A; \mathbb{Z})$ können wir keine allgemeine Aussage treffen, deshalb ist bei der weiteren Analyse von Sequenz (3.67) eine Fallunterscheidung notwendig:

- Sei $H_2(A; \mathbb{Z})$ eine freie Gruppe. Dann hat $\check{H}^3(\Omega_T; \mathbb{Z})$ genau dann einen nichttrivialen Torsionsteil, wenn $Im(\beta^3)$ einen solchen hat; die beiden nichttrivialen Torsionsteile sind dann identisch.
- Hat $H_2(A; \mathbb{Z})$ Torsion, so können wir ohne zusätzliche Information über die Abbildungen in (3.67) keine Aussage über einen eventuellen Torsionsteil von $\check{H}^3(\Omega_T; \mathbb{Z})$ machen; in diesem Fall können wir nur über die Ränge argumentieren.

Ist die Homologie von A bekannt, so können wir die Kohomologiegruppen explizit berechnen.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.14

Sei T ein Tiling, das durch Projektion von Gitterpunkten eines sechsdimensionalen Torus' auf einen dreidimensionalen physikalischen Raum entsteht. Dann gelten für die Čech-Kohomologiegruppen von Ω_T die folgenden Aussagen:

i) $\check{H}^0(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

ii) $\check{H}^1(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\text{Rang}(Im(\beta^2))+m-9}$.

iii) $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq Im(\beta^2) \oplus \mathbb{Z}^{\text{Rang}(H_3(A; \mathbb{Z})) - \text{Rang}(Im(\beta^3)) + 20}$.

iv) $\text{Rang}(\check{H}^3(\Omega_T; \mathbb{Z})) = \text{Rang}(Im(\beta^3)) + \text{Rang}(H_2(A; \mathbb{Z})) - 15$ und $\check{H}^3(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq Im(\beta^3) \oplus \mathbb{Z}^{\text{Rang}(H_2(A; \mathbb{Z})) - 15}$, falls $H_2(A; \mathbb{Z})$ frei ist.

v) $\text{Rang}(\check{H}^k(\Omega_T; \mathbb{Z})) = 0$ für alle $k > 3, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Aussage i) erhalten wir, wenn wir Korollar 1.28 mit Satz B.28 kombinieren. Die Aussagen ii) – iv) folgen durch Anwendung der Sätze A.11 und A.15 auf die Sequenzen (3.60) - (3.62). Aussage v) erhalten wir schließlich, wenn wir beachten, dass im Fall von Substitutionstilings dieselbe Aussage gilt, wie man sich anhand der Anderson-Putnam-Komplexe klarmacht; diese Eigenschaft überträgt sich auf Projektionstilings. Für einen sauberen Beweis müsste man mit Čech-Kokettengruppen argumentieren, was wir an dieser Stelle nicht tun wollen, siehe dazu z.B. [BT]. □

Wir wollen diesen Abschnitt noch mit einer Aussage über die Homologiegruppen von A beschließen. Eine explizite Berechnung mittels spektraler Sequenzen stellt sich in diesem Fall wesentlich komplizierter dar, da man mehr als zwei verschiedene Typen von Differentialen benötigen würde. Auf jeden Fall lässt sich eine Aussage über drei der fünf nichttrivialen Homologiegruppen von A machen, welche wir im Laufe dieses Abschnittes bereits gezeigt haben und hier noch einmal zusammenfassen wollen:

Satz 3.15

Sei T wie in Satz 3.14. Ist A wegzusammenhängend, schneiden sich die Tori in A nur in 0-Tori oder in 2-Tori und schneiden sich in der simplizialen Resolution höchstens drei Objekte gleichzeitig, so lassen sich für die Homologiegruppen von A folgende Aussagen machen:

i) $H_0(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

ii) $H_1(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^6$.

iii) $H_4(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^m$.

Über die Homologiegruppen $H_2(A; \mathbb{Z})$ und $H_3(A; \mathbb{Z})$ macht Satz 3.15 keine Aussage, insbesondere lässt sich keine Aussage darüber treffen, ob die Gruppe $H_2(A; \mathbb{Z})$ eine freie Gruppe ist oder Torsion hat. Speziell für das Ammann-Kramer-Tiling lassen sich die Homologiegruppen aus geometrischen Überlegungen gewinnen, siehe dazu [Ka]. Ist die Gruppe $H_2(A; \mathbb{Z})$ freie Gruppe, so lassen sich weitere Aussagen über die Kohomologiegruppen von Ω_T z.B. aus den Arbeiten [FHK1] und [FHK2] entnehmen.

3.7. Torsion in der ganzzahligen Kohomologie von Projektionstilings

3.7.1. Projektionstilings der Kodimension eins

Wie wir in Abschnitt 3.4 gesehen hatten, kann für Projektionstilings der Dimension eins und der Kodimension eins keine Torsion in den Kohomologiegruppen auftreten. Auf ähnliche Weise können wir für Tilings der Kodimension 1 argumentieren, welche (bei endlich erzeugter Kohomologie) beliebige Dimension haben [FHK2].

3.7.2. Projektionstilings der Kodimension zwei

Betrachten wir zunächst noch einmal unter dem Aspekt der Torsion den Mayer-Vietoris-Kettenkomplex (3.17), welcher sich ergab unter der Annahme, dass sich die Elemente von A nur punktweise schneiden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & C_{0,2} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & C_{0,1} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & C_{0,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{3.69}$$

Die Kettengruppen in diesem Komplex sind freie Gruppen; diese erhielten wir unmittelbar als Kettengruppen der Elemente in A bzw. deren Schnittmannigfaltigkeiten. Hier kann also keine Torsion auftreten.

Sehen wir uns jetzt den ersten Spektralkomplex (3.20) nochmals an:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & E_{0,2}^1 & \longleftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & E_{0,1}^1 & \longleftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \leftarrow & E_{0,0}^1 & \longleftarrow & E_{1,0}^1 & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{3.70}$$

Bei der Berechnung der Spektralgruppen hatten wir gesehen, dass wir stets nur die triviale Gruppe herausdividiert hatten. Auch hier kann also keine Torsion hinzukommen.

Schließlich wird aus dem letzten Berechnungsschritt in Abschnitt 3.5. ersichtlich, dass keine Torsion in den Homologiegruppen von A auftreten kann: Für die beiden Spektralgruppen $E_{0,2}^2$ und $E_{0,1}^2$ ist das klar. In der Gruppe $E_{1,0}^2$ kann keine Torsion auftreten, da $\text{Ker}(\delta)$ eine freie Gruppe ist (denn $E_{1,0}^1$ enthält keinen nichttrivialen Torsionsteil, also kann ein solcher auch nicht im Kern von δ liegen). Für die Gruppe $E_{0,0}^2$ kann deshalb keine Torsion auftreten, weil dann $H_0(A; \mathbb{Z})$ Torsion hätte, diese Gruppe ist jedoch nach Satz B.16 frei.

Damit stellen wir zunächst fest, dass eine eventuelle Torsion in Tilings der Kodimension zwei nicht durch die Homologie von A auftreten kann. Dies ist zugleich eine Rechtfertigung für unsere bisherigen Argumentationen, bei der wir die Homologie von A stets als frei angenommen hatten. Unter den Voraussetzungen, dass A frei ist, gilt jetzt Satz 3.13. Hier erkennen wir sogleich, dass die einzige Möglichkeit für das Auftreten von Torsion in Tilings der Kodimension 2 die Abbildung β^2 darstellt:

Satz 3.16

Sei T ein Tiling der Kodimension zwei, welches aus einem vierdimensionalen Hyperflächensystem entsteht. Dann sind die Čech-Kohomologiegruppen $\check{H}^0(\Omega_T; \mathbb{Z})$ und $\check{H}^1(\Omega_T; \mathbb{Z})$ immer freie abelsche Gruppen, während die Gruppe $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z})$ einen nichttrivialen Torsionsteil enthalten kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Bild der Abbildung β^2 einen solchen Torsionsteil enthält. \square

Dieser Satz deckt sich mit den Ergebnissen in [GHK]; dort wurde Satz 3.16 in etwas größerer Allgemeinheit gezeigt.

3.7.3. Projektionstilings der Kodimension drei

Für den Fall von Projektionstilings der Kodimension drei und Dimension drei haben wir das Auftreten von Torsion bereits in den Sätzen 3.14 und 3.15 formuliert. Wir fassen das Ergebnis nochmals zusammen:

Satz 3.17

Sei T ein Tiling der Kodimension drei, welches aus einem sechsdimensionalen Hyperflächensystem entsteht. Dann sind die Čech-Kohomologiegruppen $\check{H}^0(\Omega_T; \mathbb{Z})$ und $\check{H}^1(\Omega_T; \mathbb{Z})$ immer freie abelsche Gruppen, ebenso die singuläre Homologiegruppe $H_3(A; \mathbb{Z})$. Die Gruppe $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z})$ genau dann einen nichttrivialen Torsionsteil, wenn $\text{Im}(\beta^3)$ einen solchen hat. Ist $H_2(A; \mathbb{Z})$ frei abelsch, so hat $\check{H}^3(\Omega_T; \mathbb{Z})$ genau dann Torsion, wenn die Gruppe $\text{Im}(\beta^2)$ Torsion aufweist. \square

4. Die rationale und die reelle Čech-Kohomologie von Tilingräumen

Wir hatten uns bisher mit Kohomologiegruppen von Tilingräumen mit ganzzahligen Koeffizienten beschäftigt, d.h. jedes Element aus jeder Kokettengruppe ließ sich als ganzzahlige Linearkombination von erzeugenden Elementen dieser Gruppe darstellen. Wir wollen nun untersuchen, was bei einem Koeffizientenwechsel zu rationalen oder reellen Koeffizienten geschieht; damit stellen wir den Zusammenhang zu früheren Arbeiten her. Hätten wir die Kohomologiegruppen z.B. mittels der in [FHK1] oder [Ka] angegebenen Formeln berechnet, so hätten wir genau die rationale Kohomologie erhalten.

Der für unsere Betrachtung wesentliche Unterschied zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{Z} ist der, dass es sich bei \mathbb{Q} um einen Körper handelt, bei \mathbb{Z} hingegen nicht; wir können also in \mathbb{Q} im Gegensatz zu \mathbb{Z} durch jedes von null verschiedene Element ohne Rest teilen. Insbesondere folgt daraus, dass in der Kohomologie mit Koeffizienten in einem Körper keine Torsion auftreten kann, wie wir nun zeigen wollen.

Ist die Kohomologie $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ endlich erzeugt, so gilt mit Satz A.2 (da es sich um eine abelsche Gruppe handelt):

$$\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_i} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0, p_1, p_2, \dots, p_k \text{ prim.} \quad (4.1)$$

Wir können dies in der Form

$$\check{H}^*(\Omega; \mathbb{Z}) \simeq F \oplus T \quad (4.2)$$

schreiben, wobei F für den freien Teil und T für den Torsionsteil von $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ steht.

Der Koeffizientenwechsel erfolgt nun mittels Tensorierung der Kokettengruppen (siehe Satz B.34). Wir hatten die Tensorierung nur für singuläre Kohomologiegruppen definiert, was sich jedoch nicht weiter störend auswirkt; dieselbe Argumentation lässt sich auf beliebige Kohomologiegruppen übertragen.

Für den Fall rationaler Koeffizienten gilt nach Satz B.33 und Satz B.37 (a):

$$\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Q}) \simeq \check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}). \quad (4.3)$$

Wir haben daher das Tensorprodukt

$$(F \oplus T) \otimes \mathbb{Q} = (F \otimes \mathbb{Q}) \oplus (T \otimes \mathbb{Q}) \quad (4.4)$$

zu bestimmen. Dazu ziehen wir Satz B.34 und Satz B.35 heran und erhalten den schließlich den folgenden Satz:

Satz 4.1

Sei $\check{H}^(\Omega_T; \mathbb{Z})$ die Kohomologiegruppe von Ω_T mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Ist $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ endlich erzeugt, so gilt $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^k$, wobei k der Rang des freien Teiles von $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ ist. \square*

Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^k$ gilt:

Satz 4.2

Sei $\check{H}^(\Omega_T; \mathbb{Z})$ die Kohomologiegruppe von Ω_T mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Ist $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ endlich erzeugt, so gilt $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^k$, wobei k der Rang des freien Teiles von $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ ist. \square*

Durch den Übergang zu rationalen oder reellen Koeffizienten wird der Torsionsteil also einfach weggelassen; dies entspricht genau der Betrachtungsweise in [FHK1], [FHK2], [GaeKe] und [Ka], womit sich die dort angegebenen Formeln zur Berechnung der Kohomologie von Projektionstilings der Kodimension 2 als Spezialfall von Satz 3.13 ergeben. Das in [FHK1], [FHK2] bzw. [GaeKe] dargestellte Verfahren wurde bereits in [GHK] auf den ganzzahligen Fall erweitert, die Erweiterung des hierzu äquivalenten Verfahrens aus [Ka] auf ganzzahlige Koeffizienten haben wir in Kapitel 3 durchgeführt.

Der Fall reeller Koeffizienten spielt z.B. eine Rolle, wenn man untersuchen möchte, wie sich der Tilingraum Ω_T verhält, wenn die Tiles in T deformiert werden, siehe dazu [Sa3] und [Sa5].

Etwas komplizierter ist der Fall, dass die Koeffizienten aus endlichen Körpern stammen (also z.B. aus \mathbb{Z}_2), dieser Fall ist jedoch eher von theoretischem Interesse und wird in [GHK] abgehandelt.

Nachdem wir auf diese Weise den Zusammenhang zwischen der in den Kapiteln 2 und 3 hergestellten Theorie und den Arbeiten [FHK1], [FHK2],[GaeKe] und [Ka] hergestellt haben, wollen wir uns nun einigen konkreten Berechnungen zuwenden. Ziel der Berechnungen

wird sein, eine geometrische Interpretation der Torsion in Tilings der Kodimension zwei zu gewinnen.

5. Die Čech-Kohomologie des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings

Unsere bisher dargestellten theoretischen Ausführungen sollen im Folgenden auf zwei quasi-periodische Tilings der Kodimension zwei konkret angewandt werden. Das erste Tiling, das wir auf diese Weise untersuchen möchten, ist das **gefärbte Quadrat-Rechteck-Tiling**, das wir auch mit "gefärbtes QR-Tiling" oder einfach "GQR-Tiling" bezeichnen wollen (Abbildung 5.1.).

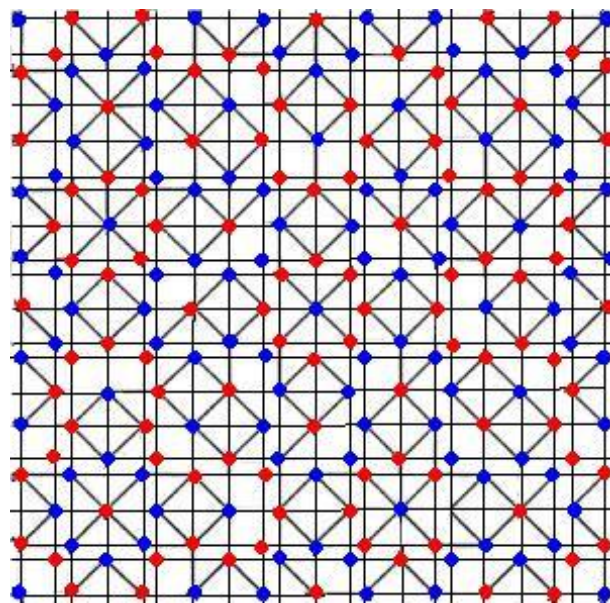


Abbildung 5.1.: Das gefärbte Quadrat-Rechteck-Tiling

Wir erhalten dieses Tiling, indem wir zunächst die Vertices des oktagonalen Ammann-Beenker-Tiling (Abbildung 1.4.) mit einer Färbung versehen und anschließend weitere Vertices hinzunehmen, so dass keine diagonalen Kanten mehr auftreten. Wir betrachten dabei die auftretenden Rechtecke und Quadrate als Tiles, die vom Ammann-Beenker-Tiling übrigen diagonalen Kanten seien keine Kanten des neuen Tilings (siehe Abbildung 5.2.).

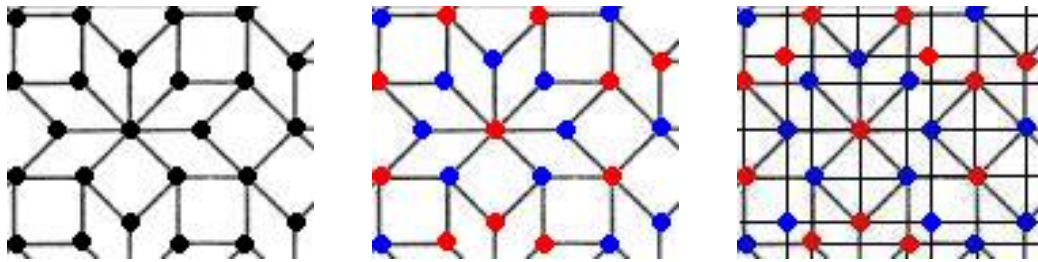


Abbildung 5.2.: Zunächst werden die Vertices des Ammann-Beenker-Tilings gefärbt. Zu diesen Vertices kommen dann weitere gefärbte Vertices hinzu.

Bezogen auf die atomare Hyperfläche bedeutet das, dass wir das Gitter Γ des oktagonalen Ammann-Beenker-Tilings beibehalten, jedoch zunächst die Hyperflächen mit einer Färbung versehen und im nächsten Schritt zu den ursprünglich oktagonalen Hyperfläche jeweils vier weitere Ecken hinzunehmen, so dass die verwendeten Hyperflächen Quadraten entsprechen, siehe dazu Abbildung 5.3..

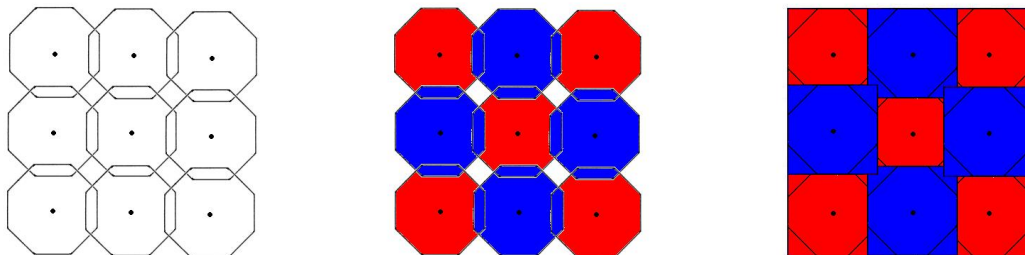


Abbildung 5.3.: Entstehung der Hyperflächen des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings: Die Hyperflächen des Ammann-Beenker-Tilings werden zunächst gefärbt und anschließend zu Quadraten erweitert.

5.1. Berechnung der Kohomologie über das Substitutionsverfahren

5.1.1. Bestimmung des Substitutionssystems

Wir wollen zeigen, dass es sich bei unserem Tiling in Abbildung 5.1. um ein Substitutionstiling nach Definition 2.1. handelt, dazu ist die Endlichkeit der Prototile-Menge sowie die Existenz einer geeigneten Substitutionsabbildung nachzuweisen.

Die Menge der Prototiles

Wie man aus Abbildung 5.1. ersehen kann, liegen bis auf Translation sechzehn Prototiles vor, d.h. die Menge der Prototiles ist endlich und das Tiling ist von endlicher lokaler Komplexität. Die 16 Prototiles sind in Abbildung 5.4. (willkürlich nummeriert) dargestellt.

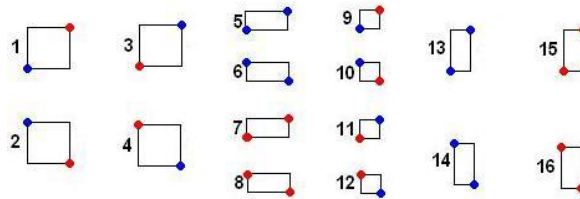


Abbildung 5.4.: Prototiles des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings

An dieser Stelle lässt sich bereits die Frage beantworten, ob man mit den Überlegungen in Abschnitt 2.4. die Prototilemenge reduzieren und die Berechnungen damit vereinfachen kann. Die Antwort fällt negativ aus: Mindestens eine der drei in Abschnitt 2.4. dargestellten notwendigen Bedingungen hierfür ist stets verletzt.

Die Substitutionsabbildung

Als Nächstes haben wir eine geeignete Substitutionsabbildung zu finden. Dazu durchsuchen wir das Tiling nach geeigneten Prototiles erster Ordnung. Die passende Zerlegung stellt sich schließlich dar wie in Abbildung 5.5..

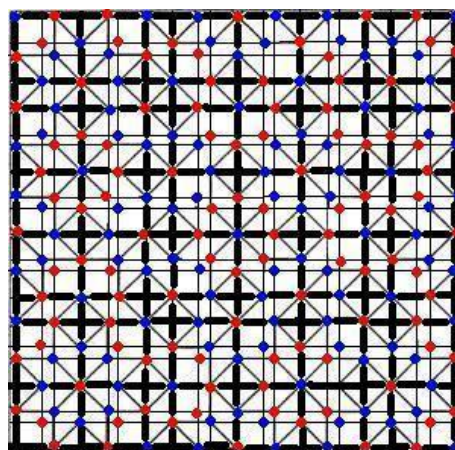


Abbildung 5.5.: Zerlegung des QR-Tilings in Prototiles erster Ordnung

Aus Abbildung 5.5. können wir dann unmittelbar die zu dieser Zerlegung gehörige Substitutionsabbildung ω ablesen, die sich in graphischer Form gemäß Abbildung 5.6. darstellen lässt.

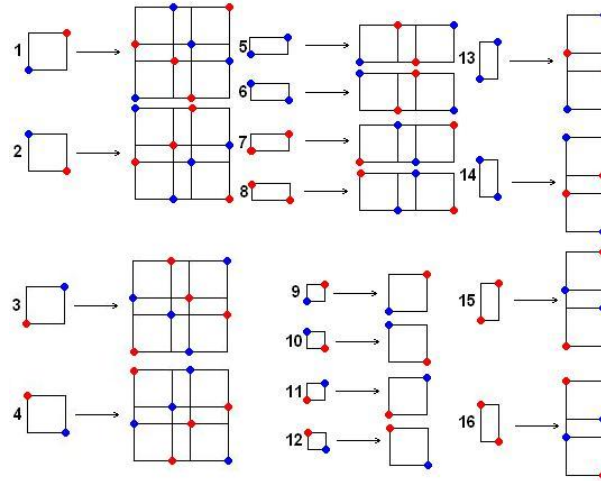


Abbildung 5.6.: Die Substitutionsabbildung des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings

Man erkennt, dass mittels der so gewählten Substitutionsabbildung für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Deflation des Tilings aus Abbildung 5.1. in Supertiles n -ter Ordnung existiert. Offensichtlich gibt es dann zu jedem Patch im Tiling T aus Abbildung 5.1. ein $k \in \mathbb{N}$, so dass das Patch ganz in einem Supertile k -ter Ordnung enthalten ist. Nach Definition 2.1 ist unser Tiling also ein Substitutionstiling und der zugehörige Raum Ω_S enthält alle Substitutionstilings, welchen dieselbe Prototilemenge mit derselben Substitutionsabbildung zugeordnet wird.

Mittels Abbildung 5.6. sind wir in der Lage, die Substitutionsmatrix M nach Definition 2.3 aufzustellen; diese ist im Anhang angegeben. Für $n = 4$ hat M^n ausschließlich positive Einträge, womit gezeigt ist, dass die Substitution primitiv ist, weswegen der Tilingraum Ω_S nach Satz 2.9 der abgeschlossenen Hülle Ω_T des Orbits eines beliebigen Tilings in Ω_S entspricht. Wir können also die in Kapitel 2 dargestellten Berechnungsmethoden für Kohomologiegruppen auf Ω_S anwenden, indem wir im weiteren Verlauf den Raum Ω_T betrachten (wobei T z.B. das in Abbildung 5.1 dargestellte Tiling ist).

5.1.2. Nachweis der FTB-Eigenschaft

Der erste Schritt zur Berechnung der Kohomologie besteht darin, Ω_T durch einen inversen Limes darzustellen. Nach Satz 2.16 ist dazu zunächst zu untersuchen, ob die Substitution

den Rand erzwingt. Wir erkennen aus Abbildung 5.5., dass dies der Fall ist: Bereits die Supertiles erster Ordnung weisen dieselben Prototiles in ihrer Umgebung auf. Das Erfülltsein der FTB-Bedingung lässt sich für alle Tiles aus Abbildung 5.5. ansehen, zur Verdeutlichung der Vorgehensweise sind die Umgebungen einer Tile-Sorte in Abbildung 5.7. grau unterlegt.

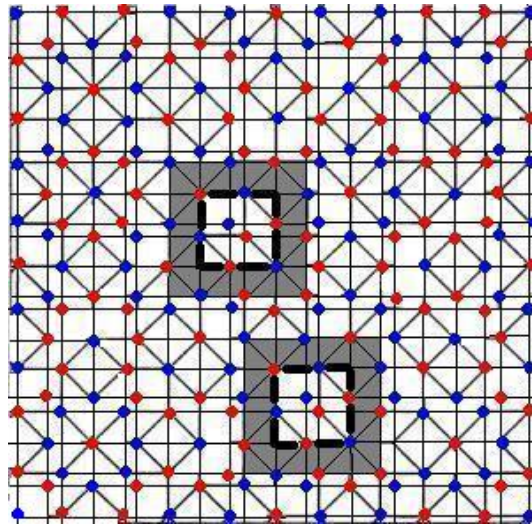


Abbildung 5.7.: Zum Nachweis der FTB-Eigenschaft

Da das Tiling den Rand erzwingt, benötigen für die Berechnung nach Satz 2.16 lediglich die zellulären Kohomologiegruppen des nullten Anderson-Putnam-Komplexes $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$, $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ und $H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ sowie die Abbildung γ_0^* . Zur Berechnung dieser Kohomologiegruppen haben wir zunächst die Korand-Abbildungen gemäß Abschnitt B.3.2 zu bestimmen; diese bestimmen wir wie in Beispiel B.21 aus einer Zellzerlegung des nullten Anderson-Putnam-Komplexes.

5.1.3. Die Korand-Abbildungen ∂^0 und ∂^1

Zur Berechnung der Korand-Abbildungen ∂^0 und ∂^1 (bzw. deren Matrizen) müssen wir zunächst eine Zellzerlegung des nullten Anderson-Putnam-Komplexes auffinden. Dazu haben wir gemäß der Bemerkung nach Definition 2.14 alle Vertices und Kanten der Prototiles (ohne Kragen) zu identifizieren. Wir beginnen mit einem beliebigen Vertex, dem wir eine Zahl zuordnen. Alle anderen Vertices, die irgendwo im Tiling mit diesem Vertex modulo Translation identisch sind, bekommen dieselbe Zahl zugeordnet. Dies wird wiederholt, bis alle Vertices nummeriert sind, entsprechend geht man für die Kanten vor, während eine Nummerierung der Flächen bereits durch die Identifizierung der Prototiles erfolgt ist (siehe Abbildung 5.8).

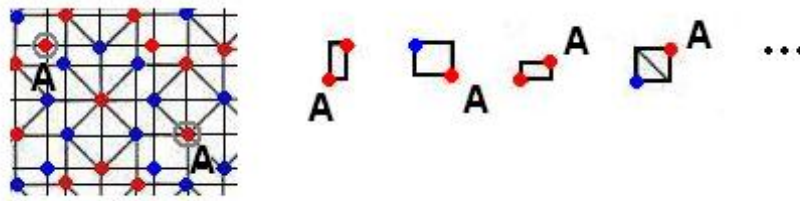


Abbildung 5.8.: Zur Identifikation der Vertices: Geben wir z.B. dem oberen grau umkreisten Vertex die Bezeichnung A , so erhalten die Vertices aller Tiles, die diesen Vertex beinhalten dieselbe Bezeichnung. Der untere grau umkreiste Vertex bekommt auch die Bezeichnung A , da weil er im ersten der vier Prototiles rechts schon diese Bezeichnung hat. Damit bekommen alle Tiles, die diesen Vertex haben die Bezeichnung A usw.

Nach Identifizierung aller Kanten und Vertices (Abbildungen D.1 und D.2 im Anhang) ergibt sich, dass das Tiling vier verschiedene Vertextypen und sechzehn Kantentypen hat. Damit können wir jetzt ein Bild des nullten Anderson-Putnam-Komplexes zeichnen, indem wir die Prototiles so zusammenkleben, dass gemeinsame Kanten an gemeinsamen Kanten liegen und gemeinsame Vertices an gemeinsamen Vertices. Eine übersichtliche Darstellung ist in Abbildung 5.9. enthalten. Das Bild kann als zweidimensionales Netz verstanden werden, das noch zu einem höherdimensionalen Komplex "zusammengeklebt" werden müsste, indem als gleich identifizierte Vertices und gleiche Kanten aneinandergeklebt werden, so dass am Ende ein Komplex entsteht, der nur noch 4 Vertices, 16 Kanten und 16 Flächen enthält.

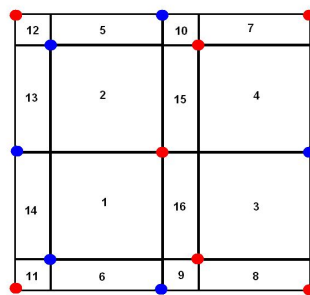


Abbildung 5.9.: Der Komplex Γ_0 des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings

Hiermit können wir die zellulären Kettengruppen des Anderson-Putnam-Komplexes angeben, wir haben: $C_0 \simeq \mathbb{Z}^4$, $C_1 \simeq \mathbb{Z}^{16}$, $C_2 \simeq \mathbb{Z}^{16}$.

Hieraus können wir unmittelbar die Kokettengruppen berechnen. Es gilt gemäß Abschnitt B.3.2:

$$C^0 = \text{Hom}(C_0; \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^4 \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4, \quad (5.1)$$

$$C^1 = \text{Hom}(C_1; \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{16} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{16}, \quad (5.2)$$

$$C^2 = \text{Hom}(C_2; \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{16} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{16}. \quad (5.3)$$

Damit sind nun gemäß Abschnitt B.3.2 die zellulären Kohomologiegruppen der folgenden Sequenz zu bestimmen:

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

Die hierzu benötigten Korand-Matrizen ∂^0 und ∂^1 erhalten wir wie in Beispiel B.20, indem wir zunächst die Randabbildungen ∂_0 und ∂_1 der 1- und 2-Ketten aus den Abbildungen D.1 und D.2 bestimmen. Dazu müssen wir die einzelnen Zellen mit einer Orientierung versehen, wir entscheiden uns z.B. für eine einheitliche Orientierung gegen den Uhrzeigersinn (siehe die Abbildungen D.1 und D.2, dort sind die Orientierungen der 1-Ketten als Pfeile dargestellt.)

In Matrixdarstellung sind die Rand-Abbildungen durch diejenigen Matrizen definiert deren Einträge a_{ij} der Anzahl der Vertices mit der Nummer i , die in der Kante mit der Nummer j enthalten sind bzw. der Anzahl der Kanten mit der Nummer i , die in der Fläche mit der Nummer j enthalten sind entspricht, dies folgt unmittelbar aus B.3.2 bzw. Beispiel B.20.

Die Korand-Matrizen erhalten wir dann gemäß Beispiel B.21, indem wir die Randmatrizen transponieren; diese sind im Anhang in Abschnitt F.1. angegeben. Zur Berechnung der zellulären Kohomologie ziehen wir jetzt Satz B.23 heran. Wir benötigen demnach die Ränge der Kerne der Matrizen und die Smithschen Normalformen der Matrizen; eine solche Berechnung lässt sich z.B. leicht mit der Software GAP [GAP] bewerkstelligen und wurde auch hier unter deren Benutzung durchgeführt. Die Smithschen Normalformen von ∂^0 und ∂^1 sind ebenfalls in Abschnitt F.1. angegeben, aus diesen können wir auch unmittelbar die Ränge der Kerne der Korand-Matrizen ablesen. Da die Korandabbildung nämlich zwischen freien Gruppen wirkt (den Kokettengruppen), erhalten wir aus Satz A.5 die Beziehung $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial^i)) + \text{Rang}(\text{Im}(\partial^i)) = \text{Rang}(C^i)$, wobei der Rang von C^i der Anzahl der Spalten in ∂^i entspricht.

Die Gruppe $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$

Es gilt $\partial^{-1} = 0$ (denn für $i < 0$ stehen in der Sequenz aus Kokettengruppen nur triviale Gruppen, dies kann man aus der Definition der zellulären bzw. relativen Kohomologie folgern) und $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial^0)) = 1$ (denn $\mathcal{S}(\partial^0)$ hat eine Nullspalte). Damit gilt mit Satz B.23:

$$H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}^{(1-0)} = \mathbb{Z}. \quad (5.5)$$

Die Gruppe $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z})$

Aus der Smithschen Normalform von ∂^0 lesen wir gemäß Satz B.18 zunächst $t = 3$ ab. Für den Rang des Kernes von ∂^1 lesen wir $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial_0)) = 7$ ab und erhalten damit mit Satz B.23:

$$H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 3} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \right) \oplus \mathbb{Z}^{(7-3)} = \mathbb{Z}^4. \quad (5.6)$$

Die Gruppe $H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z})$

Aus der Smithschen Normalform von ∂^1 im Anhang lesen wir zunächst gemäß Satz B.23 $t = 9$ ab. ∂_2 ist diejenige Abbildung, die alle 2-Koketten auf 0 abbildet (da die Kokettengruppe C^3 trivial ist). Wir haben also $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial^2)) = \text{Rang}(C^2) = 16$. Mit Satz B.23 erhalten wir dann:

$$H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 8} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \right) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{(16-9)} = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2. \quad (5.7)$$

Zusammengefasst haben wir also erhalten:

$$H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4, \quad H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2. \quad (5.8)$$

Wir erkennen an dieser Stelle, dass in der zweiten Kohomologie-Gruppe von Γ_0 Torsion auftritt, dieses Phänomen wollen wir in Kapitel 8 weiter untersuchen. Aus Satz 3.16 folgt zunächst, dass die Torsion durch die Abbildung β^2 auftritt, dies werden wir im nächsten Abschnitt verifizieren.

Zur Berechnung der Kohomologigruppen von Ω_T müssen wir nun gemäß Satz 2.16 den direkten Limes dieser Gruppen unter der Abbildung γ_0^* berechnen.

5.1.4. Die Abbildung γ_0^* und die Kohomologien

Die Abbildung γ_0^* wird durch die Matrizen A_0 , A_1 und A_2 repräsentiert, welche sich wiederum aus den Abbildungen D.1. und D.2. ablesen lassen; die Matrizen und deren Smithsche Normalformen sind im Anhang F.1. dargestellt. Die Tatsache, dass wir drei Matrizen benötigen, ist folgendermaßen zu erklären: Die Abbildung γ_0^* wirkt ja nicht nur auf einzelne Kohomologigruppen sondern auf die gesamte Kohomologie, also auf die direkte Summe der Kohomologigruppen (siehe Definition B.29). Wir haben also:

$$\gamma_0^*(\check{H}^*(\Gamma_0; \mathbb{Z})) = \gamma_0^*(\check{H}^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \oplus \check{H}^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \oplus \check{H}^2(\Gamma_0; \mathbb{Z})) \quad (5.9)$$

$$\simeq \gamma_0^{*(0)}(\check{H}^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})) \oplus \gamma_0^{*(1)}(\check{H}^1(\Gamma_0; \mathbb{Z})) \oplus \gamma_0^{*(2)}(\check{H}^2(\Gamma_0; \mathbb{Z})). \quad (5.10)$$

Demzufolge können wir den direkten Limes aus Satz 2.16 in die Berechnung von drei direkten Limites aufspalten, wobei die Wirkung der Abbildung γ_0^* jedesmal durch eine andere Matrix A_i beschrieben wird (die Substitutionsabbildung wirkt ja auf Vertices anders als auf Kanten und damit auf 0-Kozykel anders als auf 1-Kozykel).

Bei den Matrizen A_0 , A_1 und A_2 handelt es sich also um eine Verallgemeinerung der Substitutionsmatrix M aus Definition 2.3: Für M hatten wir uns lediglich angesehen, wie ω auf die 2-Zellen wirkt. Zusätzlich betrachten wir jetzt noch die Wirkung von ω auf 1- und 0-Zellen. Die so erhaltenen Matrizen haben wir dann gemäß Satz 2.16 zu transponieren (da wir nicht die Abbildung γ_0 sondern die Abbildung γ_0^* betrachten).

Die berechneten Matrizen sind invertierbar, wie man aus ihren Smithschen Normalformen erkennt; diese haben vollen Rang. Daher bildet γ_0^* die Kohomologien isomorph aufeinander ab und wir können den direkten Limes der Kohomologie $H^*(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ unmittelbar angeben (die Kohomologie bleibt dieselbe). Damit gilt für die Kohomologigruppen von Ω_T gemäß Satz 2.16:

$$\check{H}^0(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \check{H}^1(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4, \quad \check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

5.2. Berechnung der Kohomologie über die Methode der atomaren Hyperflächen

Zur Berechnung der Kohomologie mittels der Methode der atomaren Hyperflächen merken wir zunächst an, dass die atomaren Hyperflächen aus Abbildung 5.3. in einem vierdimensionalen, periodischen Raum angeordnet sind, damit können wir Satz 3.13 zur Berechnung der Kohomologie anwenden.

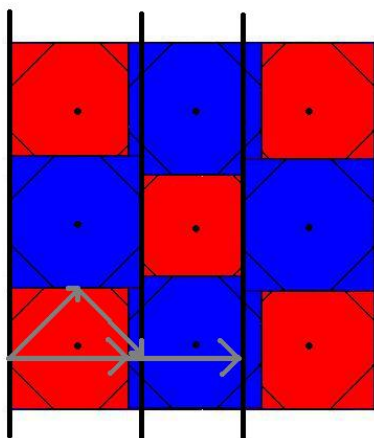


Abbildung 5.10.: Zur Bestimmung von Γ^1

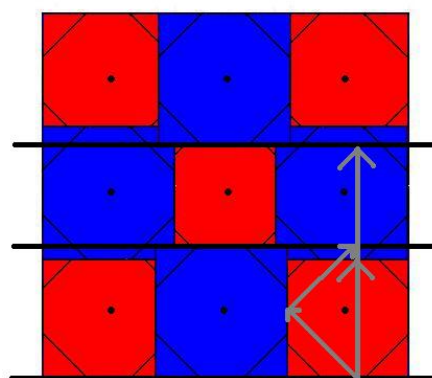


Abbildung 5.11.: Zur Bestimmung von Γ^2

Ausgehend von der atomaren Hyperfläche in Abbildung 5.3. können wir das Arrangement affiner Tori A aus Satz 3.13 bestimmen. Da die Hyperflächen quadratisch sind und das Tiling keine zusätzliche Dekoration trägt, die nicht lokal ableitbar wäre ¹, benötigen wir zwei affine Tori, welche durch die folgenden Vektoren aufgespannt werden (siehe Abbildung 5.10 und 5.11):

$$t_1 : (2e_1, e_2 - e_4), \tag{5.11}$$

$$t_2 : (2e_3, e_2 + e_4). \tag{5.12}$$

¹Die Färbung der Vertices eines beliebigen Tiles ist lokal ableitbar, da wir aus der Färbung der Tiles in seiner unmittelbaren Umgebung diese rekonstruieren können.

Diese Tori entsprechen nun genau den Stabilisatoren aus Satz 3.12 und Satz 3.13. Wir haben also:

$$\Gamma^1 = \langle 2e_1, e_2 - e_4 \rangle, \tag{5.13}$$

$$\Gamma^2 = \langle 2e_3, e_2 + e_4 \rangle. \tag{5.14}$$

Wir benötigen nun für die weitere Berechnung die Homologie von A und hierzu die Schnittzahlen der Tori. Dazu untersucht man (5.11) und (5.12) auf Schnittpunkte und erhält das folgende Ergebnis:

$$S_1(0, 0, 0, 0); S_2(0, 1/2, 0, 1/2); S_3(1, 0, 1, 0); S_4(1, 1/2, 1, 1/2). \tag{5.15}$$

Dieses kann man sich wie folgt plausibel machen: In [Ka] wurde gezeigt, dass sich die Tori $(e_1, e_2 - e_4)$ und $(e_3, e_2 + e_4)$ in den Punkten $(0,0,0,0)$ und $(0,1/2,0,1/2)$ schneiden. In unseren Berechnungen gehen wir nun zu einem doppelt so großen affinen Torus über, so dass die Punkte, die vorher identifiziert wurden, nun neue Schnittpunkte sind (siehe Abbildung 5.12.).

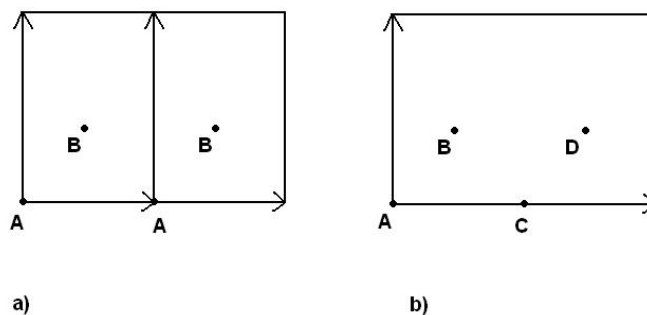


Abbildung 5.12.: Zur Bestimmung der Schnittpunkte: In Bild a) sind jeweils zwei der Schnittpunkte identisch. In Bild b) ist der affine Torus doppelt so groß, d.h. die Schnittpunkte werden nicht identifiziert und man erhält vier Schnittpunkte.

Mittels der so ermittelten Schnittzahl $n_2 = 4$ können wir nun die Homologie des Arrangements A berechnen.

Gemäß der Gleichungen (3.23) - (3.25) erhalten wir für die Homologiegruppen $H_0(A; \mathbb{Z})$, $H_1(A; \mathbb{Z})$, $H_2(A; \mathbb{Z})$:

$$H_2(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2, \quad (5.16)$$

$$H_1(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{15}, \quad (5.17)$$

$$H_0(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}. \quad (5.18)$$

Mit der Homologie von A können wir nun die Kohomologiegruppen von Ω_T bestimmen. Nach Satz 3.13 haben wir dazu lediglich das Bild der Abbildung β^2 zu bestimmen. Aus Satz 3.12 folgt:

$$Im(\beta^2) \simeq \Lambda_2\Gamma / \langle \Lambda_2\Gamma^1, \Lambda_2\Gamma^2 \rangle. \quad (5.19)$$

Das Gitter Γ haben wir bereits in Beispiel 3.1 bestimmt (wir verwenden ja das Gitter des gefärbten oktagonalen Tilings). Γ , Γ^1 und Γ^2 sind also bestimmt durch $\Gamma = \langle e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 - e_1 \rangle$, $\Gamma^1 = \langle 2e_1, e_2 - e_4 \rangle$, $\Gamma^2 = \langle 2e_3, e_2 + e_4 \rangle$.

Damit erhalten wir unter Beachtung der Rechenregeln für das Dachprodukt ($a \wedge a = 0$, $a \wedge b = -b \wedge a$) und mit der Bezeichnung $e_{ij} := e_i \wedge e_j$:

$$\begin{aligned} \Lambda_2\Gamma &= \langle (e_1 + e_2) \wedge (e_2 + e_3), (e_1 + e_2) \wedge (e_3 + e_4), (e_1 + e_2) \wedge (e_4 - e_1), \\ &\quad (e_2 + e_3) \wedge (e_3 + e_4), (e_2 + e_3) \wedge (e_4 - e_1), (e_3 + e_4) \wedge (e_4 - e_1) \rangle \\ &= \langle e_{12} + e_{13} + e_{23}, e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24}, e_{14} + e_{24} + e_{12}, \\ &\quad e_{23} + e_{24} + e_{34}, e_{24} + e_{34} + e_{12} + e_{13}, e_{14} + e_{13} + e_{34} \rangle, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\Lambda_2\Gamma_1 = \langle 2e_1 \wedge (e_2 - e_4) \rangle = \langle 2e_{12} - 2e_{14} \rangle, \quad (5.21)$$

$$\Lambda_2\Gamma_2 = \langle 2e_3 \wedge (e_2 + e_4) \rangle = \langle 2e_{32} + 2e_{34} \rangle. \quad (5.22)$$

Setzen wir nun

$$e_{12} =: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{14} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

$$e_{23} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{24} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{34} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

so lassen sich die Räume $\Lambda_2\Gamma, \Lambda_2\Gamma^1$ und $\Lambda_2\Gamma^2$ in der Form

$$\Lambda_2\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (5.25)$$

$$\Lambda_2\Gamma^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \Lambda_2\Gamma^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (5.26)$$

darstellen. Zur Bildung des Quotienten ziehen wir Satz A.9 heran. Dazu haben wir zunächst eine Basis $\{a_1, a_2\}$ von $\langle \Lambda_2\Gamma^1, \Lambda_2\Gamma^2 \rangle$ durch eine Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ von $\Lambda_2\Gamma$ auszudrücken. Hierzu sind die linearen Gleichungssysteme

$$B \cdot x_1 = a_1 \quad \text{und} \quad B \cdot x_2 = a_2 \quad (5.27)$$

zu lösen, wobei die Spalten der Matrix B genau den Basisvektoren $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ entsprechen. Die Matrix A , deren Zeilen aus den Lösungsvektoren x_1 und x_2 besteht, ist

dann in Smithsche Normalform zu bringen und wir können aus den Diagonaleinträgen eine Darstellung des Quotientenraumes ablesen. Wir erhalten zunächst

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

und folglich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Die Smithsche Normalform von A lautet:

$$\mathcal{S}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Damit folgt mit Satz A.9:

$$\text{Im}(\beta^2) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}/0 = 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}_2. \quad (5.31)$$

Jetzt können wir Satz 3.13 anwenden. Mit $\text{Rang}(\text{Im}(\beta^2)) = 4$ erhalten wir für die erste Kohomologiegruppe: $\check{H}^1(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2-2+4} = \mathbb{Z}^4$ und für die zweite Kohomologiegruppe (mit $n_2 = 4$): $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{2-3+4} = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$ also zusammengefasst:

$$H^0(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4, \quad H^2(T^4 \setminus A; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (5.32)$$

ein zu unseren vorherigen Berechnungen stimmiges Ergebnis.

6. Die Čech-Kohomologie des gefärbten oktagonalen Tilings mit Pfeilen

Das **gefärbte oktagonale Tiling mit Pfeilen**, welches wir auch als "gefärbtes OP-Tiling" bezeichnen, ist in Abbildung 6.1. dargestellt, bzw. ein größerer Ausschnitt im Anhang C.

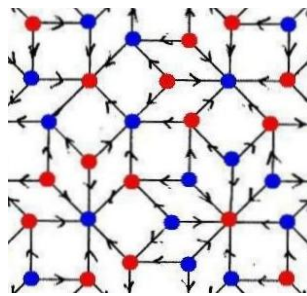


Abbildung 6.1.: Das gefärbte oktagonale Tiling mit Pfeilen

Alle Tiles lassen sich durch Spiegelung oder Drehung aus einem Quadrat und einer Raute gewinnen. Ohne Färbung und Pfeile haben wir sechs Prototiles, durch Einführung der Färbung werden es zwölf und durch Einführung der Bepfeilung schließlich 24. Die Prototiles sind in Abbildung 6.2. dargestellt.

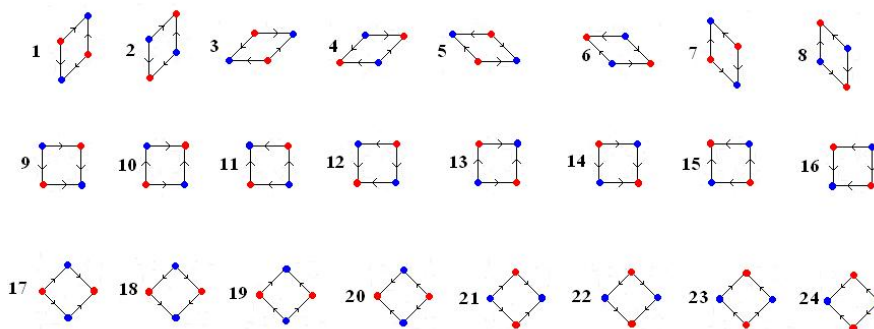


Abbildung 6.2.: Prototiles des gefärbten oktagonalen Tilings mit Pfeilen

Wiederum müssen wir an dieser Stelle feststellen, dass eine Verringerung der Anzahl nötiger Prototiles unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie - wie in Abschnitt 2.4. dargestellt - in diesem Fall nicht möglich ist, da auch hier stets eines der drei dort angegebenen notwendigen Kriterien verletzt ist.

Wir können das Tiling durch Projektion gewinnen, indem wir dasselbe Hyperflächensystem wie beim Ammann-Beenker-Tiling verwenden mit dem Unterschied, dass die Hyperflächen jetzt gefärbt sind (Abbildung 6.3.).

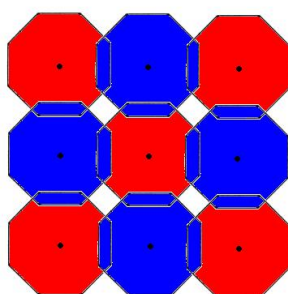


Abbildung 6.3.: Das Hyperflächensystem des gefärbten oktagonalen Tilings mit Pfeilen

6.1. Berechnung der Kohomologie über das Substitutionsverfahren

6.1.1. Die Substitutionsabbildung

Zunächst ist wieder zu zeigen, dass es sich bei unserem Tiling T in Abbildung 6.1. um ein Substitutionstiling handelt. Wir hatten schon festgestellt, dass die Prototilemenge endlich ist (genauer gesagt 24 Prototiles enthält). Als nächstes ist wieder eine geeignete Substitutionsabbildung aufzufinden. Dazu stellen wir zunächst fest, dass wir im Wesentlichen zwei "Typen" von Tiles haben, nämlich Quadrate und Rauten und eine Zerlegung von T in Prototiles erster Ordnung sieht für alle Prototiles desselben "Typs" gleich aus. Es genügt daher, sich die Zerlegung für ein Quadrat und eine Raute anzusehen und diese dann auf alle anderen Prototiles zu übertragen (Abbildung 6.4.).

Die Substitutionsabbildung stellt sich dann graphisch wie in Abbildung 6.5. - 6.7. dar, wobei das zugehörige Substitutionssystem jetzt (im Gegensatz zum letzten Abschnitt) ein erweitertes Substitutionssystem nach Definition 2.8 ist.

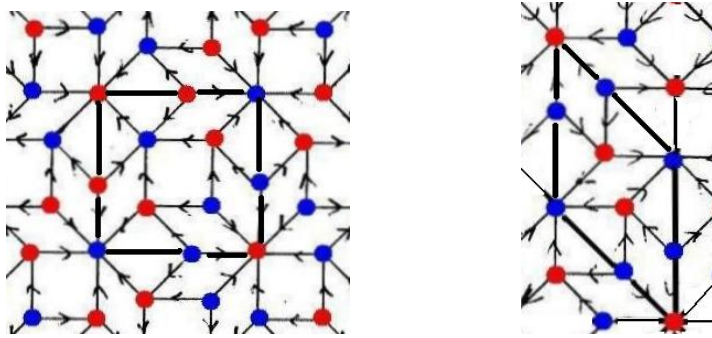


Abbildung 6.4.: Prototiles erster Ordnung beim gefärbten OP-Tiling

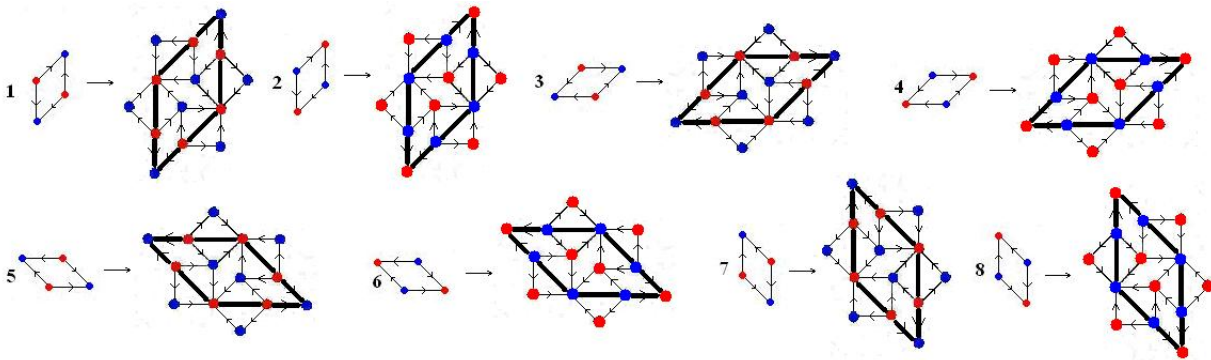


Abbildung 6.5.: Die Substitution des gefärbten OP-Tilings(1)

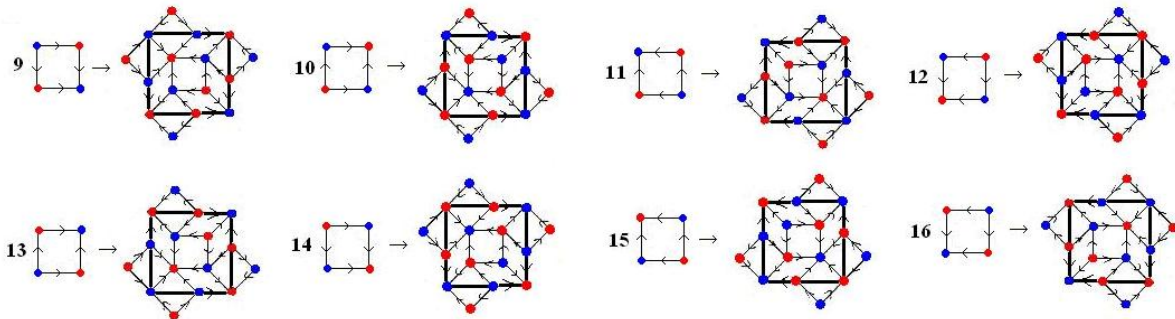


Abbildung 6.6.: Die Substitution des gefärbten OP-Tilings(2)

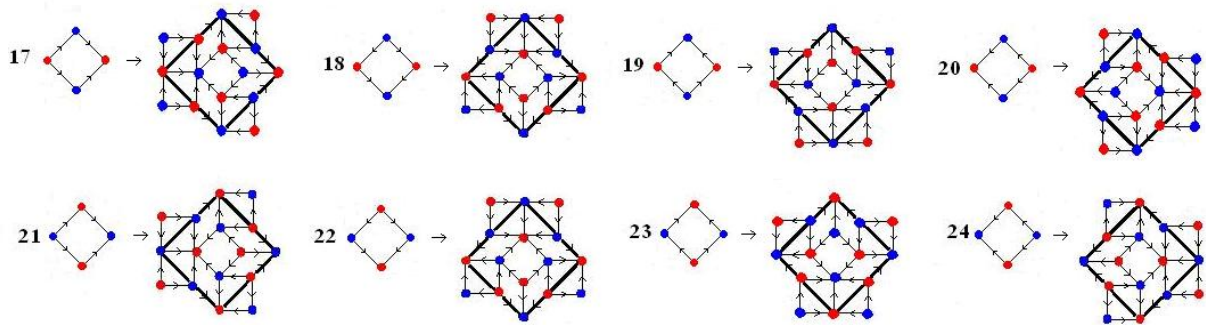


Abbildung 6.7.: Die Substitution des gefärbten OP-Tilings(3)

Die Substitutionsmatrix für diese Abbildung ist im Anhang F.2. dargestellt. Für $n = 3$ sind die Einträge von M^n strikt positiv, daher ist die Substitution primitiv, weshalb wir wiederum die Methoden aus Kapitel 2 für die Berechnung der Kohomologiegruppen anwenden dürfen.

6.1.2. Nachweis der FTB-Eigenschaft und Darstellung von Γ_0

Wiederum haben wir für die Berechnung gemäß Satz 2.16 eine Auswahl zwischen den Komplexen Γ_0 oder Γ_1 zu treffen. Wir stellen fest, dass das Tiling den Rand erzwingt und zwar für $k = 2$. Dies lässt sich mittels Abbildung C.1. für ein einzelnes Prototile verifizieren, für eine Verifizierung für die anderen Prototiles wurde ein wesentlich größerer Ausschnitt des Tilings verwendet. Wir können für unsere Berechnungen also nach Satz 2.16 den nullten Anderson-Putnam-Komplex heranziehen. Diesen wollen wir wiederum graphisch darstellen, indem wir seine zweidimensionalen Netze angeben (Abbildung 6.8.), d.h. wir "zerschneiden" den höherdimensionalen Komplex entlang einiger Kanten und Vertices, während andere Kanten und Vertices verbunden bleiben, so dass eine übersichtliche zweidimensionale Darstellung möglich wird. Bei Abbildung 6.8. handelt es sich um eine (willkürlich gewählte) Möglichkeit dieser Darstellung.

6.1.3. Die Korand-Abbildungen und die Kohomologien von Γ_0

Für die weitere Berechnung gehen wir vor wie im vorigen Kapitel. Wir identifizieren alle Kanten und Vertices und versehen Kanten und Prototiles mit einer Orientierung; wiederum haben wir die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn gewählt. Auf diese Weise kann man wie im letzten Kapitel beschrieben die Matrizen δ_1 und δ_2 erhalten, durch deren Transposition man schließlich die Matrizen ∂^0 und ∂^1 erhält; diese und deren Smithsche Normalformen

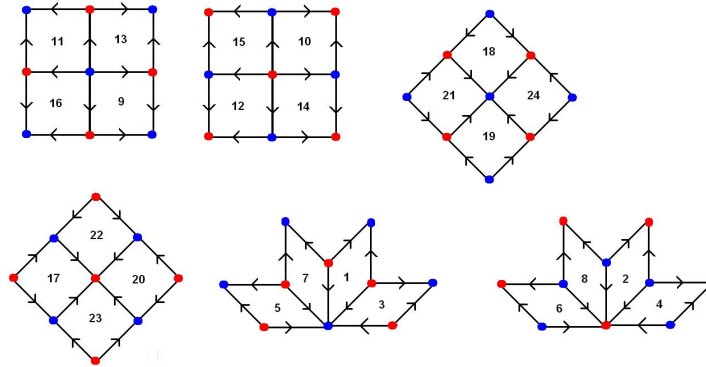


Abbildung 6.8.: Mögliches zweidimensionales Netz des nullten Anderson-Putnam-Komplex beim gefärbten OP-Tiling

sind im Anhang in Abschnitt F.2. dargestellt. Damit berechnen wir wieder wie im vorigen Kapitel die Kohomologiegruppen von Γ_0 .

Die Gruppe $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$

Wir gehen vor wie in Kapitel 5. Zunächst stellen wir fest, dass ∂^{-1} wiederum die triviale Abbildung, die zugehörige Matrix also die Nullmatrix ist. Weiter gilt $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial^0)) = 1$, damit folgt unmittelbar wie in Kapitel 5: $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Die Gruppe $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z})$

Aus der Smithschen Normalform von ∂^0 lesen wir den Rang $t = 1$ ab. Für den Rang des Kernes von ∂^1 erhalten wir $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial^1)) = 6$. Damit haben wir dann nach Satz B.23: $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{(6-1)} = \mathbb{Z}^5$.

Die Gruppe $H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z})$

Den Rang der Smithschen Normalform von ∂^1 bestimmen wir aus zu $t = 10$. Weiter gilt $\text{Rang}(\text{Ker}(\partial^1)) = 24$. Damit haben wir dann mit Satz B.23 $H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{(24-10)} = \mathbb{Z}^{14} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Zusammenfassend haben wir also:

$$H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^5, \quad H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{14} \oplus \mathbb{Z}_2. \quad (6.1)$$

6.1.4. Die Abbildung γ_0^* und die Kohomologien

Die Abbildung γ_0^* wird wiederum durch die Matrizen A_0 , A_1 und A_2 repräsentiert (mit derselben Begründung wie in Kapitel 5), welche wir im Anhang dargestellt haben. Diese sind invertierbar, d.h. eine Basis von $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ wird durch A_0 wiederum auf eine Basis von $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ abgebildet, welche durch erneute Anwendung von A_0 wieder auf eine Basis abgebildet wird usw. Es gibt also keine zwei Basisvektoren, welche nach n -maliger Anwendung von A_0 auf dasselbe Element abgebildet werden, demzufolge repräsentiert jeder Basisvektor von $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ eine Äquivalenzklasse des direkten Limes' welcher somit isomorph zu $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ ist. Dieselbe Argumentation gilt für die Gruppen $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z})$ und $H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z})$. Es folgt also nach Satz 2.16:

$$\check{H}^0(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \check{H}^1(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^5, \quad \check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{14} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad (6.2)$$

6.2. Berechnung der Kohomologie über die Methode der atomaren Hyperflächen

Bei der Berechnung über die Methode der atomaren Hyperflächen wollen wir vorgehen wie in Kapitel 5. Hier ergibt sich jedoch gegenüber Kapitel 5 eine zusätzliche Komplikation: Berechnet man die Schnittpunkte der Tori in A , so stellt man fest, dass es Punkte gibt, in denen sich mehrere Tori schneiden. Wir müssen also gemäß zur simplizialen Resolution übergehen. Zunächst wollen wir die Tori angeben, welche das Arrangement A ausmachen. Diese bestimmen wir aus den Abbildung 6.9. (und stellen fest, dass wir dadurch auch wieder die Stabilisatoren Γ^i gegeben haben).

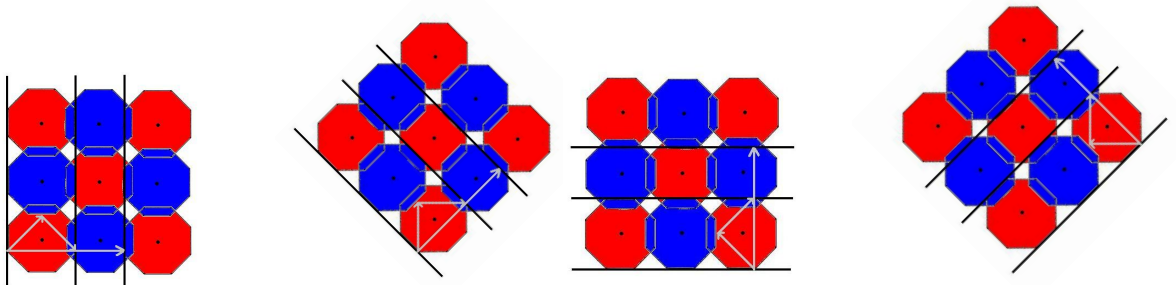


Abbildung 6.9.: Zur Bestimmung der verbotenen Tori beim gefärbten OP-Tiling

Wir lesen ab:

$$t_1 : (2e_1, e_2 - e_4), \tag{6.3}$$

$$t_2 : (2e_2, e_1 + e_3), \tag{6.4}$$

$$t_3 : (2e_3, e_2 + e_4), \tag{6.5}$$

$$t_4 : (2e_4, e_3 - e_1). \tag{6.6}$$

Wir haben diese Tori nun auf Schnittpunkte zu untersuchen. Dazu verwenden wir wieder ein Ergebnis aus [Ka]. Dort waren die folgenden Schnittpunkte bestimmt worden:

$$t_1 \cap t_2 \cap t_3 \cap t_4 : (0, 0, 0, 0), \tag{6.7}$$

$$t_1 \cap t_3 : (0, 1/2, 0, 1/2), \tag{6.8}$$

$$t_2 \cap t_4 : (1/2, 0, 1/2, 0). \tag{6.9}$$

Da wir nun zu Tori der doppelten Größe übergehen, erhalten wir für die neuen Schnittpunkte:

$$t_1 \cap t_2 \cap t_3 \cap t_4 : (0, 0, 0, 0) \quad \text{und} \quad (1, 1, 1, 1), \tag{6.10}$$

$$t_1 \cap t_3 : (0, 1/2, 0, 1/2) \quad \text{und} \quad (0, 3/2, 0, 3/2), \tag{6.11}$$

$$t_2 \cap t_4 : (1/2, 0, 1/2, 0) \quad \text{und} \quad (3/2, 0, 3/2, 0). \tag{6.12}$$

Damit haben wir jetzt die Schnittzahlen $n_2 = 4$ und $n_4 = 2$ (es gibt 4 Punkte, in denen sich jeweils zwei Tori schneiden und zwei Punkte, in denen sich jeweils 4 schneiden). Für die Homologie von A^Δ und damit auch für die Homologie von A erhalten wir mit den Gleichungen (3.23) - (3.25):

$$H_2(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^4,$$

$$H_1(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{15},$$

$$H_0(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Wir wollen nun wieder die Kohomologie-Sequenz (3.7) auswerten. Dazu haben wir nach Satz 3.13 zunächst $Im(\beta^2)$ zu bestimmen. Das Gitter Γ , sowie die Räume Γ^1 und Γ^2 sind identisch wie diejenigen in Kapitel 5. Zusätzlich treten jetzt noch zwei weitere Untergitter Γ^3 und Γ^4 auf, gegeben durch $\Gamma^3 = \langle 2e_2, e_1 + e_3 \rangle$ und $\Gamma^4 = \langle 2e_4, e_3 - e_1 \rangle$. Wir übernehmen die Notation aus Kapitel 5, es sei also $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eine Basis von $\langle \Lambda_2\Gamma^1, \Lambda_2\Gamma^2, \Lambda_2\Gamma^3, \Lambda_2\Gamma^4 \rangle$ und $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ eine Basis von Γ . Aus Kapitel 5 wissen wir

$$\Lambda_2\Gamma^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad \Lambda_2\Gamma^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (6.13)$$

Zusätzlich erhalten wir nun

$$\Lambda_2\Gamma^3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad \Lambda_2\Gamma^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (6.14)$$

Für die Berechnung von $Im\beta^2 = \Lambda_2\Gamma / \langle \Lambda_2\Gamma^1, \Lambda_2\Gamma^2, \Lambda_2\Gamma^3, \Lambda_2\Gamma^4 \rangle$ verwenden wir wieder Satz A.9. Demzufolge müssen wir zunächst \mathcal{B} durch \mathcal{A} ausdrücken. Die ersten beiden Zeilen der Matrix, welche dies leistet, haben wir bereits in (5.29) bestimmt. Zur Bestimmung der dritten und vierten Zeile sind nun zusätzlich noch die Gleichungssysteme

$$B \cdot x_3 = a_3 \quad \text{und} \quad B \cdot x_4 = a_4 \quad (6.15)$$

zu lösen. Wir erhalten

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Mit x_3 und x_4 stellt sich A nun in der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

dar. Für die Smithsche Normalform von A erhalten wir:

$$\mathcal{S}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Mit Satz A.9 können wir schließlich $Im\beta^2$ bestimmen:

$$Im(\beta^2) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}/0 = 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2. \quad (6.19)$$

Mit Satz 3.13 erhalten wir dann:

$$H^0(T^4 \setminus A, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(T^4 \setminus A, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^5, \quad H^2(T^4 \setminus A, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{14} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Der Vergleich mit den Ergebnissen des letzten Abschnittes zeigt wiederum, dass die Ergebnisse der beiden Verfahren stimmig sind.

7. Die Čech-Kohomologie von Anderson-Putnam-Komplexen höherer Ordnung

7.1. Verallgemeinerte Darstellung von Ω_T durch einen inversen Limes

In Kapitel 2 hatten wir gesehen, dass sich die Kohomologie $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ eines Substitutionssystems bei Kenntnis der Anderson-Putnam-Komplexe Γ_0 bzw. Γ_1 und der durch die Substitutionsabbildung induzierten Abbildung γ_0 bzw. γ_1 bestimmen lässt. Dazu war der Raum Ω_T darzustellen als inverser Limes eines Systems aus zu Γ_0 bzw. Γ_1 topologisch äquivalenter Räume, welche zusätzlich die Struktur von CW-Komplexen trugen, und zwischen denen jeweils dieselbe Abbildung γ_0 bzw. γ_1 wirkte.

In diesem Kapitel wollen wir nun einen alternativen theoretischen Ansatz für die Berechnung der Kohomologie $\check{H}^*(\Omega_T; \mathbb{Z})$ mittels CW-Komplexen angeben, welcher unabhängig von einer Substitution ist, d.h., mit dem man theoretisch die Kohomologie beliebiger Tilings berechnen kann.

In Kapitel 2 hatten wir uns überlegt, dass der Komplex Γ_0 interpretiert werden kann als Menge von Punkten, welche mit dem Ursprung eines Tilings identifiziert werden, dessen Prototiles den Flächen von Γ_0 entsprechen. Anders ausgedrückt: Γ_0 ist homöomorph zu einem Raum Ω , der alle Äquivalenzklassen von Tilings bezüglich Translation enthält, die sich aus der vorgegebenen Menge von Prototiles zusammensetzen. Von all diesen Äquivalenzklassen möchten wir aber nur diejenigen in den Raum Ω_S übernehmen, die Substitutionstilings eines bestimmten Substitutionssystems enthalten (damit hätten wir dann die gesamte lokale Isomorphieklasse).

Wenden wir die Substitution auf Γ_0 an, so erhalten wir einen neuen, zu Γ_0 topologisch äquivalenten Komplex, welcher bereits etwas "besser" ist, da er alle Äquivalenzklassen von Tilings enthält, die sich aus Prototiles erster Ordnung zusammensetzen lassen. Führen wir dies kontinuierlich fort und wenden auf dieses System den inversen Limes an, so erhalten wir schließlich Ω_T .

Dieses Konzept lässt sich verallgemeinern, wenn wir nicht fordern, dass Ω_T notwendigerweise aus Substitutionstilings bestehen soll, sondern aus beliebigen Tilings bestehen kann. In diesem Fall benötigen wir gemäß Satz 1.36 jedoch eine unendliche Anzahl von Komplexen K_i und verbindenden Morphismen f_i . Für die Komplexe K_i wollen wir wiederum die Anderson-Putnam-Komplexe verwenden (diese lassen sich ja unabhängig von der Art des Tilings konstruieren), wobei jetzt K_0 der nullte Anderson-Putnam-Komplex sei, K_1 der erste usw. Die Komplexe sind also im Allgemeinen nicht identisch.

Die verbindenden Morphismen f_i seien jetzt implizit als "Vergiss-Abbildungen" definiert. Für die Kohomologie von Ω_T gilt dann wieder die Gleichung

$$\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \check{H}^*\left(\varprojlim_{f_i} K_i; \mathbb{Z}\right) = \varinjlim_{f_i^*} (\check{H}^*(K_i; \mathbb{Z})) = \varinjlim_{f_i^*} (H^*(K_i; \mathbb{Z})). \quad (7.1)$$

Natürlich ist es aussichtslos, unendlich viele Komplexe und Abbildungen zu bestimmen, jedoch kann nach Berechnung einiger Anderson-Putnam-Komplexe eine Aussage über die Tendenz des direkten Limes' gemacht werden, womit sich die Größe der Kohomologie abschätzen lässt. Dies ist z.B. nützlich, falls die Abbildungsmatrizen γ schwer zu bestimmen sind. Ferner kann die Untersuchung der Anderson-Putnam-Komplexe höherer Ordnung möglicherweise zu einem besseren Verständnis der Kohomologie von Tilingräumen beitragen, weshalb wir im Folgenden für einige Tilings diese Kohomologiegruppen berechnen wollen.

7.2. Anderson-Putnam-Komplexe der Fibonacci-Kette

Für die Berechnung der Kohomologie der Anderson-Putnam-Komplexe eindimensionaler Tilings (welche auch die Kodimension eins haben) lässt sich die Tatsache nutzen, dass für die Kohomologiegruppen solcher Tilings keine Torsion auftreten kann, wie wir in Abschnitt 3.4. gesehen haben. In diesem Fall sind die singulären (und damit auch die zellulären) Kohomologiegruppen eindeutig durch ihre Ränge bestimmt. Da die Berechnungen sehr schnell sehr komplex werden, ist es für ausführliche Berechnungen nahezu unverzichtbar, den Berechnungsalgorithmus in geeignete Computer-Algebrasysteme zu implementieren. Für den Fall ganzzahliger Moduln bietet sich hierfür wiederum GAP an. Eine explizite Darstellung der Anderson-Putnam-Komplexe ist nur z.B. für die ersten sieben Komplexe sinnvoll.

Wir beginnen unsere Berechnungen mit der eindimensionalen Fibonacci-Kette. Hierzu ist es nützlich, zunächst einen größeren Ausschnitt aus der Kette darzustellen [AP], siehe Abbildung 7.1.

...01001010010010100100101001001001001001010010010010010100100100101001001010...

Abbildung 7.1.: Ausschnitt aus der Fibonacci-Kette

Die Kohomologie des Komplexes Γ_0

Betrachten wir die Fibonacci-Kette, so stellen wir fest, dass es zwei Prototiles gibt, nämlich ein langes (0) und ein kurzes (1). Identifizierung der Vertices ergibt, dass es nur einen Vertextyp gibt, damit ist die Kohomologie von Γ_0 gleichbedeutend mit der Kohomologie des Differentialkomplexes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0 \tag{7.2}$$

wobei ∂^0 einfach die triviale Abbildung ist, die also jedes Element von \mathbb{Z} auf 0 abbildet, es gilt also $Im(\partial^0) = 0$ und $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$. Man erhält damit unmittelbar $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ und $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) = Ker(\mathbb{Z}^2 \mapsto 0)/Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^2$.

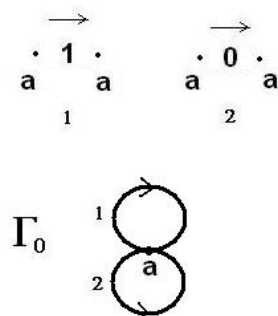


Abbildung 7.2.: Der Komplex Γ_0 der Fibonacci-Kette

Die Kohomologie des Komplexes Γ_1

Diese Berechnung hatten wir bereits in Kapitel 2 durchgeführt. Wir haben jetzt 4 Kantentypen und 3 Vertextypen und für die Kohomologiegruppen gilt $H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ und $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$. Für eine Darstellung siehe Abbildung 2.12.

Die Kohomologie des Komplexes Γ_2

Hier liegen nun 6 Kantentypen und 4 Vertextypen vor (Abbildung 7.3.).

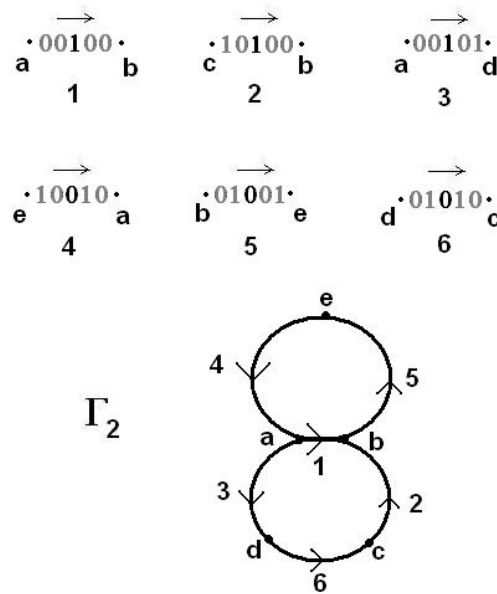


Abbildung 7.3.: Der Komplex Γ_2 der Fibonacci-Kette

Für das Differential ∂^0 lesen wir aus Abbildung 7.3. ab:

$$\partial^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Damit können wir die Kohomologiegruppen der Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^5 \rightarrow 0 \tag{7.4}$$

bestimmen. Wir berechnen $Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^4$ und $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ und erhalten wie oben: $H^0(\Gamma_2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ und $H^1(\Gamma_2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Die Kohomologie des Komplexes Γ_3

Für Γ_3 haben wir 8 Kantentypen und 7 Vertextypen (siehe Abbildung 7.4.).

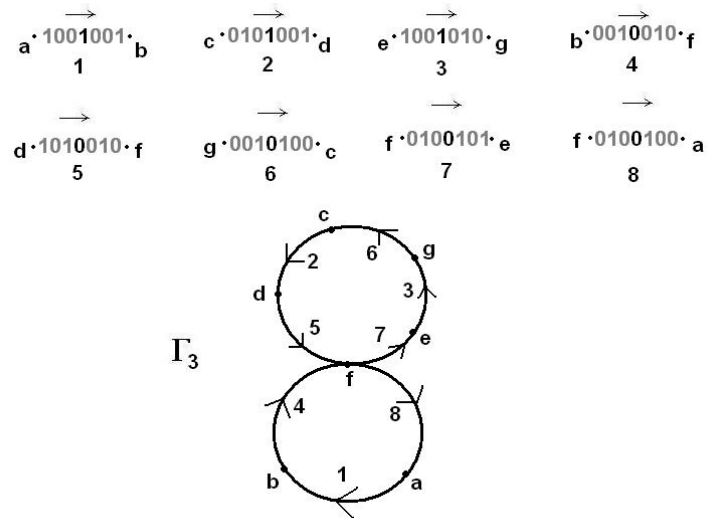


Abbildung 7.4.: Der Komplex Γ_3 der Fibonacci-Kette

Zur Bestimmung Kohomologie des Differentialkomplexes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^7 \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^8 \rightarrow 0 \tag{7.5}$$

haben wir wieder zunächst die Matrix ∂^0 zu bestimmen. Wir erhalten aus Abbildung 7.4.:

$$\partial^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Wir rechnen $Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^6$ und $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ und erhalten wieder wie oben: $H^0(\Gamma_3; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ $H^1(\Gamma_3; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Die Kohomologie des Komplexes Γ_4

Der Komplex Γ_4 besteht aus 10 Kanten- und 9 Vertextypen (Abbildung 7.5.).

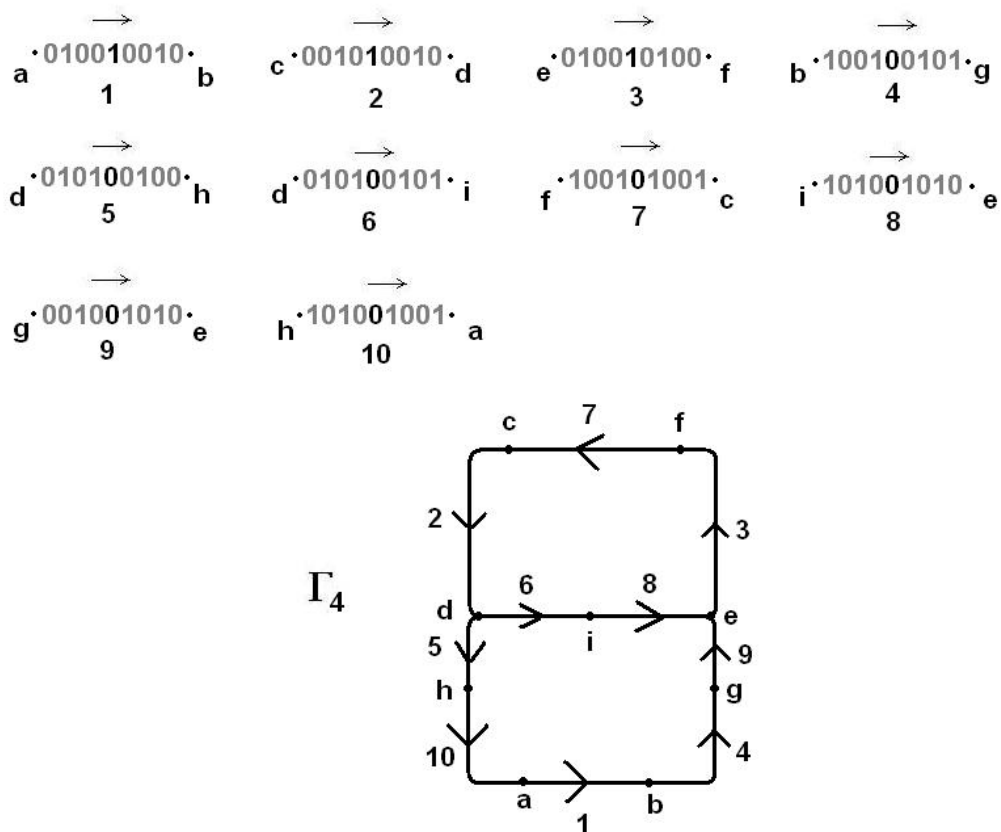


Abbildung 7.5.: Der Komplex Γ_4 der Fibonacci-Kette

Für die Kohomologiegruppen des Komplexes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^9 \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^{10} \rightarrow 0 \tag{7.7}$$

erhalten wir aus Abbildung 7.5. zunächst

$$\partial^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Wir bestimmen Bild und Kern von ∂^0 zu $Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^8$ und $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ und erhalten wir oben für die Kohomologiegruppen: $H^0(\Gamma_4; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ und $H^1(\Gamma_4; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Die Kohomologie des Komplexes Γ_5

Für Γ_5 erhalten wir 12 Prototiles und 11 Vertextypen (siehe Abbildung 7.6.).

Damit berechnen sich die Kohomologiegruppen des Komplexes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{11} \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^{12} \rightarrow 0 \quad (7.9)$$

wiederum über das Differential ∂^0 . Es gilt:

$$\partial^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Wir erhalten $Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^{10}$ und $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ und damit für die Kohomologiegruppen: $H^0(\Gamma_5; \mathbb{Z}) = Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ und $H^1(\Gamma_5; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{12}/Im(\delta^0) \simeq \mathbb{Z}^2$.

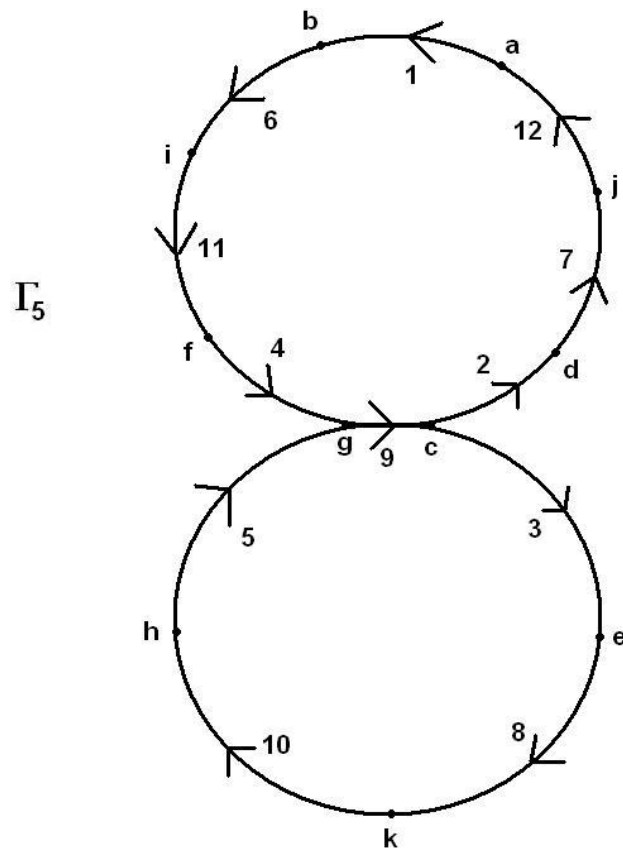
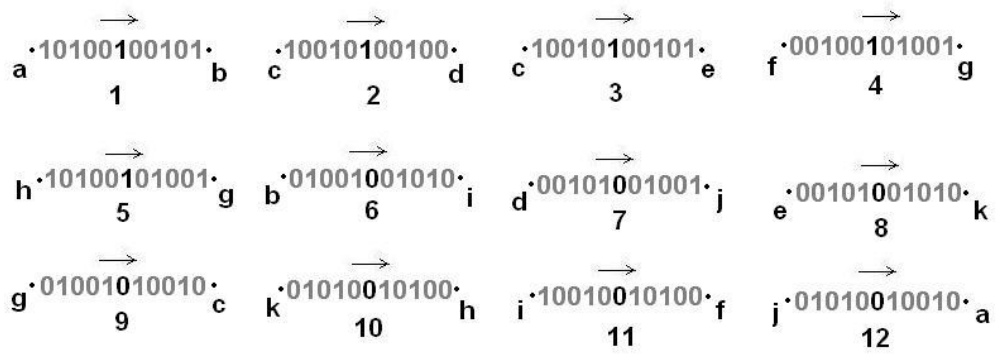


Abbildung 7.6.: Der Komplex Γ_5 der Fibonacci-Kette

Die Kohomologie des Komplexes Γ_6

Abschließend werfen wir noch einen Blick auf den Komplex Γ_6 , welcher in Abbildung 7.7. dargestellt ist.

Hier liegen jetzt 14 Kantentypen und 13 Vertexypen vor. Damit erhalten wir zunächst für ∂^0 die Matrix

$$\partial^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

und können damit die die Kohomologiegruppen des Komplexes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{13} \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{Z}^{14} \rightarrow 0 \quad (7.12)$$

aus $Im(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}^{12}$ und $Ker(\partial^0) \simeq \mathbb{Z}$ wiederum wie oben bestimmen zu $H^0(\Gamma_6; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ und $H^1(\Gamma_6; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

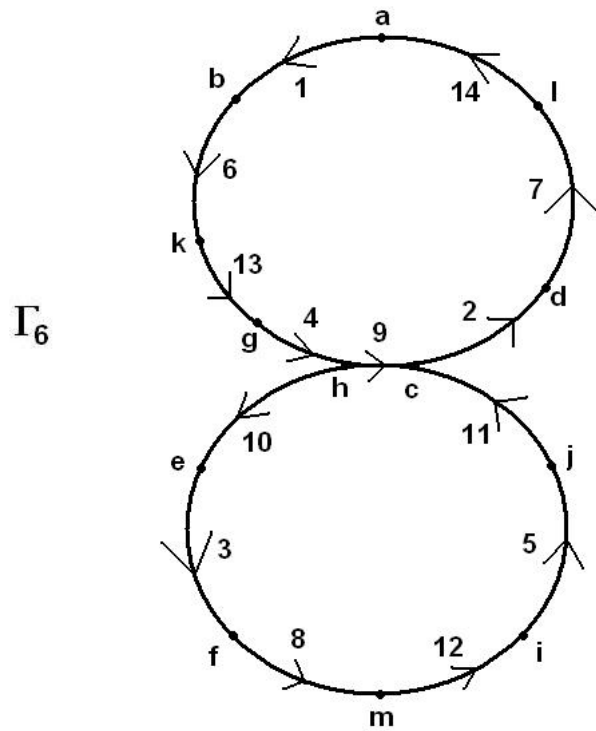
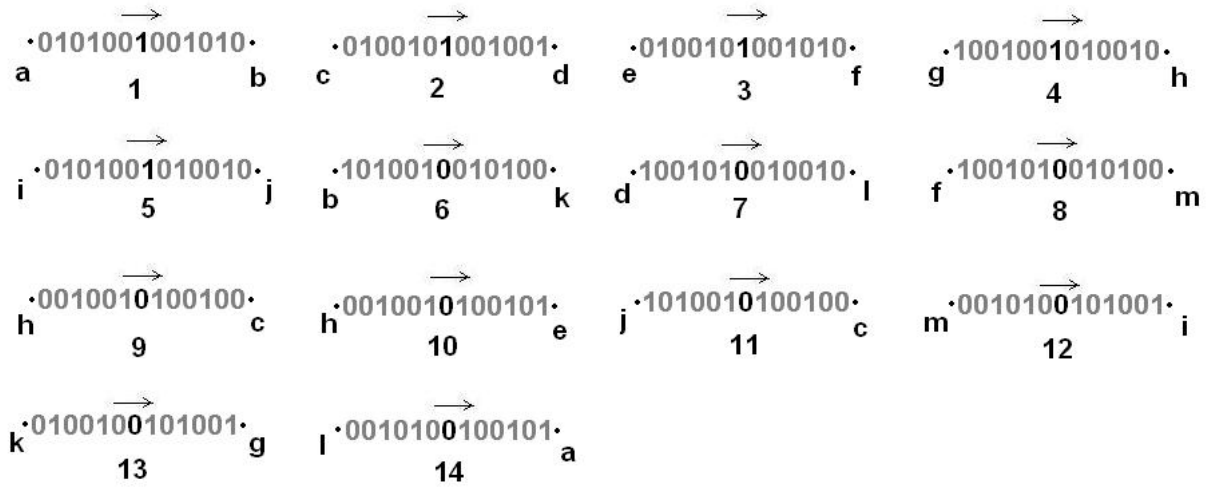


Abbildung 7.7.: Der Komplex Γ_6 der Fibonacci-Kette

Zusammenfassung

Die Kohomologiegruppen der Anderson-Putnam-Komplexe sind für die ersten sieben Komplexe identisch. Für die Anzahl K der Kanten des n -ten Komplexes lässt sich die Formel $K_n = 2 \cdot n + 2$ finden, während für die Anzahl der Vertices die Formel $V_n = 2 \cdot n + 1$ und für den Rang des n -ten Differentials δ^0 die Beziehung $r_n = 2 \cdot n$ gilt. Es ist anzunehmen, dass diese Beziehung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt ([Sa3]).

7.3. Anderson-Putnam-Komplexe des gefärbten Quadrat-Rechteck-Tilings

Die Kohomologie des Komplexes Γ_0

Diese Kohomologie haben wir bereits in Kapitel 5 ausgerechnet. Die zugehörigen Differentiale und Abbildungsmatrizen sind im Anhang F.1. dargestellt. Die Abbildung γ_0^* ist ein Isomorphismus und die Kohomologiegruppen hatten wir bestimmt zu $H^0(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H^1(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^4$ und $H^2(\Gamma_0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Die Kohomologie des Komplexes Γ_1

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den ersten Anderson-Putnam-Komplex eines zweidimensionalen Tilings berechnen, dabei beschränken wir uns auf den (einfacheren) Fall des gefärbten QR-Tilings. Eine graphische Darstellung der Tiles mit Kragen ist in den Abbildungen E.1. - E.4. im Anhang gegeben; wegen der Komplexität der Berechnungen bietet sich für die konkrete Berechnung eine Programmierung mittels GAP an. Es liegen jetzt 64 Prototiles, 96 Kanten und 36 Vertices vor. Für die Ränge der Differentiale erhalten wir

$$\text{Rang}(\partial^0) = 35; \text{Rang}(\partial^1) = 57,$$

wobei die Smithsche Normalform von ∂^1 ein von 0 und 1 verschiedenes Element auf der Diagonalen enthält (nämlich 2). Mit Satz B.23 rechnen wir:

$$\check{H}^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \tag{7.13}$$

$$\check{H}^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^4, \tag{7.14}$$

$$\check{H}^2(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2. \tag{7.15}$$

Auch in diesem Fall sind die Kohomologien von nulitem und erstem Anderson-Putnam-Komplex identisch. Dies trifft allerdings im allgemeinen nicht auf alle Substitutionstilings zu. Daher könnte ein Gegenstand weiterer Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet die genauere Untersuchung dieses Phänomens sein (bzw. die Frage, welche notwendigen oder hinreichenden Bedingungen existieren, dass die Abbildung γ^* ein Isomorphismus ist).

8. Zur geometrischen Interpretation von Kohomologiegruppen

In diesem Kapitel wollen wir einen Ansatz zur geometrischen Interpretation der Torsion in der Kohomologie von Substitutionstilings aufstellen.

Wir hatten in Kapitel 3 festgestellt, dass Torsion für Projektionstilings der Dimension und Kodimension 2 höchstens in der zweiten Kohomologiegruppe $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z})$ auftreten kann.

Sei T nun ein quasiperiodisches Projektionstiling der Dimension und Kodimension 2, welches auch Substitutionstiling ist und Γ_i der für die Berechnung geeignete Anderson-Putnam-Komplex (es gilt also $i = 0$ oder $i = 1$). Ist die Abbildung γ^* bzw. deren Anteil γ_2 (bezogen auf Γ_i) nun ein Isomorphismus, so kann Torsion in der Gruppe $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z})$ nach Satz 2.16 genau dann auftreten, wenn diese auch in der zweiten Kohomologiegruppe $\check{H}^2(\Gamma_i; \mathbb{Z})$ auftritt. In unseren Rechenbeispielen ist dies der Fall, daher wollen wir uns beim Aufstellen der notwendigen und hinreichenden Bedingungen auf diesen Fall beschränken. Wir halten zunächst fest:

Satz 8.1

Sei T ein Substitutionstiling der Dimension 2 derart, dass die Abbildung γ_2 zwischen dem Anderson-Putnam-Komplex Γ_i , $i = 0$ (falls T den Rand erzwingt) oder $i = 1$ (sonst) bijektiv ist. Dann hat $\check{H}^2(\Omega_T; \mathbb{Z})$ genau dann einen nichttrivialen Torsionsteil \mathbb{Z}_k , wenn $H^2(\Gamma_i; \mathbb{Z})$ denselben nichttrivialen Torsionsteil hat. \square

Es genügt dann für diesen Fall also, die Torsion in der Kohomologie $H^*(\Gamma_i; \mathbb{Z})$ der Anderson-Putnam-Komplexe zu betrachten. Da es sich dabei um Zellkomplexe handelt (derart, dass der Rand jeder k -Zelle aus $k - 1$ -Zellen besteht), sind sie einer geometrischen Anschauung zugänglich, was wir bei unseren Berechnungen ja auch immer ausgenutzt haben.

Wir überlegen uns zunächst, wie die geometrische Definition von Torsion aussieht, bezogen auf die zelluläre Kohomologie:

Satz 8.2

Sei X ein CW-Raum. $H^2(X; \mathbb{Z})$ hat genau dann einen nichttrivialen Torsionsteil \mathbb{Z}_k , wenn es eine 1-Kokette gibt, deren Korand von der Form $k \cdot z$ ist, wobei z ein von 0 verschiedener 2-Kozyklus ist, so dass es keine 1-Kokette σ gibt mit $\partial^1 \sigma = z$.

Beweis. Nach den Ausführungen in Abschnitt B.3.2 sind die Elemente der zweiten Kohomologiegruppe die Elemente des Quotientenmoduls der 2-Kozyklen modulo der 1-Koränder. Ein von null verschiedenes Element aus $H^2(X; \mathbb{Z})$ ist demnach ein 2-Kozyklus, welcher *kein* 1-Korand ist. Sei z nun ein Torsionselement in $H^2(X; \mathbb{Z})$. Dann gibt es nach Definition A.1 ein $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, so dass $k \cdot z = 0$ gilt. Das bedeutet aber nichts anderes, als dass es einen 2-Kozyklus z gibt, der genau dann zu einem 1-Korand wird, wenn er k -mal durchlaufen wird. Damit folgt dann unmittelbar die Behauptung. \square

Nun haben wir jedoch keine genauen Vorstellungen davon, wie ein Kozyklus im Allgemeinen aussehen könnte. Koketten hatten wir uns stets geometrisch so vorgestellt wie Ketten, bei Kozykeln wird der Sachverhalt jedoch etwas komplizierter (siehe z.B. [SZ]). Etwas einfacher stellt sich unser Problem dar, wenn wir von der Kohomologie zur Homologie übergehen, was nach Satz B.18 im endlich erzeugten Fall immer möglich ist. Der Torsionsteil der zweiten Kohomologiegruppe "verschiebt" sich dann einfach auf die erste Homologiegruppe und die Aussage von Satz 8.2 überträgt sich sinngemäß:

Satz 8.3

Sei X ein CW-Raum. Hat $H^2(X; \mathbb{Z})$ einen nichtverschwindenden Torsionsteil \mathbb{Z}_k , so hat $H_1(X; \mathbb{Z})$ denselben nichttrivialen Torsionsteil. Es gibt dann also eine 2-Kette σ_2 , deren Rand von der Form $k \cdot z$ ist, wobei z ein von 0 verschiedener 1-Zyklus ist, so dass es keine 2-Kette σ' gibt mit $\partial_2 \sigma' = z$. \square

Sei nun σ_2 eine 2-Kette wie in Satz 8.3. Diese ist von der Form $\sigma_2 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$, wobei die c_n ein Erzeugendensystem der zweiten Kettengruppe darstellen und die a_i beliebige Koeffizienten aus \mathbb{Z} sind. Wenden wir auf diese Gleichung den Randoperator ∂_2 an, so erhalten wir wegen dessen Linearität:

$$\partial_2 \sigma_2 = \partial_2(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) = a_1 \cdot \partial_2 c_1 + a_2 \cdot \partial_2 c_2 + \dots + a_n \cdot \partial_2 c_n. \tag{8.1}$$

Damit jetzt die Bedingung von Satz 8.3 überhaupt erfüllt sein kann, darf die rechte Seite der Gleichung nicht verschwinden. Es muss also in jedem Erzeugendensystem der Kettengruppe C_2 mindestens eine erzeugende Kette c_i geben mit $\partial_2 c_i \neq 0$. Für unsere Berechnungen hatten wir die Kettengruppe C_2 (bzw. C^2) erzeugt, indem wir alle 2-Zellen als Erzeuger gewählt hatten, geometrisch gesprochen also unsere Prototiles.

Dies liefert uns eine notwendige Bedingung für die Torsion:

Satz 8.4

Die ganzzahlige Kohomologie des Komplexes Γ_i kann höchstens dann Torsion haben, wenn es im zugehörigen Tiling mindestens ein Prototile gibt, dessen Rand von null verschieden ist. \square

Beispiel 8.5

Betrachten wir das ungefärbte, unbepfeilte oktagonale Tiling. Orientiert man die Kanten der Prototiles, so erhält man das in Abbildung 8.1. dargestellte Bild (die Pfeile stehen hier für die gewählten Orientierungen der Kanten).

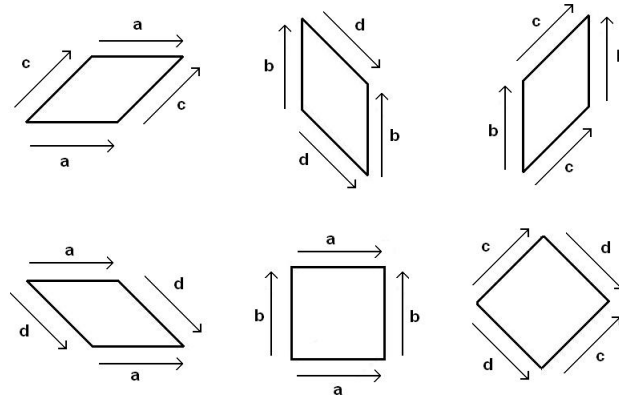


Abbildung 8.1.: Die Prototiles des oktagonalen Ammann-Beenker-Tilings mit Kantenidentifizierung

Wir erkennen, dass der Rand jedes einzelnen Prototiles gleich 0 ist, daher kann die zweite Kohomologiegruppe des nullten Anderson-Putnam-Komplexes keine Torsion aufweisen.

Indem wir die Vertices des Tilings nun verschiedenartig färben, erzwingen wir, dass die gegenüberliegenden Kanten der Prototiles *verschieden* sind (siehe die Abbildungen D.1. - D.5.), weshalb Torsion im Komplex Γ_i möglich wird.

Diese notwendige Bedingung gilt auch für Tilings der Dimension 3. In diesem Fall kann man sich die Orientierung der 3-Kette als "Schraubenlinie" vorstellen, die die Reihenfolge des Durchlaufens durch die 2-Ketten, die den Rand ausmachen, vorgibt [SZ]. Die notwendige Bedingung für Torsion kann in diesem Fall sowohl für die zweite als auch die dritte Kohomologiegruppe erfüllt sein. Man wird also damit rechnen müssen, dass in Tilings der Dimension größer als zwei auch die Kohomologiegruppen $H^q(\Gamma_i; \mathbb{Z})$, $q > 2$ Torsion aufweisen können.

Wir wollen uns nun ansehen, wie wir die 2-Kokette σ^2 aus Satz 8.2 für ein vorgegebenes Tiling konkret berechnen können. Dazu stellen wir zunächst fest, dass es nach Satz B.23 genügt, statt des Quotienten $Ker(\partial^i)/Im(\partial^{i-1})$ die Matrix ∂^{i-1} auf das Auftreten von Elementen > 1 auf der Diagonalen der Smithschen Normalform $\mathcal{S}(\partial^{i-1})$ zu untersuchen.

Wir hatten nun beim Aufstellen der Matrix ∂^1 stets die kanonischen Basen der Kokettengruppen C^1 und C^2 verwendet (also die Basen, deren Basiselemente stets nur aus einer

1-Kokette bzw. 2-Kokette bestehen). Um die Auswirkung der Torsion nun zu untersuchen, müssen wir die Matrix mittels geeigneter Basistransformationen auf Smithsche Normalform bringen. Mit der Transformationsformel für Basen (erweitert auf \mathbb{Z} -Moduln) (siehe z.B. [Fi]) gilt dann:

$$\mathcal{S}(\partial^1) = B \cdot \partial^1 \cdot A^{-1}, \tag{8.2}$$

wobei A und B Matrizen sind, welche die kanonischen Basen \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} von C^1 bzw. C^2 auf neue Basen \mathcal{A}' bzw. \mathcal{B}' transformieren.

Im Fall eines nichttrivialen Torsionsteils gibt es nun in $\mathcal{S}(\partial^1)$ Diagonalelemente, welche von 0 und 1 verschieden sind (Satz B.23). Sei k ein solches Element, dieses befinde sich o.B.d.A. in der i -ten Zeile von $\mathcal{S}(\partial^1)$. Multiplizieren wir die obige Gleichung von rechts mit dem Einheitsvektor e_i , so erhalten wir:

$$k \cdot e_i = B \cdot \partial^1 \cdot (A^{-1} \cdot e_i) = B \cdot \partial^1 \cdot v. \tag{8.3}$$

Multiplizieren wir jetzt von links mit B^{-1} so erhalten wir schließlich:

$$k \cdot (B^{-1}e_i) = \partial^1 \cdot (A^{-1} \cdot e_i). \tag{8.4}$$

Anders ausgedrückt: Es gibt Vektoren u und v , so dass $\partial^1 \cdot v = k \cdot u$ gilt mit $k > 1$ und es keinen Vektor w gibt mit $k \cdot w = v$. Wir haben damit also genau die Aussage von Satz 8.2 verifiziert.

Mittels des universellen Koeffiziententheorems B.18 können wir unsere Betrachtungen wieder direkt auf die Homologie übertragen. Wir ersetzen einfach ∂^1 durch ∂_2 und erhalten:

$$k \cdot u' = \partial_2 \cdot v', \tag{8.5}$$

wobei wir wieder voraussetzen, dass es keinen Vektor w' mit $k \cdot w' = v'$ gibt. Es existiert also eine 2-Kette (mit ganzzahligen Koeffizienten), ausgedrückt durch den Vektor v' , deren Rand in der Form $k \cdot u'$ darstellbar ist, wobei u' die Vektordarstellung einer 1-Kette ist,

welche nicht 1-Rand ist. Nach dem Beweis von Satz B.23 ist diese jedoch auch ein 1-Zyklus, da es sich um ein Element aus der Basis der zweiten Kettengruppe bezüglich Smithscher Normalform handelt; wir finden hier also genau die Aussage von Satz 8.3 wieder.

Zusammengefasst gilt also:

Satz 8.6

Sei X ein CW-Raum, dessen erste Homologiegruppe $H_1(X; \mathbb{Z})$ (zweite Kohomologiegruppe $H^2(X; \mathbb{Z})$) einen nichttrivialen Torsionsteil \mathbb{Z}_k aufweist. Dann gibt es Vektoren u, u', v, v' , so dass gilt:

$$k \cdot u = \partial^1 \cdot v \text{ und} \tag{8.6}$$

$$k \cdot u' = \partial_2 \cdot v', \tag{8.7}$$

wobei es keine Vektoren w, w' gibt, so dass $k \cdot w = v$ oder $k \cdot w' = v'$ gilt.

Zur konkreten Berechnung des Vektors v' (auf den wir uns aus Gründen der geometrischen Anschauung beschränken) müssen wir die Matrizen A und B berechnen, dies kann z.B. mit GAP durchgeführt werden. Damit können wir die Vektoren v' für unsere Rechenbeispiele ermitteln. Beim gefärbten QR-Tiling erhalten wir:

$$v'^T = (-1 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Die Torsion wirkt hier auf die Prototiles mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10 und 11.

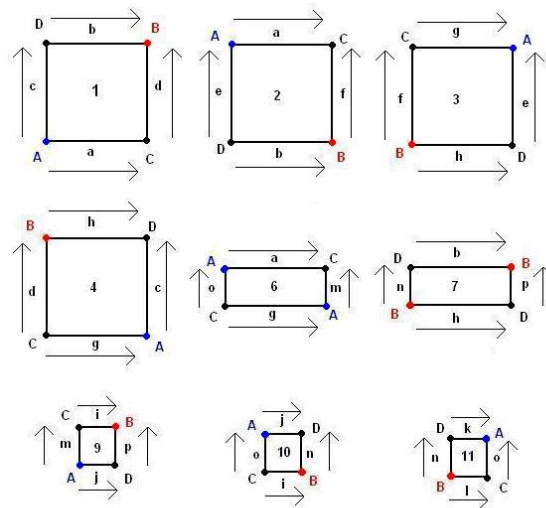


Abbildung 8.2.: Torsion kann nur entstehen, wenn in verschiedenen Prototiles Kanten vom gleichen Typ in derselben Orientierung vorkommen, hier z.B. die Kante a , wenn man die Orientierungen aller Tiles gegen den Uhrzeigersinn wählt.

Auch für das gefärbte oktagonale Tiling mit Pfeilen können wir den Vektor v' bestimmen. Wir erhalten:

$$v'^T = (-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Die Torsion wirkt in diesem Fall auf die Prototiles Nr. 1, 2, 9, 10, 17 und 18 (Abbildung 8.3).

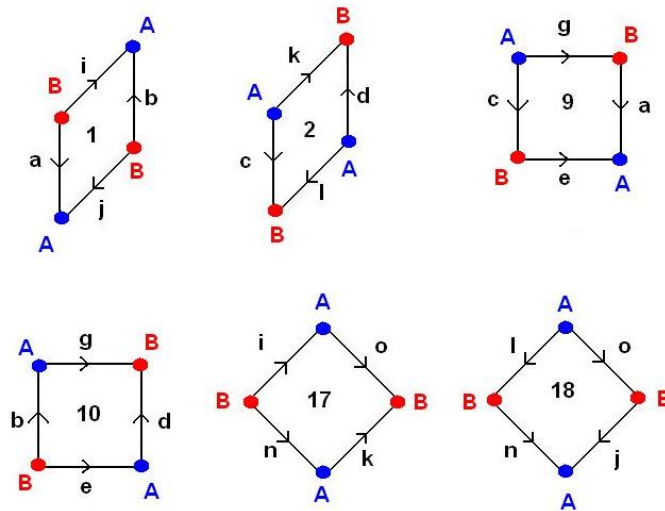


Abbildung 8.3.: Torsion kann nur entstehen, wenn in verschiedenen Prototiles Kanten vom gleichen Typ in derselben Orientierung vorkommen, hier z.B. die Kante i , wenn man die Orientierungen aller Tiles gegen den Uhrzeigersinn wählt.

Sehen wir uns die Abbildungen 8.2 und 8.3 an, so fällt uns Folgendes auf: Zunächst tritt jeder Kantentyp mehrfach auf, teils gleichorientiert, teils in verschiedenen Orientierungen. Die Tatsache, dass Kanten mehrfach auftreten, ist notwendig für Torsion:

Satz 8.7

Sei X ein CW-Komplex. Dann hat $H^2(X; \mathbb{Z})$ höchstens dann Torsion, wenn es mindestens eine 1-Zelle gibt, die zum Rand mehr als einer 2-Zelle gehört oder im Rand einer 2-Zelle mehrfach auftritt.

Beweis. Würde eine 1-Zelle nur zum Rand einer einzigen 2-Zelle gehören, so entspräche dies in der Randmatrix einer Spalte, die nur einen einzigen von 0 verschiedenen Eintrag hat. Torsion könnte dann nur auftreten, wenn dieser Eintrag größer als 1 wäre, damit folgt die Behauptung. □

Diese notwendige Bedingung hilft uns im Fall der Anderson-Putnam-Komplexe jedoch nicht weiter, da sie dort immer erfüllt ist (es gibt im Tiling ja keine "freien" Kanten, die nur zu einem einzigen Tile gehören). Wichtiger ist die Feststellung, dass es Kanten gibt, welche in verschiedenen Tiles dieselbe Orientierung aufweisen:

Bilden wir die Summe der Kanten eines Kantentyps unter Beachtung der Koeffizienten im Vektor v' , so fällt auf, dass es Kantensummen gibt, die nicht verschwinden. Dies ist kein Zufall und führt uns zu unserer zweiten notwendigen Bedingung für Torsion:

Satz 8.8

Sei T ein Substitutionstiling der Dimension 2. Die zweite Kohomologiegruppe des Anderson-Putnam-Komplexes hat höchstens dann Torsion, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Ordnen wir jeder Kante, welche bezüglich der Orientierung des Prototiles t_i , in dem sie auftritt, positiv (bzw. negativ) orientiert ist die Zahl $k_i = 1$ (bzw. $k_i = -1$) zu, so gibt es mindestens eine Kante, so dass $\sum_i k_i \neq 0$ gilt.

Beweis. In Satz B.23 hatten wir gesehen, dass genau dann Torsion auftritt, wenn die Smithsche Normalform der Matrix ∂^1 ein von 0 und 1 verschiedenes Diagonalelement enthält. Unsere notwendige Bedingung fordert, dass die Summe der Spaltenelemente für mindestens eine Spalte von 0 verschieden ist; o.B.d.A. nehmen wir an, dass die Matrix vollen Rang hat, andernfalls streichen wir linear abhängige Zeilen. Wäre die notwendige Bedingung nicht erfüllt, so könnte man ∂^1 einfach durch Addition von Zeilen auf Hermitesche Normalform bringen (wie sich z.B. mit GAP verifizieren lässt), wobei die Hermitesche Normalform dann keine von 0, 1 oder -1 verschiedenen Elemente enthält. Führt man an der Hermiteschen Normalform elementare Spaltenumformungen vor, um sie auf Smithsche Normalform zu bringen, so kann auf der Diagonalen insbesondere kein von 0 oder 1 verschiedenes Element stehen, folglich kann die zweite Kohomologiegruppe auch keine nichttrivialen Torsionselemente aufweisen. □

Was nun noch fehlt, ist eine hinreichende Bedingung für Torsion. Hier ergibt sich nun die Schwierigkeit, dass nach Satz 8.3 die Kette σ_2 durch beliebige Linearkombinationen von 2-Ketten entsteht. Wir können daher keine allgemeine geometrische Aussage machen, die über die notwendigen Bedingungen hinausgeht. Es geht ja nicht nur darum, durch Zeilenumformungen in einer Zeile ein von 0, 1 und -1 verschiedenes Element zu erzeugen, sondern es darf dann in derselben Zeile auch weder das Element 1 noch das Element -1 auftreten, da bei Spaltenumformungen dann die Torsion wieder "verschwinden" würde.

Zusammenfassung

Aus unseren geometrischen Untersuchungen über die Torsion in der Kohomologie von Substitutionstilings der Dimension 2 haben wir Erkenntnisse über notwendige und hinreichende Bedingungen gewonnen, die wir in nachfolgender Übersicht auflisten wollen.

Die Kohomologie eines Substitutionstilings der Dimension 2 hat höchstens dann Torsion wenn

- nicht die Ränder aller Tiles gleich 0 sind.
- es Kanten gibt, welche dieselbe relative Orientierung in verschiedenen Tiles aufweisen und deren relative Kantensumme im Anderson-Putnam-Komplex nicht verschwindet.

Die Kohomologie eines Substitutionstilings der Dimension 2 hat genau dann Torsion, wenn

- es eine 2-Kette gibt, deren Rand von der Form $k \cdot z$ ist mit $k \in \mathbb{N}, k > 1$, wobei z ein nichttrivialer 1-Zyklus ist, welcher nicht 2-Rand ist.

9. Ausblick auf die K-Theorie

Im letzten Kapitel wollen wir noch einen Ausblick auf eventuelle weitere Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Topologie von Tilingräumen geben. Hier wird dann auch der in der Einleitung erwähnte Zusammenhang der topologischen Untersuchungen zur Festkörperphysik klar. Da es sich um einen Ausblick handeln soll (und die Komplexität des Gebietes den Rahmen dieser Arbeit bei Weitem sprengen würde), werden wir nur einige grundlegenden Ideen und Definitionen skizzieren sowie Aussagen aus bestehenden Arbeiten zitieren, insbesondere sind hier [Be1],[Be2] und [KP] zu nennen. Der Aufbau dieses Kapitels folgt im Wesentlichen den Ausführungen in [KP].

Zunächst benötigen wir einen Begriff aus der Funktionalanalysis, den Begriff einer C^* -Algebra [Pe]:

Definition 9.1

Sei $V := (V, +)$ ein Vektorraum über einem Körper K (wir wählen hier $K := \mathbb{C}$). V sei mit einer Norm $\|\cdot\|$, einer Multiplikation $\circ : V \times V \mapsto V$ und einer Involution $* : V \mapsto V : a \mapsto a^*$ versehen, so dass für alle $a, b \in V$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $(V, +, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum (also ein vollständiger, normierter Vektorraum).
- $(V, +, \circ)$ ist eine assoziative K -Algebra.
- $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
- $(a^*)^* = a$.
- $(a \circ b)^* = b^* \circ a^*$.
- $(z \cdot a + w \cdot b)^* = \bar{z} \cdot a^* + \bar{w} \cdot b^*$.
- $\|a\| = \|a^*\|$.
- $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Dann heißt V (zusammen mit $+, \circ, *$) **C^* -Algebra** (über \mathbb{C}).

Betrachten wir nun den Raum Ω_T zusammen mit \mathbb{R}^d wiederum als dynamisches System (die Elemente aus \mathbb{R}^d seien die Translationen). Wir haben nun die Möglichkeit, dem System (Ω_T, \mathbb{R}^d) auf verschiedene C^* -Algebren zuzuordnen. An dieser Stelle erwähnen wir zwei dieser Algebren, welche in [KP] Erwähnung finden:

Wir betrachten zunächst die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger von $\Omega_T \times \mathbb{R}^d$ nach \mathbb{C} (also die Funktionen, die jedem Tiling zusammen mit einer Translation eine komplexe Zahl zuordnen), diese fassen wir in einer Menge $C_C(\Omega_T \times \mathbb{R}^d)$ zusammen. Wir versehen $C_C(\Omega_T \times \mathbb{R}^d)$ mit einem Produkt und einer Involution. Für alle $f, g \in C_C(\Omega_T \times \mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $T \in \Omega_T$ gelte:

$$(f \circ g)(T, x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} f(T, y) \times g(T - y, x - y) dy, \quad (9.1)$$

$$f^*(T, x) = \overline{f(T - x, -x)}. \quad (9.2)$$

Mit einer geeigneten Norm versehen und nach einer (nichttrivialen) Vervollständigung (siehe z.B. [Pe]), wird damit $C_C(\Omega_T \times \mathbb{R}^d)$ zu einer C^* -Algebra.

Für die zweite Möglichkeit zur Definition einer C^* -Algebra müssen wir etwas weiter ausholen: Zunächst versehen wir alle Prototiles der Tilings in Ω_T mit einer **Punktierung**, d.h. wir zeichnen in jedem Tile-Typ einen festen Punkt aus. Wir betrachten dann den Teilraum $\Omega_P \subset \Omega_T$ der Tilings, deren Ursprung auf einer solchen Punktierung liegt. Nun betrachten wir spezielle Paare von Elementen aus Ω_P , indem wir definieren:

$$R_P = \{(T_1, T_2) \in \Omega_P \times \Omega_P \mid \exists x \in \mathbb{R}^d : T_1 = T_2 + x\}, \quad (9.3)$$

dies sind also genau die Paare von Tilings, die durch eine Translation auseinander hervorgehen.

Den zugrundeliegenden Vektorraum für unsere zu konstruierende zweite C^* -Algebra definieren wir jetzt wie vorher zunächst als Vektorraum der stetigen Funktionen $R_P \mapsto \mathbb{C}$. Produkt und Involution definieren wir dann für alle $T_1, T_2 \in \Omega_P$ (mit der Abkürzung $R_T = \{(T_1, T_2) \in \Omega_T \times \Omega_T \mid \exists x \in \mathbb{R}^d : T_1 = T_2 + x\}$):

$$(f \circ g)(T_1, T_2) = \sum_{T': (T_1, T') \in R_T} f(T_1, T') \times g(T', T_2), \quad (9.4)$$

$$f^*(T_1, T_2) = \overline{f(T_2, T_1)}. \quad (9.5)$$

Wiederum mit einer geeigneten Norm versehen erhalten wir eine weitere C^* -Algebra, welche mit (Ω_T, \mathbb{R}^d) zusammenhängt, diese wollen wir mit \mathcal{A}_T bezeichnen.

Mit einigem mathematischen Aufwand lässt sich zeigen, dass die beiden Algebren **stark Morita-äquivalent** sind. Eine genaue Definition dieses Begriffs benötigt ebenfalls einigen mathematischen Aufwand, wir wollen dazu auf [AF] verweisen und lediglich feststellen, dass die beiden Algebren isomorphe **K-Theorien** haben. Dies wollen wir jetzt etwas genauer begründen, dazu wollen wir eine (sehr) kurze Definition der komplexen K-Theorie von C^* -Algebren angeben: Im Wesentlichen handelt es sich dabei um Gruppen, welche gewisse Elemente der C^* -Algebra modulo geeigneter Äquivalenzrelationen enthalten. Wir skizzieren hier die in [KP] gegebene Definition für die Gruppen K_0 und K_1 .

Sei dazu A eine C^* -Algebra und $M_n(A)$ die Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus A . Wir definieren zunächst eine Menge $P(A)$:

$$P(A) := \{p \in M_n(A) \mid p^2 = p = p^* \text{ für irgendein } n \in \mathbb{N}\}. \quad (9.6)$$

Seien nun $p, q \in P(A)$ und $p, q \in M_n(A)$. Man kann p und q nun in den $M_{2n}(A)$ einbetten, indem man fordert, dass die letzten n Zeilen und Spalten alle den Eintrag 0 haben. Wir haben dann:

$$p \hookrightarrow P := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \quad q \hookrightarrow Q := \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Die vorkommenden Matrizen sind hier als Blockmatrizen zu verstehen, d.h. das Nullelement unten rechts steht z.B. für einen $n \times n$ -Block von Nullen. Dabei steht \sim für die Ähnlichkeit von Matrizen, d.h. $A \sim B$, falls es eine invertierbare Matrix U gibt mit $A = UBU^{-1}$. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

sind nun orthogonal zueinander in dem Sinne, dass ihr Produkt 0 ergibt. Betrachten wir jetzt statt der Matrizen P und Q ihre Äquivalenzklassen $\{P\}, \{Q\}$ bezüglich Ähnlichkeit, so können wir die folgende Addition definieren:

$$\{P\} + \{Q\} = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right\}. \quad (9.9)$$

Um nun zu einer Gruppe zu gelangen, benötigen wir eine weitere Äquivalenzrelation, die wir diesmal mit \approx bezeichnen wollen. Seien dazu wieder $p, q \in P(A)$. Dann definiert man:

$$p \approx q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}, \quad (9.10)$$

wobei 1_k die k -dimensionale Einheitsmatrix beschreibt. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser neuen Relation schreiben wir diesmal mit eckigen Klammern. Setzen wir dann

$$K_0(A) = \{[p] - [q] \mid p, q \in P(A)\}, \quad (9.11)$$

so erhalten wir eine abelsche Gruppe (die Subtraktion wurde eingeführt, damit jedes Element invertierbar ist), diese bezeichnen wir als die **nullte K-Gruppe** $K_0(A)$ der C^* -Algebra A .

Zur Definition der **ersten K-Gruppe** von A setzen wir zunächst:

$$U_n := \{u \in M_n(A) \mid \det(u) \neq 0\}. \quad (9.12)$$

Zwei Elemente u, v aus U_n sollen jetzt äquivalent sein, wenn sie ineinander homtopierbar sind, d.h., es eine stetige Matrix-Funktion $h : [0, 1] \mapsto U_n$ gibt, so dass $h(0) = u$ und $h(1) = v$ gilt. Die Elemente aus U_n lassen sich wiederum in die Menge U_{n+1} einbetten, diesmal, indem man das $n + 1$ -te Diagonalelement gleich 1 setzt. Zusammen mit der Multiplikation von Matrizen ist die Menge der Äquivalenzrelationen dann eine abelsche Gruppe, diese bezeichnen wir mit $K_1(A)$.

Nun wollen wir auf die Anwendung der K -Theorie von C^* -Algebren in der Festkörperphysik eingehen. Betrachten wir dazu ein freies Teilchen in der Quantenmechanik, wobei wir dessen Spin vernachlässigen wollen. Die zugehörigen Observablen lassen sich dann durch selbstadjungierte Operatoren repräsentieren, die auf die Wellenfunktion des Teilchens wirken.

Jeder dieser Operatoren lässt sich aus Orts- und Impulsoperatoren konstruieren. Orts- und Impulsoperatoren wiederum erzeugen nun eine Algebra, deren Abschluss eine C^* -Algebra im oben definierten Sinne ist; diese bezeichnen wir an dieser Stelle als **Observablenalgebra**.

Stellen wir uns nun vor, das Teilchen befinde sich in einem Quasikristall, welcher durch ein Tiling modelliert wird. Dabei steht jedes Prototile für eine bestimmte Konfiguration von Atomen, wobei zwei äquivalente Prototiles dieselbe Atomkonfiguration repräsentieren sollen. In diesem Fall kann man sich vorstellen, dass die Bewegung des Teilchens (im Tight-Binding-Modell) näherungsweise durch eine diskrete Bewegung dargestellt werden kann. Die Impulsoperatoren in der Observablenalgebra müssen dann durch **partielle Translationen** ersetzt werden. In diesem Fall entspricht die zugehörige C^* -Algebra genau unserer Algebra \mathcal{A}_T [Be1],[Be2],[KP].

Man kann jetzt auf der Gruppe K_0 eine geeignete Ordnungsstruktur $<$ definieren und die Algebra \mathcal{A}_T mit einer **Spur** τ versehen. Diese induziert dann eine Abbildung $\hat{\tau}$ von $K_0(\mathcal{A}_T)$ nach \mathbb{R} .

Betrachten wir jetzt **Energielücken** (Gaps) im Spektrum eines Teilchens in einem ein-dimensionalen Quasikristall, der durch ein Tiling modelliert wird. Man kann jeder Energielücke g ein Element $[P_g] \in K_0$ zuordnen, wobei sich das Element P_g aus dem Intervall $(-\infty, g)$ bestimmen lässt [KP]. Wenden wir jetzt die Spurabbildung τ auf P_g an, so erhalten wir eine reelle Zahl, welche aber genau dem Wert der induzierten Abbildung $\hat{\tau}$ an der Stelle $[P_g]$ entspricht. Nach geeigneter Wahl der Spur wenden wir die **Formel von Shubin** an [Be2], welche uns gestattet, den Wert $\hat{\tau}([P_g])$ mit dem Wert der integrierten Zustandsdichte $N(E)$ an dieser Stelle gleichzusetzen.

Eine Darstellung der Energielücken gelingt am besten, wenn man die integrierte Zustandsdichte über der Energie aufträgt; in diesem Fall sind die Energielücken genau die Plateaus und die Gruppe $K_0(\mathcal{A}_T)$ macht dann Aussagen über deren Anzahl und Anordnung, nicht jedoch über ihre Position oder Breite. Neben dieser Aussage gibt es noch einige weitere Gap-Labeling-Theoreme, siehe dazu [Be1].

Bisher haben wir noch nichts darüber gesagt, wozu man zwei C^* -Algebren benötigt bzw. wie man die K -Theorie einer C^* -Algebra überhaupt konkret berechnet. Zunächst gilt hier die folgende Isomorphiebeziehung [KP]:

$$K_i(C^*(\Omega_T, \mathbb{R}^d)) \simeq K^{i-d}(\Omega_T), \quad (9.13)$$

wobei $i-d$ modulo 2 zu nehmen ist. Wegen der starken Morita-Äquivalenz gilt dann aber auch:

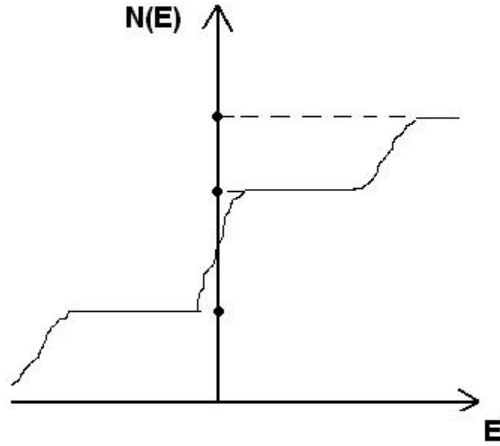


Abbildung 9.1.: Integrierte Zustandsdichte, aufgetragen über der Energie. Die Werte auf der Höhe eines Plateaus entsprechen genau dem Zahlenwert $\hat{\tau}K_0([P_g])$.

$$K_i(\mathcal{A}_T) \simeq K^{i-d}(\Omega_T). \quad (9.14)$$

K^{i-d} beschreibt hier die **topologische K-Theorie**. Auf dieses Gebiet können wir hier nicht näher eingehen und verweisen auf [A] und [Ha]. Tatsächlich benötigen wir für die weitere Berechnung auch keine Aussagen aus der topologischen K -Theorie, wenn wir die Kohomologiegruppen von Ω_T kennen. In [AP] wurde die folgenden Isomorphiebeziehungen gezeigt:

$$K_0(\mathcal{A}_T) \simeq H^0(\Omega_T; \mathbb{Z}) \oplus H^2(\Omega_T; \mathbb{Z}), \quad (9.15)$$

$$K_1(\mathcal{A}_T) \simeq H^1(\Omega_T; \mathbb{Z}). \quad (9.16)$$

Diese Beziehungen gelten für Tilings beliebiger Dimension, allerdings sind die erwähnten Gap-Labeling-Theoreme nur für Tilings der Dimension eins gültig. In unseren Rechenbeispielen erhalten wir für die K -Theorie:

- $K_0(\mathcal{A}_T) \simeq \mathbb{Z}^8 \oplus \mathbb{Z}_2$ und $K_1(\mathcal{A}_T) \simeq \mathbb{Z}^4$ beim gefärbten Quadrat-Rechteck-Tiling.
- $K_0(\mathcal{A}_T) \simeq \mathbb{Z}^{15} \oplus \mathbb{Z}_2$ und $K_1(\mathcal{A}_T) \simeq \mathbb{Z}^5$ beim gefärbten oktagonalen Tiling mit Pfeilen.

Für Tilings höherer Dimension lassen sich ähnliche Gap-Labeling-Theoreme formulieren (die dann jedoch möglicherweise schwächerer Aussagen treffen als im eindimensionalen Fall). Einige Ansätze hierzu finden z.B. in [Be1] Erwähnung.

10. Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit den notwendigen Formalismus zur Berechnung der ganzzahligen Čech-Kohomologie von Substitutions- und Projektionstilings zusammengestellt und das Berechnungsverfahren nach Kalugin auf den Fall ganzzahliger Koeffizienten erweitert. Ferner haben wir die Kohomologie- und K -Gruppen zweier zweidimensionaler Tilings bestimmt sowie einen Ansatz zur geometrischen Interpretation der Torsion in der zweiten Kohomologiegruppe für diese Tilings bzw. für Substitutionstilings der Dimension zwei gefunden. Schließlich haben wir das Berechnungsverfahren für die Kohomologie beliebiger Tilings für einige Beispiele auf Konvergenz untersucht.

Es gibt nun eine Reihe weiterer möglicher Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet, von denen wir die Folgenden nennen wollen:

- Der Formalismus, den wir für zweidimensionale Tilings aufgestellt haben, sollte auf Tilings höherer Dimension erweitert werden. Insbesondere ist zu untersuchen, wann in diesen Fällen Torsion in den Kohomologie- bzw. K -Gruppen auftreten kann.
- Bei unseren Berechnungen von direkten Limites hatten wir in den meisten Fällen angenommen, dass die zugehörigen Abbildungen Isomorphismen sind. Der Fall einer allgemeinen Abbildung sollte genauer untersucht werden bzw. es sollte ein geeigneter Berechnungsalgorithmus (eventuell für verschiedene Fälle) aufgestellt werden.
- Das allgemeine Berechnungsverfahren, das wir in Kapitel 7 aufgestellt haben, kann in einigen Fällen "Schwankungen" der Kohomologie beinhalten, d.h. für K_1 vergrößert sich die Kohomologie im Vergleich zu K_0 und verkleinert sich für K_2 wieder. Dieses Phänomen bedarf einer genaueren Untersuchung.
- Analog zu den für eindimensionale Tilings gültigen Gap-Labeling-Theoremen könnten sich eventuell schwächere Aussagen auch für die K -Theorie von Tilings höherer Dimension aufstellen lassen, auch dies sollte genauer untersucht werden.

A. Algebraische Grundlagen

A.1. Definitionen und Sätze über abelsche Gruppen

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit an vielen Stellen mit endlich erzeugten abelschen Gruppen. Eine abelsche Gruppe kann bekanntlich freie Elemente und Torsionslemente enthalten:

Definition A.1

Sei G eine abelsche Gruppe ¹. Ein Element $g \in G$ mit der Eigenschaft $\exists m \in \mathbb{Z}, m \neq 0_{\mathbb{Z}} : m \cdot g = 0$ heißt **Torsionselement**. Die Torsionslemente in G bilden eine Untergruppe von G , welche als **Torsionsuntergruppe** von G bezeichnet wird, diese enthält auf jeden Fall das neutrale Element e (bzw. 0 , falls die Verknüpfung additiv geschrieben wird). Alle Elemente in G , die nicht Torsionselement sind, heißen **freie Elemente**.

Endlich erzeugte abelsche Gruppen lassen sich nun folgendermaßen klassifizieren:

Satz A.2

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt

$$G \simeq \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{c_1} \oplus \mathbb{Z}_{c_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{c_n} \tag{A.1}$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $c_i \geq 1$ und $c_{i+1} | c_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$ sowie der Abkürzung $\mathbb{Z}_{c_2} = \mathbb{Z}/c_2\mathbb{Z}$. Die Zahlen $m, c_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ sind dabei eindeutig durch G bestimmt. Ist $m = 0$, so bezeichnen wir G als **Torsionsgruppe** ². Gilt dagegen $c_i = 1$ für alle i , so nennen wir G **freie Gruppe**. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G lässt sich damit darstellen als direkte Summe aus einer freien Gruppe F und einer Torsionsgruppe T : $G \simeq F \oplus T$.

Für eine abelsche Gruppe G lässt sich deren **Rang** definieren als die Kardinalität einer maximalen \mathbb{Z} -linear unabhängigen Teilmenge.

¹Die zugehörige Verknüpfung $+$ geben wir nur jeweils bei Bedarf explizit an.

²Dabei definieren wir $\mathbb{Z}^0 := \{0\}$.

Es gilt hier der folgende Satz:

Satz A.3

Sei T eine endlich erzeugte abelsche Torsionsgruppe. Dann hat T den Rang null.

Beweis. Um den Rang von T zu bestimmen, müssen wir eine maximale \mathbb{Z} -linear unabhängige Teilmenge von T bestimmen und deren Elemente abzählen. Da jedes Element t_i in T Torsionslement ist, gibt es ganze Zahlen $n_i \neq 0_{\mathbb{Z}}$ mit $n_i \cdot t_i = 0$, d.h. es gibt kein Element, das von sich selbst linear unabhängig wäre und jede \mathbb{Z} -linear unabhängige Teilmenge von T ist leer, somit ist der Rang von T nach Definition null. \square

Damit lässt sich der Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe G aus der Zerlegung in Satz A.2 bestimmen; da der Torsionsteil keinen Beitrag zum Rang liefert, handelt es sich dabei also genau um die Zahl m .

Ein Satz, den wir oft (implizit) verwenden ist die Tatsache, dass abelsche Gruppen mit \mathbb{Z} -Moduln übereinstimmen, bzw. einander bijektiv entsprechen:

Satz A.4

Sei G eine abelsche Gruppe. Dann lässt sich G mit der Verknüpfung in G als Addition als \mathbb{Z} -Modul auffassen. Umgekehrt lässt sich jeder \mathbb{Z} -Modul auch als abelsche Gruppe auffassen.

Entsprechend übertragen sich Definition A.1 und die Sätze A.2 und A.3 auf endlich erzeugte \mathbb{Z} -Moduln, insbesondere der Begriff der Torsion.

A.2. Sätze über Gruppenhomomorphismen

Satz A.4 ermöglicht es uns, diejenigen Sätze aus der linearen Algebra auf abelsche Gruppen zu übertragen, welche unabhängig von der Tatsache sind, dass ein Vektorraum über einem Körper definiert ist; in diesem Fall können wir den Körper K durch den Ring \mathbb{Z} ersetzen, ohne dass die Sätze an Gültigkeit verlieren³. Die wichtigsten Sätze dieser Art, die wir in dieser Arbeit verwenden wollen, sind die folgenden: Betrachten wir Gruppen und deren Bilder unter Gruppenhomomorphismen,⁴ so gilt z.B. der aus der linearen Algebra bekannte **Rangatz** ([SZ]):

³Auch bei Körpern, Ringen, Vektorräumen und Moduln sehen wir im Allgemeinen davon ab, Addition und Multiplikation explizit zu erwähnen.

⁴Abbildungen, die die Struktur eines Objektes erhalten, bezeichnen wir zuweilen auch als **Morphismen**, für den Fall, dass es sich um Gruppen handelt, spricht man von **Homomorphismen**: Das Bild einer Gruppe unter einen Homomorphismus ist wieder eine Gruppe.

Satz A.5

Sei $f : G \mapsto H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sind G und H endlich erzeugte, freie abelsche Gruppen, so gilt $\text{Rang}(\text{Im}(f)) + \text{Rang}(\text{Ker}(f)) = \text{Rang}(G)$, wobei wie üblich $\text{Im}(f) := \{h \in H \mid \exists g : f(g) = h\}$ und $\text{Ker}(f) := \{g \in G \mid f(g) = 0_H\}$ definiert sind.

Unabhängig davon gilt für beliebige Gruppen der **Homomorphiesatz** [Bo]:

Satz A.6

Sei $f : G \mapsto H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen Gruppen G und H . Dann gilt $\text{Im}(f) \simeq G/\text{Ker}(f)$.⁵

Schließlich gilt speziell für endlich erzeugte \mathbb{Z} -Moduln (bzw. abelsche Gruppen) noch der folgende sehr wichtige Satz, welcher in der linearen Algebra keine Entsprechung findet:

Satz A.7

Sei A eine abelsche Gruppe mit nichttrivalem Torsionsteil und $f : A \mapsto B$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann hat B ebenfalls einen nichttrivialen Torsionsteil, falls nicht alle Torsionslemente von A im Kern von f liegen.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das Bild eines Torsionselementes unter einem Homomorphismus wiederum ein Torsionselement ist. Sei $a \in A$ ein Torsionselement. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0_{\mathbb{Z}}$, so dass $m \cdot a = 0_A$ gilt. Bilden wir dies mittels f ab, so erhalten wir für das Bildelement: $f(0_A) = f(m \cdot a) = m \cdot f(a) = 0_B$ und wegen $m \neq 0_{\mathbb{Z}}$ hat damit auch $f(a)$ Torsion. Ein Torsionselement von kann damit entweder auf 0 abgebildet werden oder auf ein Torsionselement $\neq 0$ in B , damit folgt die Behauptung. \square

Satz A.7 sagt aus, dass Torsionselemente unter Homomorphismen wiederum auf Torsionselemente abgebildet werden müssen. Über die Bilder von freien Elementen unter Homomorphismen sind dagegen keine allgemeinen Aussagen möglich; diese können sowohl auf Torsionselemente als auch auf freie Elemente abgebildet werden.

A.3. Quotientenräume und Smithsche Normalform

Werfen wir jetzt noch einen kurzen Blick auf **Quotientenräume**: In der linearen Algebra lässt sich zeigen, dass aus einem Vektorraum V zusammen mit einem Untervektorraum W ein neuer Vektorraum V/W entstehen kann, dessen Elemente die Klassen $v + W, v \in V$ bezüglich der Äquivalenzrelation $v \sim v' \leftrightarrow v - v' \in W$ sind [Fi].

⁵Dieser Satz lässt sich auch für verschiedene andere Strukturen (z.B. Ringe) formulieren, siehe z.B.[Bo].

Weiterhin lässt sich der folgende Satz zeigen [Fi]:

Satz A.8

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, welcher sich als direkte Summe zweier Unterräume W_1 und W_2 darstellen lässt. Sei V/W_2 der aus V und W_2 entstehende Quotientenvektorraum. Dann gibt es einen bijektiven Homomorphismus (Isomorphismus)

$$\rho : W_1 \mapsto V/W_2.$$

Man kann also den Quotientenvektorraum einfach dadurch erhalten, dass man aus V alle Elemente von W_2 herausdividiert. Für den Fall von Vektorräumen stellt dies kein großes Problem dar, da diese über Körpern definiert sind. Haben wir dagegen nur \mathbb{Z} -Moduln vorliegen, so wird die Problemstellung etwas komplizierter; man bedient sich dann der Smithschen Normalform und es gilt der folgende Satz ⁶ [C]:

Satz A.9

Sei L ein \mathbb{Z} -Untermodul eines freien Moduls L' . Sei ferner A diejenige Matrix, die man erhält, wenn man eine Basis von L' durch eine Basis von L ausdrückt. Dann lässt sich A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf eine Matrix $\mathcal{S}(A)$ transformieren, welche höchstens auf der Diagonalen von 0 verschiedene Einträge enthält. Diese sind eindeutig bestimmte ganze Zahlen d_1, d_2, \dots, d_n so dass gilt:

i) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $d_i | d_{i+1}$, falls $d_i \neq 0$.

ii)

$$L'/L \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}).$$

iii) Es gibt eine \mathbb{Z} -Basis (v_1, \dots, v_n) von L' , so dass (d_1v_1, \dots, d_nv_n) eine \mathbb{Z} -Basis von L ist.

Die Matrix $\mathcal{S}(A)$ heißt **Smithsche Normalform** von A .

Ersetzen wir in Satz A.9 den Ring \mathbb{Z} durch einen Körper K , so erhalten wir natürlich die Aussage von Satz A.8.

A.4. Homologische Algebra

In diesem Kapitel wollen wir einige wichtige Sätze über exakte Sequenzen abelscher Gruppen zusammenfassen, die wir sowohl für unsere Berechnungen benötigen, als auch für die spätere Definition der Homologie- und Kohomologiegruppen. Da wir hier nur abelsche

⁶Dieser Satz gilt in derselben Form für endlich erzeugte Moduln über beliebigen Hauptidealringen [C]

Gruppen betrachten, bezeichnen wir das neutrale Element einer Gruppe G stets mit 0_G . Eine Gruppe, welche nur das neutrale Element enthält, bezeichnen wir im Folgenden mit 0 . Das neutrale Element der Gruppe \mathbb{Z} wollen wir, um Verwechslungen zu vermeiden, mit $0_{\mathbb{Z}}$ bezeichnen.

A.4.1. Lange und kurze exakte Sequenzen: Definition, Auswertungsalgorithmus und Sätze über Torsionsgruppen in kurzen Sequenzen

Definition A.10

Eine Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} A_2 \xrightarrow{\alpha_3} A_3 \xrightarrow{\alpha_4} A_4 \xrightarrow{\alpha_5} \dots$$

von abelschen Gruppen A_1, A_2, \dots, A_n mit Gruppenhomomorphismen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, heißt **lange exakte Sequenz**, falls $\text{Ker}(\alpha_k) = \text{Im}(\alpha_{k-1})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt (diese Bedingung nennen wir **Exaktheit** der Sequenz im Punkt A_k). Ist die Sequenz von der Form

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} A_2 \xrightarrow{\alpha_3} A_3 \xrightarrow{\alpha_4} 0$$

und in jedem Punkt exakt, so sprechen wir von einer **kurzen exakten Sequenz**.

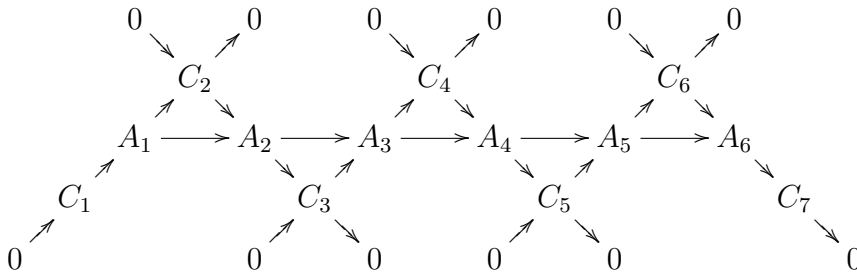
Für die Auswertung einer langen exakten Sequenz benutzen wir die Tatsache, dass sich jede solche Sequenz zurückführen lässt auf eine Anzahl kurzer exakter Sequenzen [Mu]:

Satz A.11

Sei

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$$

ein Ausschnitt aus einer lange exakte Sequenz abelscher Gruppen und sei $C_k := \text{Ker}(A_k \rightarrow A_{k+1}) = \text{Im}(A_{k-1} \rightarrow A_k)$. Dann sind die Sequenzen auf den Diagonalen des (kommutativen) Diagramms



kurze exakte Sequenzen.

Insbesondere folgt aus Satz A.11, dass, falls A_6 auf 0 abgebildet wird, die Gruppe C_7 trivial ist und falls der Homomorphismus vor der Gruppe A_1 die triviale Gruppe als Urbild hat, gilt zudem $C_1 = 0$.

Wir können also die Auswertung einer langen Sequenz zurückführen auf die Auswertung von kurzen exakten Sequenzen. Besonders wichtig ist hier der Fall, dass eine kurze exakte Sequenz spaltet, es gilt der folgende Satz [SZ]:

Satz A.12

Sei

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} A_2 \xrightarrow{\alpha_3} A_3 \xrightarrow{\alpha_4} 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Ist A_3 eine freie abelsche Gruppe, so **spaltet** die Sequenz, d.h. es gilt $A_2 \cong A_1 \oplus A_3$.

Bei unseren Berechnungen haben wir stets eine der folgenden Problemstellungen: Von einer exakten Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

- sind die Gruppen B und C bekannt und die Gruppe A ist zu bestimmen.
- sind die Gruppen A und B bekannt und C ist zu bestimmen, wobei A trivial ist.
- sind die Gruppen A und C bekannt und B ist zu bestimmen.

Den zweiten Fall wollen wir in Beispiel A.16 abhandeln.

Sei nun zunächst A unbekannt. Sind B und C frei, so können wir A unmittelbar aus Satz A.12 bestimmen, dabei machen wir uns den folgenden Satz zunutze, welcher für endlich erzeugte Gruppen gilt:

Satz A.13

In einer exakten Sequenz gilt $\text{Rang}(A) + \text{Rang}(C) = \text{Rang}(B)$.

Beweis. Da eventuelle Torsionsteile keinen Beitrag zu den Rängen von A , B und C liefern, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Gruppen frei sind. Aus Satz A.12 folgt dann zunächst $\text{Rang}(A \oplus C) = \text{Rang}(B)$ und aus der Definition der direkten Summe von Gruppen schließlich $\text{Rang}(A) + \text{Rang}(C) = \text{Rang}(B)$, die Behauptung. \square

Hat C dagegen einen nichttrivialen Torsionsteil, so können wir ebenso vorgehen, falls B frei ist; es gilt der folgende Satz:

Satz A.14

Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz, C sei eine beliebige abelsche Gruppe und B eine freie abelsche Gruppe. Dann ist die Gruppe A frei.

Beweis. Sei a ein Torsionslement in A . Dann muss wegen Satz A.7 a auf das Nullelement von B abgebildet werden (denn dieses ist das einzige Torsionselement in B). In diesem Fall läge a aber im Kern der Abbildung $A \rightarrow B$. Da die Sequenz exakt ist, ist der Kern dieser Abbildung gleich dem Bild der Abbildung $0 \rightarrow A$, ist also isomorph zu 0 . Daraus folgt, dass $a = 0$ ist und die Gruppe A ist frei, wie behauptet. \square

Schließlich kann der Fall auftreten, dass B einen nichtverschwindenden Torsionsteil hat, während C frei ist. In unseren Fällen ist dann C stets die triviale Gruppe, so dass wir wiederum Beispiel A.16 heranziehen können.

Es bleibt der Fall zu untersuchen, dass B zu bestimmen ist, während A und C unbekannt sind. Ist C frei, so ist B nach Satz A.12 genau dann frei, wenn A eine freie Gruppe ist und $\text{Rang}(B)$ lässt sich dann aus Satz A.13 gewinnen. Ist C frei und A beliebig, so können wir ebenfalls Satz A.12 anwenden; in diesem Fall entspricht der Torsionsteil von B dem Torsionsteil der Gruppe A .

Dies liefert uns nun in zusammengefasster Form einen Satz, der angibt, wie wir eine kurze exakte Sequenz in verschiedenen Fällen auswerten können (wir beschränken uns hier auf die in unseren Berechnungen relevanten Fälle):

Satz A.15

Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz aus beliebigen, endlich erzeugten abelschen Gruppen.

- (a) Ist die Gruppe A unbekannt, so erhalten wir den Rang von A zu $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) - \text{Rang}(C)$. Sind die Gruppen B und C frei, so ist A frei und durch $\text{Rang}(A)$ eindeutig bestimmt. Ist nur die Gruppe B frei, so ist auch die Gruppe A frei und damit wiederum eindeutig durch $\text{Rang}(A)$ bestimmt. Ist dagegen nur die Gruppe C frei, so ist der Torsionsteil von A gleich dem Torsionsteil von B , während der Rang von A wiederum zu $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) - \text{Rang}(C)$ bestimmt ist.
- (b) Ist die Gruppe B unbekannt, so ist sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, wenn die Gruppe C frei ist, es gilt dann $B \simeq A \oplus C$.
- (c) Ist die Gruppe C unbekannt und die Gruppe $A = 0$, so ist $C \simeq B$.

Im Folgenden wollen wir noch zwei einfache Beispiele angeben, die die das Argumentieren mittels exakter Sequenzen erleichtern:

Beispiel A.16

Betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} B \xrightarrow{\alpha_3} 0. \quad (\text{A.2})$$

Durch α_3 werden alle Elemente von B auf 0_0 abgebildet, es ist also $\text{Ker}(\alpha_3) = B$ und aus der Exaktheit folgt $\text{Im}(\alpha_2) = B$, folglich ist α_2 surjektiv. Die Abbildung α_1 bildet dagegen 0_0 auf 0_A ab (da es sich bei der Abbildung um einen Homomorphismus handelt), wir haben also $\text{Im}(\alpha_1) = 0_A$ bzw. wegen der Exaktheit auch $\text{Ker}(\alpha_2) = 0_A$, damit ist α_2 auch injektiv, insgesamt also bijektiv und es gilt $A \simeq B$.

Beispiel A.17

Betrachten wir nun die kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} 0 \xrightarrow{\alpha_3} 0. \quad (\text{A.3})$$

Es ist $\text{Ker}(\alpha_2) = \text{Im}(\alpha_1) = A$ bzw. $\text{Im}(\alpha_1) = \text{Ker}(\alpha_2) = 0_A$, damit folgt sofort $A = 0$. Ebenso können wir für kurze exakte Sequenzen der Form

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} 0 \xrightarrow{\alpha_2} A \xrightarrow{\alpha_3} 0 \quad (\text{A.4})$$

argumentieren.

B. Topologische Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir einige wichtige topologische Definitionen und Sätze darstellen - einerseits, um die in der Arbeit verwendete Notation festzulegen (welche in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt wird), andererseits, um alle für die in der Arbeit durchgeführten Berechnungen und Beweise relevanten Sätze in zusammengefasster Form zur Verfügung zu haben.

B.1. Mengentheoretische Topologie

B.1.1. Grundlegende Definitionen

Die für alle topologischen Untersuchungen grundlegenden Begriffe entstammen der mengentheoretischen Topologie. Basis jeglicher topologischer Untersuchungen ist der Begriff des topologischen Raumes bzw. der Topologie [J]:

Definition B.1

Sei X eine nichtleere Menge und \mathcal{T} eine Menge von Teilmengen von X , so dass gilt:

- i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- ii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.
- iii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \cup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Dann heißt \mathcal{T} eine **Topologie** auf X und das Paar (X, \mathcal{T}) wird als **topologischer Raum** bezeichnet, während X **Trägermenge** des topologischen Raumes heißt.

Eine Topologie auf X enthält also wenigstens die leere Menge und X selbst, die Durchschnitte aller Paare von Elementen aus \mathcal{T} sowie beliebige Vereinigungen von Elementen aus \mathcal{T} . Die Mengen in \mathcal{T} werden als **offene Mengen** bezeichnet. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** zu einem Punkt $x \in X$, wenn es eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gibt, so dass $x \in V \subset U$ gilt. Eine Menge $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ von offenen Mengen heißt **offene Überdeckung** von X , wenn $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ gilt.

Eine zusätzliche Forderung an einen topologischen Raum ist dessen Hausdorffeigenschaft, die in den meisten praktischen Fällen erfüllt ist. Diese fordert, dass sich je zwei Punkte $x, y \in X$ durch Umgebungen U_x, U_y trennen lassen [J]:

Definition B.2

Ein topologischer Raum heißt **Hausdorffraum**, wenn es zu allen Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U_x und U_y von x bzw. y gibt, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$ gilt.

Um Topologien zu charakterisieren, wird der Begriff der Basis eines topologischen Raumes eingeführt [J]:

Definition B.3

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis** von \mathcal{T} , falls gilt:

$$\forall G \in \mathcal{T} \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} : \cup \mathcal{B}' = G.$$

Jede offene Menge von X lässt sich damit darstellen als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} , wobei natürlich \mathcal{T} selbst auch eine Basis ist.

B.1.2. Durch Metriken induzierte Topologien

Ein wichtiger Spezialfall eines topologischen Raumes ist der, dass die Topologie durch eine Metrik d induziert wird, also eine Abbildung $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$. Dabei werden die offenen Mengen definiert über ϵ -Umgebungen. Hier verstehen wir unter Umgebung den "metrischen" Umgebungsbegriff: Eine Menge U heißt Umgebung von x , wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $U \subset B_r := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$ gilt. Gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}$, so dass $U = B_\epsilon$ gilt, so heißt U eine ϵ -Umgebung von x (bzw. eine offene ϵ -Kugel um x).

Eine Teilmenge U des metrischen Raumes (X, d) sei nun genau dann offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die ϵ -Umgebung von x ganz in U enthalten ist; auf diese Weise erhält man eine Topologie. Die offenen ϵ -Kugeln bilden dann eine Basis dieser Topologie, weshalb es zu ihrer Charakterisierung ausreicht, ϵ -Umgebungen zu betrachten.

B.1.3. Abbildungen zwischen topologischen Räumen

Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \mapsto Y$ heißt **stetig**, wenn Urbilder offener Mengen stets offen sind [J].

Ist f stetig und bijektiv, wobei f^{-1} ebenfalls stetig ist, so heißt f **Homöomorphismus** und die Räume X und Y sind **homöomorph**. In diesem Fall sind X und Y weder mengentheoretisch unterscheidbar (sie enthalten gleich viele Elemente) noch topologisch unterscheidbar, d.h. sie teilen alle mengentheoretischen und topologischen Eigenschaften.

Für viele Anwendungen ist dieses Vergleichskriterium jedoch etwas zu streng, da man meistens nur an den topologischen Eigenschaften interessiert ist. Hier bietet sich die Homotopieäquivalenz an [SZ]:

Definition B.4

Eine stetige Abbildung $f : X \mapsto Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine Abbildung $g : Y \mapsto X$ gibt mit $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$, wobei id jeweils für die identische Abbildung steht. X und Y heißen **homotopieäquivalent** oder vom selben **Homotopietyp**, wenn es eine Homotopieäquivalenz $f : X \mapsto Y$ gibt.

Wir bemerken hierzu, dass die Abbildungen $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ nicht *gleich* den jeweiligen Identitätsabbildungen sein müssen sondern lediglich *homotop* (dabei nennen wir zwei Abbildungen $f : X \mapsto Y$ und $g : X \mapsto Y$ homotop zueinander, wenn es eine Homotopie $H_k : X \times [0, 1] \mapsto Y$ gibt mit $H_k(X, 0) = f$ und $H_k(X, 1) = g$). Würden wir die Gleichheit von $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ mit den jeweiligen Identitäten fordern, so hätten wir genau die oben definierte Homöomorphie von Räumen X und Y definiert.

Anschaulich bedeutet Homotopieäquivalenz beispielsweise, dass sich topologische Räume stetig deformieren lassen (z.B. dehnen, stauchen, biegen), wodurch sich an ihrem Homotopietyp und damit auch an den meisten topologischen Eigenschaften nichts ändert, insbesondere sind ihre Homotopiegruppen und (Ko-)Homologiegruppen isomorph. Sind zwei Räume homöomorph, so sind sie immer homotopieäquivalent; die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht.

Eine wichtige Anwendung der Homotopieäquivalenz ist die Eigenschaft der Kontrahierbarkeit (bzw. Zusammenziehbarkeit): Ein topologischer Raum heißt **kontrahierbar**, wenn er homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, sich also zusammenziehen lässt [SZ]. Dies trifft z.B. auf Räume zu, die keine "Löcher" enthalten¹. Eine Kreisscheibe ist demnach kontrahierbar, während eine Kugeloberfläche nicht kontrahierbar ist.

Ist ein Raum kontrahierbar, so ist er aus topologischer Sicht äquivalent zu einem Punkt, was viele Berechnungen wesentlich vereinfachen kann.

¹mathematischer ausgedrückt: die ∞ -zusammenhängend sind, siehe dazu Definition B.11

B.2. Algebraische Topologie

B.2.1. Grundlegende Definitionen

Nachdem wir den Begriff der Topologie eingeführt haben, können wir jetzt einige grundlegende Begriffe der algebraischen Topologie definieren, die bei unseren Beweisführungen und Berechnungen immer wieder auftauchen. Dies sind die Begriffe des Simplizialkomplexes, des CW-Raumes und des Nervs eines topologischen Raumes [SZ],[TD].

Definition B.5

Seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Die Punktmenge

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda_i \in (0, 1) \quad (\text{B.1})$$

heißt **offener Simplex der Dimension n** (bzw. n -Simplex) mit den Ecken x_0, x_1, \dots, x_n . Ein **Simplizialkomplex** K ist eine endliche Menge von Simplices mit folgenden Eigenschaften:

- i) Ist $\sigma \in K$ und τ ein weiterer Simplex, derart, dass die Ecken von τ auch Ecken von σ sind (τ heißt dann eine **Seite** von σ), so ist auch $\tau \in K$.
- ii) Aus $\sigma, \tau \in K$ und $\sigma \neq \tau$ folgt $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Die 0- bzw. 1-Simplices in K heißen **Vertices** bzw. **Kanten** von K , die Zahl $\max\{\dim \sigma \mid \sigma \in K\}$ heißt **Dimension** von K .

Einem Simplizialkomplex ist eine Homologietheorie zugeordnet (siehe z.B. [SZ]), die simpliziale Homologie. Diese benötigen wir in dieser Arbeit jedoch nicht und verweisen daher auf die Literatur. Den Begriff des Simplizialkomplexes benötigen wir hier nur in abstraktem Kontext, nämlich für die Definition des Nervs eines topologischen Raumes [Ha]:

Definition B.6

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei I eine Indexmenge und $\mathcal{U} = \{(U_i)_{i \in I}\}$ eine offene Überdeckung der Menge X , die durch I indiziert wird. Wir betrachten alle endlichen Mengen $J \subseteq I$, für die gilt: $\bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset$. Diese Teilmengen, gemeinsam mit der leeren Menge bezeichnen wir als **Nerv** \mathcal{N} von \mathcal{U} . Der Nerv erhält die Struktur eines geometrischen Simplizialkomplexes, wenn wir jede k -elementige Menge J mit einem $(k-1)$ -Simplex assoziieren, insbesondere lassen sich die Elemente von \mathcal{U} (welche den Mengen mit einem Element entsprechen) als Vertices dieses Simplizialkomplexes auffassen.

Wichtiger für unsere konkreten Berechnungen ist der Begriff eines CW-Raumes, insbesondere dessen (Ko-)Homologietheorie, die die Basis unserer Berechnungen darstellt.

Definition B.7

Ein in Zellen zerlegter Raum (oder **zellulärer Komplex** oder **zellulärer Raum**) ist ein topologischer Hausdorffraum X , der eine Zellzerlegung besitzt, d.h. es gibt eine Menge \mathcal{Z} von Teilräumen von X , so dass jedes Element $e \in \mathcal{Z}$ eine Zelle ist (d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass e homöomorph zum Inneren eines des n -dimensionalen Einheitsballes, also der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$) und X ist disjunkte Vereinigung aller Elemente in \mathcal{Z} .

Ein **CW-Raum** (bzw. CW-Komplex) ist ein zellulärer Raum X , bei dem jede Zelle e eine charakteristische Abbildung hat (diese dient z.B. dazu, weitere Zellen an e "anzukleben") und bei dem der Abschluss jeder Zelle nur endlich viele andere Zellen trifft. Ferner ist ein CW-Raum mit der schwachen Topologie des Systems $\{e \mid \bar{e} \text{ ist Zelle in } X\}$ versehen, für genauere Ausführungen siehe [SZ]. In den von uns betrachteten Fällen genügt es, dass wir uns einen CW-Raum als einen mit einer Topologie versehenen Zellkomplex vorstellen; in diesem Fall ist dann nämlich die für unsere Berechnungen fundamentale zelluläre Homologie definiert.

B.2.2. Fundamentalgruppen

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein **Pfad** (bzw. Weg) in X von x_0 nach x_1 ist eine stetige Abbildung $p : [0, 1] \mapsto X$ mit $p(0) = x_0$ und $p(1) = x_1$, wobei x_0 als Anfangspunkt und x_1 als Endpunkt bezeichnet wird. Gilt zusätzlich $x_0 = x_1$, so heißt der Pfad geschlossen mit **Basispunkt** x_0 (oder x_1).

Zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ heißen **verbindbar**, wenn es einen Pfad von x_0 nach x_1 gibt. Verbindbarkeit stellt eine Äquivalenzrelation auf X dar und die Äquivalenzklassen heißen **Pfadkomponenten**.

Lassen sich zwei Pfade p_1, p_2 mit denselben Anfangs- und Endpunkten x_0 bzw. x_1 stetig ineinander überführen, d.h. gibt es eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto X$ mit $h(s, 0) = p_1(s)$ und $h(s, 1) = p_2(s)$ bzw. $h(0, t) = x_0$ und $h(1, t) = x_1$, so heißen p_1 und p_2 **homotop**.

Homotopie stellt ebenfalls eine Äquivalenzrelation dar, d.h. man kann eine Unterteilung der Menge von Pfaden in Äquivalenzklassen (Homotopieklassen) vornehmen. Betrachten wir nun die geschlossenen Wege, die durch einen fest vorgegebenen Punkt $x_0 \in X$ laufen (den Basispunkt).

Jedem solchen geschlossenen Weg lässt sich eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ zuordnen, die angibt, wie oft der Weg durchlaufen wird. Die Menge der Homotopieklassen geschlossener Wege durch x_0 fassen wir in einer Menge π_1 zusammen. Wir definieren auf π_1 eine Verknüpfung, die jeder Homotopieklasse diejenige Homotopieklasse zuordnet, in der die Hintereinanderausführung beliebig gewählter Repräsentanten liegt (d.h. wir wählen beliebige geschlossene Wege aus den beiden Äquivalenzklassen und durchlaufen diese hintereinander; dies ist möglich, da

die geschlossenen Wege einen gemeinsamen Punkt haben.). Mit dieser Verknüpfung wird π_1 zu einer Gruppe, der ersten Homotopiegruppe (bzw. der **Fundamentalgruppe**) von X bezüglich des Basispunktes x_0 ².

Definition B.8

Sei X ein topologischer Raum. Dann gibt es zu jedem Punkt x_0 eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, welche aus Homotopieklassen von Abbildungen der Form $(S^1, s_0) \mapsto (X, x_0)$ besteht (also Abbildungen, die eine Kreislinie nach X abbilden, wobei jede Abbildung den s_0 auf x_0 abbilden soll), zusammen mit der Hintereinanderausführung von wegen als Verknüpfung (d.h. das Produkt aus zwei geschlossenen Pfaden wird gebildet, indem man diese am Punkt x_0 "zusammenheftet").

Aus jeder Homotopieklasse wählen wir einen Repräsentanten aus. Die so ausgewählten Repräsentanten bilden ein Erzeugendensystem von π_1 , daher ist z.B. π_1 isomorph zu \mathbb{Z}^n , falls π_1 n Homotopieklassen enthält.

Ist der Raum X wegzusammenhängend (siehe die Bemerkung nach Definition B.11), so ist die Fundamentalgruppe für jeden Basispunkt dieselbe (man kann dann den Basispunkt entlang der geschlossenen Pfade stetig "verschieben").³

B.2.3. Höhere Homotopiegruppen

Höhere Homotopiegruppen stellen eine direkte Verallgemeinerung der Fundamentalgruppe dar, es gilt also das im vorigen Abschnitt Gesagte. Statt Kreislinien betrachten wir hier jedoch Oberflächen von k -dimensionalen Kugeln (eine Kreislinie lässt sich ja als eindimensionale Kugeloberfläche auffassen).

Wir erhalten damit die zu Definition B.8 äquivalente Definition:

Definition B.9

Sei X ein topologischer Raum. Dann gibt es zu jedem Punkt x_0 eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Gruppe $\pi_k(X, x_0)$, $k \in \mathbb{N}, k > 0$ welche aus Homotopieklassen von Abbildungen der Form $(S^k, s_0) \mapsto (X, x_0)$ besteht (also Abbildungen, die eine k -dimensionale Kugeloberfläche nach X abbilden, wobei jede Abbildung den Punkt s_0 auf x_0 abbilden soll), zusammen mit der Hintereinanderausführung dieser Abbildungen als Verknüpfung (d.h. das Produkt aus zwei geschlossenen Abbildungen wird gebildet, indem man diese am Punkt x_0 "zusammenheftet").

²Dabei ist neben den üblichen Gruppenaxiomen die Wohldefiniertheit der Verknüpfung zu zeigen, da wir die Repräsentanten beliebig gewählt hatten. Für einen formalen Beweis siehe z.B. [SZ].

³Eine komplett vom Basispunkt unabhängige Formulierung arbeitet mit Fundamentalgruppoiden, siehe [TD].

Der Fall $k = 0$ wurde in Definition ausgeschlossen, weil sich auf π_0 keine Verknüpfung definieren lässt, mit der π_0 zu einer Gruppe werden könnte. Die Menge π_0 besteht einfach aus den in definierten Pfadkomponenten.

Höhere Homotopiegruppen eignen sich für die Untersuchung von topologischen Räumen mit höherdimensionaler Trägermenge X . Betrachten wir z.B. eine zweidimensionale Kugeloberfläche, so stellen wir fest, dass die Fundamentalgruppe in diesem Fall stets trivial ist (die eindimensionale Schleife wird sozusagen am Kugellinneren "vorbeigezogen").

Ein wichtiger Satz für Homotopiegruppen bezieht sich auf deren Größe im Fall eines kontrahierbaren Raumes. Es gilt [SZ]:

Satz B.10

Sei X ein topologischer Raum, welcher kontrahierbar ist. Dann sind die Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}, k > 0$ und alle Basispunkte $x_0 \in X$ trivial.

Mittels der Homotopiegruppen lässt sich der Begriff des n -Zusammenhangs definieren. Anschaulich verstehen wir darunter die Tatsache, dass ein topologischer Raum keine "Löcher" der Dimension $\leq n$ enthalten darf.

Definition B.11

Ein topologischer Raum X heißt n -zusammenhängend, falls alle Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$ trivial sind für $1 \leq k \leq n$ und die Menge π_0 der Pfadkomponenten ebenfalls nur das triviale Element enthält.

Betrachten wir z.B. eine zweidimensionale Kugeloberfläche. Diese ist 0-zusammenhängend (denn jeder stetige Pfad lässt sich mit jedem anderen stetigen Pfad verbinden). Man bezeichnet diese Eigenschaft auch als Wegzusammenhang. Die Kugeloberfläche ist auch 1-zusammenhängend, denn sie ist 0-zusammenhängend und ihre Fundamentalgruppe enthält nur das triviale Element. Die zweite Homotopiegruppe ist jedoch nicht mehr trivial (es gilt $\pi_2(X) \simeq \mathbb{Z}$), so dass die Kugeloberfläche nicht 2-zusammenhängend ist.

Ist ein topologischer Raum n -Zusammenhängend für alle $n \geq 0$, so heißt er ∞ -zusammenhängend. X ist genau dann ∞ -zusammenhängend, wenn er kontrahierbar ist.

B.2.4. Direkter Limes und inverser Limes

Um weitere topologische Invarianten zu definieren, benötigen wir eine Definition aus der Kategorientheorie, den direkten (bzw. inversen) Limes, dessen Definition wir (angepasst auf unsere Berechnungen, insbesondere spezialisiert auf abelsche Gruppen bzw. topologische Räume) aus [Sa3] übernehmen.

Definition B.12

Gegeben sei eine durch eine Indexmenge I indizierte Sequenz von abelschen Gruppen G_i sowie Gruppenhomomorphismen zwischen ihnen, d.h. für alle $i, j \in I, i \leq j$ gibt es einen Homomorphismus $f_{ij} : G_i \mapsto G_j$ und für alle diese Homomorphismen gilt $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ mit $i \leq j \leq k$.⁴:

$$G_0 \xrightarrow{f_{01}} G_1 \xrightarrow{f_{12}} \dots \xrightarrow{f_{n-1,n}} G_n. \quad (\text{B.2})$$

Der **direkte Limes** dieses Systems ist definiert als die disjunkte Vereinigung $\coprod_i G_i$ der abelschen Gruppen modulo einer Äquivalenzrelation \sim . Dabei ist $x \in G_k \sim f_{kl}(x)$ mit für alle $0 \leq k \leq l$. Der so definierte direkte Limes lässt sich dann ebenfalls mit einer Gruppenstruktur versehen [Sa3], kann also auch als Gruppe aufgefasst werden.

Das zum direkten Limes duale Objekt bezeichnen wir als inversen Limes, diesen benötigen wir hier für topologische Räume⁵ [Sa2]:

Definition B.13

Gegeben sei eine Sequenz von topologischen Räumen sowie stetige Abbildungen zwischen ihnen, d.h. für alle $i, j \in I, i \leq j$ gibt es eine stetige Abbildung $f_{ij} : X_j \mapsto X_i$ und für alle diese Homomorphismen gilt $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ mit $i \leq j \leq k$.⁶:

$$X_0 \xleftarrow{f_{01}} X_1 \xleftarrow{f_{12}} \dots \xleftarrow{f_{n-1,n}} X_n. \quad (\text{B.3})$$

Der **inverse Limes** dieses Systems besteht aus den Elementen (x_1, x_2, \dots, x_n) des direkten Produktes $\prod_i X_i$ der topologischen Räume X_i , für die die Beziehung $x_i = f_{ij}(x_j)$ für alle $i \leq j$ gilt.

⁴Man spricht in diesem Fall auch von einem **gerichteten System abelscher Gruppen**.

⁵Der Begriff des direkten und inversen Limes wurde ursprünglich in der Sprache der Kategorientheorie definiert, weshalb wir problemlos von abelschen Gruppen zu topologischen Räumen übergehen können.

⁶Man spricht in diesem Fall auch von einem **inversen System topologischer Räume**.

B.3. Homologie- und Kohomologietheorie

Neben den Homotopiegruppen treten Homologie- bzw. Kohomologiegruppen als topologische Invarianten auf. Hier gibt es nun verschiedene Homologie- bzw. Kohomologietheorien, welche auf eine jeweilige eventuell vorhandene zusätzliche Struktur des topologischen Raumes zugeschnitten sind. Die in dieser Arbeit verwendeten sind:

- Singuläre (Ko-)Homologie: Diese Theorie ist für beliebige topologische Räume definiert.
- Zelluläre (Ko-)Homologie: Diese Theorie ist für topologische Räume definiert, welche zusätzlich die Struktur eines CW-Komplexes tragen.
- Čech-Kohomologie: Diese Theorie ist für topologische Räume definiert, welche eine offene Überdeckung (also eine Menge \mathcal{U} von offenen Mengen U_i , so dass $\bigcup_i U_i$ gleich der Trägermenge des topologischen Raumes ist) besitzen.

Für die Čech-(Ko-)Homologie müssen wir fordern, dass X eine offene Überdeckung besitzt [BT]. Dies ist jedoch durch die Eigenschaft i) aus Definition B.1 stets gesichert (denn die Menge X selbst ist eine offene Überdeckung). Allen Theorien gemeinsam ist, dass sie den Axiomen von Eilenberg und Steenrod genügen [TD], die es z.B. erlauben, dass der (Ko-)Homologie eine Mayer-Vietoris-Sequenz zugeordnet wird (siehe Abschnitt B.3.6).

Zunächst definieren wir die allgemeinsten Theorien, die singuläre Theorie und die Čech-Theorie:

B.3.1. Singuläre Homologie und Kohomologie

Singuläre Homologie

Die allgemeinste Möglichkeit, eine Homologietheorie zu formulieren stellt die singuläre Homologie dar. Wir übernehmen hier nahezu wörtlich die Definition und Notation aus [SZ]. Zunächst etwas zur Notation: Die Punkte $e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_q = (0, 0, \dots, 1)$ heißen **Einheitspunkte** des \mathbb{R}^{q+1} . Damit können wir den **Standard-q-Simplex** Δ_q definieren:

$$\Delta_q =: \left\{ x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x = \sum_{i=0}^q \lambda_i e_i \text{ mit } 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ und } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Es handelt sich dabei einfach um einen abgeschlossenen Simplex mit den Ecken e_0, e_1, \dots, e_q . Wir definieren jetzt eine Abbildung, die den $q-1$ -dimensionalen Standardsimplex bijektiv

und linear auf die i -te Seite (darunter verstehen wir den $q - 1$ -dimensionalen Simplex, der der Ecke e_i gegenüberliegt) von Δ_q abbildet :

$$\delta_{q-1}^i : e_0 \mapsto e_1, \dots, e_{i-1} \mapsto e_{i-1}, e_i \mapsto e_{i+1}, \dots, e_{q-1} \mapsto e_q. \quad (\text{B.5})$$

Als nächstes definieren wir **singuläre Kettengruppen**:

Definition B.14

*Sei X ein topologischer Raum. Ein singulärer q -Simplex ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \mapsto X$. Die q -te singuläre Kettengruppe (mit Koeffizienten in \mathbb{Z}) $C_q(X; \mathbb{Z})$ ist dann definiert als die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären q -Simplices erzeugt wird, ihre Elemente heißen **singuläre q -Ketten** in X .*

Um zu einer Homologietheorie zu gelangen, brauchen wir jetzt noch einen **Randoperator**. Dieser ist für den singulären Fall mittels der oben erklärten Eckenabbildung definiert über

$$\partial_q : C_q \mapsto C_{q-1} : \partial_q \sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ \delta_{q-1}^i). \quad (\text{B.6})$$

Betrachten wir jetzt eine Sequenz aus Kettengruppen mit den Differentialen als verbindenden Morphismen. Diese ist im Allgemeinen nicht exakt. Ein Maß für die "Abweichung" von der Exaktheit an einer Stelle stellt nun die zugehörige **Homologiegruppe** dar. Wir definieren:

Definition B.15

Sei

$$C := \dots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots$$

*ein **Kettenkomplex**, bestehend aus den oben beschriebenen Randoperatoren und Kettengruppen. Dann heißt die Gruppe $H_n(X; \mathbb{Z}) := \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ die **n -te singuläre Kettengruppe mit Koeffizienten in \mathbb{Z}** .*

Diese Definition ist sinnvoll, da $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ für alle q ist, somit ist $Im(\partial_{n+1})$ ein Untermodul von $Ker(\partial_n)$. Je größer die Gruppe $H_n(X; \mathbb{Z})$ ist, desto weniger exakt ist der Kettenkomplex C an der Stelle C_n . Die Elemente aus $Ker(\partial_n)$ sind n -Ketten, deren Rand 0 ist, man bezeichnet sie als n -**Zykel**. Die Elemente aus $Im(\partial_{n+1})$ sind dagegen diejenigen n -Ketten, welche Rand einer $n+1$ -Kette sind, man bezeichnet sie einfach als **Ränder**.

Durch die abstrakte Definition der singulären Kettengruppen ist es oft schwierig, Randoperator und Kettengruppen explizit zu bestimmen, bzw. eine geometrische Anschauung für diese Objekte zu finden. Trägt der Raum X jedoch eine zusätzliche Struktur, so kann sich die Berechnung maßgeblich vereinfachen. In unseren Beispielen trägt X zumeist die Struktur eines (besonders einfachen) CW-Raumes, in diesem Fall kann man dessen zelluläre Homologiegruppen bestimmen, welche isomorph sind zu den singulären Homologiegruppen [SZ]. Wir werden sehen, dass in diesem Fall Kettengruppen und Ränder eine sehr einfache geometrische Anschauung finden.

Wichtig ist noch der folgende Satz über die nullte singuläre Homologiegruppe aus [SZ]:

Satz B.16

Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist $H_0(X; \mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang n der Anzahl der Pfadkomponenten von X entspricht.

Singuläre Kohomologie

Die **singuläre Kohomologie** erhält man durch Dualisierung der Kettengruppen, genauer gesagt wendet man den **Hom-Funktor** auf den Kettenkomplex C an, siehe [SZ]: $C^q(X; \mathbb{Z}) = Hom(C_q(X), \mathbb{Z})$. Die **q-Koketten** sind dann genau die Homomorphismen von $C_q(X; \mathbb{Z})$ nach \mathbb{Z} .

Definiert man den **Korand-Operator** ∂^q als die duale Abbildung des Rand-Operators ∂^{q-1} so kann man aus dem Kokettenkomplex C' , bestehend aus C^q und ∂^q , die **singulären Kohomologiegruppen** bestimmen; diese sind definiert über $H^n(X, \mathbb{Z}) = Ker(\partial'_n) / Im(\partial'_{n+1})$ und sind wiederum ein Maß für die Abweichung (diesmal des Kokettenkomplexes C') von der Exaktheit.

Konkret bedeutet das Folgendes: Wir betrachten jetzt den Komplex

$$\dots \rightarrow C^{q-1} \xrightarrow{\partial^{q-1}} C^q \xrightarrow{\partial^q} C^{q+1} \xrightarrow{\partial^{q+1}} \dots \quad (\text{B.7})$$

Die q -te Kohomologiegruppe berechnen wir aus dem Kern der Abbildung ∂^q modulo dem Bild der vorhergehenden Abbildung ∂^{q-1} . Hier ist zu beachten, dass die Differentiale absteigen, während sie im Fall des Kettenkomplexes aufsteigen. Auch hier lassen sich die

Begriffe **Kozykel** und **Korand** sinngemäß definieren, allerdings fehlt im Gegensatz zu Homologie die geometrische Anschauung dieser Objekte.

Eine Schwierigkeit könnte sich noch bei der Bestimmung der Kokettengruppen ergeben. Hier gilt jedoch der folgende nützliche Satz [SZ]:

Satz B.17

Sei $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ die Gruppe der Homomorphismen einer endlich erzeugten, freien abelschen Gruppe G nach \mathbb{Z} , wobei die Addition punktweise durch die Addition in \mathbb{Z} definiert ist, d.h. $(f + f')(a) := f(a) + f'(a)$. Dann gilt $\text{Hom}(G, \mathbb{Z}) \simeq G$. Ist G endlich erzeugt, so gibt es nach Satz A.2 ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $G \simeq \mathbb{Z}^n$ gilt. In diesem Fall gilt

$$\text{Hom}(G, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad (\text{n-mal}),$$

also $\text{Hom}(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$ bzw. $\text{Hom}(G, \mathbb{Z}) \simeq G$.

Wir können demnach statt der Kokettengruppen einfach die Kettengruppen für unsere Berechnungen verwenden; diese sind in den von uns betrachteten Fällen nach Satz B.17 isomorph zu den Kettengruppen.

Zusammenhang zwischen singulärer Homologie und Kohomologie

Einen Zusammenhang zwischen singulärer Homologie und Kohomologie stellt das **universelle Koeffiziententheorem** dar, welches wir hier nur für den Fall endlich erzeugter Homologie- bzw. Kohomologiegruppen benötigen [SZ]:

Satz B.18

Sei $H_q(X; \mathbb{Z})$ eine endlich erzeugte singuläre Homologiegruppe. Dann gilt nach Satz A.2:

$$H_q(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{p_q} \oplus \mathbb{Z}_{t_1^{(q)}} \oplus \mathbb{Z}_{t_2^{(q)}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_n^{(q)}} \quad \text{mit } 1 < t_1^{(q)} < t_2^{(q)} < \dots < t_n^{(q)}.$$

Für die zugehörige Kohomologiegruppe gilt dann

$$H^q(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{p_q} \oplus \mathbb{Z}_{t_1^{(r)}} \oplus \mathbb{Z}_{t_2^{(r)}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_n^{(r)}} \quad \text{mit } 1 < t_1^{(r)} < t_2^{(r)} < \dots < t_n^{(r)},$$

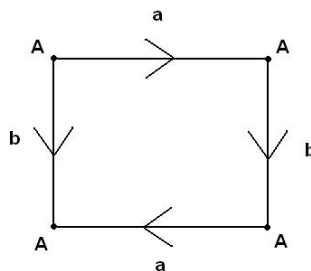


Abbildung B.1.: Zellzerlegung der Kleinschen Flasche

wobei $r := q - 1$ gelte. Der Satz besagt also, dass für den Fall endlich erzeugter Homologiegruppen deren freier Teil isomorph zum freien Teil der entsprechenden Kohomologiegruppe ist, während sich der Torsionsteil um ein Element nach unten verschiebt.

Betrachten wir z.B. die singulären Homologiegruppen der **Kleinschen Flasche** (Abbildung B.1), so finden wir mit Beispiel B.20 und Satz B.22:

$$H_0(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \text{ und } H_2(X; \mathbb{Z}) \simeq 0,$$

während für die singulären Kohomologiegruppen nach Satz B.18 die Beziehungen

$$H^0(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, H^1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \text{ und } H^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 \text{ gelten, was genau dem Ergebnis von Beispiel B.21 (unter Anwendung von Satz B.22) entspricht.}$$

Eine einfache Folgerung ergibt sich, wenn wir Satz B.18 auf Satz B.16 anwenden:

Satz B.19

Sei X ein beliebiger topologischer Raum, dessen nullte Homologiegruppe $H_0(X; \mathbb{Z})$ eine endlich erzeugte, freie abelsche Gruppe ist. Dann ist auch $H^0(X; \mathbb{Z})$ eine endlich erzeugte, freie abelsche Gruppe, deren Rang n der Anzahl der Pfadkomponenten von X entspricht.

B.3.2. Zelluläre Homologie und Kohomologie

Zelluläre Homologie

Schließlich betrachten wir noch die zelluläre Homologie; diese ist für topologische Räume definiert, die auch die Struktur eines CW-Komplexes tragen, d.h. in Zellen zerlegt werden können.

Dazu sei X ein CW-Raum und X^q sein **q -dimensionales Gerüst**, d.h. die Vereinigung aller Zellen, deren Dimension kleiner oder gleich q ist. Die q -te Kettengruppe $C_q(X; \mathbb{Z})$

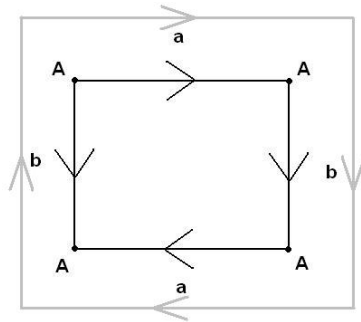


Abbildung B.2.: Die orientierte Zellzerlegung der Kleinschen Flasche

definieren wir jetzt über die q -te **relative singuläre Homologiegruppe** $H_q(X^q, X^{q-1}; \mathbb{Z})$, es gilt also $C_q(X; \mathbb{Z}) := H_q(X^q, X^{q-1}; \mathbb{Z})$.

Dies müssen wir etwas näher erläutern. $H_q(X^q, X^{q-1}; \mathbb{Z})$ bezeichnet die Homologiegruppe des Raumpaars X^q, X^{q-1} ($H_q(X^q, X^{q-1}; \mathbb{Z})$ wird auch als **relative Homologiegruppe** bezeichnet), welche definiert ist als die singuläre Homologiegruppe, die sich ergibt, wenn man als Kettengruppen die Faktorgruppen $C_p(X^q; \mathbb{Z})/C_p(X^{q-1}; \mathbb{Z})$ verwendet [SZ]. Die Elemente der q -ten zellulären Kettengruppen kann man sich damit vorstellen als ganzzahlige Linearkombinationen der im Komplex auftretenden (orientierten) q -Zellen. Dabei verstehen wir unter "Orientierung" die Tatsache, dass wir den q -Zellen eine vorgegebene "Richtung" zuweisen müssen.

Zur Bestimmung der zellulären Homologiegruppen gehen wir demnach folgendermaßen vor: Wir zeichnen zunächst eine Zellzerlegung von X (was zumindest im zweidimensionalen Fall immer möglich ist). Die auftretenden q -Zellen bilden dann eine Basis von C_q , die auftretenden $q-1$ -Zellen eine Basis von C_{q-1} usw. Die einzelnen Zellen versehen wir dann mit einer Orientierung und können damit unmittelbar die Ränder bestimmen. In diesem Fall verstehen wir unter Rändern das, was man geometrisch damit assoziieren würde, nämlich die $q-1$ -Zellen, die die q -Zellen beranden.

Ebenso lässt der Begriff des q -Zykels hier eine einfache geometrische Interpretation zu: Es handelt sich dabei einfach um einen geschlossenen Zug aus q -Zellen.⁸

Am Beispiel der mit Orientierungen versehenen Kleinschen Flasche (Abbildung B.2.) lassen sich die zellulären Kettengruppen bestimmen zu $C_0(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $C_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$, $C_2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Der Randoperator ∂ ist in den Fällen, dass die Ränder einer q -Zelle ausschließlich aus $q-1$ -Zellen bestehen (das ist der "Normalfall") definiert wir im singulären Fall, abgesehen davon, dass man nun q -Simplices durch q -Zellen ersetzt. Konkret bedeutet das, dass wir, nachdem wir die q -Zellen orientiert haben, bestimmen, aus welchen $q-1$ -Zellen die q -Zelle besteht.

⁷siehe Satz B.30

⁸Im allgemeinen Fall muss der Rand einer q -Zelle jedoch nicht ausschließlich aus $q-1$ -Zellen bestehen

Beispiel B.20

Die Differentiale ∂_1 und ∂_2 der Kleinschen Flasche lassen sich aus der Zellzerlegung in Abbildung B.2 ablesen. Wir erhalten $\partial_1 = 0$ und $\partial_2 = (2 \ 0)^T$. Damit können wir die zellulären Homologiegruppen des Komplexes $0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ bestimmen zu $H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \text{Ker}(\partial_1)/\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $H_2(X; \mathbb{Z}) \simeq \text{Ker}(\partial_2)/0 = 0$.

Zelluläre Kohomologie

Der Übergang von zur zellulären Kohomologie erfolgt exakt wie im singulären Fall. Wiederum ist darauf zu achten, dass der Kokettenkomplex nun aufsteigend ist. Die Differentiale ergeben sich (wie auf ähnliche Weise wie in der linearen Algebra im Fall von Vektorräumen gezeigt wird) durch Transposition der Differentiale des Kettenkomplexes ⁹.

Beispiel B.21

Die Differentiale ∂^0 und ∂^1 der Kleinschen Flasche lassen sich aus Beispiel B.20 bestimmen. Wir erhalten $\partial^0 = 0$ und $\partial^1 = (2 \ 0)$. Damit können wir die zellulären Kohomologiegruppen des Komplexes $0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow C^2 \rightarrow 0$ bestimmen zu $H^0(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H^1(X) \simeq \text{Ker}(\partial^1)/\text{Im}(\partial^0) = \mathbb{Z}$, $H^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \text{Ker}(\partial^2)/\text{Im}(\partial^1) = \mathbb{Z}_2$.

Noch ein Wort zur geometrischen Anschauung: Im vorigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass wir uns die zellulären q -Ketten als ganzzahlige Linearkombination der q -Zellen vorstellen können. Ähnliches gilt auch für die zellulären q -Koketten, weshalb wir zur Berechnung der Homologie und der Kohomologie dieselbe Zellzerlegung verwenden können (was wir ja in Beispiel B.21 auch bereits stillschweigend getan haben).

Zusammenhang zwischen singulärer und zellulärer Theorie

Die zelluläre Homologie bzw. Kohomologie erlaubt die Berechnung von Homologiegruppen eines Zellkomplexes. Ist dieser zusätzlich ein topologischer Raum, so sind singuläre und zelluläre Homologie- bzw. Kohomologiegruppen isomorph [SZ]:

Satz B.22

Sei X ein topologischer Raum, der auch die Struktur eines CW-Komplexes trägt. Dann gilt $H_{(zell)}^(X; \mathbb{Z}) \simeq H_{(sing)}^*(X; \mathbb{Z})$.*

⁹Dies gilt, weil die Kettengruppen freie abelsche Gruppen sind und somit mit freien \mathbb{Z} -Moduln assoziiert werden können, so dass die Beweise ähnlich wie für Vektorräume geführt werden können.

B.3.3. Berechnungsalgorithmus der zellulären Kohomologiegruppen mittels Smithscher Normalform

Wir hatten in den Beispielen B.20 und B.21 gesehen, dass wir zur Berechnung der zellulären Kohomologiegruppen einen Quotienten aus zwei endlich erzeugten \mathbb{Z} -Moduln zu bilden haben. Kennt man die Matrizen der Differentiale, so kann man so vorgehen, dass man deren Kerne und Bilder berechnet und den Quotienten dann mittels Satz A.9 bestimmt.

Eine andere (etwas schnellere) Möglichkeit umgeht die Berechnung des Bildes und lässt eine Berechnung der zellulären Kohomologie direkt aus dem Differential zu. Die Idee zu dem folgenden Satz stammt aus [D], wo der Satz für (simpliciale) Homologiegruppen bewiesen wurde. Eine Umarbeitung auf (zelluläre) Kohomologiegruppen ergibt dann den folgenden Satz:

Satz B.23

Sei X ein CW-Raum. Seien d_1, d_2, \dots, d_t die von null verschiedenen Diagonaleinträge der Smithschen Normalform der zellulären Korandmatrix ¹⁰ ∂^{i-1} und r der Rang von $\text{Ker} \partial^i$. Dann gilt für die i -te Kohomologiegruppe von X :

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{1 \leq k \leq t} (\mathbb{Z}/d_k \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^{r-t}$$

Beweis. Sei

$$\mathcal{S}(\partial^{i-1}) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & d_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

die Smithsche Normalform der Korandmatrix ∂^{i-1} . Da die Abbildung ∂^{i-1} die $i-1$ -te Kokettengruppe auf die i -te Kokettengruppe abbildet, gibt es eine Basis e_1, e_2, \dots, e_s von C^{i-1} , so dass $d_1 \cdot e_1, d_2 \cdot e_2, \dots, d_n \cdot e_n$ eine Basis von $\text{Im}(\partial^{i-1})$ ist. Wegen $\partial^i \circ \partial^{i-1} = 0$ und der

¹⁰Wir benutzen die Bezeichnung "∂" des Öfteren synonym für den Operator, die Abbildung und die Matrixdarstellung der Abbildung.

Tatsache, dass ∂^{i-1} \mathbb{Z} -linear ist, ist $e_1, e_2, \dots, e_n \in \text{Ker}(\partial^i)$ und es gibt Vektoren e_{n+1}, \dots, e_r , so dass $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_r$ eine Basis von $\text{Ker}(\partial^i)$ bildet, wobei $r = \text{Rang}(\text{Ker}(\partial^i))$ gilt. Die q -te Kohomologiegruppe ist dann von der Form $H^q = \text{Ker}(\partial^i) / \text{Im}(\partial^{i-1}) = \langle e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_r \rangle / \langle d_1 \cdot e_1, d_2 \cdot e_2, \dots, d_n \cdot e_n, 0 \cdot e_{n+1} \dots 0 \cdot e_r \rangle \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq t} (\mathbb{Z}/d_k \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^{r-t}$ nach Satz A.9. \square

B.3.4. Čech-Kohomologie

Für den Fall der Čech-Theorie beschränken wir uns auf die Definition der Kohomologietheorie, da nur diese ein für unsere Berechnungen geeignetes Verhalten unter direkten Limites aufweist. Eine formale Definition der Čech-Kohomologiegruppen von offenen Überdeckungen mittels Prägarben findet sich in [BT]. Wir benötigen hier nur den Fall, dass die Čech-Kohomologie Koeffizienten aus \mathbb{Z} (bzw. \mathbb{Q} oder \mathbb{R}) hat ¹¹. Es gilt dann [Ha], [Sa3]:

Definition B.24

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann ist die Čech-Kohomologie der offenen Überdeckung definiert als die simpliziale (bzw. singuläre) Kohomologie des Nervs von \mathcal{U} , also

$$\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) := H^*(\mathcal{N}(\mathcal{U}; \mathbb{Z})).$$

Diese Definition ist noch nicht hinreichend, um die Čech-Kohomologie des Raumes X zu bestimmen, da die Gruppe $H^*(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$ von der Wahl der Überdeckung \mathcal{U} abhängt (man kann z.B. eine Kreislinie durch eine, zwei oder drei offene Mengen überdecken, wobei der Nerv der Überdeckung jedesmal anders aussieht).

Betrachten wir nun eine **Verfeinerung** von \mathcal{U} , die wir mit \mathcal{V} bezeichnen wollen (darunter verstehen wir eine neue Überdeckung von X derart, dass jede Menge V_α in \mathcal{V} in irgendeiner Menge U_β von \mathcal{U} enthalten ist), dann gilt der folgende Satz [BT],[Sa3]:

Satz B.25

Sei \mathcal{U} offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und \mathcal{V} eine Verfeinerung von \mathcal{U} . Dann existiert eine kanonische Abbildung $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \mapsto \check{H}^*(\mathcal{V}; \mathbb{Z})$.

Die offenen Überdeckungen des Raumes, welche Verfeinerungen voneinander darstellen, bilden demnach ein **direktes System abelscher Gruppen** (d.h. eine Folge $(A)_i$ von abelschen Gruppen mit verbindenden Morphismen $f_{ij} : A_i \mapsto A_j$ für alle $i < j$, so dass $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i \geq j \geq k$ gilt). Der direkte Limes dieses Systems wird nun als **Čech-Kohomologie** des Raumes X bezeichnet [Ha].

¹¹siehe dazu Kapitel 4

Definition B.26

Sei X ein topologischer Raum. Der direkte Limes des direkten Systems, bestehend aus den gemäß Definition B.24 definierten Čech-Kohomologien von cofinalen Verfeinerungen von Überdeckungen von X , gemeinsam mit den kanonischen Abbildungen ρ_i zwischen diesen Kohomologien, die nach Satz existieren, heißt Čech-Kohomologie von X :

$$\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{\rho_i} (\check{H}^*(\mathcal{U}_i; \mathbb{Z})).$$

Aus Definition B.26 können wir nun einen nützlichen Korollar ziehen: Gibt es für einen topologischen Raum eine **gute offene Überdeckung** \mathcal{U} (d.h. eine Überdeckung, in der jedes Element kontrahierbar ist und jede Schnittmenge von endlich vielen Elementen ebenfalls kontrahierbar ist), so können wir eine Verfeinerung folgendermaßen konstruieren:

In jeder offenen Menge in \mathcal{U} wählen wir einen Punkt. Da alle Mengen kontrahierbar sind, gibt es eine Verfeinerung \mathcal{V} von \mathcal{U} , die aus denselben offenen Mengen wie \mathcal{U} besteht, welche lediglich jeweils um ein "kleines Stück" bezüglich des gewählten Punktes zusammengezogen wurden. Diese Überdeckung kann weiter verfeinert werden, indem man die Mengen wieder ein Stück zusammenzieht usw. bis man schließlich eine Überdeckung \mathcal{W} erhält, für die keine echte Verfeinerung auf die genannte Weise mehr möglich ist (da sonst X nicht mehr vollständig überdeckt würde). An dieser Stelle wird der direkte Limes angenommen, da jetzt alle nachfolgenden Kohomologiegruppen isomorph sind und die zugehörigen Homomorphismen ρ_i Isomorphismen sind. Es gilt dann also, den Nerv von \mathcal{W} zu bestimmen. Dabei stellen wir fest, dass durch unsere ursprünglichen Kontraktionen nichts am Nerv der ursprünglichen Überdeckung \mathcal{U} geändert wurde; es gilt also $\mathcal{N}(\mathcal{W}) = \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Anders ausgedrückt, es gilt der folgende Korollar [Sa3]:

Korollar B.27

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{U} eine gute offene Überdeckung von X . Dann gilt:

$$\check{H}^*(X; \mathbb{Z}) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) = H^*(\mathcal{N}(\mathcal{U}; \mathbb{Z})).$$

Auch für die nullte Čech-Kohomologiegruppe gibt es eine einfache geometrische Veranschaulichung [BT],[Sa3]:

Satz B.28

Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $\check{H}^0(X; \mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang n der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von X entspricht.

B.3.5. Graduierte Kohomologieringe

Aus Kohomologiegruppen lässt sich mit Hilfe des **cup-Produktes** (siehe dazu z.B. [SZ]) ein graduierter Ring konstruieren, der Kohomologiering. Dies erklärt den Begriff der **Kohomologie**, der desöfteren verwendet wird; damit ist einfach die direkte Summe aller Kohomologiegruppen gemeint. Die Kohomologie eines Kokettenkomplexes wird mit einem hochgestellten * bezeichnet. Der Vollständigkeit halber wollen wir hier die Definition des Kohomologieringes angeben, welcher beispielsweise in [Ka] Erwähnung findet.

Definition B.29

Wir betrachten die direkte Summe der Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G ¹²:

$$H^*(X; G) = H^0(X; G) \oplus H^1(X; G) \oplus \dots = \bigoplus_k H^k(X; G).$$

Die Elemente $(\alpha_0, \alpha_1, \dots) \in H^*(X; G)$ wollen wir als formale Summen der Form $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ mit $\alpha_p \in H^p(X; G)$ darstellen, wobei nur endlich viele Summanden von Null verschieden sein sollen. Dann ist $(H^*(X; G), +, \cup)$ ein unitärer Ring, der **Kohomologiering** von X mit Koeffizienten in G . Sind zwei Räume X, X' vom selben Homotopietyp, so sind ihre Kohomologieringe isomorph.

B.3.6. Die exakte Kohomologiesequenz für Raumpaare und die Mayer-Vietoris-Sequenz für Homologiegruppen

In dieser Arbeit benötigen wir im Wesentlichen zwei spezielle lange exakte Sequenzen: Die lange exakte Kohomologiesequenz und die Mayer-Vietoris-Sequenz für Homologiegruppen¹³, diese wollen wir jetzt definieren [SZ]:

Satz B.30

Sei (A, X) ein Raumpaar, d.h. X ist ein topologischer Raum, es gilt $A \subset X$ und A ist ebenfalls topologischer Raum (mit der von X induzierten Topologie). Dann gibt es eine **lange exakte Kohomologiesequenz** der Form

$$\dots \rightarrow H^q(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+1}(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots,$$

wobei $H^q(X, A; \mathbb{Z})$ die zur in B.3.2 definierten Homologiegruppe des Raumpaars duale Kohomologiegruppe ist.

¹²Zur Kohomologie mit Koeffizienten siehe Abschnitt B.3.8

¹³Wegen der Dualität von Homologie und Kohomologie gibt es natürlich auch eine lange exakte Homologiesequenz und eine Mayer-Vietoris-Sequenz für Kohomologiegruppen [SZ].

Satz B.31

Sei X ein topologischer Raum und A, B zwei Teilräume von X mit $A \cup B = X$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Form

$$\dots \rightarrow H_q(A \cap B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(A; \mathbb{Z}) \oplus H_q(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{q-1}(A \cap B; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots,$$

welche als (*homologische*) *Mayer-Vietoris-Sequenz* von X bezeichnet wird.

B.3.7. Homologie von Räumen aus mehr als zwei Komponenten: Spektrale Sequenzen und der Mayer-Vietoris-Bikomplex

Wie in [BT] gezeigt wird, lässt sich die Mayer-Vietoris-Sequenz auf den Fall erweitern, dass der Raum X Schnitte von abzählbar vielen Elementen enthält. Diese Verallgemeinerung geschieht mittels **spektraler Sequenzen**. Dabei handelt es sich um ein sehr elegantes, jedoch konzeptionell schwieriges Werkzeug der algebraischen Topologie. Eine grundlegende Einführung in dieses Gebiet findet sich beispielsweise in [Mc], bzw. in knapperer Form auch in [BT]. Wir benötigen hier nur einige grundsätzliche Aussagen aus [BT].

Betrachten wir einen Raum X , welcher Vereinigung abzählbar vieler Räume A_1, A_2, \dots, A_n ist. Wir können nun Kettengruppen $C_{p,q}$ definieren, welche definiert sind über

$$C_{p,q} = \bigoplus_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} C_q(A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}), \quad (\text{B.8})$$

wobei $A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ definiert ist als $p + 1$ -facher Schnitt, also $\bigcap_{i=0}^p A_i$. Konkret berechnen wir die Kettengruppen $C_{p,q}$ also folgendermaßen: Wir bestimmen zunächst alle Schnittmangfaltigkeiten der Elemente A_i . Die Gruppe $C_{0,q}$ besteht dann aus der direkten Summe der q -Kettengruppen der Räume A_i , jeweils einzeln betrachtet. Die Gruppen $C_{1,q}$ ist die direkte Summe der q -Kettengruppen der Räume, die durch die Schnitte von jeweils zwei Elementen $A_i, A_j, i \neq j$ entstehen usw.. Die Kettengruppen $C_{p,q}$ bilden einen sogenannten **Mayer-Vietoris-Bikomplex**, der in nachfolgender Abbildung dargestellt ist, dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass sich die Räume A_i nur paarweise schneiden.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow C_{0,q} & \longleftarrow & C_{1,q} & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow C_{0,2} & \longleftarrow & C_{1,2} & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow C_{0,1} & \longleftarrow & C_{1,1} & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow C_{0,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Wir sehen, dass es hier im Gegensatz zu den vorher betrachteten Kettenkomplexen zwei verschiedene Differentiale gibt (die horizontalen Pfeile stehen für die Differentiale δ , während die vertikalen Pfeile für die Differentiale ∂ stehen). Die ∂ -Differentiale sind dabei genau die in B.3.1. definierten Differentiale der singulären Kettengruppen.

Wir können jetzt, wie gewohnt, die Homologiegruppen der Zeilen bzw. Spalten des Diagramms berechnen. Wir berechnen dazu zunächst die Homologiegruppen der Spalten (also bezüglich ∂), diese wollen wir mit $E_{p,q}^1$ bezeichnen¹⁴. Diese Homologiegruppen lassen sich wieder zu einem Bikomplex zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow E_{0,q}^1 & \longleftarrow & E_{1,q}^1 & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow E_{0,2}^1 & \longleftarrow & E_{1,2}^1 & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow E_{0,1}^1 & \longleftarrow & E_{1,1}^1 & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \leftarrow E_{0,0}^1 & \longleftarrow & E_{1,0}^1 & \leftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

¹⁴Man könnte auch zunächst damit beginnen, die Homologiegruppen der Zeilen zu berechnen [BT].

Der Komplex wird auch oft durch ein Koordinatensystem nach p und q dargestellt. Für zweidimensionale Projektionstilings sähe so ein Schema folgendermaßen aus:

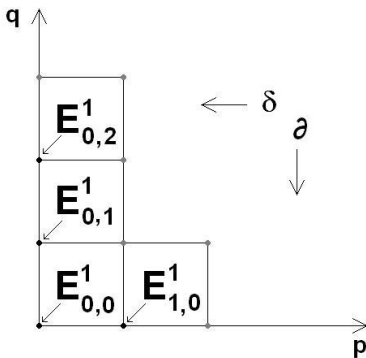


Abbildung B.3.: Der Spektralkomplex E^1 für zweidimensionale Tilings

Für diesen speziellen Fall erkennt man unmittelbar, dass das einzige nichttriviale Differential das Differential $\delta : E_{1,0}^1 \mapsto E_{0,0}^1$ ist. Alle anderen δ -Differentialen sind trivial, da jeweils nur eine Spalte im Komplex auftritt, d.h. entweder wird die 0 auf ein $E_{p,q}^1$ abgebildet, damit ist das Differential trivial (denn 0 ist das einzige Urbild und 0 wird durch einen Homomorphismus immer auf 0 abgebildet, damit bildet das Differential jedes Element der Urbildmenge auf 0 ab) oder das Differential bildet $E_{p,q}^1$ auf 0 ab, auch dann ist das Differential trivial. Die ∂ -Differentialen sind trivial, da ja die Gruppen $E_{p,q}^1$ genau die Homologiegruppen bezüglich ∂ sind, also $\text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}$, folglich werden sie unter ∂ auf 0 abgebildet (denn die Urbildmenge ist Teilmenge des Kerns von ∂).

Berechnen wir jetzt noch die Homologiegruppen der Gruppen $E_{p,q}^1$ unter dem Differential δ , so erhalten wir die Homologiegruppen $E_{p,q}^2$. Wollten wir jetzt noch $E_{p,q}^3$ berechnen, so wären weitere Differentialen notwendig, dies benötigen wir an dieser Stelle jedoch nicht. Wir erhalten damit eine spektrale Sequenz, die auch als **spektrale Mayer-Vietoris-Homologiesequenz** bezeichnet wird. Ist die Sequenz konvergent, so erhalten wir die Homologiegruppen des Raumes X durch Bildung der direkten Summe. Im Fall unserer Berechnungen gilt der folgende Satz [BT]:

Satz B.32

Sei X ein topologischer Raum, der sich darstellen lässt als Vereinigung endlich vieler Teilräume A_i , welche sich höchstens paarweise schneiden. Dann ist die Homologie von X gleich der Homologie des Mayer-Vietoris-Doppelkomplexes $K := \bigoplus_{p,q \geq 0} C_{p,q}$, wobei die Gruppen $C_{p,q}$ definiert sind über

$$C_{p,q} = \bigoplus_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} C_q(A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p})$$

und die spektrale Sequenz $E_{p,q}^r$ konvergiert gegen einen Grenzwert $E_{p,q}^\infty$, welcher für $r = 2$ angenommen wird. Für die Homologiegruppen von X gilt dann

$$H_n(X) = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty.$$

B.3.8. (Ko-)Homologie mit Koeffizienten

Wir hatten bisher angenommen, dass die Elemente der Ketten- bzw. Kokettengruppen sich als ganzzahlige Linearkombinationen der Erzeuger darstellen lassen. Es gibt jedoch keinen Grund, warum man nicht auch Koeffizienten aus anderen Gruppen als \mathbb{Z} zulassen sollte. Tatsächlich kann man (Ko-)Homologie für Koeffizienten aus einer beliebigen abelschen Gruppe definieren.

Wir werden uns hier neben $G = \mathbb{Z}$ nur für die Fälle $G = \mathbb{Q}$ und $G = \mathbb{R}$ interessieren¹⁵. Die Definition erfolgt analog zum Fall $G = \mathbb{Z}$, jedoch sind die (Ko-)Homologiegruppen im Allgemeinen für verschiedene Koeffizienten nicht gleich. Uns interessiert dann, wie die Homologiegruppen bzw. Kohomologiegruppen mit verschiedenen Koeffizienten zusammenhängen. Hier gilt der folgende Satz (den wir speziell für singuläre Homologie definieren, welcher jedoch für jede beliebige Homologietheorie gilt):

Satz B.33

Sei $H_q(X; \mathbb{Z})$ ($H^q(X; \mathbb{Z})$) die q -te singuläre Homologiegruppe (Kohomologiegruppe) des Raumes X mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Dann erhält man die entsprechende Homologiegruppe (Kohomologiegruppe) mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe durch **Tensorierung** des zugehörigen Kettenkomplexes (Kokettenkomplexes) mit G . Es existieren ferner Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_q(C \otimes G) &\simeq (H_q(C) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{q-1}(C), G), \\ H^q(C \otimes G) &\simeq (H^q(C) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H^{q-1}(C), G), \end{aligned}$$

¹⁵siehe Kapitel 4

wobei Tor das Torsionsprodukt (siehe Definition B.36) bezeichnet.

Eine genaue Definition des Tensorproduktes abelscher Gruppen findet sich in [SZ].

Wir benötigen hier hauptsächlich den Fall, dass die Gruppe A in $A \otimes G$ endlich erzeugt und frei abelsch ist (da wir Homologiegruppen mit Koeffizienten in $A = \mathbb{Z}$ bestimmen). In diesem Fall gilt der folgende Satz :

Satz B.34

Sei A eine endlich erzeugte, freie abelsche Gruppe vom Rang α und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt für das Tensorprodukt $A \otimes G$ die Isomorphiebeziehung

$$A \otimes G \simeq G \oplus G \oplus \dots \oplus G (\alpha\text{-mal}).$$

Beweis. Da A endlich erzeugt ist, können wir eine Basis $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ von A bestimmen. Sei $A_i \subset A$ der von a_i erzeugte Untermodul. Da A frei ist, ist $A_i \simeq \mathbb{Z}$. Wir definieren nun eine Abbildung $\phi : G \mapsto \mathbb{Z} \otimes G$ durch $g \mapsto k \otimes g$; $k \in \mathbb{Z}$ für ein vorgegebenes $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\phi(g + g') = k \otimes (g + g') = (k \otimes g) + (k \otimes g') = \phi(g) + \phi(g')$ ist ϕ ein Homomorphismus. ϕ ist zudem invertierbar; die inverse Abbildung ist durch $\phi^{-1} : k \otimes g \mapsto g$ gegeben. Daher ist ϕ ein Isomorphismus und es ist $G \simeq \mathbb{Z} \otimes G$, in unserem Fall also $G \simeq A_i \otimes G$. Damit gilt dann: $A \otimes G \simeq (\bigoplus_{i=1}^n A_i) \otimes G \simeq \bigoplus_{i=1}^n (A_i \otimes G) \simeq G \oplus G \oplus \dots \oplus G$ (n -mal G). \square

Man sagt in diesem Fall auch: A wird mit G **tensoriert**.

Ferner kann der Fall auftreten, dass G zusätzlich die Eigenschaft eines Körpers trägt, z.B. $G = \mathbb{Q}$ oder $G = \mathbb{R}$, während A eine Torsionsgruppe ist. In diesem Fall gilt:

Satz B.35

Sei A eine Torsionsgruppe und $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$. Dann ist $A \otimes K = 0$.

Beweis. Sei $a \otimes k$ ein Element aus $A \otimes K$ und n die Ordnung des Elementes $a \in A$. Dann gilt: $a \otimes k = a \otimes n \cdot k/n$ (diese Erweiterung ist erlaubt, da K ein Körper ist und $n \in K$ gilt) $= (n \cdot a) \otimes (k/n)$ (dies folgt aus der Definition des Tensorproduktes) $= 0 \otimes (k/n) = 0$. \square

Definition B.36

Sei $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Ist F eine freie abelsche Gruppe, so heißt die Sequenz **freie Auflösung** von A . Tensoriert man die Sequenz mit einer abelschen Gruppe G , so erhält man $0 \rightarrow R \otimes G \rightarrow F \otimes G \rightarrow A \otimes G \rightarrow 0$. Der Kern der Abbildung $R \otimes G \mapsto F \otimes G$ heißt dann **Torsionsprodukt** von A und G .¹⁶

¹⁶Dabei müssen natürlich auch die Homomorphismen in der ersten Sequenz tensoriert werden, für eine Definition des Torsionsproduktes von Homomorphismen siehe [SZ].

Satz B.37

Für das Torsionsprodukt $Tor(A, G)$, wobei A, G beliebige endlich erzeugte abelsche Gruppen sind, gelten folgende Beziehungen:

- (a) Ist A frei abelsch, so ist $Tor(A, G) = 0$.
- (b) Für $n \geq 1$ ist $Tor(\mathbb{Z}_n, G) \simeq \{g \in G \mid ng = 0\}$.
- (c) Ist G eine freie Gruppe, so ist $Tor(\mathbb{Z}_n, G) = 0$.
- (d) $Tor(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_d$, wobei $d = ggT(n, m)$ gilt.
- (e) $Tor(A_1 \oplus A_2, G) \simeq Tor(A_1, G) \oplus Tor(A_2, G)$.

C. Graphische Darstellung des gefärbten OP-Tilings

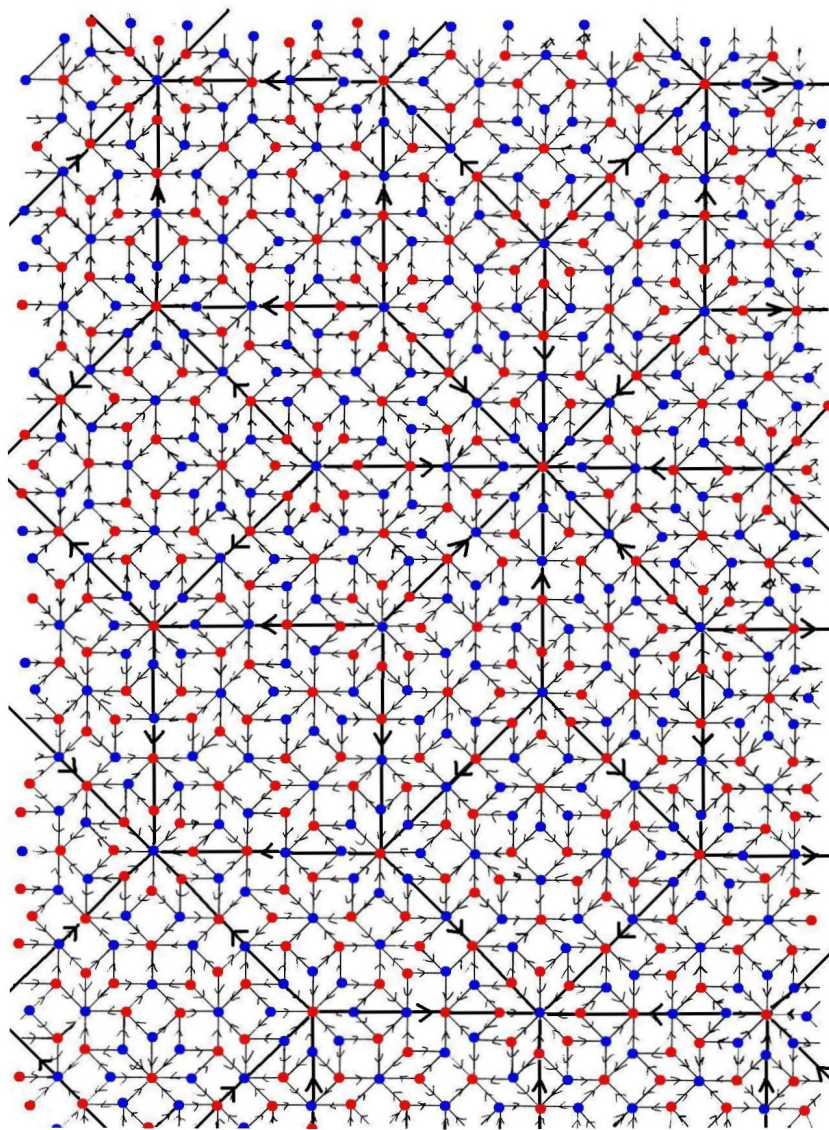


Abbildung C.1.: Ausschnitt aus dem gefärbten oktagonalen Tiling mit Pfeilen

D. Graphische Darstellung der Substitutionsregeln

D.1. Das gefärbte QR-Tiling

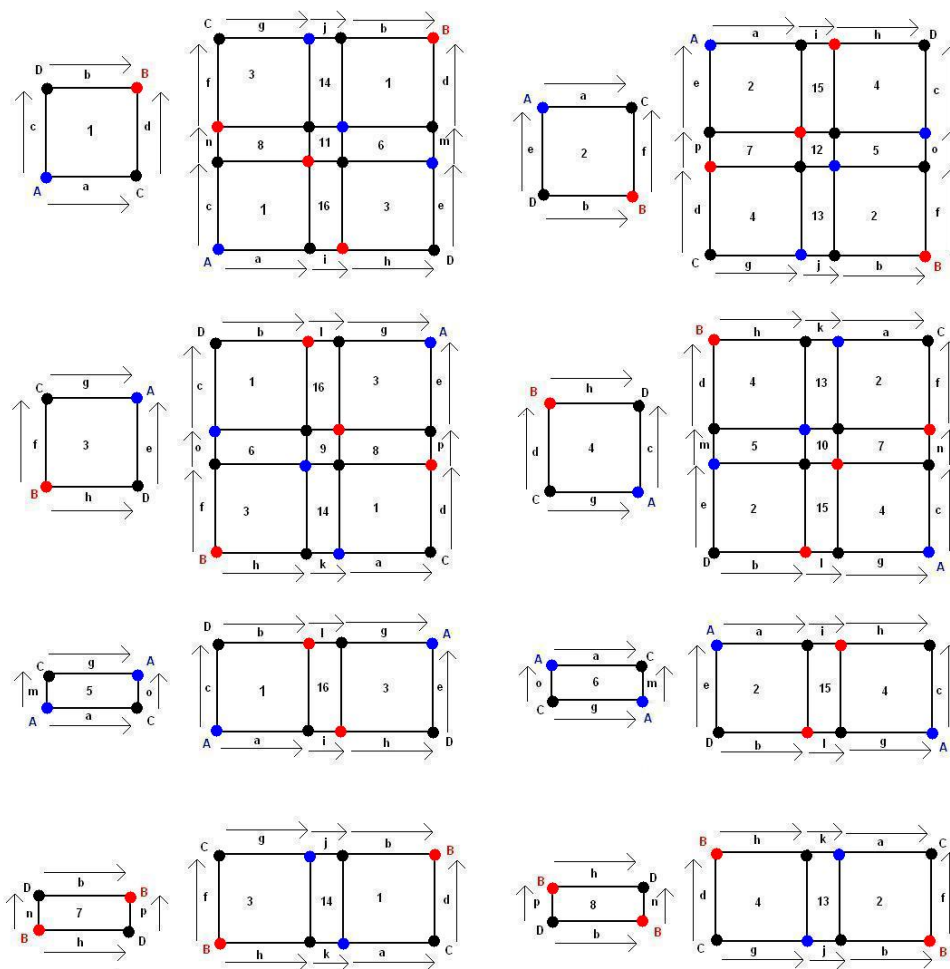


Abbildung D.1.: Die Substitutionsabbildung des gefärbten QR-Tilings (mit Vertex- und Kante-identifikation) im Detail.

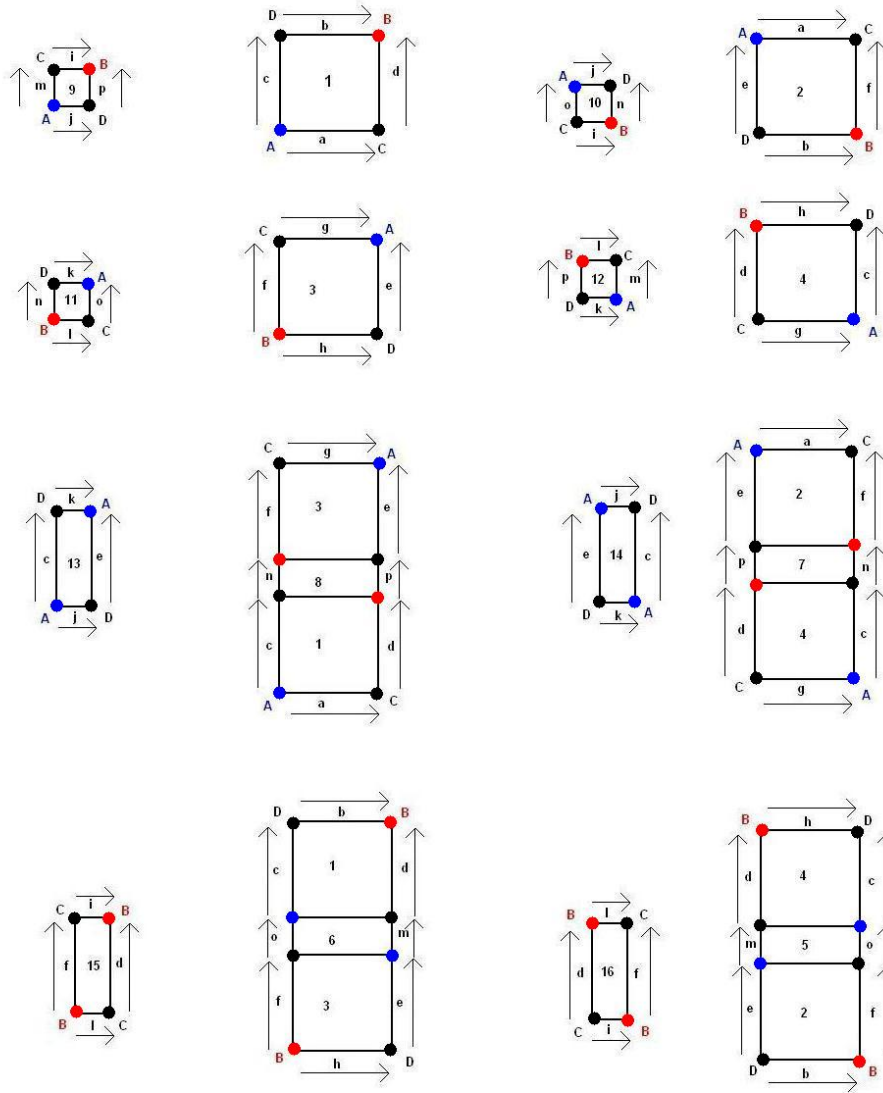


Abbildung D.2.: Die Substitutionsabbildung des gefärbten QR-Tilings (mit Vertex- und Kantenidentifikation) im Detail.

D.2. Das gefärbte OP-Tiling

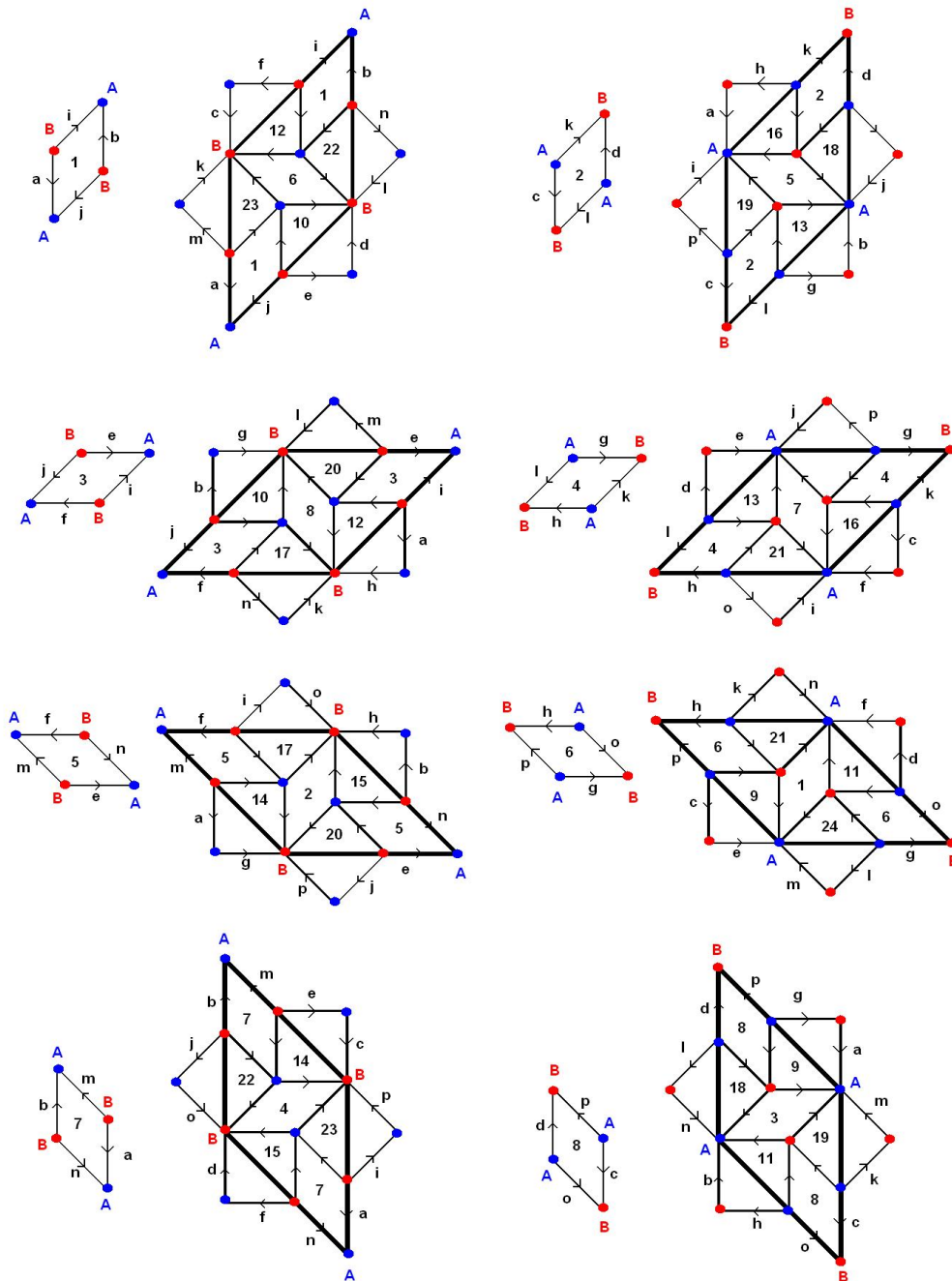


Abbildung D.3.: Die Substitutionsabbildung des gefärbten OP-Tilings (mit Vertex- und Kantenidentifikation) im Detail.

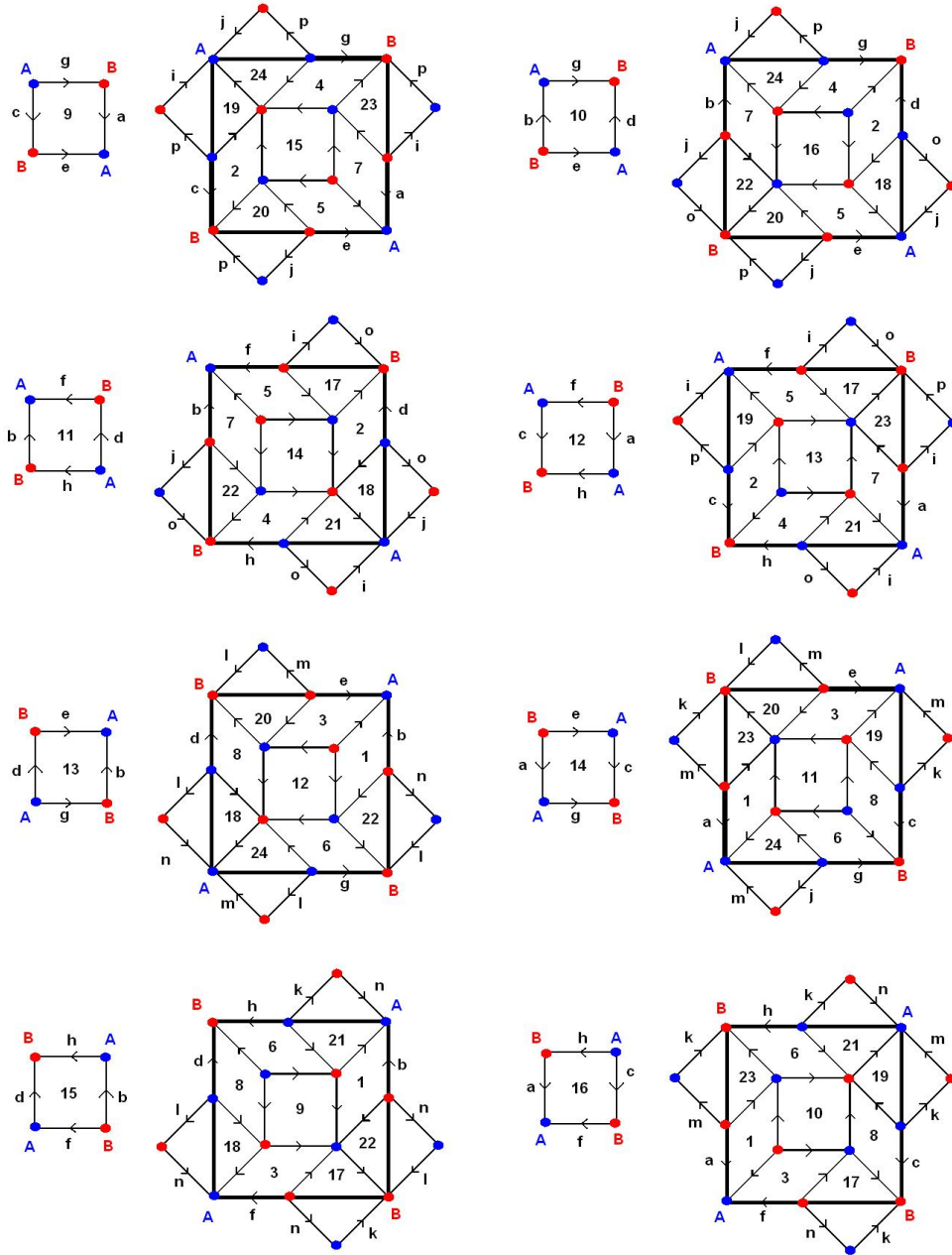


Abbildung D.4.: Die Substitutionsabbildung des gefärbten OP-Tilings (mit Vertex- und Kantenidentifikation) im Detail.

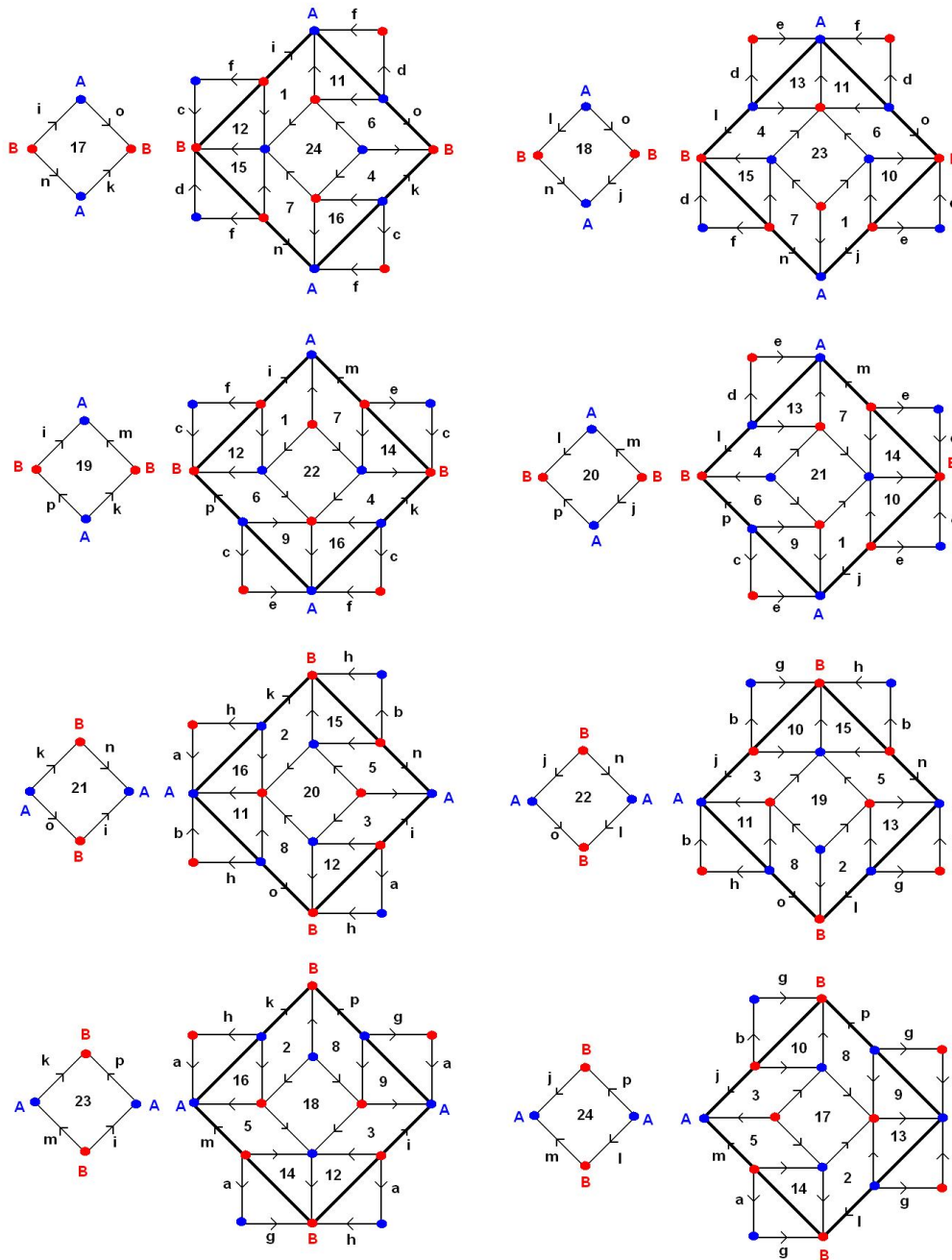


Abbildung D.5.: Die Substitutionsabbildung des gefärbten OP-Tilings (mit Vertex- und Kante-identifikation) im Detail.

E. Graphische Darstellung der Tiles mit einem Kragen beim GQR-Tiling

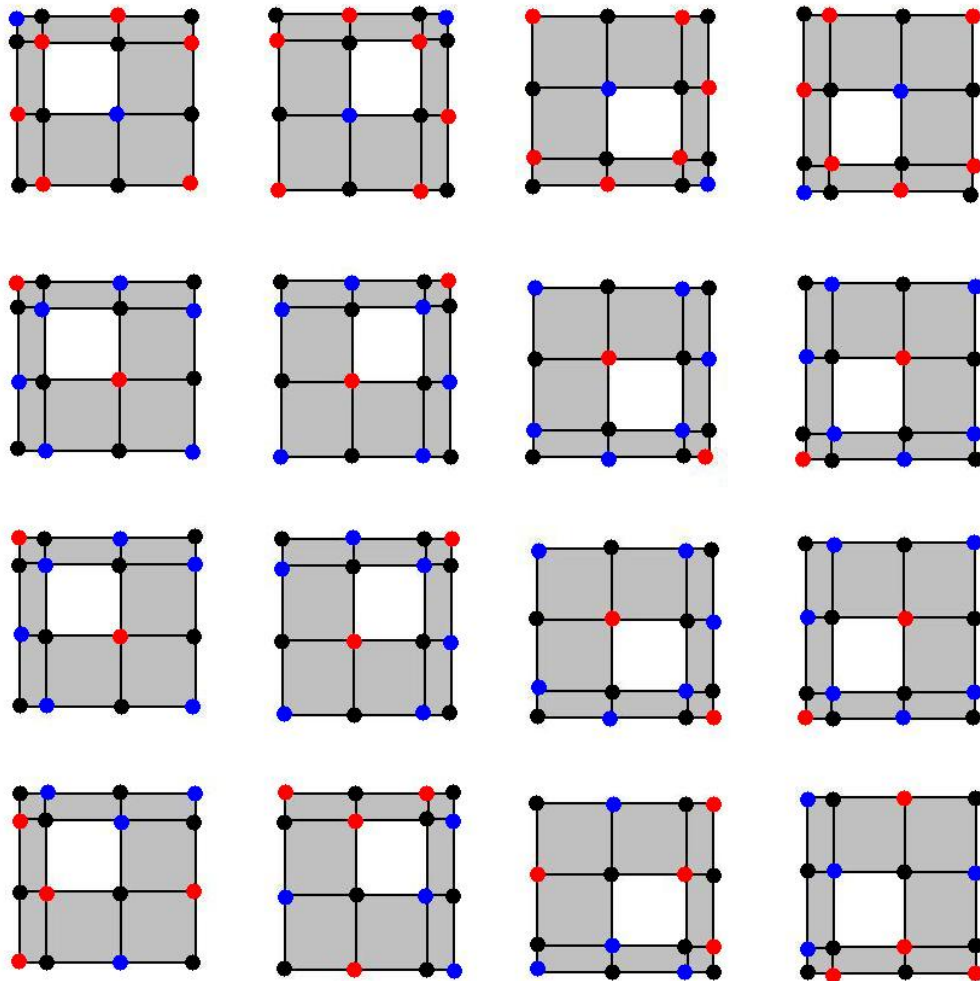


Abbildung E.1.: Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling: Der jeweilige Kragen ist grau schattiert.

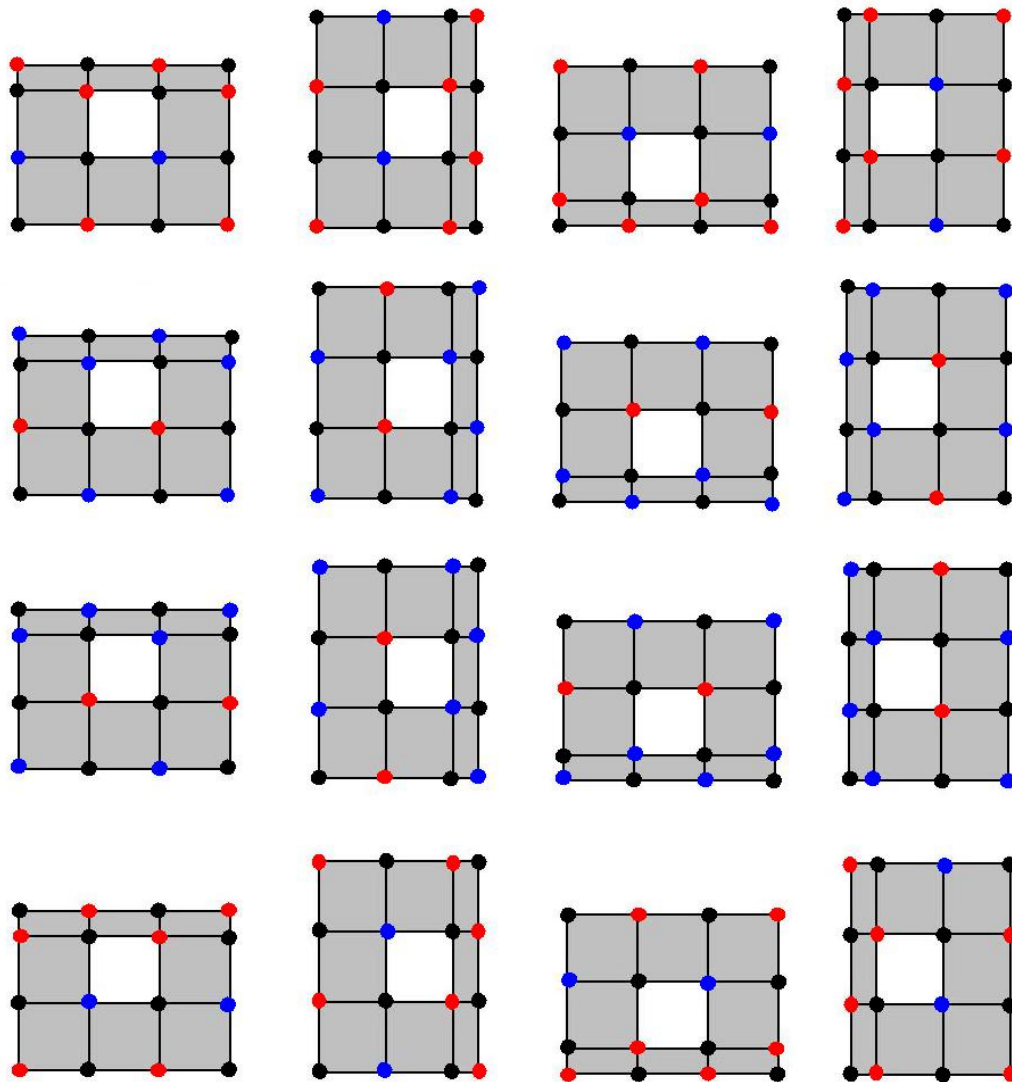


Abbildung E.2.: Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling: Der jeweilige Kragen ist grau schattiert.

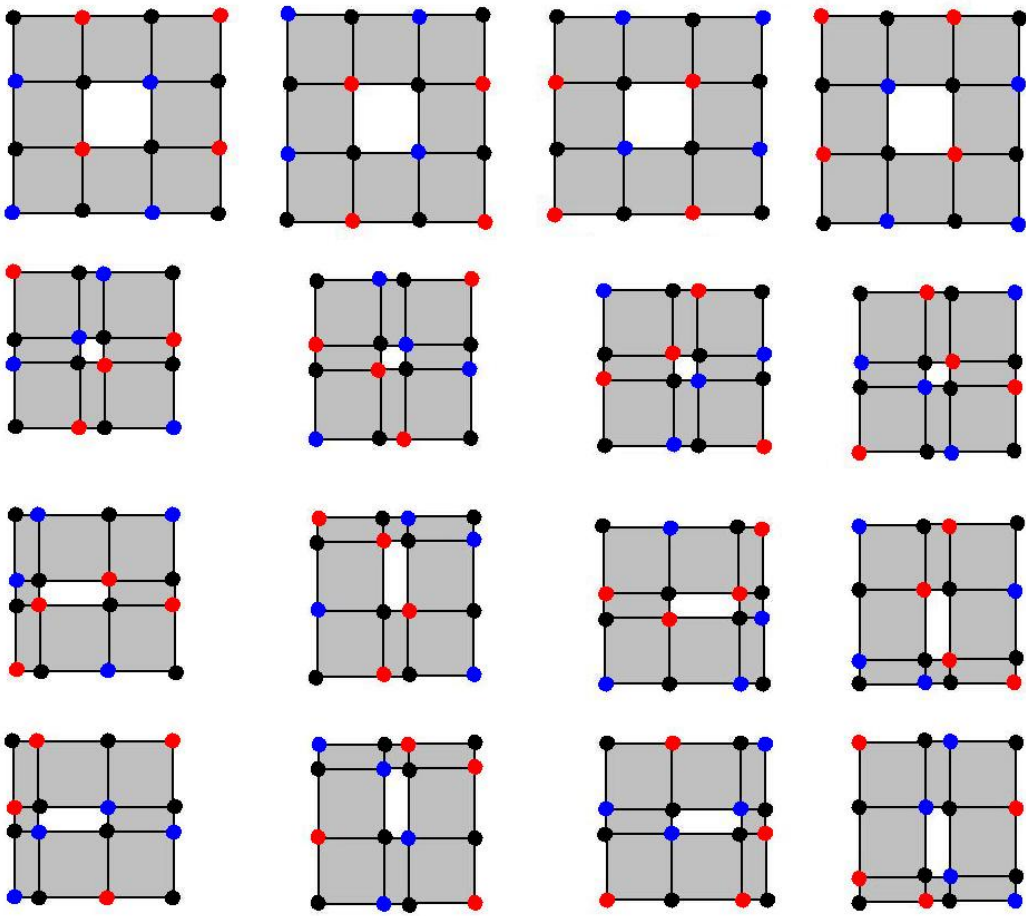


Abbildung E.3.: Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling: Der jeweilige Kragen ist grau schattiert.

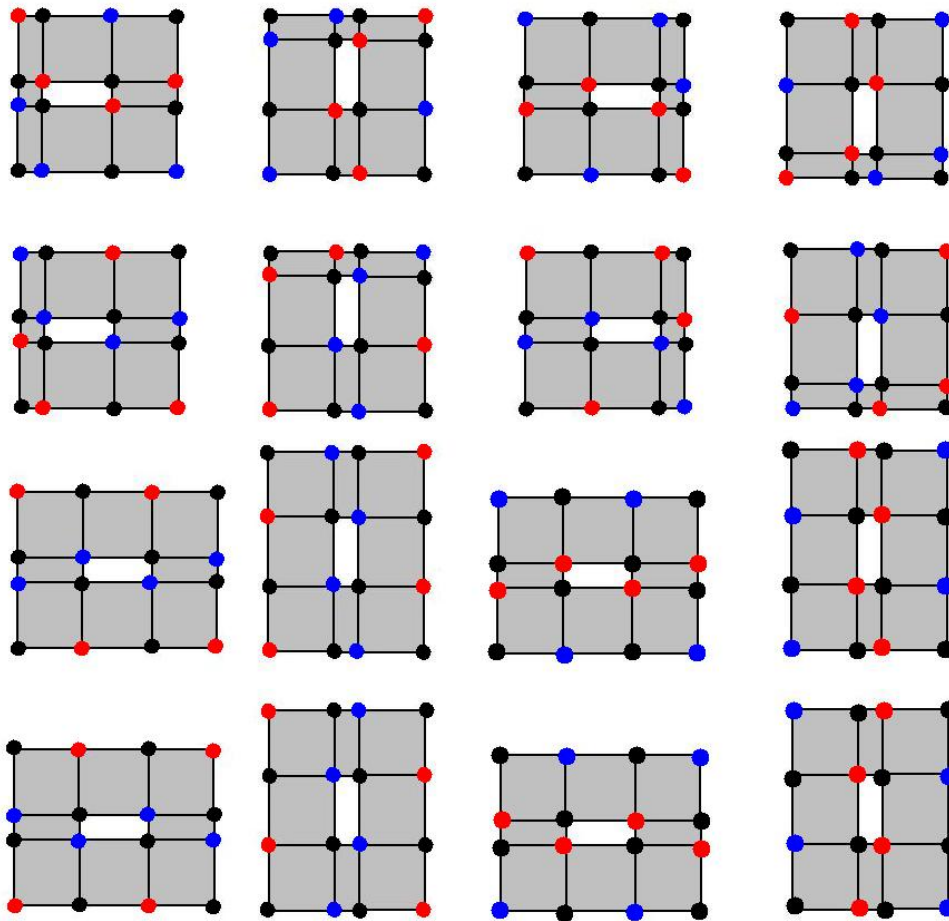


Abbildung E.4.: Prototiles mit einem Kragen beim gefärbten QR-Tiling: Der jeweilige Kragen ist grau schattiert.

F. Matrizen zur Berechnung nach dem Substitutionsverfahren

Die nachfolgenden Matrizen wurden anhand der Abbildungen aufgestellt. Je nach Wahl der Orientierung der 2-Zellen bzw. der Nummerierung der Prototiles kann man natürlich verschiedene Matrizen erhalten. M bezeichne jeweils die Substitutionsmatrix. Die Differentiale werden mit ∂^0 bzw. ∂^1 bezeichnet, während wir für die Smithschen Normalformen der Differentiale die Bezeichnungen $\mathcal{S}(\partial^0)$ bzw. $\mathcal{S}(\partial^1)$ verwenden. Die Matrizen, welche die Abbildung γ bestimmen, bezeichnen wir mit A_0, A_1 bzw. A_2 .

F.1. Das gefärbte Quadrat-Rechteck-Tiling

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Literaturverzeichnis

- [A] Atiyah, M. *K-Theory*
W.A. Benjamin, Inc. (1967)
- [AF] Anderson, F.; Fuller, K.: *Rings and Categories of Modules*
Springer-Verlag, New York (1992)
- [AP] Anderson, J.; Putnam, I.F. *Topological invariants for substitution tilings and their C^* -algebras.*
Ergodic Th. and Dynam. Sys. 18(1998), 509-537.
- [Ba] Baake, M. *A Guide to Mathematical Quasicrystals*
Quasicrystals eds Suck, J-B; Schreiber, M; Häußler, P Springer-Verlag Berlin
- [Be1] Bellissard, J. *Gap Labelling Theorems for Schrödinger Operators*
in "From Number Theory to Physics", eds. Waldschmidt, M.; Moussa, P.; Luck, J.-M.; Itzykson, C. pp.538-630, Springer-Verlag (1993)
- [Be2] Bellissard, J. *K-Theory of C^* -Algebras in Solid State Physics*
in "Statistical Mechanics and Field Theory: Mathematical Aspects", eds. Dorlas, T.; Hugenholtz, N.; Winnick, M.,pp.99-156, Springer-Verlag (1986)
- [Bo] Bosch, S. *Algebra*
Springer-Verlag (2001)
- [Br] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*
Springer-Verlag (1993)
- [BT] Bott, R.; Tu, W. *Differential Forms in Algebraic Topology.*
Springer-Verlag (1982)
- [C] Cohen, H. *A Course in Computational Algebraic Number Theory.*
Springer-Verlag (1993)
- [D] Dumas, J.-G. et al. *Computing Simplicial Homology Based on Efficient Smith Normal Form Algorithms.*
Algebra, Geometry and Software Systems. pp. 177-204. Springer, Heidelberg, 2003.
- [FHK1] Forrest, A.H.; Hunton, J. ; Kellendonk, J. *Cohomology of Canonical Projection Tilings*
Commun. Math. Phys. 226, pp. 289-322 (2002)
- [FHK2] Forrest, A.H.; Hunton, J. ; Kellendonk, J. *Topological Invariants for Projection Method Patterns*
Memoirs of the American Mathematical Society, number 758. American Mathematical Society, 2002
- [Fi] Fischer, G. *Lineare Algebra.*
Vieweg-Verlag (2000)

- [FR] Fisher, B.; Rabson, A. *Applications of Group Cohomology to the classification of quasicrystal symmetries*
J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003), pp. 10195-10214
- [Fre] Frettlöh, D. *Nichtperiodische Pflasterungen mit ganzzahligem Inflationsfaktor*.
Dissertation Universität Dortmund (2002)
- [Gae] Gähler, F. *Spaces of Tilings and their Topology*
LDSG workshop on Tilings and Symbolic Dynamics (2003)
- [GaeKe] Gähler, F.; Kellendonk, J. *Cohomology Groups for Projection Tilings of Codimension 2*
Material Science and Engineering 438-440 (2000), pp. 294-296
- [GAP] Groups, Algorithms and Programming
- [GHK] Gähler, F.; Hunton, J.; Kellendonk, J. *Torsion in Tiling Homology and Cohomology*.
- [GrKa] Gratias, D.; Katz, A. *Tilings and Quasicrystals (Lectures on Quasicrystals)*
eds Gratias, D.; Hippert, F. Les Ulis: Les Editions de Physique, pp. 187 - 264 (1994)
- [Ha] Hatcher, A. *Algebraic Topology*
Cambridge University Press (2002), verfügbar unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [Ha] Hatcher, A. *Vector Bundles and K-Theory*
noch nicht erschienen, verfügbar unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBdoublepage.pdf>
- [Hil] Hiller, H. *Crystallography and Cohomology of Groups*
The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 10 (Dec. 1986), pp. 765-779
- [Hir] Hirsch, K. *Zur Klassifizierung mehrdimensionaler Parkettsysteme, insbesondere unter Heranziehung der Invariante Entropie*
Dissertation Universität Halle-Wittenberg (1999)
- [HL] Harriss, E.; Lamb, J. *Canonical Substitution Tilings of Ammann-Beenker Type*.
Theoretical Computer Science, Volume 319, Issue 1-3 (June 2004), pp. 241-279
- [J] Jänich, K. *Topologie*.
Springer-Verlag (2000)
- [Ka] Kalugin, P. *Cohomology of quasiperiodic patterns and matching rules*.
J.Phys. A: Math. Gen. 38 (2005), pp.3115-3132.
- [KP] Kellendonk, J.; Putnam, I. *Tilings, C*-Algebras and K-Theory*
Directions in Mathematical Quasicrystals eds Baake, M.; Moody, R. American Mathematical Society (2001)
- [Ma] Mayer, J. *Algebraic Topology*
Prentice-Hall Inc. (1972)
- [Mc] McCleary, J. *A User's Guide to Spectral Sequences*
Cambridge University Press (2001)
- [Mo] Moody, R.V. *Meyer Sets and Their Duals*.
The Mathematics of Aperiodic Order, 1997, Moody, R V, NATO ASI Series C489, pp. 403-441.
- [Mu] Munkres, J.R. *Elements of Algebraic Topology*.
Verlag Addison Wesley (1984)

- [N] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics*.
Verlag Adam Hilger (1990)
- [ORS] Ormes, N.; Radin, C.; Sadun, L. *A Homeomorphism Invariant for Substitution Tiling Spaces*
Geometriae Dedicata 90, pp. 153-182 (2002)
- [Pe] Pedersen, G.K. *C*-Algebras and their automorphism groups*
Academic Press, London (1979)
- [Sa1] Sadun, L. *Tilings and Topology, Teil 1*.
Summer School in Aperiodic Order, 2005 <http://www.pims.math.ca/ssao/Sadun1.pdf>
- [Sa2] Sadun, L. *Tilings and Topology, Teil 2*.
Summer School in Aperiodic Order, 2005 <http://www.pims.math.ca/ssao/Sadun2.pdf>
- [Sa3] Sadun, L. *Tilings and Topology, Teil 3*.
Summer School in Aperiodic Order, 2005 <http://www.pims.math.ca/ssao/Sadun3.pdf>
- [Sa4] Sadun, L. *Tilings and Topology, Teil 4*.
Summer School in Aperiodic Order, 2005 <http://www.pims.math.ca/ssao/Sadun4.pdf>
- [Sa5] Sadun, L. *Tiling Spaces are Inverse Limits*.
Journal of Mathematical Physics, Volume 44, Issue 11, pp. 5410-5414 (2003).
- [Sa6] Sadun, L. *Tilings, Tiling Spaces and Topology*.
Phil. Mag., Volume 86, Numbers 6-8, February-March 2006, pp. 875-881(7).
- [SBGC] Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn, B. *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*
Phys. Rev.Lett., 53(20): pp. 1951-1953 (1984)
- [So1] Solomyak, B. *Dynamics of Self-similar Tilings*.
Ergod. Th. and Dyn. Syst. 17 (1997) pp. 695-738.
- [So2] Solomyak, B. *Non-periodicity implies unique composition for self-similar translationally-finite tilings*.
Discrete & Computational Geometry, Vol.20, No.2 (1998), pp. 265-279.
- [SZ] Stöcker, R.; Zieschang, H. *Algebraische Topologie*.
Verlag B.G. Teubner, Stuttgart (1994)
- [TD] tom Dieck, T. *Topologie*.
Verlag Walter de Gruyter (2000)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit maßgeblich beigetragen haben. Zunächst danke ich Herrn Prof. Trebin für die sehr freundliche Aufnahme am Institut, die stets angenehme Arbeitsatmosphäre und die Übernahme des Hauptberichtes. Ferner danke ich Herrn Prof. Fähnle für die freundliche Übernahme des Mitberichtes. Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer, Herrn Dr. Gähler, für die vorbildliche Betreuung sowie das Interesse an meiner Arbeit. Ich durfte eigene Ideen entwickeln, dabei aber dennoch jederzeit auf Hilfestellung hoffen. Weiterhin danke ich Herrn Dr. Roth für die Behebung mancher Computerprobleme und allen Kollegen des ITAP für das stets freundliche Arbeitsklima. Abschließend sei meiner Familie für die freundliche Unterstützung gedankt. Insbesondere danke ich hierbei meinen lieben Eltern und meiner Schwester Bettina. Schließlich danke ich noch allen meinen Freunden für ihre Unterstützung.

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbständig erstellt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt zu haben.

Vorname, Name

Ort, den Datum