

---

# Partielle Lineationen stabiler Ebenen

---

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde einer Doktorin der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

von  
**Tanja Dörfner**  
geboren in Gütersloh

Hauptberichter: Prof. Dr. Markus Stroppel  
Mitberichter: Prof. Dr. Hermann Hahl

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2007

---

Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart  
2007

---



# Zusammenfassung

Eine stabile lp-Ebene ist eine topologische Inzidenzstruktur mit eindeutig bestimmter Verbindungsgeraden zu je zwei Punkten, in der die Punktmenge lokalkompakt und von positiver endlicher topologischer Dimension ist, sowie das Stabilitätsaxiom gilt: Die Menge der Paare schneidender Geraden ist offen in der Menge aller Paare von Geraden. Für stabile lp-Ebenen  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$  ist eine partielle Lineation ein Homöomorphismus zwischen offenen Unterebenen von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$ , welcher Geraden in Geraden abbildet. Inspiriert von der kompakt-offenen Topologie definieren wir auf der Menge aller partiellen Lineationen von  $\mathcal{P}$  auf  $\mathcal{P}'$  eine Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  derart, dass die Spurtopologie auf der Endomorphismen-Halbgruppe die kompakt-offene Topologie ist. Die Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  ist nicht hausdorffsch, aber wir beweisen, dass sie lokalkompakt ist, wenn die Punktmenge der Ebenen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  Mannigfaltigkeiten sind. Unter der Voraussetzung, dass der Punktraum eine Mannigfaltigkeit ist, erhalten wir die Lokalkompaktheit der Endomorphismen-Halbgruppe einer stabilen lp-Ebene versehen mit der kompakt-offenen Topologie.

Desweiteren untersuchen wir partielle Lineationen stabiler Dreiecke, das sind verallgemeinerte stabile Ebenen, und beweisen eine Verallgemeinerung des lokalen Fundamentalsatzes von LÖWEN: Jede partielle Lineation eines graphenzusammenhängenden stabilen Unterdreiecks von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  mit  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$  lässt sich zu einem Automorphismus dieser Ebene fortsetzen.

Neben anderen Beispielen untersuchen wir die Menge der partiellen Lineationen der Pickert-Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . Wir zeigen, dass jede bijektive Lineation  $\varphi : \overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})}$  stetig ist. Außerdem bestimmen wir die Automorphismen-Gruppe von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  und deren Struktur:  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$  ist das semidirekte Produkt einer Gruppe, deren Elemente auf der Pickert-Moulton-Ebene lokal wie Elemente von  $\text{PGL}_3\mathbb{F}$  wirken, und einer Gruppe, die isomorph ist zur Gruppe derjenigen ordnungserhaltenden Körperautomorphismen des Körpers  $\mathbb{F}$ , welche den Knickfaktor  $k$  fixieren.

## Abstract

A stable lp-plane is a topological linear space whose point space is locally compact and of finite and positive (topological) dimension and the domain of intersection is open in the set of pairs of lines. For stable lp-planes  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$  we study partial lineations. These are homeomorphisms between open subplanes of  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$ , respectively, that preserve collinearity. Inspired by the compact-open topology we define a topology  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  on the set of all partial lineations between  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$ . The topology  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  is not Hausdorff, but we prove that it is locally compact if the point spaces of  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$  are manifolds. This entails the following: if the point space of a stable lp-plane is a manifold then the semigroup of endomorphisms is locally compact.

Furthermore we study a generalization of stable planes: stable triangles. We prove that every continuous and injective lineation of an open subtriangle of a classical projective plane  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  with  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$  can be extended to an automorphism of the projective

plane  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ . This is a generalization of LÖWEN'S local fundamental theorem. One example we study is the Pickert-Moulton plane  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . We show that every injective lineation  $\psi : \overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  is continuous. Analysing the structure of the automorphism group of  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  yields the following result: The automorphism group of  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  is a semidirect product of a group whose elements locally act on the Pickert-Moulton plane like elements of  $\text{PGL}_3\mathbb{F}$  and a group which is isomorphic to the group of those order-preserving field automorphisms of  $\mathbb{F}$  that fix  $k$ .

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung / Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>Zusammenfassung in englischer Sprache</b>	<b>ix</b>
<b>1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen</b>	<b>1</b>
1.1. Grundlegendes über stabile Ebenen . . . . .	1
1.2. Gebietsinvarianz zwischen zwei stabilen lp-Ebenen . . . . .	2
1.3. Grundlegendes zu lokalen Halbgruppen und lokalen Gruppen . . . . .	3
1.4. Die Menge der partiellen Lineationen $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ . . . . .	5
1.5. Eine Topologie auf $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ . . . . .	8
1.6. Lokalkompaktheit von $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} )$ . . . . .	14
1.7. Lokale Gruppen partieller Lineationen . . . . .	22
<b>2. Stabile Dreiecke</b>	<b>27</b>
2.1. Grundlegendes zu stabilen Dreiecken . . . . .	27
2.2. Lineationen stabiler Dreiecke . . . . .	29
2.3. Addition und Multiplikation in einem stabilen Dreieck . . . . .	33
<b>3. Beispiele</b>	<b>39</b>
3.1. Ebenen mit relativem lokalem Fundamentalsatz . . . . .	39
3.2. Die modifizierte hyperbolische Ebene . . . . .	43
3.3. Die lokale Gruppe der Endomorphismen . . . . .	50
<b>4. Die Moulton-Ebenen</b>	<b>55</b>
4.1. Grundlegendes zu den Moulton-Ebenen . . . . .	55
4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen . . . . .	68
4.3. Die $\widetilde{SL}_2 \mathbb{R}$ in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene . . . . .	100
4.4. Die Struktur von $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k})$ . . . . .	111
4.5. Die Menge $\Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}_k})$ . . . . .	117
4.6. Beispiele partieller Lineationen von $\overline{\mathcal{M}_k}$ . . . . .	126
4.7. Endomorphismen-Halbgruppen von Unterebenen . . . . .	132
4.8. Partielle Lineationen der Pickert-Moulton-Ebenen $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . . . . .	143
4.9. Die Struktur von $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$ . . . . .	151
4.10. Maximale partielle Lineationen von $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . . . . .	154
<b>A. Anhang</b>	<b>157</b>
Topologische Gruppen und Liegruppen . . . . .	157
<b>Literatur</b>	<b>161</b>

*Inhaltsverzeichnis*

**Symbolverzeichnis** **167**

**Index** **171**

## Einleitung

Eine stabile Ebene ist eine topologische Inzidenzstruktur mit eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden zu je zwei Punkten. Die Punkt- und die Geradenmenge sind hausdorffsche topologische Räume. Die Abbildungen Verbinden und Schneiden sind, soweit sie definiert sind, stetig. Außerdem wird die Gültigkeit des Stabilitätsaxioms verlangt: Die Menge der Paare schneidender Geraden ist offen in der Menge aller Paare von Geraden. Klassische Beispiele sind die in [55, Kap. 1] beschriebenen affinen und projektiven Ebenen über einer der Divisions-Algebren  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ , die über den Cayley-Dickson-Prozess konstruiert werden. Es gibt sehr viele Beispiele interessanter stabiler Ebenen. Beispiele von nicht-desarguesschen kompakten projektiven Ebenen findet man in [55, Kap. 3]. Darüber hinaus ist jede offene Unterebene einer stabilen Ebene nach [29, 1.29] eine stabile Ebene. Um zu einer reichhaltigeren Theorie zu kommen, beschränkt man sich oft auf die Betrachtung stabiler Ebenen, deren Punktmenge lokalkompakt und von endlicher positiver Dimension ist, die so genannten stabilen lp-Ebenen. Stabile lp-Ebenen und deren Automorphismen-Gruppen wurden von einer Vielzahl von Autoren untersucht. Einen Bericht über den Stand der Theorie stabiler Ebenen aus dem Jahr 1995 findet man in [7, Kap. 3].

Die Endomorphismen-Halbgruppen stabiler Ebenen wurden bisher noch nicht in der gleichen Ausführlichkeit betrachtet wie die Automorphismen-Gruppen. STROPPEL untersucht in [65] Endomorphismen stabiler Ebenen. Dort findet man die folgenden Ergebnisse: Projektive und affine lp-Ebenen besitzen keine echten Endomorphismen, hingegen ist die Endomorphismen-Halbgruppe einer stabilen Ebene oft deutlich größer als die Automorphismen-Gruppe der Ebene. Zum Beispiel hat die Endomorphismen-Halbgruppe der hyperbolischen Ebene  $\mathcal{H}$  nicht leeres Inneres in der 8-dimensionalen Liegruppe  $\mathrm{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Die 3-dimensionale Automorphismen-Gruppe  $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$  liegt im Rand der Endomorphismen-Halbgruppe. In [67] zeigt STROPPEL, dass es eine große Klasse von stabilen Ebenen gibt, bei denen aus der Endomorphismen-Halbgruppe eine zur betrachteten Ebene isomorphe Ebene konstruiert werden kann. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, mehr Wissen über Endomorphismen-Halbgruppen stabiler Ebenen zusammenzutragen.

Um das Ergebnis von LÖWEN [29, 2.9] über die Lokalkompaktheit der Automorphismen-Gruppe einer stabilen lp-Ebene zu verallgemeinern, betrachten wir im **ersten Kapitel** die Menge partieller Lineationen  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  zwischen den stabilen Ebenen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$ . Eine partielle Lineation  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  ist ein Homöomorphismus zwischen offenen Unterebenen von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$ , welcher Geraden in Geraden abbildet. Inspiriert von der kompakt-offenen Topologie definieren wir auf  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  eine Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}$  derart, dass die Spurtopologie auf der Endomorphismen-Halbgruppe die kompakt-offene Topologie ist. Die Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}$  ist nicht hausdorffsch, weil die Lineationen, welche durch Restriktion eines Elementes von  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  auf unterschiedliche Definitionsgebiete entstehen, keine disjunkten Umgebungen besitzen. Aber wir können beweisen, dass mit dieser Topologie die Menge der partiellen Lineationen zwischen zwei stabilen lp-Ebenen, deren Punktmengen Mannigfaltigkeiten sind, lokalkompakt ist. Die Lokalkompaktheit der Endomorphismen-Halbgruppe einer stabilen lp-Ebene, mit der kompakt-offenen Topologie versehen, unter der Voraussetzung, dass der

## Einleitung

Punktraum eine Mannigfaltigkeit ist, erhalten wir als Folgerung. Zwei- und vierdimensionale stabile lp-Ebenen sind immer Mannigfaltigkeiten [29, 1.13]. Es ist ein offenes Problem, ob es unter den stabilen Ebenen höherer Dimension solche gibt, deren Punktmenge keine Mannigfaltigkeit ist.

In der Menge der partiellen Lineationen einer stabilen Ebene sind mit jeder Lineation  $\psi$  auch alle Restriktionen auf alle offenen Teilmengen des Definitionsgebiets von  $\psi$  enthalten. Deswegen ist es sinnvoll, statt der Menge  $\Psi(\mathcal{P}) := \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P})$  aller partiellen Lineationen der stabilen Ebene  $\mathcal{P}$  die Menge  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  aller partiellen Lineationen, die keine Fortsetzung auf ein echt größeres Definitionsgebiet besitzen, zu betrachten. Wir definieren in 1.7 die Relation  $\omega$  (lokal gleich) auf der Menge  $\Psi(\mathcal{P})$ : Zwei Lineationen aus  $\Psi(\mathcal{P})$  heißen lokal gleich, wenn sie eine gemeinsame Fortsetzung zu einem Element von  $\Psi(\mathcal{P})$  besitzen. Wenn  $\omega$  eine Äquivalenzrelation ist, dann kann die Quotientenmenge  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\omega}$  mit  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  identifiziert werden und es wird auf  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\omega}$  eine partielle Verknüpfung  $m_\omega$  definiert. Wir beweisen, dass  $(\Psi_{max}(\mathcal{P}), m_\omega)$  eine lokale Gruppe ist. In Kapitel 3 werden Beispiele behandelt, bei denen  $(\Psi_{max}(\mathcal{P}), m_\omega)$  mit der durch  $\Psi(\mathcal{P})$  induzierten Spurtopologie sogar eine topologische lokale Gruppe ist. Zuvor wenden wir uns, um Vorarbeiten für die Bestimmung der partiellen Lineationen der modifizierten hyperbolischen Ebene zu leisten, den stabilen Dreiecken zu.

Ziel des **zweiten Kapitels** ist es, den lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN auf graphenzusammenhängende stabile Unterdreiecke der projektiven Ebenen  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  für  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$  zu verallgemeinern. Ein stabiles Dreieck ist ein Spezialfall eines stabilen Graphen, welche ROSEHR in den Arbeiten [51] und [52] untersucht: Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  eine stabile Ebene mit Punktmenge  $P$  und Geradenmenge  $\mathcal{L}$ . Nimmt man eine offene Menge  $U$  von  $P$  und eine offene Menge  $\mathcal{G}$  von  $\{L \cap U \mid L \cap U \neq \emptyset, L \in \mathcal{L}\}$  derart, dass jeder Punkt aus  $U$  auf mindestens einer Geraden aus  $\mathcal{G}$  liegt, dann ist diese Inzidenzstruktur im Allgemeinen keine stabile Ebene, aber ein stabiles Unterdreieck von  $\mathcal{P}$ . In 2.3 erhalten wir das gewünschte Ergebnis, dass sich jede partielle Lineation eines graphenzusammenhängenden stabilen Unterdreiecks von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  zu einem Automorphismus dieser Ebene fortsetzen lässt. Dieser Satz ist hilfreich bei der Untersuchung der Menge der partiellen Lineationen der modifizierten hyperbolischen Ebene in Kapitel 3.2.

GRUNDHÖFER und STROPPEL liefern in [9] ein Einbettungsergebnis, nämlich dass es zu jeder kommutativen Unterhalbgruppe  $\Gamma$  der Endomorphismen-Halbgruppe einer nicht diskreten stabilen Ebene  $(P, \mathcal{L})$  eine offene Einbettung der Ebene  $(P, \mathcal{L})$  in eine stabile Ebene  $(Q, \mathcal{M})$  derart gibt, dass sich jedes Element aus  $\Gamma$  zu einem Automorphismus fortsetzen lässt und die Menge dieser Fortsetzungen eine kommutative Untergruppe der Automorphismen-Gruppe von  $(Q, \mathcal{M})$  erzeugt. Dieses Einbettungsergebnis lässt die Frage entstehen, ob sich jede Endomorphismen-Halbgruppe einer stabilen lp-Ebene in eine Gruppe einbetten lässt. In allen bisher verstandenen Beispielen ist es so. Diese Frage kann aber in dieser Arbeit nicht geklärt werden. Das Vorhaben, mit der Relation  $\omega$  eine topologische lokale Gruppe zu konstruieren und dann mit Hilfe von Sätzen von JACOBY [22] über die Einbettung von endlich-dimensionalen lokalen Gruppen in Gruppen eine Einbettung zu gewinnen, scheiterte daran, dass sich das Ergebnis von JACOBY als falsch erwies: OLVER beschreibt in [36] lokale Lie-Gruppen, die nicht generell assoziativ sind und folglich nicht



in eine Gruppe eingebettet werden können. Trotzdem ist es interessant, die Relation  $\omega$  zu betrachten, wie wir im **dritten Kapitel** sehen. Dort werden von ausgewählten Beispielen stabiler Ebenen die Menge der partiellen Lineationen, die Endomorphismen-Halbgruppen und lokale Gruppen von partiellen Lineationen betrachtet. Außerdem konstruieren wir die kleinste lokale Gruppe, die die Endomorphismen-Halbgruppe einer stabilen lp-Ebene enthält.

Nun die Ergebnisse im Einzelnen: Wenn die in 1.7 definierte Relation  $\omega$  keine Äquivalenzrelation ist, dann kann, wie in Kapitel 3.1 bewiesen wird, die betrachtete Ebene nicht so in eine stabile Ebene eingebettet werden, dass alle partiellen Lineationen von einem Automorphismus induziert werden. In Kapitel 3.1 finden wir eine hinreichende Bedingung dafür, dass  $\omega$  eine Äquivalenzrelation ist, und zeigen, dass für jede offene Unterebene  $\mathcal{U}$  einer klassischen Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  die Menge  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$  mit einer topologischen lokalen Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{F})$  identifiziert werden kann, die eine offene Teilmenge von  $\text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{F})$  ist. In Kapitel 3.2 betrachten wir die modifizierte hyperbolische Ebene  $\mathcal{H}_t$ . Wir bestimmen die Menge aller partiellen Lineationen in  $\Psi(\mathcal{H}_t)$ , welche durch eine Abbildung aus  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  induziert werden, und zeigen, dass die Endomorphismen-Halbgruppe der äußeren modifizierten hyperbolischen Ebene nur aus Automorphismen dieser Ebene besteht. Hier benutzen wir den im zweiten Kapitel bewiesenen lokalen Fundamentalsatz. Das Kapitel 3.3 widmet sich der kleinsten lokalen Gruppe  $E$ , welche die Endomorphismen-Halbgruppe enthält. Diese ist die Vereinigung der Endomorphismen-Halbgruppe mit der Menge der Inversen der Endomorphismen. Die Verknüpfung  $m_\omega$  auf  $\frac{E}{\omega}$  induziert eine partielle Verknüpfung  $m_\omega^E$  auf  $E$  derart, dass  $(E, m_\omega^E)$  eine lokale Gruppe ist. Unter der Voraussetzung, dass die Punktmenge der Ebene eine Mannigfaltigkeit ist, zeigen wir, dass die lokale Gruppe  $(E, m_\omega^E)$  mit der von  $\Psi(\mathcal{P})$  induzierten Topologie alle Axiome einer topologischen lokalen Gruppe erfüllt, bis auf eines: Es gibt nicht immer eine Umgebung  $U$  der Identität in  $E$  derart, dass  $U \times U$  im Definitionsgebiet von  $m_\omega^E$  liegt. Außerdem ist dann  $E$  lokalkompakt und hausdorffsch.

Eine weitere Klasse sehr interessanter stabiler Ebenen sind die Moulton-Ebenen  $\overline{\mathcal{M}}_k$  mit  $k > 1$ , welche wir im **vierten Kapitel** studieren. Die Moulton-Ebenen sind nicht-desarguessche kompakte projektive Ebenen. Sie sind die einzigen 2-dimensionalen projektiven Ebenen, deren Automorphismen-Gruppe 4-dimensional ist [55, 34]. Im vierten Kapitel wird gezeigt, dass jede partielle Lineation von  $\overline{\mathcal{M}}_k$ , welche auf einem nicht-desarguesschen Gebiet definiert ist, von einem Automorphismus der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  induziert wird. Wir erhalten eine schöne Beschreibung der Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_k)$ , aus welcher man gut ablesen kann, dass lokal auf der Punktmenge ein Element der  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  wirkt. In 4.2 und 4.3 findet sich ein relativ elementarer Beweis für die schon bekannte Tatsache, dass die Automorphismengruppe  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_k)$  eine Liegruppe ist und dass die Kommutatorgruppe von  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_k)$  isomorph zur einfach zusammenhängenden Überlagerung der  $\text{SL}_2\mathbb{R}$  ist [55, 34.8]. Die Überlagerungsabbildung ist dabei explizit angegeben. Wir bestimmen die Menge  $\Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}}_k)$  und stellen fest, dass die Relation  $\omega$  auf der Menge der partiellen Lineationen von  $\overline{\mathcal{M}}_k$  keine Äquivalenzrelation ist. Außerdem werden die Endomorphismen-Halbgruppen verschiedener Unterebenen der Moulton-Ebene bestimmt.

Viele der über die Moulton-Ebenen gefundenen Ergebnisse lassen sich auf die Pickert-

## Einleitung

Moulton-Ebenen  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$  bzw. deren projektiven Abschluss  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  verallgemeinern. Pickert-Moulton-Ebenen wurden von PICKERT in [39, S. 93] definiert. Es handelt sich um affine Ebenen, die genauso konstruiert werden wie die Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k$ . Die Verallgemeinerung entsteht dadurch, dass statt  $\mathbb{R}$  ein beliebiger angeordneter Körper  $\mathbb{F}$  zu Grunde gelegt wird. In Kapitel 4.8 werden die Ergebnisse von PIERCE präzisiert: Es wird gezeigt, dass jede bijektive Lineation  $\varphi : \overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})}$  stetig ist. Außerdem werden die Automorphismen-Gruppen von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  und von  $\overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})}$  bestimmt. In 4.9 untersuchen wir die Struktur der Automorphismen-Gruppe:  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$  ist das semidirekte Produkt einer Gruppe, deren Elemente lokal auf der Moulton-Ebene wie Elemente von  $\text{PGL}_3 \mathbb{F}$  wirken, und einer Gruppe, die isomorph zur Gruppe der ordnungserhaltenden Körperautomorphismen des Körpers  $\mathbb{F}$  ist, welche den Knickfaktor  $k$  fixieren.

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders herzlich bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Markus Stroppel, für seine vielen wertvollen Anregungen und seine ständige Bereitschaft zur Diskussion. Bei Prof. Dr. Hermann Hähl bedanke ich mich herzlich für seine Unterstützung und sein großes Interesse am Fortschritt der Arbeit. Mein Dank gilt auch Dr. Nils Rosehr, der mir bei der Untersuchung der stabilen Dreiecke mit vielen Ideen zur Seite stand und Prof. Dr. Linus Kramer, der sich bereitwillig Zeit nahm meine Fragen über verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten zu klären. Auch bedanke ich mich bei meinen Mit-Doktoranden am Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart, die mir beim Sortieren meiner Gedanken viel geholfen haben. Hierbei möchte ich Martin Bulach besonders hervorheben. Ein besonderer Dank gilt Antje Rothmund und Dr. Anke Wich für die ausdauernden Korrekturlesearbeiten.

## Zusammenfassung in englischer Sprache

Stable planes are linear spaces whose point space  $P$  and line space  $\mathcal{L}$  are endowed with Hausdorff topologies in such a way that intersection of lines and joining of points become continuous operations in their respective domains. The domain of intersection is an open subset of  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ . Classical examples are the projective planes over any one of the division algebras  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , or  $\mathbb{O}$ , which can be constructed by the Cayley-Dickson process [55, Chapter 1]. Every open subplane of a stable plane is a stable plane [29, 1.29]. But there are stable planes which do not allow for an embedding as an open subplane into any of these classical projective planes.

If the point space is locally compact and of finite and positive (topological) dimension then we call the stable plane a stable lp-plane. LÖWEN [29, 2.9] proved that the automorphism group of a stable plane is locally compact. Striving for some generalization of this result, we study the set  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  of partial lineations between stable planes  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$  of the same dimension. A partial lineation is a homeomorphism between open subplanes of the planes  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$ , respectively, that preserves collinearity. Inspired by the compact-open topology we define a topology  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  on  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )$ :

**Definition (1.5.2).** *Let  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  and  $\mathcal{P}' = (P', \mathcal{L}')$  be stable lp-planes. For each pair of subsets  $C \subset P$  and  $U \subset P'$ , let*

$$\llbracket C, U \rrbracket := \{ \psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid C \subset \text{dom}(\psi), C^\psi \subset U \} .$$

Put  $\mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )} := \{ \llbracket C, U \rrbracket \mid C \text{ is compact in } P \text{ and } U \text{ is open in } P' \}$ . We will consider the topology  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  generated by  $\mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$ .

In **1.5.14** we prove that the topology  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  is not Hausdorff; different restrictions of an arbitrary element of  $\Psi(\mathcal{P})$  to different domains do not have any disjoint neighbourhoods. We do, however, obtain the following result:

**Theorem (1.6.8).** *If  $P$  and  $P'$  are manifolds then  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  is locally compact (but, again, not Hausdorff).*

Stable lp-planes of dimensions 2 and 4 are manifolds. But it is not known if there are any stable lp-planes of higher dimension whose point space is not a manifold.

Let  $\Psi(\mathcal{P}) := \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ . The topology induced by  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P})}$  on the semigroup  $\text{End}(\mathcal{P})$  of endomorphisms of  $\mathcal{P}$  is the compact-open topology. For manifolds  $P$ , local compactness of  $\Psi(\mathcal{P})$  implies local compactness of  $\text{End}(\mathcal{P})$  (**Corollary 1.6.10**). We define a partial composition law for  $\Psi(\mathcal{P})$  as follows:

**Definition (1.4.6).** *For  $\alpha$  and  $\beta$  in  $\Psi(\mathcal{P})$  with  $\text{im}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta) \neq \emptyset$ , the composition of  $\alpha$  and  $\beta$  is defined as  $\alpha \diamond \beta : (\text{im}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta))^{\alpha^{-1}} \rightarrow P : x \mapsto (x^\alpha)^\beta$ .*

In **Lemma 1.5.20** we prove that the composition  $\diamond$  and the map  $^{-1} : \Psi(\mathcal{P}) \rightarrow \Psi(\mathcal{P}) : \psi \mapsto \psi^{-1}$  are continuous with respect to  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$  if  $P$  and  $P'$  are manifolds.

*Zusammenfassung in englischer Sprache*

We denote by  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  the set of all partial lineations with maximal domain. Partial lineations  $\alpha$  and  $\beta$  are called locally equal ( $\alpha \bowtie \beta$ ) if they share a common extension to a lineation in  $\Psi(\mathcal{P})$ . If the relation  $\bowtie$  is an equivalence relation on  $\Psi(\mathcal{P})$ , we define a partial composition law in  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\bowtie}$ :

**Definition (1.7.6).** *Let  $[\alpha]_{\bowtie}$  and  $[\beta]_{\bowtie}$  be elements of  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\bowtie}$ . If there exist  $\hat{\alpha} \in [\alpha]_{\bowtie}$  and  $\hat{\beta} \in [\beta]_{\bowtie}$  with  $\text{im}(\hat{\alpha}) \cap \text{dom}(\hat{\beta}) \neq \emptyset$ , then the composition of  $[\alpha]_{\bowtie}$  and  $[\beta]_{\bowtie}$  is defined as  $m_{\bowtie}([\alpha]_{\bowtie}, [\beta]_{\bowtie}) := [\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}]_{\bowtie}$ .*

In this case, we can identify  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  with  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\bowtie}$  and consider  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\bowtie}$  as a subspace of  $\Psi(\mathcal{P})$ . In **theorem 1.7.12** we prove that the set  $(\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\bowtie}, m_{\bowtie})$  is a local group. Examples are arbitrary open subplanes  $\mathcal{U}$  of the projective planes  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ , with  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ . In **section 3.1** we show that, in these examples,  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$ , endowed with the subspace topology induced by  $\Psi(\mathcal{P})$ , is a topological local group and can be identified with a topological local subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{F})$  which is open in  $\text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{F})$ .

LÖWEN proved in [31] that every partial lineation of one of the classical projective planes  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  with  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$  can be extended to an automorphism of the projective plane  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ . Generalising this result, we study stable triangles, i.e., special stable graphs which are introduced by ROSEHR in [51] and [52].

Let  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  be a stable plane. Consider an open subset  $U$  of  $P$  and an open subset  $\mathcal{G}$  of  $\mathcal{L}$  such that for every point  $p \in U$  there is at least one line  $G \in \mathcal{G}$  incident with  $p$ . In that case, the incidence structure  $(U, \mathcal{G})$  is an open subtriangle of the stable plane  $(P, \mathcal{L})$ . We prove the following generalization of LÖWEN's local fundamental theorem [31]:

**Theorem (2.3.5).** *Every continuous and injective lineation of an open subtriangle of a classical projective plane  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  with  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$  can be extended to an automorphism of the projective plane  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ .*

Using this result, in we characterize the set of all partial lineations of the skew hyperbolic planes  $\mathcal{H}_t$  which are induced by a linear map.

**Definition (3.2.1).** *Let  $\mathcal{P}_2\mathbb{R} = (P_2\mathbb{R}, \mathcal{L}_2\mathbb{R})$  be the real projective plane. Consider the quadric  $Q = \{\mathbb{R}(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ . Choose  $t \in \mathbb{R}$  and define a subset  $L_t \subset P_2\mathbb{R}$  by*

$$L_t = \{\mathbb{R}(x, 0, 1) \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{\mathbb{R}(x, y, z) \mid y^2 = t^2(x^2 - z^2) \text{ where } txy \geq 0\}.$$

Let  $\Omega = PO_3(\mathbb{R}, 1)^1$  denote the commutator group of the corresponding hyperbolic motion group. We define a new incidence structure, the skew hyperbolic planes  $\mathcal{H}_t = (P_2\mathbb{R}, \mathcal{L}_t)$ , where

$$\mathcal{L}_t = \{L \in \mathcal{L}_2\mathbb{R} \mid |L \cap Q| \leq 1\} \cup \{L_t^\omega \mid \omega \in \Omega\}.$$

We prove the following result:

**Theorem (3.2.12).** *Pick  $t > 0$  and  $\psi \in \Psi(\mathcal{H}_t)$ . Let*

$$G \in \{L \cap \text{dom}(\psi) \mid L \in \mathcal{L}_2\mathbb{R}, |L \cap Q| \leq 1, L \cap \text{dom}(\psi) \neq \emptyset\} .$$

*If the image of  $G$  under  $\psi$  is contained in an element of the set  $\{L \in \mathcal{L}_2\mathbb{R} \mid |L \cap Q| \leq 1\}$  then  $\psi$  is a restriction of an automorphism  $\omega \in \Omega$ .*

We will describe the smallest local group  $E$  containing the semigroup of endomorphisms of a stable plane  $\mathcal{P}$ , that is to say, the union of  $\text{End}(\mathcal{P})$  and the set  $(\text{End}(\mathcal{P}))^{-1}$  of the inverse maps. We define a partial composition law  $m_{\infty}^E$  for  $E$  and prove in **theorem 3.3.4** that  $(E, m_{\infty}^E)$  is a local group.

For manifolds  $P$  we have in **section 3.3** the following result: Endowed with the subspace topology induced by  $\Psi(\mathcal{P})$ , the local group  $(E, m_{\infty}^E)$  satisfies all axioms of a topological local group but one: There is no open neighbourhood  $U$  of the identity such that  $U \times U$  is a subset of  $\text{dom}(m_{\infty}^E)$ . However  $E$  is locally compact and Hausdorff.

There is another class of interesting stable planes, the Moulton planes  $\overline{\mathcal{M}}_k$  with  $k > 1$ . These are non-desarguesian compact projective planes. And they are the only 2-dimensional compact projective planes whose collineation groups are of dimension 4 [55, 34].

**Definition (4.1.1 and 4.1.3).** *Let  $P_2\mathbb{R} = (P_2\mathbb{R}, \mathcal{L}_2\mathbb{R})$  be the real projective plane. Its point set*

$$P_2\mathbb{R} = \{\mathbb{R}(x, y, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\mathbb{R}(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

*is the set of the 1-dimensional subspaces of  $\mathbb{R}^3$ . Its lines are the 2-dimensional subspaces:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\mathbb{R} &:= \{l_{s,t}, l_c \mid s, t, c \in \mathbb{R}\} \cup \{g_{\infty}\} \text{ with} \\ l_{s,t} &:= \{\mathbb{R}(x, sx + t, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} , \\ l_c &:= \{\mathbb{R}(c, x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ and} \\ g_{\infty} &:= \{\mathbb{R}(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} . \end{aligned}$$

*Incidence of points and lines is given by inclusion. In order to construct the projective Moulton plane  $\overline{\mathcal{M}}_k$  with  $k > 1$ , we take the real projective plane and replace the lines  $l_{s,t}$  with negative slope  $s$  by the kinked lines*

$$l_{s,t}^* := \{\mathbb{R}(x, sx + t, 1) \mid x \leq 0\} \cup \{\mathbb{R}(x, skx + t, 1) \mid x \geq 0\} \cup \{\mathbb{R}(1, s, 0)\} .$$

In **theorem 4.2.17** we prove that every partial lineation of a Moulton plane  $\overline{\mathcal{M}}_k$  with non-desarguesian domain can be extended to an automorphism of  $\overline{\mathcal{M}}_k$ . To that end, it is convenient to describe the automorphism group of  $\overline{\mathcal{M}}_k$  in the following way:

**Theorem (4.2.1, 4.2.2, 4.2.19 and 4.2.23).** *Let*

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2\mathbb{R} .$$

Zusammenfassung in englischer Sprache

Consider the map

$$\lambda : \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{PGL}_3 \mathbb{R} : A \mapsto \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & A \end{array} \right].$$

We single out the following subsets of  $P_2\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} O_L := O_L(A) &:= \left\{ [x, y, 1] \mid x < 0, y > -\frac{j}{f} \right\}, & O_{\overline{R}} := O_{\overline{R}}(A) &:= \left\{ [x, y, 1] \mid x \geq 0, y > -\frac{j}{f} \right\}, \\ U_{\overline{L}} := U_{\overline{L}}(A) &:= \left\{ [x, y, 1] \mid x \leq 0, y < -\frac{j}{f} \right\}, & U_R := U_R(A) &:= \left\{ [x, y, 1] \mid x > 0, y < -\frac{j}{f} \right\}, \\ H_{\overline{L}} &:= \{ [x, y, 1] \mid x \leq 0, y \in \mathbb{R} \}, & H_R &:= \{ [x, y, 1] \mid x > 0, y \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Let  $B, C \in \{A, k^{-1}A, kA\}$ . We define the following maps:

$$\left[ \begin{array}{c|c} C & A \\ \hline A & B \end{array} \right] : P_2\mathbb{R} \rightarrow P_2\mathbb{R} :$$

$$(P_2\mathbb{R} \setminus g_\infty) \ni p \mapsto \begin{cases} p^{C^\lambda} & \text{for } p \in O_L \\ p^{A^\lambda} & \text{for } p \in O_{\overline{R}} \cup U_{\overline{L}} \cup \left( g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \cap (H_{\overline{L}}) \right) \\ p^{B^\lambda} & \text{for } p \in U_R \cup \left( g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \cap H_R \right) \end{cases}$$

$$g_\infty \ni [u, s, 0] \mapsto \begin{cases} [u, s, 0]^{A^\lambda} & \text{for } us \geq 0 \\ [u, s, 0]^{C^\lambda} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right] : P_2\mathbb{R} \rightarrow P_2\mathbb{R} :$$

$$(P_2\mathbb{R} \setminus g_\infty) \ni p \mapsto \begin{cases} p^{A^\lambda} & \text{for } p \in H_{\overline{L}} \\ p^{B^\lambda} & \text{for } p \in H_R \end{cases}$$

$$g_\infty \ni [u, s, 0] \mapsto \begin{cases} [u, s, 0]^{B^\lambda} & \text{for } us > 0 \\ [u, s, 0]^{A^\lambda} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 : A \mapsto A^{\sigma_1} &:= \left[ \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & k^{-1}A \end{array} \right] & \text{with } \mathrm{dom} \sigma_1 &:= \left\{ A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid f > 0 \right\} \\ \sigma_2 : A \mapsto A^{\sigma_2} &:= \left[ \begin{array}{c|c} kA & A \\ \hline A & A \end{array} \right] & \text{with } \mathrm{dom} \sigma_2 &:= \left\{ A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid f < 0 \right\} \\ \sigma_3 : A \mapsto A^{\sigma_3} &:= \left[ \begin{array}{c|c} A & A \end{array} \right] & \text{with } \mathrm{dom} \sigma_3 &:= \left\{ A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid j > 0 \right\} \\ \sigma_4 : A \mapsto A^{\sigma_4} &:= \left[ \begin{array}{c|c} A & k^{-1}A \end{array} \right] & \text{with } \mathrm{dom} \sigma_4 &:= \left\{ A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid j < 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\overline{\sigma} : \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow (\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R})^{\overline{\sigma}} : A \mapsto A^{\overline{\sigma}} := (A)^{\sigma_i} \text{ for } A \in \mathrm{dom} \sigma_i$$

Then  $\Sigma := (\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R})^{\overline{\sigma}}$  is the automorphism group of  $\overline{\mathcal{M}}_k$ .

In **theorem 4.2.29** the map  $\overline{\mathcal{O}}$  turns out to be a local isomorphism of topological groups, i.e., there is an open neighbourhood  $Y$  of the identity in  $\Sigma$  such that  $\overline{\mathcal{O}}|_Y$  is a homeomorphism and a homomorphism of local groups. The structure of  $\Sigma$  is well known [55, 34.6]: Its commutator group  $\Sigma'$  is isomorphic to the simply connected covering group of  $\mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$ . We show in **theorem 4.3.5** that

$$\Sigma' = \left\{ (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid C \in \mathrm{SL}_2 \mathbb{R}, r \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

and in **theorem 4.3.8** we prove that the map

$$\nu : \Sigma' \rightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{R} : (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}} \mapsto C$$

is a covering map.

In **section 4.7** we characterize the semigroup of endomorphisms of certain classes of non-desarguesian subplanes of  $\overline{\mathcal{M}_k}$ . In **section 4.5** we examine the set  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  and the relation  $\omega$  turns out not to be an equivalence relation on  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  (see **example 4.6.1**).

Furthermore, we study a generalization of the Moulton planes: The Pickert-Moulton planes  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  were defined by PICKERT in [39, S. 93]. They are constructed in very much the same way as the Moulton planes  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , but using an arbitrary ordered field  $\mathbb{F}$  instead of the real numbers  $\mathbb{R}$ . In **theorem 4.8.11** we extend the results by PIERCE by showing that any bijective lineation  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})}$  is continuous. Moreover we prove that the automorphism group of  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  can be written as follows:

**Theorem (4.8.9).** *The automorphism group of  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  is the group*

$$\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}} := \left\{ (\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}}) \mid \alpha \in \mathrm{oAut} \mathbb{F}, k^\alpha = k, A \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{F} \right\} \text{ with}$$

$$(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}}) : P_2 \mathbb{F} \rightarrow P_2 \mathbb{F} : p \mapsto (p^\alpha)^{A^{\overline{\mathcal{O}}}}$$

where the set  $\mathrm{oAut}(\mathbb{F})$  is the group of order-preserving field automorphisms of  $\mathbb{F}$ .

Just like in  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , every partial lineation of  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  with non-desarguesian domain is a restriction of an automorphism of  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . PIERCE proved in [43] that the Pickert-Moulton planes  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  and  $\overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})}$  are isomorphic if and only if there is an order-preserving field automorphism  $\alpha$  with the property that

$$k^\alpha = \tilde{k} \text{ or } k^\alpha = (\tilde{k})^{-1} .$$

In **theorem 4.8.12** we show that this is equivalent to the existence of a lineation  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}, \overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})})$  with non-desarguesian domain.

Analysis of the structure of  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  yields the following result:

Zusammenfassung in englischer Sprache

**Theorem (4.9.1 - 4.9.3).** *Let*

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mathbb{F}} &:= \left\{ (\text{id}, A^{\overline{\mathcal{O}}}) \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F} \right\} , \\ S^{\mathbb{F}} &:= \left\{ (\text{id}, (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}}) \mid r \in \mathbb{Z}, C \in \text{SL}_2 \mathbb{F} \right\} \text{ and} \\ \tilde{\mathbb{F}} &:= \left\{ (\alpha, \mathbf{1}^{\overline{\mathcal{O}}}) \mid \alpha \in \text{oAut}(\mathbb{F}), k^\alpha = k \right\} .\end{aligned}$$

*Then the group  $\Sigma^{\mathbb{F}}$  is a normal subgroup of  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$ , and  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}} = \Sigma^{\mathbb{F}} \rtimes \tilde{\mathbb{F}}$ . The group  $S^{\mathbb{F}}$  is a central extension of  $\text{SL}_2 \mathbb{F}$ .*



# 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

## 1.1. Grundlegendes über stabile Ebenen

**1.1.1 Definition.** Eine Inzidenzstruktur  $S = (P, \mathcal{L})$  mit nichtleeren hausdorffschen nicht diskreten topologischen Räumen  $P$  („Punkte“) und  $\mathcal{L}$  („Geraden“), wobei  $\mathcal{L}$  eine Menge von Teilmengen von  $P$  ist, heißt stabile Ebene, wenn folgendes gilt:

- (i) Zu je zwei verschiedenen Punkten  $p, q \in P$  existiert genau eine Gerade  $L \in \mathcal{L}$  so, dass  $\{p, q\} \subset L$  (wir schreiben:  $L = p \vee q =: pq$ ).
- (ii) Die Operation des Verbindens  $\vee : P^2 \setminus \{(p, p) \mid p \in P\} \rightarrow \mathcal{L} : (p, q) \mapsto pq$  ist stetig.
- (iii) Die Definitionsmenge des Schneidens  $\mathcal{D} := \{(L, M) \in \mathcal{L}^2 \mid L \neq M, L \cap M \neq \emptyset\}$  ist offen in  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ , und die Operation des Schneidens  $\wedge : \mathcal{D} \rightarrow P : (L, M) \mapsto L \wedge M$  ist stetig.
- (iv) Es existiert ein echtes Viereck, und jede Gerade enthält mindestens drei Punkte.

Ist  $P$  lokalkompakt und von positiver endlicher Überdeckungsdimension, so heißt  $S$  stabile lp-Ebene.

Wir tragen einige wichtige Sätze über stabile Ebenen zusammen:

**1.1.2 Satz.** [29, 1.9]. Die Topologie des Punktraums einer stabilen lp-Ebene ist metrisierbar und besitzt eine abzählbare Basis.

In einem separablen metrischen Raum fallen die Dimensionsbegriffe der kleinen induktiven Dimension  $\text{ind}$ , der großen induktiven Dimension  $\text{Ind}$  und der Überdeckungsdimension  $\text{dim}$  zusammen [35, Ch. 2, Th. 8-2].

**1.1.3 Satz.** [32, Th. 1]. Sei  $(P, \mathcal{L})$  eine stabile lp-Ebene und sei  $L \in \mathcal{L}$  eine Gerade. Dann gibt es ein  $m \in \{1, 2, 3\}$  derart, dass gilt  $\text{dim } L = 2^m$  und  $\text{dim } P = 2 \text{ dim } L$ .

**1.1.4 Satz.** [29, 1.29]. Sei  $(P, \mathcal{L})$  eine stabile Ebene und  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$ . Dann ist  $(U, \mathcal{L}_U)$  mit  $\mathcal{L}_U := \{L \cap U \mid L \in \mathcal{L}, L \cap U \neq \emptyset\}$  eine stabile Ebene. Wir nennen  $(U, \mathcal{L}_U)$  offene Unterebene von  $(P, \mathcal{L})$ .

Der im Folgenden aufgeführte lokale Fundamentalsatz von LÖWEN verhilft uns in dieser Arbeit oft zu neuen Erkenntnissen:

**1.1.5 Satz.** [31] Sei  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n \mathbb{F}$  mit  $n \geq 2$  ein  $n$ -dimensionaler projektiver Raum mit  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ . Sei  $U$  eine offene Teilmenge der Punktmenge  $P$  von  $\mathcal{P}$  und sei  $\mathcal{U}$  die zu  $U$  gehörende Untergeometrie. Sei  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$  eine Einbettung. Dann kann  $\varphi$  eindeutig zu einem Automorphismus von  $\mathcal{P}$  fortgesetzt werden.

In den Beweisen in dieser Arbeit spielen relativ kompakte Mengen öfters eine wichtige Rolle, deswegen erinnern wir an dieser Stelle an die Definition: Wir nennen eine Menge  $U$  in einem topologischen Raum *relativ kompakt*, wenn der Abschluss  $\overline{U}$  kompakt ist.

## 1.2. Gebietsinvarianz zwischen zwei stabilen lp-Ebenen

In Anlehnung an die Definition der Gebietsinvarianz-Eigenschaft eines Raumes (vgl. [55, 51.18]) definieren wir die Gebietsinvarianz zwischen zwei Räumen.

**1.2.1 Definition.** *Seien  $X$  und  $X'$  topologische Räume. Wir sagen, zwischen den Räumen  $X$  und  $X'$  herrsche Gebietsinvarianz, wenn gilt: Wenn  $U$  eine Teilmenge von  $X$  ist,  $V$  eine Teilmenge von  $X'$  ist und  $f : U \rightarrow U^f = V$  ein Homöomorphismus ist, dann ist  $U$  genau dann offen in  $X$ , wenn  $V$  offen in  $X'$  ist.*

Es ist nicht bekannt, ob der Punktraum und der Geradenraum jeder stabilen Ebene eine Mannigfaltigkeit ist. Aber es ist bekannt, dass Geraden, Büschel, Punkt- und Geradenräume lokal homogene absolute Umgebungsretrakte sind (vgl. [29, 1.2 ff] und [32, 5.1]). Deswegen beschäftigen wir uns zuerst mit lokal homogenen absoluten Umgebungsretrakten:

**1.2.2 Definition.** [57, III.1.7]. *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Im Folgenden bezeichne  $Z$  einen normalen Raum,  $F$  eine abgeschlossene Menge in  $Z$  und  $g : F \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Wenn sich für jede Wahl von  $Z$ ,  $F$  und  $g$  die Abbildung  $g$  stetig auf eine Umgebung von  $F$  in  $Z$  fortsetzen lässt, so heißt  $X$  ein absoluter Umgebungsretrakt (ANR).  $X$  heißt ein metrischer absoluter Umgebungsretrakt für die Klasse aller metrischer Räume, wenn  $X$  und  $Z$  metrische Räume sind.*

**1.2.3 Definition.** [59]. *Ein topologischer Raum  $X$  ist lokal homogen, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $x$  bzw.  $y$  und einen Homöomorphismus  $h : U \rightarrow V$  mit  $x^h = y$  gibt.*

SEIDEL beweist in [59], dass eine abgeschlossene Teilmenge  $Z$  eines  $n$ -dimensionalen lokal kompakten, lokal homogenen separablen metrischen absoluten Umgebungsretrakts genau dann die Dimension  $n$  hat, wenn das Innere von  $Z$  nicht leer ist. Außerdem beweist SEIDEL folgenden Satz über die Gebietsinvarianz-Eigenschaft:

**1.2.4 Satz.** [59, Theorem B]. *Sei  $X$  ein  $n$ -dimensionaler lokal kompakter lokal homogener separabler metrischer absoluter Umgebungsretrakt und seien  $V$  und  $W$  homöomorphe Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $V$  genau dann offen in  $X$ , wenn  $W$  offen in  $X$  ist.*

Dieser Satz lässt sich auf die Situation verallgemeinern, dass man zwei absolute Umgebungsretrakte gleicher Dimension betrachtet:

**1.2.5 Satz.** *Seien  $X$  und  $Y$  zwei lokal kompakte lokal homogene separable metrische absolute Umgebungsretrakte derselben positiven und endlichen Dimension. Dann herrscht zwischen  $X$  und  $Y$  Gebietsinvarianz.*

**Beweis.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei lokal kompakte lokal homogene separable metrische absolute Umgebungsretrakte der Dimension  $n$ . Seien  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  homöomorph und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$ . Wir betrachten die

### 1.3. Grundlegendes zu lokalen Halbgruppen und lokalen Gruppen

topologische Summe  $X \cup Y$ . Dann ist  $X \cup Y$  ein lokal kompakter separabler metrischer absoluter Umgebungsretrakt (vgl. [10, 3.3]). Wir zeigen im Folgenden, dass  $X \cup Y$  durch  $\varphi$  lokal homogen wird. Da  $X$  lokal kompakt ist, gibt es in  $U$  eine kompakte Umgebung  $C$ . Diese ist abgeschlossen in  $X$  ( $X$  ist hausdorffsch) und hat folglich volle Dimension [59, Theorem A]. Da  $\varphi$  stetig ist, ist  $C^\varphi$  kompakt in  $Y$  und ist folglich abgeschlossen in  $Y$ . Da  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist, bleibt die Dimension erhalten. Insgesamt wissen wir nun, dass  $C^\varphi$  eine abgeschlossene Teilmenge der Dimension  $n$  von  $Y$  ist. Der schon zitierte Satz von SEIDEL besagt, dass  $C^\varphi$  eine in  $Y$  offene Menge  $W$  enthält. Das Urbild von  $W$  unter  $\varphi$  ist offen in  $U$ , und da  $U$  offen in  $X$  ist, ist  $W^{\varphi^{-1}}$  offen in  $X$ . Seien  $x \in X$ ,  $y \in Y$  und  $w \in W^{\varphi^{-1}}$ . Dann gibt es, da  $X$  lokal homogen ist, Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_w$  von  $w$  und einen Homöomorphismus  $\mu$  mit  $U_x^\mu = U_w$  und  $x^\mu = w$ . Die Umgebung  $U_w$  kann so gewählt werden, dass sie in der offenen Menge  $W^{\varphi^{-1}}$  liegt. Außerdem gibt es Umgebungen  $V_w$  um  $w^\varphi$  und  $V_y$  um  $y$  und einen Homöomorphismus  $\lambda$  mit  $V_w^\lambda = V_y$  und  $(w^\varphi)^\lambda = y$ . Hier kann  $V_w$  so gewählt werden, dass  $V_w \subseteq U_w^\varphi$ . Dann ist  $(V_w^{\varphi^{-1}})^{\mu^{-1}}$  eine Umgebung von  $x$ , die via  $\mu\varphi\lambda$  homöomorph zu  $V_y$  ist, und es gilt  $x^{\mu\varphi\lambda} = y$ . Also ist  $X \cup Y$  ein lokal kompaktes lokal homogener separabler metrischer absoluter Umgebungsretrakt. Folglich ist nach dem Satz von SEIDEL über die Gebietsinvarianz-Eigenschaft  $V$  offen in  $Y$ . ■

LÖWEN beweist, dass jede zusammenhängende offene Teilmenge  $T$  einer stabilen lp-Ebene die Gebietsinvarianz-Eigenschaft erfüllt (das heißt zwischen  $T$  und  $T$  herrscht Gebietsinvarianz, vgl. [32, Theorem 11b]). Als Folgerung von 1.2.5 erhalten wir eine Erweiterung des Satzes von LÖWEN über die Gebietsinvarianz-Eigenschaft von stabilen lp-Ebenen.

**1.2.6 Korollar.** *Zwischen den Punkträumen und den Geradenräumen zweier stabiler lp-Ebenen derselben Dimension herrscht Gebietsinvarianz.*

**Beweis.** Eine stabile lp-Ebene ist ein lokal kompakter lokal homogener separabler metrischer Umgebungsretrakt. (Die zum Beweis dieser Aussage notwendigen Sätze sind: [29, 1.2 ff] und [32, 5.1]. Wie aus den Sätzen von LÖWEN die lokale Homogenität folgt, ist in [27, 1.12] vorgeführt.) ■

## 1.3. Grundlegendes zu lokalen Halbgruppen und lokalen Gruppen

**1.3.1 Definition.** *Eine partielle binäre Operation auf einer Menge  $E$  ist eine Abbildung  $m$  von einer nichtleeren Teilmenge von  $E \times E$  nach  $E$ .*

*Unter einem partiellen Gruppoid  $(E, m)$  versteht man eine nichtleere Menge  $E$ , versehen mit einer partiellen binären Operation  $m$  (vgl. [1, S. 1]).*

*Ist  $m$  auf  $E \times E$  definiert, so heißt  $(E, m)$  ein Gruppoid.*

*Ein Gruppoid  $(S, m)$  ist eine Halbgruppe, wenn  $m$  assoziativ ist.*

*Eine Halbgruppe  $(S, m)$  heißt inverse Halbgruppe, wenn für alle  $a \in S$  eindeutig ein  $a^{-1} \in S$  existiert, so dass  $aa^{-1}a = a$  und  $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ . (vgl. [19, S. 1 und S. 129])*

In Anlehnung an diese Definition definieren wir den Begriff der lokalen Halbgruppe.

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

**1.3.2 Definition.** Ein partielles Gruppoid  $(S, m)$  heißt lokale Halbgruppe, wenn  $(S, m)$  assoziativ bis zur Ordnung 3 ist.

Eine lokale Halbgruppe  $(S, m)$  ist eine kürzbare lokale Halbgruppe, wenn  $m$  auf seinem Definitionsgebiet  $\text{dom}(m)$  kürzbar ist.

Eine lokale Halbgruppe  $(S, m)$  ist eine inverse lokale Halbgruppe, wenn für alle  $s \in S$  eindeutig ein  $s^{-1}$  so existiert, dass

$$(s, s^{-1}), (s^{-1}, s), (ss^{-1}, s), (s, s^{-1}s), (s^{-1}s, s^{-1}), (s^{-1}, ss^{-1}) \in \text{dom}(m),$$

$$ss^{-1}s = s \text{ und } s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}.$$

Ist auf einer Menge nur eine partielle Verknüpfung definiert, so kann aus der Assoziativität von Tripeln nicht auf die Assoziativität von größeren Klammerungen geschlossen werden. Man unterscheidet zwischen Assoziativität bis zu einer Ordnung  $n$  und genereller Assoziativität (vgl. [36] und [4]):

**1.3.3 Definition.** Sei  $(E, m)$  ein partielles Gruppoid. Sei  $E^{<\omega} := \bigcup_{n \geq 1} E^n$  die Menge aller geordneten  $n$ -Tupel  $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$  für alle  $n \geq 1$ .

Ein Tupel  $l = (l_1, \dots, l_n) \in E^{<\omega}$  heißt lokales Tupel, wenn es zu einem Element  $e \in E$  kontrahiert werden kann. Das heißt, es existiert eine Klammerung (ohne Veränderung der Reihenfolge der Elemente  $l_1, \dots, l_n$ ) so, dass alle entstandenen Produkte in  $(E, m)$  definiert sind. Wir sagen,  $l$  habe ein stabiles Produkt, wenn alle definierten Kontraktionen zu einem Element in  $E$  dasselbe Element liefern.

Das partielle Gruppoid  $(E, m)$  ist assoziativ bis zur Ordnung  $n$ , wenn für alle  $3 \leq k \leq n$  alle lokalen  $k$ -Tupel ein stabiles Produkt besitzen.

Wenn  $(E, m)$  für jede Ordnung  $n \geq 3$  assoziativ ist, dann heißt  $(E, m)$  generell assoziativ.

Wie MALCEV bewiesen hat, ist die generelle Assoziativität das entscheidende Kriterium, ob eine lokale Gruppe zu einer Gruppe erweiterbar ist. Die folgende Definition ist aus [4] entnommen.

**1.3.4 Definition.** Seien  $(L, m_L)$  und  $(M, m_M)$  lokale Gruppen. Eine Abbildung  $f : L \rightarrow M$  heißt Morphismus lokaler Gruppen, wenn für jedes Paar  $(a, b)$  aus dem Definitionsbereich von  $m_L$  das Paar  $(a^f, b^f)$  im Definitionsbereich von  $m_M$  liegt und  $(m_L(a, b))^f = m_M(a^f, b^f)$  gilt.

Ein Morphismus  $f : L \rightarrow M$  heißt Submersion, wenn ein Paar  $(a, b) \in L \times L$  genau dann im Definitionsbereich von  $m_L$  liegt, wenn  $(a^f, b^f)$  im Definitionsbereich von  $m_M$  liegt.

Eine lokale Gruppe  $L$  heißt schwach zu einer Gruppe erweiterbar, wenn es einen injektiven Morphismus  $f : L \rightarrow G$  von  $L$  in eine Gruppe  $G$  gibt. (Das bedeutet nicht, dass  $L$  isomorph zu einer lokalen Untergruppe von  $G$  ist, da im Bild von  $f$  möglicherweise mehr Produkte definiert sind als in  $L$ ). Wenn der Morphismus  $f$  eine injektive Submersion ist, dann heißt  $L$  zu einer Gruppe erweiterbar.

Eine lokale Gruppe hat eine saturierte Multiplikation, wenn für jede Kontraktion eines lokalen Tupels zu einem zweielementigen Tupel  $(a, b)$  dieses Tupel im Definitionsbereich der Multiplikation liegt.

## 1.4. Die Menge der partiellen Lineationen $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$

**1.3.5 Satz.** [4, Th. 2.1] MALCEV'S Kriterium.

- (i) Eine lokale Gruppe  $(L, m)$  ist genau dann schwach zu einer Gruppe erweiterbar, wenn  $(L, m)$  generell assoziativ ist.
- (ii) Eine lokale Gruppe  $(L, m)$  ist genau dann zu einer Gruppe erweiterbar, wenn  $(L, m)$  generell assoziativ ist und eine saturierte Multiplikation besitzt.

### 1.4. Die Menge der partiellen Lineationen $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$

Eine partielle Bijektion einer Menge  $X$  ist eine bijektive Abbildung, deren Definitionsgebiet eine (möglicherweise leere) Teilmenge von  $X$  ist. Wir betrachten nun eine Teilmenge der Menge der partiellen Bijektionen von  $P$ . Dazu definieren wir zuerst den Begriff Lineation.

**1.4.1 Definition.** Seien  $(P, \mathcal{L})$  und  $(P', \mathcal{L}')$  stabile Ebenen. Eine Abbildung  $\pi : P \rightarrow P'$  heißt Lineation, wenn für jede Gerade  $L \in \mathcal{L}$  eine Gerade  $L' \in \mathcal{L}'$  mit  $L^\pi \subseteq L'$  existiert. Eine Lineation  $\pi$  heißt kollabiert, wenn der gesamte Punktraum  $P$  in eine einzige Gerade  $H \in \mathcal{L}'$  abgebildet wird.

**1.4.2 Definition.** Seien  $(P, \mathcal{L})$  und  $(P', \mathcal{L}')$  stabile Ebenen. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$ . Eine Abbildung  $\pi : U \rightarrow U^\pi \subseteq P'$  heißt partielle Lineation, wenn  $\pi$  eine Lineation von  $(U, \mathcal{L}_U)$  nach  $(P', \mathcal{L}')$  ist.

Die Menge aller partiellen stetigen injektiven offenen Lineationen mit nicht leerem Definitionsbereich in  $P$  und offenem Bild in  $P'$  wird mit  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  bezeichnet:

$$\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') := \left\{ \psi : U \rightarrow U^\psi \subseteq P' \mid \begin{array}{l} \emptyset \neq U \subseteq P, U^\psi \subseteq P', \\ \psi \text{ stetige injektive offene Lineation} \end{array} \right\},$$

statt  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P})$  schreiben wir  $\Psi(\mathcal{P})$ .

Für  $\psi : U \rightarrow U^\psi$  bezeichnen wir das Definitionsgebiet von  $\psi$  mit  $\text{dom}(\psi)$ , es gilt dann  $\text{dom}(\psi) = U$ . Wir bezeichnen mit

$$\text{id}_U : U \rightarrow U : x \mapsto x$$

die Restriktion der Identität auf  $U$ .

**1.4.3 Lemma.** Seien  $\mathcal{P} := (P, \mathcal{L})$  und  $\mathcal{P}' := (P', \mathcal{L}')$  nicht diskrete stabile Ebenen mit  $\dim P = \dim P'$ . Seien  $U \subset V$  nicht leere offene Teilmengen von  $P$ . Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  nicht kollabiert, mit  $U \subset \text{dom} \psi$ . Wenn sich  $\psi$  auf  $V$  zu einer Lineation  $\varphi$  fortsetzen lässt, dann ist die Fortsetzung auf  $V$  stetig und injektiv.

**Beweis.** Sei  $\varphi : V \rightarrow P'$  die Fortsetzung von  $\psi$  zu einer Lineation. Seien  $u \neq v \in U$ . Wir betrachten zunächst die Lineation  $\varphi|_{V \setminus uv}$ . Die Lineation  $\psi$  ist nicht kollabiert und folglich nach [65, Lemma 3] injektiv auf der Menge der Geraden. Für  $x \in V \setminus uv$  gilt

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

$x^\varphi \in (xu)^\psi \wedge (xv)^\psi$ , weil  $\varphi$  eine Lineation und die Fortsetzung von  $\psi$  ist. Aus der Tatsache, dass  $\psi$  injektiv auf den Geraden ist folgt, dass

$$\varphi|_{V \setminus uv} = (x \mapsto (xu)^\psi \wedge (xv)^\psi)$$

gilt und dass  $\varphi|_{V \setminus uv}$  weder kollabiert noch lokal konstant ist. Wenn wir die Stetigkeit von  $\varphi|_{V \setminus uv}$  bewiesen haben, erhalten wir aus obigem und [65, Theorem 6], dass die Lineation  $\varphi|_{V \setminus uv}$  injektiv ist. Die Lineation  $\varphi|_{V \setminus uv}$  ist die Komposition der drei stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} x &\mapsto (xu, xv) \\ (xu, xv) &\mapsto ((xu)^\psi, (xv)^\psi) \text{ und} \\ ((xu)^\psi, (xv)^\psi) &\mapsto (xu)^\psi \wedge (xv)^\psi, \end{aligned}$$

und folglich stetig. Die Aussage, dass  $\varphi$  stetig ist, erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie oben, indem wir zwei weitere Punkte  $\tilde{u}, \tilde{v} \in U \setminus uv$  wählen. ■

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von [65, Theorem 8].

**1.4.4 Lemma.** *Seien  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  stabile  $lp$ -Ebenen mit  $\dim P = \dim P' = n$ . Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$ . Dann ist jede injektive stetige Lineation  $\psi : U \rightarrow U^\psi \subseteq P'$  offen und nicht kollabiert, und  $U^\psi$  ist offen in  $P'$ .*

**Beweis.** Angenommen  $\psi$  wäre kollabiert. Dann gibt es eine Gerade  $L$  so, dass  $\text{Bild}(\psi) \subseteq L$ . Da  $P$  lokalkompakt ist und  $\text{dom}(\psi)$  in  $P$  offen ist, gibt es eine kompakte Umgebung  $K \subseteq \text{dom}(\psi)$  und es gilt  $\dim(K) = \dim(P) = n$  [32, Theorem 11 c)]. Da eine bijektive stetige Abbildung auf einem Kompaktum ein Homöomorphismus ist, gilt  $\dim(K^\psi) = n$ . Außerdem ist  $\dim(L) = \frac{n}{2}$  [32, Th. 1], da  $\dim(P') = n$  vorausgesetzt wurde. Die Annahme, dass  $\psi$  kollabiert sei, führt wegen der Monotonie der Dimension [55, 92.4] zu folgendem Widerspruch:  $n = \dim(K^\psi) \leq \dim(L) = \frac{n}{2}$ .

Betrachten wir nun eine relativ kompakte offene Umgebung  $O \subset \text{dom}(\psi)$  mit  $\overline{O} \subset \text{dom}(\psi)$ . Dann induziert  $\psi$  einen Homöomorphismus von  $\overline{O}$  nach  $\overline{O}^\psi$ . Aufgrund der Gebietsinvarianz zwischen  $P$  und  $P'$  (Satz 1.2.5) ist  $O^\psi$  offen in  $P'$ . Folglich ist  $\psi$  eine offene Abbildung. Aus der Gebietsinvarianz zwischen  $P$  und  $P'$  (Satz 1.2.5) folgt, dass  $U^\psi$  eine offene Teilmenge von  $P'$  ist. ■

Wir betrachten im Folgenden die Menge  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} := \Psi(\mathcal{P}) \cup \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \cup \Psi(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \cup \Psi(\mathcal{P}')$ . Auf der Menge  $\mathcal{B}(X)$  der partiellen Bijektionen einer Menge  $X$  kann eine Verknüpfung  $\circ$ , die Komposition der Abbildungen, definiert werden (vgl. [19, S. 133]).

**1.4.5 Definition.** *Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{B}(X)$  die Menge der partiellen Bijektionen von  $X$ . Auf  $\mathcal{B}(X)$  wird die Verknüpfung  $\circ$  definiert:*

$$\circ : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta = \left( (\text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta))^{\alpha^{-1}} \rightarrow X : x \mapsto (x^\alpha)^\beta \right)$$



#### 1.4. Die Menge der partiellen Lineationen $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$

Nach [19, Prop. V.1.8] ist  $(\mathcal{B}(X), \circ)$  eine inverse Halbgruppe. Betrachten wir  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  als Teilmenge von  $\mathcal{B}(P \cup P')$ , so erhalten wir durch die Einschränkung von  $\circ$  auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  eine partielle Verknüpfung auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ :

**1.4.6 Definition.** Auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  wird die partielle Verknüpfung  $\diamond$  definiert:

$$\diamond : \text{dom}(\diamond) \rightarrow \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \diamond \beta = \left( (\text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta))^{\alpha^{-1}} \rightarrow P \cup P' : x \mapsto (x^\alpha)^\beta \right)$$

$$\text{mit } \text{dom}(\diamond) = \{(\alpha, \beta) \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \times \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \mid \text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta) \neq \emptyset\}.$$

Das folgende Lemma ist eine Folgerung von Satz 1.4.9.

**1.4.7 Lemma.** Sei  $\Psi_\emptyset := \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \cup \{\emptyset : \emptyset \rightarrow P \cup P'\}$  und für  $(\alpha, \beta) \in \Psi_\emptyset \times \Psi_\emptyset$  sei

$$m_\emptyset(\alpha, \beta) := \begin{cases} \alpha \diamond \beta & \text{für } (\alpha, \beta) \in \text{dom}(\diamond) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist  $(\Psi_\emptyset, m_\emptyset)$  eine inverse Halbgruppe.

Betrachtet man  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  ohne die Hinzunahme des absorbierenden Elements  $\emptyset$ , so ist die Verknüpfung nicht immer definiert. Aber wir werden sehen, dass  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond)$  eine inverse lokale Halbgruppe ist.

**1.4.8 Lemma.** Für alle  $\psi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  ist  $\psi^{-1} \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ . Es gilt  $\psi \diamond \psi^{-1} = \text{id}_{\text{dom}(\psi)}$  und  $\psi^{-1} \diamond \psi = \text{id}_{\text{Bild}(\psi)}$ .

**Beweis.** Nach Lemma 1.4.4 ist  $\psi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  nicht kollabiert. Also ist  $\psi$  injektiv auf den Geraden (vgl. [65, Lem. 3]). Es folgt, dass  $\psi^{-1}$  eine Lineation ist. Nach 1.4.4 ist das Definitionsgebiet von  $\psi^{-1}$  offen. Mit der Stetigkeit und der Offenheit von  $\psi$  erhalten wir  $\psi^{-1} \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ . ■

**1.4.9 Satz.** Mit der oben definierten partiellen Verknüpfung  $\diamond$  ist  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond)$  eine generell assoziative inverse lokale Halbgruppe.

**Beweis.** Für  $(\alpha, \beta) \in \text{dom}(\diamond)$  ist  $\alpha \diamond \beta \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ . Also ist  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond)$  ein partielles Gruppoid. Die generelle Assoziativität folgt aus der von  $(\mathcal{B}(P), \circ)$ . Da außerdem für jedes  $\psi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  auch  $\psi^{-1} \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  gilt (siehe Lemma 1.4.8), ist  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond)$  eine generell assoziative inverse lokale Halbgruppe. ■

Eine notwendige Voraussetzung für die Einbettbarkeit einer lokalen Halbgruppe in eine Gruppe ist die Kürzbarkeit. Die lokale Halbgruppe  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond)$  ist niemals in eine Gruppe einbettbar.

**1.4.10 Lemma.** Die lokale Halbgruppe  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond)$  ist weder rechts noch links kürzbar.

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

**Beweis.** Sei  $U := \text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta)$  und sei  $V \subset U$  eine echte Teilmenge von  $U$ . Dann gilt

$$\alpha|_{V^{\alpha^{-1}}} \diamond \beta = \alpha|_{V^{\alpha^{-1}}} \diamond \beta|_V, \text{ aber } \beta \neq \beta|_V \text{ und}$$

$$\alpha \diamond \beta|_V = \alpha|_{V^{\alpha^{-1}}} \diamond \beta|_V, \text{ aber } \alpha \neq \alpha|_{V^{\alpha^{-1}}}$$

Solche Abbildungen gibt es immer, zum Beispiel  $\alpha = \beta = \text{id}_P$ . ■

**1.4.11 Definition.** Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  eine stabile Ebene. Die Menge

$$\text{End}(\mathcal{P}) := \{\psi \in \Psi(\mathcal{P}) \mid \text{dom}(\psi) = P\}$$

ist die Endomorphismen-Halbgruppe von  $\mathcal{P}$ , die Teilmenge

$$\text{Aut}(\mathcal{P}) := \{\psi \in \text{End}(\mathcal{P}) \mid \text{Bild}(\psi) = P\}$$

ist die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{P}$ .

## 1.5. Eine Topologie auf $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$

Im diesem Kapitel seien  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  und  $\mathcal{P}' = (P', \mathcal{L}')$  stabile lp-Ebenen. Die Endomorphismen-Halbgruppe einer stabilen Ebene wird mit der kompakt-offenen Topologie zu einer topologischen Halbgruppe [65, Thm.10]. Wir erinnern an die Definition der kompakt-offenen Topologie:

**1.5.1 Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Sei  $Y^X$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Für  $C \subseteq X$  und  $U \subseteq Y$  sei

$$[C, U] := \{\varphi \in Y^X \mid C^\varphi \subseteq U\} .$$

Die kompakt-offene Topologie  $\mathcal{T}_{ko}$  auf  $Y^X$  wird durch die Subbasis

$$\mathcal{S}_{ko} := \{[C, U] \mid X \supseteq C \text{ ist kompakt, } Y \supseteq U \text{ ist offen}\}$$

erzeugt.

Für weitere Informationen über die Eigenschaften der kompakt-offenen Topologie sei auf Kapitel XII in [3] und Kapitel 9 in [70] verwiesen. Im Folgenden wird in Anlehnung an die kompakt-offene Topologie eine Topologie auf  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  definiert.

**1.5.2 Definition.** Sei

$$\mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} := \{\llbracket C, U \rrbracket \mid P \supseteq C \text{ ist kompakt, } P' \supseteq U \text{ ist offen}\}$$

mit

$$\llbracket C, U \rrbracket := \{\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid C \subset \text{dom}(\psi), C^\psi \subseteq U\} .$$

Dann bezeichnet  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}$  die durch die Subbasis  $\mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}$  erzeugte Topologie auf  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ .



Auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  definieren wir die topologische Summe

$$\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}} := \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} \cup \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}', \mathcal{P}')} \cup \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}', \mathcal{P})} \cup \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P})} .$$

Diese Topologie wird durch die Subbasis

$$\mathcal{S}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}} := \mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} \cup \mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}', \mathcal{P}')} \cup \mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}', \mathcal{P})} \cup \mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P})}$$

erzeugt.

Im Folgenden wollen wir diese Topologie näher kennenlernen. Besitzt die Topologie eines lokalkompakten Raumes  $Y$  eine abzählbare Basis, dann besitzt auch die kompakt-offene Topologie von  $Y^Y$  eine abzählbare Basis (vgl. [3, Thm. XII 5.2]). Mit denselben Argumenten wird hier bewiesen, dass  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  eine abzählbare Basis besitzt.

**1.5.3 Lemma.** Die Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  besitzt eine abzählbare Basis.

**Beweis.** Wir beweisen zuerst, dass  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  eine abzählbare Basis besitzt: Sei  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis der Topologie von  $P'$ . Da  $P$  lokalkompakt und hausdorffsch ist, gibt es eine abzählbare Basis kompakter Umgebungen  $\mathcal{C}$ . Dann ist  $\hat{\mathcal{S}}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} := \{ \llbracket C, U \rrbracket \mid C \in \mathcal{C}, U \in \mathcal{B} \}$  eine abzählbare Subbasis von  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}$ .

Als Summe von endlich vielen topologischen Räumen, die alle eine abzählbare Basis besitzen, besitzt auch  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  eine abzählbare Basis. ■

**1.5.4 Bemerkung.** Sei  $\varphi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  und  $M \subseteq \text{dom } \varphi$ . Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}^{\mathbb{N}}$ . Wenn es ein  $p \in M$  so gibt, dass  $p \notin \text{dom}(\varphi_n)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , dann konvergiert die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen  $\varphi|_M$ . Denn sei  $U_{p^\varphi}$  eine offene Umgebung von  $p^\varphi$ . Dann ist  $\llbracket \{p\}, U_{p^\varphi} \rrbracket$  eine offene Umgebung von  $\varphi|_M$ , die unendlich viele Folgenglieder nicht enthält.

In Anlehnung an [3, XII.7.4] definieren wir Folgendes.

**1.5.5 Definition.** Eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}^{\mathbb{N}}$  mit  $M \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$  konvergiert stetig auf  $M$  gegen  $\varphi$ , wenn für alle Folgen  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$  die gegen  $y \in M$  konvergieren die Folge  $(y_n^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $y^\varphi$  konvergiert.

**1.5.6 Lemma.** Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}^{\mathbb{N}}$  und sei  $M \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$  eine offene Teilmenge des Definitionsgebietes einer Lineation  $\varphi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ . Die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann stetig auf  $M$  gegen  $\varphi$ , wenn  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  gegen  $\varphi|_M$  konvergiert.

**Beweis.** Die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  gegen  $\varphi|_M$ , wenn  $(\varphi_n|_M)_{n \in \mathbb{N}}$  in der Menge  $P^M$  bezüglich der kompakt-offenen Topologie gegen  $\varphi|_M$  konvergiert. Denn es gilt: Die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  gegen  $\varphi|_M$ , wenn für alle Subbasiselemente  $\llbracket C, U \rrbracket$  die  $\varphi|_M$  enthalten ein  $N \in \mathbb{N}$  so existiert, dass  $\varphi_n \in \llbracket C, U \rrbracket$  für alle  $n \geq N$  gilt. Da  $M$  eine Teilmenge von allen Definitionsgebieten  $\text{dom}(\varphi_n)$  ist, ist das genau dann der Fall, wenn  $\varphi_n|_M \in \llbracket C, U \rrbracket$  für alle  $n \geq N$  gilt. Das ist äquivalent dazu, dass  $\varphi_n|_M \in [C, U]$  für alle  $n \geq N$  gilt.

Da  $P'$  ein metrischer Raum ist und  $P$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, sind nach [3, XII.7.2 und 7.5] stetige Konvergenz und Konvergenz nach der kompakt-offenen Topologie äquivalent. ■

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

**1.5.7 Lemma.** Seien  $M \subseteq P$ ,  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')^{\mathbb{N}}$ . Wenn  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $M$  punktweise gegen  $\varphi : M \rightarrow P'$  konvergiert, dann ist  $\varphi$  eine Lineation.

**Beweis.** Seien  $a, b, c \in M$  mit  $ab = bc$  und  $b^\varphi \neq c^\varphi$ . Annahme  $a^\varphi \notin b^\varphi c^\varphi$ . Dann finden wir, weil  $P'$  und  $\mathcal{L}'$  hausdorffsch sind, disjunkte Umgebungen  $U_{a^\varphi}, U_{b^\varphi}, U_{c^\varphi}$ , von  $a^\varphi, b^\varphi$  bzw.  $c^\varphi$  so, dass  $U_{a^\varphi} \vee U_{b^\varphi}$  bzw.  $U_{b^\varphi} \vee U_{c^\varphi}$  disjunkte Umgebungen von  $a^\varphi b^\varphi$  bzw.  $b^\varphi c^\varphi$  sind. Wegen der punktweisen Konvergenz von  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \geq m$  gilt:  $a^{\varphi_n} b^{\varphi_n} \in U_{a^\varphi} \vee U_{b^\varphi}$  und  $b^{\varphi_n} c^{\varphi_n} \in U_{b^\varphi} \vee U_{c^\varphi}$ . Im Widerspruch zur Disjunktheit der Umgebungen gilt aber  $a^{\varphi_n} b^{\varphi_n} = (ab)^{\varphi_n} = (bc)^{\varphi_n} = b^{\varphi_n} c^{\varphi_n}$ , weil  $ab = bc$  gilt und  $\varphi_n$  eine Lineation ist. ■

**1.5.8 Lemma.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')^{\mathbb{N}}$ . Wenn  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $U$  stetig gegen  $\varphi$  konvergiert, dann konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stetig auf der Menge  $\mathcal{L}_U$  aller Geraden, die  $U$  nicht leer schneiden.

**Beweis.** Sei  $L_n \rightarrow L$  eine konvergente Folge von Geraden in  $\mathcal{L}_U$ . Da  $U$  offen ist, finden wir zwei verschiedene Punkte  $y \neq z$  in  $U$  mit  $y, z \in L$  und Geraden  $G, H$  mit  $L \neq G \in \mathcal{L}_z, L \neq H \in \mathcal{L}_y$ . Weil der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  des Schneidens offen in  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  ist, gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  so, dass alle Geraden  $L_n$  mit  $n \geq m$  die Geraden  $G$  und  $H$  in  $U$  schneiden. Wir definieren Folgen  $(z_n)_{n \geq m}$  und  $(y_n)_{n \geq m}$  mit  $z_n := L_n \wedge G, y_n := L_n \wedge H$ . Dann gilt:  $z_n \rightarrow z$  und  $y_n \rightarrow y$ . Folglich ist  $z_n \neq y_n$  bis auf endlich viele Schnittpunkte erfüllt. Weil  $\varphi_n$  und  $\varphi$  Lineationen sind (vgl. Lemma 1.5.7), gilt für  $z_n \neq y_n$ , dass  $L_n^{\varphi_n} = (z_n \vee y_n)^{\varphi_n} = z_n^{\varphi_n} \vee y_n^{\varphi_n} \rightarrow z^\varphi \vee y^\varphi = L^\varphi$ . Daher konvergiert  $(L_n^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $L^\varphi$ . ■

GRUNDHÖFER und STROPPEL beschäftigen sich in [8] mit Restriktionen von Automorphismen-Gruppen nicht diskreter stabiler Ebenen  $\mathcal{N}$  auf Unterebenen  $\mathcal{U} := (U, \mathcal{L}_U)$ . Von dort [8, 4b] erfahren wir, dass die kompakt-offene Topologie, die durch  $\text{Aut}(\mathcal{N})|_U$  auf der Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}(\mathcal{N})$  von  $\mathcal{N}$  induziert wird, mit der kompakt-offenen Topologie auf  $\text{Aut}(\mathcal{N})$  übereinstimmt. Diese Aussage ist immer noch richtig, wenn wir statt der Automorphismen-Gruppe die Menge der Einbettungen einer Unterebene  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{P}$  nach  $\mathcal{P}'$  setzen:

**1.5.9 Definition.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$ . Sei  $\mathcal{U} := (U, \mathcal{L}_U)$ . Die Menge der Einbettungen von  $\mathcal{U}$  nach  $\mathcal{P}'$  ist

$$\text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}') := \{\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid \text{dom}(\psi) = U\}$$

**1.5.10 Lemma.** Sei  $V$  eine offene Teilmenge von  $U$ . Dann ist die Abbildung

$$\omega_V : \text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}')|_V = \{\gamma|_V \mid \gamma \in \text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}')\} : \psi \mapsto \psi|_V$$

bijektiv, stetig und offen.

**Beweis.** Da sich alle Lineationen aus  $\text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}')|_V$  auf  $U$  fortsetzen lassen, ist diese Fortsetzung eindeutig und  $\omega_V$  ist bijektiv. Die von  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  auf  $\text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}')$  induzierte Spurtopologie stimmt mit der kompakt-offenen Topologie überein. Wegen 1.5.6 und 1.5.8 können wir den Beweis von Satz 4 (b) in [8] wörtlich übernehmen und erhalten die Stetigkeit und die Offenheit von  $\omega_V$ . ■

Als Korollar erhalten wir daraus das Ergebnis von GRUNDHÖFER und STROPPEL:

**1.5.11 Korollar.** *Sei  $\mathcal{N}$  eine stabile  $lp$ -Ebene. Sei  $U$  eine offene Teilmenge der Punktmenge  $N$  der Ebene  $\mathcal{N}$ . Dann ist die Abbildung*

$$\omega_U : \text{Aut}(\mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{N})|_U = \{ \gamma|_U \mid \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{N}) \} : \psi \mapsto \psi|_U$$

*bijektiv, stetig und offen.*

Im Folgenden betrachten wir die Trennungseigenschaften von  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}})$ .

**1.5.12 Lemma.**  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}})$  erfüllt die Trennungseigenschaft  $T_0$ .

**Beweis.** Seien  $\alpha \neq \beta \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ . Wenn  $\text{dom}(\alpha) \neq \text{dom}(\beta)$ , dann ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\text{dom}(\alpha) \setminus \text{dom}(\beta) \neq \emptyset$ . Für  $p \in \text{dom}(\alpha) \setminus \text{dom}(\beta)$  ist  $\llbracket \{p\}, P' \rrbracket$  eine Umgebung von  $\alpha$ , die  $\beta$  nicht enthält.

Wenn  $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$ , dann gibt es ein  $p \in \text{dom}(\alpha)$  mit  $p^\alpha \neq p^\beta$ . Da  $P'$  hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen  $U_{p^\alpha}, U_{p^\beta}$  von  $p^\alpha$  bzw.  $p^\beta$  mit  $U_{p^\alpha} \cap U_{p^\beta} = \emptyset$ . Also ist  $\llbracket \{p\}, U_{p^\alpha} \rrbracket$  eine offene Umgebung von  $\alpha$ , die  $\beta$  nicht enthält. Weil  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  die Summentopologie ist, erfüllt  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  auch die Trennungseigenschaft  $T_0$ . ■

**1.5.13 Bemerkung.** *Seien  $\alpha, \beta \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  mit  $M := \text{dom}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta) \neq \emptyset$  und  $\alpha|_M \neq \beta|_M$ . Dann haben  $\alpha$  und  $\beta$  disjunkte Umgebungen.*

**Beweis.** Es gibt ein  $p \in \text{dom}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta)$  mit  $p^\alpha \neq p^\beta$ . Wähle disjunkte Umgebungen  $U_{p^\alpha}, U_{p^\beta}$  wie eben. Dann sind  $\llbracket \{p\}, U_{p^\alpha} \rrbracket$  und  $\llbracket \{p\}, U_{p^\beta} \rrbracket$  disjunkte Umgebungen von  $\alpha$  bzw.  $\beta$ . ■

**1.5.14 Bemerkung.**  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}})$  erfüllt nicht die Trennungseigenschaft  $T_1$ .

**Beweis.** Da  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  eine abzählbare Basis besitzt (Lemma 1.5.3), ist eine Teilmenge  $A$  von  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  genau dann abgeschlossen, wenn alle Grenzwerte von Folgen aus  $A^\mathbb{N}$  in  $A$  enthalten sind. Sei  $\psi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  dann konvergiert die konstante Folge  $(\psi)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen jede Einschränkung von  $\psi$  auf eine offene Teilmenge von  $\text{dom}(\psi)$ . Also ist  $\{\psi\}$  nicht abgeschlossen. ■

**1.5.15 Bemerkung.**  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}})$  erfüllt nicht die Trennungseigenschaft  $T_3$ .

**Beweis.** Ein topologischer Raum ist genau dann ein  $T_3$ -Raum, wenn jede Umgebung eine abgeschlossene Umgebung enthält. Kein Subbasiselement  $\llbracket C, U \rrbracket$  enthält eine abgeschlossene Menge, da in jeder abgeschlossenen Menge mit einer Lineation  $\psi$  auch alle Einschränkungen auf offene Teilmengen von  $\text{dom}(\psi)$  enthalten sein müssen (vgl. 1.5.14). ■

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

Im nächsten Kapitel beweisen wir die Lokalkompaktheit von  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  unter der Voraussetzung, dass  $P$  und  $P'$  Mannigfaltigkeiten sind. Deswegen betrachten wir nun kleine Umgebungen um eine Lineation  $\psi \in \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ . Diese Umgebungen sollen aus Lineationen bestehen, die einen bestimmten Ball fast genauso abbilden wie  $\psi$ . Deswegen betrachten wir ein Tupel ineinander geschachtelter Bälle und Kugeln. Die Definitionen der Kugeln sind an die Definitionen von LÖWEN angelehnt (vgl. [29, Def. 2.4]).

**1.5.16 Definition.** Seien  $P$  und  $P'$  Mannigfaltigkeiten. Sei  $d$  eine Metrik auf  $P$ , welche die Topologie von  $P$  beschreibt. Für  $m \in P$  betrachten wir im Folgenden offene Kugeln der Form

$$K_r(m) := \{x \in P \mid d(x, m) < r\} .$$

Ein Paar  $(D, \varepsilon)$  mit  $D \subseteq M$  und  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  heißt zulässig in  $M \subseteq P$ , wenn es einen Punkt  $m \in D$ , Teilmengen  $\hat{D}, \check{D} \subseteq M$  und Radien  $R, \check{R}, r \in \mathbb{R}$  derart gibt, dass Folgendes gilt:

- (i)  $M \supseteq \hat{D} \supseteq K_R(m) \supset \overline{K_{\check{R}}(m)} \supseteq D \supset \check{D} \supset \tilde{D} \supseteq K_{r+3\varepsilon}(m) \ni m$ .
- (ii)  $\hat{D}$ ,  $D$  und  $\tilde{D}$  sind homöomorph zu einem kompakten Ball  $\mathbb{D}^n$ . Unter einem kompakten Ball  $\mathbb{D}^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  verstehen wir eine Menge, deren Inneres homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist und deren Rand homöomorph zu einer Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$  ist.
- (iii)  $r > 5\varepsilon$ ,  $R > 2r$ ,  $\check{R} < R - 2\varepsilon$ .
- (iv) Jede Gerade, die  $K_r(m)$  trifft, besitzt einen Durchmesser größer als  $8\varepsilon$ .
- (v) Zu jeder solchen Geraden gibt es ein  $x \in K_{r-5\varepsilon}(m)$  mit  $d(x, L) > 7\varepsilon$ .
- (vi)  $K_r(m)$  enthält ein  $\varepsilon$ -stabiles Viereck. Das ist ein nicht ausgeartetes Viereck  $a_1, \dots, a_4$  mit der Eigenschaft, dass je vier Punkte  $a'_1, \dots, a'_4$ , die für alle  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  die Ungleichung  $d(a_i, a'_i) \leq \varepsilon$  erfüllen, ein nicht ausgeartetes Viereck bilden.

Hierbei bezeichnet der Durchmesser den Durchmesser einer nicht leeren Menge in einem metrischen Raum wie in [3, IX 4.1]. Wenn  $P$  eine Mannigfaltigkeit ist, dann ist auch die Punktmenge jeder offenen Unterebene eine Mannigfaltigkeit. Somit ist die Existenz eines zulässigen Paares in jeder offenen Unterebene von  $P$  gesichert (vgl. [29, Satz 2.9]).

**1.5.17 Definition.** Seien  $P$  und  $P'$  Mannigfaltigkeiten. Sei  $\gamma \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ . Für ein zulässiges Paar  $(D, \varepsilon)$  in  $\text{Bild}(\gamma)$ , das heißt es gilt insbesondere  $\hat{D} \subseteq \text{Bild}(\gamma)$ , definiere:

$$\begin{aligned} K(\gamma, D, \varepsilon) &:= \left\{ \psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid D^{\gamma^{-1}} \subseteq \text{dom}(\psi), \forall x \in D^{\gamma^{-1}} : d(x^\gamma, x^\psi) \leq \varepsilon \right\} \\ \tilde{K}(\gamma, D, \varepsilon) &:= \left\{ \psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid \begin{array}{l} \check{D}^{\gamma^{-1}} \subseteq \text{dom}(\psi), \forall x \in \check{D}^{\gamma^{-1}} : d(x^\gamma, x^\psi) \leq \varepsilon, \\ \psi \text{ lässt sich auf } D^{\gamma^{-1}} \text{ zu stetiger Lineation fortsetzen} \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

**1.5.18 Lemma.** Seien  $P$  und  $P'$  Mannigfaltigkeiten. Für jedes  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  und jedes zulässige Paar  $(D, \varepsilon)$  in  $\text{Bild}(\psi)$  sind  $K(\psi, D, \varepsilon)$  und  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  Umgebungen von  $\psi$ .

Die Menge

$$\tilde{\mathcal{K}}_\psi := \left\{ \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \mid (D, \varepsilon) \text{ zulässiges Paar in } \text{Bild}(\psi) \right\}$$

bildet eine Umgebungssubbasis von  $\psi$ .

**Beweis.** Wegen der Lokalkompaktheit von  $P'$  finden wir in jeder offenen  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung  $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(d)$  eines Punktes  $d \in D$  eine kompakte Umgebung  $\mathring{K}(d)$ . Da  $D$  kompakt ist, finden wir eine endliche Menge  $E \subseteq D$  so, dass  $D \subseteq \bigcup_{d \in E} \mathring{K}(d)$ . Ferner liegen die Umgebungen  $K(d)$  im Bild von  $\psi$ , denn wegen  $\varepsilon < \frac{1}{5}r$  gilt  $\text{Bild}(\psi) \supseteq \hat{D} \supseteq \bigcup_{d \in D} K_{\frac{\varepsilon}{2}}(d)$ . Die Lineation  $\psi$  ist offen, folglich ist  $(K(d))^{\psi^{-1}}$  kompakt. Also gilt  $\psi \in \bigcap_{d \in E} \llbracket (K(d))^{\psi^{-1}}, K_{\frac{\varepsilon}{2}}(d) \rrbracket \subseteq K(\psi, D, \varepsilon)$  und  $K(\psi, D, \varepsilon)$  ist eine Umgebung von  $\psi$ .

Wegen  $K(\psi, D, \varepsilon) \subseteq \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  ist auch  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  eine Umgebung von  $\psi$ .

Sei  $\llbracket C, U \rrbracket$  ein Subbasiselement mit  $\psi \in \llbracket C, U \rrbracket$ . Wir wählen für alle  $c \in C^{\psi}$  zulässige Paare  $(D_c, \varepsilon_c)$  in  $U \cap \text{Bild}(\psi)$ , d.h.  $\hat{D}_c \subseteq U \cap \text{Bild}(\psi)$ . Da  $C$  kompakt ist, gibt es eine endliche Menge  $E \subseteq C^{\psi}$  so, dass  $\bigcup_{e \in E} \hat{D}_e^{\psi^{-1}} \supseteq C$ . Damit haben wir  $\psi \in \bigcap_{e \in E} K(\psi, D_e, \varepsilon_e) \subseteq \bigcap_{e \in E} \tilde{K}(\psi, D_e, \varepsilon_e) \subseteq \llbracket C, U \rrbracket$ . ■

**1.5.19 Lemma.** Seien  $P$  und  $P'$  Mannigfaltigkeiten. Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  und  $\varphi \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \in \tilde{\mathcal{K}}_\psi$ . Dann gilt  $\mathring{D}^{\psi^{-1}\varphi} \supseteq K_{r+\varepsilon}(m)$  und  $\tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi} \supseteq \overline{K}_{r+\varepsilon}(m)$ .

**Beweis.** Wir beweisen nur die zweite Inklusion, da aus dieser die erste folgt. Sei  $\varphi \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ ; dann gilt  $\text{dom}(\varphi) \supseteq \mathring{D}^{\psi^{-1}} \supseteq \tilde{D}^{\psi^{-1}}$ . Weil  $\psi$  und  $\varphi$  offene und stetige Injektionen sind ist  $\tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi}$  homöomorph zu einem Ball  $\mathbb{D}^n$  und  $(\partial \tilde{D})^{\psi^{-1}\varphi}$  ist homöomorph zu einer Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Da für alle  $x \in \mathring{D}^{\psi^{-1}}$  der Abstand  $d(x^\psi, x^\varphi)$  nicht größer als  $\varepsilon$  ist, liegt  $\tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi}$  in  $\overline{K}_{r+\varepsilon}(m)$  und folglich in  $\hat{D}$ . Also teilt  $(\partial \tilde{D})^{\psi^{-1}\varphi}$  den Ball  $\hat{D}$  in zwei Wegkomponenten (vgl. [64, Satz 11.7.6.b]). Für alle  $x \in \partial \tilde{D}$  gilt

$$d(x^{\psi^{-1}\varphi}, m) \geq d(x, m) - d(x, x^{\psi^{-1}\varphi}) \geq r + 3\varepsilon - \varepsilon = r + 2\varepsilon .$$

Wegen  $d(m, m^{\psi^{-1}\varphi}) \leq \varepsilon$ , liegt  $\tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi}$  in derjenigen Wegkomponente die  $m$  enthält. Folglich gilt  $\overline{K}_{r+\varepsilon}(m) \subseteq \tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi}$ . Denn gäbe es ein  $p \in \overline{K}_{r+\varepsilon}(m)$  mit  $p \notin \tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi}$ , dann hätte  $\hat{D} \setminus \tilde{D}^{\psi^{-1}\varphi}$  mehr als eine Wegkomponente - im Widerspruch dazu, dass ein Ball des  $\mathbb{R}^n$  den  $\mathbb{R}^n$  nicht teilen kann (vgl. [64, Satz 11.7.2]). ■

**1.5.20 Lemma.** Seien  $P$  und  $P'$  Mannigfaltigkeiten. Durch die Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$  werden Verknüpfen und Invertieren in  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \diamond, ^{-1})$  zu stetigen Abbildungen. Das Definitionsgebiet der Verknüpfung  $\text{dom}(\diamond)$  ist offen in  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \times \Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ .

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

**Beweis.** Sei  $(\alpha, \beta) \in \text{dom}(\diamond)$  und  $\alpha \diamond \beta \in \llbracket C, U \rrbracket \in \mathcal{S}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$ . Dann ist  $C \subset (\text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta))^{\alpha^{-1}} \subseteq \text{dom}(\alpha)$  und somit  $C^\alpha \subseteq \text{dom}(\beta)$ . Aufgrund der Lokalkompaktheit von  $P$  und  $P'$  und weil  $\text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta)$  offen in  $P'$  ist, finden wir für jedes  $y \in C^\alpha$  eine relativ kompakte offene Umgebung  $V_y$  mit  $\overline{V}_y \subseteq \text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta)$ . Wegen der Stetigkeit von  $\alpha$  ist  $C^\alpha$  kompakt. Folglich gibt es eine endliche Teilmenge  $E$  von  $C^\alpha$  so, dass  $C^\alpha \subseteq \bigcup_{l \in E} V_l =: V$ . Damit ist  $V$  eine relativ kompakte offene Teilmenge von  $P$ ,  $\llbracket C, V \rrbracket$  bzw.  $\llbracket \overline{V}, U \rrbracket$  sind offene Umgebungen von  $\alpha$  bzw.  $\beta$ , und es gilt  $\llbracket C, V \rrbracket \diamond \llbracket \overline{V}, U \rrbracket \subseteq \llbracket C, U \rrbracket$ . Also ist  $\diamond$  stetig, und  $\llbracket C, V \rrbracket \times \llbracket \overline{V}, U \rrbracket$  ist eine offene Umgebung von  $(\alpha, \beta)$ , die in  $\text{dom}(\diamond)$  liegt.

Um die Stetigkeit des Invertierens zu zeigen, wählen wir für ein  $\gamma \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  eine offene Umgebung von  $\gamma^{-1}$ . Wir wählen uns dafür eine kompakte Teilmenge  $C \subset P'$  und eine offene Teilmenge  $U \subset P$  so, dass  $\gamma^{-1} \in \llbracket C, U \rrbracket \in \mathcal{S}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$ . Für alle  $c \in C$  finden wir zulässige Paare  $(D_c, \varepsilon_c)$  in  $\text{Bild}(\gamma) \cap U^\gamma$ . Wir betrachten nun  $K(\gamma, D_c, \varepsilon_c)$ . Wegen Lemma 1.5.19 gibt es ein  $r_c > 0$  derart, dass für alle  $\varphi \in K(\gamma, D_c, \varepsilon_c)$  die Inklusion  $(D_c^{\gamma^{-1}})^\varphi \supseteq K_{r_c}(c)$  gilt. Da  $C$  kompakt ist, finden wir eine endliche Teilmenge  $E \subseteq C$  so, dass  $C \subseteq \bigcup_{c \in E} K_{r_c}(c)$ . Dann ist  $\mathcal{O} := \bigcap_{c \in E} K(\gamma, D_c, \varepsilon_c)$  eine Umgebung von  $\gamma$  und für alle  $\omega \in \mathcal{O}$  gilt  $D_c^{\gamma^{-1}} \subset \text{dom}(\omega)$  und  $\bigcup_{c \in E} D_c^{\gamma^{-1} \circ \omega} \supseteq \bigcup_{c \in E} K_{r_c}(c) \supseteq C$ . Folglich gilt  $\text{dom}(\omega^{-1}) \supseteq C$  und  $C^{\omega^{-1}} \subseteq \bigcup_{c \in E} D_c^{\gamma^{-1}} \subseteq U$ . Also liegt  $\omega^{-1}$  in  $\llbracket C, U \rrbracket$ . Da  $\omega \in \mathcal{O}$  beliebig gewählt war, erhalten wir  $\mathcal{O}^{-1} \subseteq \llbracket C, U \rrbracket$  und somit die Stetigkeit des Invertierens. ■

### 1.6. Lokalkompaktheit von $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')})$

**Generalvoraussetzung:** In diesem Kapitel seien die Punkt Mengen  $P$  und  $P'$  der stabilen Ebenen  $\mathcal{P}$  bzw.  $\mathcal{P}'$  Mannigfaltigkeiten. Wir führen die folgenden Beweise analog zu den Beweisen in dem Kapitel über die Topologie der Kollineationsgruppen in [29]. Dort beweist LÖWEN, dass die Automorphismen-Gruppe einer stabilen lp-Ebene lokalkompakt ist.

**1.6.1 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ ,  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \in \tilde{\mathcal{K}}_\psi$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)\right)^\mathbb{N}$ . Wenn  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $N \subseteq D^{\psi^{-1}}$  punktweise gegen  $\varphi : N \rightarrow P'$  konvergiert, dann ist  $\varphi$  injektiv. Für alle  $x \in N$  gilt  $d(x^\psi, x^\varphi) \leq \varepsilon$ .

**Beweis.** Wäre  $d(x^\psi, x^\varphi) > \varepsilon$ , dann gäbe es eine Umgebung  $K_\delta(x^\varphi)$  mit  $d(y, x^\varphi) > \varepsilon$  für alle  $y \in K_\delta(x^\varphi)$ . Somit wäre  $d(x^{\varphi_n}, x^\psi) > \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt. Das widerspräche  $\varphi_n \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ .

Angenommen es gäbe  $x \neq y \in N$  mit  $x^\varphi = y^\varphi$ . Wir wählen  $p^\psi \in K_{r-5\varepsilon}(m) \subset D$  mit  $d(p^\psi, x^\psi y^\psi) > 7\varepsilon$ . Dies ist möglich wegen der Injektivität von  $\psi$  (also  $x^\psi \neq y^\psi$ ) und Definition 1.5.16(v). Da alle Bilder von  $p$  unter  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in der kompakten Menge  $\widehat{D}$  liegen [1.5.16(ii)], gibt es eine Teilfolge von  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die auf  $p$  konvergiert. Da wir auf einen Widerspruch hinarbeiten, können wir zu dieser Teilfolge übergehen und  $p \in N$  annehmen. Wir betrachten das Verhalten von  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf der Zusammenhangskomponente  $X$  von  $p$  in der kompakten Menge  $(\overline{K}_{4\varepsilon}(p^\psi))^{\psi^{-1}}$ . Sei  $K := p^\varphi x^\varphi = p^\varphi y^\varphi$ , und seien

$$A := \{a \in X \mid K \cap \text{HP}(a^{\varphi_n}) \neq \emptyset\},$$



1.6. Lokalkompaktheit von  $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}})$

$$B := \{b \in X \mid K \cap \text{HP}(b^{\varphi_n}) = \emptyset\}.$$

Dabei bezeichnet  $\text{HP}(a^{\varphi_n})$  die Menge aller Häufungspunkte von  $(a^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $X$  die disjunkte Vereinigung von  $A$  und  $B$ . Wir werden im Folgenden zeigen, dass  $A$  und  $B$  offen in  $X$  und nicht leer sind.

(i) Für  $u \in X$  ist

$$T_u := \left\{ v \in X \mid z(u, v) := ux \cap vy \neq \emptyset, z(u, v) \in (\overline{K}_\varepsilon(u^\psi))^{\psi^{-1}} \wedge (\overline{K}_\varepsilon(v^\psi))^{\psi^{-1}} \right\}$$

eine Umgebung von  $u$  in  $X$ : Es gilt  $u \in T_u$ . Wegen der Stabilität und der Stetigkeit des Schneidens gibt es eine offene Umgebung  $U_{y^\psi u^\psi}$  von  $y^\psi u^\psi$  so, dass alle Geraden aus  $U_{y^\psi u^\psi}$  die Gerade  $x^\psi u^\psi$  schneiden und der Schnittpunkt in  $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(u^\psi)$  liegt. Da Verbinden eine stetige Operation ist, ist das Urbild  $U$  von  $U_{y^\psi u^\psi}$  unter der Abbildung „Verbinden mit  $y^\psi$ “ offen. Also ist  $U \cap K_{\frac{\varepsilon}{2}}(u^\psi)$  eine offene Umgebung von  $u^\psi$ , und  $(U \cap K_{\frac{\varepsilon}{2}}(u^\psi))^{\psi^{-1}}$  ist eine offene Umgebung von  $u$  in  $T_u$ .

(ii) Es gilt:  $v \in T_u \iff u \in T_v$ .

(iii)  $A$  ist offen: Wir zeigen, dass für  $u \in A$  die Umgebung  $T_u$  eine Teilmenge von  $A$  ist. Für  $v \in T_u$  ist  $z^\psi := (z(u, v))^\psi \in K_r(m)$  und  $d(z^\psi, x^\varphi) > \varepsilon$ . Denn  $T_u$  ist eine Teilmenge von  $(\overline{K}_{4\varepsilon}(p^\psi))^{\psi^{-1}}$ ; also ist  $d(p^\psi, v^\psi) \leq 4\varepsilon$ . Der Punkt  $p$  wurde so gewählt, dass  $d(p^\psi, x^\psi y^\psi) > 7\varepsilon$  ist. Folglich gilt nach der Dreiecksungleichung  $d(v^\psi, x^\psi) > 3\varepsilon$ . Da  $d(x^\psi, x^\varphi) \leq \varepsilon$  und  $d(v^\psi, z^\psi) \leq \varepsilon$  gilt, erhalten wir insgesamt  $d(z^\psi, x^\varphi) > \varepsilon$ .

Es gibt eine Teilfolge  $(\varphi_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$  von  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so, dass  $(u^{\varphi_i})_{i \in I}$  gegen ein  $u_0 \in K \setminus \{x^\varphi\}$  konvergiert. Diese Teilfolge existiert, weil alle  $u^{\varphi_i}$  in der kompakten Menge  $\widehat{D}$  liegen. Außerdem liegt  $u_0$  in  $K$ , weil  $u \in A$ . Die Folge  $(u^{\varphi_i})_{i \in I}$  konvergiert nicht gegen  $x^\varphi$ , denn mit der Dreiecksungleichung erhalten wir aus  $d(u^\psi, x^\psi) > 3\varepsilon$ ,  $d(u_0, u^\psi) \leq \varepsilon$  und  $d(x^\varphi, x^\psi) \leq \varepsilon$ , dass  $d(u_0, x^\varphi) > \varepsilon$  gilt. Wir wissen nun, dass  $(u^{\psi_i} x^{\psi_i})_{i \in I}$  gegen  $K$  konvergiert. Die Teilfolge  $(v^{\varphi_i})_{i \in I}$  besitzt einen Häufungspunkt  $v_0$ , da alle  $v^{\varphi_i}$  in der kompakten Menge  $\widehat{D}$  liegen. Läge dieser Häufungspunkt  $v_0$  von  $(v^{\varphi_i})_{i \in I}$  auf einer Gerade  $H := v_0 x^\varphi \neq K$ , so würden sich die Punkte  $z^{\varphi_i} = (u^{\varphi_i} x^{\varphi_i}) \wedge (v^{\varphi_i} y^{\varphi_i})$  bei  $K \cap H = x^\varphi$  häufen, im Widerspruch zu  $d(z^\psi, x^\varphi) > \varepsilon$ .

Insgesamt liegt also  $v$  in  $A$  und  $T_u$  ist eine Teilmenge von  $A$ .

(iv)  $B$  ist offen:

Für  $u \in B$  liegt  $v \in T_u$  nicht in  $A$  da sonst, wie in (iii) und (ii) gezeigt,  $u \in T_v \subseteq A$  wäre. Also ist  $T_u$  eine Teilmenge von  $B$ .

(v)  $A$  ist nicht leer, weil  $p$  in  $A$  liegt.

(vi)  $B$  ist nicht leer:

Sei  $c \in K_r(m)^{\psi^{-1}}$  mit  $d(c^\psi, K) > \varepsilon$  [1.5.16 (v)]. Wir können  $c \in N$  annehmen, denn ansonsten gehen wir zu einer Teilfolge über. Wegen  $d(c^\psi, K) > \varepsilon$  ist  $p^\varphi c^\varphi \neq K$ . Sei

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

$L := pc$ . Wenn wir nun ein  $q \in L \cap X$  mit  $d(p^\psi, q^\psi) \geq 3\varepsilon$  finden, dann liegt  $q$  in  $B$  und  $B$  ist nicht leer. Denn für  $q \in L \cap X$  liegen alle Häufungspunkte der Folge  $(q^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  in der Geraden  $p^\varphi c^\varphi$ . Ist  $q$  ein Element von  $A$ , dann gibt es einen Häufungspunkt  $q^\infty$  von  $(q^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , der in  $K$  liegt. Insgesamt ist  $q^\infty \in p^\varphi c^\varphi \cap K$  folglich  $q^\infty = p^\varphi$ . Weil für alle  $\varphi_n$  und für alle  $x \in N$  die Ungleichung  $d(x^{\varphi_n}, x^\psi) \leq \varepsilon$  gilt, folgt  $d(q^\psi, p^\psi) \leq 2\varepsilon$ .

Wir suchen nun ein  $q \in L \cap X$  mit  $d(p^\psi, q^\psi) \geq 3\varepsilon$ . Dazu betrachten wir die Zusammenhangskomponente  $Y$  von  $p^\psi$  in  $\overset{\circ}{K}_{4\varepsilon}(p^\psi) \cap L^\psi$ . Es ist  $Y \subseteq X^\psi \cap L^\psi$ . Außerdem ist  $d(Y \times \{p^\psi\}) := \{d(y, p^\psi) \mid y \in Y\} = [0, 4\varepsilon]$ . Denn  $d(Y \times \{p^\psi\})$  ist stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge, also zusammenhängend, und wäre  $4\varepsilon \notin d(Y \times \{p^\psi\})$  dann wäre  $Y \subseteq \overline{K}_t(p^\psi)$  für ein  $t < 4\varepsilon$  also wäre  $Y$  kompakt. Da  $L^\psi$  lokalzusammenhängend ist (vgl. [29, 1.11]) wäre  $Y$  auch offen in  $L^\psi$ . Wegen Definition 1.5.16(iv) ist  $Y \neq L^\psi$ . Somit wäre für ein  $w \notin L^\psi$  die Menge  $Y^{\vee w}$  offen und abgeschlossen in  $\mathcal{L}_w$ , im Widerspruch zum Zusammenhang von  $\mathcal{L}_w$  (vgl. [29, 1.14]). Das heißt es gibt ein  $q \in L \cap X$  mit  $d(p^\psi, q^\psi) \geq 3\varepsilon$  und  $B$  ist nicht leer.

Insgesamt haben wir einen Widerspruch zum Zusammenhang von  $X$ . Also ist  $\varphi$  injektiv und wegen Lemma 1.5.7 eine Lineation. ■

**1.6.2 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ ,  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \in \tilde{\mathcal{K}}_\psi$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)\right)^\mathbb{N}$ . Sei  $B$  eine offene Teilmenge von  $D$  und  $\{e_0^\psi, \dots, e_3^\psi\}$  ein  $\varepsilon$ -stabiles Viereck in  $B$ . Seien  $\{e_4, \dots, e_k\}$  so gewählt, dass die von  $\{e_0, \dots, e_k\}$  in  $B^{\psi^{-1}}$  erzeugte Unterebene  $N := \langle e_0, \dots, e_k \rangle$  eine volle Unterebene von  $B^{\psi^{-1}}$  ist. Konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise auf  $\{e_0, \dots, e_k\}$ , so konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise auf  $N$ .

**Beweis.** Seien

$$N_k := \{e_0, \dots, e_k\} \text{ und} \\ N_{r+1} := N_r \cup \left\{ x \in B^{\psi^{-1}} \mid \exists a, b, c, d \in N_r : x = ab \wedge cd \right\} .$$

Dann ist  $N = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} N_r$ .

Wir beweisen mittels Induktion über  $r$ , dass  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise auf  $N$  konvergiert.

Nach Voraussetzung konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $N_k$ .

Induktionsannahme:  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere auf  $N_r$ . Sei  $\varphi$  die Grenzfunktion von  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $N_r$ . Dann ist  $\varphi$  nach Lemma 1.6.1 und Lemma 1.5.7 eine injektive Lineation.

Induktionsschluss ( $r \rightarrow r+1$ ): Sei  $x \in N_{r+1}$ , dann gibt es  $a, b, c, d \in N_r$  mit  $x = ab \wedge cd$ . Nach Induktionsvoraussetzung konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\{a, b, c, d\}$ .

Wir zeigen zuerst  $(ab)^\varphi \neq (cd)^\varphi$ : Für  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  gibt es wegen der Stabilität Geraden  $L_i \in \mathcal{L}_{e_i}$  so, dass jede Gerade  $L_i$  die Geraden  $ab$  und  $cd$  in  $B^{\psi^{-1}}$  schneidet. Wir bezeichnen  $a_i := L_i \wedge ab$  und  $c_i := L_i \wedge cd$ . Da für alle  $n$  die Menge  $B^{\psi^{-1}\varphi_n}$  in der kompakten Menge  $\hat{D}$  liegt, gibt es eine Teilfolge von  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die auf  $\{a_i, c_i \mid i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$  konvergiert. Sei nun  $\tilde{\varphi}$  die Grenzfunktion dieser Teilfolge auf  $N_r \cup \{a_i, c_i \mid i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ . Dann ist  $\tilde{\varphi}$  wegen Lemma 1.6.1 und Lemma 1.5.7 eine injektive Lineation mit  $d(x^{\tilde{\varphi}}, x^\psi) \leq \varepsilon$  für alle



## 1.6. Lokalkompaktheit von $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} )$

$x \in \text{dom}(\tilde{\varphi})$ , die auf  $N_r$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Wäre nun  $(ab)^\varphi = (cd)^\varphi$ , dann würden, weil  $\tilde{\varphi}$  injektiv ist, für alle  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  die Geraden  $L_i^{\tilde{\varphi}}$  und  $(ab)^\varphi$  übereinstimmen. Das steht im Widerspruch zu  $d(x^\varphi, x^\psi) \leq \varepsilon$

Weil die Folge  $(x^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  in der kompakten Menge  $\widehat{D}$  enthalten ist, besitzt sie einen Häufungspunkt. Da  $(ab)^\varphi \neq (cd)^\varphi$  gilt, ist der Häufungspunkt der eindeutige Schnittpunkt  $(ab)^\varphi \wedge (cd)^\varphi =: x^\varphi$ . Also konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $N_{r+1}$ . ■

**1.6.3 Lemma.**  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  ist auf  $(K_r(m))^{\psi^{-1}}$  gleichgradig stetig.

**Beweis.** Angenommen die Behauptung wäre falsch. Dann existiert eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon))^{\mathbb{N}}$ , eine konvergente Folge  $w_n \rightarrow w \in (\mathring{K}_r(m))^{\psi^{-1}}$  und ein  $\eta > 0$  derart, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $d(w_n^{\varphi_n}, w^{\varphi_n}) > \eta$ .

Wir wählen eine volle Unterebene  $N$  von  $\mathring{D}^{\psi^{-1}}$ , die von endlich vielen Punkten  $e_0, \dots, e_k \in (K_r(m))^{\psi^{-1}}$  mit  $w = e_0$  erzeugt wird, in sich dicht ist und ein Viereck  $V$  in  $(K_r(m))^{\psi^{-1}}$  enthält, dessen Bild  $V^\psi$   $\varepsilon$ -stabil in  $K_r(m)$  ist (vgl. [29, 1.28 und 1.33] und Definition 1.5.16(vi)). Weil alle Bilder der Menge  $\{e_0, \dots, e_k\}$  unter den Lineationen  $\varphi_n$  in der kompakten Menge  $\widehat{D}$  liegen, können wir annehmen, dass  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\{e_0, \dots, e_k\}$  konvergiert und dass  $(w_n^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $z \neq \lim(w^{\varphi_n}) =: w^\varphi$  konvergiert. Der Punkt  $z$  liegt dann in  $\overline{K_{r+\varepsilon}(m)}$ . Nach Lemma 1.6.2 konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $N$  gegen eine injektive Lineation  $\varphi : N \rightarrow P'$  so, dass  $d(x^\psi, x^\varphi) \leq \varepsilon$  für alle  $x \in N$  erfüllt ist.

Wir zeigen erst, dass  $N^* := N^\varphi \cap K_{r+\varepsilon}(m)$  eine volle Unterebene von  $K_{r+\varepsilon}(m)$  ist: Weil  $N^*$  ein Viereck enthält, ist  $\varphi$  nicht kollabiert, und folglich ist  $N^*$  eine Unterebene. Sind  $L^\varphi, K^\varphi \in \mathcal{L}_{N^*}$  und  $L^\varphi \wedge K^\varphi = p \in K_{r+\varepsilon}(m)$ , dann haben  $L^{\varphi_n}$  und  $K^{\varphi_n}$  für große  $n$  einen Schnittpunkt in  $K_{r+\varepsilon}(m)$ . Da  $\varphi_n$  eine Lineation ist und nach Lemma 1.5.19 die Kugel  $K_{r+\varepsilon}(m)$  eine Teilmenge von  $\text{Bild}(\varphi_n)$  ist, folgt, dass  $L$  und  $K$  einen Schnittpunkt besitzen. Dieser liegt in  $N$ , weil  $N$  eine volle Unterebene ist und  $(K_{r+\varepsilon}(m))^{\varphi_n^{-1}} \subset (K_{r+2\varepsilon}^{\psi^{-1}}) \subset \mathring{D}^{\psi^{-1}}$ . Es folgt  $p \in N^*$ .

Die Unterebene  $N^*$  ist in sich dicht und nicht ausgeartet, weil  $N^*$  ein Viereck enthält und einen Häufungspunkt  $w^\varphi$  besitzt (vgl. [29, Lem.1.32]).

Wir wählen nun  $p \in (K_r(m))^{\psi^{-1}}$  mit  $K_{2\varepsilon}(p^\psi) \subseteq K_r(m)$  und  $d(p^\psi, w^\varphi z) > 5\varepsilon$  [Definition 1.5.16(v)]. Gegebenenfalls durch den Übergang zu einer Teilfolge können wir  $p \in N$  und somit  $p \in N^*$  erreichen. Dann ist  $d(p^\varphi, w^\varphi z) > 4\varepsilon$ . Damit sind  $p^\varphi, w^\varphi, z$  nicht kollinear und  $p^\varphi = p^\varphi w^\varphi \wedge p^\varphi z$ . Da  $N^*$  in sich dicht ist, gibt es eine Gerade  $L \in \mathcal{L}_w$  deren Bild  $L^\varphi$  existiert und so nahe bei  $p^\varphi w^\varphi$  liegt, dass  $z' := L^\varphi \wedge p^\varphi z \in K_\varepsilon(p^\varphi)$ . Dann ist  $d(z', w^\varphi) > 3\varepsilon$ . Wir definieren durch  $w'_n := pw_n \wedge L$  eine Folge  $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $w'_n \rightarrow w$ . Denn  $pw \wedge L = w$ , und wegen  $w_n \rightarrow w$ , konvergiert  $pw_n$  gegen  $pw$ . Und es gilt  $\lim(w_n^{\varphi_n}) = \lim(pw_n \wedge L)^{\varphi_n} = \lim((pw_n)^{\varphi_n} \wedge L^{\varphi_n}) = \lim(p^{\varphi_n} w_n^{\varphi_n} \wedge L^{\varphi_n}) = p^\varphi z \wedge L^\varphi = z'$ .

Damit haben wir  $3\varepsilon < d(z', w^\varphi) \leq d(z', w_n^{\varphi_n}) + d(w_n^{\varphi_n}, w_n^{\psi}) + d(w_n^{\psi}, w^\psi) + d(w^\psi, w^\varphi)$ . Der erste und der dritte Summand konvergieren gegen 0; die beiden anderen sind jeweils durch  $\varepsilon$  beschränkt. Das ist ein Widerspruch. ■

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

**1.6.4 Korollar.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ ,  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \in \tilde{\mathcal{K}}_\psi$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)\right)^\mathbb{N}$ . Wenn  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $K_r^{\psi^{-1}}$  punktweise konvergiert, dann konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dort auch stetig. Die Grenzfunktion  $\varphi : K_r^{\psi^{-1}} \rightarrow P'$  ist eine stetige injektive Lineation.

**Beweis.** Wegen der gleichgradigen Stetigkeit erhält man aus der punktweisen Konvergenz die stetige Konvergenz (vgl. auch [29, 2.7]). Aus der stetigen Konvergenz erhalten wir die Stetigkeit der Grenzfunktion [8, Lemma 1]. Wegen 1.6.1 ist  $\varphi$  injektiv. ■

**1.6.5 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ ,  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \in \tilde{\mathcal{K}}_\psi$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)\right)^\mathbb{N}$ . Wenn  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $K_r^{\psi^{-1}}$  bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')}$  gegen eine stetige injektive Lineation  $\varphi : K_r^{\psi^{-1}} \rightarrow P$  konvergiert, dann konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf dem Inneren von  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$  und auf  $D^{\psi^{-1}}$  stetig gegen eine Lineation  $\varphi$ , und  $\varphi|_{D^{\psi^{-1}}} \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ .

**Beweis.** (i)  $(\varphi_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise auf  $K_{r-\varepsilon}(m)$ :

Nach Lemma 1.5.19 liegt  $K_{r-\varepsilon}(m)$  in  $\text{Bild}(\varphi_n)$ . Sei  $x \in K_{r-\varepsilon}(m)$ ; dann sind für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Punkte  $x^{\varphi_n^{-1}}$  Elemente von  $(K_r(m))^{\psi^{-1}}$ . Denn wegen 1.5.19 gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Inklusion  $D^{\psi^{-1}\varphi_n} \supseteq K_r(m)$ . Sei also  $y \in D^{\psi^{-1}}$  mit  $y^{\varphi_n} = x$ . Wegen  $d(y^\psi, y^{\varphi_n}) \leq \varepsilon$  gilt dann  $y^\psi \in K_r(m)$  und somit ist  $x^{\varphi_n^{-1}} = y \in K_r(m)^{\psi^{-1}}$ .

Da  $\overline{K_r^{\psi^{-1}}}$  kompakt ist, besitzt jede Teilfolge von  $(x^{\varphi_n^{-1}})_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt  $a$ . Sei  $(x^{\varphi_{k_n}^{-1}})_{k \in T \subseteq \mathbb{N}}$  eine Teilfolge die gegen  $a$  konvergiert. Dann konvergiert die konstante Folge  $\left((x^{\varphi_{k_n}^{-1}})^{\varphi_{k_n}}\right)_{k \in T}$  gegen  $a^\varphi$ , weil die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach Voraussetzung (vgl. 1.5.6) stetig konvergiert. Da  $P$  hausdorffsch ist, folgt  $x = a^\varphi$ , und wegen der Injektivität von  $\varphi$  gilt  $a = x^{\varphi^{-1}}$ . Somit ist der Grenzwert eindeutig und alle Teilfolgen haben genau den Häufungspunkt  $x^{\varphi^{-1}}$ . Folglich konvergiert die Folge  $(x^{\varphi_n^{-1}})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x^{\varphi^{-1}}$ .

(ii) Jede Fortsetzung von  $\varphi$  zu einer Lineation ist injektiv, weil  $\varphi$  injektiv auf den Geraden ist, die  $K_r^{\psi^{-1}}$  treffen.

(iii)  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert stetig auf dem Inneren von  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$  gegen eine stetige Lineation  $\varphi$ :

Sei  $x_n \rightarrow x$  eine Folge im Inneren von  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$ . Wir wählen Punkte  $a_1, a_2 \in K_{r-\varepsilon}(m)$  so, dass  $x$  nicht auf der Geraden  $a_1^{\varphi^{-1}} \vee a_2^{\varphi^{-1}}$  liegt. Für  $i \in \{1, 2\}$  konvergieren die Geraden  $L_{i,n} := x_n a_i^{\varphi_n^{-1}}$  gegen  $L_i := x a_i^{\varphi^{-1}}$  [(i)]. Wir betrachten die Geraden  $K_{i,n} := L_{i,n}^{\varphi_n} = x_n^{\varphi_n} a_i$ . Nach Lemma 1.5.8 konvergiert die Folge  $(L_{i,n}^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $L_i^\varphi := A_i$ . Wir betrachten die konvergenten Folgen  $A_i^{\varphi_n^{-1}} \rightarrow A_i^{\varphi^{-1}}$  [(i)]. Da  $A_i^{\varphi^{-1}} = L_i$  gilt, ist  $A_1^{\varphi^{-1}} \wedge A_2^{\varphi^{-1}} = x$ . Weil  $x$  im Inneren von  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$  liegt, gibt es eine Umgebung  $U_x$  von  $x$ , die eine Teilmenge des Inneren von  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$  ist. Somit gibt es, weil das Definitionsgebiet des Schneidens offen ist, ein  $r \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \geq r$  das Tupel  $(A_1^{\varphi_n^{-1}}, A_2^{\varphi_n^{-1}})$  im Definitionsgebiet des Schneidens liegt und der Schnittpunkt

1.6. Lokalkompaktheit von  $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} )$

$A_1^{\varphi_n^{-1}} \wedge A_2^{\varphi_n^{-1}}$  in  $U_x$  liegt. Also liegt für alle  $n \geq r$  der Schnittpunkt  $A_1^{\varphi_n^{-1}} \wedge A_2^{\varphi_n^{-1}}$  in  $\text{dom}(\varphi_n)$ , und es gilt  $(A_1^{\varphi_n^{-1}} \wedge A_2^{\varphi_n^{-1}})^{\varphi_n} = A_1 \wedge A_2$ . Folglich besitzen die Geraden  $A_1$  und  $A_2$  einen Schnittpunkt  $y := A_1 \wedge A_2$ . Die Folge der Punkte  $(x_n^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}} = (K_{1,n} \wedge K_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen den Schnittpunkt  $L_1^\varphi \wedge L_2^\varphi = A_1 \wedge A_2 = y =: x^\varphi$ . Das heißt  $\varphi_n$  konvergiert stetig auf dem Inneren von  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\varphi_n)$ . Also ist  $\varphi$  stetig [8, Lemma 1]. Wegen 1.5.6 konvergiert die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}' )}$ .

(iv)  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert stetig auf  $D^{\psi^{-1}}$  gegen eine stetige Lineation  $\varphi$ :

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $x$  konvergente Folge in  $D^{\psi^{-1}}$ . Wir konstruieren die Geraden  $K_{i,n}, L_{i,n}, L_i$  und  $A_i$  wie in (iii) und betrachten die Folge  $(x^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $\varphi_n$  klein bezüglich  $\psi$  ist, liegen für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Punkte  $x^{\varphi_n}$  in  $\overline{K}_\varepsilon(x^\psi) \subset \widehat{D}$ . Weil  $\widehat{D}$  kompakt ist, haben alle Teilfolgen von  $(x^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt. Sei  $(x^{\varphi_r})_{r \in R \subset \mathbb{N}}$  eine gegen  $z$  konvergente Teilfolge. Da die Folge der Geraden  $(L_i^{\varphi_r})_{r \in R}$  gegen die Gerade  $L_i^\varphi = A_i$  konvergiert und der Punkt  $x^{\varphi_r}$  ein Element der Geraden  $L_i^{\varphi_r}$  ist, liegt  $z$  auf der Geraden  $A_i$  (vgl. [29, 1.5]). Weil  $\varphi$  nicht kollabiert ist, ist  $z$  der eindeutige Schnittpunkt von  $A_1$  und  $A_2$ , das heißt  $z =: x^\varphi$ . Nachdem nun die Existenz des Schnittpunktes  $z$  geklärt ist, schließen wir wie in (iii), dass die Folge  $(x_n^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x^\varphi$  konvergiert.

Insgesamt gilt mit Lemma 1.6.1  $\varphi \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ . ■

**1.6.6 Korollar.** Sei  $\mathcal{A} := (A, \mathcal{L}_A)$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ .

(i) Die Kompressions-Halbgruppe

$$\text{Komp}(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \{ \psi \in \text{End}(\mathcal{P}) \mid A^\psi \subseteq A \}$$

von  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{P}$  ist abgeschlossen in der Endomorphismen-Halbgruppe  $\text{End}(\mathcal{P})$ .

(ii) Die Halbgruppe derjenigen Lineationen aus  $\Psi(\mathcal{P})$ , die auf der Unterebene  $\mathcal{A}$  Endomorphismen induzieren:

$$\text{End}(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \{ \psi \in \Psi(\mathcal{P}) \mid A \subseteq \text{dom}(\psi), A^\psi \subseteq A \}$$

ist abgeschlossen in der Menge

$$\{ \psi \in \Psi(\mathcal{P}) \mid A \subseteq \text{dom}(\psi) \} .$$

**Beweis.** (i) Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{Komp}(\mathcal{A}, \mathcal{P}))^{\mathbb{N}}$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere, bezüglich der kompakt-offenen Topologie gegen eine Lineation  $\varphi \in \text{End}(\mathcal{P})$ . Für  $x \in A$  liegen alle  $x^{\varphi_n}$  in  $A$ ; folglich ist  $x^\varphi \in \overline{A}$ . Da  $\varphi$  offen ist, ist  $A^\varphi$  eine offene Umgebung von  $x^\varphi$  und  $B := A^\varphi \cap A \neq \emptyset$ . Wir betrachten nun  $\varphi|_{B^{\varphi^{-1}}} =: \tilde{\varphi}$  und  $\varphi_n|_A =: \tilde{\varphi}_n$  als Elemente von  $\Psi(\mathcal{A})$ . Dann konvergiert  $(\tilde{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\tilde{\varphi}$  bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{A})}$ , und nach Lemma 1.6.5 gilt  $\text{dom}(\tilde{\varphi}) \supseteq (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\tilde{\varphi}_n))^\circ = \overset{\circ}{A} = A$ . Das bedeutet  $\tilde{\varphi} \in \text{Komp}(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

- (ii) Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{End}(\mathcal{A}, \mathcal{P}))^{\mathbb{N}}$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere bezüglich  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P})}$  gegen eine Lineation  $\varphi \in \{\psi \in \Psi(\mathcal{P}) \mid A \subseteq \text{dom}(\psi)\}$ . Analog zu (i) erhält man  $A^\circ \subseteq A$ . ■

**1.6.7 Bemerkung.** Wenn  $A \neq P$  dann sind die Kompressions-Halbgruppe  $\text{Komp}(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ , die Halbgruppe  $\text{End}(\mathcal{A}, \mathcal{P})$  und die Menge  $\{\psi \in \Psi \mid \emptyset \neq (A \cap \text{dom}(\psi))^\psi \subseteq A\}$  nicht abgeschlossen in  $\Psi(\mathcal{P})$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi \in \text{Komp}(\mathcal{A}, \mathcal{P})$  und  $B$  eine zu  $A$  disjunkte Teilmenge von  $P$ . Dann konvergiert die konstante Folge  $\varphi^{\mathbb{N}}$  gegen  $\varphi|_B$ . Dies zeigt, dass keine der drei Mengen abgeschlossen in  $\Psi(\mathcal{P})$  ist. ■

**1.6.8 Satz.** Die Menge der partiellen Lineationen  $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} )$  ist lokalkompakt. Das heißt: Jedes  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  besitzt eine Umgebungsbasis kompakter Umgebungen.

**Beweis.** Die Menge  $\tilde{\mathcal{K}}_\Psi$  bildet nach Lemma 1.5.18 eine Umgebungssubbasis von  $\psi$ . Für  $\psi \in \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  wählen wir ein zulässiges Paar  $(D, \varepsilon)$  in  $\text{Bild}(\psi)$ , und wir zeigen im Folgenden, dass  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  kompakt ist. Nach Lemma 1.5.3 genügt es, Folgenkompaktheit zu beweisen. Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ . Wegen 1.5.16 (ii) liegt für alle  $y \in K_r^{\psi^{-1}}$  die Menge  $\{y^{\varphi_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  in der kompakten Menge  $\hat{D}$ . Deswegen ist mit Lemma 1.6.3 der Satz von Arzela-Ascoli (vgl. [3, XII.6.4]) anwendbar und liefert, dass  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  in der Menge  $P^{(K_r^{\psi^{-1}})}$  aller stetigen Abbildungen relativ kompakt ist. Die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat also einen Häufungspunkt  $\varphi$  in  $P^{(K_r^{\psi^{-1}})}$ . Nach Lemma 1.6.1 ist  $\varphi$  auf  $K_r^{\psi^{-1}}$  eine stetige injektive Lineation. Nach Lemma 1.6.5 konvergiert  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $D^{\psi^{-1}}$  stetig und bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_\Psi$  gegen eine Lineation, die wir ebenfalls mit  $\varphi$  bezeichnen, und es ist  $\varphi|_{\hat{D}^{\psi^{-1}}} \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ . ■

Weil die Teilräume, aus denen die topologische Summe  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$  zusammengesetzt ist, alle lokalkompakt sind, erhalten wir das folgende Korollar:

**1.6.9 Korollar.** Die Menge der partiellen Lineationen  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}} )$  ist lokalkompakt.

**1.6.10 Korollar.** Die Endomorphismen-Halbgruppe  $\text{End}(\mathcal{P})$  ist lokalkompakt.

**Beweis.** Sei  $\psi$  in  $\text{End}(\mathcal{P})$ . Für alle zulässigen Paare  $(D, \varepsilon)$  in  $P$  ist  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \cap \text{End}(\mathcal{P}) = K(\psi, D, \varepsilon) \cap \text{End}(\mathcal{P})$  eine kompakte Umgebung von  $\psi$  in  $\text{End}(\mathcal{P})$ . Denn jede Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $K(\psi, D, \varepsilon) \cap \text{End}(\mathcal{P})$  konvergiert nach Satz 1.6.8 und Lemma 1.6.5 auf  $P$  gegen eine Lineation  $\varphi \in \tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$ . Es gilt also  $\text{dom}(\varphi) = P$ , und somit ist  $\varphi \in K(\psi, D, \varepsilon) \cap \text{End}(\mathcal{P})$ . ■

**1.6.11 Bemerkung.** Die Spurtopologie von  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P})}$  auf  $\text{End}(\mathcal{P})$  ist die kompakt-offene Topologie.

Das Ergebnis von LÖWEN [29, Satz 2.9] erhalten wir nun als Korollar:

**1.6.12 Korollar.** Die Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  ist abgeschlossen in  $\text{End}(\mathcal{P})$  und lokalkompakt.

**Beweis.** Die Menge  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\text{End}(\mathcal{P})$ . Denn sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ , die gegen eine Lineation  $\varphi$  in  $\text{End}(\mathcal{P})$  konvergiert. Dann konvergiert nach Lemma 1.6.5(i) die Folge  $(\varphi_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\Psi(\mathcal{P})$  gegen  $\varphi^{-1}$ , und mit Lemma 1.6.5 gilt  $\varphi^{-1} \in \text{End}(\mathcal{P})$  und somit  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{P})$ . Insgesamt ist  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  als abgeschlossene Teilmenge einer lokalkompakten Menge lokalkompakt. ■

In dem Satz von LÖWEN [29, Satz 2.9] über die Lokalkompaktheit der Automorphismen-Gruppe wird nicht vorausgesetzt, dass die Punktmenge der stabilen Ebene eine Mannigfaltigkeit ist. Es stellt sich nun die Frage, ob Satz 1.6.8 auch dann richtig ist, wenn wir nicht voraussetzen, dass die Punktmenge eine Mannigfaltigkeit ist. Mit der Existenz von zulässigen Paaren fordern wir, dass es in jeder Umgebung eines Punktes kompakte Umgebungen gibt, die homöomorph zu einem kompakten Ball im  $\mathbb{R}^n$  sind. Die einzige Stelle an der wir genau diese Eigenschaft eines zulässigen Paares verwenden, ist im Beweis von Lemma 1.5.19. Hier verwenden wir, dass der Rand einer solchen Umgebung eine Sphäre ist, die den  $\mathbb{R}^n$  in genau zwei Wegkomponenten teilt, wohingegen jede zu der Umgebung homöomorphe Menge ein Ball ist, die den  $\mathbb{R}^n$  folglich nicht teilt. Nach [32, Theorem 2] ist bekannt, dass die Punktmenge einer stabilen lp-Ebene eine Homologie-Mannigfaltigkeit  $(n - hm_{\mathbb{Z}})$  ist. RAYMOND beweist in [49] zum Jordan-Brouwerschen Separationssatz analoge Separationssätze für verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten. Es wäre sicherlich interessant die folgenden Fragen zu klären:

- (i) Ist die Punktmenge einer stabilen lp-Ebene eine verallgemeinerte Mannigfaltigkeit im Sinne von RAYMOND [49, Definition 2]?
- (ii) Gibt es in einer stabilen lp-Ebene um jeden Punkt beliebig kleine offene Umgebungen  $U$  derart, dass der Rand von  $U$  eine verallgemeinerte Mannigfaltigkeit ist und dass jedes zu  $U$  homöomorphe Bild den umgebenden Raum nicht teilt? (Dass die Dimension dieses Randes um 1 kleiner ist als die Dimension von  $U$ , ist aus [58, 2.11] bzw. [59, Cor. 3] bekannt.)

Wenn beide Fragen mit „ja“ beantwortet werden können, könnten wir diese Mengen  $U$  anstatt  $D$  in Definition 1.5.16 verwenden und den Beweis von Lemma 1.5.19 analog führen. Andererseits sollten wir nicht vergessen, dass es weiterhin unklar ist, ob es überhaupt stabile lp-Ebenen gibt, deren Punktmenge keine Mannigfaltigkeit ist. Die Punktmenge von 2- bzw. 4-dimensionalen stabilen lp-Ebenen sind Mannigfaltigkeiten [29, 1.13].

Es gibt die Vermutung, dass jeder ENR, der die „disjoint disks property“ (DDP) besitzt eine Mannigfaltigkeit ist. Bisher ist aber nur bewiesen, dass ein ENR, welches eine Homologie- $n$ -Mannigfaltigkeit ist und die DDP erfüllt, genau dann eine Mannigfaltigkeit ist, wenn eine bestimmte Invariante [34, Theorem 2.6] den Wert 1 annimmt [34, Theorem 2.7]. Es ist unbekannt, ob es ein ENR gibt, bei dem diese Invariante nicht den Wert 1 annimmt. Wie LÖWEN in [32, Theorem 9] bewiesen hat, besitzen Punktraum, Geradenraum und Fahnenraum einer stabilen lp-Ebene die DDP. Vielleicht wäre es lohnenswert, obige Invariante für stabile Ebenen zu untersuchen.

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

### 1.7. Lokale Gruppen partieller Lineationen

Die Definition einer lokalen Gruppe ist in der Literatur nicht einheitlich. Zum Beispiel definiert PONTRYAGIN den Begriff in [46, Kap. 3 D, S.137] anders als wir in Anlehnung an [13, VII 1.20] im Folgenden definieren.

**1.7.1 Definition.** (i) Sei  $G$  eine nichtleere Menge, versehen mit einer Abbildung  $^{-1} : G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$  und einer partiellen binären Operation  $m$ . Für  $(a, b) \in \text{dom}(m)$  schreiben wir  $ab := m(a, b)$ . Dann nennt man  $(G, e, ^{-1}, m)$  eine lokale Gruppe, wenn folgendes erfüllt ist:

- Es gibt eine Teilmenge  $\Gamma \subseteq G$  so, dass  $e \in \Gamma$  und  $\Gamma \times \Gamma \subseteq \text{dom}(m)$ .
- Für alle  $a \in G$  gilt:  $(a, e), (e, a) \in \text{dom}(m)$  und  $ae = ea = a$ .
- Für alle  $a \in G$  gilt:  $(a, a^{-1}), (a^{-1}, a) \in \text{dom}(m)$  und  $aa^{-1} = a^{-1}a = e, (a^{-1})^{-1} = a$ .
- Wenn  $(a, b) \in \text{dom}(m)$  dann ist auch  $(b^{-1}, a^{-1}) \in \text{dom}(m)$  und  $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$ .
- Für  $a, b, c \in \Gamma$  mit  $ab, bc \in \Gamma$  gilt:  $(ab)c = a(bc)$ .

(ii) Ist  $G$  ein topologischer Raum, so heißt  $(G, e, ^{-1}, m)$  eine topologische lokale Gruppe, wenn  $(G, e, ^{-1}, m)$  eine lokale Gruppe ist und zusätzlich folgendes erfüllt ist:

- $\Gamma$  ist eine offene Teilmenge von  $G$ .
- $m$  ist stetig auf  $\Gamma \times \Gamma$ .
- $^{-1}$  ist stetig.
- $\{e\} \bar{\subseteq} G$ .

MALCEV definiert auf folgende Weise eine lokale Gruppe. Dabei ist mehr vorausgesetzt, als Assoziativität der Ordnung 3. Um diese Definition von der Definition 1.7.1 zu unterscheiden sprechen im Folgenden von einer lokalen Gruppe im Sinne von Malcev.

**1.7.2 Definition.** [4, §1] Eine lokale Gruppe im Sinne von Malcev besteht aus einer Menge  $L$  zusammen mit

- einer Teilmenge  $C_L$  von  $L \times L$  (verknüpfbare Paare),
- einer Abbildung  $m : C_L \rightarrow L$  (Multiplikation),  
(Wir schreiben für  $(a, b) \in C_L$  kurz  $ab$  statt  $m(a, b)$ .)
- einer Abbildung  $^{-1} : L \rightarrow L$  (Invertieren),
- einem Element  $e \in L$  (Einheit),

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:



## 1.7. Lokale Gruppen partieller Lineationen

- (i) Für alle  $a \in L$  sind  $(a, e)$  und  $(e, a)$  verknüpfbar und  $ae = ea = a$ .
- (ii) Für alle  $a \in L$  ist  $(a^{-1})^{-1} = a$ ,  $(a, a^{-1}) \in C_L$  und  $aa^{-1} = e$ .
- (iii) Wenn  $(a, b) \in C_L$ , dann ist auch  $(b^{-1}, a^{-1}) \in C_L$  und  $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$ .
- (iv) Für alle  $a, b, c \in L$  mit  $(a, b) \in C_L$  und  $(b, c) \in C_L$  sind die Produkte  $(ab)c$  und  $a(bc)$  entweder beide definiert und gleich oder beide nicht definiert.

**1.7.3 Definition.** [13, VII.1.21]. Wir nennen die beiden topologischen lokalen Gruppen  $G$  und  $H$  lokal isomorph, wenn es eine offene Umgebung  $U \subset G$  des Neutralelements  $e_G$  von  $G$ , eine offene Umgebung  $V \subset H$  des Neutralelements  $e_H$  von  $H$  und einen Homöomorphismus  $h : U \rightarrow V$  derart gibt, dass für alle  $a, b \in U$  gilt:  $ab$  liegt genau dann in  $U$ , wenn  $h(a)h(b)$  in  $V$  liegt und in diesem Fall  $h(a)h(b) = h(ab)$  gilt.

**1.7.4 Definition.** Sei  $B$  eine Menge von partiellen Bijektionen einer Menge  $M$ . Auf  $B$  wird folgendermaßen die Relation  $\omega$  („lokal gleich“) definiert:

$$\alpha \omega \beta \iff \exists \psi \in B : \text{dom}(\alpha) \cup \text{dom}(\beta) \subseteq \text{dom}(\psi), \psi|_{\text{dom}(\alpha)} = \alpha, \psi|_{\text{dom}(\beta)} = \beta$$

**1.7.5 Bemerkung.** Die Relation  $\omega$  ist auf  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  reflexiv und symmetrisch. Aber  $\omega$  ist im allgemeinen keine Äquivalenzrelation.

**Beweis.** Reflexivität und Symmetrie sind klar. Beispiel 4.6.1 ist ein Gegenbeispiel für die Transitivität. Die dort angegebene partielle Lineation der Moulton-Ebene  $v$  ist für  $p_1, p_2 < 0$  jeweils eine Restriktion der maximalen partiellen Lineationen  $\tilde{v}_{p_1}$  und  $\tilde{v}_{p_2}$  auf das Definitionsgebiet von  $v$ . Also gilt  $v \omega \tilde{v}_{p_1}$  und  $v \omega \tilde{v}_{p_2}$ . Für  $p_1 \neq p_2$  sind die Definitionsgebiete von  $\tilde{v}_{p_1}$  und  $\tilde{v}_{p_2}$  unterschiedlich. Da aber beide Definitionsgebiete maximal sind, gilt nicht  $\tilde{v}_{p_1} \omega \tilde{v}_{p_2}$ . ■

Im Folgenden seien  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  stabile Ebenen. Wir werden einige Beispiele von Ebenen kennen lernen, bei denen die Relation  $\omega$  auf der Menge der partiellen Lineationen  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  eine Äquivalenzrelation ist. In  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  gibt es immer Teilmengen  $\Phi$ , auf denen die Relation  $\omega$  eine Äquivalenzrelation ist, zum Beispiel die Menge derjenigen partiellen Lineationen, die Restriktionen von Einbettungen von  $\mathcal{P}$  nach  $\mathcal{P}'$  sind. Wir wollen nun auf  $\frac{\Phi}{\omega}$  eine partielle Multiplikation definieren. Dazu definieren wir zuerst ein Bedingung, die uns später die Wohldefiniertheit des Produkts sicherstellen wird.

**1.7.6 Definition.** Sei  $\Phi \subseteq \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ . Sei  $\omega$  eine Äquivalenzrelation auf  $\Phi$ .

- (i) Für  $[\alpha]_\omega \in \frac{\Phi}{\omega}$  definiere:

$$\text{dom}[\alpha]_\omega := \bigcup_{\tilde{\alpha} \in [\alpha]_\omega} \text{dom}(\tilde{\alpha}), \quad \text{Bild}[\alpha]_\omega := \bigcup_{\tilde{\alpha} \in [\alpha]_\omega} \text{Bild}(\tilde{\alpha}).$$

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

(ii) Sei  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ . Die Menge  $\frac{\Phi}{\omega}$  erfülle die Verknüpfungsvoraussetzung, d.h. für alle  $[\alpha]_{\omega}, [\beta]_{\omega} \in \frac{\Phi}{\omega}$  sei die folgende Bedingung erfüllt:

Für alle  $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha} \in [\alpha]_{\omega}$  und für alle  $\tilde{\beta}, \hat{\beta} \in [\beta]_{\omega}$  mit

$$\tilde{U} := \text{Bild}(\tilde{\alpha}) \cap \text{dom}(\tilde{\beta}) \neq \emptyset \neq \text{Bild}(\hat{\alpha}) \cap \text{dom}(\hat{\beta}) =: \hat{U}$$

gilt: Wenn ein  $\tilde{\gamma} \in \Phi$  existiert mit  $\tilde{\gamma}|_{\tilde{U}} = \tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}$ , dann gibt es ein  $\hat{\gamma} \in \Phi$  derart, dass  $\hat{\gamma}|_{\hat{U}} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$  und für alle  $\hat{\gamma} \in \Phi$  mit  $\hat{\gamma}|_{\hat{U}} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$  gilt  $\tilde{\gamma} \omega \hat{\gamma}$ .

Dann wird auf  $\frac{\Phi}{\omega}$  die partielle Verknüpfung  $m_{\omega}$  definiert: Das Paar

$$([\alpha]_{\omega}, [\beta]_{\omega}) \in \frac{\Phi}{\omega} \times \frac{\Phi}{\omega}$$

heißt verknüpfbar, wenn es partielle Lineationen  $\hat{\alpha} \in [\alpha]_{\omega}$  und  $\hat{\beta} \in [\beta]_{\omega}$  und  $\gamma \in \Phi$  gibt mit  $\text{Bild}(\hat{\alpha}) \cap \text{dom}(\hat{\beta}) =: U \neq \emptyset$  und  $\gamma|_U = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$ . Für ein verknüpfbares Paar  $([\alpha]_{\omega}, [\beta]_{\omega})$  definieren wir mit diesen Bezeichnungen

$$m_{\omega}([\alpha]_{\omega}, [\beta]_{\omega}) := [\alpha]_{\omega}[\beta]_{\omega} := [\gamma]_{\omega}.$$

**1.7.7 Lemma.** Sei  $\omega$  eine Äquivalenzrelation auf  $\Phi \subseteq \Psi(\mathcal{P})$ , und  $\frac{\Phi}{\omega}$  erfülle die Verknüpfungsvoraussetzung. Dann ist  $m_{\omega}$  wohldefiniert.

**Beweis.** Seien  $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha} \in [\alpha]_{\omega}, \tilde{\beta}, \hat{\beta} \in [\beta]_{\omega}$  mit  $\tilde{U} := \text{Bild}(\tilde{\alpha}) \cap \text{dom}(\tilde{\beta}) \neq \emptyset$  und  $\hat{U} := \text{Bild}(\hat{\alpha}) \cap \text{dom}(\hat{\beta}) \neq \emptyset$ . Da  $\frac{\Phi}{\omega}$  die Verknüpfungsvoraussetzung erfüllt, gilt: Wenn ein  $\tilde{\gamma} \in \Phi$  existiert mit  $\tilde{\gamma}|_{\tilde{U}} = \tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}$ , dann gibt es ein  $\hat{\gamma} \in \Phi$  derart, dass  $\hat{\gamma}|_{\hat{U}} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$  und für alle  $\hat{\gamma} \in \Phi$  mit  $\hat{\gamma}|_{\hat{U}} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$  gilt  $\tilde{\gamma} \omega \hat{\gamma}$ . Folglich ist  $[\alpha]_{\omega}[\beta]_{\omega} = [\tilde{\gamma}]_{\omega} = [\hat{\gamma}]_{\omega}$ . ■

**1.7.8 Definition.** Sei  $\Psi := \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ . Wir definieren die Menge der maximalen partiellen Lineationen:

$$\Psi_{max}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') := \left\{ \psi \in \Psi \mid \left( \exists \alpha \in \Psi \text{ mit } \text{dom } \alpha \supset \text{dom } \psi \text{ und } \alpha|_{\text{dom } \psi} = \psi \right) \implies \alpha = \psi \right\}$$

Statt  $\Psi_{max}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$  schreiben wir  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$ .

**1.7.9 Bemerkung.** Die Relation  $\omega$  ist auf  $\Psi_{max}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  immer eine Äquivalenzrelation, da die Relation  $\omega$  dort zur Gleichheit wird. Aber  $\Psi_{max}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  erfüllt nicht immer die Verknüpfungsvoraussetzung. Ein Beispiel hierfür ist das Beispiel 4.6.5 mit maximalen partiellen Lineationen der Moulton-Ebene.

**1.7.10 Bemerkung.** Auf der Automorphismen-Gruppe und der Endomorphismen-Halbgruppe stimmt die Verknüpfung  $m_{\omega}$  mit der Komposition überein.

Sei  $\omega$  ein Äquivalenzrelation auf  $\Psi(\mathcal{P})$ . Dann ist es möglich, die Menge der Äquivalenzklassen  $\frac{\Psi(\mathcal{P})}{\omega}$  mit der Menge  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  zu identifizieren:



**1.7.11 Bemerkung.** Jedes Element  $[\alpha]_{\infty} \in \frac{\Psi(\mathcal{P})}{\infty}$  enthält genau eine Lineation mit maximalem Definitionsgebiet, nämlich:

$$\bigcup_{\tilde{\alpha} \in [\alpha]_{\infty}} \tilde{\alpha} : \bigcup_{\tilde{\alpha} \in [\alpha]_{\infty}} \text{dom}(\tilde{\alpha}) \rightarrow P : x \mapsto x^{\tilde{\alpha}} \text{ für } x \in \text{dom } \tilde{\alpha}$$

Im Folgenden ist immer vorausgesetzt, dass  $\infty$  eine Äquivalenzrelation auf  $\Psi := \Psi(\mathcal{P})$  ist. Wir zeigen zuerst, dass  $\frac{\Psi}{\infty}$  eine lokale Gruppe ist, und untersuchen dann Eigenschaften der beiden kanonischen Topologien auf  $\frac{\Psi}{\infty}$ , nämlich die Quotiententopologie bzw. die Spurtopologie nach Identifikation mit  $\Psi_{max} := \Psi_{max}(\mathcal{P})$ .

**1.7.12 Satz.** Sei  $\infty$  eine Äquivalenzrelation auf  $\Psi$ . Wir definieren  $[\text{id}]_{\infty} := [\text{id}_P]_{\infty}$  und die Abbildung  $^{-1} : \frac{\Psi}{\infty} \rightarrow \frac{\Psi}{\infty} : [\alpha]_{\infty} \mapsto [\alpha^{-1}]_{\infty}$ . Dann ist  $(\frac{\Psi}{\infty}, [\text{id}]_{\infty}, ^{-1}, m_{\infty})$  eine lokale Gruppe.

**Beweis.** (i) Die Menge  $\frac{\Psi}{\infty}$  erfüllt die Verknüpfungsvoraussetzung: Seien  $[\alpha]_{\infty}, [\beta]_{\infty} \in \frac{\Psi}{\infty}$  und es gebe  $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha} \in [\alpha]_{\infty}$  und  $\tilde{\beta}, \hat{\beta} \in [\beta]_{\infty}$  mit

$$\tilde{U} := \text{Bild}(\tilde{\alpha}) \cap \text{dom}(\tilde{\beta}) \neq \emptyset \neq \text{Bild}(\hat{\alpha}) \cap \text{dom}(\hat{\beta}) =: \hat{U}.$$

Da  $\tilde{\alpha} \infty \hat{\alpha}$  und  $\tilde{\beta} \infty \hat{\beta}$  gilt, gibt es Lineationen  $\alpha' \in \Psi$  und  $\beta' \in \Psi$  mit

$$\begin{aligned} \text{dom}(\tilde{\alpha}) \cup \text{dom}(\hat{\alpha}) &\subseteq \text{dom}(\alpha') \text{ und } \alpha'|_{\text{dom}(\tilde{\alpha})} = \tilde{\alpha} \text{ und } \alpha'|_{\text{dom}(\hat{\alpha})} = \hat{\alpha} \text{ und} \\ \text{dom}(\tilde{\beta}) \cup \text{dom}(\hat{\beta}) &\subseteq \text{dom}(\beta') \text{ und } \beta'|_{\text{dom}(\tilde{\beta})} = \tilde{\beta} \text{ und } \beta'|_{\text{dom}(\hat{\beta})} = \hat{\beta}. \end{aligned}$$

Dann gilt  $\text{Bild}(\alpha') \supseteq \text{Bild}(\tilde{\alpha}) \cup \text{Bild}(\hat{\alpha})$ . Folglich ist  $\text{Bild}(\alpha') \cap \text{dom}(\beta') \neq \emptyset$ , und es gilt  $\alpha' \diamond \beta' \in \Psi$ . Außerdem ist  $\text{dom}(\alpha' \diamond \beta') \supseteq \text{dom}(\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}) \cup \text{dom}(\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta})$ . Insgesamt erhalten wir für einen Punkt  $x \in \text{dom}(\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta})$  folgende Gleichung:  $x^{\alpha' \diamond \beta'} = (x^{\alpha'})^{\beta'} = (x^{\tilde{\alpha}})^{\tilde{\beta}} = x^{\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}}$ . Folglich ist  $\alpha' \diamond \beta'|_{\text{dom}(\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta})} = \tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}$ . Auf gleiche Weise erhält man  $\alpha' \diamond \beta'|_{\text{dom}(\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta})} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$ . Deswegen gilt  $(\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}) \infty (\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta})$ . Sei nun  $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma} \in \Psi$  mit  $\tilde{\gamma}|_{\text{dom}(\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta})} = \tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}$  und  $\hat{\gamma}|_{\text{dom}(\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta})} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}$ . Dann gilt

$$\hat{\gamma} \infty (\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}) \infty (\alpha' \diamond \beta') \infty (\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta}) \infty \tilde{\gamma}.$$

Da  $\infty$  eine Äquivalenzrelation ist, folgt  $\hat{\gamma} \infty \tilde{\gamma}$ .

(ii) Für alle  $[\alpha]_{\infty} \in \frac{\Psi}{\infty}$  gilt  $[\alpha]_{\infty}[\alpha^{-1}]_{\infty} = [\text{id}_{\text{dom}(\alpha)}]_{\infty} = [\text{id}]_{\infty} = [\text{id}_{\text{Bild}(\alpha)}]_{\infty} = [\alpha^{-1}]_{\infty}[\alpha]_{\infty}$ , und  $[\alpha]_{\infty}[\text{id}]_{\infty} = [\alpha]_{\infty} = [\text{id}]_{\infty}[\alpha]_{\infty}$ .

Für  $\alpha, \beta \in \Psi$  mit  $\text{Bild}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta) \neq \emptyset$  gilt  $\text{Bild}(\beta^{-1}) \cap \text{dom}(\alpha^{-1}) \neq \emptyset$  und  $(\alpha \diamond \beta)^{-1} = \beta^{-1} \diamond \alpha^{-1}$ . Folglich ist für ein verknüpfbares Paar  $([\alpha]_{\infty}, [\beta]_{\infty}) \in \text{dom}(m_{\infty})$  auch  $([\beta^{-1}]_{\infty}, [\alpha^{-1}]_{\infty}) \in \text{dom}(m_{\infty})$ , und es gilt  $([\alpha]_{\infty}[\beta]_{\infty})^{-1} = [\beta^{-1}]_{\infty}[\alpha^{-1}]_{\infty}$ .

(iii) Mit  $\Gamma := \frac{\text{End}(P)}{\infty}$  gilt  $[\text{id}]_{\infty} \in \Gamma$  und  $\Gamma \times \Gamma \in \text{dom}(m_{\infty})$ . Da  $\text{End}(P)$  eine Halbgruppe ist, ist  $\Gamma$  generell assoziativ. ■

## 1. Partielle Lineationen stabiler Ebenen

**1.7.13 Lemma.** Sei  $\omega$  eine Äquivalenzrelation auf  $\Psi$ . Mit der Quotiententopologie erfüllt  $\frac{\Psi}{\omega}$  die Trennungseigenschaft  $T_1$ . Wenn  $P$  eine Mannigfaltigkeit ist, dann ist das Invertieren in  $\frac{\Psi}{\omega}$  eine stetige Abbildung.

**Beweis.** (i) Für  $[\psi]_{\omega} \in \frac{\Psi}{\omega}$  ist  $\{[\psi]_{\omega}\}$  abgeschlossen:

Wir betrachten die saturierte Menge  $\{[\psi]_{\omega}\}^{\omega^-}$  in  $\Psi$ . Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\{[\psi]_{\omega}\}^{\omega^-}$ , die bezüglich  $\mathcal{T}_{\Psi}$  gegen  $\varphi \in \Psi$  konvergiert. Dann gibt es eine nicht leere kompakte Menge  $D$  und ein  $m \in \mathbb{N}$  so, dass  $D \subseteq \bigcap_{n > m} \text{dom}(\varphi_n) \cap \text{dom}(\varphi)$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\varphi_n|_D = \left( \bigcup_{\tilde{\psi} \in [\psi]_{\omega}} \tilde{\psi} \right)|_D$  und damit  $\varphi_n|_D = \varphi|_D$ ; folglich ist  $\varphi \omega \psi$ .

(ii) Die Quotientenabbildung bzgl.  $\omega$  ist stetig. Wenn  $P$  eine Mannigfaltigkeit ist, erhalten wir mit Lemma 1.5.20 und der universellen Eigenschaft der Quotientenabbildung, dass das Invertieren in  $\frac{\Psi}{\omega}$  stetig ist. ■

**1.7.14 Bemerkung.** Es gibt Teilmengen  $\Phi \subseteq \Psi$  derart, dass  $\omega$  eine Äquivalenzrelation auf  $\Phi$  ist, aber die Quotientenabbildung  $\omega : \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\omega}$  nicht offen ist. Die Menge  $\Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)$  der linear induzierten partiellen Lineationen einer modifizierten hyperbolischen Ebene ist ein Beispiel dafür (vgl. 3.2.14).

Wir identifizieren nun  $\frac{\Psi}{\omega}$  mit  $\Psi_{max}$  und topologisieren  $\Psi_{max}$  mit der durch  $\mathcal{T}_{\Psi}$  induzierten Spurtopologie.

**1.7.15 Bemerkung.** Wenn  $P$  eine Mannigfaltigkeit ist, dann ist auf  $\Psi_{max}$  das Invertieren nach Lemma 1.5.20 stetig, weil  $\Psi_{max}$  die Spurtopologie trägt ([3, III.8.2]).

**1.7.16 Bemerkung.** Die Menge  $\frac{\Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)}{\omega}$  erfüllt zwar die Verknüpfungsvoraussetzung, aber betrachten wir  $\frac{\Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)}{\omega}$  als Teilmenge von  $\Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)$  und versehen  $\frac{\Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)}{\omega}$  mit der Spurtopologie, dann ist die Verknüpfung  $m_{\omega}$  nicht stetig, wie wir in 3.2.15 sehen.

**1.7.17 Lemma.** Wenn  $\Psi_{max}$  die Verknüpfungsvoraussetzung erfüllt, und  $\Psi_{max}$  mit der von  $\mathcal{T}_{\Psi}$  induzierten Spurtopologie versehen wird, dann ist das Definitionsgebiet der Verknüpfung  $m_{\omega}$  offen in  $\Psi_{max} \times \Psi_{max}$ .

**Beweis.** Auf  $\Psi_{max}$  ist  $\omega$  eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind einelementig. Wir identifizieren im Folgenden  $\Psi_{max}$  mit  $\frac{\Psi_{max}}{\omega}$ . Das Definitionsgebiet der Verknüpfung  $\diamond$  von  $\Psi$  ist offen in  $\Psi \times \Psi$  (Lemma 1.5.20). Die Offenheit des Definitionsgebietes von  $m_{\omega}$  folgt aus der Offenheit des Definitionsgebietes von  $\diamond$  in  $\Psi \times \Psi$ . Denn ein Tupel  $(\psi, \varphi)$  aus  $\Psi_{max} \times \Psi_{max}$  liegt, da die Äquivalenzklassen einelementig sind, nach Definition 1.7.6 genau dann im Definitionsgebiet von  $m_{\omega}$ , wenn  $(\psi, \varphi) \in \text{dom}(\diamond)$  und es ein  $\gamma \in \Psi_{max}$  gibt, mit  $\gamma|_{\text{dom}(\psi \diamond \varphi)} = \psi \diamond \varphi$ . Da  $\psi \diamond \varphi \in \Psi$  ist die zweite Bedingung immer erfüllt. Insgesamt gilt also  $\text{dom}(m_{\omega}) = \text{dom}(\diamond) \cap \Psi_{max} \times \Psi_{max}$ . ■

## 2. Stabile Dreiecke

Die wichtigste Aussage in diesem Kapitel ist der letzte Satz, die Verallgemeinerung des lokalen Fundamentalsatzes von LÖWEN auf graphenzusammenhängende stabile Unterdreiecke der Ebenen  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  für  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ . Zuerst werden wir stabile Dreiecke und deren partielle Lineationen kennen lernen. Dabei untersuchen wir, ob sich einige Aussagen, die für stabile Ebenen bekannt sind, auf stabile Dreiecke verallgemeinern lassen.

### 2.1. Grundlegendes zu stabilen Dreiecken

**2.1.1 Definition.** In einem Graphen  $(V, E)$  mit Vertexmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  ist der Abstand  $d(v, w)$  zweier Ecken  $v, w \in V$  die Länge des kürzesten Weges von  $v$  nach  $w$ . Wenn kein solcher Weg existiert, ist  $d(v, w) = \infty$ . Die Menge der Paare von Ecken aus  $V$  mit Abstand  $n \in \mathbb{N}_0$  bezeichnen wir mit  $D_n = d^{-1}(n)$ . Für eine Ecke  $v \in V$  sei  $D_n(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in D_n\}$ . Für eine Teilmenge  $W$  von  $V$  bezeichnet  $D_1(W)$  die Menge aller  $v \in V$  für die ein  $w$  in  $W$  existiert, so dass  $v \in D_1(w)$ . Die Taille eines Graphen ist die Länge des kleinsten Kreises im Graphen. Im Folgenden fassen wir  $E$  immer als Teilmenge von  $\{\{v, w\} \mid v, w \in V\}$  auf

Aus [51, 1.2] und [52, 1.3] übernehmen wir die folgende Definition eines stabilen Dreiecks:

**2.1.2 Definition.** Unter einem stabilen Dreieck verstehen wir einen bipartiten Graphen  $\mathcal{D} := (V, E)$  mit  $V = P \dot{\cup} \mathcal{L}$ , wobei  $V$  derart mit einer Topologie versehen ist, dass folgendes erfüllt ist:

- (i) Die Taille von  $(V, E)$  ist mindestens 6.
- (ii) Jeder Vertex  $v \in V$  hat mindestens drei Nachbarn.
- (iii) Die Menge  $D_2 \subset V^2$  ist offen in  $V^2$ .
- (iv) Die Abbildung  $f : D_2 \rightarrow V^3 : (a, c) \mapsto (a, B, c)$ , wobei  $(a, B, c)$  der eindeutige Weg von  $a$  nach  $b$  ist, ist stetig.

Ist  $V$  lokalkompakt, hausdorffsch und von positiver endlicher topologischer Dimension, so nennen wir  $\mathcal{D}$  ein stabiles lph-Dreieck. Wir sprechen von einem zusammenhängenden stabilen Dreieck, wenn der Graph zusammenhängend ist.

Statt  $(V, E)$  schreiben wir im Folgenden  $(P, \mathcal{L}, E)$ .

Aus [55, 92.18] folgt, dass die Topologie eines stabilen lph-Dreiecks nicht diskret ist. Eine stabile Ebene  $(P, \mathcal{L})$  ist ein stabiles Dreieck. Dabei gilt  $D_2 \cap P^2 = P^2$  und  $D_2 \cap \mathcal{L}^2 = \text{dom } \wedge$ . Sei  $f_1$  die Komposition von  $f$  mit der Projektion auf die zweite Komponente. Für eine stabile Ebene  $(P, \mathcal{L})$  gilt  $f_1|_{P^2} = \vee$  und  $f_1|_{\mathcal{L}^2} = \wedge$ . Ein stabiles Dreieck  $(P, \mathcal{L}, E)$  ist eine stabile Ebene, wenn  $D_2 \cap P^2 = P^2$  gilt. Der Anschauung wegen nennen wir auch in einem stabilen Dreieck  $(P, \mathcal{L}, E)$  das Element  $f_1(p, q)$  Verbindungsgerade von  $p$  und  $q$ , wenn  $(p, q) \in D_2 \cap P^2$ , und Schnittpunkt, wenn  $(p, q) \in D_2 \cap \mathcal{L}^2$  gilt.

## 2. Stabile Dreiecke

Aus [52, 2.13] folgt, dass die Taille eines stabilen Dreiecks den Wert 6 annimmt. Um den Umgang mit stabilen Dreiecken zu üben, beweisen wir hier diese Aussage.

**2.1.3 Bemerkung.** *In jedem stabilen Dreieck gibt es Dreiecke.*

**Beweis.** Sei  $(a, B, c)$  ein Weg im stabilen Dreieck  $(V, E)$ . Wegen 2.1.2(iii) gibt es offene Umgebungen  $U_a$  und  $U_c$  von  $a$  bzw.  $c$  derart, dass  $U_a \times U_c \subset D_2$ . Aus 2.1.2(ii) erhalten wir, dass es ein  $E \in D_1(a)$  gibt, mit  $B \neq E$ . Wegen 2.1.2(iii) und da die Abbildung  $f_1$  stetig ist, finden wir Umgebungen  $U_B$  und  $U_E$  von  $B$  bzw.  $E$  so, dass  $U_B \times U_E \subset D_2$  ist und das Bild von  $U_B \times U_E$  unter  $f_1$  in  $U_a$  liegt. Wir wählen nun ein  $x \in f_1(U_B \times U_E)$ . Dann gibt es ein  $L \in U_E \cap D_1(x)$ . Da der Abstand von  $L$  und  $B$  zwei ist, ist  $(L, f_1(L, B), B, c, f_1(c, x), x)$  ein Dreieck. ■

In einem stabilen Dreieck ist die Menge der Punkte, die adjazent zu einer Geraden sind, nicht unbedingt eine abgeschlossene Menge, wie uns das folgende Beispiel zeigt:

**2.1.4 Beispiel.** *Wir betrachten die affine Ebene  $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L})$  und die Inzidenzstruktur  $\mathcal{D} = (\mathbb{R}^2, \tilde{\mathcal{L}})$  mit der Elementrelation als Inzidenzrelation. Die Geradenmenge  $\tilde{\mathcal{L}}$  entsteht aus der Geradenmenge  $\mathcal{L}$ , indem die Menge der Geraden mit Steigung Null durch die Menge  $\{\tilde{L}_{0,y} \mid y \in \mathbb{R}\}$  mit  $\tilde{L}_{0,y} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  ersetzt wird. Die Inzidenzstruktur  $\mathcal{D}$  ist offensichtlich ein stabiles Dreieck, aber die Punktmenge einer Geraden mit Steigung Null ist nicht abgeschlossen.*

Aus [52, 2.7c] erhalten wir den ersten Teil der folgenden Aussage.

**2.1.5 Lemma.** *Sei  $(P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles lph-Dreieck. Sei  $U$  eine nicht leere offene Teilmenge von  $P$ . Dann ist  $D_1(U)$  offen in  $\mathcal{L}$ . Außerdem gibt es keine Gerade  $L \in \mathcal{L}$  mit  $U \subset D_1(L)$ .*

**Beweis.** Wir nehmen an, es gäbe eine nicht leere offene Menge  $U$  und eine Gerade  $L$  mit  $U \subset D_1(L)$ . Sei  $p \in U$ . Da  $D_1(p)$  aus mindestens drei Elementen besteht, gibt es in  $D_1(p)$  eine Gerade  $M \neq L$ . Da  $D_2$  offen und  $f_1$  stetig ist, gibt es Umgebungen  $U_M$  und  $U_L$  von  $M$  bzw.  $L$  derart, dass  $U_M \times U_L \subset D_2$  und  $f_1(U_M \times U_L) \subset U$  gilt. Insbesondere liegt der Schnitt von den Elementen aus  $U_L$  mit  $M$  in der Punktmenge der Geraden  $L$ . Da  $M \neq L$  folgt  $U_L = \{L\}$ . Nach [51, 2.9] erhalten wir daraus, dass  $\mathcal{L}$  diskret ist. Das ist ein Widerspruch. ■

**2.1.6 Lemma.** *Sei  $(P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles lph-Dreieck. Sei  $U$  eine nicht leere offene Teilmenge von  $P$ . Sei  $\mathcal{V}$  eine offene Teilmenge von  $D_1(U)$  so, dass  $U$  eine Teilmenge von  $D_1(\mathcal{V})$  ist. Dann ist  $(U, \mathcal{V}, E^*)$  mit  $E^* := \{\{p, L\} \mid p \in U, L \in \mathcal{V}, \{p, L\} \in E\}$  ein stabiles lph-Dreieck.*

**Beweis.** Die Taille von  $(U, \mathcal{V}, E)$  ist mindestens 6, da es sich um eine Unterstruktur von  $(P, \mathcal{L}, E)$  handelt.

Jeder Vertex hat mindestens drei Nachbarn: Sei  $v \in U$ , dann existiert eine Gerade  $L \in \mathcal{V}$  so, dass  $L \in D_1(v)$  ist. Nach 2.1.5 ist  $\mathcal{V}$  offen in  $\mathcal{L}$ . Nach [51, 2.9] ist  $D_1(v)$  nicht diskret, also ist  $\mathcal{V} \cap D_1(v)$  offen in  $D_1(v)$  und es gibt mindestens drei verschiedenen Geraden in  $D_1(v) \cap \mathcal{V}$ .

Sei  $M \in \mathcal{V}$ . Dann ist  $M \in D_1(U)$  und es gibt ein  $u \in U$  so, dass  $M \in D_1(u)$  ist. Wie eben erhalten wir eine offene Umgebung von  $M$  in  $\mathcal{V}$  und mindestens drei Nachbarn von  $M$ . Die Menge  $D_2$  in  $(U, \mathcal{V}, E)$ , das heißt die Menge  $d^{-1}(2)|^{(U^2 \cup \mathcal{V}^2)}$ , ist offen in  $U^2 \cup \mathcal{V}^2$ . Das folgt aus der Offenheit von  $D_1(\mathcal{V})$  und  $D_1(U)$  (2.1.5), denn es gilt

$$\begin{aligned} d^{-1}(2)|^{(U^2 \cup \mathcal{V}^2)} &= \{(u_1, u_2) \in U^2 \mid \exists V \in \mathcal{V} : u_1, u_2 \in D_1(V), u_1 \neq u_2\} \\ &\quad \cup \{(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^2 \mid \exists u \in U : V_1, V_2 \in D_1(u), V_1 \neq V_2\} \\ &= U \times U \setminus \{(u, u) \mid u \in U\} \cap D_1(\mathcal{V}) \cup \mathcal{V} \times \mathcal{V} \setminus \{(V, V) \mid V \in \mathcal{V}\} \cap D_1(U). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von  $f|_{(U, \mathcal{V}, E)}$  folgt aus der Stetigkeit von  $f$ . Da  $U$  und  $\mathcal{V}$  offen sind, ist die Spurtopologie auf  $U \cup \mathcal{V}$  lokalkompakt und hausdorffsch und besitzt positive endliche Dimension. ■

Nimmt man in 2.1.6 eine beliebige offene Teilmenge von  $D_1(U)$ , so erhält man nicht immer ein stabiles Dreieck:

**2.1.7 Beispiel.** Sei  $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L})$  die affine Ebene über  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{(0,0)})$  kein stabiles Dreieck, weil  $(0, 0)$  keine Nachbarn hat.

Man findet aber in einer solchen Struktur immer ein stabiles Dreieck:

**2.1.8 Lemma.** Sei  $(P, \mathcal{L}, E)$  stabiles lph-Dreieck. Sei  $U$  eine nicht leere offene Teilmenge von  $P$  und  $\mathcal{V}$  eine nicht leere offene Teilmenge von  $D_1(U)$ . Dann gibt es eine offene Teilmenge  $W$  von  $U$  so, dass  $(W, \mathcal{V}, E)$  ein stabiles lph-Dreieck ist.

**Beweis.** Da  $\mathcal{V}$  nicht leer ist, gibt es ein  $V \in \mathcal{V}$  und somit auch ein  $u \in U$  so, dass  $V \in D_1(u)$  ist. Da  $\mathcal{V}$  offen ist, ist  $D_1(\mathcal{V})$  nach 2.1.5 offen in  $P$ . Wegen  $u \in D_1(\mathcal{V}) \cap U$  ist dieser Schnitt nicht leer. Also ist  $(D_1(\mathcal{V}) \cap U, \mathcal{V}, E)$  nach 2.1.6 ein stabiles lph-Dreieck. ■

Aus einem stabilen Dreieck  $(P, \mathcal{L}, E)$  erhalten wir, da die Definition symmetrisch in  $P$  und  $\mathcal{L}$  ist, durch Vertauschen von  $P$  und  $\mathcal{L}$  das stabile Dreieck  $(\mathcal{L}, P, E)$ . Somit folgen aus den obigen Aussagen die dualen Aussagen.

## 2.2. Lineationen stabiler Dreiecke

**2.2.1 Definition.** Seien  $\mathcal{G} := (P, \mathcal{L}, E)$  und  $\mathcal{G}' := (P', \mathcal{L}', E')$  bipartite Graphen. Eine Abbildung  $\varphi : P \cup \mathcal{L} \rightarrow P' \cup \mathcal{L}'$  mit  $P^\varphi \subseteq P'$  und  $\mathcal{L}^\varphi \subseteq \mathcal{L}'$  heißt Lineation von  $\mathcal{G}$ , wenn  $\varphi$  ein Graphenmorphismus ist. Das heißt, für  $(p, L) \in P \times \mathcal{L}$  gilt: Ist  $p$  adjazent zu  $L$ , dann ist auch  $p^\varphi$  adjazent zu  $L^\varphi$ . Wir nennen eine Lineation  $\varphi$  von  $\mathcal{G}$  injektiv, wenn  $\varphi|_P$  und  $\varphi|_{\mathcal{L}}$  injektiv sind.

Eine Lineation einer stabilen Ebene heißt injektiv, wenn sie auf der Punktmenge injektiv ist, denn nach [65, Lem 3] ist jede nicht kollabierte, auf der Punktmenge injektive Lineation einer stabilen Ebene auch injektiv auf der Geradenmenge. Dies ist im Allgemeinen für stabile Dreiecke nicht richtig, wie wir in den folgenden Beispielen sehen:

## 2. Stabile Dreiecke

**2.2.2 Beispiel.** (i) Wir betrachten die reelle affine Ebene  $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_2\mathbb{R})$ . Seien

$$P_> := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \quad \text{und} \quad P_< := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\} .$$

Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{A}_2\mathbb{R}_> = (P_>, (\mathcal{L}_2\mathbb{R})_{P_>}) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_2\mathbb{R}_< = (P_<, (\mathcal{L}_2\mathbb{R})_{P_<})$$

die linke bzw. die rechte offene Halbebene von  $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$ . Wir betrachten das stabile Dreieck  $\mathcal{D} := \mathcal{A}_2\mathbb{R}_< \cup \mathcal{A}_2\mathbb{R}_>$  bei dem die Geraden der rechten und linken Seite nicht identifiziert werden. Die Identität auf der Punktmenge induziert eine Lineation  $\text{id} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}_2\mathbb{R}$ . Diese ist injektiv auf den Punkten, aber nicht injektiv auf der Geradenmenge.

(ii) Ein Beispiel mit einem zusammenhängenden stabilen Dreieck:

Wir betrachten  $\tilde{\mathcal{D}} := (P, \mathcal{L})$  mit

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq y \leq 3\} \quad \text{und} \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_2\mathbb{R} \setminus \bigcup_{-3 \leq y \leq 3} \mathcal{L}_{(0,y)} \\ &\cup \left\{ \{(x, ax + y) \mid x > 0\}, \{(x, ax + y) \mid x < 0\} \mid -3 < y < 3, a \in \mathbb{R} \right\} . \end{aligned}$$

In einer affinen Ebene ist die Geradenmenge eines Büschels eine abgeschlossene Menge. Deswegen ist nach 2.1.6 der Graph  $\tilde{\mathcal{D}} := (P, \mathcal{L}_2\mathbb{R} \setminus (\mathcal{L}_{(0,-3)} \cup \mathcal{L}_{(0,3)}))$  betrachtet als Unterstruktur von  $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$  ein stabiles Dreieck. Jeder Punkt und jede Gerade in  $\tilde{\mathcal{D}}$  besitzt eine Umgebung, die ganz in das stabile Dreieck  $\mathcal{D}$  eingebettet werden kann. Folglich ist  $\tilde{\mathcal{D}}$  ein stabiles Dreieck. Die Identität auf der Punktmenge  $\text{id} : P \rightarrow \mathbb{R}^2$  induziert eine stetige, auf der Punktmenge injektive Lineation, die auf der Geradenmenge nicht injektiv ist.

Bei stabilen Ebenen ist jede stetige nicht injektive Lineation lokal konstant oder kollabiert [65, Lem 3]. Das ist im Allgemeinen bei stabilen Dreiecken nicht richtig:

**2.2.3 Beispiel.** (i) Die Beispiele 2.2.2 sind Beispiele für stetige Lineationen, die nicht injektiv auf der Geradenmenge und auch nicht kollabiert sind. Betrachtet man die dualen Dreiecke, erhält man Beispiele von Lineationen, die weder injektiv auf der Punktmenge, noch kollabiert, noch lokal konstant sind.

(ii) Dies ist ein Beispiel, dass eine stetige Lineation auf einem stabilen Dreieck nicht injektiv auf Punkt und Geradenmenge sein kann und trotzdem nicht kollabiert ist:

Wir betrachten das stabile Dreieck  $\mathcal{D} := \mathcal{A}_2\mathbb{R}_< \cup \mathcal{A}_2\mathbb{R}_>$  aus Beispiel 2.2.2, dann ist

$$\varphi : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & x > 0 \\ (-x, y) & x < 0 \end{cases}$$

eine stetige nicht kollabierende Lineation von  $\mathcal{D}$ , die weder injektiv auf der Punktmenge, noch injektiv auf der Geradenmenge ist.



Die beiden folgenden Aussagen sind für stabile Ebenen schon bekannt.

**2.2.4 Lemma.** (Erweiterung von [65, Lem. 4]) Seien  $\mathcal{D} = (P, \mathcal{L}, E)$  und  $\mathcal{D}' = (P', \mathcal{L}', E')$  stabile lph-Dreiecke. Seien  $(p, q) \in P^2 \cap D_2$  und sei  $L = f_1(p, q)$ . Sei  $r \in D_2(p)$  mit  $L \neq M := f_1(p, r)$ . Sei  $\pi$  eine stetige Lineation von  $\mathcal{D}$  nach  $\mathcal{D}'$  mit  $p^\pi \neq q^\pi$  und  $r^\pi = q^\pi$ . Dann besitzt  $p$  so eine Umgebung  $U$ , dass  $\pi|_U$  kollabiert ist. Genauer: Es gilt  $U^\pi \subset D_1(L^\pi)$ .

**Beweis.** Weil  $P'$  hausdorffsch und  $\pi$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $V$  von  $p$  so, dass  $q^\pi \notin V^\pi$  ist. Wegen 2.1.2(iii) und 2.1.2(iv) gibt es eine Umgebung  $U \subseteq V$  von  $p$  derart, dass  $f_1(M, f_1(u, q)) \in V$  für alle  $u \in U$  gilt; insbesondere gilt  $(u, q) \in D_2$  und  $(M, f_1(u, q)) \in D_2$ . Das heißt die Verbindungsgerade eines Punktes  $u \in U$  mit  $q$  schneidet die Gerade  $M$  innerhalb der Umgebung  $V$ . Wir betrachten nun  $u \in U$ . Dann gilt  $u^\pi \in U^\pi \subset V^\pi$ . Folglich gilt  $u^\pi \neq q^\pi$  und  $(u^\pi, q^\pi) \in D_2 \cap (P')^2$ . Da  $r^\pi = q^\pi$  ist, gilt  $M^\pi = (f_1(p, r))^\pi = f_1(p^\pi, r^\pi) = L^\pi$ . Für  $s := f_1(M, f_1(u, q))$  gilt folglich  $s^\pi \in D_1(L^\pi)$  aber  $s^\pi \in V^\pi \not\subset q^\pi$ . Also erhalten wir

$$u^\pi \in D_1(f_1(u, q))^\pi = D_1(f_1(s, q))^\pi = D_1(f_1(s^\pi, q^\pi)) = D_1(L^\pi) .$$

Folglich ist  $\pi|_U$  kollabiert. ■

**2.2.5 Lemma.** (Erweiterung von [65, Lem. 5]) Seien  $\mathcal{D} = (P, \mathcal{L}, E)$  und  $\mathcal{D}' = (P', \mathcal{L}', E')$  stabile lph-Dreiecke. Sei  $\pi$  eine stetige Lineation von  $\mathcal{D}$  nach  $\mathcal{D}'$ . Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$  und  $W$  eine offene Umgebung von  $z \in P$  mit  $W \cap U = \emptyset$  und  $U \times W \subset D_2$ . Außerdem gebe es ein  $L \in \mathcal{L}'$  so, dass  $U^\pi \subset D_1(L)$  und  $W^\pi \cap D_1(L) = \emptyset$  gilt. Dann ist die Restriktion  $\pi|_U$  lokal konstant.

**Beweis.** Seien die Punkte  $u \neq v$  in  $U$  so gewählt, dass  $u \in D_1(f_1(z, v))$  gilt. Zu jedem  $v \in U$  finden wir ein solches  $u$ , denn ansonsten wäre  $U \cap D_1(f_1(z, v)) = \{v\}$  und nach [51, 2.9] wäre dann  $P$  diskret. Es gilt

$$u^\pi = f_1((f_1(z, v))^\pi, L) = f_1(f_1(z^\pi, v^\pi), L) = f_1((f_1(z, u))^\pi, L) = v^\pi .$$

Wir wählen  $y \in W \setminus D_1(f_1(z, v))$ . Da  $D_2$  offen und  $f_1$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $V$  von  $v$  derart, dass für alle  $\tilde{u} \in V$  die Verbindungsgerade  $f_1(\tilde{u}, y)$  die Gerade  $f_1(z, v)$  innerhalb von  $U$  schneidet. Sei  $s = f_1(f_1(\tilde{u}, y), f_1(z, v))$  dieser Schnittpunkt. Dann folgt aus obigen Überlegungen  $s^\pi = v^\pi$ . Da  $y \in W$  ist, gilt

$$\tilde{u}^\pi = (f_1(\tilde{u}, y))^\pi \cap U^\pi = (f_1(f_1(\tilde{u}, y), f_1(z, v)))^\pi = s^\pi = v^\pi .$$

Also ist  $\pi|_V$  konstant. ■

**2.2.6 Lemma.** Sei  $\mathcal{D} = (P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles lph-Dreieck. Sei  $\pi$  eine injektive Lineation von  $\mathcal{D}$ , welche auf  $P$  stetig sei. Dann ist auch  $\pi|_{\mathcal{L}}$  stetig.

## 2. Stabile Dreiecke

**Beweis.** Sei  $\mathcal{U}_{L^\pi}$  eine offene Umgebung von  $L^\pi$  für eine Gerade  $L \in \mathcal{L}$ . Seien  $p, q \in D_1(L)$  verschiedene Punkte. Dann sind  $p^\pi$  und  $q^\pi$  verschiedene Punkte in  $D_1(L^\pi)$ , weil  $\pi$  eine injektive Lineation ist. Da  $D_2$  offen ist und  $f_1$  stetig ist, gibt es offene Umgebungen  $U_{p^\pi}$  und  $U_{q^\pi}$  von  $p^\pi$  bzw.  $q^\pi$  derart, dass  $U_{p^\pi} \times U_{q^\pi} \subset D_2$  und  $f_1(U_{p^\pi} \times U_{q^\pi}) \subset \mathcal{U}_{L^\pi}$  gilt. Wegen der Stetigkeit von  $\pi$  sind  $U_p := U_{p^\pi}^{-1}$  und  $U_q := U_{q^\pi}^{-1}$  offene Umgebungen von  $p$  bzw.  $q$  und es gilt  $U_p \times U_q \subset D_2$ . Nach 2.1.5 sind folglich  $D_1(U_p)$  und  $D_1(U_q)$  offene Umgebungen von  $L$  und es gilt

$$\begin{aligned} (D_1(U_p) \cap D_1(U_q))^\pi &= \{(f_1(x, y))^\pi \mid (x, y) \in U_p \times U_q\} \\ &= \{f_1(x^\pi, y^\pi) \mid (x, y) \in U_p \times U_q\} = f_1(U_{p^\pi} \times U_{q^\pi}) \subset \mathcal{U}_{L^\pi} . \end{aligned}$$

Es folgt die Stetigkeit von  $\pi|_{\mathcal{L}}$ . ■

**2.2.7 Lemma.** Sei  $\mathcal{D} := (P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles lph-Dreieck und sei  $\pi : P \rightarrow P$  eine injektive Abbildung. Dann gibt es höchstens eine Abbildung  $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  so, dass  $(\pi, \lambda)$  eine Lineation von  $\mathcal{D}$  ist.

**Beweis.** Da es in  $\mathcal{D}$  keine Zweiecke gibt, gibt es zu zwei Punkten  $p \neq q$ , die adjazent zu einer Geraden  $L$  sind, höchstens eine Gerade  $L' \in \mathcal{L}$ , die mit den Punkten  $p^\pi \neq q^\pi$  adjazent ist. ■

**2.2.8 Lemma.** Seien  $\mathcal{D} := (P, \mathcal{L}, E)$  und  $\mathcal{D}' := (P', \mathcal{L}', E')$  stabile lph-Dreiecke und sei  $\mathcal{D}$  zusammenhängend. Sei  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  eine stetige injektive Lineation. Sei  $p \in P$  und  $U$  eine offene Umgebung von  $p$ . Dann ist für alle  $x \in P$  die Lineation eindeutig durch ihr Verhalten auf  $U$  festgelegt.

**Beweis.** Sei  $x \in P$ . Dann existiert ein endlich langer Weg  $(q_0, L_1, q_1, L_2, \dots, q_{n-1}, L_n, q_n)$  von  $q_0 := p$  nach  $q_n := x$ .

Für alle  $q_i$  mit  $i > 0$  gibt es Umgebungen  $U_{q_i}$  und  $U_{q_{i-1}}$  von  $q_i$  bzw.  $q_{i-1}$  so, dass für alle  $s \in U_{q_i}$  das Bild  $s^\varphi$  aus den Bildern von  $U_{q_{i-1}}$  konstruiert werden kann: Wir betrachten den Weg  $(q_{i-1}, L_i, q_i)$ . Dann gibt es wegen der Offenheit von  $D_2$  und der Stetigkeit von  $f_1$  offene Umgebungen  $U_{q_{i-1}}$ ,  $U_{L_i}$  und  $U_{q_i}$  von  $q_{i-1}$ ,  $L_i$  bzw.  $q_i$  so, dass  $U_{q_{i-1}} \times U_{q_i} \subset D_2$  und  $f_1(U_{q_{i-1}} \times U_{q_i}) \subset U_{L_i}$  gilt. Sei  $(r, s) \in U_{q_{i-1}} \times U_{q_i}$ . In  $U_{q_{i-1}}$  gibt es einen Punkt  $r' \notin D_1(f_1(r, s))$  und Punkte  $r \neq t \in D_1(f_1(r, s)) \cap U_{q_{i-1}}$  und  $r' \neq t' \in D_1(f_1(r', s)) \cap U_{q_{i-1}}$ , da sonst die Vertexmenge  $P \cup \mathcal{L}$  nach [51, 2.9] diskret wäre. Also erhalten wir

$$s^\pi = (f_1(f_1(r, t), f_1(r', t'))^\pi = f_1(f_1(r^\pi, t^\pi), f_1((r')^\pi, (t')^\pi)) .$$

Da  $\pi$  eine injektive Lineation ist, ist dieser Schnittpunkt eindeutig bestimmt. Der Weg von  $p$  nach  $x$  ist endlich lang. Folglich können die Umgebungen  $U_{q_0}, U_{L_1}, \dots, U_{L_n}, U_{q_n}$  sukzessive gefunden werden, so dass für alle  $i$  das Bild von  $U_{q_i}$  aus  $U_{q_{i-1}}$  konstruiert werden kann. ■

Durch Vertauschen der Rollen von Geraden und Punkten im letzten Lemma erhalten wir Folgendes.



## 2.3. Addition und Multiplikation in einem stabilen Dreieck

**2.2.9 Korollar.** Seien die Voraussetzungen wie in 2.2.8 und  $\mathcal{W}$  eine offene nicht leere Menge in  $\mathcal{L}$ , dann ist die Lineation  $\varphi$  eindeutig durch ihr Verhalten auf  $\mathcal{W}$  festgelegt.

**2.2.10 Satz.** Seien  $\mathcal{D} := (P, \mathcal{L}, E)$  und  $\mathcal{D}' := (P', \mathcal{L}', E')$  stabile lph-Dreiecke und sei  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  eine stetige injektive Lineation. Dann ist  $\pi$  eine offene Abbildung.

**Beweis.** Sei  $U$  eine relativ kompakte offene Umgebung von  $r \in P \cup \mathcal{L}$ . Da  $\pi$  stetig und injektiv ist, induziert  $\pi$  einen Homöomorphismus von der kompakten Menge  $\overline{U}$  auf  $\overline{U}^\pi$ . Also sind  $U$  und  $U^\pi$  homöomorph. Wegen der Gebietsinvarianz (vgl. [51, 4.14]) ist auch  $U^\pi$  offen in  $P' \cup \mathcal{L}'$ . ■

## 2.3. Addition und Multiplikation in einem stabilen Dreieck

ROSEHR definiert in [51] eine lokale Addition und eine lokale Subtraktion auf einem k-stabilen Weg-Raum. Diese Addition und Multiplikation wollen wir benutzen um eine Verallgemeinerung des lokalen Fundamentalsatzes von LÖWEN für stabile Unterdreiecke von projektiven Ebenen über  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$  zu beweisen. Wegen der besseren Anschauung verwenden wir im Folgenden für Schnittpunkte und Verbindungsgeraden in einem stabilen Dreieck  $(P, \mathcal{L}, E)$  die selbe Schreibweise wie in einer stabilen Ebene: Wir schreiben  $f_1(p, q) = pq$  für  $(p, q) \in P^2 \cap D_2$  und  $f_1(L, M) = L \wedge M$  für  $(L, M) \in \mathcal{L}^2 \cap D_2$ .

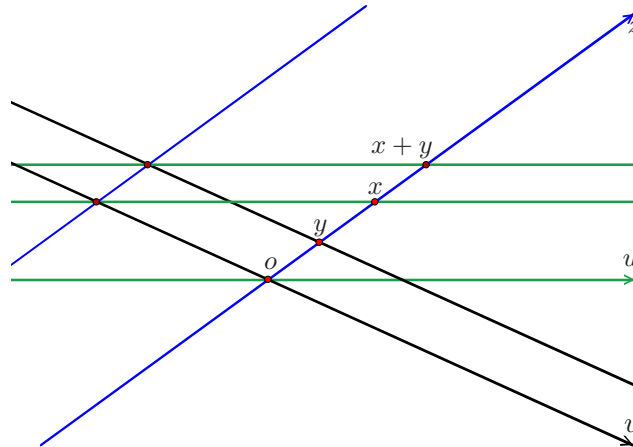


Abbildung 1: Addition in einem stabilen Dreieck

**2.3.1 Lemma.** [51, 8.1] Sei  $(P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles Dreieck und sei  $V \in \mathcal{L}$ . Wir wählen einen Punkt  $o$  auf  $V$  und zwei weitere Geraden  $V_1$  und  $V_3$  in  $D_1(o)$ . Wir wählen Punkte  $o \neq u \in D_1(V_1)$ ,  $o \neq v \in D_1(V_3)$  und  $o \neq z \in D_1(V)$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $o$  in  $D_1(V)$  so, dass folgende Abbildung auf  $U^3$  definiert ist:

$$\pi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto ((x_1 u \wedge x_2 v) z \wedge x_3 v) u \wedge V$$

Für  $x, y \in U$  sei  $x + y := \pi(x, o, y)$  und  $x - y := \pi(x, y, o)$ . Dann sind die Operationen  $\pm : U \times U \rightarrow D_1(V)$  stetig und für  $x, y \in U$  gilt  $o + x = x + o = x$ . Sind  $x$  und  $y$  so gewählt, dass  $x + y \in U$  und  $x - y \in U$  ist, dann gilt  $(x + y) - y = (x - y) + y = x$ .

## 2. Stabile Dreiecke

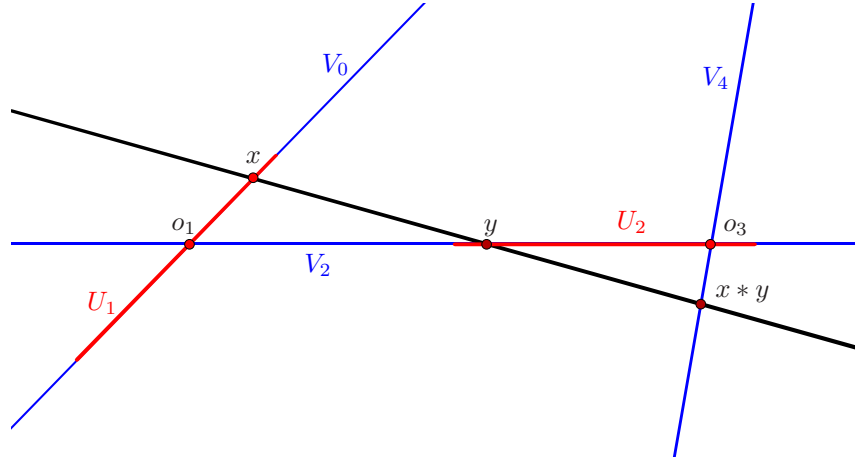


Abbildung 2: Konstruktion von  $x * y$  in einem stabilen Dreieck

ROSEHR zeigt in [51] dass man in einem  $k$ -stabilen Weg-Raum eine lokale Multiplikation definieren kann. Wir beschäftigen uns mit der lokalen Multiplikation in einem stabilen Dreieck.

**2.3.2 Lemma.** [51, 9.5] Sei  $\mathcal{D} = (P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles Dreieck. Sei  $(V_0, o_1, V_2, o_3, V_4)$  ein Weg mit  $o_i \in P$  und  $V_i \in \mathcal{L}$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U_1 \times U_2$  von  $(o_1, o_3)$  in  $(D_1(V_0) \times D_1(V_2))$  so, dass die Abbildung

$$* : U_1 \times U_2 \rightarrow D_1(V_4) : (x, y) \mapsto xy \wedge V_4$$

stetig ist und für alle  $(x, y) \in U_1 \times U_2$  gilt  $o_1 * y = x * o_3 = o_3$ .

In [51, 6.1] wird gezeigt, dass man mit Hilfe der Multiplikation  $*$  eine Multiplikation  $\cdot : U' \times U' \rightarrow U_1$  auf einer Teilmenge  $U'$  von  $U_1$  konstruieren kann. Wählen wir in 2.3.2 ein Element aus  $U_1$  und ein Element aus  $U_2$  fest, so ist nach [52, Prop 2.11] die Rechts- bzw. die Linksmultiplikation mit einem dieser Elemente eine stetige, offene und injektive Abbildung.

**2.3.3 Lemma.** [51, 11.1] Sei  $\mathcal{D} = (P, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles Dreieck. Sei  $(V_0, o, V_2, u, V_4)$  ein Weg in  $\mathcal{D}$  mit  $o, u \in P$  und  $V_i \in \mathcal{L}$ . Seien die Umgebungen  $U_i$  gewählt wie in 2.3.2. Sei  $(e, w) \in U_1 \times U_2$  gewählt mit  $o \neq e$  und  $u \neq w$ . Dann sind die Abbildungen

$$\alpha : U_1 \rightarrow D_1(V_4) : x \mapsto x * w \text{ und } \beta : U_2 \rightarrow D_1(V_4) : x \mapsto e * x$$

injektiv und stetig. Sei  $U' := \alpha^{-1}(\beta(U_2))$ .

Die Multiplikation

$$\cdot : U' \times U' \rightarrow U : (x, y) \mapsto \alpha^{-1}(x * \beta^{-1}(\alpha(y)))$$

ist stetig und besitzt  $o$  als Null,  $e$  als Einselement und hat keine Nullteiler.

### 2.3. Addition und Multiplikation in einem stabilen Dreieck

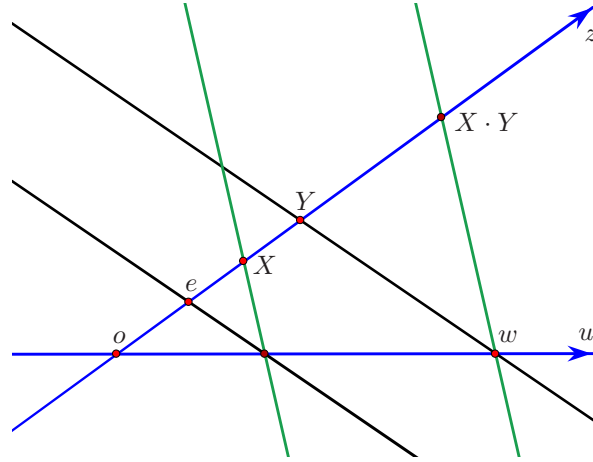


Abbildung 3: Multiplikation in einem stabilen Dreieck

Wir betrachten nun die Addition und die Multiplikation in der projektiven Ebene  $\overline{\mathcal{A}}_2\mathbb{F}$  über eine der Divisions-Algebren  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ , welche mithilfe des Cayley-Dickson Prozesses konstruiert werden (vgl. [55, 11.1]). Wir verwenden die in 3.1.9 dargestellte Schreibweise wie in [55, 12.1].

**2.3.4 Lemma.** Seien  $o := (0, 0)$ ,  $u := (0)$ ,  $z := (1)$ ,  $e := (1, 1)$  und  $v := (-\frac{1}{n})$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , Punkte der projektiven Ebene  $\overline{\mathcal{A}}_2\mathbb{F}$ . Wir identifizieren  $(x, x) \in oz$  mit  $x \in (\mathbb{F}, +, \cdot)$ . Außerdem definieren wir die Summe und das Produkt zweier Punkte  $X, Y \in oz$  wie in 2.3.1 bzw. 2.3.3:

$$\begin{aligned} w &:= ev \wedge ou \\ X + Y &:= ((Xu \wedge ov)z \wedge Yv)u \wedge oz \\ X \cdot Y &:= (((Yw \wedge uz)e \wedge ou)X \wedge uz)w \wedge oz . \end{aligned}$$

Dann stimmen diese Addition und diese Multiplikation mit der Addition und der Multiplikation der Divisions-Algebra  $\mathbb{F}$  überein.

**Beweis.** Es gelten

$$\begin{aligned} ev &= (1, 1) \vee (-\frac{1}{n}) = [-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}] , \\ ou &= (0, 0) \vee (0) = [0, 0] \text{ und} \\ w &= ev \wedge ou = [-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}] \wedge [0, 0] = (n+1, 0) . \end{aligned}$$

Seien  $X = (x, x)$  und  $Y = (y, y)$  Punkte der Geraden  $oz$ . Wir berechnen im Folgenden  $X \cdot Y$ . Es gilt

$$\begin{aligned} Yw &= (y, y) \vee (n+1, 0) = [\hat{s}, \hat{t}] , \text{ wobei} \\ \hat{s} &:= y(y - (n+1))^{-1} \text{ und} \\ \hat{t} &:= -\hat{s}(n+1) . \end{aligned} \tag{*}$$

## 2. Stabile Dreiecke

Denn aus  $y = \hat{s}y + \hat{t}$  und  $0 = \hat{s}(n+1) + \hat{t}$  folgt  $y = \hat{s}y - \hat{s}(n+1)$ . Folglich gilt  $\hat{s} = y(y - (n+1))^{-1}$  und  $\hat{t} = -\hat{s}(n+1)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} Yw \wedge uz &= (\hat{s}) \\ \text{und } (Yw \wedge uz)e &= (\hat{s}) \vee (1, 1) = [\hat{s}, 1 - \hat{s}] . \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$(Yw \wedge uz)e \wedge ou = [\hat{s}, 1 - \hat{s}] \wedge [0, 0] = (1 - \hat{s}^{-1}, 0) ,$$

denn aus  $(r, \hat{s}r + 1 - \hat{s}) = (q, 0)$  folgt  $\hat{s}q = -1 + \hat{s}$ . Folglich ist  $q = \hat{s}^{-1}(\hat{s} - 1) = 1 - \hat{s}^{-1}$ . Wir betrachten die Gleichungen  $x = s'x + t'$  und  $0 = s'(1 - \hat{s}^{-1}) + t'$  und erhalten  $x = s'x - s'(1 - \hat{s}^{-1}) = s'(x - 1 + \hat{s}^{-1})$ . Also gilt

$$\begin{aligned} ((Yw \wedge uz)e \wedge ou)X &= (1 - \hat{s}^{-1}, 0) \vee (x, x) = [s', t'] , \text{ wobei} \\ s' &= x(x - 1 + \hat{s}^{-1})^{-1} \text{ und} \\ t' &= -s'(1 - \hat{s}^{-1}) . \end{aligned} \tag{**}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} ((Yw \wedge uz)e \wedge ou)X \wedge uz &= (s') \text{ und} \\ (((Yw \wedge uz)e \wedge ou)X \wedge uz)w &= (s') \vee (n+1, 0) = [s', -s'(n+1)] , \end{aligned}$$

weil aus  $s'(n+1) + \tilde{t} = 0$  die Gleichung  $\tilde{t} = -s'(n+1)$  folgt. Wir erhalten das Ergebnis

$$(((Yw \wedge uz)e \wedge ou)X \wedge uz)w \wedge oz = (\tilde{q}, \tilde{q}) \text{ mit } \tilde{q} = (s' - 1)^{-1}(s'(n+1)) .$$

Denn aus  $(\tilde{r}, s'\tilde{r} - s'(n+1)) = (\tilde{q}, \tilde{q})$  folgt  $s'\tilde{q} - \tilde{q} = s'(n+1)$  und wir erhalten  $(s' - 1)\tilde{q} = s'(n+1)$ . Wenn  $\tilde{q} = xy$  gilt, ist die Behauptung richtig. Wir überprüfen das im Folgenden. Aus der Gleichung  $(\star)$  folgt  $\hat{s}^{-1} = (y - (n+1))y^{-1} = 1 - (n+1)y^{-1}$ . Wir setzen dieses Ergebnis in die Gleichung  $(**)$  ein und erhalten  $s' = x(x - (n+1)y^{-1})^{-1}$ . Es gilt außerdem  $(s' - 1)^{-1}s' = ((s')^{-1}(s' - 1))^{-1} = (1 - (s')^{-1})^{-1}$ . Da  $(n+1) \in \mathbb{R}$  ist, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= ((s' - 1)^{-1}s')(n+1) \\ &= (1 - (x - (n+1)y^{-1})x^{-1})^{-1}(n+1) \\ &= (1 - 1 + (n+1)y^{-1}x^{-1})^{-1}(n+1) \\ &= ((n+1)y^{-1}x^{-1})^{-1}(n+1) = xy . \end{aligned}$$

Das Ergebnis  $X + Y = (x + y, x + y)$  erhalten wir durch eine ähnliche Rechnung. Alternativ dazu kann man sich überlegen, dass die in 2.3.1 definierte Addition durch die Komposition von Translationen induziert wird und deswegen mit der Addition in  $\mathbb{F}$  übereinstimmt. ■

Mit diesen Hilfsmitteln werden wir den lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] verallgemeinern. Im Folgenden sei  $\mathcal{P}_2\mathbb{F} = (P_2\mathbb{F}, \mathcal{L}_2\mathbb{F})$  die projektive Ebene über der Divisionsalgebra  $\mathbb{F}$ . Zur Definition siehe 3.1.11 oder [55, 13.1] für  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  und [55, 16.1] für  $\mathbb{F} = \mathbb{O}$ .

### 2.3. Addition und Multiplikation in einem stabilen Dreieck

**2.3.5 Satz.** Sei  $\mathcal{D} := (P, \mathcal{L}, E)$  ein zusammenhängendes offenes stabiles Unterdreieck von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F} = (P_2\mathbb{F}, \mathcal{L}_2\mathbb{F})$  mit  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ . Das heißt  $P$  und  $\mathcal{L}$  sind offene Teilmengen von  $P_2\mathbb{F}$  bzw.  $\mathcal{L}_2\mathbb{F}$ . Sei  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}_2\mathbb{F}$  eine stetige injektive Lineation. Dann lässt sich  $\varphi$  eindeutig zu einem Automorphismus von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  erweitern.

**Beweis.** Nach 2.1.3 finden wir in  $\mathcal{D}$  einen Weg  $(z, V_0, o, V_2, u, V_4, z)$ , der ein Dreieck bildet. Wir betrachten zuerst den 2-Weg  $(V_0, o, V_2, u, V_4)$ . Wie in 2.3.2 gibt es Umgebungen  $U_1$  von  $o$  in  $V_0$  und  $U_2$  von  $u$  in  $V_2$  so, dass die in 2.3.2 definierte Abbildung

$$* : U_1 \times U_2 : D_1(V_4) : (x, y) \mapsto xy \wedge V_4$$

stetig ist. Wir betrachten  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  als  $\overline{\mathcal{A}}_2\mathbb{F}$  und können  $\overline{\mathcal{A}}_2\mathbb{F}$  wie in 3.1.9 so koordinatisieren, dass  $o = (0, 0)$ ,  $u = (0)$ ,  $z = (1)$  gilt und dass  $e = (1, 1)$  ein Element von  $U_1$  ist. Dann finden wir  $w \neq u$  in  $U_2$  derart, dass  $w = (1 + n, 0)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei  $v := e * w = ew \wedge V_4$ . Wir definieren Abbildungen

$$\alpha : U_1 \rightarrow D_1(V_4) : x \mapsto x * w \text{ und } \beta : U_2 \rightarrow D_1(V_4) : x \mapsto e * x$$

Sei  $U' := \alpha^{-1}(\beta(U_2))$ . Dann gilt  $e, o \in U'$ . Wir definieren auf  $U' \times U'$  die Multiplikation  $\cdot : (x, y) \mapsto \alpha^{-1}(x * \beta^{-1}(\alpha(y)))$  wie in 2.3.3. Dann ist  $\cdot$  stetig und besitzt  $o$  als Nullelement und  $e$  als Einselement.

Wir wollen nun auf einer Umgebung von  $o$  eine Addition wie in 2.3.1 definieren. In  $o$  gibt es die drei Geraden  $zo$ ,  $vo$  und  $uo$ . Es gibt eine Umgebung  $U$  so, dass folgende Abbildung auf  $U^3$  definiert ist:

$$\pi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto ((x_1u \wedge x_2v)z \wedge x_3v)u \wedge V_0$$

Die Addition  $p + q := \pi(p, o, q)$  und die Subtraktion  $p - q := \pi(p, q, o)$  sind für alle  $p, q \in U$  stetig. Diese Addition lässt sich in  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  auf alle Punkte der Geraden  $oz$  außer auf den Punkt  $z$  fortsetzen. Man erhält nach 2.3.4 auf  $\mathbb{F} \cong oz \setminus \{z\}$  die Addition der Divisionsalgebra  $\mathbb{F}$ . Die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  wirkt transitiv auf Vierecken [55, 23.6]. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\varphi$  das Viereck  $Q := \{e, o, u, v\}$  fixiert. Als Schnittpunkte von Fixgeraden sind damit auch  $w$  und  $z$  Fixpunkte. Für  $a, b \in U$  haben wir damit

$$\begin{aligned} a^\varphi + b^\varphi &= \pi(a^\varphi, o, b^\varphi) = ((a^\varphi u \wedge o v)z \wedge b^\varphi v)u \wedge V_0 \\ &= ((a^\varphi u^\varphi \wedge o^\varphi v^\varphi)z^\varphi \wedge b^\varphi v^\varphi)u^\varphi \wedge V_0^\varphi = (((a u \wedge o v)z \wedge b v)u \wedge V_0)^\varphi \\ &= (\pi(a, o, b))^\varphi = (a + b)^\varphi . \end{aligned}$$

Die Lineation  $\varphi$  respektiert die Verknüpfung  $*$ , denn für  $p \in U_1$  und  $q \in U_2$  gilt

$$p^\varphi * q^\varphi = p^\varphi q^\varphi \wedge V_4 = p^\varphi q^\varphi \wedge V_4^\varphi = (pq \wedge V_4)^\varphi = (p * q)^\varphi .$$

Da die beiden Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  Rechts- bzw. Linksmultiplikationen bezüglich der Verknüpfung  $*$  mit Fixpunkten von  $\varphi$  sind, vertauschen beide Abbildungen mit  $\varphi$ . Für  $p, q \in U'$  gilt damit

$$p^\varphi \cdot q^\varphi = \alpha^{-1}(p^\varphi * \beta^{-1}(\alpha(q^\varphi))) = (\alpha^{-1}(p * \beta^{-1}(\alpha(q))))^\varphi = (p \cdot q)^\varphi .$$

## 2. Stabile Dreiecke

Die Gerade  $oz$  ist eine Fixgerade von  $\varphi$ . Folglich induziert  $\varphi$  eine Abbildung  $\mathbb{F} \cap U \rightarrow \mathbb{F}$ . Da  $\varphi$  offen ist (vgl. 2.2.10), ist das Bild von  $\mathbb{F} \cap U$  offen in  $\mathbb{F}$ . Wie haben oben gezeigt, dass  $\varphi$  Addition und Multiplikation von Elementen aus  $U \cap U'$  respektiert. Somit ist  $\varphi$  ein lokaler Automorphismus der einfach zusammenhängenden Liegruppe  $(\mathbb{F}, +) \cong (\mathbb{R}^k, +)$  und lässt sich eindeutig zu einem Automorphismus von  $(\mathbb{F}, +)$  erweitern (vgl. [15, S. 35 Prop. 1.5]).

In  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  kann die Multiplikation  $\cdot$  auf die Gerade  $oz \setminus \{z\}$  fortgesetzt werden. Nach 2.3.4 erhalten wir die Multiplikation der Divisionsalgebra  $\mathbb{F}$ . Da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi$  additiv und stetig und  $e^\varphi = e$  ist, ist  $\varphi$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung auf  $oz \cap U$ , die auf  $oz \setminus \{z\}$ , also auf  $\mathbb{F}$  fortgesetzt werden kann. Diese Fortsetzung von  $\varphi$  (wir schreiben dafür ebenfalls  $\varphi$ ) respektiert auch die Multiplikation in  $\mathbb{F}$ , denn für  $a, b \in \mathbb{F}$  finden wir  $r \in \mathbb{R}$  derart, dass  $ra, rb \in U'$ . Es gilt also

$$(a \cdot b)^\varphi = r^{-2}((ra) \cdot (rb))^\varphi = r^{-2}(ra)^\varphi \cdot (rb)^\varphi = a^\varphi \cdot b^\varphi .$$

Folglich induziert  $\varphi$  auf  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  eine Kollineation  $\psi \in \text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{F})$ , die das Viereck  $Q$  punktweise fixiert. Es gibt eine offene Umgebung  $U_w$  von  $w$  in  $P$  derart, dass alle Punkte aus  $U_w$  mit  $z$  und mit  $u$  verbindbar sind und all diese Verbindungsgeraden die Gerade  $V_0$  in  $U$  schneiden. Die Wirkung der Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  auf die Punkte  $U_w$  lässt sich allein aus der Wirkung der Abbildungen auf  $z$ ,  $u$  und den Punkten aus  $U$  konstruieren, da sich jeder Punkt als Schnittpunkt von zwei Geraden durch  $z$  bzw.  $u$  darstellen lässt. Folglich stimmen  $\varphi$  und  $\psi$  auf  $U_w$  überein. Jede Gerade aus  $D_1(U_w)$  ist adjazent zu mehr als einem Punkt aus  $U_w$ . Somit stimmen  $\varphi$  und  $\psi$  auch auf  $D_1(U_w)$  überein. Weil  $\mathcal{D}$  graphenzusammenhängend ist, ist die Fortsetzung von  $\varphi$  auf  $\mathcal{D}$  eindeutig bestimmt (vgl. 2.2.8). Also stimmen  $\psi$  und  $\varphi$  auf  $\mathcal{D}$  überein und  $\psi$  ist eine Fortsetzung von  $\varphi$  zu einem Automorphismus von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ . ■

**2.3.6 Korollar.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P_2\mathbb{F}$ . Sei  $\mathcal{V}$  eine offene Teilmenge von  $D_1(U)$  in  $\mathcal{L}_2$  derart gewählt, dass der bipartite Graph  $(U, \mathcal{V}, E)$  mit  $E = \{\{p, L\} \mid p \in L\}$  zusammenhängend ist. Sei  $\psi = (\psi_U, \psi_{\mathcal{V}}) : U \times \mathcal{V} \rightarrow P_2\mathbb{F} \times \mathcal{L}_2\mathbb{F}$  eine stetige injektive Lination. Dann lässt sich  $\psi$  eindeutig zu einem Automorphismus von  $\mathcal{P}_2$  erweitern.

**Beweis.** Wie in 2.1.8 gezeigt, gibt es in  $(U, \mathcal{L}, E)$  ein stabiles Unterdreieck auf dem  $\psi$  als Lination wirkt. Die eindeutige Fortsetzung zu einem Automorphismus ist mit 2.3.5 gesichert. ■

## 3. Beispiele

### 3.1. Ebenen mit relativem lokalem Fundamentalsatz

**3.1.1 Definition.** Sei  $\mathcal{P} := (P, \mathcal{L})$  eine stabile  $lp$ -Ebene. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$ . Wir sagen die Ebene  $\mathcal{U} := (U, \mathcal{L}_U)$  erfüllt in  $\mathcal{P}$  den relativen lokalen Fundamentalsatz, wenn es für alle  $\psi \in \Psi(\mathcal{U})$  eine Lineation  $\tilde{\psi} \in \Psi(\mathcal{P})$  gibt mit  $U \subseteq \text{dom}(\tilde{\psi}) \cap \text{Bild}(\tilde{\psi})$  und  $\tilde{\psi}|_{\text{dom}(\psi)} = \psi$ .

Beispiele von stabilen Ebenen, in denen jede Unterebene den relativen lokalen Fundamentalsatz erfüllt, sind Ebenen, in denen jede partielle Lineation von einem Automorphismus der Ebene induziert wird. Die Frage, ob es ein anderes Beispiel einer Unterebene einer stabilen Ebene derart gibt, dass die Unterebene den relativen lokalen Fundamentalsatz erfüllt ist offen. Wir werden im Folgenden sehen, dass auf der Menge der partiellen Lineationen einer solchen Unterebene die Relation  $\omega$  (vgl. Definition 1.7.4) eine Äquivalenzrelation ist.

**3.1.2 Satz.** Sei  $\mathcal{P} := (P, \mathcal{L})$  eine stabile  $lp$ -Ebene und  $\mathcal{U} := (U, \mathcal{L}_U)$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P}$ . Die Ebene  $\mathcal{U}$  erfülle in  $\mathcal{P}$  den relativen lokalen Fundamentalsatz. Dann ist  $\omega$  auf  $\Psi(\mathcal{U})$  eine Äquivalenzrelation und  $(\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}, m_\omega)$  eine lokale Gruppe.

**Beweis.** Um zu sehen, dass  $\omega$  in diesem Fall eine Äquivalenzrelation ist, ist nach 1.7.5 nur noch die Transitivität zu zeigen. Seien also  $\psi, \varphi, \tau \in \Psi(\mathcal{U})$  mit  $\psi \omega \varphi$  und  $\varphi \omega \tau$ . Dann existieren  $\alpha, \beta \in \Psi(\mathcal{U})$  derart, dass  $\alpha|_{\text{dom}(\psi)} = \psi$  und  $\alpha|_{\text{dom}(\varphi)} = \varphi$ , und außerdem  $\beta|_{\text{dom}(\varphi)} = \varphi$  und  $\beta|_{\text{dom}(\tau)} = \tau$  gilt. Weil  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{P}$  den relativen lokalen Fundamentalsatz erfüllt, gibt es Lineationen  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  in  $\Psi(\mathcal{P})$  mit  $\text{dom}(\tilde{\alpha}) = \text{dom}(\tilde{\beta}) = U$ ,  $\tilde{\alpha}|_{\text{dom}(\alpha)} = \alpha$  und  $\tilde{\beta}|_{\text{dom}(\beta)} = \beta$ . Es gilt  $\tilde{\alpha}|_{\text{dom}(\varphi)} = \tilde{\beta}|_{\text{dom}(\varphi)}$ . Wegen  $\text{dom}(\tilde{\alpha}) = \text{dom}(\tilde{\beta})$  folgt  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ . Also ist  $\tilde{\alpha}$  eine Fortsetzung der Lineationen  $\alpha$  und  $\beta$ . Da die Fortsetzung einer Lineation eindeutig ist und weil  $\text{dom}(\psi) \cup \text{dom}(\tau) \subseteq \text{dom}(\tilde{\alpha})$  gilt, folgt  $\psi \omega \tau$ . Nach Satz 1.7.12 ist  $(\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}, m_\omega)$  eine lokale Gruppe. ■

**3.1.3 Bemerkung.** Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, wie uns das folgende Beispiel zeigt: Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  mit  $P \neq P_2\mathbb{R}$  (vgl. Definition 3.1.10) und  $\mathcal{U} = (U, \mathcal{L}_U)$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P}$ , dann erfüllt  $\mathcal{U}$  nicht in  $\mathcal{P}$  den relativen lokalen Fundamentalsatz, wie wir im Folgenden beweisen werden: Die Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{R})$  wirkt transitiv auf echten Dreiecken in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ . Wir wählen ein Dreieck  $A, B, C$  in  $U$  und finden einen Automorphismus  $\alpha$  derart, dass  $A^\alpha, B^\alpha \in U$  und  $C^\alpha \notin P$  gilt. Dann folgt  $U \cap U^\alpha \neq \emptyset$  und  $U^\alpha \not\subseteq P$ . Folglich ist  $\alpha|_{(U \cap U^\alpha)^{\alpha^{-1}}}$  eine partielle Lineation von  $\mathcal{U}$ , aber es gibt kein Element  $\tilde{\alpha}$  von  $\Psi(\mathcal{P})$  derart, dass  $U \subset \text{dom}(\tilde{\alpha})$  gilt. Da aber nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] die Unterebene  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  den relativen lokalen Fundamentalsatz erfüllt, ist  $\omega$  auf  $\Psi(\mathcal{U})$  eine Äquivalenzrelation.



### 3. Beispiele

**3.1.4 Bemerkung.** Seien  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{U}$  wie in 3.1.2. Wenn wir  $\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}$  mit  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$  identifizieren und  $\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}$  mit der Spurtopologie topologisieren, dann ist nach 1.7.17 das Definitionsgebiet der Verknüpfung  $m_\omega$  offen. Wenn  $P$  eine Mannigfaltigkeit ist, dann ist nach 1.7.15 das Invertieren in  $\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}$  stetig.

**3.1.5 Satz.** Sei  $\mathcal{P} := (P, \mathcal{L})$  eine stabile  $lp$ -Ebene, sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit und sei  $\tilde{\mathcal{U}} := (\tilde{U}, \mathcal{L}_{\tilde{U}})$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P}$ , die den relativen lokalen Fundamentalsatz erfülle. Sei  $\mathcal{U} := (U, \mathcal{L}_U)$  eine offene Unterebene von  $\tilde{\mathcal{U}}$  mit der Eigenschaft, dass  $\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \Psi(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}})$  ist, d.h. für alle  $\psi \in \Psi(\mathcal{U}, \mathcal{P})$  gilt  $\text{Bild}(\psi) \subseteq \tilde{U}$ . Wir identifizieren  $\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}$  mit  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$  und topologisieren  $\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}$  mit der Spurtopologie. Dann ist  $m_\omega$  auf  $\text{dom}(m_\omega)$  stetig. Insbesondere ist  $(\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}, m_\omega)$  eine topologische lokale Gruppe.

**Beweis.** Die Ebene  $\mathcal{U}$  erfüllt den relativen lokalen Fundamentalsatz. Wir zeigen dass  $m_\omega$  im gesamten Definitionsgebiet stetig ist. Nach 3.1.2 und 3.1.4 ist dann  $(\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\omega}, m_\omega)$  eine topologische lokale Gruppe. Seien  $\alpha$  und  $\beta$  Elemente von  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$  mit  $(\alpha, \beta) \in \text{dom}(m_\omega)$ . Sei  $\gamma \in \Psi_{max}(\mathcal{U})$  mit  $[\alpha]_\omega[\beta]_\omega = [\gamma]_\omega$ . Dann gilt  $\alpha \diamond \beta = \gamma|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)}$ . Nach Voraussetzung gibt es Fortsetzungen  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\gamma}$  von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  bzw.  $\gamma$  mit  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \Psi(\mathcal{P})$  und

$$\tilde{U} \subset \text{dom}(\tilde{\alpha}) \cap \text{Bild}(\tilde{\alpha}) \cap \text{dom}(\tilde{\beta}) \cap \text{Bild}(\tilde{\beta}) \cap \text{dom}(\tilde{\gamma}) \cap \text{Bild}(\tilde{\gamma}) .$$

Wir betrachten im Folgenden alle Lineationen als Elemente von  $(\Psi(\mathcal{P}), \diamond)$ . Alle Subbaselemente  $\llbracket C, O \rrbracket$  sind Elemente von  $\mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P})}$ . Da  $\text{dom}(\tilde{\beta}^{-1}) \supset \tilde{U}$  gilt, sind  $\gamma$  und  $\tilde{\beta}^{-1}$  verknüpfbar und aus  $\text{Bild}(\gamma) \subseteq \tilde{U}$  folgt  $\text{dom}(\gamma \diamond \tilde{\beta}^{-1}) = \text{dom}(\gamma)$ . Wegen  $\gamma|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} = \alpha \diamond \beta$  gilt

$$(\gamma \diamond \tilde{\beta}^{-1})|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} = \gamma|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} \diamond \tilde{\beta}^{-1} = \alpha|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} .$$

Insgesamt wissen wir nun, dass  $\tilde{\alpha}$  und  $\gamma \diamond \tilde{\beta}^{-1}$  Fortsetzungen von  $\alpha|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)}$  und von  $\tilde{\alpha}|_{\text{dom}(\gamma)}$  sind. Folglich gilt

$$\gamma = (\tilde{\alpha} \diamond \tilde{\beta})|_{\text{dom} \gamma} = \tilde{\alpha}|_{\text{dom} \gamma} \diamond \tilde{\beta} .$$

Sei nun  $\gamma \in \llbracket C, O \rrbracket \cap \Psi_{max}(\mathcal{U})$  mit einer kompakten Menge  $C \subset \text{dom}(\gamma)$  und einer offenen Menge  $O \subset \text{Bild}(\gamma)$ . Da die Verknüpfung  $\diamond$  nach 1.5.20 auf ihrem Definitionsgebiet  $\text{dom}(\diamond) \subset \Psi(\mathcal{P}) \times \Psi(\mathcal{P})$  stetig ist, finden wir wie in 1.5.20 eine relativkompakte Teilmenge  $V \in P$  so, dass  $\tilde{\alpha}|_{\text{dom} \gamma} \in \llbracket C, V \rrbracket$ ,  $\tilde{\beta} \in \llbracket \bar{V}, O \rrbracket$  und  $\llbracket C, V \rrbracket \diamond \llbracket \bar{V}, O \rrbracket \subset \llbracket C, O \rrbracket$  gilt. Für eine kompakte Teilmenge  $\tilde{C}$  und eine offenen Teilmenge  $\tilde{O}$  von  $\tilde{U}$  betrachten wir nun Mengen der Form

$$\llbracket \tilde{C}, \tilde{O} \rrbracket_{\tilde{U}} := \left\{ \psi \in \llbracket \tilde{C}, \tilde{O} \rrbracket \mid \text{dom}(\psi) = \tilde{U} \right\} .$$

Sei  $W := (\text{dom}(\beta) \cap \text{Bild}(\alpha))^{\alpha^{-1}}$ . Nach 1.5.10 ist die Abbildung  $\omega_W$ , welche jede Einbettung von  $\tilde{\mathcal{U}}$  in  $\mathcal{P}$  auf die Restriktion der Einbettung auf  $W$  abbildet, ein Homöomorphismus. Folglich finden wir endlich viele kompakte Mengen  $C_1, \dots, C_k \subset W$  und endlich viele relativkompakte Mengen  $W_1, \dots, W_k \in W^\alpha$  so, dass  $\tilde{\alpha}|_{\tilde{U}} \in \bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, W_i \rrbracket_{\tilde{U}} \subset \llbracket C, V \rrbracket_{\tilde{U}}$ . Genauso

### 3.1. Ebenen mit relativem lokalem Fundamentalsatz

finden wir endlich viele kompakte Mengen  $V_1, \dots, V_l \subset W^\alpha$  und endlich viele offene Mengen  $O_1, \dots, O_l \subset U$  derart, dass  $\tilde{\beta}|_{\tilde{U}} \in \bigcap_{i=1}^l \llbracket V_i, O_i \rrbracket_{\tilde{U}} \subset \llbracket \overline{V}, O \rrbracket_{\tilde{U}}$ . Wir betrachten nun die offenen Mengen

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, W_i \rrbracket \text{ und } \mathcal{B} := \bigcap_{i=1}^l \llbracket V_i, O_i \rrbracket \cap \bigcap_{i=1}^k \llbracket \overline{W}_i, U \rrbracket$$

von  $\Psi(\mathcal{P})$ . Dann gilt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \text{dom}(\diamond)$  und es gilt  $\alpha \in \mathcal{A}$  und  $\beta \in \mathcal{B}$ . Dann sind  $\mathcal{A} \cap \Psi_{max}(\mathcal{U})$  und  $\mathcal{B} \cap \Psi_{max}(\mathcal{U})$  offene Umgebungen von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$ , weil  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$  die Spurtopologie trägt. Für alle  $\alpha' \in \mathcal{A} \cap \Psi_{max}(\mathcal{U})$  und  $\beta' \in \mathcal{B} \cap \Psi_{max}(\mathcal{U})$  gilt  $[\alpha']_{\infty}[\beta']_{\infty} \in \llbracket C, O \rrbracket \cap \Psi_{max}(\mathcal{U})$ , denn nach Voraussetzung gibt es Fortsetzungen  $\tilde{\alpha}'$  und  $\tilde{\beta}'$ , die beide das Definitionsgebiet  $\tilde{U}$  besitzen. Nach Konstruktion gilt dann  $\tilde{\alpha}' \in \llbracket C, V \rrbracket$ ,  $\tilde{\beta}' \in \llbracket \overline{V}, O \rrbracket$  und  $\tilde{\alpha}' \diamond \tilde{\beta}' \in \llbracket C, O \rrbracket$ . Für eine Lineation  $\psi$  aus  $\Psi_{max}(\mathcal{U})$  und deren Fortsetzung  $\tilde{\psi}$  mit  $\text{dom}(\tilde{\psi}) = \tilde{U}$  gilt  $\text{dom}(\psi) = (U \cap U^{\tilde{\psi}})^{\tilde{\psi}^{-1}}$ . Folglich gilt

$$\text{dom}([\alpha']_{\infty}[\beta']_{\infty}) \supset (U \cap U^{\tilde{\alpha}' \diamond \tilde{\beta}'} )^{(\tilde{\alpha}' \diamond \tilde{\beta}')^{-1}} \supset C$$

und  $C^{[\alpha']_{\infty}[\beta']_{\infty}} = C^{\tilde{\alpha}' \diamond \tilde{\beta}'} \subset O$ . ■

**3.1.6 Bemerkung.** Wenn sich jede partielle Lineation einer offenen Unterebene  $\mathcal{U}$  einer stabilen  $lp$ -Ebene  $\mathcal{P}$  zu einem Automorphismus von  $\mathcal{P}$  fortsetzen lässt, können wir ein Element  $[\alpha]_{\infty} \in \frac{\Psi(\mathcal{U})}{\infty}$  mit dem Automorphismus von  $\mathcal{P}$  identifizieren, zu dem sich  $\alpha$  fortsetzen lässt. Dann wird  $(\frac{\Psi(\mathcal{U})}{\infty}, m_{\infty})$  mit der lokalen Untergruppe

$$\widehat{\Psi}_{max}(\mathcal{U}) := \{ \psi \in \text{Aut}(\mathcal{P}) \mid U^{\psi} \cap U \neq \emptyset \}$$

von  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  identifiziert. Wegen

$$\widehat{\Psi}_{max}(\mathcal{U}) = \bigcup_{p \in U} [\{p\}, U]$$

ist  $\widehat{\Psi}_{max}(\mathcal{U})$  offen in  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ .

Wir erhalten als Folgerung:

**3.1.7 Korollar.** Wenn die Relation  $\infty$  auf der stabilen Ebene  $\mathcal{M}$  keine Äquivalenzrelation ist, dann gibt es keine stabile Ebene  $\mathcal{P}$  derart, dass  $\mathcal{M}$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P}$  ist und alle partiellen Lineationen von  $\mathcal{M}$  durch Automorphismen von  $\mathcal{P}$  induziert werden.

**3.1.8 Bemerkung.** Es gibt Unterebenen der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  mit  $k > 1$ , auf denen  $\infty$  keine Äquivalenzrelation ist, aber alle Endomorphismen dieser Unterebene durch Automorphismen der Moulton-Ebene induziert werden: Die in 4.7.5 betrachtete Streifenebene  $\mathcal{S}_t = (S_t, \tilde{\mathcal{L}}_{S_t})$  ist nicht desarguessch. Wie in 4.7.5 bewiesen wird, wird jeder Endomorphismus von einem Automorphismus der Moulton-Ebene induziert. Aber die Restriktion der Spiegelung an der  $x$ -Achse auf  $S_t \cap U$  mit  $U = \{ \mathbb{R}(x, y, 1) \mid x < 0, y > 0 \}$  besitzt, wie in 4.6.1 beschrieben, unterschiedliche Fortsetzungen zu einem Element von  $\Psi_{max}(\mathcal{S}_t)$ . Folglich ist  $\infty$  auf  $\Psi(\mathcal{S}_t)$  keine Äquivalenzrelation.

### 3. Beispiele

Im Folgenden betrachten wir Beispiele, bei denen alle partiellen Lineationen der Unterebene  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{P}$  durch Automorphismen von  $\mathcal{P}$  induziert werden. Diese Unterebenen erfüllen die Voraussetzungen von Satz 3.1.5 mit  $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{P}$ . Zuerst betrachten wir Unterebenen der klassischen projektiven Ebenen. Die affine Ebene über den Divisions-Algebren  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ , die mithilfe des Cayley-Dickson Prozess entstehen (siehe dazu [55, 11.1]), konstruiert man folgendermaßen:

**3.1.9 Definition.** [55, 12.1] Sei  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ . Die affine Ebene  $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$  ist die Inzidenzstruktur  $(\mathbb{F} \times \mathbb{F}, \mathcal{L})$ . Die Menge der Geraden

$$\mathcal{L} := \{[s, t], [c] \mid s, t \in \mathbb{F}, c \in \mathbb{F}\}$$

besteht aus den Mengen der Form

$$\begin{aligned} [s, t] &:= \{(x, sx + t) \mid x \in \mathbb{F}\} \text{ und} \\ [c] &:= \{c\} \times \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Wir sagen, dass eine Gerade  $[s, t]$  die Steigung  $s$  besitzt und die Gerade  $[c]$  die Steigung  $\infty$  hat. Die Ferngerade der projektiven Vervollständigung  $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$  bezeichnen wir mit

$$[\infty] := \{(s) \mid s \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}\}.$$

Dabei ist  $(s)$  der Fernpunkt einer Geraden mit Steigung  $s$ .

Nach [55, 13.3] ist der projektive Abschluss  $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$  isomorph zur projektiven Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ . Für  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  hat man die folgende schöne Beschreibung von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ :

**3.1.10 Definition.** [55, 13.1] Sei  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ . Wir betrachten  $\mathbb{F}^3$  als Rechtsvektorraum über  $\mathbb{R}$ . Die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von  $\mathbb{F}^3$  bezeichnen wir als  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ . Eine Gerade ist ein 2-dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{F}^3$ , betrachtet als Menge der 1-dimensionalen Unterräume, die in ihm enthalten sind. Die Menge aller Geraden bezeichnen wir als  $\mathcal{L}_2\mathbb{F}$ . Die Inzidenzstruktur  $\mathcal{P}_2\mathbb{F} := (\mathcal{P}_2\mathbb{F}, \mathcal{L}_2\mathbb{F})$  mit der Elementrelation als Inzidenzrelation ist die projektive Ebene über  $\mathbb{F}$ .

Aus dem lokalen Fundamentalsatzes von LÖWEN [31] und 3.1.6 erhalten wir den nächsten Satz, der im wesentlichen eine Umformulierung des lokalen Fundamentalsatzes ist.

**3.1.11 Satz.** Sei  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2\mathbb{F}$  die projektive Ebene über  $\mathbb{F}$  mit  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ . Dann ist die Menge der maximalen partiellen Lineationen  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  gleich der Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ .

Sei  $\mathcal{U} := (U, \mathcal{L}_U)$  eine offene Unterebene von  $\mathcal{P}$ . Dann ist

$$\Psi_{max}(\mathcal{U}) = \left\{ \psi|_{(U \cap U^\psi)^{\psi^{-1}}} \mid \psi \in \text{Aut}(\mathcal{P}), U \cap U^\psi \neq \emptyset \right\}$$

mit der Verknüpfung  $m_\infty$  eine topologische lokale Gruppe. Die Menge

$$\widehat{\Psi}_{max}(\mathcal{U}) = \{ \psi \in \text{Aut}(\mathcal{P}) \mid U \cap U^\psi \neq \emptyset \}$$

ist eine topologische lokale Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ , die offen in  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  ist.

### 3.2. Die modifizierte hyperbolische Ebene

Ein Spezialfall der Situation in Satz 3.1.11 ist die reelle hyperbolische Ebene:

**3.1.12 Definition.** [65, 13] Die Unterebene

$$\mathcal{H} := (H, \mathcal{L}_H)$$

der reellen projektiven Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{R} = (P_2\mathbb{R}, \mathcal{L}_2\mathbb{R})$  mit

$$H := \{\mathbb{R}(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

und  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_2\mathbb{R}$  ist die reelle hyperbolische Ebene.

Über die Endomorphismen-Halbgruppe der reellen hyperbolischen Ebene ist folgendes bekannt:

**3.1.13 Satz.** [65, Thm.14]

- (i) Die Endomorphismen-Halbgruppe der reellen hyperbolischen Ebene hat nicht leeres Inneres in der Gruppe  $\mathrm{PGL}_3\mathbb{R}$ . Sie ist eine 8-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand.
- (ii) Die Automorphismen-Gruppe der reellen hyperbolischen Ebene ist die dreidimensionale Lie-Gruppe  $\mathrm{PO}_3(\mathbb{R}, 1)$ , welche im Rand der Endomorphismen-Halbgruppe enthalten ist.

Als Spezialfall von Satz 3.1.11 erhalten wir folgendes:

**3.1.14 Korollar.** Die Menge

$$\Psi_{max}(\mathcal{H}) = \left\{ \psi \Big|_{(H \cap H^\psi)^{\psi^{-1}}} \mid \psi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{R}), H \cap H^\psi \neq \emptyset \right\}$$

ist mit der Verknüpfung  $m_\infty$  eine topologische lokale Gruppe. Die Menge

$$\widehat{\Psi}_{max}(\mathcal{H}) = \{ \psi \in \mathrm{PGL}_3\mathbb{R} \mid H^\psi \cap H \neq \emptyset \}$$

ist eine topologische lokale Untergruppe der  $\mathrm{PGL}_3\mathbb{R}$ , die offen in  $\mathrm{PGL}_3\mathbb{R}$  ist.

## 3.2. Die modifizierte hyperbolische Ebene

**3.2.1 Definition.** [55, 35.1] Sei  $f$  eine nicht ausgeartete quadratische Form auf  $\mathbb{R}^3$  vom Witt Index 1, sei also bezüglich geeigneter Koordinaten  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Wir bezeichnen mit  $\Omega = \mathrm{PO}'_3(\mathbb{R}, 1)$  die Kommutatorgruppe der hyperbolischen Bewegungsgruppe  $\mathrm{PO}_3(\mathbb{R}, 1)$  der reellen projektiven Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{R} = (P_2\mathbb{R}, \mathcal{L}_2\mathbb{R})$ . Die Funktion  $f$  definiert in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  eine Quadrik  $Q = \{\mathbb{R}v \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^3, f(v) = 0\}$ . Für ein  $t \in \mathbb{R}$  definieren wir die Teilmenge  $L_t \subset P$  durch

$$L_t = \{\mathbb{R}(x, 0, 1) \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{\mathbb{R}(x, y, z) \mid y^2 = t^2(x^2 - z^2) \text{ mit } txy \geq 0\}.$$

Wir definieren eine neue Inzidenzstruktur  $\mathcal{H}_t = (P, \mathcal{L}_t)$  mit

$$\mathcal{L}_t = \{L \in \mathcal{L}_2\mathbb{R} \mid |L \cap Q| \leq 1\} \cup \{L_t^\omega \mid \omega \in \Omega\},$$

die modifizierte hyperbolische Ebene.

### 3. Beispiele

In 3.2.6 betrachten wir die Menge der Abbildungen  $[A] \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$ , die die Quadrik in sich abbilden. Wir wollen zuerst einsehen, dass es sich bei dieser Menge um die Gruppe  $\text{PO}_3(\mathbb{R}, 1)$  handelt. In [55, 15.3] finden wir diese Aussage mit Beweis allgemeiner: Es wird statt des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  der Vektorraum  $\mathbb{F} \times \mathbb{R}^2$  für  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$  betrachtet.

**3.2.2 Lemma.** Sei  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0\} \\ Q &= \{\mathbb{R}v \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^3, f(v) = 0\} \\ \tilde{\Lambda} &= \{\lambda \in \text{GL}_3 \mathbb{R} \mid \tilde{Q}^\lambda = \tilde{Q}\} \\ \Lambda &= \{[\lambda] \in \text{PGL}_3 \mathbb{R} \mid Q^{[\lambda]} = Q\} \\ \text{GO}_3(\mathbb{R}, 1) &= \{\gamma \in \text{GL}_3 \mathbb{R} \mid \exists s \in \mathbb{R} : \forall v \in \mathbb{R}^3 : f(v^\gamma) = sf(v)\} \\ \text{O}_3(\mathbb{R}, 1) &= \{\gamma \in \text{GL}_3 \mathbb{R} \mid \forall v \in \mathbb{R}^3 : f(v^\gamma) = f(v)\} \\ \text{PO}_3(\mathbb{R}, 1) &= \{[\gamma] \in \text{PGL}_3 \mathbb{R} \mid \gamma \in \text{O}_3(\mathbb{R}, 1)\}\end{aligned}$$

Es gilt  $\tilde{\Lambda} = \text{GO}_3(\mathbb{R}, 1)$  und  $\Lambda = \text{PO}_3(\mathbb{R}, 1)$ .

**Beweis.** Die Inklusion  $\tilde{\Lambda} \supseteq \text{GO}_3(\mathbb{R}, 1)$  ist klar. Sei nun  $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ , dann gilt für alle  $v \in \tilde{Q}$  die Gleichheit  $f(v^\lambda) = 0$ . Somit beschreibt auch die Gleichung  $f(v^\lambda) = 0$  die Quadrik  $\tilde{Q}$ . In [56, Theorem 46] finden wir einen Beweis für die Aussage, dass jede Gleichung, welche die Quadrik  $\tilde{Q}$  beschreibt, proportional zur Gleichung  $f(v) = 0$  ist. Folglich gibt es ein  $r \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$f(v^\lambda) = rf(v)$$

für alle  $v \in \mathbb{R}^3$  gilt. Also gilt  $\lambda \in \text{GO}_3(\mathbb{R}, 1)$  und wir erhalten insgesamt  $\tilde{\Lambda} = \text{GO}_3(\mathbb{R}, 1)$ . Nun betrachten wir den 2-dimensionalen Unterraum

$$U = \{(x, r_1, r_1) \mid x, r_1 \in \mathbb{R}\} .$$

Es gilt  $f(x, r_1, r_1) = x^2$ . Also ist  $f$  auf  $U$  positiv definit. Da  $U$  zweidimensional und  $\lambda \in \text{GL}_3 \mathbb{R}$  ist, ist  $U^{\lambda^{-1}}$  zweidimensional. Folglich ist der Schnitt  $U \cap U^{\lambda^{-1}}$  im 3-dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  nicht leer. Wir wählen nun ein  $z$  in diesem Schnitt, dann folgt wegen  $f(z^\lambda) = rf(z)$ , dass  $r$  positiv ist. Wir betrachten nun  $\alpha := \frac{\lambda}{\sqrt{r}}$ , dann gilt für alle  $v \in \mathbb{R}^3$

$$f(v^\alpha) = \frac{1}{r}f(v^\lambda) = f(v) .$$

Folglich gilt  $\alpha \in \text{O}_3(\mathbb{R}, 1)$  und  $[\alpha] = [\lambda] \in \text{PO}_3(\mathbb{R}, 1)$ . ■

Offensichtlich ist die Ebene  $\mathcal{H}_0$  isomorph zu  $\mathcal{P}_2 \mathbb{R}$ . SALZMANN hat bewiesen, dass die Ebene  $\mathcal{H}_t$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  eine zweidimensionale kompakte projektive Ebene ist und dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Ebenen  $\mathcal{H}_t$  und  $\mathcal{H}_{-t}$  isomorph sind. Für  $t \geq 0$  erhält man paarweise nicht isomorphe Ebenen  $\mathcal{H}_t$ . Die Gruppe  $\Omega$  stimmt mit der Zusammenhangskomponente

### 3.2. Die modifizierte hyperbolische Ebene

$\text{PO}_3(\mathbb{R}, 1)^1$  überein und ist isomorph zu  $\text{PSL}_2\mathbb{R}$  (vgl. [54]). Außerdem ist die Gruppe  $\Omega$  die volle Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{H}_t$  für  $t \neq 0$  (vgl. [55, 35.4]). Die Automorphismen-Gruppe  $\Omega$  wirkt auf der Quadrik  $Q$  genauso, wie die Gruppe  $\text{PSL}_2\mathbb{R}$  auf dem Kreis  $\mathbb{S}_1$  wirkt. Sie ist transitiv auf der Menge der inneren Punkte und transitiv auf der Menge der äußeren Punkte (vgl. [55, 35]). Die Spiegelung  $\rho : \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto \mathbb{R}(x, -y, z)$  ist kein Element von  $\Omega$ , sondern induziert einen Isomorphismus  $\mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}_{-t}$ . Es gilt  $\text{PO}_3(\mathbb{R}, 1) = \Omega \rtimes \langle \rho \rangle$  und  $\Omega$  ist ein Normalteiler von  $\text{PO}_3(\mathbb{R}, 1)$ .

Wir bezeichnen  $I\mathcal{H}_t := (IH_t, (\mathcal{L}_t)_{IH_t})$  mit  $IH_t = \{\mathbb{R}v \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^3, f(v) < 0\}$  als die innere hyperbolische Ebene und  $E\mathcal{H}_t := (EH_t, (\mathcal{L}_t)_{EH_t})$  mit  $EH_t := P_2\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{R}v \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^3, f(v) \leq 0\}$  als die äußere modifizierte hyperbolische Ebene.

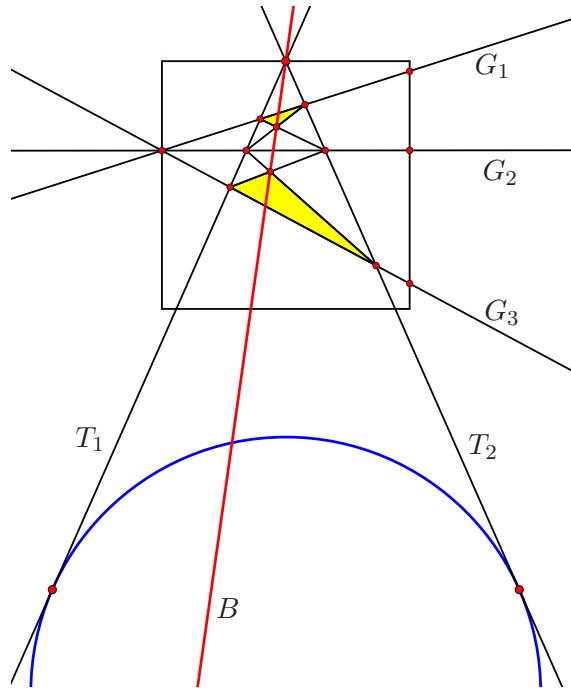


Abbildung 4: Konstruktion einer sich nicht schließenden Desargues-Figur in  $E\mathcal{H}_t$

**3.2.3 Satz.** *Jede Umgebung jedes Punktes von  $E\mathcal{H}_t$  ist nicht desarguessch.*

**Beweis.** Wir zeigen, dass jeder Punkt der Form  $\mathbb{R}(0, y, 1)$  mit  $y > 1$  beliebig kleine nicht desarguessche Umgebungen hat. Da  $\Omega$  transitiv auf  $E\mathcal{H}_t$  wirkt, ist damit die Aussage des Satzes bewiesen. In jeder Umgebung von  $\mathbb{R}(0, y, 1)$  finden wir ein Quadrat  $\mathbb{R}(-a, y - a, 1), \mathbb{R}(a, y - a, 1), \mathbb{R}(a, y + a, 1), \mathbb{R}(-a, y + a, 1)$  mit  $a > 0$ , welches symmetrisch zur  $y$ -Achse liegt. Wir konstruieren vom Punkt  $z := \mathbb{R}(0, y + a, 1)$  die Tangenten  $T_1, T_2$  an den Kreis  $Q$ . Seien  $\mathbb{R}(-a, q, 1)$  und  $\mathbb{R}(a, q, 1)$  mit  $q < y + a$  Schnittpunkte der Tangenten mit den Geraden, die durch die Gleichungen  $x = -a$  bzw.  $x = a$  festgelegt sind. Wir wählen einen Punkt  $\mathbb{R}(-a, p, 1)$  auf der linken Quadratseite und drei Punkte

### 3. Beispiele

$\mathbb{R}(a, p_1, 1), \mathbb{R}(a, p_2, 1), \mathbb{R}(a, p_3, 1)$  auf der rechten Quadratseite mit  $\max(q, y - a) < p_1 < p = p_2 < p_3 < y + a$ . Wir betrachten die Geraden  $G_j := \mathbb{R}(-a, p, 1) \vee \mathbb{R}(a, p_j, 1)$ . Diese schneiden die Tangenten in den Punkten  $t_{i,j} := T_i \wedge G_j$ . Die Geraden  $t_{1,1} \vee t_{2,2}$ ,  $t_{1,3} \vee t_{2,2}$ ,  $t_{2,1} \vee t_{1,2}$  und  $t_{1,2} \vee t_{2,3}$  bilden mit den Tangenten  $T_1, T_2$  und den Geraden  $G_j$  für  $j \in \{1, 2, 3\}$  eine desarguessche Figur in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ . Alle bisher beteiligten Geraden sind auch Geraden von  $E\mathcal{H}_t$ , da es sich entweder um Tangenten an  $Q$  handelt oder um Geraden, die beide Tangenten innerhalb des gewählten Quadrats schneiden und deswegen keinen Schnittpunkt mit dem Kreis  $Q$  besitzen. Da  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  desarguessch ist, schließt sich die Figur und die Punkte  $\mathbb{R}(0, y + a, 1), b_1 := (t_{1,1} \vee t_{2,2}) \wedge (t_{2,1} \vee t_{1,2})$  und  $b_2 := (t_{1,3} \vee t_{2,2}) \wedge (t_{1,2} \vee t_{2,3})$  liegen auf einer Geraden  $B$  von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ . Die Gerade  $B$  schneidet den Kreis, weil die Punkte  $d_1$  und  $d_2$  innerhalb des von den Tangenten und  $(-a, p, 1) \vee (a, p_1, 1)$  begrenzten Dreiecks liegen. Die Gruppe  $\Omega$  bildet jede Gerade von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  wieder auf eine Gerade von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  ab. Die Gerade  $L_t \cap E\mathcal{H}_t$  schneidet jede Gerade von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  in maximal zwei Punkten, da es sich um Stücke von Kegelschnitten handelt. Folglich liegen die drei Punkte  $z, d_1$  und  $d_2$  nicht auf einer Geraden aus  $\mathcal{L}_t$  und die Figur schließt sich in  $E\mathcal{H}_t$  nicht. ■

**3.2.4 Korollar.** Für  $t \neq 0$  lässt jede partielle Lineation  $\varphi$  aus  $\Psi(\mathcal{H}_t)$  die Mengen  $IH_t$  und  $EH_t$  jeweils invariant, d.h.  $(\text{dom}(\varphi) \cap IH_t)^\varphi \subseteq IH_t$  und  $(\text{dom}(\varphi) \cap EH_t)^\varphi \subseteq EH_t$ .

**Beweis.** Eine stetige injektive Lineation bildet desarguessche Umgebungen eines Punktes auf desarguessche Umgebungen ab. ■

Jeder Automorphismus von  $\mathcal{H}_t$  bildet die Quadrik, das Innere und das Äußere jeweils auf sich ab. Also gilt folgendes Lemma:

**3.2.5 Lemma.** Alle Lineationen  $\omega \in \Omega$  sind Automorphismen von  $E\mathcal{H}_t$ .

Wir nennen eine partielle Lineation von  $\mathcal{H}_t$  *linear*, wenn sie die Restriktion eines Elementes der Gruppe  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  ist.

**3.2.6 Satz.** Sei  $t \neq 0$ . Jede lineare partielle Lineation von  $E\mathcal{H}_t$  lässt sich zu einem Automorphismus von  $\mathcal{H}_t$  fortsetzen.

**Beweis.** Sei  $[A] \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$  und sei  $\varphi = [A]|_{\text{dom}(\varphi)}$ . Für alle Punkte  $p \in \text{dom}(\varphi)$  müssen alle Geraden der Menge  $p^\varphi \vee IH_t^\varphi$  in der Menge  $p^\varphi \vee IH_t$  liegen, denn ansonsten müsste ein Stück eines Hyperbelastes auf ein Stück einer kompakten (also nicht modifizierten) Gerade von  $E\mathcal{H}_t$  abgebildet werden, was durch eine lineare Abbildung nicht möglich ist. Da es auch nicht möglich ist, ein Stück einer Geraden aus  $\mathcal{L}_2\mathbb{R}$  durch eine lineare Abbildung in einen Hyperbelast abzubilden, erhalten wir  $p^\varphi \vee IH_t^\varphi = p^\varphi \vee IH_t$  und  $(\mathcal{L}_t)_{p^\varphi} \setminus (p^\varphi \vee IH_t^\varphi) = (\mathcal{L}_t)_{p^\varphi} \setminus (p^\varphi \vee IH_t)$ . Die Tangenten von  $p^\varphi$  an  $IH_t$  bilden den Rand von  $p^\varphi \vee IH_t^\varphi$  im Büschel  $\mathcal{L}_{p^\varphi}$ . Folglich bildet die Lineation  $\varphi$  die Tangenten von einem Punkt  $p \in \text{dom}(\varphi)$  an den Kegelschnitt auf Tangenten von  $p^\varphi$  an den Bildkegelschnitt ab, welche gleichzeitig auch Tangenten an den Kegelschnitt  $Q$  sind. Nach 1.4.4 ist  $\text{Bild}(\varphi)$  offen. Folglich finden wir genügend Punkte in  $\text{dom}(\varphi)$  derart, dass der Kegelschnitt  $Q^\varphi$  durch die



### 3.2. Die modifizierte hyperbolische Ebene

Bilder der Tangenten an  $Q$  eindeutig bestimmt ist. (Ein Kegelschnitt ist durch die Vorgabe von fünf Tangenten festgelegt. Denn aus den Tangenten erhält man mit der Polarität fünf Punkte auf dem Kegelschnitt und durch die steinersche Erzeugung können alle Punkte des Kegelschnitts aus fünf Punkten konstruiert werden vgl. [33, IV.4].) Da diese Tangenten an  $Q^\varphi$  auch Tangenten an  $Q$  sind, stimmen die beiden Kegelschnitte überein. Nach 3.2.2 gilt  $[A] \in \text{PO}_3(\mathbb{R}, 1) = \Omega \rtimes \langle \rho \rangle$ . Wir nehmen an, dass  $[A] \notin \Omega$  gilt. Dann existiert ein  $\omega \in \Omega$  derart, dass  $[A] = \omega\rho$  ist. Sei nun  $p \in \text{dom}(\varphi)$  und  $L_t^\omega$  eine Gerade im Büschel  $(\mathcal{L}_t)_p$ . Dann liegt  $(L_t^\omega \cap \text{dom}(\varphi))^\varphi$  in  $L_t^{\omega[A]} \cap EH_t$ . Da  $\varphi$  eine Lineation ist, folgt  $L_t^{\omega[A]} = L_t^{\omega\rho} \in \{L_t^\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ . Wir wissen, dass  $\Omega$  ein Normalteiler von  $\text{PO}_3 \mathbb{R}$  ist. Folglich existiert ein  $\hat{\omega} \in \Omega$  derart, dass  $\tilde{\omega}\omega\rho = \rho\hat{\omega}$ . Aus  $L_t^{\rho\hat{\omega}} \in \{L_t^\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$  folgt  $L_t^\rho \in \{L_t^\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ . Das ist ein Widerspruch, denn es gilt  $L_t^\rho \neq L_t$ , aber  $\rho$  fixiert die Punkte  $[-1, 0, 1]$  und  $[1, 0, 1]$ . Folglich wären die Geraden  $L_t^\rho$  und  $L_t$  zwei unterschiedliche Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte. Insgesamt wissen wir nun, dass  $[A] \in \Omega$  die Fortsetzung von  $\varphi$  zu einem Automorphismus von  $\mathcal{H}_t$  ist. ■

**3.2.7 Lemma.** *Mithilfe der Polarität erhalten wir aus jedem Endomorphismus von  $I\mathcal{H}_t = I\mathcal{H}_0$  einen Endomorphismus der äußeren hyperbolischen Ebene  $E\mathcal{H}_0$ .*

**Beweis.** Die hyperbolische Polarität ist folgende Abbildung [55, 13.12]:

$$\begin{aligned} \pi^- : P_2\mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L}_2\mathbb{R} : \mathbb{R}(x, y, 1) \mapsto \text{Ker}(x \ y \ -1) \\ \mathcal{L}_2\mathbb{R} &\rightarrow P_2\mathbb{R} : \text{Ker}(x \ y \ 1) \mapsto \mathbb{R}(x, y, -1) \end{aligned}$$

Sei  $\varphi$  ein Endomorphismus der hyperbolischen Ebene  $I\mathcal{H}_0$ . Dann existiert ein  $[A] \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  derart, dass  $\varphi = [A]|_{I\mathcal{H}_0}$  gilt. Die Abbildung  $\pi^- \varphi \pi^-$  ist eine Abbildung von  $E\mathcal{H}_0$  in sich. Mit

$$\iota_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir Folgendes: Ein Punkt  $\mathbb{R}(x, y, 1) \in E\mathcal{H}_0$  wird durch  $\pi^-$  auf die Gerade  $\langle \mathbb{R}(1, 0, x), \mathbb{R}(0, 1, y) \rangle$  abgebildet. Der Endomorphismus  $\varphi$  bildet diese Gerade auf  $\langle \mathbb{R}(1, 0, x)A, \mathbb{R}(0, 1, y)A \rangle$  ab. Diese Gerade wird durch  $\pi^-$  auf  $\mathbb{R}(x, y, 1)\iota_0 A^{-t}\iota_0$  abgebildet. Folglich ist  $[\iota_0 A^{-t}\iota_0]|_{E\mathcal{H}_0}$  ein Endomorphismus von  $E\mathcal{H}_0$ . ■

In 3.2.9 betrachten wir die entgegengesetzte Ebene von  $E\mathcal{H}_t$ , deswegen erinnern wir hier an die Definition der entgegengesetzten Ebene:

**3.2.8 Definition.** [30, 1.1, 1.4] *Sei  $(P, \mathcal{L})$  eine stabile Ebene. Sei  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$  die Menge der kompakten Geraden und sei  $N = \bigcup \mathcal{K} \subseteq P$  die Menge der Punkte, die mindestens auf einer kompakten Geraden liegen.*

*Für  $\mathcal{K} \neq \emptyset$  definieren wir die entgegengesetzte Ebene  $(P, \mathcal{L})^* := (\mathcal{K}, N)$ . Die Inzidenzrelation ist die inverse Inzidenzrelation von der in  $(P, \mathcal{L})$ .*

LÖWEN beweist in [30], dass die entgegengesetzte Ebene einer stabilen lp-Ebene immer eine stabile Ebene ist.

### 3. Beispiele

**3.2.9 Satz.** Für  $t \neq 0$  ist jeder Endomorphismus von  $E\mathcal{H}_t$  ein Automorphismus und es gilt  $\text{End}(E\mathcal{H}_t) = \text{Aut}(E\mathcal{H}_t) = \Omega|_{EH_t}$ .

**Beweis.** Die entgegengesetzte Ebene (vgl. 3.2.8) von  $E\mathcal{H}_t$  ist via Polarität isomorph zur hyperbolischen Ebene. Jeder Endomorphismus von  $E\mathcal{H}_t$  bildet die Menge der kompakten Geraden in sich ab und induziert folglich einen Endomorphismus auf der hyperbolischen Ebene. Die Endomorphismen-Halbgruppe der hyperbolischen Ebene ist die Kompressionshalbgruppe und ist eine Teilmenge von  $(\text{PGL}_3 \mathbb{R})|_{IH_t}$ . Sei  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $E\mathcal{H}_t$ . Dann gibt es nach 3.2.7 einen Endomorphismus  $[A]|_{IH_t} \in (\text{PGL}_3 \mathbb{R})|_{IH_t}$  der inneren hyperbolischen Ebenen derart, dass  $\varphi$  die Restriktion von  $[\iota_0 A^{-t} \iota_0] =: \tilde{\varphi}$  auf  $EH_t$  ist. Die Abbildung  $\tilde{\varphi}$  ist ein Element von  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Folglich ist  $\varphi$  eine lineare partielle Lineation von  $E\mathcal{H}_t$  mit  $\text{dom}(\varphi) = EH_t$ . Aus 3.2.6 folgt, dass  $\varphi \in \Omega|_{EH_t}$  gilt. Folglich ist  $\varphi$  ein Automorphismus von  $E\mathcal{H}_t$ . ■

**3.2.10 Bemerkung.** Die Tatsache, dass jeder Endomorphismus surjektiv auf der Geradenmenge ist, ist unabhängig vom Vorkommen von Endomorphismen: Für  $t \neq 0$  besitzt  $E\mathcal{H}_t$  keine echten Endomorphismen, für  $t=0$  erhalten wir nach 3.2.7 mithilfe der Polarität aus jedem Endomorphismus von  $I\mathcal{H}_t$  einen Endomorphismus auf  $E\mathcal{H}_t$ . In beiden Fällen sind die Endomorphismen surjektiv auf der Geradenmenge.

**3.2.11 Korollar.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{H}_t)$  mit  $\text{dom}(\psi) \cap IH_t \neq \emptyset$  und  $\text{dom} \psi \cap EH_t \neq \emptyset$ . Dann gibt es einen Automorphismus  $\omega \in \Omega$  so, dass  $\psi = \omega|_{\text{dom}(\psi)}$  gilt.

**Beweis.** Sei  $\psi \in \Psi$ . Nach Korollar 3.1.14 ist  $\psi|_{IH_t}$  eine lineare Abbildung. Sei also  $\psi|_{\text{dom}(\psi) \cap IH_t} = [A]|_{\text{dom}(\psi) \cap IH_t}$  für eine Abbildung  $[A] \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Da jeder Punkt von  $\text{dom}(\psi) \cap EH_t$  Schnittpunkt von zwei Geraden ist, welche  $IH_t$  schneiden, und die Fortsetzung einer partiellen Lineation nach 2.2.7 eindeutig ist, gilt  $\psi|_{\text{dom}(\psi) \cap EH_t} = [A]|_{\text{dom}(\psi) \cap EH_t}$ . Folglich ist  $\psi|_{\text{dom}(\psi) \cap EH_t}$  eine lineare partielle Lineation von  $E\mathcal{H}_t$ , welche sich nach 3.2.6 zu einem Automorphismus von  $E\mathcal{H}_t$  fortsetzen lässt. Wiederum wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt  $[A] \in \Omega$ . ■

Wir erhalten einen lokalen Fundamentalsatz für die äußere modifizierte hyperbolische Ebene:

**3.2.12 Satz.** Sei  $\psi$  eine partielle Lineation von  $E\mathcal{H}_t$ . Sei  $G \in \mathcal{L}_t$  eine kompakte Gerade von  $E\mathcal{H}_t$ , die mit  $\text{dom}(\psi)$  mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Das Bild von  $G$  unter  $\psi$  liege in einer kompakten Geraden von  $E\mathcal{H}_t$ . Dann lässt sich  $\psi$  eindeutig zu einem Automorphismus von  $\mathcal{H}_t$  fortsetzen.

**Beweis.** Das Definitionsgebiet  $\text{dom}(\psi)$  ist offen. Folglich ist  $G \cap \text{dom}(\psi)$  eine offene Menge von  $G$ . Die Menge der kompakten Geraden ist offen in  $\mathcal{L}_t$ . Folglich gibt es eine offene Menge kompakter Geraden derart, dass das Bild dieser Menge unter  $\psi$  in der Menge der kompakten Geraden liegt. Nach Korollar 2.3.6 lässt sich  $\psi$  zu einem Automorphismus von  $\mathcal{P}_2 \mathbb{R}$  fortsetzen. Folglich ist  $\psi$  eine lineare partielle Lineation von  $E\mathcal{H}_t$ , welche nach 3.2.6 zu einem Automorphismus von  $\mathcal{H}_t$  fortgesetzt werden kann. ■

### 3.2. Die modifizierte hyperbolische Ebene

Als Ausblick sei hier kurz erwähnt, dass sich das stabile Dreieck  $(E_t, (L_t^\Omega)_{E_t})$ , wobei  $L_t^\Omega = \{L_t^\omega \mid \omega \in \Omega\}$  ist, nicht in die reelle projektive Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  einbetten lässt. Das sieht man mithilfe des lokalen Fundamentalsatzes für stabile Dreiecke in  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  (2.3.6) und durch Betrachten von Paaren von Punktstandgruppen und Geradenstandgruppen. Der Beweis würde an dieser Stelle zu weit führen.

Sei  $\Phi := \Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)$  die Menge der linearen partiellen Lineationen von  $\mathcal{H}_t$ , also die Menge der partiellen Lineationen, die Restriktion einer Abbildung  $[A] \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$  sind. Wir wissen nun, dass jede Lineation  $\varphi \in \Phi$  eine Restriktion eines Automorphismus  $\omega \in \Omega$  oder eine Restriktion einer partiellen Lineation  $\sigma \in \Psi_{max}(I\mathcal{H}_t) \setminus \Omega|_{IH_t}$  der inneren hyperbolischen Ebene, die isomorph zur hyperbolischen Ebenen  $\mathcal{H}$  aus 3.1.12 ist. Nach 3.2.6 liegt im zweiten Fall das Definitionsgebiet von  $\varphi$  ganz in  $IH_t$ . Ob es partielle Lineationen gibt, die alle Geradenstücke von kompakten Geraden von  $E\mathcal{H}_t$ , die das Definitiongebiet schneiden, in Geraden der Menge  $\{L_t^\omega \mid \omega \in \Omega\}$  abbilden, bleibt als Frage offen. Wir betrachten im Folgenden die Menge  $\frac{\Phi}{\omega}$ .

**3.2.13 Lemma.** *Die Relation  $\omega$  ist auf  $\Phi$  eine Äquivalenzrelation und  $\frac{\Phi}{\omega}$  erfüllt die Verknüpfungsvoraussetzung.*

**Beweis.** Jede Lineation  $\varphi \in \Phi$  ist entweder Restriktion eines Automorphismus  $\omega \in \Omega$  oder Restriktion eines Elementes von  $\Psi_{max}(I\mathcal{H}_t) \setminus \Omega|_{IH_t}$ . In beiden Fällen gibt es nach 3.2.6 und 3.1.14 nur eine eindeutige Fortsetzung zu einer maximalen partiellen Lineation. Folglich ist  $\omega$  auf  $\Phi$  eine Äquivalenzrelation. Die Verknüpfung von zwei Elementen von  $\Phi$  ergibt immer eine lineare partielle Lineation von  $\mathcal{H}_t$ , die sich entweder nach 3.2.6 eindeutig zu einem Element von  $\Omega$  oder nach 3.1.14 eindeutig zu einem Element von  $\Psi_{max}(I\mathcal{H}_t) \setminus \Omega|_{IH_t}$  fortsetzen lässt. Folglich erfüllt  $\frac{\Phi}{\omega}$  die Verknüpfungsvoraussetzung. ■

Im Folgenden sehen wir, dass die Abbildung  $\omega : \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\omega}$  nicht offen ist:

**3.2.14 Bemerkung.** *Die Menge  $\frac{\Phi}{\omega}$  sei mit der Quotiententopologie versehen. Wir wählen eine offene Umgebung  $\llbracket C, U \rrbracket$  eines Automorphismus  $\varphi \in \text{PO}_3(\mathbb{R}, 1)^1$  so, dass die kompakte Menge  $C$  außerhalb der Quadrik  $Q$ , also in  $E\mathcal{H}_t$  liegt. Dann enthält die Umgebung  $\llbracket C, U \rrbracket$  keinen echten Endomorphismus der hyperbolischen Ebene  $I\mathcal{H}$ . Wir betrachten die saturierte Menge  $(\llbracket C, U \rrbracket^\omega)^{\omega^-}$ . Diese enthält die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $IH_t$ , das Innere der Quadrik. Da die Automorphismen der hyperbolischen Ebene auf dem Rand der Endomorphismen-Halbgruppe liegen (vgl. 3.1.13), liegt in jeder Umgebung von  $\varphi|_{I\mathcal{H}}$  ein echter Endomorphismus von  $I\mathcal{H}_t$ . Folglich ist  $(\llbracket C, U \rrbracket^\omega)^{\omega^-}$  keine Umgebung von  $\varphi|_{I\mathcal{H}}$  und die Quotientenabbildung ist nicht offen.*

Im Folgenden sehen wir, dass die Verknüpfung  $m_\omega$  nicht stetig ist, wenn  $\frac{\Phi}{\omega}$  mit der durch  $\Phi$  induzierten Spurtopologie versehen wird:

**3.2.15 Bemerkung.** *Wir identifizieren nun  $\frac{\Phi}{\omega}$  mit  $\Phi_{max} := \Phi \cap \Psi_{max}(\mathcal{H}_t)$ , den Elementen von  $\Phi$  mit maximalen Definitionsgebieten, und topologisieren  $\Phi_{max}$  mit der Spurtopologie. Wir wählen einen echten Endomorphismus der inneren hyperbolischen Ebene*

### 3. Beispiele

$\varphi \in \text{End}(\mathcal{IH}_t)$ . Dann ist  $\varphi$  ein Element von  $\Phi_{max}$ . Es gilt  $m_\omega(\varphi, \varphi^{-1}) = id_{\mathcal{H}_t}$ . Sei  $C$  eine kompakte Teilmenge von  $E\mathcal{H}_t$  und  $\llbracket C, U \rrbracket$  eine Umgebung von  $id_{\mathcal{H}_t}$ . Seien  $K(\varphi, D_1, \varepsilon_1)$  und  $K(\varphi^{-1}, D_2, \varepsilon_2)$  Umgebungen von  $\varphi$  bzw.  $\varphi^{-1}$ . Sei  $\varepsilon$  das Minimum von  $\varepsilon_2$  und dem Abstand von  $D_2$  zur Quadrik  $Q$ . Die partielle Lineation  $\gamma : x \mapsto (1 - \varepsilon)x$  ist ein Endomorphismus von  $\mathcal{IH}_t$  und folglich ein Element von  $\Psi_{max}$ . Außerdem ist die Menge  $D_2$  im Bild von  $\gamma$ , also ist diese auch im Bild von  $\varphi^{-1}\gamma$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\varphi^{-1}\gamma$  ein Element von  $K(\varphi^{-1}, D_2, \varepsilon_2)$  ist. Aber es gilt  $m_\omega(\varphi, \varphi^{-1}\gamma) = \gamma$  und  $\gamma$  liegt nicht in  $\llbracket C, U \rrbracket$ , weil  $\gamma$  nicht auf  $C$  definiert ist.

### 3.3. Die lokale Gruppe der Endomorphismen

Sei  $(\Psi, \diamond) := (\Psi(\mathcal{P}), \diamond)$  die lokale Halbgruppe der partiellen Lineationen der stabilen lp-Ebene  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ . Wir suchen im Folgenden die kleinste lokale Gruppe, welche die Endomorphismen-Halbgruppe  $\text{End}(\mathcal{P})$  enthält.

**3.3.1 Definition.** Sei  $\text{End}_{\mathcal{P}} := \text{End}(\mathcal{P})$  die Menge der Endomorphismen von  $\mathcal{P}$ . Wir bezeichnen mit  $\text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$  die Menge  $\{\psi^{-1} \mid \psi \in \text{End}_{\mathcal{P}}\}$  und definieren

$$E := \text{End}_{\mathcal{P}} \cup \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}} .$$

Die Relation  $\omega$  ist auf  $E$  eine Äquivalenzrelation, weil  $E$  Teilmenge von  $\Psi_{max}$  ist. Die Äquivalenzklassen sind einelementig.

**3.3.2 Lemma.**  $\frac{E}{\omega}$  erfüllt die Verknüpfungsvoraussetzung für  $m_\omega$  aus 1.7.6.

**Beweis.** Seien  $\alpha, \beta \in E$ . Dann gilt  $\{\alpha\} = [\alpha]_\omega$  und  $\{\beta\} = [\beta]_\omega$ . Seien  $\gamma, \tilde{\gamma} \in E$  mit  $\alpha \diamond \beta = \gamma|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} = \tilde{\gamma}|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)}$ . Wir zeigen nun, dass in allen Fällen  $\gamma = \tilde{\gamma}$  gilt. Wenn  $\gamma, \tilde{\gamma} \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  sind, dann gilt  $\text{dom}(\gamma) = \text{dom}(\tilde{\gamma}) = P$ . Folglich gilt  $\gamma = \tilde{\gamma}$ , denn beide Lineationen sind die eindeutige Fortsetzung von  $\alpha \diamond \beta$  auf  $P$ . Wenn  $\gamma, \tilde{\gamma} \in \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$  sind, dann gilt  $\text{Bild}(\gamma) = \text{Bild}(\tilde{\gamma}) = P$ . Demnach gilt  $\gamma^{-1} = \tilde{\gamma}^{-1}$ , denn beide Lineationen sind die Fortsetzung von  $(\alpha \diamond \beta)^{-1}$  auf  $P$ . Also gilt  $\gamma = \tilde{\gamma}$ . Ansonsten gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\gamma \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  und  $\tilde{\gamma} \in \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$ . Folglich gilt  $\text{dom}(\gamma) \supseteq \text{dom}(\tilde{\gamma}) \supseteq \text{dom}(\alpha \diamond \beta)$  und beide Lineationen sind eine Fortsetzung von  $\alpha \diamond \beta$ . Also ist  $\gamma$  eine Fortsetzung von  $\tilde{\gamma}$ . Da beide Lineationen Elemente von  $\Psi_{max}(\mathcal{P})$  sind, folgt  $\gamma = \tilde{\gamma}$ . ■

Nach 1.7.7 ist die Verknüpfung  $m_\omega$  aus 1.7.6 auf  $\frac{E}{\omega}$  wohldefiniert. Ab jetzt identifizieren wir  $E$  mit  $\frac{E}{\omega}$  und erhalten eine partielle Verknüpfung auf  $E$ , die wir mit  $m_\omega^E$  bezeichnen. Für  $\psi, \varphi \in E$  gilt

$$(\psi, \varphi) \in \text{dom}(m_\omega^E) \iff \begin{cases} (\psi, \varphi) \in \text{dom}(\diamond) \\ \exists \gamma \in E : \psi \diamond \varphi = \gamma|_{\text{dom}(\psi \diamond \varphi)} \end{cases} .$$

Es gilt dann  $m_\omega^E(\psi, \varphi) = \gamma$ . Wenn  $\omega$  auf  $\Psi$  eine Äquivalenzrelation ist, dann stimmt  $m_\omega^E$  mit der partiellen Verknüpfung überein, die durch  $(\frac{\Psi}{\omega}, m_\omega)$  auf  $E$  induziert wird, und  $m_\omega^E(\psi, \varphi)$  ist das maximale Element in  $[\psi \diamond \varphi]_\omega$ .

### 3.3. Die lokale Gruppe der Endomorphismen

**3.3.3 Lemma.** Sei  $\psi \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  und  $\varphi \in \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$ , dann ist  $(\psi, \varphi) \in \text{dom}(m_{\otimes}^E)$  genau dann, wenn  $\emptyset \neq (\text{Bild}(\psi) \cap \text{dom}(\varphi)) \in \{\text{Bild}(\psi), \text{dom}(\varphi)\}$ . Es gilt dann  $m_{\otimes}^E(\psi, \varphi) = \psi \diamond \varphi$ .

**Beweis.** Sei  $\psi \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  und  $\varphi \in \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$  und  $\emptyset \neq \text{Bild}(\psi) \cap \text{dom}(\varphi)$ . Dann ist  $\psi \diamond \varphi$  in  $(\Psi, \diamond)$  definiert. Wir nehmen an, dass sich die partielle Lineation  $\psi \diamond \varphi$  zu einer Lineation  $\gamma \in E$  fortsetzen lässt. Da das Definitionsgebiet von  $\varphi^{-1}$  die gesamte Punktmenge  $P$  ist, ist  $\gamma \diamond \varphi^{-1}$  in  $(\Psi, \diamond)$  definiert, und wegen  $\gamma|_{\text{dom}(\psi \diamond \varphi)} = \psi \diamond \varphi$  folgt, dass  $\gamma \diamond \varphi^{-1}$  eine Fortsetzung von  $\psi|_{\text{dom}(\psi \diamond \varphi)}$  ist. Also ist  $\gamma \diamond \varphi^{-1}$  eine Einschränkung von  $\psi$ .

Ist  $\gamma \in \text{End}_{\mathcal{P}}$ , dann ist wegen  $\text{Bild}(\gamma) \subseteq P = \text{dom}(\varphi^{-1})$  das Definitionsgebiet von  $\gamma \diamond \varphi^{-1}$  gleich dem Definitionsgebiet von  $\gamma$ , welches als  $P$  vorausgesetzt ist. Folglich ist  $\gamma \diamond \varphi^{-1} = \psi$  und es gilt

$$\text{dom}(\varphi) = \text{Bild}(\varphi^{-1}) \supseteq \text{Bild}(\gamma \diamond \varphi^{-1}) = \text{Bild}(\psi) .$$

Ist  $\gamma \in \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$ , dann folgt  $\gamma \diamond \varphi^{-1} = \psi|_{\text{dom}(\gamma)}$ . Da  $\text{Bild}(\gamma) = P$  gilt, erhalten wir

$$\text{Bild}(\psi) \supseteq \text{Bild}(\psi|_{\text{dom}(\gamma)}) = \text{Bild}(\gamma \diamond \varphi^{-1}) = \text{Bild}(\varphi^{-1}) = \text{dom}(\varphi) .$$

Umgekehrt gilt: Wenn  $\text{Bild}(\psi) \cap \text{dom}(\varphi) \in \{\text{Bild}(\psi), \text{dom}(\varphi)\}$  ist, dann gilt  $\text{dom}(\psi \diamond \varphi) = P$  oder  $\text{Bild}(\psi \diamond \varphi) = P$  und es folgt, dass  $\psi \diamond \varphi$  ein Element von  $E$  ist. ■

**3.3.4 Satz.**  $(E, m_{\otimes}^E)$  ist eine lokale Gruppe im Sinne von Malcev.

**Beweis.** Wir erinnern uns an die Definition 1.7.2. Die Axiome (i), (ii) und (iii) sind erfüllt. Zu zeigen bleibt nur noch Axiom (iv), die Assoziativität.  $(\Psi, \diamond)$  ist nach 1.4.9 generell assoziativ. Deswegen werden Produkte mit der Verknüpfung  $\diamond$  ohne Klammern geschrieben. Wir zeigen im Folgenden für  $\alpha, \beta, \gamma \in E$ : Wenn  $(\alpha, \beta)$  und  $(\beta, \gamma)$  Elemente von  $\text{dom}(m_{\otimes}^E)$  sind und  $m_{\otimes}^E(m_{\otimes}^E(\alpha, \beta), \gamma)$  oder  $m_{\otimes}^E(\alpha, m_{\otimes}^E(\beta, \gamma))$  definiert ist, dann ist  $\alpha \diamond \beta \diamond \gamma$  in  $(\Psi, \diamond)$  definiert. Daraus folgt dann die Gültigkeit von Axiom (iv). Denn sei  $\emptyset \neq D := \text{dom}(\alpha \diamond \beta \diamond \gamma)$  und  $\delta := m_{\otimes}^E(\alpha, m_{\otimes}^E(\beta, \gamma))$  definiert, dann ist  $D^{\alpha \diamond \beta}$  eine Teilmenge von  $(\text{Bild}(m_{\otimes}^E(\alpha, \beta)) \cap \text{dom}(\gamma))$ , denn es gilt  $m_{\otimes}^E(\alpha, \beta)|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} = \alpha \diamond \beta$ . Also ist  $(m_{\otimes}^E(\alpha, \beta), \gamma) \in \text{dom}(\diamond)$  und  $\delta$  ist eine Fortsetzung von  $m_{\otimes}^E(\alpha, \beta) \diamond \gamma$  zu einem Element aus  $E$ . Folglich ist  $m_{\otimes}^E(m_{\otimes}^E(\alpha, \beta), \gamma)$  definiert und es gilt  $m_{\otimes}^E(m_{\otimes}^E(\alpha, \beta), \gamma) = \delta$ . Falls statt der Definiertheit von  $m_{\otimes}^E(\alpha, m_{\otimes}^E(\beta, \gamma))$  die Definiertheit von  $m_{\otimes}^E(m_{\otimes}^E(\alpha, \beta), \gamma)$  vorausgesetzt ist, schließen wir analog.

Wenn  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\text{End}_{\mathcal{P}})^3$  oder  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\text{End}_{\overline{\mathcal{P}}})^3$  gilt, dann ist  $\alpha \diamond \beta \diamond \gamma$  definiert, da  $\text{End}_{\mathcal{P}}$  eine Halbgruppe ist.

Seien im Folgenden  $\psi_1, \psi_2 \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  und  $\varphi \in \text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$ .

Da  $\text{Bild}(\varphi) = \text{dom}(\psi_1)$  und  $\text{dom}(\psi_2) = P$  gilt, ist  $\varphi \diamond \psi_1 \diamond \psi_2$  in  $(\Psi, \diamond)$  definiert.

Weil  $\text{Bild}(\varphi) = \text{dom}(\psi_2)$  gilt, ist  $\varphi \diamond \psi_2$  in  $(\Psi, \diamond)$  definiert. Sei nun  $(\psi_1, \varphi) \in \text{dom}(m_{\otimes}^E)$ , dann ist nach Lemma 3.3.3 die Punktmenge  $D := \text{Bild}(\psi_1) \cap \text{dom}(\varphi)$  nicht leer, folglich liegt  $D^{\psi_1^{-1}}$  im Definitionsgebiet von  $\psi_1 \diamond \varphi \diamond \psi_2$ .

Wenn  $m_{\otimes}^E(m_{\otimes}^E(\psi_1, \psi_2), \varphi)$  definiert ist, dann ist  $(\psi_1 \diamond \psi_2) \diamond \varphi$  nach Lemma 3.3.3 in  $(\Psi, \diamond)$  definiert.

Falls  $m_{\otimes}^E(\psi_1, m_{\otimes}^E(\psi_2, \varphi))$  in  $(E, m_{\otimes}^E)$  definiert ist, dann ist nach Lemma 3.3.3 auch  $\psi_2 \diamond \varphi \in E$  und nach demselben Lemma folgt, dass  $\psi_1 \diamond (\psi_2 \diamond \varphi)$  in  $(\Psi, \diamond)$  definiert ist.

### 3. Beispiele

Für Tripel aus den drei Lineationen  $\psi \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{End}_{\bar{\mathcal{P}}}$  erhalten wir aus oben Bewiesenem die gewünschten Aussagen durch das Betrachten der Tripels aus den drei Lineationen  $\psi^{-1} \in \text{End}_{\bar{\mathcal{P}}}$  und  $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1} \in \text{End}_{\mathcal{P}}$  und der Tatsache, dass für  $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$  genau dann  $\alpha \diamond \beta \diamond \gamma$  definiert ist, wenn  $(\alpha \diamond \beta \diamond \gamma)^{-1} = \gamma^{-1} \diamond \beta^{-1} \diamond \alpha^{-1}$  definiert ist. ■

Sei  $\mathcal{T}_E$  die von  $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P})}$  auf  $E$  induzierte Spurtopologie. Im Folgenden untersuchen wir die topologischen Eigenschaften von  $(E, \mathcal{T}_E)$  unter der Voraussetzung, dass  $P$  eine Mannigfaltigkeit ist. Wir werden feststellen, dass es im Allgemeinen keine Umgebung  $\mathcal{V}$  von  $\text{id}$  in  $E$  gibt, dass  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  in dem Definitionsgebiet der Verknüpfung  $\text{dom}(m_{\omega}^E)$  enthalten ist, die lokale Gruppe  $(E, m_{\omega}^E)$  aber alle anderen Axiome einer topologischen lokalen Gruppe erfüllt.

**3.3.5 Lemma.** *Sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Dann ist das Invertieren in  $(E, \mathcal{T}_E)$  eine stetige Abbildung.*

**Beweis.** Nach Lemma 1.5.20 ist das Invertieren in  $(\Psi, \mathcal{T}_{\Psi})$  stetig. Da das Invertieren in  $E$  die Restriktion des Invertierens in  $\Psi$  auf  $E$  ist, folgt die Stetigkeit des Invertierens in  $(E, \mathcal{T}_E)$ . ■

**3.3.6 Lemma.** *Sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Dann ist die Verknüpfung  $m_{\omega}^E$  in  $(E, \mathcal{T}_E)$  stetig.*

**Beweis.** Sei  $\tilde{E} := (E \times E \setminus (\text{End}_{\bar{\mathcal{P}}} \setminus \text{Aut}_{\mathcal{P}}) \times (\text{End}_{\mathcal{P}} \setminus \text{Aut}_{\bar{\mathcal{P}}})) \cap \text{dom}(m_{\omega}^E)$ . Nach Lemma 3.3.3 stimmt  $m_{\omega}^E$  auf  $\tilde{E}$  mit der Verknüpfung  $\diamond$  überein. Weil  $\mathcal{T}_E$  die Spurtopologie ist und da  $\diamond$  nach 1.5.20 stetig ist, ist  $m_{\omega}^E$  nach [3, III.8.2] stetig auf  $\tilde{E}$ .

Zu beweisen bleibt die Stetigkeit auf dem restlichen Definitionsgebiet. Seien  $(\varphi, \psi) \in (\text{End}_{\bar{\mathcal{P}}} \times \text{End}_{\mathcal{P}}) \cap \text{dom}(m_{\omega}^E)$ . Sei  $\alpha := m_{\omega}^E(\varphi, \psi)$ . Die Lineation  $\alpha$  ist eine Fortsetzung der Lineation  $\varphi \diamond \psi$ . Da  $\text{Bild}(\varphi) = \text{dom}(\psi)$  ist, gilt  $\text{dom}(\varphi \diamond \psi) = \text{dom}(\varphi)$ . Es folgt  $\text{dom}(\alpha) \supseteq \text{dom}(\varphi)$  und  $\text{Bild}(\alpha) \supseteq \text{Bild}(\psi)$ . Im Folgenden sind die Subbasiselemente  $\llbracket C, U \rrbracket$  Elemente der Topologie  $\mathcal{T}_{\Psi}$ . Sei  $\llbracket C, U \rrbracket \cap E$  eine Umgebung von  $\alpha$  in  $E$ . Nach 1.5.10 finden wir endlich viele kompakte Teilmengen  $C_1, \dots, C_k$  von  $\text{dom}(\varphi)$  und offene Teilmengen  $U_1, \dots, U_k$  in  $P$  derart, dass  $\bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, U_i \rrbracket \cap \text{End}_{\mathcal{P}} \subset \llbracket C, U \rrbracket \cap E$  gilt. Da  $C_i^{\alpha} = C_i^{\varphi \diamond \psi} \subset \text{Bild}(\psi)$  gilt, können die Mengen  $U_i$  als Teilmengen von  $\text{Bild}(\psi)$  gewählt werden. Weil nach 3.3.5 das Invertieren in  $E$  stetig ist, finden wir eine Umgebung  $\mathcal{O}$  von  $\alpha^{-1}$  in  $E$  so, dass  $\mathcal{O}^{-1} \subseteq \llbracket C, U \rrbracket \cap E$  gilt. Insbesondere sind alle Elemente aus  $\mathcal{O}^{-1}$  auf  $C$  definiert. Wie oben finden wir endlich viele kompakte Mengen  $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_l$  in  $\text{Bild}(\psi)$  und offene Mengen  $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_l$  in  $\text{dom}(\varphi)$  derart, dass  $\bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket \cap \text{End}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{O}$  gilt. Insbesondere liegt für alle  $\gamma \in \bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket \cap \text{End}_{\mathcal{P}}$  die Menge  $C$  in  $\text{Bild}(\gamma)$ . Also gilt insgesamt

$$\bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, U_i \rrbracket \cap \bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket^{-1} \cap E \subseteq \llbracket C, U \rrbracket \cap E.$$

Die Umgebung  $\bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, U_i \rrbracket \cap \bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket^{-1}$  ist eine offene Umgebung der Lineation  $\varphi \diamond \psi$  in  $\Psi(\mathcal{P})$ . Nach 1.5.20 ist die Verknüpfung  $\diamond$  stetig in  $\text{dom}(\diamond)$  und  $\text{dom}(\diamond)$  ist offen



### 3.3. Die lokale Gruppe der Endomorphismen

in  $\Psi(\mathcal{P}) \times \Psi(\mathcal{P})$ . Folglich finden wir Umgebungen  $\mathcal{A}$  von  $\varphi$  und  $\mathcal{B}$  von  $\psi$  in  $\Psi(\mathcal{P})$  derart, dass  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \text{dom}(\diamond)$  und

$$\mathcal{A} \diamond \mathcal{B} \subset \bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, U_i \rrbracket \cap \bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket^{-1}$$

gilt. Insgesamt folgt, dass die Mengen  $\mathcal{A} \cap E$  und  $\mathcal{B} \cap E$  offene Umgebungen von  $\varphi$  bzw.  $\psi$  sind und

$$m_{\otimes}^E(\mathcal{A} \cap E, \mathcal{B} \cap E) \subset \llbracket C, U \rrbracket \cap E$$

gilt. Denn für  $\alpha \in \mathcal{A} \cap E$  sowie  $\beta \in \mathcal{B} \cap E$  und mit  $\gamma \in E$  mit der Eigenschaft  $\gamma|_{\text{dom}(\alpha \diamond \beta)} = \alpha \diamond \beta$  gilt

$$\alpha \diamond \beta \in \bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, U_i \rrbracket \cap \bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket^{-1}$$

und es folgt

$$\gamma \in \bigcap_{i=1}^k \llbracket C_i, U_i \rrbracket \cap \bigcap_{j=1}^l \llbracket \tilde{C}_j, \tilde{U}_j \rrbracket^{-1}.$$

Also ist  $m_{\otimes}^E$  stetig. ■

Das Definitionsgebiet  $\text{dom}(m_{\otimes}^E)$  enthält nicht immer das kartesische Produkt  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  einer Umgebung  $\mathcal{V}$  der Identität, wie folgendes Beispiel demonstriert:

**3.3.7 Beispiel.** Wir betrachten die reelle hyperbolische Ebene  $\mathcal{H} := (H, \mathcal{L}_H)$  wie in 3.1.12. Sei  $\mathcal{V}$  eine beliebige Umgebung des Neutralelements  $\text{id}$  in  $\Psi(\mathcal{H})$ . Nach 1.5.18 finden wir endlich viele Umgebungen  $K(\text{id}, D_i, \varepsilon_i)$  mit  $i \in E$  so, dass die Schnittmenge  $\bigcap_{i \in E} K(\text{id}, D_i, \varepsilon_i)$  eine Teilmenge von  $\mathcal{V}$  ist. Da  $H$  nicht kompakt ist und alle kompakten Kugeln  $D_i$  Teilmengen von  $H$  sind, wird  $H$  nicht durch die Vereinigung der  $D_i$  überdeckt und die Kugeln  $D_i$  besitzen einen positiven Abstand zum Rand des Abschlusses von  $H$ . Sei  $\varepsilon$  das Minimum der  $\varepsilon_i$  und den Abständen von  $D_i$  zum Rand von  $\overline{H}$ . Die Lineationen

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow H^\sigma : x \mapsto \frac{2 - \varepsilon}{2}x \\ \tau : H &\rightarrow H^\tau : x \mapsto \frac{2 - \varepsilon}{2}x + \left(\frac{\varepsilon}{4}, 0, 0\right)\mathbb{R} \end{aligned}$$

sind Endomorphismen von  $\mathcal{H}$  und liegen mitsamt ihren Inversen in  $\bigcap_{i \in E} K(\text{id}, D_i, \varepsilon_i) \cap E$ . Es gilt  $\text{Bild}(\sigma) \cap \text{Bild}(\tau) \notin \{\text{Bild}(\sigma), \text{Bild}(\tau)\}$  und nach 3.3.3 folgt, dass  $(\sigma, \tau^{-1})$  kein Element von  $\text{dom}(m_{\otimes}^E)$  ist.

**3.3.8 Satz.** Sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Die lokale Gruppe  $(E, \mathcal{T}_E)$  ist lokalkompakt.



### 3. Beispiele

**Beweis.** Sei  $\psi \in E$ . Nach Satz 1.6.8 finden wir  $D \subset P$  und  $e > 0$  derart, dass  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)$  eine kompakte Umgebung von  $\psi$  in  $(\Psi, \mathcal{T}_\Psi)$  ist. Wir betrachten eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \cap E\right)^\mathbb{N}$ . Diese besitzt einen Häufungspunkt in  $\Psi$ . Gegebenenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge können wir also annehmen, dass die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\tilde{\varphi} \in \left(\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon)\right)$  konvergiert. Wenn es in  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(\hat{\varphi}_n)_{n \in K \subseteq \mathbb{N}}$  von Endomorphismen gibt, dann konvergiert diese Teilfolge gegen  $\tilde{\varphi}$  und wegen 1.6.5 gegen einen Endomorphismus  $\varphi$ , der eine Fortsetzung von  $\tilde{\varphi}$  ist. Wenn es in  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Teilfolge von Endomorphismen gibt, dann gibt es eine Teilfolge  $(\varphi'_n)_{n \in T \subseteq \mathbb{N}}$  von inversen Endomorphismen. In diesem Fall konvergiert die Folge  $(\varphi'_n)_{n \in T \subseteq \mathbb{N}}$  gegen  $\tilde{\varphi}$ . Nach 1.5.20 ist das Invertierens in  $(\Psi, \mathcal{T}_\Psi)$  stetig. Folglich konvergiert die Folge der Inversen dieser Teilfolge, also die Folge der Endomorphismen  $(\varphi'^{-1}_n)_{n \in T \subseteq \mathbb{N}}$ , gegen  $\tilde{\varphi}^{-1}$ . Wegen 1.6.5 konvergiert diese Folge auch gegen den Endomorphismus  $\varphi'^{-1}$ , der Fortsetzung der partiellen Lineation  $\tilde{\varphi}^{-1}$  ist. Insgesamt folgt, dass  $\tilde{K}(\psi, D, \varepsilon) \cap E$  eine kompakte Umgebung von  $\psi$  ist. ■

**3.3.9 Satz.** Sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Die Topologie  $\mathcal{T}_E$  erfüllt die Trennungseigenschaft  $T_2$ .

**Beweis.** Sei  $\alpha \neq \beta \in E$ . Wir finden Subbasiselemente  $\llbracket C_1, U_1 \rrbracket$  und  $\llbracket C_2, U_2 \rrbracket$  in  $\mathcal{T}_\Psi$  mit kompakten Umgebungen  $C_1$  und  $C_2$  so, dass  $\alpha \in \llbracket C_1, U_1 \rrbracket \not\subseteq \beta$  und  $\beta \in \llbracket C_2, U_2 \rrbracket \not\subseteq \alpha$  gilt, ansonsten besitzen  $\alpha$  und  $\beta$  nach 1.5.13 disjunkte Umgebungen.

Da  $E$  nach 3.3.8 lokalkompakt ist, finden wir kompakte Umgebungen  $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \llbracket C_1, U_1 \rrbracket \cap E$  bzw.  $\mathcal{C}_\beta \subseteq \llbracket C_2, U_2 \rrbracket \cap E$  von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in  $E$ . Also sind alle Lineationen  $\gamma \in \mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta$  auf  $C_1 \cup C_2$  definiert. Für  $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in E$  gilt  $\gamma_1|_{C_1 \cup C_2} \neq \gamma_2|_{C_1 \cup C_2}$ , da die Fortsetzung von  $\gamma_1|_{C_1 \cup C_2}$  zu einem Endomorphismus oder zu einem inversen Endomorphismus eindeutig ist. Folglich gibt es nach 1.5.13 für alle  $\gamma \in \mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta$  disjunkte offene Umgebungen  $\mathcal{A}_\gamma$  von  $\alpha$  und  $\mathcal{B}_\gamma$  von  $\gamma$  in  $\Psi$ . Die Mengen  $\mathcal{B}_\gamma \cap E$  bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta$ . Folglich finden wir eine endliche Menge  $\mathcal{E}$  in  $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta$  so, dass  $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{E}} \mathcal{B}_\gamma \cap E \supseteq \mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta$  gilt. Dann sind  $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_\gamma \cap \mathcal{C}_\alpha$  und  $\mathcal{C}_\beta$  disjunkte Umgebungen von  $\alpha$  bzw.  $\beta$ . ■

**3.3.10 Korollar.** Sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Dann erfüllt die Topologie  $\mathcal{T}_E$  die Trennungseigenschaft  $T_3$ .

**Beweis.** Ein lokalkompakter Raum, der  $T_2$  erfüllt erfüllt auch  $T_3$  [11, 5.6]. ■

**3.3.11 Korollar.** Sei  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Dann ist die Topologie von  $E$  metrisierbar und separabel.

**Beweis.** Die Topologie von  $E$  erfüllt die Trennungseigenschaften  $T_2$  und  $T_3$  und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie (vgl. 3.3.9, 3.3.10, 1.5.3). Folglich ist  $E$  nach dem Urysohnschen Metrisationssatz metrisierbar und separabel [11, 10.6]. ■

## 4. Die Moulton-Ebenen

### 4.1. Grundlegendes zu den Moulton-Ebenen

**4.1.1 Definition.** Die reelle projektive Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{R} = (\overline{P}, \overline{\mathcal{L}})$  besitzt als Punktmenge  $\overline{P}$  die Menge der eindimensionalen Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ . Wir betrachten jeden zweidimensionalen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$  als Menge der in ihm enthaltenen eindimensionalen Unterräume. Jede Gerade  $L \in \overline{\mathcal{L}}$  ist eine solche Menge. Die Inzidenzrelation ist die Elementrelation. Wir benutzen für einen Punkt  $\mathbb{R}(x, y, z)$  aus  $\overline{P}$  die Kurzschreibweise  $[x, y, z]$ . Als Ferngerade von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  bezeichnen wir die Gerade  $g_\infty := \{[x, y, 0] \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ . Die reelle affine Ebene  $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (P, \mathcal{L})$  besitzt die Punktmenge  $P := \overline{P} \setminus g_\infty$  und die Geradenmenge  $\mathcal{L} := \{L \cap P \mid L \in \overline{\mathcal{L}} \setminus \{g_\infty\}\}$ .

Die Unterebene  $(H_R, \mathcal{L}_{H_R})$  mit  $H_R := \{[x, y, 1] \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$  bezeichnen wir als rechte Halbebene, die Unterebene  $(H_L, \mathcal{L}_{H_L})$  mit  $H_L := \{[x, y, 1] \mid x < 0, y \in \mathbb{R}\}$  bezeichnen wir als linke Halbebene. Außerdem definieren wir die Mengen  $H_{\overline{R}} := \{[x, y, 1] \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$  und  $H_{\overline{L}} := \{[x, y, 1] \mid x \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$ .

Die Geraden der reellen affinen bzw. der reellen projektiven Ebene bezeichnen wir in folgender Weise:

**4.1.2 Definition.** Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $L_x := \{[x, t, 1] \mid t \in \mathbb{R}\}$  und  $l_x := L_x \cup \{[0, 1, 0]\}$ . Für  $s, t \in \mathbb{R}$  sei  $L_{s,t} := \{[x, sx + t, 1] \mid x \in \mathbb{R}\}$  und  $l_{s,t} := L_{s,t} \cup \{[1, s, 0]\}$ .

In diesem Kapitel werden Wirkungen der Gruppe  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  auf der Punktmenge  $\overline{P}$  eine Rolle spielen. Deswegen ist es günstig die folgende Definition der Moulton-Ebenen zu verwenden:

**4.1.3 Definition.** Für reelle  $k \neq 0$  sei die affine Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k := (P, \mathcal{L}_k)$  gegeben durch die Punktmenge  $P = \{[x, y, 1] \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  und die Geradenmenge

$$\mathcal{L}_k := \{L_{s,t} \mid s \geq 0, t \in \mathbb{R}\} \cup \{L_{s,t}^* \mid s < 0, t \in \mathbb{R}\} \cup \{L_x \mid x \in \mathbb{R}\} \quad ,$$

$$\text{mit } L_{s,t}^* := \{[x, sx + t, 1] \mid x \leq 0\} \cup \{[x, skx + t, 1] \mid x \geq 0\} \quad .$$

Das heißt, die Geraden der Moulton-Ebene sind die Geraden der reellen affinen Ebene, wobei die Geraden mit negativer Steigung durch (an der Knickachse  $l_0$ ) geknickte Geraden ersetzt worden sind.

Die Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k} := (\overline{P}, \overline{\mathcal{L}_k})$  ist der projektive Abschluss der affinen Ebene  $\mathcal{M}_k$ . Hierbei ist  $\overline{P} = P \cup g_\infty$  mit der in 4.1.1 definierten Punktmenge  $\overline{P}$  und der Ferngerade  $g_\infty$ . Außerdem ist

$$\overline{\mathcal{L}_k} := \{l_{s,t} \mid s \geq 0, t \in \mathbb{R}\} \cup \{l_{s,t}^* \mid s < 0, t \in \mathbb{R}\} \cup \{l_x \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{g_\infty\}$$

$$\text{mit } l_{s,t}^* := L_{s,t}^* \cup \{[1, s, 0]\}.$$

Es ist bekannt, dass die Moulton-Ebenen nicht desarguessch sind [55, 31.25]. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 5 eine Desargues-Figur gezeichnet, welche sich nicht schließt.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

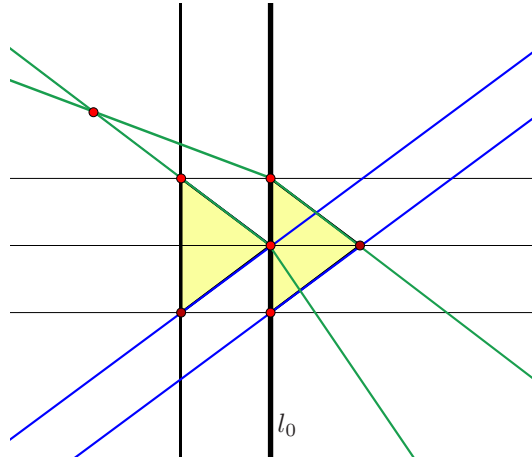


Abbildung 5: Eine sich nicht schließende Desargues-Figur in  $\mathcal{M}_k$

**4.1.4 Bemerkung.** Die Zuordnung der Fernpunkte zu den Geraden in  $\mathcal{L}_k \setminus \{L_x \mid x \in \mathbb{R}\}$  erfolgt nach folgender Regel: Wenn  $M \in \mathcal{L}_k$  in der linken Halbebene mit  $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{L}}$  übereinstimmt, dann ist  $\tilde{M} \wedge g_\infty$  der Fernpunkt von  $M$ .

Zu beachten ist, dass die durch  $\mathbb{R}^3$  auf  $\overline{\mathcal{M}_k}$  induzierte Topologie nicht mit der Topologie übereinstimmt, durch die  $\overline{\mathcal{M}_k}$  zu einer kompakten projektiven Ebene wird. Dies sehen wir daran, dass in der durch  $\mathbb{R}^3$  induzierten Topologie der Punkt  $[1, s, 0]$  ein Häufungspunkt der Punkte des Geradenstücks  $L_{s,p}^* \cap H_L$  ist, wohingegen sich die Punkte des Geradenstücks  $L_{s,p}^* \cap H_R$  nicht gegen  $[1, s, 0]$  sondern gegen  $[1, ks, 0]$  häufen. In [55, 32.1 u. 32.2] ist beschrieben, auf welche Weise die Topologie auf dem projektiven Abschluss einer  $\mathbb{R}^2$ -Ebene konstruiert wird, dass man eine kompakte projektive Ebene erhält: Den vervollständigten Geradenraum  $\overline{\mathcal{L}}$  betrachtet man als Einpunkt-Kompaktifizierung von  $\mathcal{L}$ . Die Mengen der Form  $\mathcal{J}_p \wedge \mathcal{J}_q$ , wobei  $p, q \in \overline{P}$  und  $\mathcal{J}_p$  bzw.  $\mathcal{J}_q$  disjunkte offene Intervalle in den Büscheln  $\overline{\mathcal{L}}_p$  bzw.  $\overline{\mathcal{L}}_q$  sind, bilden eine Subbasis der Topologie für den Punktraum  $\overline{P}$ .

**4.1.5 Bemerkung.** Für jede partielle Lineation  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$  der Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k$  gibt es eine offene Teilmenge  $U \subseteq \text{dom}(\psi)$  so, dass die Abbildung  $\psi$  auf  $U$  mit einer Abbildung  $\alpha \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  übereinstimmt. Wir sagen dann  $\alpha|_U \in \Psi(\mathcal{M}_k) \cap \Psi(\mathcal{A}_2 \mathbb{R})$ .

**Beweis.** Wir wählen die Menge  $U$  so, dass  $U$  und  $U^\psi$  jeweils eine Teilmenge von entweder  $H_R$  oder  $H_L$  sind. Nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] ist  $\psi|_U$  die Einschränkung eines Automorphismus der reellen projektiven Ebene. ■

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $\text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  die reellen  $2 \times 2$  Matrizen mit positiver Determinante.

**4.1.6 Lemma.** Wir betrachten die Abbildung

$$\lambda : \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \text{PGL}_3 \mathbb{R} : A \mapsto \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & A & \end{array} \right].$$

#### 4.1. Grundlegendes zu den Moulton-Ebenen

Die Abbildung  $\lambda$  ist ein stetiger und offener Gruppenhomomorphismus.

**Beweis.** Das Rechnen mit Blockmatrizen liefert, dass die Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir betrachten zuerst die Abbildung

$$\tilde{\lambda} : \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_3 \mathbb{R} : A \mapsto \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & A \end{array} \right).$$

Sei  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  und sei  $\mathcal{U}(A)$  eine offene Umgebungsbasis von  $A$  in  $\text{GL}_2^+ \mathbb{R}$ . Die Menge

$$\mathcal{U}_{A^{\tilde{\lambda}}} := \left\{ \left\{ B^{\tilde{\lambda}} \mid B \in V_A \right\} \mid V_A \in \mathcal{U}(A) \right\}$$

ist eine offene Umgebungsbasis von  $A^{\tilde{\lambda}}$  in  $(\text{GL}_2^+ \mathbb{R})^{\tilde{\lambda}}$ . Denn  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  trägt die Produkttopologie und  $(\text{GL}_2^+ \mathbb{R})^{\tilde{\lambda}} \subset \text{GL}_3 \mathbb{R}$  ist mit der Spurtopologie versehen. Somit gilt für jede offene Umgebung  $V_A \in \mathcal{U}(A)$

$$(V_A)^{\tilde{\lambda}} = \left\{ B^{\tilde{\lambda}} \mid B \in V_A \right\}.$$

Weil die Abbildung  $\tilde{\lambda}$  injektiv ist, erhalten wir daraus, dass  $\tilde{\lambda}$  offen und stetig ist. Die Abbildung

$$[\ ] : \text{GL}_3 \mathbb{R} \rightarrow \text{PGL}_3 \mathbb{R} : X \rightarrow [X]$$

ist stetig, da das die Quotientenabbildung ist, bezüglich derer  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$  die Quotiententopologie trägt. Folglich ist  $[\ ]|_{(\text{GL}_2^+ \mathbb{R})^{\tilde{\lambda}}}$  stetig. Wir wollen nun einsehen, dass diese Abbildung offen ist. Dazu betrachten wir für  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  ein Element der Umgebungsbasis  $\mathcal{U}_{A^{\tilde{\lambda}}}$ . Sei  $U(1)$  eine offene Umgebung von 1 in  $\mathbb{R}$  und sei  $U(0)$  eine offene Umgebung von 0 in  $\mathbb{R}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \left\{ B^{\tilde{\lambda}} \mid B \in V_A \right\}^{[\ ]} &= \left\{ \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & B \end{array} \right] \mid B \in V_A \right\} \\ &= \left\{ \left[ \begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & & \\ e & & B \end{array} \right] \mid a \in U(1), b, c, d, e \in U(0), B \in V_A \right\} \cap (\text{GL}_2^+ \mathbb{R})^{\tilde{\lambda}}. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[ \begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & & \\ e & & B \end{array} \right] \mid a \in U(1), b, c, d, e \in U(0), B \in V_A \right\}^{[\ ]^{-1}} \\ &= \left\{ r \left( \begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & & \\ e & & B \end{array} \right) \mid a \in U(1), b, c, d, e \in U(0), B \in V_A, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left\{ r \left( \begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & & \\ e & & B \end{array} \right) \mid a \in U(1), b, c, d, e \in U(0), B \in V_A \right\}. \end{aligned}$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Das ist eine Vereinigung von offenen Mengen in  $\mathrm{GL}_3 \mathbb{R}$ . Folglich ist

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & & \\ e & & B \end{array} \right] \mid a \in U(1), b, c, d, e \in U(0), B \in V_A \right\}$$

offen in  $\mathrm{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Insgesamt erhalten wir die Offenheit von  $[\ ]_{(\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R})^\lambda}$ . ■

**4.1.7 Definition.** Für den Rest des Kapitels betrachten wir ein festes  $k > 1$ . Wir bezeichnen

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \mathbb{R} .$$

Für  $x > 0$  sei

$$\Lambda_x := (x\mathbb{1})^\lambda .$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\iota_k : (\overline{P}, \overline{\mathcal{L}}_k) \rightarrow (\overline{P}, \overline{\mathcal{L}}) : x \mapsto x .$$

Außerdem bezeichnen wir mit  $x_\infty = [1, 0, 0]$  den Fernpunkt der  $x$ -Achse und mit  $y_\infty = [0, 1, 0]$  den Fernpunkt der  $y$ -Achse

**4.1.8 Bemerkung.** Die Abbildung  $\iota_k$  ist keine Lineation, aber es gilt  $\{\iota_k|_{H_L}, \iota_k|_{H_R}\} \subset \Psi(\mathcal{M}_k, \mathcal{A}_2 \mathbb{R})$ .

Ferner ist  $\{\Lambda_k|_{H_L}, \Lambda_k|_{H_R}\}$  eine Teilmenge von  $\Psi(\mathcal{M}_k) \cap \Psi(\mathcal{A}_2 \mathbb{R})$ .

**Beweis.** Es gilt  $(H_L, (\mathcal{L}_k)_{H_L}) = (H_L, \mathcal{L}_{H_L})$  und  $(H_R, (\mathcal{L}_k)_{H_R}) = (H_R, \mathcal{L}_{H_R})$ . Deswegen sind die Abbildungen  $\iota_k|_{H_L}$  und  $\iota_k|_{H_R}$  Einbettungen.

Es ist  $\Lambda_k \in \mathrm{PGL}_3 \mathbb{R}$  und  $g_\infty^{\Lambda_k} = g_\infty$ , und folglich ist  $\Lambda_k|_P \in \Psi(\mathcal{A}_2 \mathbb{R})$ . Ferner ist  $H_L^{\Lambda_k} = H_L$  und  $H_R^{\Lambda_k} = H_R$ . Also gilt insgesamt  $\{\Lambda_k|_{H_L}, \Lambda_k|_{H_R}\} \subset \Psi(\mathcal{M}_k)$ . ■

Wir wollen die Abbildung  $\Lambda_k \in \mathrm{PGL}_3 \mathbb{R}$  nutzen, um geknickte Geraden in Geraden der reellen projektiven Ebene abzubilden und umgekehrt. Dazu definieren wir die folgenden Abbildungen:

**4.1.9 Lemma.** Für  $(b, c) \in \{(1, 1), (1, k^{-1}), (1, k), (k^{-1}, 1), (k, 1)\}$  definieren wir

$$[[b|c]] : \overline{P} \rightarrow \overline{P} : x \mapsto \begin{cases} x^{\Lambda_b} & \text{für } x \in H_L \cup g_\infty \\ x^{\Lambda_c} & \text{für } x \in H_R \end{cases} .$$

Dann gilt:

- $[[b|c]]|_{l_0} = \mathbb{1}^\lambda|_{l_0}$

- $x_\infty^{\llbracket b|c \rrbracket} = x_\infty$
- $\llbracket b|c \rrbracket \llbracket b^{-1}|c^{-1} \rrbracket = \mathbb{1}^\lambda$
- Für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist  $l_{0,t}^{\llbracket b|c \rrbracket} = l_{0,t}$ .
- Für alle  $s < 0$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  ist  $(l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}} \setminus \overline{\mathcal{L}}_k$  und  $(l_{s,t}^*)^{\llbracket k|1 \rrbracket} = l_{ks,t} \in \overline{\mathcal{L}} \setminus \overline{\mathcal{L}}_k$ .

**Beweis.** Es ist  $l_0^{\llbracket b|c \rrbracket} = l_0^{\Lambda_b}$ . Da  $[0, y, u]^{\Lambda_k} = [0, y, u]$  und  $[1, 0, 0]^{\Lambda_k} = [1, 0, 0]$  gilt  $\llbracket b|c \rrbracket|_{l_0} = \mathbb{1}^\lambda|_{l_0}$  und  $x_\infty^{\llbracket b|c \rrbracket} = x_\infty$ .

Die Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$ , die Ferngerade  $g_\infty$  und die Gerade  $l_0$  werden durch die Abbildung  $\Lambda_k$  jeweils auf sich abgebildet. Somit erhalten wir  $\llbracket b|c \rrbracket \llbracket b^{-1}|c^{-1} \rrbracket = \mathbb{1}^\lambda$ . Sei  $(b, c)$  wie in der Voraussetzung. Mit  $z = c^{-1}x$  und  $y = b^{-1}x$  erhalten wir

$$\begin{aligned} l_{0,t}^{\llbracket b|c \rrbracket} &= \{[1, 0, 0]\}^{\Lambda_b} \cup (l_{0,t} \cap H_{\overline{\mathcal{L}}})^{\Lambda_b} \cup (l_{0,t} \cap H_R)^{\Lambda_c} \\ &= \{[1, 0, 0]\} \cup \{[b^{-1}x, t, 1] \mid x \leq 0\} \cup \{[c^{-1}x, t, 1] \mid x > 0\} \\ &= \{[1, 0, 0]\} \cup \{[y, t, 1] \mid y \leq 0\} \cup \{[z, t, 1] \mid z > 0\} = l_{0,t} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (l_{s,t}^*)^{\llbracket b|c \rrbracket} &= (l_{s,t}^* \cap (H_{\overline{\mathcal{L}}} \cup g_\infty))^{\Lambda_b} \cup (l_{s,t}^* \cap H_R)^{\Lambda_c} \\ &= \{[1, s, 0]\}^{\Lambda_b} \cup \{[x, sx + t, 1] \mid x \leq 0\}^{\Lambda_b} \cup \{[x, ksx + t, 1] \mid x > 0\}^{\Lambda_c} \\ &= \{[b^{-1}, s, 0]\} \cup \{[b^{-1}x, sx + t, 1] \mid x \leq 0\} \cup \{[c^{-1}x, skx + t, 1] \mid x > 0\} \\ &= \{[1, bs, 0]\} \cup (\{[y, bsy + t, 1] \mid y \leq 0\} \cup \{[z, skcz + t, 1] \mid z > 0\}) . \end{aligned}$$

Mit  $(b, c) = (1, k^{-1})$  erhalten wir

$$(l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}} .$$

Hingegen gilt mit  $(b, c) = (k, 1)$  folgende Gleichheit

$$(l_{s,t}^*)^{\llbracket k|1 \rrbracket} = l_{ks,t} \in \overline{\mathcal{L}} .$$

Damit sind alle Aussagen bewiesen. ■

#### 4.1.10 Bemerkung. Die Abbildung

$$\llbracket b|c \rrbracket_{l_k} \text{ mit } (b, c) \in \{(1, 1), (1, k^{-1}), (1, k), (k^{-1}, 1), (k, 1)\}$$

ist keine Lineation. Wie wir gerade gesehen haben, können wir durch geeignete Wahl von  $b$  und  $c$  geknickte Geraden der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  auf fallende Geraden der reellen projektiven Ebene abbilden. Die steigenden Geraden der Moulton-Ebene werden hierbei nicht in Geraden der reellen projektiven Ebene überführt.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**4.1.11 Definition.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $P$ , die ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegt. Sei  $\psi$  eine partielle Lineation von  $\mathcal{M}_k$ , deren Definitionsgebiet  $U$  enthält, derart gewählt, dass  $U^\psi$  ganz in einer der beiden Halbebenen  $H_R$  oder  $H_L$  liegt. Sei  $L \in \mathcal{L}_k \cup \overline{\mathcal{L}_k}$  mit  $L \cap U \neq \emptyset$ . Wir bezeichnen mit  $s_U(L)$  die Steigung von  $L \cap U$ , wobei wir  $L \cap U$  als Stück einer Geraden in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  betrachten und die Steigung dieser Geraden bestimmen. Statt  $s_{U^\psi}(L^\psi)$  schreiben wir kurz  $s_U^\psi(L)$ . Für  $L \parallel l_0$  bzw.  $L \wedge l_0 \in g_\infty$  setzen wir  $s_U(L) = \infty$ .

Durch geeignetes Einschränken der Abbildungen  $\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket_{\mathcal{L}_k}$  und  $\llbracket k|1 \rrbracket_{\mathcal{L}_k}$  werden wir Lineationen erhalten. Dazu definieren wir in  $\overline{P}$  folgende Punktmenge.

**4.1.12 Definition.** Sei  $p \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} S(p) &:= \{[x, y, 1] \mid x(y-p) > 0\} \cup \{[x, sx, 0] \mid x \in \mathbb{R}, s > 0\} \\ S(-\infty) &:= H_R, \quad S(\infty) := H_L \\ F(p) &:= \{[x, y, 1] \mid x(y-p) < 0\} \cup \{[x, sx, 0] \mid x \in \mathbb{R}, s < 0\} \\ F(-\infty) &:= \emptyset, \quad F(\infty) := \emptyset \end{aligned}$$

Das Komplement von zwei Geraden in  $\overline{\mathcal{M}_k}$  besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten, die wir im Folgenden Halbebenen nennen. Die Zusammenhangskomponenten  $S(p)$  und  $F(p)$  ergeben sich als Komplement der Geraden  $l_0$  und  $l_{0,p}$ . Im nächsten Lemma sehen wir, dass diese Teilmengen von  $\overline{P}$  desarguessch sind. Außerdem liegen diese Mengen, wie wir in 4.2.14 sehen werden, in einer Bahn unter der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$ .

**4.1.13 Lemma.** Für alle  $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  und alle  $q \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left\{ (\llbracket k|1 \rrbracket_{\mathcal{L}_k})|_{F(q)}, (\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket_{\mathcal{L}_k})|_{F(q)}, (\llbracket 1|1 \rrbracket_{\mathcal{L}_k})|_{S(p)} \right\} \subset \Psi(\overline{\mathcal{M}_k}, \mathcal{P}_2\mathbb{R}).$$

Insbesondere sind die Halbebenen  $(S(p), (\overline{\mathcal{L}_k})_{S(p)})$  und  $(F(q), (\overline{\mathcal{L}_k})_{F(q)})$  desarguessch.

**Beweis.** Es gilt  $(S(p), (\overline{\mathcal{L}_k})_{S(p)}) = (S(p), \overline{\mathcal{L}}_{S(p)})$ . Folglich ist die Abbildung  $(\llbracket 1|1 \rrbracket_{\mathcal{L}_k})|_{S(p)}$  eine Einbettung. Sei  $\psi \in \{\llbracket k|1 \rrbracket_{\mathcal{L}_k}, \llbracket 1|k^{-1} \rrbracket_{\mathcal{L}_k}\}$ . Lemma 4.1.9 gibt Auskunft über die Bilder geknickter Geraden: Die Abbildung  $\psi$  bildet geknickte Geraden auf fallende Geraden der projektiven Ebene ab. Die Restriktionen  $\psi|_{H_L}$  und  $\psi|_{H_R}$  sind Einschränkungen der Abbildungen  $\Lambda_x \iota_k$  für  $x \in \{1, k, k^{-1}\}$  auf  $H_L$  oder auf  $H_R$ . Folglich sind diese Restriktionen Lineationen.

Betrachten wir nun für  $q \in \mathbb{R}$  die Abbildung  $\psi|_{F(q)}$ . Eine steigende Gerade schneidet  $F(q)$  nur in einer der beiden Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$ . Folglich bildet  $\psi|_{F(q)}$  steigende Geraden in steigende Geraden der reellen projektiven Ebene ab, die das Bild in nur einer der beiden Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  schneiden. Insgesamt erhalten wir, dass  $\psi$  eine Lineation ist. Die Lineation  $\psi|_{H_L \cap F(q)}$  ist stetig. Aus 1.4.3 folgt, dass  $\psi$  stetig ist.

Da  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  desarguessch ist, sind auch die Urbilder obiger Lineationen desarguessch. ■



#### 4.1. Grundlegendes zu den Moulton-Ebenen

**4.1.14 Lemma.** Sei  $G \in \mathcal{L}_k$  mit  $G \cap H_L \neq \emptyset$  und  $s_{H_L}(G) \notin \{0, \infty\}$ . Seien  $U$  und  $V$  nicht leere offene Teilmengen von  $P$  so, dass  $U$  und  $V$  jeweils ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegen,  $U \vee V$  eine Umgebung von  $G$  ist und alle Geraden  $M \in U \vee V$  die Bedingung  $s_U(G) \cdot s_U(M) > 0$  erfüllen.

Wir definieren

$$c(G, U, V) := \begin{cases} 1 & \text{für } s_U(G) = s_V(G) \\ k^{-1} & \text{für } s_U(G) = k^{-1}s_V(G) \\ k & \text{für } s_U(G) = ks_V(G) \end{cases} .$$

$$\gamma(G, U, V) : (U \cup V, (\mathcal{L}_k)_{U \cup V}) \rightarrow (P, \mathcal{L}) : x \mapsto \begin{cases} x^{\iota_k} & x \in U \\ x^{\wedge_{c\iota_k}} & x \in V \end{cases}$$

$$\text{mit } c := c(G, U, V)$$

Dann gilt  $\gamma(G, U, V) \in \Psi(\mathcal{M}_k, \mathcal{A}_2\mathbb{R})$ .

**Beweis.** Seien  $G, U$  und  $V$  wie in der Voraussetzung. Die Ungleichung  $s_U(G) \cdot s_U(M) > 0$  ist genau dann erfüllt, wenn alle Verbindungsgeraden von  $U$  und  $V$  steigend sind oder alle Verbindungsgeraden geknickt sind. Dann gilt entweder für alle  $M \in U \vee V$  die Gleichung  $s_U(M) = s_V(M)$  oder für alle  $M \in U \vee V$  gilt  $s_U(M) = k^{-1}s_V(M)$  oder für alle  $M \in U \vee V$  gilt  $s_U(M) = ks_V(M)$ , je nachdem, in welcher der beiden Halbebene  $H_L$  und  $H_R$  die Mengen  $U$  und  $V$  liegen. Wir wollen nun zeigen, dass es ein  $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  derart gibt, dass  $U \cup V \subset S(p)$  oder  $U \cup V \subset F(p)$  gilt. Wenn  $U$  und  $V$  in einer der beiden Halbebene  $H_L$  oder  $H_R$  liegen, gilt  $U \cup V \subset S(\infty)$  bzw.  $U \cup V \subset S(-\infty)$ . Wir nehmen nun an, dass  $U \subset H_L$  und  $V \subset H_R$  gilt. Ansonsten benennen wir  $U$  und  $V$  um.

Da für alle  $M \in U \vee V$  die Ungleichung  $s_U(G) \cdot s_V(M) > 0$  gilt, gibt es keine Gerade aus dem Büschel  $\mathcal{L}_{x_\infty}$  welche in  $U \vee V$  liegt. Sei für  $X \in \{U, V\}$

$$\mathcal{U}_X := \{l_{0,y} \in \mathcal{L}_{x_\infty} \mid l_{0,y} \cap X \neq \emptyset\} .$$

Dann sind die Mengen  $\mathcal{U}_U$  und  $\mathcal{U}_V$  disjunkte offene Teilmengen des Büschels  $\mathcal{L}_{x_\infty}$ . Sei

$$Y_X := \{y \in \mathbb{R} \mid l_{0,y} \in \mathcal{U}_X\} .$$

Wenn  $G$  steigend ist, besitzt die Menge  $Y_U$  ein Supremum  $p_U$  und die Menge  $Y_V$  besitzt ein Infimum  $p_V$  und es gilt  $p_U \leq p_V$ . Folglich gilt  $U \cup V \subseteq S(p_V)$ . Ist hingegen  $G$  geknickt, so besitzt die Menge  $Y_U$  ein Infimum  $q_U$  und die Menge  $Y_V$  besitzt ein Supremum  $q_V$  und es gilt  $q_U \geq q_V$ . Folglich gilt in diesem Fall  $U \cup V \subseteq F(q_V)$ .

Im Folgenden zeigen wir, dass die Abbildung  $\gamma(G, U, V)$  eine Restriktion einer Lineation aus 4.1.13 ist. Ab nun ist die Lage von  $U$  und  $V$  wieder beliebig. Wir schreiben kurz  $\gamma$  statt  $\gamma(G, U, V)$ . Genau dann ist  $s_U(G) = k^{-1}s_V(G)$ , wenn  $G$  eine geknickte Gerade ist und  $U \subseteq H_L$  und gleichzeitig  $V \subseteq H_R$ . Der Fall  $s_U(G) = s_V(G)$  tritt genau dann ein, wenn  $U$  und  $V$  in derselben Halbebene liegen oder  $G$  eine steigende Gerade ist.

Wenn  $s_U(G) \neq s_V(G)$  unterscheiden wir zwei Fälle: Für  $U \subset H_L$  und  $V \subset H_R$  ist  $c(G, U, V) = k^{-1}$  und es gilt  $\gamma = (\llbracket 1 | k^{-1} \rrbracket \iota_k) \big|_{U \cup V}$ . Für  $U \subset H_R$  und  $V \subset H_L$  ist

#### 4. Die Moulton-Ebenen

$c(G, U, V) = k$  und es gilt  $\gamma = (\llbracket k|1 \rrbracket \iota_k)|_{U \cup V}$ . Wenn  $U$  und  $V$  in derselben Halbebene liegen oder wenn  $G$  steigend ist, gilt  $c(G, U, V) = 1$ , folglich gilt  $\gamma = \llbracket 1|1 \rrbracket \iota_k|_{U \cup V}$ . Insgesamt ist in jedem der drei Fälle  $\gamma$  eine Restriktion einer Lineation aus 4.1.13. Folglich gilt  $\gamma \in \Psi(\mathcal{M}_k, \mathcal{A}_2\mathbb{R})$ . ■

**4.1.15 Lemma.** Sei  $G \in \mathcal{L}_k$  mit  $G \cap H_L \neq \emptyset$  und  $s_{H_L}(G) \notin \{0, \infty\}$ . Es existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{U}(G)$  von  $G$ , die nur aus steigenden bzw. nur aus geknickten Geraden besteht.

**Beweis.** Sei  $G \cap L_0 = [0, t_0, 1]$ . Sei  $[-1, t_1, 1] \in G$ . Dann gilt  $t_1 \neq t_0$ . Wir definieren mit  $\varepsilon := \frac{1}{4}|t_0 - t_1|$  die offenen Intervalle

$$I_0 := \{[0, t, 1] \mid t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\}$$

$$I_1 := \{[-1, \tilde{t}, 1] \mid \tilde{t} \in ]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\}.$$

Aus [55, 31.18] folgt, dass  $I_0 \vee I_1$  ein Element der IJ-Topologie ist und mit [55, 31.19] erhalten wir, dass  $I_0 \vee I_1$  eine offene Umgebung von  $G$  ist. ■

**4.1.16 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ . Seien  $U$  und  $V$  nicht leere offene Teilmengen des Definitionsgebietes von  $\psi$  mit der Eigenschaft, dass die Mengen  $U$ ,  $V$ ,  $U^\psi$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegen. Wir wählen eine Gerade  $L$ , die  $U$  und  $V$  so schneidet, dass  $s_U(L) \notin \{0, \infty\}$  und  $s_V^\psi(L) \notin \{0, \infty\}$  erfüllt ist. Es gelte

$$\psi|_U = \chi|_U$$

für eine Abbildung  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\psi|_V = \tilde{\chi}|_V$$

wobei die Abbildung  $\tilde{\chi} \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  für die verschiedenen Fälle die aus der folgenden Tabelle zu entnehmende Gestalt annimmt.

	$s_U^\psi(L) = s_V^\psi(L)$	$s_U^\psi(L) = k^{-1}s_V^\psi(L)$	$s_U^\psi(L) = ks_V^\psi(L)$
$s_U(L) = s_V(L)$	$\chi$	$\chi\Lambda_k$	$\chi\Lambda_k^{-1}$
$s_U(L) = k^{-1}s_V(L)$	$\Lambda_k^{-1}\chi$	$\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k$	$\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k^{-1}$
$s_U(L) = ks_V(L)$	$\Lambda_k\chi$	$\Lambda_k\chi\Lambda_k$	$\Lambda_k\chi\Lambda_k^{-1}$

**Beweis.** Die Abbildung  $\psi|_V$  ist, weil  $V$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in einer der beiden Halbebenen liegen, eine partielle Lineation der reellen projektiven Ebene, und nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] gibt es eine Abbildung  $\tilde{\chi} \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  mit  $\psi|_V = \tilde{\chi}|_V$ . Nach 4.1.15 finden wir eine offene Umgebung  $\mathcal{U}(L)$  von  $L$ , die nur aus steigenden bzw. nur aus fallenden Geraden besteht, je nachdem, ob  $L$  steigt oder fällt. Ebenso finden wir eine Umgebung  $\mathcal{U}(L^\psi)$  von  $L^\psi$ , die nur aus steigenden bzw. nur aus fallenden Geraden besteht. Die Menge  $(\mathcal{U}(L) \cap (\mathcal{U}(L^\psi))^{\psi^{-1}})^{\vee^-}$  ist offen, da die Operation Verbinden stetig ist. Durch

Schneiden mit  $U \times V$  finden wir offene Teilmengen  $\tilde{U} \subseteq U$  und  $\tilde{V} \subseteq V$  so, dass Folgendes wahr ist: Die Menge  $\tilde{U} \vee \tilde{V}$  ist eine Umgebung von  $L$ , und außerdem gelten für alle Geraden  $M \in \tilde{U} \vee \tilde{V}$  die Bedingungen  $s_U(L) \cdot s_U(M) > 0$  und  $s_U^\psi(L) \cdot s_U^\psi(M) > 0$ .

Mithilfe der in 4.1.14 eingeführten Lineation definieren wir die Abbildungen

$$\delta := \gamma(L, \tilde{U}, \tilde{V}) \text{ und } \delta_\psi := \gamma(L^\psi, \tilde{U}^\psi, \tilde{V}^\psi) .$$

Da  $\{\delta, \delta_\psi\} \subset \Psi(\mathcal{M}_k, \mathcal{A}_2\mathbb{R})$  gilt, ist die Abbildung  $\tilde{\psi} := \delta^{-1}\psi\delta_\psi$  eine partielle Lineation der reellen affinen Ebene. Nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] ist  $\tilde{\psi}$  die Einschränkung eines Automorphismus von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ . Wegen  $\tilde{\psi}|_{\tilde{U}^\delta} = \chi|_{\tilde{U}^\delta}$  folgt  $\tilde{\psi} = \chi|_{(\tilde{U} \cup \tilde{V})^\delta}$ . Sei  $c := c(L, \tilde{U}, \tilde{V})$  und  $d := c(L^\psi, \tilde{U}^\psi, \tilde{V}^\psi)$ . Dann gilt

$$\tilde{\chi}|_{\tilde{V}} = \psi|_{\tilde{V}} = \left( \delta \tilde{\psi} \delta_\psi^{-1} \right) \Big|_{\tilde{V}} = (\Lambda_c \chi \Lambda_d^{-1}) \Big|_{\tilde{V}}$$

und wir erhalten die für die verschiedenen Fälle angegebenen Gestalten von  $\tilde{\chi}$ . ■

Als Vorbereitung für das nächste Unterkapitel, in dem wir die Automorphismen der Moulton-Ebene genauer beleuchten, betrachten wir nun die Menge aller Abbildungen aus  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$ , die den Fernpunkt der  $x$ -Achse fixieren und die Knickachse in sich überführen. Diese Abbildungen sind, wie sich später herausstellen wird, Kandidaten für Abbildungen die sich, lokal auf die Moulton-Ebene angewandt, zu Automorphismen von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  fortsetzen lassen.

**4.1.17 Definition und Lemma.** *Wir betrachten die Wirkung der  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  auf der projektiven Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{R} = (\overline{P}, \overline{\mathcal{L}})$ . Für eine Gerade  $m \in \overline{\mathcal{L}} \setminus g_\infty$  bezeichnet  $s(m)$  die Steigung von  $m$ . Wir setzen  $s(g_\infty) = 0$ .*

- (i) *Die Standgruppe  $\Theta := (\text{PGL}_3\mathbb{R})_{x_\infty, l_0} = \{\alpha \in \text{PGL}_3\mathbb{R} \mid x_\infty^\alpha = x_\infty, l_0^\alpha = l_0\}$  des Fernpunktes  $x_\infty$  und der Knickachse  $l_0$  in  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  hat die Gestalt*

$$\Theta = \{A^\lambda \mid A \in \text{GL}_2\mathbb{R}\} .$$

Im Folgenden sei  $\vartheta := A^\lambda \in \Theta$  fest gewählt mit

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2\mathbb{R} .$$

- (ii) *Sei  $m \in \overline{\mathcal{L}}$ . Es gilt  $s(m) = 0$  genau dann wenn  $s(m^\vartheta) = 0$ .*

(iii) *Ferner gilt:*

$$g_\infty^\vartheta = \begin{cases} l_{0,t} \text{ mit } t = \frac{e}{f} & \text{für } f \neq 0 \\ g_\infty & \text{für } f = 0 \end{cases}$$

$$g_\infty^{\vartheta^{-1}} = \begin{cases} l_{0,t} \text{ mit } t = -\frac{j}{f} & \text{für } f \neq 0 \\ g_\infty & \text{für } f = 0 \end{cases}$$

*Insbesondere ist  $\{g_\infty^{\vartheta^{-1}}, g_\infty^\vartheta\} \subset \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{L}_k}$ .*

#### 4. Die Moulton-Ebenen

(iv) Sei  $f = 0$ . Genau dann ist  $j > 0$ , wenn  $H_L^\vartheta = H_L$ ; dann ist auch  $H_R^\vartheta = H_R$ .

Genau dann ist  $j < 0$  wenn  $H_L^\vartheta = H_R$ ; dann ist auch  $H_R^\vartheta = H_L$ .

(v) Sei  $f = 0$  und  $m \in \overline{\mathcal{L}}$ . Es gilt  $s(m) = \infty$  genau dann wenn  $s(m^\vartheta) = \infty$ . Für  $s(m) \neq \infty$  gilt  $s(m^\vartheta) = e \cdot s(m)$ .

(vi) Für  $f \neq 0$  unterteilen die  $y$ -Achse  $L_0$  und die Gerade  $g_\infty^{\vartheta^{-1}}$  die Punktmenge  $P$  im Urbild von  $\vartheta$  in vier Teile. Ebenso unterteilen die  $y$ -Achse und  $g_\infty^\vartheta$  die Punktmenge  $P$  im Bild von  $\vartheta$  in vier Teile. Konkret: Sei

$$O_L := O_L(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x < 0, y > -\frac{j}{f} \right\}, \quad O_R := O_R(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x > 0, y > -\frac{j}{f} \right\},$$

$$U_L := U_L(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x < 0, y < -\frac{j}{f} \right\}, \quad U_R := U_R(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x > 0, y < -\frac{j}{f} \right\},$$

und

$$\tilde{O}_L := \tilde{O}_L(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x < 0, y > \frac{e}{f} \right\}, \quad \tilde{O}_R := \tilde{O}_R(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x > 0, y > \frac{e}{f} \right\},$$

$$\tilde{U}_L := \tilde{U}_L(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x < 0, y < \frac{e}{f} \right\}, \quad \tilde{U}_R := \tilde{U}_R(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x > 0, y < \frac{e}{f} \right\}.$$

Wir sagen die Viertelebenen  $O_L$  und  $O_R$  bzw.  $\tilde{O}_L$  und  $\tilde{O}_R$  liegen über der Geraden  $g_\infty^\vartheta$  bzw. der Geraden  $g_\infty^{\vartheta^{-1}}$ , wohingegen die Viertelebenen  $U_L$  und  $U_R$  bzw.  $\tilde{U}_L$  und  $\tilde{U}_R$  unter der Geraden  $g_\infty^\vartheta$  bzw. der Geraden  $g_\infty^{\vartheta^{-1}}$  liegen. Es gilt:

- Genau dann sind die Ungleichungen  $f > 0$  und  $\det(A) < 0$  erfüllt, wenn  $O_L^\vartheta = \tilde{O}_L$ . Dann gilt auch  $O_R^\vartheta = \tilde{O}_R$ ,  $U_L^\vartheta = \tilde{U}_R$  und  $U_R^\vartheta = \tilde{U}_L$ .
- Genau dann sind die Ungleichungen  $f > 0$  und  $\det(A) > 0$  erfüllt, wenn  $O_L^\vartheta = \tilde{U}_L$ . Dann gilt auch  $O_R^\vartheta = \tilde{U}_R$ ,  $U_L^\vartheta = \tilde{O}_R$  und  $U_R^\vartheta = \tilde{O}_L$ .
- Genau dann sind die Ungleichungen  $f < 0$  und  $\det(A) < 0$  erfüllt, wenn  $O_L^\vartheta = \tilde{O}_R$ . Dann gilt auch  $O_R^\vartheta = \tilde{O}_L$ ,  $U_L^\vartheta = \tilde{U}_L$  und  $U_R^\vartheta = \tilde{U}_R$ .
- Genau dann sind die Ungleichungen  $f < 0$  und  $\det(A) > 0$  erfüllt, wenn  $O_L^\vartheta = \tilde{U}_R$ . Dann gilt auch  $O_R^\vartheta = \tilde{U}_L$ ,  $U_L^\vartheta = \tilde{O}_L$  und  $U_R^\vartheta = \tilde{O}_R$ .

In Anlehnung an die obige Definition definieren wir die Mengen

$$O_{\overline{L}} := O_{\overline{L}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \leq 0, y > -\frac{j}{f} \right\}, \quad O_{\overline{R}} := O_{\overline{R}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \geq 0, y > -\frac{j}{f} \right\},$$

$$U_{\overline{L}} := U_{\overline{L}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \leq 0, y < -\frac{j}{f} \right\}, \quad U_{\overline{R}} := U_{\overline{R}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \geq 0, y < -\frac{j}{f} \right\},$$

und

$$\tilde{O}_{\overline{L}} := \tilde{O}_{\overline{L}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \leq 0, y > \frac{e}{f} \right\}, \quad \tilde{O}_{\overline{R}} := \tilde{O}_{\overline{R}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \geq 0, y > \frac{e}{f} \right\},$$

$$\tilde{U}_{\overline{L}} := \tilde{U}_{\overline{L}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \leq 0, y < \frac{e}{f} \right\}, \quad \tilde{U}_{\overline{R}} := \tilde{U}_{\overline{R}}(A) := \left\{ [x, y, 1] \mid x \geq 0, y < \frac{e}{f} \right\}.$$

(vii) Sei  $f \neq 0$ . Sei  $m \cap O_R \neq \emptyset$  und  $m \cap O_L \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f \det(A) > 0 &\iff (s(m) > 0 \implies s(m^\vartheta) > 0) \\ &\iff (s(m) < 0 \implies s(m^\vartheta) < 0) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f \det(A) < 0 &\iff (s(m) > 0 \implies s(m^\vartheta) < 0) \\ &\iff (s(m) < 0 \implies s(m^\vartheta) > 0) . \end{aligned}$$

Sei  $m \cap U_R \neq \emptyset$  und  $m \cap U_L \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f \det(A) > 0 &\iff (s(m) > 0 \implies s(m^\vartheta) < 0) \\ &\iff (s(m) < 0 \implies s(m^\vartheta) > 0) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f \det(A) < 0 &\iff (s(m) > 0 \implies s(m^\vartheta) > 0) \\ &\iff (s(m) < 0 \implies s(m^\vartheta) < 0) . \end{aligned}$$

(viii) Sei  $f > 0$  und  $\det(A) > 0$ . Dann gilt

$$s(l_x^\vartheta) > 0 \iff x < 0$$

sowie

$$s(l_x^\vartheta) < 0 \iff x > 0 .$$

(ix) Sei  $f < 0$  und  $\det(A) > 0$ . Dann gilt

$$s(l_x^\vartheta) < 0 \iff x < 0$$

sowie

$$s(l_x^\vartheta) > 0 \iff x > 0 .$$

**Beweis.** (i) Für

$$\varphi := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$$

gilt  $[1, 0, 0]^\varphi = [a, b, c]$ . Folglich ist die Gleichung  $[1, 0, 0]^\varphi = [1, 0, 0]$  genau dann erfüllt, wenn  $b = c = 0$ . Also hat die Standgruppe des Punktes  $x_\infty$  die Gestalt

$$(\text{PGL}_3 \mathbb{R})_{x_\infty} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \mid d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}, ej - hf \neq 0 \right\} .$$

Nun fixiere  $\varphi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  die Knickgerade  $l_0$ . Das heißt für alle Punkte  $[0, y, 1] \in l_0$  liegt der Bildpunkt  $[0, y, 1]^\varphi$  in der Gerade  $l_0$ . Dies erfüllen insbesondere die Punkte  $[0, 0, 1] \in l_0$  und  $[0, 1, 1] \in l_0$ . Wegen  $[0, 0, 1]^\varphi = [g, h, j]$  folgt  $g = 0$ . Wegen  $[0, 1, 1]^\varphi = [d+g, e+h, f+j] = [d, e+h, f+j]$  folgt  $d = 0$ , insgesamt gilt also  $(\text{PGL}_3 \mathbb{R})_{x_\infty, l_0} \subseteq \Theta$ .

Umgekehrt fixiert jedes Element aus  $\Theta$  die Gerade  $l_0$ . Daher gilt  $(\text{PGL}_3 \mathbb{R})_{x_\infty, l_0} = \Theta$ .

#### 4. Die Moulton-Ebenen

- (ii) Da  $\Theta$  die Standgruppe von  $x_\infty$  ist, wird das Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$  von allen Abbildungen  $\vartheta \in \Theta$  in sich überführt (vgl. (i)). Also hat eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  genau dann die Steigung Null, wenn die Bildgerade  $l^\vartheta$  die Steigung Null hat.
- (iii) Es gilt  $[x, y, 0]^\vartheta = [x, ye, yf]$ . Für  $f = 0$  ist also die Gleichung  $[x, y, 0]^\vartheta = [x, ye, 0]$  erfüllt, und wir erhalten  $g_\infty^\vartheta = g_\infty \in \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{L}}_k$ .

Für  $f \neq 0$  gilt  $y_\infty^\vartheta = [0, 1, 0]^\vartheta = [0, \frac{e}{f}, 1]$ . Da  $\vartheta$  ein Element der Standgruppe  $\Theta$  ist, gilt  $x_\infty^\vartheta = x_\infty$ . Insgesamt erhalten wir  $g_\infty^\vartheta = l_{0,t} \in \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{L}}_k$  mit  $t = \frac{e}{f}$ . Es gilt

$$\vartheta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{j}{d} & \frac{-f}{d} \\ 0 & \frac{-h}{d} & \frac{e}{d} \end{bmatrix}$$

mit  $d := \det(A)$ . Wie eben können wir ablesen, dass für  $f \neq 0$  die Gleichung  $g_\infty^{\vartheta^{-1}} = l_{0,\tilde{t}} \in \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{L}}_k$  mit  $\tilde{t} = -\frac{j}{f}$  erfüllt ist. Für  $f = 0$  ist  $-\frac{f}{d} = 0$  und wie wir gerade gesehen haben, gilt  $g_\infty^{\vartheta^{-1}} = g_\infty \in \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{L}}_k$ .

- (iv) Sei  $f = 0$ . Da die Gleichungen  $l_0^\vartheta = l_0$  und  $g_\infty^\vartheta = g_\infty$  erfüllt sind (vgl. (i) und (iii)) und die Abbildung  $\vartheta$  ein Homöomorphismus ist, erhalten wir  $\{H_R^\vartheta, H_L^\vartheta\} = \{H_R, H_L\}$ . Aus der Invertierbarkeit der Abbildung  $\vartheta$  folgt  $j \neq 0$ . Es ist  $[1, 0, 1] \in H_R$ , und es gilt  $[1, 0, 1]^\vartheta = [\frac{1}{j}, h, 1]$ . Also gilt genau dann  $H_R^\vartheta = H_R$ , wenn  $j > 0$ . Insgesamt erhalten wir die behaupteten Äquivalenzen.
- (v) Sei  $f = 0$ . Da die Gleichungen  $l_0^\vartheta = l_0$  und  $g_\infty^\vartheta = g_\infty$  erfüllt sind, ist  $y_\infty = g_\infty \wedge l_0$  ein Fixpunkt von  $\vartheta$ . Somit hat eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  genau dann die Steigung  $\infty$ , wenn die Bildgerade  $l^\vartheta$  die Steigung  $\infty$  hat.

Wir betrachten die Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Aus der Invertierbarkeit der Abbildung  $\vartheta$  folgt  $j \neq 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} l_{s,t}^\vartheta &= \{[x, sx, 1] \mid x \in \mathbb{R}\}^\vartheta \cup \{[1, s, 0]\}^\vartheta = \{[x, sex + h, j] \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{[1, se, 0]\} \\ &= \left\{ \left[ \frac{x}{j}, se\frac{x}{j} + \frac{h}{j}, 1 \right] \mid x \in \mathbb{R} \right\} \cup \{[1, se, 0]\} = l_{\tilde{s}, \tilde{t}} \end{aligned}$$

mit  $\tilde{s} = se$  und  $\tilde{t} = \frac{h}{j}$ . Also hat die Bildgerade die Steigung  $se$ . Mit (ii) ist die Behauptung bewiesen.

- (vi) Sei  $f \neq 0$ . Der Punkt  $[-1, -\frac{j}{f} + 1, 1]$  liegt in  $O_L$ .

Es gilt  $[-1, -\frac{j}{f} + 1, 1]^\vartheta = [-1, -\frac{j}{f}e + e + h, -\frac{j}{f}f + f + j] = [-\frac{1}{f}, \frac{-\det(A)}{f^2} + \frac{e}{f}, 1]$ . Dieser Punkt liegt genau dann in der linken Halbebene, wenn  $f > 0$ , ansonsten in der rechten. Ferner ist die Ungleichung  $\frac{-\det(A)}{f^2} + \frac{e}{f} > \frac{e}{f}$  genau dann erfüllt, wenn  $-\det(A) > 0$ . Folglich liegt  $[-1, -\frac{j}{f} + 1, 1]^\vartheta$  genau dann über der Geraden  $g_\infty^\vartheta$ , wenn

#### 4.1. Grundlegendes zu den Moulton-Ebenen

$\det(A) < 0$ , ansonsten unter dieser Geraden. Da  $\vartheta$  ein Automorphismus von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  ist und die Knickachse  $l_0$  in sich überführt, haben wir insgesamt:

$$O_L^\vartheta = \begin{cases} \tilde{O}_L & \text{für } f > 0 \text{ und } \det(A) < 0 \\ \tilde{U}_L & \text{für } f > 0 \text{ und } \det(A) > 0 \\ \tilde{O}_R & \text{für } f < 0 \text{ und } \det(A) < 0 \\ \tilde{U}_R & \text{für } f < 0 \text{ und } \det(A) > 0 \end{cases}.$$

Die restlichen Beziehungen folgen daraus, dass  $\vartheta$  ein Automorphismus von  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  ist.

(vii) Sei  $f \neq 0$ .

- Wir betrachten zuerst den Fall  $m \cap U_L \neq \emptyset \neq m \cap O_L$ .

Die Ungleichung  $f \det(A) < 0$  ist genau dann erfüllt, wenn die Viertelebenen  $O_L$  und  $U_L$  folgendermaßen abgebildet werden (vgl. (vi)) : Entweder ist  $O_L^\vartheta = \tilde{O}_L$  und  $U_L^\vartheta = \tilde{U}_R$ , oder es ist  $O_L^\vartheta = \tilde{U}_R$  und  $U_L^\vartheta = \tilde{O}_L$ . In beiden Fällen ist  $m^\vartheta$  eine Gerade die  $\tilde{O}_L$  und  $\tilde{U}_R$  schneidet, also eine fallende Gerade.

Die Ungleichung  $f \det(A) > 0$  ist genau dann erfüllt, wenn die Viertelebenen  $O_L$  und  $U_L$  so abgebildet werden, dass entweder die Gleichungen  $O_L^\vartheta = \tilde{U}_L$  und  $U_L^\vartheta = \tilde{O}_R$  erfüllt sind, oder die Gleichungen  $O_L^\vartheta = \tilde{O}_R$  und  $U_L^\vartheta = \tilde{U}_L$  erfüllt sind (vgl. (vi)). In beiden Fällen schneidet die Gerade  $m^\vartheta$  die Viertelebenen  $\tilde{U}_L$  und  $\tilde{O}_R$ , ist also eine steigende Gerade.

- Wir betrachten nun den Fall  $m \cap U_R \neq \emptyset \neq m \cap O_R$ .

Die Ungleichung  $f \det(A) > 0$  ist wegen (vi) genau dann erfüllt, wenn  $(O_R^\vartheta, U_R^\vartheta) \in \{(\tilde{O}_R, \tilde{U}_L), (\tilde{U}_L, \tilde{O}_R)\}$ . Also wird die Gerade  $m$  so abgebildet, dass  $m^\vartheta$  die Viertelebenen  $\tilde{U}_L$  und  $\tilde{O}_R$  schneidet. Folglich ist  $m^\vartheta$  eine steigende Gerade.

Die Ungleichung  $f \det(A) < 0$  ist wegen (vi) genau dann erfüllt, wenn  $(O_R^\vartheta, U_R^\vartheta) \in \{(\tilde{O}_L, \tilde{U}_R), (\tilde{U}_R, \tilde{O}_L)\}$ . Also schneidet die Gerade  $m^\vartheta$  die Viertelebenen  $\tilde{O}_L$  und  $\tilde{U}_R$ . Folglich ist  $m^\vartheta$  eine fallende Gerade.

Wir beachten nun, dass eine Gerade  $m$  mit  $0 \neq s(m) \neq \infty$ , die die Voraussetzungen der Behauptung erfüllt, immer genau drei Viertelebenen schneidet. Für eine steigende Gerade  $m$  gilt entweder  $m \cap U_R = \emptyset$  oder  $m \cap O_L = \emptyset$ . Für eine fallende Gerade gilt entweder  $m \cap O_R = \emptyset$  oder  $m \cap U_L = \emptyset$ . Insgesamt erhalten wir daraus die behaupteten Aussagen.

(viii) Sei  $f > 0$  und  $\det(A) > 0$ . In diesem Fall werden die Viertelebenen so abgebildet, dass  $l_x^\vartheta$  für  $x < 0$  die Viertelebenen  $\tilde{U}_L$  und  $\tilde{O}_R$  schneidet, also eine steigende Gerade ist (vgl. (vi)). Für  $x > 0$  schneidet  $l_x^\vartheta$  die Viertelebenen  $\tilde{O}_L$  und  $\tilde{U}_R$ , ist also eine fallende Gerade.

(ix) Wie in (viii) können wir die Bilder der Viertelebenen für den Fall  $f < 0$  und  $\det(A) > 0$  in (vi) ablesen und erhalten die Behauptung. ■



#### 4. Die Moulton-Ebenen

### 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Im Folgenden sei  $k > 1$  fest gewählt.

**4.2.1 Definition.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2 \mathbb{R} .$$

Für die Viertelebenen in die die Punktmenge bzgl.  $A$  aufgeteilt ist, verwenden wir die Kurzschreibweise  $O_L, O_{\bar{R}}, U_{\bar{L}}$  und  $U_R$  wie in 4.1.17(vi). Für  $B, C \in \{A, k^{-1}A, kA\}$  definieren wir die folgenden Abbildungen:

$$\left[ \begin{array}{c|c} C & A \\ \hline A & B \end{array} \right] : \quad \bar{P} \rightarrow \bar{P} :$$

$$P \ni p \mapsto \begin{cases} p^{C^\lambda} & \text{für } p \in O_L \\ p^{A^\lambda} & \text{für } p \in O_{\bar{R}} \cup U_{\bar{L}} \cup \left( g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \cap (H_{\bar{L}}) \right) \\ p^{B^\lambda} & \text{für } p \in U_R \cup \left( g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \cap H_R \right) \end{cases}$$

$$g_\infty \ni [u, s, 0] \mapsto \begin{cases} [u, s, 0]^{A^\lambda} & \text{für } us \geq 0 \\ [u, s, 0]^{C^\lambda} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[ A \mid B ] : \quad \bar{P} \rightarrow \bar{P} :$$

$$P \ni p \mapsto \begin{cases} p^{A^\lambda} & \text{für } p \in H_{\bar{L}} \\ p^{B^\lambda} & \text{für } p \in H_R \end{cases}$$

$$g_\infty \ni [u, s, 0] \mapsto \begin{cases} [u, s, 0]^{B^\lambda} & \text{für } us > 0 \\ [u, s, 0]^{A^\lambda} & \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem definieren wir die folgenden Mengen:

$$\Sigma_1 := \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & k^{-1}A \end{array} \right] \mid A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}, f > 0 \right\}$$

$$\Sigma_2 := \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} kA & A \\ \hline A & A \end{array} \right] \mid A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}, f < 0 \right\}$$

$$\Sigma_3 := \left\{ [ A \mid A ] \mid A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}, j > 0 \right\}$$

$$\Sigma_4 := \left\{ [ A \mid k^{-1}A ] \mid A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}, j < 0 \right\}$$

$$\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$$

**4.2.2 Definition.** Wir definieren folgende Abbildungen.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \left\{ A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid f > 0 \right\} \rightarrow \Sigma_1 : A \mapsto A^{\sigma_1} := \left[ \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & k^{-1}A \end{array} \right] \\ \sigma_2 &: \left\{ A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid f < 0 \right\} \rightarrow \Sigma_2 : A \mapsto A^{\sigma_2} := \left[ \begin{array}{c|c} kA & A \\ \hline A & A \end{array} \right] \\ \sigma_3 &: \left\{ A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid j > 0 \right\} \rightarrow \Sigma_3 : A \mapsto A^{\sigma_3} := [ A \mid A ] \\ \sigma_4 &: \left\{ A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \mid j < 0 \right\} \rightarrow \Sigma_4 : A \mapsto A^{\sigma_4} := [ A \mid k^{-1}A ] \end{aligned}$$

Die Definitionsgebiete der Abbildungen  $\sigma_i$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  bezeichnen wir mit  $\text{dom } \sigma_i$ .

Im Folgenden wollen wir zunächst erkennen, dass  $\Sigma$  eine Teilmenge der Automorphismen-Gruppe von  $\overline{\mathcal{M}}_k$  ist. Hierzu werden wir zeigen, dass die Elemente von  $\Sigma$  nicht lokal konstante nicht kollabierte Lineationen sind. Aus der Definition der Definitionsgebiete der Abbildungen  $\sigma_i$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  erhalten wir die folgende Aussage

**4.2.3 Lemma.** Sei  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  und

$$A := \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_i .$$

Sei  $c > 0$ . Dann gilt  $cA \in \text{dom } \sigma_i$ .

Da  $\lambda$  nach 4.1.6 ein Gruppenhomomorphismus ist, erhalten wir folgende Aussage.

**4.2.4 Bemerkung.** Für  $c > 0$  gilt  $\Lambda_c A^\lambda = (cA)^\lambda = (Ac)^\lambda = A^\lambda \Lambda_c$ .

**4.2.5 Bemerkung.** Für  $\vartheta := A^\lambda \in \Theta$  mit  $A \in \text{GL}_2 \mathbb{R}$  sind die Gleichungen  $g_\infty^\vartheta = g_\infty^{\Lambda_k \vartheta}$  und  $g_\infty^{\vartheta^{-1}} = g_\infty^{\vartheta^{-1} \Lambda_k}$  erfüllt. Folglich ist die in 4.1.17(vi) definierte Aufteilung der Punktmenge  $P$  unabhängig davon, ob bezüglich  $A$ ,  $kA$  oder  $k^{-1}A$  aufgeteilt wird.

**Beweis.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2 \mathbb{R}$$

und sei  $\vartheta = A^\lambda$ . Es gilt

$$\Lambda_k \vartheta = \vartheta \Lambda_k = (kA)^\lambda = \begin{pmatrix} ke & kf \\ kh & kj \end{pmatrix}^\lambda .$$

Da die Gleichungen  $\frac{e}{f} = \frac{ke}{kf}$  und  $\frac{j}{f} = \frac{kj}{kf}$  erfüllt sind, ist die Behauptung bewiesen. ■

**4.2.6 Lemma.** Alle  $\sigma \in \Sigma$  sind nicht lokal konstant.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Beweis.** Sei  $\sigma \in \Sigma$ . Es seien  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  und  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  derart gewählt, dass  $\sigma = A^{\sigma_i}$  gilt. Dann besitzen alle Punkte  $p \in P \setminus \left( g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \cup l_0 \right)$  eine Umgebung  $U(p)$  so, dass

$$\sigma|_{U(p)} \in \left\{ A^\lambda|_{U(p)}, (k^{-1}A)^\lambda|_{U(p)}, (kA)^\lambda|_{U(p)} \right\}$$

gilt (vgl. Definition 4.2.1). Folglich ist  $\sigma$  nicht lokal konstant.  $\blacksquare$

**4.2.7 Lemma.** Sei  $\sigma \in \Sigma$  und sei  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  und  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  derart gewählt, dass  $\sigma = A^{\sigma_i}$ . Dann gilt  $l_0^\sigma = l_0 \in \overline{\mathcal{L}_k}$ , und für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}_{x_\infty}}$  gilt  $l^\sigma = l^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_{x_\infty}} \subset \overline{\mathcal{L}_k}$ . Insbesondere ist die Abbildung  $\sigma$  nicht kollabiert.

**Beweis.** Sei  $A \in \text{dom } \sigma_i$  wie vorausgesetzt. Sei  $\sigma := A^{\sigma_i}$ . Dann ist  $l_0^\sigma = l_0^{A^\lambda}$  (vgl. Definition 4.2.1). Da die Abbildung  $A^\lambda$  in der Standgruppe  $\Theta$  liegt, fixiert sie insbesondere die Gerade  $l_0 \in \overline{\mathcal{L}_k}$  (vgl. 4.1.17).

Es gilt  $x_\infty^{A^k} = x_\infty$ . Also ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Gerade  $l_{0,t}^\sigma$  ein Element der Menge  $\{l_{0,t}^{A^\lambda}, l_{0,t}^{[k|1]A^\lambda}, l_{0,t}^{[1|k^{-1}]A^\lambda}\}$  (vgl. Lemma 4.1.9). Wegen der in 4.1.9 bewiesenen Gleichheit  $l_{0,t}^{[k|1]A^\lambda} = l_{0,t} = l_{0,t}^{[1|k^{-1}]A^\lambda}$  erhalten wir insgesamt  $l_{0,t}^\sigma = l_{0,t}^{A^\lambda}$ . Die Abbildung  $A^\lambda$  liegt in  $\Theta$ . Deswegen ist  $l_{0,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_{x_\infty}} \subset \overline{\mathcal{L}_k}$ .

Nun betrachten wir die Bilder der Ferngerade  $g_\infty$ . Da, wie aus 4.1.17 bekannt ist, die Gerade  $g_\infty^{A^\lambda}$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}_{x_\infty}}$  liegt und  $x_\infty$  ein Fixpunkt der Abbildung  $A^\lambda$  ist, folgt  $g_\infty^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_{x_\infty}} \subset \overline{\mathcal{L}_k}$ . Für  $i \in \{1, 3\}$  gilt nach Definition 4.2.1 die Gleichheit  $g_\infty^{A^{\sigma_i}} = g_\infty^{A^\lambda}$ . Nun betrachten wir den Fall  $i = 2$ . Mit der Definition 4.2.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} g_\infty^{A^{\sigma_2}} &= \{[u, s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, us \geq 0\}^{A^\lambda} \cup \{[u, s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2, us < 0\}^{(kA)^\lambda} \\ &= \{[u, s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, us \geq 0\}^{A^\lambda} \cup \{[u, ks, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2, us < 0\}^{A^\lambda} \\ &= g_\infty^{A^\lambda}. \end{aligned}$$

Als letztes betrachten wir den Fall  $i = 4$ . Mit der Definition 4.2.1 erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} g_\infty^{A^{\sigma_4}} &= \{[u, s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, us \geq 0\}^{(k^{-1}A)^\lambda} \cup \{[u, s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2, us < 0\}^{A^\lambda} \\ &= \{[u, k^{-1}s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, us \geq 0\}^{A^\lambda} \cup \{[u, s, 0] \mid (u, s) \in \mathbb{R}^2, us < 0\}^{A^\lambda} \\ &= g_\infty^{A^\lambda}. \end{aligned}$$

Da die Gerade  $l_0$  nicht im Büschel  $\overline{\mathcal{L}_{x_\infty}}$  liegt, ist die Abbildung  $\sigma$  nicht kollabiert.  $\blacksquare$

**4.2.8 Lemma.** Alle  $\sigma \in \Sigma_1$  sind Lineationen der Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$ .

**Beweis.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_1$$

und  $\sigma := A^{\sigma_1}$ . Dann ist  $\det(A) > 0$  und  $f > 0$ . Wir berechnen im Folgenden, dass für alle Geraden  $l \in \overline{\mathcal{L}_k}$  auch das Bild  $l^\sigma$  in  $\overline{\mathcal{L}_k}$  liegt. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen wie in 4.1.17 für die Aufteilung der Punktmenge in Viertelebenen bzgl.  $A$ .

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

- Für  $x < 0$  betrachten wir die Gerade  $l_x \in \overline{\mathcal{L}_k} \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Die Gerade  $l_x$  liegt in der linken Halbebene. Dann gilt (vgl. Definition 4.2.1)

$$l_x^\sigma = (l_x \setminus \{l_x \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\})^{A^\lambda} \cup \{l_x \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{A^\lambda} \cup \{y_\infty\}^{A^\lambda} = l_x^{A^\lambda} .$$

Aus 4.1.17(viii) wissen wir, dass  $l_x^{A^\lambda}$  eine steigende Gerade ist. Folglich ist  $l_x^\sigma \in \overline{\mathcal{L}_k}$ .

- Wir betrachten nun für  $x > 0$  die Gerade  $l_x \in \overline{\mathcal{L}_k} \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Aus 4.1.17(viii) ist bekannt, dass  $l_x^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$  eine fallende Gerade ist. Folglich ist  $(l_x^{A^\lambda})^{\llbracket k^{-1}|1 \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}_k}$  (vgl. 4.1.9). Wir verwenden im Folgenden, dass die Gleichungen  $O_R^{A^\lambda} = \tilde{U}_R$  und  $U_R^{A^\lambda} = \tilde{O}_L$  erfüllt sind. Insgesamt erhalten wir mit Definition 4.2.1 und 4.2.4, dass

$$l_x^\sigma = \{y_\infty\}^{A^\lambda} \cup (l_x \cap O_R)^{A^\lambda} \cup \{l_x \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{(k^{-1}A)^\lambda} \cup (l_x \cap U_R)^{(k^{-1}A)^\lambda} = (l_x^{A^\lambda})^{\llbracket k^{-1}|1 \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}_k} .$$

- Für  $s > 0$  und  $t > -\frac{j}{f}$  betrachten wir die steigende Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}_k} \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Da  $t > -\frac{j}{f}$  ist  $l_{s,t} \cap O_R \neq \emptyset \neq l_{s,t} \cap O_L$ . Da in diesem Fall  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine steigende Gerade ist (vgl. 4.1.17(vii)) erhalten wir mit Definition 4.2.1

$$l_{s,t}^\sigma = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_k} .$$

- Nun betrachten wir für  $s > 0$  und  $t = -\frac{j}{f}$  die steigende Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}_k} \cap \overline{\mathcal{L}}$  mit  $l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} = l_{s,t} \wedge l_0$ . Da  $A^\lambda$  ein Element des Stabilisators der Geraden  $l_0$  ist, liegt die Gerade  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}_{y_\infty}} \subset \overline{\mathcal{L}_k}$ . Wir erhalten insgesamt mit Definition 4.2.1

$$l_{s,t}^\sigma = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_k} .$$

- Als nächstes betrachten wir für  $s > 0$  und  $t < -\frac{j}{f}$  eine steigende Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}_k} \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Es gilt  $l_{s,t} \cap U_R \neq \emptyset \neq l_{s,t} \cap U_L$ . Aus 4.1.17(vi) und (vii) ist bekannt, dass  $l_{s,t}^{(k^{-1}A)^\lambda}$  eine fallende Gerade ist und dass  $l_{s,t}^{(k^{-1}A)^\lambda} \cap H_L = l_{s,t}^{(k^{-1}A)^\lambda} \cap \tilde{O}_L = (l_{s,t} \cap U_R)^{(k^{-1}A)^\lambda}$  gilt. Ferner wissen wir von dort, dass das Geradenstück  $(l_{s,t} \cap (U_L \cup g_\infty \cup O_R))^{(k^{-1}A)^\lambda}$  in der rechten Halbebene liegt. Indem wir verwenden, dass  $\Lambda_k|_{l_0} = \mathbb{1}^\lambda|_{l_0}$  gilt, erhalten wir insgesamt mit Definition 4.2.1, Lemma 4.1.9 und 4.2.4 die Gleichung

$$\begin{aligned} l_{s,t}^\sigma &= (l_{s,t} \cap U_{\tilde{L}})^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap U_R)^{(k^{-1}A)^\lambda} \cup \{l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{(k^{-1}A)^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap O_R)^{A^\lambda} \cup \{[1, s, 0]\}^{A^\lambda} \\ &= \left( (l_{s,t} \cap U_{\tilde{R}}) \cup \{l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \right)^{(k^{-1}A)^\lambda} \cup \left( (l_{s,t} \cap U_L) \cup (l_{s,t} \cap O_R) \cup \{[1, s, 0]\} \right)^{(k^{-1}A)^\lambda} \\ &= (l_{s,t}^{(k^{-1}A)^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}_k} . \end{aligned}$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

- Für  $s < 0$  und  $t > -\frac{j}{f}$  betrachten wir die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}_k}$ . Dann ist  $l_{s,t}^* \cap O_L \neq \emptyset \neq l_{s,t}^* \cap O_R$ . Wegen  $l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \in H_R$  folgt mit 4.1.9, dass

$$\overline{\mathcal{L}} \ni l_{s,t} = (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \cup \left( (l_{s,t}^* \cap O_R) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) \right)^{\Lambda_k^{-1}}.$$

Es ist  $l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Aus 4.1.17(vi) sind folgende Inklusionen bekannt:  $(l_{s,t} \cap O_L)^{A^\lambda} \subset \tilde{U}_L$ ,  $(l_{s,t} \cap O_R)^{A^\lambda} \subset \tilde{U}_R$  und  $(l_{s,t} \cap U_R)^{A^\lambda} \subset \tilde{O}_L$ . Also ist  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine fallende Gerade, die die Gleichung  $l_{s,t}^{A^\lambda} \cap H_R = l_{s,t}^{A^\lambda} \cap \tilde{U}_R = (l_{s,t} \cap O_R)^{A^\lambda}$  erfüllt, und wegen 4.1.9 ist  $(l_{s,t}^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}_k}$ . Mit Definition 4.2.1 und 4.2.4 erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & (l_{s,t}^*)^\sigma \\ &= \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \cup (l_{s,t}^* \cap O_R) \right)^{A^\lambda} \cup \left( \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) \right)^{(k^{-1}A)^\lambda} \\ &= \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \right)^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap O_R)^{(k^{-1}Ak)^\lambda} \cup \left( \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) \right)^{(k^{-1}A)^\lambda} \\ &= \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t} \cap O_L) \cup \{l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t} \cap U_R) \right)^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap O_R)^{(Ak)^\lambda} \\ &= (l_{s,t}^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}_k}. \end{aligned}$$

- Nun betrachten wir für den Fall  $s < 0$  und  $t = -\frac{j}{f}$  die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}_k}$  mit  $l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} = l_{s,t}^* \wedge l_0$ . Also gilt (vgl. 4.1.9)

$$\{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R)^{\Lambda_k^{-1}} = (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1, k^{-1} \rrbracket} = l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}.$$

Folglich ist  $l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Da die Gleichung  $l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} = l_{s,t} \wedge l_0$  erfüllt ist, liegt  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{y_\infty}$ . Somit ist  $l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_k}$ . Insgesamt erhalten wir mit Definition 4.2.1:

$$(l_{s,t}^*)^\sigma = \{[1, s, 0]\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L)^{A^\lambda} \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R)^{(k^{-1}A)^\lambda} = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_k}.$$

- Als nächstes betrachten wir für  $s < 0$  und  $t < -\frac{j}{f}$  die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}_k}$ . Es ist  $l_{s,t}^* \cap U_L \neq \emptyset$ . Daher gilt (vgl. 4.1.9)

$$\{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_L) \cup (l_{s,t}^* \cap U_R)^{\Lambda_k^{-1}} = (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}.$$

Also ist  $l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Die Gerade  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  ist eine steigende Gerade (vgl. 4.1.17(vii)). Somit ist (vgl. Definition 4.2.1)

$$\begin{aligned} (l_{s,t}^*)^\sigma &= \{[1, s, 0]\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L)^{A^\lambda} \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap U_L)^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R)^{(k^{-1}A)^\lambda} \\ &= l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}_k}. \end{aligned}$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Mit den in 4.2.7 betrachteten Geraden haben wir nun für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  nachgeprüft, dass  $l^\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Also ist  $\sigma$  eine Lineation. ■

**4.2.9 Lemma.** *Alle  $\sigma \in \Sigma_2$  sind Lineationen der Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$ .*

**Beweis.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_2$$

und  $\sigma := A^{\sigma_2}$ . Dann ist  $\det(A) > 0$  und  $f < 0$ . Im Folgenden weisen wir nach, dass für alle Geraden  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  auch das Bild  $l^\sigma$  in  $\overline{\mathcal{L}}_k$  liegt. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen wie in 4.1.17 für die Aufteilung der Punktmenge in Viertel Ebenen bzgl.  $A$ .

- Für  $x < 0$  betrachten wir die Gerade  $l_x \in \overline{\mathcal{L}}_k \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Aus 4.1.17(ix) wissen wir, dass  $l_x^{A^\lambda}$  eine fallende Gerade ist. Also ist  $(l_x^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k$  (vgl. 4.1.9). Nun verwenden dass die Gleichungen  $O_L^{A^\lambda} = \tilde{U}_R$  und  $U_L^{A^\lambda} = \tilde{O}_L$  erfüllt sind (vgl. 4.1.17(vi)). Insgesamt erhalten wir mit Definition 4.2.1, Lemma 4.1.9 und 4.2.4, dass

$$l_x^\sigma = \{y_\infty\}^{A^\lambda} \cup (l_x \cap O_L)^{(kA)^\lambda} \cup \{l_x \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{A^\lambda} \cup (l_x \cap U_L)^{A^\lambda} = (l_x^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k .$$

- Für  $x > 0$  betrachten wir die Gerade  $l_x \in \overline{\mathcal{L}}_k \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Die Gerade  $l_x$  liegt in der rechten Halbebene. Dann ist (vgl. Definition 4.2.1)

$$l_x^\sigma = (l_x \setminus \{l_x \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\})^{A^\lambda} \cup \{l_x \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{A^\lambda} \cup \{y_\infty\}^{A^\lambda} = l_x^{A^\lambda} .$$

Aus 4.1.17(ix) wissen wir, dass  $l_x^{A^\lambda}$  eine steigende Gerade ist. Folglich ist  $l_x^\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_k$ .

- Für  $s > 0$  und  $t > -\frac{j}{f}$  betrachten wir die steigende Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}_k \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Aus 4.1.17(vii) wissen wir, dass  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine fallende Gerade ist. Also ist  $(l_{s,t}^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k$  (vgl. Lemma 4.1.9). Außerdem ist Gleichung  $l_{s,t}^{A^\lambda} \cap H_R = l_{s,t}^{A^\lambda} \cap \tilde{U}_R = (l_{s,t} \cap O_L)^{A^\lambda}$  erfüllt (vgl. 4.1.17(vi)). Insgesamt erhalten wir mit Definition 4.2.1, Lemma 4.1.9 und 4.2.4, dass

$$\begin{aligned} l_{s,t}^\sigma &= \{[1, s, 0]\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap U_L)^{A^\lambda} \cup \{l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap O_L)^{(kA)^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap O_R)^{A^\lambda} \\ &= (l_{s,t}^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k . \end{aligned}$$

- Nun betrachten wir für  $s > 0$  und  $t = -\frac{j}{f}$  die steigende Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}_k \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Da die Gleichungen  $l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} = l_{s,t} \wedge l_0$  und  $l_0^{A^\lambda} = l_0$  erfüllt sind, liegt  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{y_\infty} \subset \overline{\mathcal{L}}_k$ . Mit Definition 4.2.1 erhalten wir insgesamt

$$l_{s,t}^\sigma = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k .$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

- Als nächstes betrachten wir für den Fall  $s > 0$  und  $t < -\frac{j}{f}$  die steigende Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}_k \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Es gilt  $l_{s,t} \cap U_R \neq \emptyset \neq l_{s,t} \cap U_L$ . Da in diesem Fall auch  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine steigende Gerade ist (vgl. 4.1.17(vii)), erhalten wir mit Definition 4.2.1, dass

$$l_{s,t}^\sigma = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k .$$

- Für  $s < 0$  und  $t > -\frac{j}{f}$  betrachten wir die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Dann sind die Gleichungen  $l_{s,t}^* \cap H_L = l_{s,t}^* \cap O_L$  und  $l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} \in H_R$  erfüllt. Mit Lemma 4.1.9 erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}} \ni l_{ks,t} &= (l_{s,t}^*)^{\llbracket k|1 \rrbracket} \\ &= \{[1, s, 0]\}^{\Lambda_k} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L)^{\Lambda_k} \cup (l_{s,t}^* \cap O_R) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) . \end{aligned}$$

Also ist  $l_{ks,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Die Gerade  $l_{ks,t}^{A^\lambda}$  ist eine steigende Gerade (vgl. 4.1.17(vi)). Aus  $\Lambda_k|_{l_0} = \mathbb{1}^\lambda|_{l_0}$  und Definition 4.2.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} (l_{s,t}^*)^\sigma &= \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \right)^{(kA)^\lambda} \cup \left( (l_{s,t}^* \cap O_R) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) \right)^{A^\lambda} \\ &= (l_{ks,t})^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k . \end{aligned}$$

- Nun betrachten wir für  $s < 0$  und  $t = -\frac{j}{f}$  die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}}_k$  mit  $l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} = l_{s,t}^* \wedge l_0$ . Also ist (vgl. 4.1.9)

$$\left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \right)^{\Lambda_k} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) = (l_{s,t}^*)^{\llbracket k|1 \rrbracket} = l_{ks,t} \in \overline{\mathcal{L}} .$$

Folglich ist  $l_{ks,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Da die Gleichung  $l_{ks,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda} = l_{ks,t} \wedge l_0$  erfüllt ist, liegt  $l_{ks,t}^{A^\lambda}$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{y_\infty}$ . Somit ist  $l_{ks,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Wegen  $\Lambda_k|_{l_0} = \mathbb{1}^\lambda|_{l_0}$  folgt mit Definition 4.2.1, dass

$$(l_{s,t}^*)^\sigma = \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \right)^{(kA)^\lambda} \cup \left( \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) \right)^{A^\lambda} = l_{ks,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k .$$

- Als nächstes betrachten wir für  $s < 0$  und  $t < -\frac{j}{f}$  die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Dann gilt  $l_{s,t}^* \cap H_R = l_{s,t}^* \cap U_R$ . Folglich ist (vgl. 4.1.9)

$$\overline{\mathcal{L}} \ni l_{s,t} = (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \cup (l_{s,t}^* \cap U_L) \cup (l_{s,t}^* \cap U_R)^{\Lambda_k^{-1}} .$$

Es ist  $l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$ . Aus 4.1.17(vii) wissen wir, dass  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine fallende Gerade ist. Folglich ist  $(l_{s,t}^{A^\lambda})^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k$  (vgl. 4.1.9). Außerdem sind aus 4.1.17(vi) die folgenden Inklusionen



## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

bekannt:  $(l_{s,t} \cap O_L)^{A^\lambda} \subset \tilde{U}_R$ ,  $(l_{s,t} \cap U_{\overline{L}})^{A^\lambda} \subset \tilde{O}_{\overline{L}}$  und  $(l_{s,t} \cap U_R)^{A^\lambda} \subset \tilde{O}_R$ . Demnach gilt

$$l_{s,t}^{A^\lambda} \cap H_L = l_{s,t}^{A^\lambda} \cap \tilde{O}_L = (l_{s,t} \cap U_L)^{A^\lambda}.$$

Insgesamt erhalten wir aus Definition 4.2.1 und 4.2.4, Folgendes:

$$\begin{aligned} & (l_{s,t}^*)^\sigma \\ &= \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \right)^{(kA)^\lambda} \cup \left( (l_{s,t}^* \cap U_{\overline{L}}) \cup (l_{s,t}^* \cap U_R) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \right)^{A^\lambda} \\ &= \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t}^* \cap O_L) \right)^{(kA)^\lambda} \cup \left( (l_{s,t}^* \cap U_{\overline{L}}) \cup \{l_{s,t}^* \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \right)^{A^\lambda} \cup (l_{s,t}^* \cap U_R)^{(k^{-1}Ak)^\lambda} \\ &= \left( (l_{s,t} \cap U_{\overline{L}}) \cup \{l_{s,t} \wedge g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}\} \right)^{A^\lambda} \cup \left( \{[1, s, 0]\} \cup (l_{s,t} \cap O_L) \cup (l_{s,t} \cap U_R) \right)^{(Ak)^\lambda} \\ &= \left( l_{s,t}^{A^\lambda} \right)^{\llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k. \end{aligned}$$

Mit den in 4.2.7 betrachteten Geraden haben wir nun für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  nachgeprüft, dass  $l^\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Also ist  $\sigma$  eine Lineation. ■

**4.2.10 Lemma.** *Alle  $\sigma \in \Sigma_3$  sind Lineationen der Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$ .*

**Beweis.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_3$$

und  $\sigma := A^{\sigma_3}$ . Dann ist  $e > 0$  und  $j > 0$ . Für alle Geraden  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  gilt  $l^\sigma = l^{A^\lambda}$  (vgl. Definition 4.2.1). Wir beweisen im Folgenden, dass für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  auch das Bild  $l^\sigma$  in  $\overline{\mathcal{L}}_k$  liegt.

- Für  $x \neq 0$  betrachten wir die Gerade  $l_x \in \overline{\mathcal{L}}_k \cap \overline{\mathcal{L}}$ . Da die Ferngerade  $g_\infty$  durch die Abbildung  $A^\lambda$  auf sich abgebildet wird (vgl. 4.1.17(iii)), ist  $l_x^{A^\lambda}$  ein Element des Büschels  $\overline{\mathcal{L}}_{y_\infty} \subset \overline{\mathcal{L}}_k$ . Somit erhalten wir  $l_x^\sigma = l_x^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k$ .
- Nun betrachten wir für  $s > 0$  und  $t \in \mathbb{R}$  die steigende Gerade  $l_{s,t}$ . Aus 4.1.17(v) ist bekannt, dass  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine steigende Gerade ist. Folglich erhalten wir  $l_{s,t}^\sigma = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k$ .
- Als nächstes betrachten wir für  $s < 0$  und  $t \in \mathbb{R}$  die geknickte Gerade  $l_{s,t}^*$ . Dann ist (vgl. 4.1.9) die Gerade  $(l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = l_{s,t}$  eine fallende Gerade. Wegen 4.1.17(v) ist auch  $\left( (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} \right)^{A^\lambda}$  eine fallende Gerade. Indem wir verwenden, dass die Gleichungen  $H_L^{A^\lambda} = H_L$  und  $H_R^{A^\lambda} = H_R$  erfüllt sind (vgl. 4.1.17(iv)), und mit 4.2.4 erhalten wir

$$(l_{s,t}^*)^\sigma = (l_{s,t}^*)^{A^\lambda} = (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket A^\lambda \llbracket 1|k \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k.$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Mit den in 4.2.7 betrachteten Geraden haben wir nun für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  nachgeprüft, dass  $l^\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Also ist  $\sigma$  eine Lineation. ■

**4.2.11 Lemma.** *Alle  $\sigma \in \Sigma_4$  sind Lineationen der Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$ .*

**Beweis.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_4$$

und  $\sigma := A^{\sigma_4}$ . Dann ist  $e < 0$  und  $j < 0$ . Im Folgenden zeigen wir, dass für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  auch das Bild  $l^\sigma$  in  $\overline{\mathcal{L}}_k$  liegt.

- Zuerst betrachten wir die Geraden  $l_x$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{y_\infty}$ . Da  $g_\infty$  und  $l_0$  Fixgeraden der Abbildungen  $A^\lambda$  und  $(k^{-1}A)^\lambda$  sind, ist  $y_\infty$  ein Fixpunkt von  $A^\lambda$  und von  $(k^{-1}A)^\lambda$ . Insgesamt erhalten wir mit Definition 4.2.1:

$$\begin{aligned} \text{Für } x < 0 \text{ gilt } l_x^\sigma &= l_x^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_{y_\infty} \subset \overline{\mathcal{L}}_k, \\ \text{und für } x > 0 \text{ gilt } l_x^\sigma &= l_x^{(k^{-1}A)^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_{y_\infty} \subset \overline{\mathcal{L}}_k. \end{aligned}$$

- Nun betrachten wir für  $s > 0$  die Gerade  $l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{L}}_k$ . Aus 4.1.17(vi) wissen wir, dass  $l_{s,t}^{A^\lambda}$  eine fallende Gerade ist. Also ist  $l_{s,t}^{A^\lambda \llbracket k^{-1} \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k$  (vgl. 4.1.9). Indem wir verwenden, dass die Gleichungen  $H_L^{A^\lambda} = H_R$  und  $H_R^{A^\lambda} = H_L$  erfüllt sind (vgl. 4.1.17(iv)), erhalten wir mit 4.2.4

$$l_{s,t}^\sigma = \{[1, s, 0]\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap H_L)^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap H_R)^{(k^{-1}A)^\lambda} = l_{s,t}^{A^\lambda \llbracket k^{-1} \rrbracket} \in \overline{\mathcal{L}}_k.$$

- Als letztes betrachten wir für  $s < 0$  die geknickte Gerade  $l_{s,t}^* \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Es ist  $(l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket} = l_{s,t} \in \overline{\mathcal{L}}$  (vgl. 4.1.9). Da  $l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}$  eine steigende Gerade ist (vgl. 4.1.17), erhalten wir mit Definition 4.2.1, dass

$$(l_{s,t}^*)^\sigma = \{[1, s, 0]\}^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap H_L)^{A^\lambda} \cup (l_{s,t} \cap H_R)^{(k^{-1}A)^\lambda} = (l_{s,t}^*)^{\llbracket 1|k^{-1} \rrbracket A^\lambda} = l_{s,t}^{A^\lambda} \in \overline{\mathcal{L}}_k.$$

Mit den in 4.2.7 betrachteten Geraden haben wir nun für alle  $l \in \overline{\mathcal{L}}_k$  nachgeprüft, dass  $l^\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_k$ . Also ist  $\sigma$  eine Lineation. ■

**4.2.12 Lemma.**  $\Sigma \subseteq \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_k)$ .

**Beweis.** Sei  $\sigma \in \Sigma$ . Dann existiert ein  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  und eine Matrix  $A \in \text{dom } \sigma_i$  so, dass  $\sigma = A^{\sigma_i}$  gilt. Nach Definition 4.2.1 gibt es in  $P$  eine nicht leere Menge  $U$  so, dass  $\sigma|_U = A^\lambda|_U$ . Folglich ist  $\sigma|_U$  stetig. Insgesamt erhalten wir, mit 4.2.6 - 4.2.11, dass  $\sigma|_U$  eine Lineation ist, die weder kollabiert noch lokal konstant ist. Nach [65, Theorem 6] sind nicht injektive stetige Lineationen von stabilen Ebenen entweder kollabiert oder lokal konstant. Wir erhalten insgesamt, dass  $\sigma|_U \in \Psi(\overline{\mathcal{M}}_k)$  gilt. Nach 1.4.3 folgt, dass  $\sigma$  als Fortsetzung von  $\sigma|_U$  stetig ist und  $\sigma \in \Psi(\overline{\mathcal{M}}_k)$  gilt. Wir haben also bewiesen, dass  $\sigma$  ein Endomorphismus der projektiven Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  ist. Nach [65, Corollary 9] ist jeder Endomorphismus einer kompakten projektiven Ebene, der nicht kollabiert ist, ein Automorphismus. Damit ist die Aussage bewiesen. ■

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Unser nächstes Ziel ist es, die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Wir wollen sogar noch mehr: Wir wollen einsehen, dass jede partielle Lineation der Moulton-Ebene, die auf einem nicht desarguesschen Gebiet definiert ist, die Einschränkung eines Automorphismus der Moulton-Ebene ist. Deswegen beschäftigen wir uns zuerst mit desarguesschen und nicht desarguesschen Unterebenen der Moulton-Ebene. Wir werden im Folgenden sehen, dass jede desarguessche Unterebene von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  eine Unterebene von einer der in 4.1.13 beschriebenen Halbebenen ist. Aus diesem Grund bezeichnen wir die Unterebenen  $F(p)$  und  $S(q)$  aus 4.1.13 als maximale desarguessche Unterebenen.

**4.2.13 Lemma.** *Eine Unterebene  $(U, (\overline{\mathcal{L}_k})_U)$  von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  ist genau dann nicht desarguessch, wenn es drei Punkte  $p_1, p_2, p_3 \in U$  und eine Halbebene  $H \in \{H_L, H_R\}$  derart gibt, dass  $p_1 \in H$  und  $p_2, p_3 \in P \setminus (H \cup l_0)$  gilt und die Gerade  $p_1p_2$  steigend ist und die Gerade  $p_1p_3$  geknickt ist. Insbesondere liegt jede desarguessche Unterebene in einer der in Lemma 4.1.13 beschriebenen desarguesschen Halbebenen.*

**Beweis.** Sei  $U \subset P$  und es gebe keine drei Punkte derart, dass obige Eigenschaften erfüllt sind. Dann ist  $U$  entweder Teilmenge einer der beiden Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  oder die Verbindungsgeraden von  $U \cap H_L$  mit  $U \cap H_R$  sind alle steigend oder alle geknickt. Im ersten Fall ist die Aussage bewiesen. Wenn alle Verbindungsgeraden geknickt sind betrachten wir  $U^\alpha$  mit

$$\alpha := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\sigma_4} \in \Sigma .$$

Dann sind die Verbindungsgeraden von  $U^\alpha \cap H_L$  mit  $U^\alpha \cap H_R$  steigend. Zu betrachten bleibt also nur noch der Fall, dass alle Verbindungsgeraden steigend sind. In diesem Fall gibt es keine Gerade mit Steigung Null, die gleichzeitig  $U \cap H_L$  und  $U \cap H_R$  schneidet. Wir betrachten nun im Büschel  $\mathcal{L}_{x_\infty}$  die offenen disjunkten Mengen:

$$\mathcal{U}_L := \{L_{0,y} \mid L_{0,y} \cap (U \cap H_L) \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{U}_R := \{L_{0,y} \mid L_{0,y} \cap (U \cap H_R) \neq \emptyset\}$$

Da alle Verbindungsgeraden steigend sind, existieren das Supremum  $Y_L$  der Menge  $\{y \in \mathbb{R} \mid L_{0,y} \in \mathcal{U}_L\}$  und das Infimum  $Y_R$  der Menge  $\{y \in \mathbb{R} \mid L_{0,y} \in \mathcal{U}_R\}$ . Es gilt  $Y_L \leq Y_R$  und  $U \subseteq S(Y_L)$ .

Im Folgenden zeigen wir die umgekehrte Richtung: Jede Unterebene  $(U, (\overline{\mathcal{L}_k})_U)$ , in der es drei Punkte mit obigen Eigenschaften gibt, ist nicht desarguessch. Wir beschränken uns auf den Fall  $p_1 \in H_L$ . Ansonsten betrachten wir wieder  $U^\alpha$  mit obigem Automorphismus  $\alpha$ . Wir finden in  $U$  drei offene Umgebungen  $U_{p_1}$ ,  $U_{p_2}$  und  $U_{p_3}$  um  $p_1$  bzw.  $p_2$  bzw.  $p_3$ , welche Kreisscheiben sind. Wir betrachten nun die Bilder der Umgebungen unter  $\iota_k$  in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ . Dort finden wir eine desarguessche Figur, welche nur eine fallende Verbindungsgerade von  $U_{p_1}^{\iota_k}$  und  $U_{p_3}^{\iota_k}$  enthält. Betrachten wir nun das Urbild dieser desarguesschen Figur in  $\mathcal{M}_k$  dann schließt sich diese nicht. Zur Veranschaulichung diene Abbildung 6. ■

**4.2.14 Bemerkung.** *Die Menge der maximalen desarguesschen Halbebenen  $S(p)$  und  $F(q)$  mit  $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  und  $q \in \mathbb{R}$  bildet eine Bahn unter der Automorphismen-Gruppe  $\Sigma$ .*

#### 4. Die Moulton-Ebenen

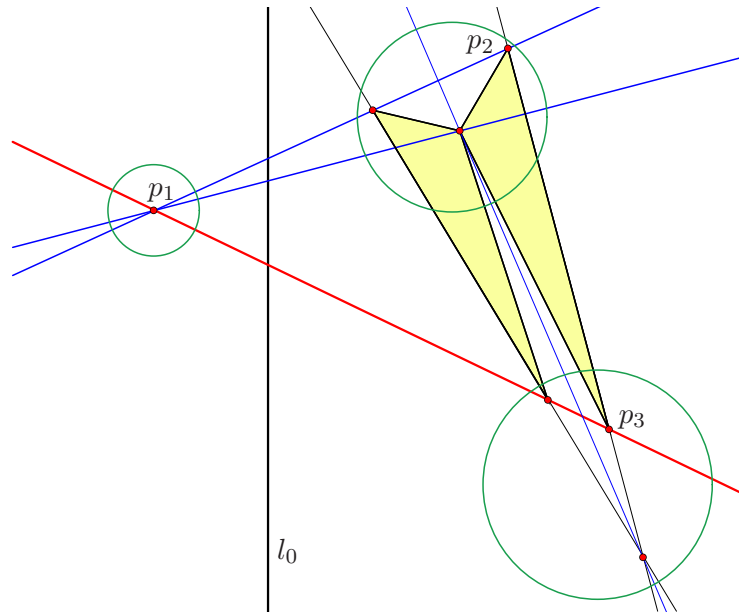


Abbildung 6: Eine Desargues-Figur mit nur einer fallende Verbindungsgeraden von rechter und linker Halbebene in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$

**Beweis.** Die Automorphismen-Gruppe  $\Sigma$  wirkt transitiv auf den Punkten von  $l_0$ . Die Spiegelung  $(-1)^{\sigma_4}$  bildet  $F(q)$  auf  $S(q)$  bzw.  $S(-\infty)$  auf  $S(\infty)$  ab. ■

**4.2.15 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ . Seien  $U$  und  $V$  nicht leere offene Teilmengen des Definitionsbereiches von  $\psi$  so, dass  $U, V, U^\psi$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegen. Es gebe Geraden  $l$  und  $m$ , die  $U$  und  $V$  derart schneiden, dass für die Steigungen der Geraden Folgendes gilt:  $s_U(l) = s_V(l)$  und  $s_U(m) \neq s_V(m)$ . Dann ist  $\psi$  die Einschränkung einer Lineation  $\sigma \in \Sigma$  und lässt sich folglich zu einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  fortsetzen.

**Beweis.** Da es eine Gerade  $m$  mit  $s_U(m) \neq s_V(m)$  gibt, liegen die Mengen  $U$  und  $V$  in verschiedenen Halbebenen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, dass die Menge  $U$  in der linken Halbebene und die Menge  $V$  in der rechten Halbebene liegt. Ebenso können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $U^\psi$  in der linken Halbebene liegt. Andernfalls betrachten wir die partielle Lineation  $\psi\alpha \in \Psi(\mathcal{M}_k)$  mit

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\sigma_4}.$$

Nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] gibt es eine Abbildung

$$\chi := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

so, dass  $\psi|_U = \chi|_U$ . Sei  $l \in \mathcal{L}_k$  eine Gerade wie in der Voraussetzung, die die Gleichung  $s_U(l) = s_V(l)$  erfüllt. Wie wir in Lemma 4.1.16 gesehen haben, gilt  $\psi|_V \in \{\chi|_V, (\chi\Lambda_k)|_V\}$ . Da  $m$  geknickt ist, gilt  $s_U(m) = k^{-1}s_V(m)$ . Also gilt nach Lemma 4.1.16 außerdem  $\psi|_V \in \{\Lambda_k^{-1}\chi|_V, (\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k)|_V\}$ . Es muss also eine der folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$\chi = \Lambda_k^{-1}\chi, \quad \chi = \Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k, \quad \chi\Lambda_k = \Lambda_k^{-1}\chi, \quad \chi\Lambda_k = \Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k.$$

Jede der Gleichungen

$$\chi = \Lambda_k^{-1}\chi, \quad \chi\Lambda_k = \Lambda_k^{-1}\chi, \quad \chi\Lambda_k = \Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k \quad (\star)$$

führt für  $k \neq 1$  darauf, dass  $\chi$  eine Nullspalte oder eine Nullzeile besitzen müsste, was nicht erfüllt sein kann, weil  $\chi$  invertierbar ist. Es bleibt also nur der Fall  $\psi|_V = \chi|_V = (\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k)|_V$  zu betrachten. Es gilt

$$\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k = \begin{bmatrix} a & kb & kc \\ k^{-1}d & e & f \\ k^{-1}g & h & j \end{bmatrix},$$

weil

$$\Lambda_k^{-1} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda_k = \begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen  $k \neq 1$  folgt aus  $\chi = \Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k$ , dass  $b = c = d = g = 0$  gilt. Da  $\chi$  invertierbar ist, ist  $a \neq 0$ . Wir normieren den Erzeuger von  $\chi$ , indem wir  $a = 1$  setzen, und erhalten

$$\chi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & j \end{bmatrix}.$$

Also ist  $\chi$  ein Element der Standgruppe  $\Theta$  aus 4.1.17. Sei

$$A := \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2 \mathbb{R}$$

mit  $\chi = A^\lambda$ . Wenn  $f \neq 0$  ist, wird die Punktmenge  $P$  durch die Geraden  $l_0$  und  $g_\infty^{\chi^{-1}}$  bzw. durch die Geraden  $l_0$  und  $g_\infty^\chi$  in Viertelebenen geteilt. Wir verwenden die in 4.1.17(vi) festgelegte Notation  $O_L, U_L, O_R$  und  $U_L$  bzw.  $\tilde{O}_L, \tilde{U}_L, \tilde{O}_R$  und  $\tilde{U}_L$  für die bezüglich  $A$  konstruierten Viertelebenen. Wir erinnern uns, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen haben, dass  $U$  und  $U^\psi$  in der linken Halbebene und  $V$  in der rechten Halbebene liegen. Weil die Mengen  $U, V, U^\psi$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in einer der beiden Halbebenen  $H_L$  oder  $H_R$  liegen, erhalten wir insgesamt: Für  $f \neq 0$  ist die Menge  $U$  entweder eine Teilmenge von  $O_L$  oder eine von  $U_L$ . Die Menge  $V$  ist entweder eine Teilmenge von  $O_R$  oder eine von  $U_R$ . Außerdem liegen die Mengen  $U^\psi$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in einer der vier

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Teilmengen  $\tilde{O}_L$ ,  $\tilde{U}_L$ ,  $\tilde{O}_R$  oder  $\tilde{U}_R$ . Da es steigende und geknickte Geraden gibt, die  $U$  und  $V$  schneiden, ist die Menge  $U$  genau dann eine Teilmenge einer der beiden oberen Viertelebenen, wenn auch die Menge  $V$  eine Teilmenge einer der beiden oberen Viertelebenen ist.

Im Folgenden konstruieren wir für die verschiedenen Fälle jeweils einen Automorphismus  $\sigma \in \Sigma$  von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , der auf  $U$  mit  $\psi$  übereinstimmt. Die partielle Lineation  $\psi|_U$  kann nur in eindeutiger Weise zu einer partiellen Lineation auf das Definitionsgebiet der Lineation  $\psi$  fortgesetzt werden. Folglich stimmt der Automorphismus  $\sigma$  auf dem Definitionsgebiet von  $\psi$  mit der Lineation  $\psi$  überein und  $\sigma$  ist eine Fortsetzung von  $\psi$ .

Es gilt  $\psi|_V = \chi|_V = (\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k)|_V$ . Wie wir aus der Tabelle in Lemma 4.1.16 ablesen können, ist dies der Fall, in dem die folgende Konstellation von Steigungen vorliegt:

$$s_U(l) = s_V(l) \text{ , } s_U^\psi(l) = s_V^\psi(l) \text{ und } s_U(m) = k^{-1}s_V(m) \text{ , } s_U^\psi(m) = k^{-1}s_V^\psi(m) \text{ .}$$

Die Menge  $V^\psi$  liegt folglich in der rechten Halbebene. Außerdem bildet die Lineation  $\psi$  alle steigende Geraden, die  $U$  und  $V$  schneiden, auf steigende Geraden und alle geknickte Geraden, die  $U$  und  $V$  schneiden, auf geknickte Geraden ab, denn andernfalls müsste zusätzlich eine der mit  $(\star)$  bezeichneten Gleichungen erfüllt sein.

1. Fall: Sei  $f = 0$ . Dann ist  $j \neq 0$ , da die Abbildung  $\chi$  invertierbar ist. Lemma 4.1.17(iii) besagt, dass in diesem Fall die Ferngerade und die Knickachse von der Abbildung  $\chi$  jeweils in sich abgebildet werden und die Menge  $U^\chi$  in der linken Halbebene liegt. Folglich gilt  $H_L^\chi = H_L$  und nach 4.1.17(iv) gilt  $j > 0$  (vgl. 4.1.17 (iv)). Da die Lineation  $\psi|_U = \chi|_U$  steigende Geraden auf steigende Geraden abbildet, folgt aus 4.1.17 (v)), dass  $e > 0$  ist. Also ist  $A \in \text{dom } \sigma_3$  (vgl. 4.2.2). Sei  $\sigma := A^{\sigma_3}$ . Dann gilt  $\sigma|_{H_L} = \chi|_{H_L}$ . Folglich ist  $\sigma \in \Sigma$  die Fortsetzung von  $\psi$  zu einem Automorphismus.

2. Fall: Sei  $f \neq 0$  und  $U \subseteq O_L$ . Dann ist  $V \subseteq O_R$ . Die Lineation  $\psi|_U = \chi|_U$  bildet steigende Geraden, die  $U$  und  $V$  schneiden (das sind Geraden, die  $O_L$  und  $O_R$  schneiden), auf steigende Geraden ab. Nach 4.1.17 gilt deswegen  $f \det(A) > 0$ . Da  $U^\psi$  in der linken Halbebene liegt, gilt entweder  $O_L^\chi = \tilde{O}_L$  oder  $O_L^\chi = \tilde{U}_L$ . Insgesamt erhalten wir mit 4.1.17(vi) und (vii), dass die Ungleichungen  $f > 0$  und  $\det(A) > 0$  erfüllt sind. Folglich ist  $A \in \text{dom } \sigma_1$  (vgl. 4.2.2). Sei  $\sigma := A^{\sigma_1}$ . Dann gilt  $\sigma|_{O_L} = \chi|_{O_L}$ , und  $\sigma \in \Sigma$  ist die Fortsetzung von  $\psi$  zu einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ .

3. Fall: Sei  $f \neq 0$  und  $U \subseteq U_L$ . Dann ist  $V \subseteq U_R$ . Die Lineation  $\psi|_U = \chi|_U$  bildet steigende Geraden, die  $U$  und  $V$  schneiden (das sind Geraden, die  $U_L$  und  $U_R$  schneiden), auf steigende Geraden ab. Nach 4.1.17 gilt deswegen  $f \det(A) < 0$ . Da  $U^\psi$  in der linken Halbebene liegt, gilt entweder  $U_L^\chi = \tilde{O}_L$  oder  $U_L^\chi = \tilde{U}_L$ . Insgesamt erhalten wir mit 4.1.17(vi) und (vii), dass die Ungleichungen  $f < 0$  und  $\det(A) > 0$  erfüllt sind. Folglich ist  $A \in \text{dom } \sigma_2$  (vgl. 4.2.2). Sei  $\sigma := A^{\sigma_2}$ . Dann ist  $\sigma|_{U_L} = \chi|_{U_L}$  und  $\sigma \in \Sigma$  ist die Fortsetzung von  $\psi$  zu einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ . ■

Eine nicht desarguessche Unterebene wird durch eine partielle Lineation  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  immer auf eine nicht desarguessche Unterebene abgebildet. Die folgende Aussage beweisen wir ohne zu verwenden, dass Umgebungen von Punkten der Knickachse  $l_0$  nicht desarguessch sind.

**4.2.16 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ . Wenn  $\text{dom } \psi \cap l_0 \neq \emptyset$ , dann gilt  $(\text{dom } \psi \cap l_0)^\psi \subset l_0$ .

**Beweis.** Annahme: Es gebe ein  $p \in l_0 \cap \text{dom } \psi$  mit  $p^\psi \notin l_0$ . Dann gibt es ein  $H \in \{H_L, H_R\}$  mit  $p^\psi \in H$ . Folglich existiert eine offene Umgebung  $W$  von  $p^\psi$  in  $H$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $\psi$  ist das Urbild  $W^{\psi^{-1}}$  eine offene Umgebung von  $p$ . Da  $p \in l_0$  gilt  $W^{\psi^{-1}} \cap H_L \neq \emptyset \neq W^{\psi^{-1}} \cap H_R$ . Sei  $U := W^{\psi^{-1}} \cap H_L$  und  $V := W^{\psi^{-1}} \cap H_R$ . Wir finden im Büschel  $(\mathcal{L}_k)_p$  eine steigende Gerade  $l$  und eine geknickte Gerade  $m$  derart, dass  $s_U^\psi(l), s_U^\psi(m) \notin \{0, \infty\}$ . Da in  $W^{\psi^{-1}}$  eine offene Kugel um  $p$  enthalten ist, schneiden die Geraden  $l$  und  $m$  die Umgebung  $W^{\psi^{-1}}$  in beiden Halbebenen. Somit erfüllen  $l, m, U$  und  $V$  die Voraussetzungen von Lemma 4.2.15. Also ist  $\psi$  die Restriktion eines Automorphismus  $\sigma \in \Sigma$ . Dies ist nach 4.2.7 ein Widerspruch zu  $p^\psi \notin l_0$ . ■

**4.2.17 Satz.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ . Wenn das Definitionsgebiet von  $\psi$  nicht desarguessch ist, lässt sich  $\psi$  zu einem Automorphismus  $\sigma \in \Sigma$  fortsetzen.

**Beweis.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ . Das Definitionsgebiet  $\text{dom } \psi$  sei nicht desarguessch. Folglich existieren drei Punkte  $p_1, p_2, p_3$  wie in 4.2.13. Nach 4.2.16 liegen die Bildpunkte  $p_1^\psi, p_2^\psi$  und  $p_3^\psi$  in  $P \setminus l_0$ . Da  $\text{dom } \psi$  und die Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  offen sind, finden wir offene Umgebungen  $U \ni p_1, V \ni p_2$  und  $V' \ni p_3$  in  $\text{dom } \psi$  so, dass die Mengen  $U, V$  und  $V'$  und auch deren Bilder  $U^\psi, V^\psi$  und  $V'^\psi$  jeweils Teilmenge einer der beiden Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  sind. Nach 4.1.15 können die Umgebungen  $V$  und  $V'$  so klein gewählt werden, dass alle Verbindungsgeraden  $p_1 \vee V$  steigend und alle Verbindungsgeraden  $p_1 \vee V'$  geknickt sind. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $U$  in der linken Halbebene und  $V$  und  $V'$  in der rechten Halbebene liegen, denn sonst betrachten wir die Lineation  $\alpha\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$  mit

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\sigma_4}.$$

Ebenso nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $U^\psi$  in der linken Halbebene liegt, andernfalls betrachten wir die Lineation  $\psi\alpha$ . Außerdem nehmen wir an, dass die Steigungen  $s_U^\psi(p_1p_2)$  und  $s_U^\psi(p_1p_3)$  keine Elemente von  $\{0, \infty\}$  sind. Denn wenn es so wäre fänden wir in der offenen Geradenmenge  $p_1 \vee V$  bzw. in  $p_1 \vee V'$  eine Gerade  $L$  mit  $s_U^\psi(L) \notin \{0, \infty\}$ . Dann betrachten wir statt  $p_2$  einen Punkt  $\tilde{p}_2 \in L \cap V$  bzw. statt  $p_3$  einen Punkt  $\tilde{p}_3 \in L \cap V'$ .

Wenn  $V^\psi$  mit  $V'^\psi$  in derselben Halbebene liegt, dann erfüllen  $U$  und  $\tilde{V} := V \cup V'$  die Voraussetzungen von 4.2.15 und die Behauptung ist bewiesen. Es bleiben also noch zwei Fälle, die betrachtet werden müssen:

$$U^\psi, V'^\psi \subseteq H_L \text{ und } V^\psi \in H_R$$

und

$$U^\psi, V^\psi \subseteq H_L \text{ und } V'^\psi \in H_R.$$

1.Fall: Sei  $U^\psi, V'^\psi \in H_L$  und  $V^\psi \in H_R$ . Nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] gibt es eine Abbildung  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  so, dass  $\psi|_U = \chi|_U$ . Es ist  $s_U(p_1p_2) = s_V(p_1p_2)$



#### 4. Die Moulton-Ebenen

vorausgesetzt. Aus der in diesem Fall vorausgesetzten Lage der Bilder erhalten wir  $s_U^\psi(p_1p_2) = rs_V^\psi(p_1p_2)$  mit  $r \in \{1, k^{-1}\}$ . Je nachdem ob die Bildgerade  $(p_1p_2)^\psi$  steigend oder geknickt ist, nimmt  $r$  den einen oder den anderen Wert an. In der Tabelle in 4.1.16 können wir ablesen, dass

$$\psi|_V \in \{\chi|_V, (\chi\Lambda_k)|_V\}$$

gilt. Nun betrachten wir die Gerade  $p_1p_3$ . Nach Voraussetzung gilt  $s_U(p_1p_3) = k^{-1}s_{V'}(p_1p_3)$ . Da  $U^\psi$  und  $V'^\psi$  in derselben Halbebene liegen, erhalten wir  $s_U^\psi(p_1p_3) = s_{V'}^\psi(p_1p_3)$ . Aus 4.1.16 erhalten wir

$$\psi|_{V'} = (\Lambda_k^{-1}\chi)|_{V'} .$$

Nun berechnen wir  $\psi|_{V'}$  über das Verhalten der Gerade  $p_2p_3$ . Da  $V$  und  $V'$  in derselben Halbebene liegen, gilt  $s_V(p_2p_3) = s_{V'}(p_2p_3)$ . Weil in diesem Fall  $V^\psi \subseteq H_R$  und  $V'^\psi \subseteq H_L$  gilt, erhalten wir  $s_V^\psi(p_2p_3) = \tilde{r}s_{V'}^\psi(p_2p_3)$  mit  $\tilde{r} \in \{1, k\}$  je nachdem ob die Bildgerade steigend oder geknickt ist. Aus 4.1.16 erhalten wir:

$$\text{Wenn } \psi|_V = \chi|_V . \text{ Dann gilt } \psi|_{V'} \in \{\chi|_{V'}, (\chi\Lambda_k^{-1})|_{V'}\} .$$

$$\text{Wenn } \psi|_V = (\chi\Lambda_k)|_V . \text{ Dann gilt } \psi|_{V'} \in \{(\chi\Lambda_k)|_{V'}, \chi|_{V'}\} .$$

Wir haben nun auf zwei Wegen die Einschränkung der Lineation  $\psi$  auf  $V'$  berechnet. Da  $\psi|_{V'}$  eindeutig bestimmt ist, gilt

$$\psi|_{V'} = (\Lambda_k^{-1}\chi)|_{V'} \in \{\chi|_{V'}, (\chi\Lambda_k^{-1})|_{V'}, (\chi\Lambda_k)|_{V'}\} .$$

Wie im Beweis von 4.2.15 führt  $(\Lambda_k^{-1}\chi)|_{V'} \in \{\chi|_{V'}, (\chi\Lambda_k)|_{V'}\}$  zu dem Widerspruch, dass  $\chi$  eine Nullspalte oder eine Nullzeile besitzen müsste. Wir erhalten insgesamt, dass

$$\psi|_V = \chi|_V \text{ und } \psi|_{V'} = (\chi\Lambda_k^{-1})|_{V'} = (\Lambda_k^{-1}\chi)|_{V'}$$

gilt. Das ist der Fall in dem  $r = 1$  und  $\tilde{r} = k$  erfüllt ist. Außerdem ist die Gerade  $(p_1p_2)^\psi$  steigend und die Gerade  $(p_3p_2)^\psi$  geknickt. Wie im Beweis von 4.2.15 erhalten wir aus obiger Bedingung, dass es eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2 \mathbb{R}$$

mit  $\chi = A^\lambda$  gibt. Weil  $V^\psi$  und  $V'^\psi$  in unterschiedlichen Halbebenen liegen, gilt  $f \neq 0$ . Wir verwenden die Bezeichnungen für die Viertelebenen, in die  $P$  bezüglich  $A$  aufgeteilt wird, wie in 4.1.17. Wir bestimmen nun, in welchen Viertelebenen sich die Umgebungen  $U, V$  und  $V'$  und deren Bilder befinden: Da  $V^\psi$  und  $V'^\psi$  nicht in derselben Halbebene liegen, sind  $V$  und  $V'$  nicht in derselben Viertelebene. Weil die Bilder von  $U$  bzw.  $V$  jeweils in derselben Halbebene liegen wie  $U$  bzw.  $V$ , liegen entweder beide Umgebungen über  $g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}$  oder beide darunter. Aus der Tatsache, dass die Gerade  $p_1p_2$  steigend und die Gerade  $p_1p_3$  geknickt ist, folgern wir, dass  $V$  oben und  $V'$  unten liegt. Insgesamt erhalten wir

$$U \subset O_L, V \subset O_R \text{ und } V' \subset U_R .$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Daraus folgt, dass  $U^\psi$  und  $V^\psi$  entweder beide über  $g_\infty^x$  oder beide darunter liegen. Die Menge  $V'^\psi$  liegt in der linken Halbebene, aber nicht in derselben Viertelebene wie  $U^\psi$ , da die Urbilder in unterschiedlichen Viertelebenen liegen. Aus der Tatsache dass  $(p_3p_2)^\psi$  geknickt ist, können wir folgern, dass

$$V'^\psi \subset \tilde{O}_L, U^\psi \subset \tilde{U}_L \text{ und } V^\psi \subset \tilde{U}_R$$

gilt. Insgesamt folgt  $O_L^x = \tilde{U}_L$ . Aus 4.1.17(vi) erhalten wir daraus, dass  $f > 0$  und  $\det(A) > 0$  gilt. Folglich ist  $A \in \text{dom } \sigma_1$  und  $\psi$  lässt sich zum Automorphismus  $A^{\sigma_1} \in \Sigma$  erweitern.

2.Fall: Sei  $U^\psi, V^\psi \in H_L$  und  $V'^\psi \in H_R$ . Nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] gibt es wieder eine Abbildung  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  so, dass  $\psi|_U = \chi|_U$ . Nach Voraussetzung gilt  $s_U(p_1p_2) = s_V(p_1p_2)$ . Weil  $U^\psi$  und  $V^\psi$  in derselben Halbebene liegen, erhalten wir aus 4.1.16, dass

$$\psi|_V = \chi|_V$$

gilt. Wir betrachten nun die geknickte Gerade  $p_1p_3$ . Es gilt  $s_U(p_1p_3) = k^{-1}s_{V'}(p_1p_3)$  und  $s_U^\psi(p_1p_3) = rs_{V'}^\psi(p_1p_3)$  mit  $r \in \{1, k^{-1}\}$ . Je nachdem ob die Bildgerade steigend oder geknickt ist, gilt  $r = 1$  oder  $r = k^{-1}$ . Nach 4.1.16 gilt

$$\psi|_{V'} \in \{(\Lambda_k^{-1}\chi)|_{V'}, (\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k)|_{V'}\}.$$

Die Lineation  $\psi|_{V'}$  wird auch von der Lineation  $\psi|_V$  induziert. Deswegen betrachten wir nun die Gerade  $p_2p_3$ . Weil  $V$  und  $V'$  in derselben Halbebene liegen, gilt  $s_V(p_2p_3) = s_{V'}(p_2p_3)$ . Aus der Tatsache, dass  $U^\psi$  in der linken Halbebene und  $V'^\psi$  in der rechten Halbebene liegt, erhalten wir  $s_U^\psi(p_2p_3) = \tilde{r}s_{V'}^\psi(p_2p_3)$  mit  $\tilde{r} \in \{1, k^{-1}\}$ . Je nachdem ob  $(p_2p_3)^\psi$  steigend oder fallend ist, gilt der eine oder der andere Wert für  $\tilde{r}$ . Aus der Tabelle in 4.1.16 lesen wir ab, dass

$$\psi|_{V'} \in \{\chi|_{V'}, (\chi\Lambda_k)|_{V'}\}$$

gilt. Da  $\psi|_{V'}$  eindeutig bestimmt ist gilt

$$\psi|_{V'} \in \{\chi|_{V'}, (\chi\Lambda_k)|_{V'}\} \cap \{(\Lambda_k^{-1}\chi)|_{V'}, (\Lambda_k^{-1}\chi\Lambda_k)|_{V'}\}.$$

Jede der vier Gleichungen führt aber, wie im Beweis von 4.2.15, zu dem Widerspruch, dass  $\chi$  eine Nullspalte oder Nullzeile besitzen müsste. Folglich kommt die angenommene Konstellation der Bilder  $U^\psi$ ,  $V^\psi$  und  $V'^\psi$  nicht vor. ■

Sei  $(U, (\overline{\mathcal{L}_k})_U)$  eine nicht desarguessche offene Unterebene von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , dann ist auch  $\tilde{U} := (U \setminus g_\infty, (\overline{\mathcal{L}_k})_{U \setminus g_\infty})$  nicht desarguessch. Denn angenommen  $\tilde{U}$  ist desarguessch, dann ist  $\tilde{U}$  nach 4.2.13 eine Unterebene von einer der in 4.1.12 beschriebenen maximalen desarguesschen Halbebenen  $(X(p), (\overline{\mathcal{L}_k})_{X(p)})$  mit  $X \in \{S, F\}$  und  $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ . Wenn  $U \cap (g_\infty \setminus X(p))$  nicht leer ist, dann ist  $U$  nicht offen, denn jede Umgebung eines Punktes in  $g_\infty \setminus X(p)$  schneidet  $P \setminus X(p)$ . Folglich ist  $U \cap (g_\infty \setminus X(p))$  leer und  $U$  ist sogar eine Teilmenge von  $X(p)$ . Das ist ein Widerspruch dazu, dass  $(U, (\overline{\mathcal{L}_k})_U)$  nicht desarguessch ist. Folglich induziert eine

#### 4. Die Moulton-Ebenen

partielle Lineation von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  mit einem nicht desarguesschen Definitionsgebiet eine partielle Lineation von  $\mathcal{M}_k$  mit einem nicht desarguesschen Definitionsgebiet. Wir erhalten also das folgende Korollar:

**4.2.18 Korollar.** Sei  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ . Wenn das Definitionsgebiet von  $\psi$  nicht desarguessch ist, lässt sich  $\psi$  zu einem Automorphismus  $\sigma \in \Sigma$  fortsetzen.

Da jeder Automorphismus der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$  ein nicht desarguessches Definitionsgebiet besitzt, folgt  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k}) \subseteq \Sigma$ . Da wir mit Lemma 4.2.12 bereits die umgekehrte Inklusion nachgewiesen haben, kennen wir nun alle Automorphismen der Moulton-Ebene:

**4.2.19 Satz.**  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k}) = \Sigma$ .

Die Automorphismen der affinen Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k$  sind Restriktionen von genau den Automorphismen der projektiven Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , die die Ferngerade  $g_\infty$  in sich überführen. Mit Lemma 4.2.7 erhalten wir, dass das genau die Automorphismen von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  sind, welche durch eine Matrix  $A$  induziert werden, die die Eigenschaft hat, dass die Abbildung  $A^\lambda$  die Ferngerade festhält. Also erhalten wir das folgende Korollar:

**4.2.20 Korollar.** Es gilt  $\text{Aut}(\mathcal{M}_k) = \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ .

Unser nächstes Ziel ist es, eine Verknüpfungstafel von  $\Sigma$  zu berechnen. Deswegen betrachten wir zuerst Produkte von Matrizen aus  $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ .

**4.2.21 Lemma.** Seien  $i, \tilde{i} \in \{1, 2, 3, 4\}$  und seien

$$A := \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_i \text{ und } B := \begin{pmatrix} e' & f' \\ h' & j' \end{pmatrix} \in \text{dom } \sigma_{\tilde{i}}.$$

(i) Seien  $ff' \neq 0$  und  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$ . Dann gilt:

- $ff' > 0 \implies AB \in \text{dom } \sigma_2$
- $ff' < 0 \implies AB \in \text{dom } \sigma_1$
- $\tilde{U}_L(A) \cup \tilde{U}_R(A) \subset U_L(B) \cup U_R(B)$
- $O_L(A) \cup O_R(A) \subset O_L(AB) \cup O_R(AB)$

(ii) Seien  $ff' \neq 0$  und  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$ . Dann gilt:

- $ff' > 0 \implies AB \in \text{dom } \sigma_4$
- $ff' < 0 \implies AB \in \text{dom } \sigma_3$
- $\tilde{U}_L(A) \cup \tilde{U}_R(A) = U_L(B) \cup U_R(B)$

(iii) Seien  $ff' \neq 0$  und  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Dann gilt:

- $ff' > 0 \implies AB \in \text{dom } \sigma_1$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

- $ff' < 0 \implies AB \in \text{dom } \sigma_2$
- $\tilde{O}_L(A) \cup \tilde{O}_R(A) \subset O_L(B) \cup O_R(B)$
- $U_L(A) \cup U_R(A) \subset U_L(AB) \cup U_R(AB)$

(iv) Wenn  $i = 3$ , also  $A \in \text{dom } \sigma_3$ , dann gilt

$$B \in \text{dom } \sigma_j \implies \{AB, BA\} \subset \text{dom } \sigma_j .$$

(v) Wenn  $i = 4$ , also  $A \in \text{dom } \sigma_4$ , dann gilt mit  $(j, k) \in \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$

$$B \in \text{dom } \sigma_j \implies \{AB, BA\} \subset \text{dom } \sigma_k .$$

(vi) Für  $l \in \overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$  gilt  $l^{(A^{\sigma_i})^{-1}} = l^{(A^{-1})^\lambda}$ .

(vii) Es gilt  $g_\infty^{(A^{\sigma_i} B^{\sigma_j})^{-1}} = g_\infty^{(B^{-1} A^{-1})^\lambda}$ .

**Beweis.** Seien die Matrizen  $A$  und  $B$  wie in der Voraussetzung. Dann ist  $\det(A) > 0$  und  $\det(B) > 0$  (vgl. Definition 4.2.2). Somit ist auch  $\det(AB) > 0$ . Es ist

$$AB = \begin{pmatrix} ee' + fh' & ef' + fj' \\ he' + jh' & hf' + jj' \end{pmatrix} .$$

Anhand der Einträge  $ef' + fj'$  und  $hf' + jj'$  können wir entscheiden, in welchem der vier Definitionsgebiete  $\text{dom } \sigma_1$ ,  $\text{dom } \sigma_2$ ,  $\text{dom } \sigma_3$  oder  $\text{dom } \sigma_4$  das Produkt  $AB$  liegt (vgl. Definition 4.2.2).

- (i) Sei  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$ . Wenn  $ff' > 0$ , dann erhalten wir daraus durch Umformen die Ungleichung  $ef' + fj' < 0$ . Also liegt in diesem Fall das Produkt  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_2$ . Wenn  $ff' < 0$ , dann erhalten wir hingegen durch Umformen die Ungleichung  $ef' + fj' > 0$ , und  $AB$  ist ein Element von  $\text{dom } \sigma_1$ .

Da  $f \neq 0$  liegt  $A$  in  $\text{dom } \sigma_1 \cup \text{dom } \sigma_2$ . Folglich ist die Gleichung  $U_L(A) \cup U_R(A) = (\tilde{O}_L(A) \cup \tilde{O}_R(A))^{(A^{-1})^\lambda}$  erfüllt (vgl. 4.1.17(vi)). Die Ungleichung  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$  besagt, dass die Gerade  $g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$  über der Geraden  $g_\infty^{A^\lambda}$  liegt (vgl. 4.1.17(iii)), das heißt, die Gerade  $g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$  schneidet die Menge  $\tilde{O}_L(A) \cup \tilde{O}_R(A)$ . Folglich ist  $\tilde{U}_L(A) \cup \tilde{U}_R(A) \subset U_L(B) \cup U_R(B)$ , und die Gerade  $g_\infty^{(B^{-1} A^{-1})^\lambda}$  schneidet die Menge  $U_L(A) \cup U_R(A)$ . Deswegen ist die Menge  $O_L(A) \cup O_R(A)$  eine Teilmenge von  $O_L(AB) \cup O_R(AB)$  (vgl. 4.1.17(vi)).

- (ii) Sei  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$ . Dann ist  $e = -\frac{fj'}{f'}$ . Es gilt  $\det A = ej - hf > 0$ . Ersetzen wir in dieser Ungleichung  $e$  durch  $-\frac{fj'}{f'}$ , so erhalten wir  $-\frac{f}{f'}(jj' + hf') > 0$ . Wenn  $ff' > 0$ , dann ist  $jj' + hf' < 0$  und  $AB$  liegt in  $\text{dom } \sigma_4$ . Ist hingegen  $ff' < 0$ , dann ist  $jj' + hf' > 0$  und  $AB$  ist ein Element von  $\text{dom } \sigma_3$ .

Die Gleichung  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$  besagt, dass die Geraden  $g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$  und  $g_\infty^{A^\lambda}$  zusammenfallen (vgl. 4.1.17(iii)). Also ist  $\tilde{U}_L(A) \cup \tilde{U}_R(A) = U_L(B) \cup U_R(B)$ .

#### 4. Die Moulton-Ebenen

- (iii) Sei  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Wenn  $ff' > 0$ , dann erhalten wir daraus durch Umformen die Ungleichung  $ef' + fj' > 0$ . Also liegt in diesem Fall  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_1$ . Wenn  $ff' < 0$ , dann erhalten wir hingegen durch Umformen die Ungleichung  $ef' + fj' < 0$ , und  $AB$  ist ein Element von  $\text{dom } \sigma_2$ .

Da  $f \neq 0$  ist, liegt  $A$  in  $\text{dom } \sigma_1 \cup \text{dom } \sigma_2$ . Folglich ist die Gleichung  $O_L(A) \cup O_R(A) = (\tilde{U}_L(A) \cup \tilde{U}_R(A))^{(A^{-1})^\lambda}$  erfüllt (vgl. 4.1.17(vi)). Die Ungleichung  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$  besagt, dass die Gerade  $g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$  unter der Geraden  $g_\infty^{A^\lambda}$  liegt (vgl. 4.1.17(iii)), sie schneidet also die Menge  $\tilde{U}_L(A) \cup \tilde{U}_R(A)$ . Folglich gilt  $\tilde{O}_L(A) \cup \tilde{O}_R(A) \subset O_L(B) \cup O_R(B)$ . Also liegt  $g_\infty^{(B^{-1}A^{-1})^\lambda}$  über der Geraden  $g_\infty^{(A^{-1})^\lambda}$  und die Menge  $U_L(A) \cup U_R(A)$  ist eine Teilmenge von  $U_L(AB) \cup U_R(AB)$  (vgl. 4.1.17(vi)).

- (iv) Sei  $A \in \text{dom } \sigma_3$ . Dann ist  $f = 0$  und es ist  $e > 0$  und  $j > 0$  (vgl. Definition 4.2.2). Wenn  $B \in \text{dom } \sigma_1$  ist, dann ist  $f' > 0$ . Dann gilt auch  $ef' + fj' = ef' > 0$  und  $AB \in \text{dom } \sigma_1$ . Ist hingegen  $B \in \text{dom } \sigma_2$  ist, dann gilt  $f' < 0$  und somit auch  $ef' < 0$ . Also ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_2$ . Wenn  $B \in \text{dom } \sigma_3$ , dann ist  $f' = 0$  und  $j' > 0$ . Also gilt  $ef' + fj' = ef' = 0$  und  $hf' + jj' = jj' > 0$ . Also ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_3$ . Wenn  $B \in \text{dom } \sigma_4$  ist, dann ist  $f' = 0$  und  $j' < 0$ . Also gilt  $ef' + fj' = 0$  und  $hf' + jj' = jj' < 0$ . Insgesamt erhalten wir für den letzten Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_4$ .

- (v) Sei  $A \in \text{dom } \sigma_4$ . Dann ist  $f = 0$  und es gilt  $e < 0$  und  $j < 0$  (vgl. Definition 4.2.2). Wenn  $B \in \text{dom } \sigma_1$  ist, dann ist  $f' > 0$ . Wegen  $e < 0$  ist die Ungleichung  $ef' + fj' = ef' < 0$  erfüllt und es gilt  $AB \in \text{dom } \sigma_2$ . Ist hingegen  $B \in \text{dom } \sigma_2$ , dann gilt  $f' < 0$  und somit  $ef' > 0$ . Also ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_1$ . Wenn  $B \in \text{dom } \sigma_3$  ist, dann ist  $f' = 0$  und  $j' > 0$ . Folglich ist  $ef' + fj' = ef' = 0$  und es gilt  $hf' + jj' = jj' < 0$ , da  $j < 0$ . Also ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_4$ . Wenn  $B \in \text{dom } \sigma_4$  ist, dann gilt  $f' = 0$  und  $j' < 0$ . Also ist  $ef' + fj' = 0$  und  $hf' + jj' = jj' > 0$ . Folglich erhalten wir für den letzten Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_3$ .

- (vi) Aus 4.1.17(ii) ist bekannt, dass das Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$  durch die Abbildung  $A^\lambda$  bijektiv auf sich abgebildet wird. Außerdem wissen wir aus Lemma 4.2.7, dass für alle  $g \in \overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$  die Gleichung  $g^{A^{\sigma_i}} = g^{A^\lambda}$  gilt. Da  $A^{\sigma_i}$  ein Automorphismus der Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k$  ist, erhalten wir insgesamt, dass für jede Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$  eine Gerade  $g \in \overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$  derart existiert, dass die Gleichung  $g^{A^{\sigma_i}} = g^{A^\lambda} = l$  erfüllt ist. Folglich ist  $l^{(A^{\sigma_i})^{-1}} = g = l^{(A^{-1})^\lambda}$ .

- (vii) Das Urbild der Ferngerade  $g_\infty$  unter  $B^{\sigma_j}$  liegt, wie wir in (vi) gesehen haben, im Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$ , und es gilt  $g_\infty^{(B^{\sigma_j})^{-1}} = g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$ . Also erhalten wir, indem wir die Aussage (vi) ein zweites Mal benutzen, die Gleichung

$$g_\infty^{(A^{\sigma_i} B^{\sigma_j})^{-1}} = g_\infty^{(B^{\sigma_j})^{-1} (A^{\sigma_i})^{-1}} = \left( g_\infty^{(B^{-1})^\lambda} \right)^{(A^{\sigma_i})^{-1}} = g_\infty^{(B^{-1} A^{-1})^\lambda}.$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Die Automorphismen-Gruppe  $\Sigma$  der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  besitzt als Verknüpfung die Komposition  $\circ$ . Im nächsten Lemma wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Verknüpfung  $\circ$  und der Matrizenmultiplikation herstellen.

**4.2.22 Lemma.** *Mit*

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} e' & f' \\ h' & j' \end{pmatrix}$$

*gilt folgende Verknüpfungstabelle, wobei  $A$  bzw.  $B$  jeweils im Definitionsgebiet der Abbildung  $\sigma_i$  liegen.*

$A^{\sigma_i} \circ B^{\sigma_j}$		$B^{\sigma_1}$	$B^{\sigma_2}$	$B^{\sigma_3}$	$B^{\sigma_4}$
$A^{\sigma_1}$	$\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$	$(k^{-1}AB)^{\sigma_2}$	$(AB)^{\sigma_1}$	$(AB)^{\sigma_1}$	$(k^{-1}AB)^{\sigma_2}$
	$\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$	$(AB)^{\sigma_4}$	$(AB)^{\sigma_3}$		
	$\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$	$(AB)^{\sigma_1}$	$(AB)^{\sigma_2}$		
$A^{\sigma_2}$	$\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$	$(AB)^{\sigma_1}$	$(AB)^{\sigma_2}$	$(AB)^{\sigma_2}$	$(AB)^{\sigma_1}$
	$\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$	$(AB)^{\sigma_3}$	$(kAB)^{\sigma_4}$		
	$\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$	$(AB)^{\sigma_2}$	$(kAB)^{\sigma_1}$		
$A^{\sigma_3}$		$(AB)^{\sigma_1}$	$(AB)^{\sigma_2}$	$(AB)^{\sigma_3}$	$(AB)^{\sigma_4}$
$A^{\sigma_4}$		$(k^{-1}AB)^{\sigma_2}$	$(AB)^{\sigma_1}$	$(AB)^{\sigma_4}$	$(k^{-1}AB)^{\sigma_3}$

**Beweis.** Wie wir in Satz 4.2.19 gesehen haben, ist die Menge  $\Sigma$  die Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  und ist folglich unter Verknüpfung abgeschlossen. Die Abbildungen  $\sigma_i$  sind surjektiv. Für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  gilt also  $(\text{dom } \sigma_i)^{\sigma_i} = \Sigma_i$ . Folglich finden wir für  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  und  $A \in \text{dom } \sigma_i$  und  $B \in \text{dom } \sigma_j$  ein  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  und eine Matrix  $C \in \text{dom } \sigma_n$  so, dass  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j} = C^{\sigma_n}$ .

Seien nun  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  und die Matrizen  $A$  und  $B$  so gewählt, dass  $A \in \text{dom } \sigma_i$  und  $B \in \text{dom } \sigma_j$ . Nach 4.2.21(vii) gilt  $g_\infty^{(A^{\sigma_i} B^{\sigma_j})^{-1}} = g_\infty^{B^{-1} A^{-1}}$ . Insgesamt wissen wir Folgendes: Wenn  $g_\infty^{B^{-1} A^{-1}} = g_\infty$  gilt, dann ist  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j} \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ . Wenn jedoch  $g_\infty^{B^{-1} A^{-1}} \neq g_\infty$  gilt, dann ist  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j} \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ . Im zweiten Fall sind  $O_L(AB), O_R(AB), U_L(AB)$  und  $U_R(AB)$  die Viertelebenen, in die das Urbild von  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j}$  wie in Definition 4.2.1 aufgeteilt ist.

Im Folgenden bestimmen wir für die verschiedenen Fälle das Produkt  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j}$ . Wir finden jeweils eine nicht leere offene Menge, auf der die Lineation  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j}$  mit einer Lineation  $D^{\sigma_m} \in \Sigma$  übereinstimmt. Da die Fortsetzung zu einem Automorphismus eindeutig ist und die Menge  $\Sigma$  bezüglich Verknüpfung abgeschlossen ist, ergibt sich  $A^{\sigma_i} B^{\sigma_j} = D^{\sigma_m}$ . Für alle  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  gilt: Wenn  $A$  im Definitionsgebiet der Abbildung  $\sigma_i$  liegt, dann ist  $\det A > 0$  (vgl. Definition 4.2.2). Also gelten in allen folgenden Fällen die Ungleichungen  $ej - hf > 0$  und  $e'j' - h'f' > 0$ . Wir verwenden in den folgenden Beweisen, dass nach 4.2.3 die Matrizen  $kA, Ak, k^{-1}A$  und  $Ak^{-1}$  im selben Definitionsgebiet (bezüglich der Abbildungen  $\sigma_i$ ) liegen wie  $A$  und dass nach 4.1.6 die Abbildung  $\lambda$  ein Homomorphismus ist.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

- Seien zuerst  $A$  und  $B$  Elemente von  $\text{dom } \sigma_1$ . Dann ist wegen  $f > 0$  und  $f' > 0$  auch  $ff' > 0$ .
  1. Fall: Sei  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.21(i) liegt in diesem Fall  $k^{-1}AB$  im Definitionsgebiet von  $\sigma_2$ . Sei  $x \in O_L(A)$ . Wegen 4.1.17(vi) und 4.2.21(i) folgt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_L(A) \subset U_L(B)$ . Außerdem ist  $O_L(A) \subset O_L(k^{-1}AB)$  (vgl. 4.2.5 und 4.2.21 (i)). Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_1}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(k^{-1}AB)^{\sigma_2}}$ .
  2. Fall: Sei  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$ . Da  $ff' > 0$  ist, folgt aus 4.2.21(ii), dass  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_4$  liegt. Sei  $x \in O_L(A)$ . Nach 4.1.17(vi) und 4.2.21(ii) ist in diesem Fall  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_L(A) = U_L(B)$ . Also erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_1}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_4}}$ .
  3. Fall: Sei  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Lemma 4.2.21(iii) besagt, dass  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_1$  liegt. Sei  $x \in U_L(A)$ . Wegen 4.1.17(vi) und 4.2.21(iii) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{O}_R(A) \subset O_R(B)$ . Außerdem ist  $U_L(A) \subset U_L(AB)$  (vgl. 4.2.21(iii)). Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_1}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_1}}$ .
- Sei nun  $A \in \text{dom } \sigma_1$  und  $B \in \text{dom } \sigma_2$ . Wegen  $f > 0$  und  $f' < 0$  gilt  $ff' < 0$ .
  1. Fall: Sei  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.21(i) liegt in diesem Fall  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_1$ . Sei  $x \in O_L(A)$ . Infolge von 4.1.17(vi) und 4.2.21(i) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_L(A) \subset U_L(B)$ . Außerdem ist  $O_L(A) \subset O_L(AB)$  (vgl. 4.2.21(i)). Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_2}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_1}}$ .
  2. Fall: Sei  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$ . Da  $ff' < 0$  ist, folgt aus 4.2.21(ii), dass  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_3$  liegt. Sei  $x \in O_L(A)$ . Nach 4.1.17(vi) und 4.2.21(ii) ist in diesem Fall  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_L(A) = U_L(B)$ . Also erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_2}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_3}}$ .
  3. Fall: Sei  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.21(iii) liegt  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in U_L(A)$ . Infolge von 4.1.17(vi) und 4.2.21(iii) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{O}_R(A) \subset O_R(B)$ . Außerdem ist  $U_L(A) \subset U_L(AB)$  (vgl. 4.2.21(iii)). Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_2}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_2}}$ .
- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_1$  und  $B \in \text{dom } \sigma_3$ . Lemma 4.2.21 (iv) besagt, dass in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_1$  ist. Sei  $x \in O_L(A)$ . Wegen 4.1.17(vi) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_L(A) \subset H_L$ . Folglich gilt  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_3}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_1}}$ .
- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_1$  und  $B \in \text{dom } \sigma_4$ . Nach 4.2.21(v) ist in diesem Fall  $k^{-1}AB \in \text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in O_R(A)$ . Wegen 4.1.17(vi) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_R(A) \subset H_R$ . Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_1}B^{\sigma_4}} = x^{A^\lambda(k^{-1}B)^\lambda} = x^{(k^{-1}AB)^\lambda} = x^{(k^{-1}AB)^{\sigma_2}}$ .
- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_2$  und  $B \in \text{dom } \sigma_1$ . Wegen  $f < 0$  und  $f' > 0$  gilt dann  $ff' < 0$ .
  1. Fall: Sei  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$ . Nach Lemma 4.2.21(i) liegt in diesem Fall  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in O_L(A)$ . Aus 4.1.17(vi) und 4.2.21(i) folgt, dass  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_R(A) \subset U_R(B)$  und  $O_L(A) \subset O_L(AB)$  gilt. Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_2}B^{\sigma_1}} = x^{(kAB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_2}}$ .
  2. Fall: Sei  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$ . Da  $ff' > 0$  ist, folgt aus 4.2.21(ii), dass  $kAB$  in  $\text{dom } \sigma_4$  liegt. Sei  $x \in O_L(A)$ . Nach 4.1.17(vi) und 4.2.21(ii) ist dann  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_R(A) = U_R(B)$ . Also erhalten wir  $x^{A^{\sigma_2}B^{\sigma_1}} = x^{(kAB)^\lambda} = x^{(kAB)^{\sigma_4}}$ .



## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

3. Fall: Sei  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.21 (iii) liegt in diesem Fall  $kAB$  in  $\text{dom } \sigma_1$ . Sei  $x \in U_L(A)$ . Aus 4.1.17(vi) und 4.2.21(iii) folgt, dass in diesem Fall  $x^{A^\lambda} \in \tilde{O}_L(A) \subset O_L(B)$  gilt. Außerdem ist  $U_L(A) \subset U_L(AB)$  (vgl. 4.2.21(iii)). Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_2 B^{\sigma_1}}} = x^{A^\lambda (kB)^\lambda} = x^{(kAB)^\lambda} = x^{(kAB)^{\sigma_1}}$ .
- Seien nun  $A$  und  $B$  Elemente des Definitionsbereichs von  $\sigma_2$ . Wegen  $f < 0$  und  $f' < 0$  gilt  $ff' > 0$ .
    1. Fall: Sei  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.21(i) liegt in diesem Fall  $AB$  in  $\text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in O_L(A)$ . Infolge 4.1.17(vi) und 4.2.21(i) gilt dann  $x^{(kA)^\lambda} \in \tilde{U}_R(A) \subset U_R(B)$  und  $O_L(A) \subset O_L(AB)$ . Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_2 B^{\sigma_2}}} = x^{(kAB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_2}}$ .
    2. Fall:  $\frac{e}{f} = -\frac{j'}{f'}$ . Da  $ff' > 0$  ist, folgt mit 4.2.21(ii), dass  $kAB$  in  $\text{dom } \sigma_4$  liegt. Sei  $x \in O_L(A)$ . Nach 4.1.17(vi) und 4.2.21(ii) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{U}_R(A) = U_R(B)$ . Folglich erhalten wir  $x^{A^{\sigma_2 B^{\sigma_2}}} = x^{(kAB)^\lambda} = x^{(kAB)^{\sigma_4}}$ .
    3. Fall: Sei  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.21(iii) liegt in diesem Fall  $kAB$  in  $\text{dom } \sigma_1$ . Sei  $x \in U_L(A)$ . Wegen 4.1.17(vi) und 4.2.21(iii) folgt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{O}_L(A) \subset O_L(B)$ . Außerdem ist  $U_L(A) \subset U_L(AB)$  (vgl. 4.2.21(iii)). Wir erhalten insgesamt  $x^{A^{\sigma_2 B^{\sigma_2}}} = x^{A^\lambda (kB)^\lambda} = x^{(kAB)^\lambda} = x^{(kAB)^{\sigma_1}}$ .
  - Sei  $A \in \text{dom } \sigma_2$  und  $B \in \text{dom } \sigma_3$ . Nach 4.2.21(iv) gilt  $AB \in \text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in U_R(A)$ . Aus 4.1.17(vi) und 4.2.1) folgt, dass  $x^{A^\lambda} \in \tilde{O}_R(A) \subset H_R$  gilt. Folglich erhalten wir das Ergebnis  $x^{A^{\sigma_2 B^{\sigma_3}}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_2}}$ .
  - Sei  $A \in \text{dom } \sigma_2$  und  $B \in \text{dom } \sigma_4$ . Wegen 4.2.21(v) ist dann  $AB \in \text{dom } \sigma_1$ . Sei  $x \in U_L(A)$ . Nach 4.1.17(vi) gilt  $x^{A^\lambda} \in \tilde{O}_L(A) \subset H_L$ . Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_2 B^{\sigma_4}}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_1}}$ .
  - Sei  $A \in \text{dom } \sigma_3$  und  $B \in \text{dom } \sigma_1$ . Wegen 4.2.21(iv) ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_1$ . Sei  $x \in H_L \setminus g_\infty^{(B^{-1}A^{-1})^\lambda}$ . Aus 4.1.17(iv) folgt, dass  $x^{A^\lambda} \in H_L \setminus g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$ . Folglich gilt  $x^{A^{\sigma_3 B^{\sigma_1}}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_1}}$ .
  - Sei  $A \in \text{dom } \sigma_3$  und  $B \in \text{dom } \sigma_2$ . Nach 4.2.21(iv) ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in H_R \setminus g_\infty^{(B^{-1}A^{-1})^\lambda}$ . Wegen 4.1.17(iv) gilt  $x^{A^\lambda} \in H_R \setminus g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$ . Folglich ist  $x^{A^{\sigma_3 B^{\sigma_2}}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_2}}$ .
  - Sei  $A \in \text{dom } \sigma_3$  und  $B \in \text{dom } \sigma_3$ . Nach 4.2.21(iv) ist in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_3$ . Sei  $x \in H_L$ . Wegen 4.1.17(iv) gilt  $x^{A^\lambda} \in H_L$ . Also erhalten wir  $x^{A^{\sigma_3 B^{\sigma_3}}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_3}}$ .
  - Sei  $A \in \text{dom } \sigma_3$  und  $B \in \text{dom } \sigma_4$ . Wegen 4.2.21(v) gilt in diesem Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_4$ . Sei  $x \in H_L$ . Aus 4.1.17(iv) folgt, dass  $x^{A^\lambda} \in H_L$  gilt. Insgesamt erhalten wir  $x^{A^{\sigma_3 B^{\sigma_4}}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_4}}$ .

#### 4. Die Moulton-Ebenen

- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_4$  und  $B \in \text{dom } \sigma_1$ . Nach 4.2.21(v) gilt in diesem Fall  $k^{-1}AB \in \text{dom } \sigma_2$ . Sei  $x \in H_R \setminus g_\infty^{(B^{-1}A^{-1})^\lambda}$ . Mit 4.1.17(iv) können wir folgern, dass  $x^{(k^{-1}A)^\lambda} \in H_L \setminus g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$ . Folglich ist  $x^{A^{\sigma_4}B^{\sigma_1}} = x^{(k^{-1}AB)^\lambda} = x^{(k^{-1}AB)^{\sigma_2}}$ .
- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_4$  und  $B \in \text{dom } \sigma_2$ . Wegen 4.2.21(v) gilt  $AB \in \text{dom } \sigma_1$ . Sei  $x \in H_L \setminus g_\infty^{(B^{-1}A^{-1})^\lambda}$ . Nach 4.1.17(iv) gilt  $x^{A^\lambda} \in H_R \setminus g_\infty^{(B^{-1})^\lambda}$ . Also erhalten wir  $x^{A^{\sigma_4}B^{\sigma_2}} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_1}}$ .
- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_4$  und  $B \in \text{dom } \sigma_3$ . Nach 4.2.21(v) gilt für diesen Fall  $AB \in \text{dom } \sigma_4$ . Sei  $x \in H_L$ . Dann gilt  $x^{A^\lambda} \in H_R$  wegen 4.1.17(iv). Folglich ist  $x^{A^{\sigma_4}B^{\sigma_3}} = x^{A^\lambda B^\lambda} = x^{(AB)^\lambda} = x^{(AB)^{\sigma_4}}$ .
- Sei  $A \in \text{dom } \sigma_4$  und  $B \in \text{dom } \sigma_4$ . Nach 4.2.21(v) ist  $k^{-1}AB \in \text{dom } \sigma_3$ . Sei  $x \in H_L$ . Dann folgt mit 4.1.17(iv), dass  $x^{A^\lambda} \in H_R$  gilt. Wir erhalten insgesamt  $x^{A^{\sigma_4}B^{\sigma_4}} = x^{A^\lambda(k^{-1}B)^\lambda} = x^{(k^{-1}AB)^\lambda} = x^{(k^{-1}AB)^{\sigma_3}}$ .  $\blacksquare$

Wir wollen als nächstes eine Abbildung  $\overline{\sigma} : \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  definieren. In 4.2.29 werden wir zeigen, dass die Einschränkung dieser Abbildung auf ein geeignetes Definitionsgebiet ein lokaler Isomorphismus ist.

**4.2.23 Definition.** Wir betrachten die Abbildung

$$\overline{\sigma} : \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \Sigma : A \mapsto A^{\overline{\sigma}} := (A)^{\sigma_i} \text{ wenn } A \in \text{dom } \sigma_i .$$

**4.2.24 Bemerkung.** Die Definitionsbereiche der Abbildungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und  $\sigma_4$  sind disjunkt. Andererseits ist  $\text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  in der Vereinigung der Definitionsbereiche enthalten. Folglich ist  $\overline{\sigma}$  wohldefiniert. Da für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  die Abbildungen  $\sigma_i$  surjektiv sind, erhalten wir insgesamt, dass  $\overline{\sigma}$  surjektiv ist. Weil die Abbildungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und  $\sigma_4$  jeweils injektiv sind und die Mengen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  und  $\Sigma_4$  paarweise disjunkt sind, erhalten wir, dass auch  $\overline{\sigma}$  injektiv ist.

Mit der Abbildung  $\overline{\sigma}$  vereinfacht sich die Beschreibung von Kompositionen und Inversen in  $\Sigma$  in folgender Weise:

**4.2.25 Lemma.** Seien

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} e' & f' \\ h' & j' \end{pmatrix}$$

Elemente von  $\text{GL}_2^+ \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$A^{\overline{\sigma}} \circ B^{\overline{\sigma}} = \begin{cases} (kAB)^{\overline{\sigma}} & \text{wenn } A^{\overline{\sigma}}, B^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_2 \text{ und } (AB)^{\overline{\sigma}} \notin \Sigma_2 ; \\ (k^{-1}AB)^{\overline{\sigma}} & \text{wenn } A^{\overline{\sigma}}, B^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_1 \text{ und } (AB)^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_2, \\ & \text{oder } A^{\overline{\sigma}}, B^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_4, \\ & \text{oder } (A^{\overline{\sigma}}, B^{\overline{\sigma}}) \in \Sigma_1 \times \Sigma_4 \cup \Sigma_4 \times \Sigma_1 ; \\ (AB)^{\overline{\sigma}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\left(A^{\overline{\sigma}}\right)^{-1} = \begin{cases} (kA^{-1})^{\overline{\sigma}} & \text{wenn } (A)^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_4 ; \\ (A^{-1})^{\overline{\sigma}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Als kleine Anwendung der Verknüpfungstafel in 4.2.22 und von 4.2.25 bestimmen wir alle Involutionen in der Automorphismen-Gruppe  $\Sigma$ .

**4.2.26 Lemma.** *Der Automorphismus  $(-\sqrt{k}\mathbf{1})^{\overline{\sigma}}$  ist die einzige Involution in  $\Sigma$  ungleich der Identität.*

**Beweis.** Sei  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma$  eine Involution. Dann folgt nach 4.2.22 aus  $A^{\overline{\sigma}} \circ A^{\overline{\sigma}} = \mathbf{1}^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3$ , dass  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4$  gilt. Wir betrachten zuerst den Fall  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3$ . Dann gilt nach 4.2.25  $A^{\overline{\sigma}} \circ A^{\overline{\sigma}} = (A^2)^{\overline{\sigma}}$ . Da die Abbildung  $\overline{\sigma}$  bijektiv ist, ist in diesem Fall  $A^{\overline{\sigma}}$  genau dann eine Involution, wenn  $A^2 = \mathbf{1}$  gilt. Da  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3$  hat  $A$  die folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit  $a, d > 0, c \in \mathbb{R}$ . Folglich gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac + dc & d^2 \end{pmatrix}$$

Also folgt aus  $A^2 = \mathbf{1}$  die Gleichheit  $A = \mathbf{1}$ . Nun betrachten wir den Fall  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_4$ . Dann gilt nach 4.2.25  $A^{\overline{\sigma}} \circ A^{\overline{\sigma}} = (k^{-1}A^2)^{\overline{\sigma}}$ . Also folgt  $k^{-1}A^2 = \mathbf{1}$ . Da  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_4$  hat  $A$  die folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit  $a, d < 0, c \in \mathbb{R}$ . Insgesamt erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac + dc & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt, da  $a, d < 0$ , die Gleichheit  $A = -\sqrt{k}\mathbf{1}$ . ■

**4.2.27 Lemma.** *Die Abbildung  $\overline{\sigma}$  ist auf  $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R}$  kein Gruppenhomomorphismus und auch nicht stetig.*

**Beweis.** Dass  $\overline{\sigma}$  kein Gruppenhomomorphismus ist, sieht man aus den Verknüpfungsregeln in 4.2.25.

Seien  $e, j < 0$ . Wir betrachten für  $n \in \mathbb{N}$  die Folgen

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left( \begin{array}{cc} e & \frac{1}{n} \\ h & j \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (B_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left( \begin{array}{cc} e & -\frac{1}{n} \\ h & j \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Sei  $N := \max\{\frac{h}{ej}, -\frac{h}{ej}, -\frac{1}{j}\}$ . Dann sind für alle  $n > N$  die Folgenglieder  $A_n$  und  $B_n$  Elemente der  $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R}$ , und die Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren in  $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} =: A.$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Sei  $U := \{[x, y, 1] \mid x < 0, y \in ]-1, 1[ \}$ . Wir betrachten für  $n > N$  die Urbilder der Ferngerade unter den Lineationen  $A_n^{\overline{\mathcal{O}}}$  und  $B_n^{\overline{\mathcal{O}}}$ : Es gilt:

$$\begin{aligned} g_\infty^{(A_n^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1}} &= l_{0, m_n} \text{ mit } m_n = -jn > 0, \text{ da } j < 0 \text{ und} \\ g_\infty^{(B_n^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1}} &= l_{0, \tilde{m}_n} \text{ mit } \tilde{m}_n = jn < 0, \text{ da } j < 0. \end{aligned}$$

Folglich sind für  $n > N$  die Ungleichungen  $m_n > 1$  und  $\tilde{m}_n < -1$  erfüllt. Da für alle  $n > N$  außerdem  $A_n^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_1$  und  $B_n^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_2$  gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left(A_n^{\overline{\mathcal{O}}}\right)\Big|_U &= (A_n^\lambda)\Big|_U \text{ und} \\ \left(B_n^{\overline{\mathcal{O}}}\right)\Big|_U &= ((k^{-1}B_n)^\lambda)\Big|_U. \end{aligned}$$

Deswegen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_n^{\overline{\mathcal{O}}}\right)\Big|_U = (A^\lambda)\Big|_U \neq ((k^{-1}A)^\lambda)\Big|_U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(B_n^{\overline{\mathcal{O}}}\right)\Big|_U.$$

Insgesamt folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_n^{\overline{\mathcal{O}}}\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(B_n^{\overline{\mathcal{O}}}\right),$$

und  $\overline{\mathcal{O}}$  ist nicht stetig. ■

**4.2.28 Bemerkung.** Die Restriktion der Abbildung  $\overline{\mathcal{O}}$  auf  $\text{dom}(\sigma_3)$  ist ein stetiger und offener Gruppenisomorphismus.

**Beweis.** Es gilt  $\overline{\mathcal{O}}\Big|_{\text{dom}(\sigma_3)} = \lambda\Big|_{\text{dom}(\sigma_3)}$ . Die Abbildung  $\lambda$  ist nach 4.1.6 ein stetiger und offener Gruppenhomomorphismus. ■

**4.2.29 Satz.** Sei

$$Y_{\beta, \delta} := \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2 \mathbb{R}^+ \mid e > 0, j > \beta, f \in ]-\delta, \delta[ \right\}.$$

Für  $1 > \beta > 0$  und  $\delta > 0$  ist  $\overline{\mathcal{O}}\Big|_{Y_{\beta, \delta}}$  ein lokaler Isomorphismus, das heißt ein stetiger, offener Homomorphismus lokaler Gruppen.

**Beweis.** Die Abbildung  $\overline{\mathcal{O}}$  ist bijektiv, da die Mengen  $\Sigma_i$  und  $\Sigma_j$ , wie wir in 4.2.1 erkennen können, für  $i \neq j$  leeren Schnitt besitzen und die in 4.2.2 definierten Abbildungen  $\sigma_i$  bijektiv sind.

Seien  $1 > \beta > 0$  und  $\delta > 0$  fest gewählt. Wir verwenden in diesem Beweis die in 4.1.6 definierte Abbildung  $\lambda$ . Wie wir in Definition 4.2.2 erkennen können, ist  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  genau dann ein Element des Definitionsbereich der Abbildung  $\sigma_i$ , wenn  $A^{\overline{\mathcal{O}}} = A^{\sigma_i}$ .

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

**Schritt 1:** Zuerst zeigen wir: Für alle  $A, B \in Y_{\beta, \delta}$  gilt:  $A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} = (AB)^{\overline{\mathcal{O}}}$ . Seien

$$A := \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} e' & f' \\ h' & j' \end{pmatrix}$$

Elemente von  $Y_{\beta, \delta}$ . Dann sind die Einträge  $e, j, e'$  und  $j'$  positiv. Nach 4.2.2 sind deswegen die Matrizen  $A$  und  $B$  keine Elemente von  $\text{dom } \sigma_4$ .

Wenn  $A, B \in \text{dom } \sigma_1$ . Dann ist  $f > 0$  und  $f' > 0$ . Folglich ist  $\frac{e}{f} > 0$  und  $\frac{j'}{f'} > 0$ . Also ist  $\frac{e}{f} > -\frac{j'}{f'}$ . Nach 4.2.22 gilt in diesem Fall

$$A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} = A^{\sigma_1} B^{\sigma_1} = (AB)^{\sigma_1} = (AB)^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Wenn  $A, B \in \text{dom } \sigma_2$ . Dann ist  $f < 0$  und  $f' < 0$ . Folglich ist  $\frac{e}{f} < 0$  und  $\frac{j'}{f'} < 0$ . Also ist  $\frac{e}{f} < -\frac{j'}{f'}$  und wegen 4.2.22 gilt

$$A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} = A^{\sigma_2} B^{\sigma_2} = (AB)^{\sigma_2} = (AB)^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Wenn keiner der beiden obigen Fälle erfüllt ist, gibt es

$$(l, m) \in \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

so, dass  $(A, B) \in \text{dom } \sigma_l \times \text{dom } \sigma_m$ . In diesem Fall gibt es (vgl. 4.2.22) ein  $n \in \{1, 2, 3\}$  so, dass

$$A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} = A^{\sigma_l} B^{\sigma_m} = (AB)^{\sigma_n} = (AB)^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

**Schritt 2:** Wir betrachten im Folgenden Subbasiselemente der kompakt-offenen Topologie auf  $\Sigma$ . Da die Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  kompakt ist, ist die Ferngerade  $g_\infty$  kompakt [29, 1.27] und  $W_1 := \lfloor g_\infty, \overline{P} \setminus \{[x, y, 1] \mid x \in [-1, 1], y \in [\frac{-\beta}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}]\} \rfloor$  ist ein Subbasiselement. Weil  $\Sigma$  als Automorphismen-Gruppe einer stabilen  $lp$ -Ebene eine topologische Gruppe ist [29, 2.3], ist das Invertieren eine offene Abbildung. Folglich ist  $W_1^{-1} = \{w^{-1} \mid w \in W_1\}$  eine offene Menge in  $\Sigma$ . Sei  $W_2 := \lfloor [-1, 0, 1], H_L \rfloor$ . Dann ist

$$W := W_1^{-1} \cap W_2$$

offen in  $\Sigma$ . Wir betrachten außerdem die folgende offene Menge der Punktmenge  $\overline{P}$

$$U := \left\{ [x, y, 1] \mid x < 0, y \in \left] -\frac{\beta}{2\delta}, \frac{\beta}{2\delta} \right[ \right\}.$$

Wir zeigen nun: Für alle  $\psi \in W$  gilt  $g_\infty^{\psi^{-1}} \cap U = \emptyset$ .

Da jeder Automorphismus der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  den Fixpunkt  $x_\infty$  besitzt, liegt das Urbild der Ferngerade unter einem Automorphismus in dem Büschel  $(\overline{\mathcal{L}}_k)_{x_\infty} = \overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$ . Sei  $\psi \in W$ . Dann gilt  $g_\infty^{\psi^{-1}} \subset \overline{P} \setminus \{[x, y, 1] \mid x \in [-1, 1], y \in [\frac{-\beta}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}]\}$ . Folglich liegt das Urbild der Ferngerade in dem Teil des Büschels  $\overline{\mathcal{L}}_{x_\infty}$ , der  $U$  nicht schneidet.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Schritt 3:** Als nächstes wollen wir einsehen, dass für alle  $D^{\overline{\mathcal{O}}} \in W$  gilt  $D^{\overline{\mathcal{O}}}|_U = D^\lambda|_U$ .

Sei  $\psi \in W$ . Da die Abbildung  $\overline{\mathcal{O}}$  surjektiv ist, gibt es eine Matrix  $D \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  und ein  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  so, dass  $\psi = D^{\overline{\mathcal{O}}} = D^{\sigma^i}$  gilt. Weil  $\psi$  ein Element von  $W_2$  ist, liegt das Bild des Punktes  $[-1, 0, 1]$  in der linken Halbebene. Folglich gilt  $\psi \notin \Sigma_4$ .

Wenn  $\psi = D^{\sigma^1}$  ist, dann liegt wegen  $\psi \in W_2$  der Punkt  $[-1, 0, 1]$  in der Viertelebene der linken Halbebene, die in die linke Halbebene abgebildet wird, also in  $O_L(D)$ . Die Tatsache, dass  $\psi \in W_1^{-1}$  ist, liefert, dass es ein  $t \in ]-\infty, \frac{-\beta}{\delta}[$  mit  $g_\infty^{\psi^{-1}} = l_{0,t}$  gibt. Also ist  $U \subset O_L(D)$  und  $\psi|_U = D^\lambda|_U$ .

Wenn  $\psi = D^{\sigma^2}$  ist, dann liegt wegen  $\psi \in W_2$  der Punkt  $[-1, 0, 1]$  in  $U_L(D)$ . Folglich gibt es ein  $\tilde{t} \in ]\frac{\beta}{\delta}, \infty[$  derart, dass  $g_\infty^{\psi^{-1}} = l_{0,\tilde{t}}$  gilt. Also ist  $U \subset U_L(D)$  und  $\psi|_U = D^\lambda|_U$ .

Wenn  $\psi = D^{\sigma^3}$  ist, dann gilt  $\psi|_U = D^\lambda|_U$ , da  $U \subset H_L$ .

Wir betrachten im Folgenden die Abbildung  $\overline{(\sigma_U)} := \overline{\mathcal{O}}\omega_U$ . Dabei ist  $\omega_U$  definiert wie in 1.5.10.

$$\overline{(\sigma_U)} : \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \Sigma|_U : A \mapsto \left( A^{\overline{\mathcal{O}}} \right)|_U.$$

**Schritt 4:** Aus Schritt 3 folgt, dass  $\overline{(\sigma_U)}|_{W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}} = (\lambda\omega_U)|_{W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}}$ . Lemma 4.1.6 und Lemma 1.5.10 besagen, dass  $\lambda$  und  $\omega_U$  offen und stetig sind. Folglich ist auch die Abbildung  $\overline{(\sigma_U)}|_{W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}}$  offen und stetig.

**Schritt 5:** Wie wir in 1.5.10 gesehen haben ist die Abbildung  $\omega_U$  bijektiv. Folglich gilt  $\overline{\mathcal{O}}|_{W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}} = (\overline{(\sigma_U)}|_{W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}})\omega_U^{-1}$  und wir erhalten die Stetigkeit und Offenheit von  $\overline{\mathcal{O}}|_{W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}}$ .

**Schritt 6:** Als letztes zeigen wir, dass  $Y_{\beta,\delta}$  eine Teilmenge von  $W^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}$  ist:

Wir betrachten wieder

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in Y_{\beta,\delta}.$$

Wie wir in Schritt 1 schon bemerkt haben gilt  $A \notin \text{dom } \sigma_4$ . Für  $A \in \text{dom } \sigma_1 \cup \text{dom } \sigma_2$  ist das Urbild der Ferngerade  $g_\infty^{(A^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1}}$  gleich der Geraden  $l_{0,t}$  mit  $t = -\frac{j}{f}$ . Wenn  $A \in \text{dom } \sigma_1$  ist, ist  $f \in ]0, \delta[$ . Weil  $j > \beta$  vorausgesetzt ist, gilt  $-\frac{j}{f} < -\frac{\beta}{f} < -\frac{\beta}{\delta}$  und es folgt  $A^{\sigma^1} \in W$ . Wenn  $A \in \text{dom } \sigma_2$  ist, ist  $f \in ]-\delta, 0[$ . Weil  $j > f$  vorausgesetzt ist, gilt in diesem Fall  $-\frac{j}{f} > \frac{\beta}{-f} > \frac{\beta}{\delta}$  und es folgt  $A^{\sigma^2} \in W$ . Da  $\Sigma_3 \subset W$  ist haben wir insgesamt bewiesen, dass  $A^{\overline{\mathcal{O}}} \in W$ .

Aus den letzten drei Schritten können wir schließen, dass  $\overline{\mathcal{O}}|_{Y_{\beta,\delta}}$  ein Homöomorphismus ist. Außerdem wissen wir nun, weil  $W$  eine offene Teilmenge von  $\Sigma$  ist, dass sogar auch das Bild  $(Y_{\beta,\delta})^{\overline{\mathcal{O}}}$  offen in  $\Sigma$  ist. Insgesamt ist nun bewiesen, dass  $\overline{\mathcal{O}}|_{Y_{\beta,\delta}}$  ein lokaler Isomorphismus ist. ■

Wir wissen nun, dass  $\Sigma = \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k})$  eine topologische hausdorffsche Gruppe ist und außerdem lokal isomorph zu einer Liegruppe ist. Im Anhang in A.9 wird bewiesen, dass eine topologische Gruppe, deren Gruppenmultiplikation und deren Gruppeninversion in einer Umgebung der Identität analytisch sind eine Liegruppe ist. Daraus erhalten wir die folgende Aussage:

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

**4.2.30 Korollar.** Die Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k})$  ist eine Liegruppe.

Im Folgenden beschreiben wir ein radiales Modell der Moulton-Ebene. In diesem Modell wird die Knickachse zur Ferngeraden. Aus diesem Grund lassen sich die Automorphismen an diesem Modell besonders schön beschreiben. Unser Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen  $\Sigma$  und der Automorphismen-Gruppe des radialen Modells explizit zu beschreiben.

**4.2.31 Satz.** [55, 34.2] Wir wählen  $s > 0$ , und betrachten die Funktion

$$f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]0, \infty[ : \varphi \mapsto \frac{e^{s\varphi}}{\cos \varphi} \quad .$$

Wir definieren eine Gerade  $L := \{f(\varphi)e^{i\varphi} \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$  und damit eine Menge von Geraden

$$\mathcal{L}_f := \{cL \mid c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \cup \left\{ \mathbb{R}e^{i\varphi} \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\} \quad .$$

Die Ebene  $\mathcal{M}(s) := (\mathbb{C}, \mathcal{L}_f)$  ist eine affine  $\mathbb{R}^2$ -Ebene.

Wir bezeichnen mit  $\overline{\mathcal{M}(s)}$  den projektiven Abschluss von  $\mathcal{M}(s)$ . Die Ebene  $\overline{\mathcal{M}(s)}$  ist eine kompakte projektive Ebene und ist für  $k = e^{2\pi s}$  isomorph zur Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$ .

Der Isomorphismus  $\alpha$  ist die Fortsetzung der partiellen Lineation  $\hat{\alpha}$  auf  $\overline{\mathcal{M}(s)}$ , welche für  $r > 0$  und  $\frac{\pi}{2} \neq \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  durch

$$\hat{\alpha} : \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} : re^{i\varphi} \mapsto \left[ \frac{e^{s\varphi}}{r \cos \varphi}, \tan \varphi, 1 \right]$$

gegeben ist.

**4.2.32 Satz.** [55, 34.4] Die Automorphismen-Gruppe  $\Sigma(s)$  von  $\overline{\mathcal{M}(s)}$  wird erzeugt von den Einparametergruppen:  $\mathbf{H} := \{\eta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathbf{P} := \{\rho_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathbf{E} := \{\varepsilon_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  und  $\Xi := \{\xi_u \mid 0 < u = e^t\}$  mit

$$(re^{i\varphi})^{\eta_t} = e^t r e^{i\varphi} \quad ,$$

$$(re^{i\varphi})^{\rho_t} = e^{st} r e^{i(\varphi+t)} \quad ,$$

$$(ri)^{\varepsilon_t} = ri \quad \text{und}$$

$$(re^{i\varphi})^{\varepsilon_t} = \frac{r \cos \varphi}{\cos \psi} e^{s(\psi-\varphi)} e^{i\psi} \quad \text{mit} \quad \tan \psi = \tan \varphi + t \quad \text{und} \quad \varphi, \psi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \text{oder} \quad \varphi, \psi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \quad ,$$

$$(ri)^{\xi_u} = \frac{ri}{u} \quad \text{und}$$

$$(re^{i\varphi})^{\xi_u} = \frac{r \cos \varphi}{u \cos \psi} e^{s(\psi-\varphi)} e^{i\psi} \quad \text{mit} \quad \tan \psi = u^2 \tan \varphi \quad \text{und} \quad \varphi, \psi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \text{oder} \quad \varphi, \psi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \quad .$$

Sei im Folgenden  $e^{2\pi s} = k$ .



#### 4. Die Moulton-Ebenen

**4.2.33 Lemma.** *Es gilt  $\alpha^{-1}\Sigma(s)\alpha = \Sigma$ . Ein Automorphismus  $\sigma \in \Sigma(s)$  induziert den Automorphismus  $\tilde{\sigma} := \alpha^{-1}\sigma\alpha \in \Sigma$  und es gilt:*

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t &= A^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_3 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\varepsilon}_t &= B^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_3 \text{ mit } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_u &= C^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_3 \text{ mit } C = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{für } u > 0.\end{aligned}$$

Sei  $t = \hat{t} + 2l\pi$  mit  $\hat{t} \in [-\pi; \pi[$  und  $l \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

$$\tilde{\rho}_t = D^{\overline{\mathcal{O}}} \text{ mit } D = k^l \begin{pmatrix} \cos \hat{t} & -\sin \hat{t} \\ \sin \hat{t} & \cos \hat{t} \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt:

$$\tilde{\rho}_t \in \Sigma_4 \quad \text{für } \hat{t} = -\pi$$

$$\tilde{\rho}_t \in \Sigma_1 \quad \text{für } \hat{t} \in ]-\pi; 0[$$

$$\tilde{\rho}_t \in \Sigma_3 \quad \text{für } \hat{t} = 0$$

$$\tilde{\rho}_t \in \Sigma_2 \quad \text{für } \hat{t} \in ]0; \pi[$$

**Beweis.** Im Folgenden betrachten wir die Wirkung von Automorphismen  $\sigma \in \Sigma(s)$  auf die Punkte 1 und  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  und die Gerade  $i\mathbb{R}$ . Wir bilden diese Punkte und deren Bilder mit  $\alpha$  ab und suchen dann den Automorphismus  $\tilde{\sigma} \in \Sigma$ , der  $1^\alpha$  und  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^\alpha$  und die Ferngerade  $g_\infty$  richtig abbildet. Dabei benutzen wir, dass  $1^\alpha = [1, 0, 1]$  und  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^\alpha = [x, 1, 1]$  mit  $x := \frac{e^{s\frac{\pi}{4}}}{\cos \frac{\pi}{4}}$  ist. Die Automorphismen  $\rho_t \in \mathbf{P}$  für  $t \in \mathbb{Z}\pi$  und alle Automorphismen  $\eta_t \in \mathbf{H}$ ,  $\varepsilon_t \in \mathbf{E}$  und  $\xi_u \in \Xi$  bilden die Gerade  $i\mathbb{R}$  in sich ab. Folglich sind die induzierten Abbildungen  $\tilde{\rho}_t$  für  $t \in \mathbb{Z}\pi$ ,  $\tilde{\eta}_t$ ,  $\tilde{\varepsilon}_t$  bzw.  $\tilde{\xi}_u$  Automorphismen von  $\mathcal{M}_k$ .

**Schritt 1:** *Wir machen den Ansatz*

$$\tilde{\eta}_t = [B|A] \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ h & j \end{pmatrix}.$$

*Es gilt  $1^{\eta_t} = e^t$  und  $(e^t)^\alpha = [e^{-t}, 0, 1]$ . Folglich gilt  $[1, 0, 1]^{\tilde{\eta}_t} = [1, h, j] = [e^{-t}, 0, 1]$ . Also ist  $h = 0$  und  $j = e^t$ .*

*Es gilt außerdem  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^{\eta_t} = e^t e^{i\frac{\pi}{4}}$  und  $(e^t e^{i\frac{\pi}{4}})^\alpha = [xe^{-t}, 1, 1]$ . Mit  $h = 0$  erhalten wir, dass die Gleichheit  $[x, 1, 1]^{\tilde{\eta}_t} = [x, d, j] = [xe^{-t}, 1, 1]$  erfüllt ist. Folglich ist  $d = j = e^t$ . Da  $j = e^t > 0$  gilt, ist  $\tilde{\eta}_t \in \Sigma_3$  und folglich gilt  $B = A$ . Insgesamt erhalten wir also (vgl. Definition 4.2.23)*

$$\tilde{\eta}_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

**Schritt 2:** Wir machen nun den Ansatz

$$\tilde{\varepsilon}_t = [B|A] \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ h & j \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $1^{\varepsilon_t} = \frac{1}{\cos \psi} e^{s\psi} e^{i\psi}$  mit  $\tan \psi = t$ . Außerdem gilt  $(\frac{1}{\cos \psi} e^{s\psi} e^{i\psi})^\alpha = [1, t, 1]$ . Folglich erhalten wir  $[1, 0, 1]^{\tilde{\varepsilon}_t} = [1, h, j] = [1, t, 1]$ . Und es folgt  $h = t$  und  $j = 1$ .

Darüber hinaus wissen wir, dass die Gleichheit  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^{\varepsilon_t} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \psi} e^{s(\tilde{\psi}-\frac{\pi}{4})} e^{i\tilde{\psi}}$  mit  $\tan \tilde{\psi} = 1 + t$  gilt. Es gilt  $(\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \psi} e^{s(\tilde{\psi}-\frac{\pi}{4})} e^{i\tilde{\psi}})^\alpha = [x, 1 + t, 1]$ . Folglich gilt die Gleichung  $[x, 1, 1]^{\tilde{\varepsilon}_t} = [x, d + t, 1] = [x, \tan \tilde{\psi}, 1]$ . Daraus lesen wir ab, dass  $d = 1$  gilt. Da  $j = 1 > 0$  ist, ist  $\tilde{\varepsilon}_t \in \Sigma_3$  und folglich ist  $B = A$ . Insgesamt erhalten wir also (vgl. Definition 4.2.23)

$$\tilde{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}}$$

**Schritt 3:** Wir machen nun den Ansatz

$$\tilde{\xi}_u = [B|A] \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ h & j \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $1^{\xi_u} = \frac{1}{u \cos \psi} e^{s\psi} e^{i\psi}$  mit  $\tan \psi = 0$ . Außerdem gilt  $(\frac{1}{u \cos \psi} e^{s\psi} e^{i\psi})^\alpha = [u, 0, 1]$ . Insgesamt erhalten wir die Gleichheit  $[1, 0, 1]^{\tilde{\xi}_u} = [1, h, j] = [u, 0, 1]$ . Folglich ist  $h = 0$  und  $\frac{1}{j} = u$ .

Darüber hinaus gilt  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^{\xi_u} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{u \cos \psi} e^{s(\tilde{\psi}-\frac{\pi}{4})} e^{i\tilde{\psi}}$  mit  $\tan \tilde{\psi} = u^2$ . Und es ist  $(\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{u \cos \psi} e^{s(\tilde{\psi}-\frac{\pi}{4})} e^{i\tilde{\psi}})^\alpha = [ux, u^2, 1]$ . Insgesamt erhalten wir also die folgende Gleichheit  $[x, 1, 1]^{\tilde{\xi}_u} = [x, d, \frac{1}{u}] = [ux, u^2, 1]$ . Daraus lesen wir ab, dass  $d = u$  gilt. Da  $j = \frac{1}{u} > 0$  ist, ist  $\tilde{\xi}_u \in \Sigma_3$  und wir erhalten (vgl. Satz 4.2.29)

$$\tilde{\xi}_u = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}}$$

In den folgenden Schritten sei  $t = \hat{t} + 2\pi l$  mit  $\hat{t} \in [-\pi, \pi[$  und  $l \in \mathbb{Z}$ . Außerdem definieren wir für  $x \in \mathbb{R}$

$$D_x := \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

**Schritt 4:** Für  $\hat{t} \in \{-\pi, 0\}$  machen wir den Ansatz

$$\tilde{\rho}_t = [B|A] \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ h & j \end{pmatrix}.$$

Sei nun zuerst  $\hat{t} = 0$ . Dann gilt  $1^{\rho_t} = e^{2\pi l s}$  und  $(e^{2\pi l s})^\alpha = [e^{-2\pi l s}, 0, 1]$ . Folglich ist  $[1, 0, 1]^{\tilde{\rho}_t} = [1, h, j] = [e^{-2\pi l s}, 0, 1]$ . Daraus lesen wir die Gleichheiten  $h = 0 = e^{2\pi l s} \sin(0)$  und  $j = e^{2\pi l s} = e^{2\pi l s} \cos(0)$  ab.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Ferner gilt  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^{\rho_t} = e^{2\pi ls} e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Es ist  $(e^{2\pi ls} e^{i\frac{\pi}{4}})^\alpha = [e^{-2\pi ls} x, 1, 1]$ . Folglich gilt die Gleichheit  $[x, 1, 1]^{\tilde{\rho}_t} = [x, d, 1] = [e^{-2\pi ls} x, 1, 1]$ . Daraus lesen wir  $d = e^{2\pi ls} = e^{2\pi ls} \cos(0)$  ab. Da  $j = e^{2\pi ls} > 0$  ist, ist  $\tilde{\rho}_t \in \Sigma_3$ . Insgesamt erhalten wir mit  $k = e^{2\pi s}$  das Ergebnis:

$$\text{Für } \hat{t} = 0 \text{ ist } \tilde{\rho}_t = (k^l D_0)^{\overline{\sigma}} = (k^l D_t)^{\overline{\sigma}} .$$

Nun betrachten wir den Fall  $\hat{t} = -\pi$ . Dann gilt  $1^{\rho_t} = e^{st} e^{i\pi}$ . Außerdem ist  $(e^{st} e^{i\pi})^\alpha = [-e^{2\pi s(1-l)}, 0, 1] = [1, 0, -k^{l-1}]$ . Folglich gilt  $[1, 0, 1]^{\tilde{\rho}_t} = [1, h, j] = [1, 0, -k^{l-1}]$ . Daraus lesen wir die Gleichheiten  $j = -k^{l-1} = k^{l-1} \cos(-\pi)$  und  $h = 0 = k^{l-1} \sin(-\pi)$  ab.

Ferner gilt  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^{\rho_t} = e^{st} e^{i\frac{5}{4}\pi}$  und  $(e^{st} e^{i\frac{5}{4}\pi})^\alpha = [x, -k^{l-1}, -k^{l-1}]$ . Folglich erhalten wir mit  $h = 0$  und  $j = -k^{l-1}$  die Gleichheit  $[x, 1, 1]^{\tilde{\rho}_t} = [x, d, -k^{l-1}] = [x, -k^{l-1}, -k^{l-1}]$ . Also ist  $d = -k^{l-1} = k^{l-1} \cos(-\pi)$ . Da  $j = -k^{l-1} < 0$  ist, ist  $\tilde{\rho}_t \in \Sigma_4$ . Insgesamt wissen wir nun:

$$\text{Für } \hat{t} = -\pi \text{ ist } \tilde{\rho}_t = [kA|A] \text{ mit } A = k^{l-1} D_{-\pi} .$$

Folglich ist

$$B = kA = k^l D_{-\pi} ,$$

und wir erhalten das Ergebnis (vgl. Definition 4.2.23):

$$\text{Für } \hat{t} = -\pi \text{ ist } \tilde{\rho}_t = (k^l D_{-\pi})^{\overline{\sigma}} = (k^l D_t)^{\overline{\sigma}} .$$

**Schritt 5:** Sei  $\hat{t} \notin \{-\pi, 0\}$ . Wir betrachten das Bild von  $\mathbb{R}i$  unter  $\rho_t$ : Es ist  $(ri)^{\rho_t} = e^{st} r e^{i(\frac{\pi}{2} + \hat{t})}$  und es gilt ferner  $(e^{st} r e^{i(\frac{\pi}{2} + \hat{t})})^\alpha = \left[ \frac{e^{s\frac{\pi}{2}}}{r e^{2\pi s l} \sin \hat{t}}, \tan(\frac{\pi}{2} + \hat{t}), 1 \right]$ . Also gilt:

$$g_\infty^{\tilde{\rho}_t} = l_{0,n} \text{ mit } n = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \hat{t}\right) .$$

Nun betrachten wir das Urbild von  $\mathbb{R}i$  unter  $\rho_t$ : Es gilt  $(\mathbb{R}i)^{\rho_t^{-1}} = \mathbb{R} e^{i(\frac{\pi}{2} - \hat{t})}$ , denn es ist  $(r e^{i(\frac{\pi}{2} - \hat{t})})^{\rho_t} = e^{st} r e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Es gilt außerdem  $(r e^{i(\frac{\pi}{2} - \hat{t})})^\alpha = \left[ \frac{e^{s(\frac{\pi}{2} - \hat{t})}}{r \cos(\frac{\pi}{2} - \hat{t})}, \tan(\frac{\pi}{2} - \hat{t}), 1 \right]$ . Also ist

$$g_\infty^{\tilde{\rho}_t^{-1}} = l_{0,\tilde{n}} \text{ mit } \tilde{n} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \hat{t}\right) .$$

Wegen  $(\mathbb{R}i)^{\rho_t} \neq \mathbb{R}i$  gilt  $\tilde{\rho}_t \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ . Wir machen den Ansatz

$$\tilde{\rho}_t = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & C \end{array} \right] \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 .$$

**Schritt 6:** Sei nun  $\hat{t} \notin \{-\pi - \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$ . Dann ist  $g_\infty^{\tilde{\rho}_t^{-1}} = \tan(\frac{\pi}{2} - \hat{t}) = \frac{1}{\tan \hat{t}}$ . Also wirkt für  $\tan \hat{t} < 0$  die Abbildung  $B^\lambda$  auf dem Punkt  $[1, 0, 1]$  und für  $\tan \hat{t} > 0$  wirkt  $C^\lambda$  auf  $[1, 0, 1]$ . Sei  $D^\lambda$  mit  $D \in \{B, C\}$  die Abbildung, die auf  $[1, 0, 1]$  wirkt. Wir machen den Ansatz

$$D = \begin{pmatrix} d & f \\ h & j \end{pmatrix} .$$

## 4.2. Die Automorphismen-Gruppen der Moulton-Ebenen

Es gilt  $1^{\rho_t} = e^{st}e^{it}$  und es ist

$$(1^{\rho_t})^\alpha = (e^{st}e^{it})^\alpha = \begin{cases} \left[ \frac{e^{s(\hat{t}+2\pi)}}{e^{st} \cos(\hat{t})}, \tan(\hat{t}), 1 \right] = [(k^{l-1}(\cos(\hat{t}))^{-1}, \tan(\hat{t}), 1] & \text{für } \hat{t} \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \\ \left[ \frac{e^{s\hat{t}}}{e^{st} \cos(\hat{t})}, \tan(\hat{t}), 1 \right] = [(k^l(\cos(\hat{t}))^{-1}, \tan(\hat{t}), 1] & \text{für } \hat{t} \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi[\setminus\{0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases} .$$

Es ist außerdem  $[1, 0, 1]^{\tilde{\rho}_t} = [1, 0, 1]^{D^\lambda} = [1, h, j] = (1^{\rho_t})^\alpha$ . Daraus lesen wir ab, dass

$$(h, j) = \begin{cases} (k^{l-1} \sin(\hat{t}), k^{l-1} \cos(\hat{t})) & \text{für } \hat{t} \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \\ (k^l \sin(\hat{t}), k^l \cos(\hat{t})) & \text{für } \hat{t} \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi[\setminus\{0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

ist. Wie wir uns in Schritt 5 überlegt haben, gilt  $g_\infty^{\tilde{\rho}_t} = l_{0,n}$  mit  $n = \tan(\frac{\pi}{2} + \hat{t})$  und  $g_\infty^{\tilde{\rho}_t^{-1}} = l_{0,\tilde{n}}$  mit  $\tilde{n} = \tan(\frac{\pi}{2} - \hat{t})$ . Aus Definition und Lemma 4.1.17 wissen wir, dass  $\tilde{n} = -\frac{j}{f}$  gilt. Insgesamt erhalten wir also

$$f = \frac{-j}{\tan(\frac{\pi}{2} - \hat{t})} = -j \tan \hat{t} = \begin{cases} -k^{l-1} \sin(\hat{t}) & \text{für } \hat{t} \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \\ -k^l \sin(\hat{t}) & \text{für } \hat{t} \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\} \end{cases} .$$

Außerdem ist aus Definition und Lemma 4.1.17 bekannt, dass  $n = \frac{d}{f}$  gilt. Also erhalten wir

$$d = f \tan(\frac{\pi}{2} + \hat{t}) = -\frac{f}{\tan(\hat{t})} = \begin{cases} k^{l-1} \cos(\hat{t}) & \text{für } \hat{t} \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \\ k^l \cos(\hat{t}) & \text{für } \hat{t} \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi[\setminus\{0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases} .$$

Insgesamt haben wir nun das Ergebnis

$$D = \begin{cases} k^{l-1} D_{\hat{t}} & \text{für } \hat{t} \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \\ k^l D_{\hat{t}} & \text{für } \hat{t} \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi[\setminus\{0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases} .$$

Da  $\sin(\hat{t}) > 0$  für  $\hat{t} \in ]0, \pi[$  und  $\sin(\hat{t}) < 0$  für  $\hat{t} \in ]-\pi, 0[$  gilt, wissen wir nun Folgendes (vgl. Definition 4.2.1): Für  $\hat{t} \in ]-\pi, 0[\setminus\{-\frac{\pi}{2}\}$  ist  $\tilde{\rho}_t$  ein Element von  $\Sigma_1$  und für  $\hat{t} \in ]0, \pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$  ist  $\tilde{\rho}_t$  ein Element von  $\Sigma_2$ . Nun tragen wir die Ergebnisse zusammen: Je nachdem, in welchem Intervall  $\hat{t}$  liegt, wirkt  $[C]$  oder  $[B]$  auf dem Punkt  $[1, 0, 1]$ . Es gilt entweder  $\tilde{\rho}_t \in \Sigma_1$  oder  $\tilde{\rho}_t \in \Sigma_2$  und es ist entweder  $D = k^{l-1} D_{\hat{t}}$  oder  $D = k^l D_{\hat{t}}$ . Insgesamt erhalten wir damit folgendes Ergebnis:

$$\tilde{\rho}_t = \begin{cases} (kC)^{\sigma_1} & \text{mit } C = k^{l-1} D_t & \text{für } \hat{t} \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \\ B^{\sigma_1} & \text{mit } B = k^l D_t & \text{für } \hat{t} \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[ \\ C^{\sigma_2} & \text{mit } C = k^l D_t & \text{für } \hat{t} \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ B^{\sigma_2} & \text{mit } B = k^l D_t & \text{für } \hat{t} \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \end{cases}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\text{Für } \hat{t} \notin \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\} \text{ gilt } \tilde{\rho}_t = (k^l D_{\hat{t}})^{\overline{\sigma_1}} = (k^l D_{\hat{t}})^{\overline{\sigma_2}} .$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Schritt 7:** Als letztes betrachten wir nun den Fall  $\hat{t} \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ . Wir machen den Ansatz

$$B = \begin{pmatrix} d & f \\ h & j \end{pmatrix} .$$

Aus Schritt 5 wissen wir, dass für diesen Fall Folgendes gilt:

$$g_{\infty}^{\tilde{\rho}_t} = g_{\infty}^{\tilde{\rho}_t^{-1}} = l_{0,0} .$$

Folglich ist  $d = j = 0$  und es gilt  $[x, 1, 1]^{\tilde{\rho}_t} = [x, 1, 1]^{[B]} = [x, h, f]$ .

Sei zuerst  $\hat{t} = \frac{\pi}{2}$ . Es gilt  $(e^{i\frac{\pi}{4}})^{\rho_t} = e^{st} e^{i\frac{3}{4}\pi}$ . Und es ist

$$(e^{st} e^{i\frac{3}{4}\pi})^{\alpha} = \left[ \frac{e^{s\frac{3}{4}\pi}}{e^{st} \cos(\frac{3}{4}\pi)}, \tan(\frac{3}{4}\pi), 1 \right] = [-k^{-l}x, -1, 1] .$$

Mit  $[x, 1, 1]^{\tilde{\rho}_t} = ((e^{i\frac{\pi}{4}})^{\rho_t})^{\alpha}$  erhalten wir  $h = k^l = k^l \sin \frac{\pi}{2}$  und  $f = -k^l = -k^l \sin \frac{\pi}{2} < 0$ . Insgesamt haben wir das Ergebnis:

$$\text{Für } \hat{t} = \frac{\pi}{2} \text{ gilt } \tilde{\rho}_t = (k^l D_t)^{\overline{(\mathcal{O})}} \in \Sigma_2 .$$

Zum Schluss sei nun  $\hat{t} = -\frac{\pi}{2}$ . Dann gilt

$$\left( (e^{i\frac{\pi}{4}})^{\rho_t} \right)^{\alpha} = \left[ \frac{e^{-s\frac{\pi}{4}}}{e^{st} \cos(-\frac{\pi}{4})}, \tan(-\frac{\pi}{4}), 1 \right] = [xk^{-l}, -1, 1] .$$

Mit  $[x, 1, 1]^{\tilde{\rho}_t} = ((e^{i\frac{\pi}{4}})^{\rho_t})^{\alpha}$  erhalten wir

$$h = -f = -k^l = -k^l \sin(-\frac{\pi}{2}) .$$

Wegen  $f = k^l > 0$  gilt  $\tilde{\rho}_t \in \Sigma_1$  und wir erhalten:

$$\text{Für } \hat{t} = -\frac{\pi}{2} \text{ gilt } \tilde{\rho}_t = (k^l D_t)^{\overline{(\mathcal{O})}} \in \Sigma_1 .$$

Mit den Schritten 1 bis 7 haben wir nun alle Fälle betrachtet und die Behauptung ist bewiesen. ■

### 4.3. Die $\widetilde{\text{SL}}_2 \mathbb{R}$ in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene

Im Folgenden wollen wir die Kommutatorgruppe von  $\Sigma$  bestimmen und dann zeigen, dass diese isomorph zu der Gruppe  $\widetilde{\text{SL}}_2 \mathbb{R}$  ist. Dabei geben wir die Überlagerungsabbildung explizit an. In den folgenden Beweisen wird zur Berechnung der Produkte und Inversen das Lemma 4.2.25 benutzt.

4.3. Die  $\widetilde{\text{SL}}_2 \mathbb{R}$  in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene

**4.3.1 Lemma.** Für alle  $r \in \mathbb{R}^+$  und alle  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  gilt die Gleichheit  $(rA)^{\overline{\sigma}} = (r\mathbb{1})^{\overline{\sigma}} A^{\overline{\sigma}}$ .

**Beweis.** Für  $r \in \mathbb{R}^+$  ist  $(r\mathbb{1})^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3$ . Nach 4.2.25 gilt folglich für alle  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  die Gleichheit  $(rA)^{\overline{\sigma}} = (r\mathbb{1}A)^{\overline{\sigma}} = (r\mathbb{1})^{\overline{\sigma}} A^{\overline{\sigma}}$ . ■

Wir betrachten die Untergruppe  $S := \{(k^r C)^{\overline{\sigma}} \mid C \in \text{SL}_2 \mathbb{R}, r \in \mathbb{Z}\}$  von  $\Sigma$ . Unser nächstes Ziel ist der Satz 4.3.5, der besagt, dass  $S$  die Kommutatorgruppe von  $\Sigma$  ist.

**4.3.2 Bemerkung.** Die Menge  $S$  ist eine Untergruppe von  $\Sigma$ : Für  $(k^{r_1} C_1)^{\overline{\sigma}}, (k^{r_2} C_2)^{\overline{\sigma}} \in S$  gibt es  $m_2 \in \{-r_2, -r_2 + 1, -r_2 - 1\}$  und  $m \in \{r_1 + m_2, r_1 + m_2 + 1, r_1 + m_2 - 1\}$  so, dass Folgendes gilt:

$$(k^{r_1} C_1)^{\overline{\sigma}} \left( (k^{r_2} C_2)^{\overline{\sigma}} \right)^{-1} = (k^{r_1} C_1)^{\overline{\sigma}} (k^{m_2} C_2^{-1})^{\overline{\sigma}} = (k^m C_1 C_2^{-1})^{\overline{\sigma}} \in S$$

**4.3.3 Lemma.** Das Zentrum  $Z(\Sigma)$  von  $\Sigma$  ist die Untergruppe

$$Z(\Sigma) = (Z(\text{GL}_2^+ \mathbb{R}))^{\overline{\sigma}} = \left\{ (r\mathbb{1})^{\overline{\sigma}} \mid r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

und das Zentrum  $Z(S)$  von  $S$  ist die Untergruppe

$$Z(S) = \left\{ (\pm k^l \mathbb{1})^{\overline{\sigma}} \mid l \in \mathbb{Z} \right\} = \langle (-1)^{\overline{\sigma}} \rangle .$$

**Beweis.** Sei  $A^{\overline{\sigma}} \in Z(\Sigma)$  bzw.  $A^{\overline{\sigma}} \in Z(S)$ . Dann gilt für alle  $B^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3$  die Gleichheit

$$(AB)^{\overline{\sigma}} = A^{\overline{\sigma}} B^{\overline{\sigma}} = B^{\overline{\sigma}} A^{\overline{\sigma}} = (BA)^{\overline{\sigma}} .$$

Folglich vertauscht  $A$  mit allen Elementen der Untergruppe  $\Sigma_3^{\overline{\sigma}^{-1}}$  in der  $\text{GL}_2 \mathbb{R}$ , da die Abbildung  $\overline{\sigma}$  nach 4.2.24 injektiv ist. Die Untergruppe  $\Sigma_3^{\overline{\sigma}^{-1}}$  besteht aus der Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen (vgl. 4.2.2) mit der üblichen Matrizenmultiplikation, weil  $\overline{\sigma}$  auf dieser Untergruppe einen Homomorphismus induziert, wie wir aus 4.2.25 erkennen können. Aus der Bedingung, dass  $A$  mit den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_3^{\overline{\sigma}^{-1}} \cap S^{\overline{\sigma}^{-1}}$$

kommutiert, erhalten wir, dass die Matrix  $A$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Sei nun umgekehrt die Matrix  $A$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Dann vertauscht  $A$  mit jedem  $B \in \text{GL}_2 \mathbb{R}$  und es gilt  $A^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3$ . Folglich gilt nach 4.2.25

$$A^{\overline{\sigma}} B^{\overline{\sigma}} = (AB)^{\overline{\sigma}} = (BA)^{\overline{\sigma}} = B^{\overline{\sigma}} A^{\overline{\sigma}} .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

**4.3.4 Lemma.** Es gilt  $S' = S$ .

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Beweis.** Wir finden im Folgenden Elemente von  $S'$ , welche die Gruppe  $S$  erzeugen. Damit ist dann die Aussage  $S' = S$  bewiesen.

**Schritt 1:** Wir zeigen:

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S' .$$

Sei  $u \in \mathbb{R}^+$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann liegen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

in  $\text{SL}_2 \mathbb{R}$  und die Lineationen

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}}$$

sind Elemente von  $\Sigma_3$ . Der Kommutator dieser beiden Lineationen ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} = \\ & \left( \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \right)^{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (u^{-2} - 1)a & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $u = \frac{1}{2}$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  erhalten wir mit  $a = \frac{1}{3}x$ , dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S'$$

gilt.

**Schritt 2:** Wir zeigen nun:

$$\text{Für alle } y \in \mathbb{R} \text{ gilt } \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S' .$$

Sei  $y \in \mathbb{R}$ . Dann wissen wir aus Schritt 1 und 4.2.1, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S' \cap \Sigma_3$$

gilt. Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S \cap \Sigma_2 .$$



### 4.3. Die $\widetilde{\text{SL}}_2 \mathbb{R}$ in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene

Wir konjugieren die erste Lineation mit der zweiten und berechnen dadurch ein Element von  $S'$ , da  $S'$  ein Normalteiler von  $S$  ist. Bei der folgenden Rechnung verwenden wir, dass

$$\begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_2 \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_1$$

gilt.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \\ &= \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S' \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Wir zeigen:

$$\text{Es gilt } (k^{-1}\mathbb{1})^{\overline{\sigma}} \in S'.$$

Wie wir in Schritt 1 und Schritt 2 gesehen haben, sind die Lineationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}}$$

Elemente von  $S'$ . Wir berechnen nun das Quadrat des Produkts dieser beiden Lineationen. In die Berechnung geht ein, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_3 \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_1$$

gilt.

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \right)^2 &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in S' \end{aligned}$$

Da

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \in \Sigma_4$$

erfüllt ist, erhalten wir

$$(k^{-1}\mathbb{1})^{\overline{\sigma}} = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\overline{\sigma}} \right)^2 \in S'.$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Schritt 4:** Als letztes zeigen wir, dass die in den drei Schritten in  $S'$  gefundenen Lineationen die Gruppe  $S$  erzeugen. In Anlehnung an [71, S. 20f] verwenden wir die folgende Kurzschreibweise für die Transvektionen:

$$t_{xe_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_{ye_2} := \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für beliebige  $C \in \mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  betrachten wir die Lineation  $(k^m C)^{\overline{\mathcal{O}}}$   $\in S$ . Da die Gruppe  $\mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$  von den Transvektionen erzeugt wird ([50, 3.2.10] bzw. [71, 4.2 u. 4.3]), finden wir endlich viele Transvektionen  $t_{x_i e_{l_i}}$  mit  $l_i \in \{1, 2\}$  so, dass

$$C = \prod_{i=1}^n t_{x_i e_{l_i}} .$$

Also gibt es ein  $z \in \mathbb{Z}$  so, dass  $C^{\overline{\mathcal{O}}} = (k^z \mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}} \prod_{i=1}^n (t_{x_i e_{l_i}})^{\overline{\mathcal{O}}}$ . Somit können wir die Lineation  $(k^m C)^{\overline{\mathcal{O}}}$  als Produkt von Elementen aus  $S'$  darstellen:

$$(k^m C)^{\overline{\mathcal{O}}} = (k^m \mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}} (k^z \mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}} \prod_{i=1}^n (t_{x_i e_{l_i}})^{\overline{\mathcal{O}}}$$

Insgesamt haben wir  $S' = S$  bewiesen. ■

**4.3.5 Satz.** Es gilt  $\Sigma' = S$ .

**Beweis.** Für  $A, B \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R}$  gibt es ein  $m \in \mathbb{Z}$  so, dass Folgendes gilt

$$A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} (A^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1} (B^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1} = (k^m ABA^{-1}B^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}}$$

Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt  $ABA^{-1}B^{-1} \in \mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$  und wir erhalten  $\Sigma' \leq S$ .

Wegen  $S \leq \Sigma$  gilt  $S' \leq \Sigma'$ . Mit Lemma 4.3.4 erhalten wir daraus  $S \leq \Sigma'$ , womit die Aussage bewiesen ist. ■

Selbstverständlich erhalten wir aus den Einparametergruppen  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{\Xi}$  (4.2.32) durch Konjugation mit dem Isomorphismus  $\alpha$  wieder Einparametergruppen. An dieser Stelle wollen wir aber diesen Zusammenhang nicht benutzen, sondern explizit nachweisen, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} : \mathbb{R} &\rightarrow \Sigma & : t &\mapsto \tilde{\eta}_t & = & \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} , \\ \tilde{\varepsilon} : \mathbb{R} &\rightarrow \Sigma & : t &\mapsto \tilde{\varepsilon}_t & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} , \\ \tilde{\xi} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \Sigma & : u &\mapsto \tilde{\xi}_u & = & \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} \quad \text{und} \\ \tilde{\rho} : \mathbb{R} &\rightarrow \Sigma & : t &\mapsto \tilde{\rho}_t & = & (k^l D_t)^{\overline{\mathcal{O}}} \end{aligned}$$

mit  $D_t := \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$  für  $t = \hat{t} + 2l\pi$  mit  $\hat{t} \in [-\pi, \pi[$  und  $l \in \mathbb{Z}$ , stetige Gruppenhomomorphismen sind.

4.3. Die  $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R}$  in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene

**4.3.6 Lemma.** Die Abbildungen  $\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\rho}$  und  $\tilde{\xi}$  sind stetige und offene Gruppenhomomorphismen. Insbesondere sind die Mengen

$$\begin{aligned}\tilde{H} &:= \{\tilde{\eta}_t \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ ,} \\ \tilde{E} &:= \{\tilde{\varepsilon}_t \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ ,} \\ \tilde{\Xi} &:= \{\tilde{\xi}_u \mid u > 0\} \text{ und} \\ \tilde{P} &:= \{\tilde{\rho}_t \mid t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Einparameteruntergruppen.

**Beweis.** Für  $t \in \mathbb{R}$  und  $u > 0$  sind die Lineationen  $\tilde{\eta}_t, \tilde{\varepsilon}_t$  und  $\tilde{\xi}_u$  Elemente von  $\Sigma_3$ . Wie wir aus der Definition 4.2.2 entnehmen können, gilt also

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}^\lambda \text{ ,} \\ \tilde{\varepsilon}_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}^\lambda \text{ und} \\ \tilde{\xi}_u &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^\lambda \text{ .}\end{aligned}$$

Die Lineationen stimmen also auf allen Punkten der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$  jeweils mit einem Automorphismus der reellen projektiven Ebene  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$  überein. Deswegen lässt es sich leicht nachrechnen, dass es sich bei den Abbildungen  $\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}$  und  $\tilde{\xi}$  um Gruppenhomomorphismen handelt. Sei  $\varphi \in \{\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\xi}\}$ . Mit der Abbildung  $\omega_{H_L}$  aus Lemma 1.5.10, die einen Automorphismus der Moulton-Ebene auf die linke Halbebene einschränkt, betrachten wir die Abbildung  $\varphi\omega_{H_L}$ . Die Halbebene  $H_L$  kann einerseits als Unterebene der Moulton-Ebene und andererseits als Unterebene der reellen projektiven Ebene betrachtet werden. Alle Lineationen der Menge  $\Sigma_3$  bilden die linke Halbebene in sich ab. Also ist die Topologie der Menge  $\Sigma_3^{\omega_{H_L}}$  unabhängig davon, ob die Lineationen aus  $\Sigma_3$  auf der reellen projektiven Ebene oder auf der Moulton-Ebene wirken. Betrachten wir  $H_L$  als Unterebene der reellen projektiven Ebene, so ist schon bekannt und leicht nachzuweisen, dass die Abbildung  $\varphi\omega_{H_L}$  stetig und offen ist. Da  $\omega_{H_L}$  stetig und offen und bijektiv (Lemma 1.5.10) ist, folgt, dass die Abbildung  $\varphi$  stetig und offen auf ihr Bild ist.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\tilde{\rho} : t \rightarrow \tilde{\rho}_t = (k^l D_t)^{\overline{\mathcal{O}}} \text{ mit } t = \hat{t} + 2\pi l \text{ und } \hat{t} \in [-\pi, \pi[ \text{ .}$$

Als erstes zeigen wir, dass es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Seien  $t_1 := \hat{t}_1 + 2\pi l_1$  und  $t_2 := \hat{t}_2 + 2\pi l_2$  mit  $\hat{t}_1, \hat{t}_2 \in [-\pi, \pi[$  beliebig gewählt. Dann gilt

$$\tilde{\rho}_{t_1} \circ \tilde{\rho}_{t_2} = \begin{cases} (k^{l_1+l_2+1} D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} & \text{wenn } D_{t_1}^{\overline{\mathcal{O}}}, D_{t_2}^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_2 \text{ und } (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \notin \Sigma_2, \\ (k^{l_1+l_2-1} D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} & \begin{cases} \text{wenn } D_{t_1}^{\overline{\mathcal{O}}}, D_{t_2}^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_1 \text{ und } (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_2, \\ \text{oder } D_{t_1}^{\overline{\mathcal{O}}}, D_{t_2}^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_4, \\ \text{oder } (D_{t_1}^{\overline{\mathcal{O}}}, D_{t_2}^{\overline{\mathcal{O}}}) \in \Sigma_1 \times \Sigma_4 \cup \Sigma_4 \times \Sigma_1, \end{cases} \\ (k^{l_1+l_2} D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie wir aus der Definition 4.2.1 entnehmen, gilt für  $t \in [-\pi, \pi[$  Folgendes:

$$D_t^{\overline{\mathcal{O}}} \in \begin{cases} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \end{cases} \iff t \in \begin{cases} ]-\pi, 0[ \\ ]0, \pi[ \\ \{0\} \\ \{-\pi\} \end{cases}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\tilde{\rho}_{t_1} \circ \tilde{\rho}_{t_2} = \begin{cases} k^{l_1+l_2+1} (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \\ k^{l_1+l_2-1} (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \\ k^{l_1+l_2} (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \end{cases} \iff \hat{t}_1 + \hat{t}_2 \in \begin{cases} [\pi, 2\pi[ \\ [-2\pi, -\pi[ \\ [-\pi, \pi[ \end{cases}.$$

Andererseits gilt  $t_1 + t_2 = \hat{t}_1 + \hat{t}_2 + 2\pi(l_1 + l_2)$ . Folglich ist

$$\tilde{\rho}_{t_1+t_2} = \begin{cases} k^{l_1+l_2+1} (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \\ k^{l_1+l_2-1} (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \\ k^{l_1+l_2} (D_{t_1+t_2})^{\overline{\mathcal{O}}} \end{cases} \text{ für } \hat{t}_1 + \hat{t}_2 \in \begin{cases} [\pi, 2\pi[ \\ [-2\pi, -\pi[ \\ [-\pi, \pi[ \end{cases}.$$

Damit ist die Homomorphiebedingung bewiesen.

Als letztes zeigen wir Stetigkeit und Offenheit von  $\tilde{\rho}$ . Sei  $l \in \mathbb{Z}$  beliebig gewählt. Für  $t \in ]-\frac{5}{4}\pi + 2\pi l, \pi + 2\pi l[$  betrachten wir  $\tilde{\rho}_t$ . Es gilt

$$\tilde{\rho}_t = \begin{cases} (k^{l-1} D_t)^{\sigma_2} \\ (k^l D_t)^{\sigma_4} \\ (k^l D_t)^{\sigma_1} \\ (k^l D_t)^{\sigma_3} \\ (k^l D_t)^{\sigma_2} \end{cases} \text{ für } t \in \begin{cases} ]-\frac{5}{4}\pi + 2\pi l, -\pi + 2\pi l[ \\ \{-\pi + 2\pi l\} \\ ]-\pi + 2\pi l, 2\pi l[ \\ \{2\pi l\} \\ ]2\pi l, \pi + 2\pi l[ \end{cases}.$$

Wir definieren die in  $\overline{P}$  offenen Mengen

$$U_L := \{[x, y, 1] \mid (x, y) \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]-1, 0[\}$$

$$U_R := \{[x, y, 1] \mid (x, y) \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]0, 1[\}$$

Mit den in 1.5.10 eingeführten Abbildungen  $\omega_{U_L}$  und  $\omega_{U_R}$  betrachten wir die folgenden Abbildungen (dabei benutzen wir die in 4.1.6 definierte Abbildung  $\lambda$ ):

### 4.3. Die $\widetilde{\text{SL}}_2 \mathbb{R}$ in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene

Sei

$$I_1 := ]-\frac{5}{4}\pi + 2\pi l, \frac{1}{4}\pi + 2\pi l[$$

und

$$I_2 := ]2\pi l, \pi + 2\pi l[ .$$

Dann gilt

$$\tilde{\rho}\omega_{U_L}|_{I_1} = \left( I_1 \rightarrow \Sigma|_{U_L} : t \mapsto ((k^l D_t)^\lambda)|_{U_L} \right)$$

und

$$\tilde{\rho}\omega_{U_R}|_{I_2} = \left( I_2 \rightarrow \Sigma|_{U_R} : t \mapsto ((k^l D_t)^\lambda)|_{U_R} \right) .$$

Zur Erinnerung: Mit  $\lambda$  aus 4.1.6 gilt

$$(k^l D_t)^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^l \cos t & -k^l \sin t \\ 0 & k^l \sin t & k^l \cos t \end{bmatrix} .$$

Folglich sind die beiden Abbildungen  $\tilde{\rho}\omega_{U_L}$  und  $\tilde{\rho}\omega_{U_R}$  stetig und offen. Da  $\omega_{U_L}$  und  $\omega_{U_R}$  bijektive, stetige und offene Abbildungen sind, erhalten wir daraus, dass die Einschränkungen von  $\tilde{\rho}$  auf  $I_1$  bzw.  $I_2$  stetig und offen sind. Da  $l$  beliebig gewählt war, folgt, dass jedes  $s$  in  $\mathbb{R}$  eine Umgebung besitzt, auf der  $\tilde{\rho}$  stetig ist. Damit ist die Stetigkeit von  $\tilde{\rho}$  bewiesen. ■

**4.3.7 Bemerkung.** Die Kommutatorgruppe  $\Sigma'$  wird von den (Bildern der) Einparameteruntergruppen  $\tilde{\varepsilon}$  und  $\tilde{\rho}$  erzeugt. Es gilt also

$$\Sigma' = \langle \tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\rho}_t, \tilde{\xi}_u \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+ \rangle .$$

**Beweis.** Es gilt

$$\tilde{\rho}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\overline{\text{O}}} .$$

Nach Schritt 2 des Beweises von 4.3.4 gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\text{O}}} \in \langle \tilde{\rho}_{\frac{\pi}{2}}, \tilde{\varepsilon}_t \rangle .$$

In Schritt 4 des Beweises von 4.3.4 wurde bewiesen, dass die Gruppe  $S$  von den Bildern der Transvektionen unter  $\overline{\text{O}}$  und  $\tilde{\varepsilon}_\pi$  erzeugt wird. Da  $\xi_u \in S$  für  $u \in \mathbb{R}^+$  gilt, folgen die beiden behaupteten Aussagen. ■

**4.3.8 Satz.** Die Abbildung

$$\nu : S \rightarrow \text{SL}_2 \mathbb{R} : (k^r C)^{\overline{\text{O}}} \mapsto C$$

ist eine Überlagerungsabbildung. Insbesondere ist die Gruppe  $S$  die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe der  $\text{SL}_2 \mathbb{R}$ .

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Beweis.** Wir betrachten die Abbildung

$$\nu : S \rightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{R} : (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}} \mapsto C .$$

**Schritt 1:** Wir zeigen: Die Abbildung  $\nu$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

Seien  $(k^{r_1} C_1)^{\overline{\mathcal{O}}}$  und  $(k^{r_2} C_2)^{\overline{\mathcal{O}}}$  Elemente von  $S$ . Dann gibt es ein  $m \in \{r_1 + r_2, r_1 + r_2 + 1, r_1 + r_2 - 1\}$  so, dass  $(k^{r_1} C_1)^{\overline{\mathcal{O}}} \circ (k^{r_2} C_2)^{\overline{\mathcal{O}}} = (k^m C_1 C_2)^{\overline{\mathcal{O}}}$  erfüllt ist. Somit erhalten wir

$$\left( (k^{r_1} C_1)^{\overline{\mathcal{O}}} \right)^\nu \left( (k^{r_2} C_2)^{\overline{\mathcal{O}}} \right)^\nu = C_1 C_2 = \left( (k^m C_1 C_2)^{\overline{\mathcal{O}}} \right)^\nu = \left( (k^{r_1} C_1)^{\overline{\mathcal{O}}} \circ (k^{r_2} C_2)^{\overline{\mathcal{O}}} \right)^\nu .$$

**Schritt 2:** Wir zeigen nun, dass die Abbildung  $\nu$  eine Überlagerung ist.

Sei  $1 > \beta > 0$  und  $\delta > 0$  und  $Y_{\beta, \delta}$  wie in 4.2.29. Sei

$$U := Y_{\beta, \delta} \cap \mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$$

und sei  $A \in \mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$  fest gewählt. Dann ist  $AU = \{Au \mid u \in U\}$  eine offene Umgebung von  $A$  in  $\mathrm{SL}_2 \mathbb{R}$ . Wir betrachten nun das volle Urbild von  $AU$  unter  $\nu$  und zeigen dann, dass  $(AU)^{\nu^{-1}}$  disjunkte Vereinigung von Mengen ist, welche in  $S$  offen sind. Wir beweisen im Folgenden

$$(AU)^{\nu^{-1}} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^r U)^{\overline{\mathcal{O}}} .$$

Wir betrachten zuerst ein  $C \in U$ . Da für fest gewählte  $A, C \in \mathrm{GL}_2 \mathbb{R}$  ein  $\hat{m} \in \{1, 0, -1\}$  existiert, so dass für alle  $\hat{r} \in \mathbb{Z}$  die Gleichheit  $(k^{\hat{r}} AC)^{\overline{\mathcal{O}}} = (k^{\hat{r} + \hat{m}} A)^{\overline{\mathcal{O}}} C^{\overline{\mathcal{O}}}$  gilt, erhalten wir:

$$\{AC\}^{\nu^{-1}} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \{k^r AC\}^{\overline{\mathcal{O}}} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \{A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^{r + \hat{m}} C)^{\overline{\mathcal{O}}}\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \{A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}}\} .$$

Wegen

$$(AU)^{\nu^{-1}} = \left( \bigcup_{C \in U} \{AC\} \right)^{\nu^{-1}} = \bigcup_{C \in U} (\{AC\}^{\nu^{-1}})$$

folgt obige Gleichheit. Für  $r_1 \neq r_2$  sind die Mengen  $A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^{r_1} U)^{\overline{\mathcal{O}}}$  und  $A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^{r_2} U)^{\overline{\mathcal{O}}}$  disjunkt: Denn seien  $C_1, C_2 \in U$  und es gelte

$$A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^{r_1} C_1)^{\overline{\mathcal{O}}} = A^{\overline{\mathcal{O}}} (k^{r_2} C_2)^{\overline{\mathcal{O}}} .$$

Da  $\Sigma$  eine Gruppe ist, ist obiges genau dann erfüllt, wenn

$$(k^{r_1} C_1)^{\overline{\mathcal{O}}} = (k^{r_2} C_2)^{\overline{\mathcal{O}}}$$

gilt. Nach 4.2.24 ist  $\overline{\mathcal{O}}$  injektiv. Folglich erhalten wir die Gleichheit

$$k^{r_1} C_1 = k^{r_2} C_2 .$$

### 4.3. Die $\widetilde{\text{SL}}_2 \mathbb{R}$ in der Automorphismen-Gruppe der Moulton-Ebene

Also ist

$$k^{2r_1} = \det(k^{r_1} C_1) = \det(k^{r_2} C_2) = k^{2r_2} .$$

Daraus folgt  $r_1 = r_2$ , womit bewiesen ist, dass  $A^{(\overline{\mathcal{O}})}(k^{r_1} U)^{(\overline{\mathcal{O}})}$  und  $A^{(\overline{\mathcal{O}})}(k^{r_2} U)^{(\overline{\mathcal{O}})}$  nur für  $r_1 = r_2$  gemeinsame Elemente besitzen.

Sei im Folgenden  $\tilde{r} \in \mathbb{Z}$  fest gewählt. Die Offenheit der Menge  $(k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} U^{(\overline{\mathcal{O}})} = A^{(\overline{\mathcal{O}})}(k^{\tilde{r}} U)^{(\overline{\mathcal{O}})}$  sehen wir folgendermaßen: Es gilt

$$\begin{aligned} U^{(\overline{\mathcal{O}})} &= \left\{ C^{(\overline{\mathcal{O}})} \mid C \in Y_{\beta, \delta}, \det C = 1 \right\} \\ &= \left\{ C^{(\overline{\mathcal{O}})} \mid C \in Y_{\beta, \delta}, \det C \in ]\frac{1}{k^2}, k^2[, C^{(\overline{\mathcal{O}})} \in S \right\} \\ &= \left( Y_{\beta, \delta} \cap ]\frac{1}{k^2}, k^2[^{\det^{-1}} \right)^{(\overline{\mathcal{O}})} \cap S . \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\det : \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : B \mapsto \det B$$

ist stetig. Folglich ist  $Y_{\beta, \delta} \cap ]k^{-2}, k^2[^{\det^{-1}}$  eine offene Umgebung von 1 in  $\text{GL}_2 \mathbb{R}$ . Da  $\overline{\mathcal{O}}|_{Y_{\beta, \delta}}$  ein Homöomorphismus ist und  $Y_{\beta, \delta}^{(\overline{\mathcal{O}})}$  offen in  $\Sigma$  ist (Satz 4.2.29), können wir folgern, dass die Menge  $U^{(\overline{\mathcal{O}})}$  offen in  $S$  ist. Da  $S \subset \Sigma$  eine topologische Gruppe ist, ist die Linksmultiplikation mit  $(k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})}$  eine stetige und offene Abbildung. Folglich ist die Menge  $(k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} U^{(\overline{\mathcal{O}})}$  offen in  $S$ . Insgesamt haben wir nachgewiesen, dass  $(AU)^{\nu^-}$  disjunkte Vereinigung offener Mengen ist.

Die Einschränkung von  $\nu$  auf  $(k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} U^{(\overline{\mathcal{O}})}$  ist ein Homöomorphismus, denn es gilt

$$\nu|_{(k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} U^{(\overline{\mathcal{O}})}} = \left( \begin{array}{cccc} (k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} U^{(\overline{\mathcal{O}})} & \rightarrow & U^{(\overline{\mathcal{O}})} & \rightarrow & U & \rightarrow & AU \\ (k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} C^{(\overline{\mathcal{O}})} & \mapsto & C^{(\overline{\mathcal{O}})} & \mapsto & C & \mapsto & AC \end{array} \right) .$$

Folglich ist  $\nu|_{(k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})} U^{(\overline{\mathcal{O}})}}$  die Komposition der drei Homöomorphismen „Multiplikation mit  $((k^{\tilde{r}} A)^{(\overline{\mathcal{O}})})^{-1}$ “, der Abbildung  $\overline{\mathcal{O}}^{-1}|_{Y_{\beta, \delta}^{(\overline{\mathcal{O}})}}$  und „Multiplikation mit  $A$ “. Die Multiplikationen sind Homöomorphismen, weil  $S$  bzw.  $\text{SL}_2 \mathbb{R}$  topologische Gruppen sind. Die Tatsache, dass  $\overline{\mathcal{O}}^{-1}|_{Y_{\beta, \delta}^{(\overline{\mathcal{O}})}}$  ein Homöomorphismus ist, wurde in 4.2.29 bewiesen.

**Schritt 3:** Als letztes zeigen wir, dass  $S$  einfach zusammenhängend ist. Konkret zeigen wir:  $S$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^3$ .

Für  $t = \hat{t} + 2\pi l$  mit  $\hat{t} \in [-\pi, \pi[$  und  $l \in \mathbb{Z}$  betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow S : (t, s, r) \mapsto \left( k^l \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \right)^{(\overline{\mathcal{O}})} .$$

Wir wollen als Erstes zeigen, dass  $f$  bijektiv ist. Dazu erinnern wir uns an die Iwasawa-Zerlegung der  $\text{SL}_2 \mathbb{R}$  (vgl. [14][III.6.32, Übungsaufgabe III.6.4]). Wir wählen dazu die folgende Basis in  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ :

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



#### 4. Die Moulton-Ebenen

Dann ist

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}R \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}E$$

eine Iwasawa-Zerlegung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Ferner gilt

$$\mathrm{SL}_2 \mathbb{R} = \exp(\mathbb{R}R) \exp(\mathbb{R}X) \exp(\mathbb{R}E)$$

und es gilt

$$\exp(tR) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \exp(sX) = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}, \quad \exp(rE) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \exp(\mathbb{R}R) \times \exp(\mathbb{R}X) \times \exp(\mathbb{R}E) &\rightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{R} \\ (\exp(tR), \exp(sX), \exp(rE)) &\mapsto \exp(tR) \exp(sX) \exp(rE) \end{aligned}$$

ist ein Diffeomorphismus, also insbesondere bijektiv. Folglich ist die Abbildung  $f$  surjektiv. Um die Injektivität von  $f$  zu beweisen betrachten wir das Folgende: Sei für  $(t_1, s_1, r_1), (t_2, s_2, r_2) \in \mathbb{R}^3$  mit  $t_i = \hat{t}_i + 2\pi l_i$ , wobei  $\hat{t}_i \in [-\pi, \pi[$  und  $l_i \in \mathbb{Z}$  ist, die Gleichheit

$$(t_1, s_1, r_1)^f = (t_2, s_2, r_2)^f$$

erfüllt. Dann gilt, wegen der Bijektivität von  $\overline{\mathcal{O}}$ , die Gleichheit

$$\det \left( (t_1, s_1, r_1)^f \right)^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} = k^{l_1} = k^{l_2} = \det \left( (t_2, s_2, r_2)^f \right)^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}.$$

Folglich ist  $l_1 = l_2$ . Insgesamt erhalten wir mit der Injektivität von  $\Phi$  die Injektivität von der Abbildung  $f$ .

Wir betrachten nun die Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 : (t, s, r) \mapsto (\tilde{\rho}_t, \tilde{\eta}_s, \tilde{\varepsilon}_r).$$

Wie wir in Lemma 4.3.6 gezeigt haben, sind  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\eta}$  und  $\tilde{\varepsilon}$  stetig und offen. Folglich ist die Abbildung  $f_1$  stetig und offen auf das Bild. Da  $S$  eine topologische Gruppe ist, ist die Abbildung

$$f_2 : S^3 \rightarrow S : (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mapsto \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3,$$

welche ein Tripel von Elementen aus  $S$  auf deren Komposition abbildet, stetig und offen. Insgesamt können wir folgern, dass die Abbildung

$$f_1 f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow S : (t, s, r) \mapsto \tilde{\rho}_t \circ \tilde{\eta}_s \circ \tilde{\varepsilon}_r$$

stetig und offen ist. Da für alle  $s, r \in \mathbb{R}$  die Lineationen  $\tilde{\eta}_s$  und  $\tilde{\varepsilon}_r$  Elemente von  $\Sigma_3$  sind, gilt

$$\tilde{\rho}_t \circ \tilde{\eta}_s \circ \tilde{\varepsilon}_r = \left( k^l \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \right)^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Damit ist bewiesen, dass

$$f = f_1 f_2$$

ein Homöomorphismus ist. ■

Aus  $S \cong \widetilde{SL_2\mathbb{R}}$  und 4.3.4 erhalten wir:

**4.3.9 Korollar.**  $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}' = \widetilde{SL_2\mathbb{R}}$

#### 4.4. Die Struktur von $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k})$

In [55, 34.6 und 34.7] erfahren wir Folgendes über die Struktur der Gruppe  $\Sigma$ :

**4.4.1 Satz.** [55, 34.6]

Die zusammenhängende Lie-Gruppe  $\Sigma$  ist lokal isomorph zu  $GL_2\mathbb{R}$ . Das Zentrum  $Z(\Sigma)$  ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen und besteht aus allen Homologien mit Achse  $l_0$  und Zentrum  $x_\infty$ . Die Kommutatorgruppe  $\Sigma'$  ist isomorph zur universellen Überlagerungsgruppe  $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ . Der Schnitt  $Z(\Sigma) \cap \Sigma'$  ist das Zentrum von  $\Sigma'$  und ist unendlich zyklisch. Der Isomphietyp von  $\Sigma$  ist unabhängig vom Knickfaktor  $k$ .

**Beweis.** Mit 4.2.29, 4.3.3, 4.3.5 und 4.3.8 sind alle obigen Aussagen bewiesen, außer der Isomorphie von je zwei Automorphismen-Gruppen. Sei  $l \in \{k, \tilde{k}\}$  mit  $k, \tilde{k} > 1$ , sei  $\Sigma^l$  die Automorphismen-Gruppe der Ebene  $\overline{\mathcal{M}_l}$  und sei  $\varpi_l : GL_2^+\mathbb{R} \rightarrow \Sigma^l$  definiert wie  $\varpi$  in 4.2.29. Dann gilt

$$\Sigma^l = \left\{ (e^t A)^{\varpi_l} \mid t \in \mathbb{R}, A \in SL_2\mathbb{R} \right\} .$$

Die Abbildung

$$\tau : \Sigma^k \rightarrow \Sigma^{\tilde{k}} : (e^t A)^{\varpi_k} \mapsto \left( e^{\frac{\ln(\tilde{k})}{\ln(k)} t} A \right)^{\varpi_{\tilde{k}}}$$

ist ein Isomorphismus, wie wir im Folgenden zeigen werden. Die Abbildung  $\tau$  ist bijektiv, da  $\varpi_l$  nach 4.2.24 bijektiv ist, die Abbildung  $t \mapsto at$  für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein Automorphismus der Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  ist und sich jedes Element  $A \in GL_2^+\mathbb{R}$  via

$$GL_2^+\mathbb{R} \rightarrow GL_2^+\mathbb{R} : A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\det(A)} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{\det(A)}} & \frac{b}{\sqrt{\det(A)}} \\ \frac{c}{\sqrt{\det(A)}} & \frac{d}{\sqrt{\det(A)}} \end{pmatrix}$$

eindeutig in der Gestalt  $e^t \tilde{A}$  mit  $\tilde{A} \in SL_2\mathbb{R}$  schreiben lässt. Wir schreiben nun für die in 4.2.2 definierten Abbildungen  $\sigma_i^l$  und für die Bilder dieser Abbildungen  $\Sigma_i^l$  mit  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  und  $l \in \{k, \tilde{k}\}$ . Dann gilt  $A \in \text{dom } \sigma_i^k$  genau dann, wenn  $A \in \text{dom } \sigma_i^{\tilde{k}}$  gilt. Also gibt es mit

#### 4. Die Moulton-Ebenen

4.2.3 nach 4.2.25 für  $A, B \in \text{SL}_2 \mathbb{R}$  ein  $m \in \{0, 1, -1\}$  so, dass für  $t, u \in \mathbb{R}$  Folgendes gilt.

$$\begin{aligned} \left( (e^t A)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\tau \left( (e^u B)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\tau &= \left( e^{\frac{\ln(\tilde{k})}{\ln(k)} t} A \right)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \left( e^{\frac{\ln(\tilde{k})}{\ln(k)} u} B \right)^{\overline{\mathcal{O}}_k} = \left( \tilde{k}^m e^{\frac{\ln(\tilde{k})}{\ln(k)} (t+u)} AB \right)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \\ &= \left( e^{\frac{\ln(\tilde{k})}{\ln(k)} (m \ln(k) + t + u)} AB \right)^{\overline{\mathcal{O}}_k} = \left( (e^{(m \ln(k) + t + u)} AB)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\tau \\ &= \left( (k^m e^{(t+u)} AB)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\tau = \left( (e^t A)^{\overline{\mathcal{O}}_k} (e^u B)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\tau. \end{aligned}$$

■

**4.4.2 Lemma.** Sei  $k > 1$  fest gewählt, wir schreiben nun wieder  $\overline{\mathcal{O}}$  für  $\overline{\mathcal{O}}_k$ . Sei

$$\Pi := \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & k^{2l} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} \mid l \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Die Abbildung  $\overline{\mathcal{O}}$  induziert einen Isomorphismus von  $\Pi^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}$  auf  $\Pi$ .

(ii) Es gilt

$$\Pi' = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Für  $y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\Pi_{[0,y,1]} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_l & k^{2l} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} \mid l \in \mathbb{Z} \right\} \text{ mit } x_l = (k^{2l} - 1) y$$

**Beweis.** (i) Da  $\Pi \subset \Sigma_3$  ist  $\overline{\mathcal{O}}$  auf  $\Pi^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}$  nach 4.2.28 ein stetiger und offener Gruppenisomorphismus.

(ii) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & k^{2m} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & k^{2n} \end{pmatrix},$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Wir berechnen nun mit (i) den Kommutator. Wie sich leicht nachrechnen lässt, gilt

$$A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} (A^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}} (B^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x(1 - k^{2n}) - y(1 - k^{2m}) & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(iii) Sei  $\psi \in \Pi$ . Dann gibt es  $l \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathbb{R}$  so, dass

$$[0, y, 1]^\psi = [0, y, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & k^{2l} \end{bmatrix} = [0, y + x, k^{2l}]$$

gilt. Folglich bildet  $\psi$  den Punkt  $[0, y, 1]$  genau dann auf sich ab, wenn

$$x = (k^{2l} - 1) y$$

gilt. Damit ist die Aussage bewiesen. ■

#### 4.4.3 Satz. [55, 34.7 a,b]

(i) Der Stabilisator  $(\Sigma')_p = S_p$  eines Punktes  $p \in \overline{P} \setminus (l_0 \cup \{x_\infty\})$  ist isomorph zu einem semidirekten Produkt  $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}$ . Sei  $k > 1$  fest gewählt. Für  $p = [1, 1, 0]$  in der Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$  gilt

$$S_p = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ x & k^{2l} \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid l \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Zwei Gruppen  $\Sigma^k$  und  $\Sigma^{\tilde{k}}$  sind genau dann als topologische Transformationsgruppen äquivalent, wenn  $k = \tilde{k}$ .

**Beweis.** (i) Sei  $p = [1, 1, 0]$  und  $\psi \in S$ . Dann wirkt auf  $p$  eine Abbildung der Form  $A^\lambda$ , wobei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k^l C$$

mit  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $C \in \text{SL}_2 \mathbb{R}$  und  $\psi \in \{A^{\overline{\mathcal{O}}}, (kA)^{\overline{\mathcal{O}}}, (k^{-1}A)^{\overline{\mathcal{O}}}\}$  ist. Es gilt  $p^\psi = p$  genau dann, wenn  $[1, a, b] = [1, 1, 0]$ . Das ist genau dann erfüllt, wenn  $a = 1$  und  $b = 0$  gilt. Da  $\det(A) = k^{2l}$  ist, folgt daraus  $d = k^{2l}$  und wir erhalten insgesamt, dass genau dann  $\psi \in S_p$  gilt, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{c} & k^{2l} \end{pmatrix}$$

mit  $l \in \mathbb{Z}$  und  $\tilde{c} \in \mathbb{R}$  ist. Da  $k^{2l} > 0$  ist, gilt  $A^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_3$ . Folglich gilt  $\psi = A^{\overline{\mathcal{O}}}$ . Damit ist bewiesen, dass  $S_p$  mit der Gruppe  $\Pi$  aus 4.4.2 übereinstimmt.  $\Pi$  ist nach 4.4.2(i) isomorph zum semidirekten Produkt  $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}$ . Da die Menge  $\overline{P} \setminus (l_0 \cup \{x_\infty\})$  eine Bahn unter der Automorphismen-Gruppe ist, sind alle Stabilisatoren dieser Punkte isomorph zu  $\Pi$ .

(ii) Wir schreiben wieder  $\overline{\mathcal{O}}_l$  statt  $\overline{\mathcal{O}}$ ,  $\Sigma^l = \text{GL}_2^+ \mathbb{R}^{\overline{\mathcal{O}}_l}$  und für die Kommutatorgruppe  $(\Sigma^l)' = S^l$  wie in 4.4.1 für  $l \in \{k, \tilde{k}\}$ . Seien nun  $\Sigma^k$  und  $\Sigma^{\tilde{k}}$  als topologische Transformationsgruppen äquivalent. Es gebe also einen Isomorphismus  $\beta : \Sigma^k \rightarrow \Sigma^{\tilde{k}}$  und einen

#### 4. Die Moulton-Ebenen

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^k \times \overline{\mathcal{M}}_k & \xrightarrow{\alpha_k} & \overline{\mathcal{M}}_k \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \tilde{\beta} \\
 \Sigma^{\tilde{k}} \times \overline{\mathcal{M}}_{\tilde{k}} & \xrightarrow{\alpha_{\tilde{k}}} & \overline{\mathcal{M}}_{\tilde{k}}
 \end{array}$$

Abbildung 7: Kommutatives Diagramm für als Transformationsgruppen äquivalente  $\Sigma^k$  und  $\Sigma^{\tilde{k}}$

Homöomorphismus  $\tilde{\beta} : \overline{\mathcal{M}}_k \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\tilde{k}}$  so, dass das Diagramm in Abbildung 7 kommutiert (vgl. [55, 96.1]). Für  $j \in \{\tilde{k}, k\}$  bezeichnet  $\alpha_j$  die Wirkung der Automorphismen-Gruppe auf der Moulton-Ebene:  $\alpha_j : \Sigma^j \times \overline{P} \rightarrow \overline{P} : (A^{\overline{\mathcal{O}}}, [x, y, z]) \mapsto [x, y, z]^{A^{\overline{\mathcal{O}}}}$ .

Jeder Gruppenisomorphismus bildet die Kommutatorgruppe auf die Kommutatorgruppe der Bildgruppe ab. Die Punktmenge  $\overline{P}$  zerfällt unter jeder Automorphismen-Gruppe  $\overline{\mathcal{M}}_l$  in drei Bahnen:  $\{x_\infty\}$ ,  $l_0$  und den Rest. Der Isomorphismus  $\beta$  bildet die Standgruppe eines Punktes aus der Bahn  $\overline{P} \setminus (\{x_\infty\} \cup l_0)$  wieder auf die Standgruppe eines Punktes aus der gleichen Bahn ab. Denn für  $l \in \{k, \tilde{k}\}$  und  $p \in \overline{P} \setminus (\{x_\infty\} \cup l_0)$  ist  $S_p^l$  nach (i) isomorph zu  $\Pi$ , hingegen sind die Standgruppen von Punkten aus den beiden anderen Bahnen nicht isomorph zu  $\Pi$ , es gilt nämlich  $S_{x_\infty}^l = S^l$  und

$$S_{[0,1,0]}^l = \left\{ \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ b & c \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac > 0 \right\} \cap S^l .$$

Sei  $p = [1, 1, 0]$ . Wir können annehmen, dass  $p^{\tilde{\beta}} = p$ , denn andernfalls bilden wir mit einem geeigneten Automorphismus  $p^{\tilde{\beta}}$  auf  $p$  ab. Insgesamt erhalten wir, dass  $\beta$  die Standgruppe  $S_p^k$  auf die Standgruppe  $S_p^{\tilde{k}}$  abbildet und dabei die Kommutatorgruppen  $(S_p^k)'$  und  $(S_p^{\tilde{k}})'$  aufeinander abgebildet werden. Die Kommutatorgruppen  $(S_p^k)'$  und  $(S_p^{\tilde{k}})'$  haben wir in 4.4.2 berechnet. Die Einschränkung von  $\beta$  auf  $(S_p^k)'$  induziert einen stetigen Gruppenautomorphismus von  $(\mathbb{R}, +)$ . Deswegen gibt es ein  $b \in \mathbb{R}$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\beta : \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ x & 1 \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}_k} \mapsto \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ bx & 1 \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} . \tag{1}$$

Das Bild des Punktes  $[0, 0, 1]$  unter  $\tilde{\beta}$  liegt in der Knickachse  $l_0$ . Der Isomorphismus  $\beta$  bildet also die Standgruppe  $S_{p,[0,0,1]}^k$  auf die Standgruppe  $S_{p,[0,y,1]}^{\tilde{k}}$  für ein  $y \in \mathbb{R}$  ab.

#### 4.4. Die Struktur von $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k})$

Der Punkt  $[0, 0, 1]$  kann nicht auf  $[0, 1, 0]$  abgebildet werden, da  $S_{p,[0,1,0]}^{\tilde{k}} = S_p^{\tilde{k}}$  gilt und die Gruppe  $S_p^{\tilde{k}}$  nach 4.4.2(i) isomorph zu  $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}$  ist. Hingegen ist nach 4.4.2(iii) die Standgruppe  $S_{p,[0,0,1]}^k$  isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Also gilt

$$\beta : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{\tilde{l}} & \tilde{k}^{2\tilde{l}} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} . \quad (2)$$

Da  $\tilde{\beta}$  surjektiv ist, gilt  $\tilde{l} \in \{1, -1\}$ . Nun berechnen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{-2} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^2 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} .$$

Nach Ergebnis (1) gilt

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^2 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bk^2 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} .$$

Andererseits gilt nach Ergebnis (2)

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\beta \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\beta \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{-2} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_k} \right)^\beta = \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{\tilde{l}} & \tilde{k}^{2\tilde{l}} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_{\tilde{l}}}{\tilde{k}^{2\tilde{l}}} & \tilde{k}^{-2\tilde{l}} \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b\tilde{k}^{2\tilde{l}} & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}_{\tilde{k}}} . \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$k^2 = \tilde{k}^{2\tilde{l}} .$$

Da  $\tilde{l} \in \{1, -1\}$  gilt, folgt daraus  $k \in \{\pm\tilde{k}, \pm\tilde{k}^{-1}\}$ . Da  $k$  und  $\tilde{k}$  größer als 1 sind, folgt  $k = \tilde{k}$ . ■

Jeder Isomorphismus zwischen zwei Ebenen  $\overline{\mathcal{M}_k}$  und  $\overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}}$  induziert einen Isomorphismus zwischen den Automorphismen-Gruppen  $\Sigma^k$  und  $\Sigma^{\tilde{k}}$  derart, dass diese beiden Gruppen als Transformationsgruppen äquivalent sind. Also erhalten wir die folgende Aussage, welche man in [55, 34.8 c] mit dem selben Beweis findet.

**4.4.4 Korollar.** [55, 34.8 c] Seien  $k, \tilde{k} > 1$ . Die zwei Moulton-Ebenen  $\overline{\mathcal{M}_k}$  und  $\overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}}$  sind genau dann isomorph, wenn  $k = \tilde{k}$ .

**4.4.5 Lemma.** Sei  $p = [1, 1, 0]$ . Dann gilt

$$\Sigma_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} \mid d > 0, c \in \mathbb{R} \right\}$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

und

$$(\Sigma_p)' = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ c & 1 \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Insbesondere gilt  $(\Sigma_p)' \neq (\Sigma')_p$ . Außerdem ist  $\overline{\mathcal{O}}|_{\Sigma_p \overline{\mathcal{O}}^{-1}}$  ein stetiger und offener Gruppenhomomorphismus.

**Beweis.** Für  $\psi \in \Sigma_p$  gilt  $p \notin g_\infty^{\psi^{-1}}$ . Weil zusätzlich  $p \notin l_0$  ist, gibt es nach 4.2.1 eine Umgebung  $U_p$  von  $p$  in  $P$  derart, dass

$$\psi|_{U_p} = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ c & d \end{array} \right)^\lambda \Big|_{U_p} \quad \text{mit } d > 0 \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

gilt. Da  $d > 0$  ist, gilt  $\psi \in \Sigma_3$ . Folglich ist

$$\psi = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ c & d \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} .$$

Wir haben also die Aussage

$$\Sigma_p = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ c & d \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid d > 0, c \in \mathbb{R} \right\}$$

bewiesen. Seien nun  $A^{\overline{\mathcal{O}}}, B^{\overline{\mathcal{O}}} \in \Sigma_p$ . Dann gibt es nach 4.2.25 ein  $r \in \mathbb{Z}$  so, dass  $A^{\overline{\mathcal{O}}} B^{\overline{\mathcal{O}}} (A^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1} (B^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1} = (k^r A B A^{-1} B^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}}$  gilt. Es folgt

$$(\Sigma_p)' \subset \left\{ \left( k^r \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ c & 1 \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Da aber  $(\Sigma_p)'$  eine Untergruppe von  $(\Sigma')_p$  ist, folgt mit 4.4.3

$$(\Sigma_p)' = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ c & 1 \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Da  $\Sigma_p \subset \Sigma_3$  ist, folgt aus 4.2.28, dass  $\overline{\mathcal{O}}$  auf  $\Sigma_p \overline{\mathcal{O}}^{-1}$  einen stetigen und offenen Gruppenisomorphismus induziert. ■

**4.4.6 Korollar.** Für  $n \in \{0, 1\}$  bezeichnet  $\pi_n(\Sigma)$  die  $n$ -te Homotopiegruppe von  $\Sigma$ . ( $\pi_1(\Sigma)$  ist die Fundamentalgruppe.) Es gilt  $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Aus 4.4.5 folgt, dass  $\Sigma_p$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  ist. Also gilt  $\pi_1(\Sigma_p) = \langle 1 \rangle = \pi_0(\Sigma_p)$ . Nach [55, 96.12] ist die folgende Homotopie-Sequenz exakt.

$$\pi_1(\Sigma_p) \rightarrow \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \rightarrow \pi_0(\Sigma_p)$$

Folglich ist in obiger Sequenz die Abbildung  $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  ein Isomorphismus. ■



#### 4.5. Die Menge $\Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}_k})$

Im Folgenden werden wir uns mit Restriktionen und Corestriktionen von partiellen Bijektionen der Punktmenge  $P$  beschäftigen. Diese definieren wir folgendermaßen:

**4.5.1 Definition.** Sei  $\delta$  eine partielle Bijektion von  $P$  und seien  $U$  und  $V$  Teilmengen von  $P$  mit  $\text{dom } \delta \cap U \neq \emptyset \neq \text{Bild } \delta \cap V$ . Dann definieren wir mit der in 1.4.6 definierten partiellen Verknüpfung  $\diamond$

$$\text{id}_U = (U \rightarrow U : x \mapsto x)$$

$$\delta|_U := \text{id}_U \diamond \delta = (\text{dom } \delta \cap U \rightarrow P : x \mapsto x^\delta)$$

$$\delta|_V := \alpha \diamond \text{id}_V = ((\text{Bild } \delta \cap V)^{\delta^{-1}} \rightarrow P : x \mapsto x^\delta)$$

Wenn  $U \cap (\text{Bild } \delta \cap V)^{\delta^{-1}} \neq \emptyset$  dann definieren wir

$$\delta|_U^V := (\text{id}_U \diamond \delta) \diamond \text{id}_V .$$

**4.5.2 Definition.** Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.1.12.

Sei  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Wir definieren für  $X, Y \in \{S, F\}$  auf  $\overline{\mathcal{M}_k}$  die folgenden Abbildungen

$$\alpha_{XY}(\chi) := \llbracket 1|c(X) \rrbracket_{\iota_k} \diamond \chi \diamond \iota_k^{-1} \llbracket 1|c(Y) \rrbracket^{-1}$$

mit

$$c(X) = \begin{cases} 1 & \text{für } X = S \\ k^{-1} & \text{für } X = F \end{cases}$$

**4.5.3 Lemma.** Erneut benutzen wir die Bezeichnungen von 4.1.12.

Sei  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  und  $X, Y \in \{S, F\}$ . Sei  $c(X)$  wie in 4.5.2 und  $p, q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Wenn  $X(p)^{\llbracket 1|c(X) \rrbracket_{\iota_k \chi}} \cap Y(q)^{\llbracket 1|c(Y) \rrbracket_{\iota_k}} \neq \emptyset$  ist, dann ist die Abbildung

$$(\alpha_{XY}(\chi))|_{X(p)}^{Y(q)}$$

ein Element von  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ .

**Beweis.** Wir betrachten die Menge  $\Psi_{\overline{\mathcal{M}_k}, \mathcal{P}_2 \mathbb{R}}$  mit der in 1.4.6 definierten partiellen Verknüpfung  $\diamond$ . Nach 4.1.13 ist  $(\alpha_{XY}(\chi))|_{X(p)}^{Y(q)}$  die Verknüpfung der drei Lineationen  $\llbracket 1|c(X) \rrbracket_{\iota_k}|_{X(p)} \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k}, \mathcal{P}_2 \mathbb{R})$ ,  $\chi \in \text{Aut}(\mathcal{P}_2 \mathbb{R})$  und  $(\llbracket 1|c(Y) \rrbracket_{\iota_k})^{-1}|_{Y(q)} \in \Psi(\mathcal{P}_2 \mathbb{R}, \overline{\mathcal{M}_k})$ . Da die partielle Verknüpfung  $\diamond$  assoziativ ist (vgl. 1.4.9) kann umgeklammert werden. Deswegen gilt  $(\alpha_{XY}(\chi))|_{X(p)}^{Y(q)} \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ . ■

**4.5.4 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  mit desarguesschem Definitionsgebiet  $\text{dom } \psi$ . Dann gibt es ein  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  und  $X, Y \in \{S, F\}$  so, dass  $\psi$  die Restriktion der Abbildung  $\alpha_{XY}(\chi)$  ist.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Beweis.** Sei  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}}_k)$  mit desarguesschen Definitionsgebiet  $U$ . Nach Lemma 4.2.13 gibt es  $X, Y \in \{S, F\}$  und  $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  so, dass  $U \subseteq X(p)$  und  $U^\psi \subseteq Y(q)$  gilt. Folglich sind  $(U, (\overline{\mathcal{L}}_k)_U)^{\llbracket 1|c(X) \rrbracket \iota_k}$  und  $(U^\psi, (\overline{\mathcal{L}}_k)_{U^\psi})^{\llbracket 1|c(Y) \rrbracket \iota_k}$  Unterebenen der reellen projektiven Ebene. Wegen 4.1.13 und mit der partiellen Verknüpfung  $\diamond$  aus 1.4.6 gilt also

$$(\iota_k^{-1} \llbracket 1|c(X) \rrbracket^{-1})|_{X(p)} \diamond \psi \diamond (\llbracket 1|c(Y) \rrbracket \iota_k)|_{Y(q)} \in \Psi(\mathcal{P}_2\mathbb{R}) .$$

Nach dem lokalen Fundamentalsatz [31] ist

$$(\iota_k^{-1} \llbracket 1|c(X) \rrbracket^{-1})|_{X(p)} \diamond \psi \diamond (\llbracket 1|c(Y) \rrbracket \iota_k)|_{Y(q)}$$

die Restriktion eines Elementes aus  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$ . Damit ist die Aussage bewiesen.  $\blacksquare$

Wir werden im Folgenden genauer betrachten, welche Unterebenen der Moulton-Ebene als Definitionsgebiete maximaler partieller Lineationen auftreten. Wie wir in den Beispielen 4.6.3 und 4.6.4 sehen, sind nicht alle nach 4.5.3 konstruierten Lineationen maximal. Man sieht im Allgemeinen der Form des Definitionsgebietes nicht an, ob dieses für die jeweilige Lineation maximal ist. Dann muss die Abbildung genauer betrachtet werden. Aus 4.5.4 und Satz 4.2.17 erhalten wir das folgende Korollar:

#### 4.5.5 Korollar.

$$\Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}}_k) \subset \left\{ \alpha_{XY}(\chi)|_{X(p)}^{Y(q)} \left| \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \\ \chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R} \setminus \{A^\lambda \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}\}, \\ X, Y \in \{F, S\} \end{array} \right. \right\} \cup \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_k)$$

Es gilt

$$(X(p), (\overline{\mathcal{L}}_k)_{X(p)})^{\llbracket 1|c(X) \rrbracket \iota_k} = (X(p), (\overline{\mathcal{L}})_{X(p)})$$

und

$$(Y(q), (\overline{\mathcal{L}}_k)_{Y(q)})^{\llbracket 1|c(Y) \rrbracket \iota_k} = (Y(q), (\overline{\mathcal{L}})_{Y(q)}) .$$

Wir betrachten im Folgenden die Halbebenen  $(X(p), (\overline{\mathcal{L}})_{X(p)})$  und  $(Y(q), (\overline{\mathcal{L}})_{Y(q)})$  in  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ . Da  $(Y(q))^{x^{-1}}$  eine Halbebene ist, wissen wir nun, dass jedes Definitionsgebiet einer maximalen partiellen Lineation der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}}_k$ , welche kein Automorphismus ist, der Schnitt von zwei Halbebenen ist. Es wird sich in 4.5.7 herausstellen, dass die Lineation  $\alpha_{XY}(\chi)|_{X(p)}^{Y(q)}$  maximal ist, wenn es eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}$  mit  $l \subset \overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}$  gibt. Dazu beweisen wir die folgende Aussage:

**4.5.6 Lemma.** Seien  $X, Y \in \{S, F\}$  und  $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  und  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R} \setminus \{A^\lambda \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}\}$ . Sei  $\psi = (\alpha_{XY}(\chi))|_{X(p)}^{Y(q)} \in \Psi(\overline{\mathcal{M}}_k)$ . Es gibt genau dann eine Gerade  $\overline{\mathcal{L}} \ni l \subset \overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}$ , wenn einer der folgenden vier Fälle erfüllt ist:

$$(i) \ l_0 \wedge l_{0,p} = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$$

$$(ii) \ (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in (l_0 \cup l_{0,p}) \setminus \{l_0 \wedge l_{0,p}\} \text{ und } l_0 \wedge l_{0,p} \in Y(q)^{x^{-1}}$$

(iii)  $(l_0 \wedge l_{0,p}) \in (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}} \setminus \{l_0 \wedge l_{0,q}\}^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in X(p)$

(iv)  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in X(p)$  und  $(l_0 \wedge l_{0,p})^x \in Y(q)$

**Beweis.** Für die Lage der Schnittpunkte  $l_0 \wedge l_{0,p}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$  gibt es folgende Möglichkeiten:

(i)  $l_0 \wedge l_{0,p} = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$

(ii)  $l_0 \wedge l_{0,p} \notin (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in (l_0 \cup l_{0,p}) \setminus \{l_0 \wedge l_{0,p}\}$

(iii)  $l_0 \wedge l_{0,p} \in (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}} \setminus \{l_0 \wedge l_{0,q}\}^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \notin l_0 \cup l_{0,p}$

(iv)  $l_0 \wedge l_{0,p} \notin (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \notin l_0 \cup l_{0,p}$

(v)  $l_0 \wedge l_{0,p} \in (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}} \setminus \{l_0 \wedge l_{0,q}\}^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in (l_0 \cup l_{0,p}) \setminus \{l_0 \wedge l_{0,p}\}$

Wir untersuchen nun in den fünf Fällen die möglichen Schnittebenen  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  darauf, ob es eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}$  mit  $l \in \overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  gibt. Da  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  ist, gilt in allen Fällen  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \neq \emptyset$ . Die Geraden  $l_0$  und  $l_{0,p}$  teilen das Büschel  $\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}}$  in zwei Zusammenhangskomponenten  $(\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}})_{X(p)}$  und  $(\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}})_{\overline{P} \setminus \overline{X(p)}}$ . Die Geraden  $(\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}})_{X(p)}$  sind die einzigen Geraden, die ganz in  $\overline{X(p)}$  liegen. Denn jede Gerade aus  $\overline{\mathcal{L}}$ , die nicht im Büschel  $\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}}$  liegt schneidet die beiden Randgeraden  $l_0$  und  $l_{0,p}$  in zwei unterschiedlichen Punkten und trifft folglich Punkte aus  $\overline{P} \setminus \overline{X(p)}$ .

(i) Wir betrachten als erstes den Fall  $l_0 \wedge l_{0,p} = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$ . Da  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \neq \emptyset$  gilt, ist

$$(\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}})_{X(p)} \cap (\overline{\mathcal{L}_{(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}}})_{Y(q)^{x^{-1}}}$$

eine nicht leere, offene Teilmenge des Büschels  $\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}}$ , die ganz in  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  liegt.

In den folgenden Fällen besteht der Schnitt

$$\overline{\mathcal{L}_{l_0 \wedge l_{0,p}}} \cap \overline{\mathcal{L}_{(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}}}$$

nur aus der Verbindungsgeraden  $l := (l_0 \wedge l_{0,p}) \vee (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$ . Folglich ist die Gerade  $l$  der einzige Kandidat für eine Gerade aus  $\overline{\mathcal{L}}$  die ganz in  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  liegt.

(ii) Wir betrachten den Fall

$$l_0 \wedge l_{0,p} \notin (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}} \text{ und } (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in (l_0 \cup l_{0,p}) \setminus \{l_0 \wedge l_{0,p}\} .$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

In diesem Fall ist die Verbindungsgerade  $l$  entweder gleich  $l_0$  oder gleich  $l_{0,p}$ . Also gilt  $l \in \overline{X(p)}$ . Wenn  $l_0 \wedge l_{0,p} \in Y(q)^{x^{-1}}$  ist, dann gilt  $l \in \left( \overline{\mathcal{L}}_{(l_0 \wedge l_{0,p})^{x^{-1}}} \right)_{Y(q)^{x^{-1}}}$ . Folglich liegt die Gerade  $l$  ganz in  $\overline{Y(q)^{x^{-1}}}$ . Es gilt dann

$$l \subset \overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}} \subset \overline{\overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}} = \overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}.$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil  $X(p)$  und  $Y(q)^{x^{-1}}$  offen sind. Wenn  $l_0 \wedge l_{0,p} \notin Y(q)^{x^{-1}}$  ist, dann gilt  $l \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}} = \{(l_0 \wedge l_{0,p})^{x^{-1}}\}$ . Folglich gilt  $l \not\subset \overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}$ . Aus  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}} \subseteq \overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}$  folgt, dass in diesem Fall  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  keine ganze Gerade aus  $\overline{\mathcal{L}}$  enthält.

- (iii) Den Fall  $l_0 \wedge l_{0,p} \in (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}} \setminus \{(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}\}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \notin l_0 \cup l_{0,p}$  erhalten wir aus (ii), indem wir statt  $\psi$  die Lineation  $\psi^{-1}$  betrachten.
- (iv) Nun sei  $l_0 \wedge l_{0,p} \notin (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \notin l_0 \cup l_{0,p}$ . Wenn  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in X(p)$  und  $(l_0 \wedge l_{0,p})^x \in Y(q)$  gilt, dann liegt die Verbindungsgerade  $l$  in  $\overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}$ . Wenn  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \notin X(p)$  oder  $(l_0 \wedge l_{0,p})^x \notin Y(q)$  gilt, dann liegt  $l$  nicht in  $\overline{X(p)}$  oder nicht in  $\overline{Y(q)}$ , da  $l_0 \wedge l_{0,p} \notin (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \notin l_0 \cup l_{0,p}$  vorausgesetzt ist. Da  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}} \subseteq \overline{X(p)} \cap \overline{Y(q)^{x^{-1}}}$  gilt, folgt daraus  $l \not\subset \overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$ .
- (v) Sei  $l_0 \wedge l_{0,p} \in (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}} \setminus \{(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}\}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in l_0 \cup l_{0,p} \setminus \{(l_0 \wedge l_{0,p})^x\}$ . Wir zeigen nun, dass es in diesem Fall auf der Verbindungsgeraden  $l = (l_0 \wedge l_{0,p}) \vee (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$  immer Punkte gibt, die nicht in  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  liegen. Sei  $\{g\} = \{l_0, l_{0,p}\} \setminus \{l\}$  und sei  $\{h\} = \{l_0^{x^{-1}}, l_{0,q}^{x^{-1}}\} \setminus \{l\}$ . Wir wählen  $x \in X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$ . Für eine Teilmenge  $U$  von  $\overline{P}$  mit  $x \in U$  sei  ${}_x U$  die Zusammenhangskomponente von  $x$  in  $U$ . Nach der Definition von Halbebenen gilt

$$\begin{aligned} X(p) &= {}_x (\overline{P} \setminus (l \cup g)) \quad \text{und} \\ Y(q)^{x^{-1}} &= {}_x (\overline{P} \setminus (l \cup h)) . \end{aligned}$$

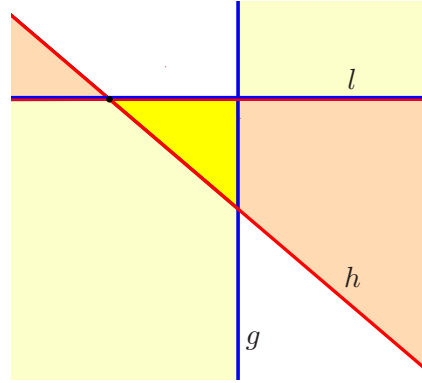
Folglich gilt

$$X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} = {}_x (\overline{P} \setminus (l \cup g \cup h)) \subset {}_x (\overline{P} \setminus (g \cup h)) .$$

Hieraus folgt

$$\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}} \subset \overline{{}_x (\overline{P} \setminus (g \cup h))} .$$

Die Geraden  $h$  und  $g$  teilen die Gerade  $l$  in zwei nicht leere Zusammenhangskomponenten, da die Schnittpunkte nicht zusammenfallen. Nur eine dieser beiden Zusammenhangskomponenten liegt in  ${}_x (\overline{P} \setminus (g \cup h))$ . Folglich gilt  $l \not\subset \overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$ .


 Abbildung 8:  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  für  $\{l_0^{x^{-1}}, l_{0,q}^{x^{-1}}\} \cap \{l_0, l_{0,p}\} = l$ 

Insgesamt erhalten wir, dass in den Fällen (i), (ii), (iii) und (iv) genau dann eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}$  in  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  liegt, wenn der im Lemma mit (i), (ii), (iii) oder (iv) bezeichnete Fall vorliegt. Im Fall (v) gibt es niemals eine ganze Gerade aus  $\overline{\mathcal{L}}$  in  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$ . ■

**4.5.7 Lemma.** Seien  $X, Y \in \{S, F\}$  und  $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  und  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R} \setminus \{A^\lambda \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}\}$ . Sei  $\psi = (\alpha_{XY}(\chi))|_{X(p)}^{Y(q)} \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ . Wenn es eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}$  gibt mit  $l \subset \overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$ , dann gilt  $\psi \in \Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}_k})$ . (Wir schreiben hier, wenn  $p \in \{\infty, -\infty\}$  oder wenn  $q \in \{\infty, -\infty\}$  gilt, statt  $g_\infty$  einfach  $l_{0,\infty} = l_{0,-\infty}$ .)

**Beweis.** Seien  $X, Y \in \{S, F\}$  und  $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  und  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{R} \setminus \{A^\lambda \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}\}$ . Sei  $\psi = (\alpha_{XY}(\chi))|_{X(p)}^{Y(q)} \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ . Sei  $l$  eine Gerade aus  $\overline{\mathcal{L}}$  mit  $l \subset \overline{X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}}$  ist. Dann gilt einer der in 4.5.6 aufgelisteten Fälle (i), (ii), (iii) oder (iv). Wir nehmen an, dass  $\psi \notin \Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}_k})$ . Dann gibt es nach 4.5.5 maximale desarguessche Halbebenen  $\tilde{X}(\tilde{p})$  und  $\tilde{Y}(\tilde{q})$  derart, dass  $(\tilde{X}(\tilde{p}), \tilde{Y}(\tilde{q})) \neq (X(p), Y(q))$  und  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \subset \tilde{X}(\tilde{p}) \cap \tilde{Y}(\tilde{q})^{x^{-1}}$ . Wir untersuchen nun, welche Geraden  $g \in \overline{\mathcal{L}}$  Kandidaten für  $l_{0,\tilde{p}}$  bzw. für  $l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}}$  sind.

Sei  $g \in \overline{\mathcal{L}}$  beliebig gewählt. Es gilt  $g \cap X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \neq \emptyset$ , wenn  $g \wedge l$  nicht der Schnittpunkt von zwei (verschiedenen) Geraden ist, die  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  beranden, das heißt  $g \wedge l$  nicht der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Geraden aus der Menge  $\{l_0, l_{0,p}, l_0^{x^{-1}}, l_{0,q}^{x^{-1}}\}$  ist. Alle Geraden  $g$  mit der Eigenschaft  $g \cap X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \neq \emptyset$  kommen als Kandidaten für  $l_{0,\tilde{p}}$  bzw.  $l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}}$  nicht in Frage, weil sonst die Inklusion

$$X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \subset \tilde{X}(\tilde{p}) \cap \tilde{Y}(\tilde{q})^{x^{-1}}$$

nicht erfüllt wäre, denn für  $g \in \{l_{0,\tilde{p}}, l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}}\}$  gilt  $g \cap (X(\tilde{p}) \cap Y(\tilde{q})^{x^{-1}}) = \emptyset$ . Damit  $(\tilde{X}(\tilde{p}), \tilde{Y}(\tilde{q})) \neq (X(p), Y(q))$  gilt, muss  $(p, q) \neq (\tilde{p}, \tilde{q})$  gelten. Sei  $A := (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$  und  $B := l_0 \wedge l_{0,p}$ . Insgesamt erhalten wir, dass nur noch solche Geraden des Büschels  $\overline{\mathcal{L}}_B$  welche

#### 4. Die Moulton-Ebenen

$X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  nicht schneiden, als Kandidaten für  $l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}}$  in Frage kommen, und es sind nur noch Geraden des Büschels  $\overline{\mathcal{L}}_A$ , welche  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  nicht schneiden, Kandidaten für  $l_{0,\tilde{p}}$ .

In den folgenden Abbildungen werden die Geraden  $l_0$  und  $l_{0,p}$  immer blau und die Geraden  $l_0^{x^{-1}}$  und  $l_{0,q}^{x^{-1}}$  immer rot dargestellt.

- (i) Sei  $A = B$ . Dann ist  $l$  eine Gerade aus dem Büschel  $\overline{\mathcal{L}}_A = \overline{\mathcal{L}}_B$ . Wenn  $l \wedge l_{0,\tilde{p}} = l_0 \wedge l_{0,p}$  ist, dann gilt  $l_{0,\tilde{p}} = l_{0,p}$ . Wenn  $l \wedge l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}} = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$  gilt, dann folgt  $l_{0,\tilde{q}} = l_{0,q}$ . Insgesamt folgt  $X(p) = \tilde{X}(\tilde{p})$  und  $Y(q) = \tilde{Y}(\tilde{q})$ , ein Widerspruch. Zur Veranschaulichung sehen wir in Abbildung 9 die verschiedenen Möglichkeiten für  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$ . Wenn die Geraden  $l_0^{x^{-1}}$  und  $l_{0,q}^{x^{-1}}$  beide steigend oder beide fallend sind, kann es vorkommen, dass  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  nicht eine Halbebene sondern die Vereinigung von zwei Halbebenen ist.

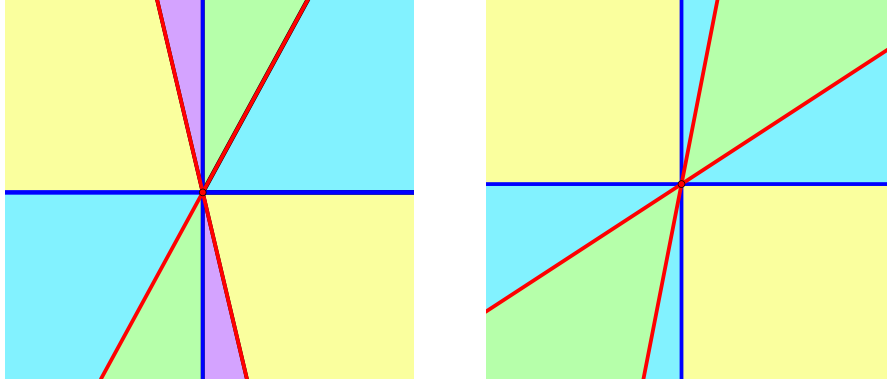
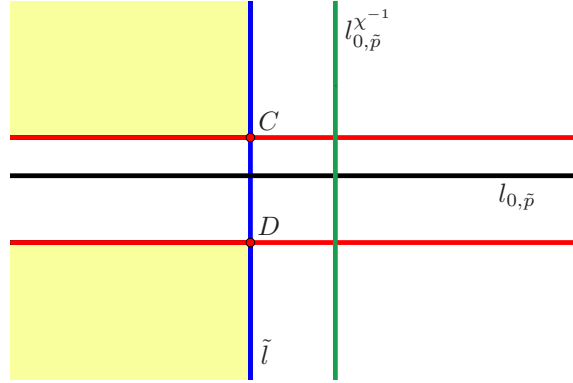


Abbildung 9:  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  für  $l_0 \wedge l_{0,p} = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}}$

- (ii) Sei  $A = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in (l_0 \cup l_{0,p}) \setminus \{l_0 \wedge l_{0,p}\}$  und  $B = l_0 \wedge l_{0,p} \notin (l_0 \cup l_{0,q})^{x^{-1}}$ . Wir bezeichnen  $\tilde{l} \in \{l_0, l_{0,p}\} \setminus \{l\}$  und sei  $C = l_{0,q}^{x^{-1}} \wedge \tilde{l}$  und  $D = l_0^{x^{-1}} \wedge \tilde{l}$ . Wir wollen einsehen, dass jeder Kandidat  $l_{0,\tilde{p}} \neq l_{0,p}$  bzw.  $l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}} \neq l_{0,q}^{x^{-1}}$  mit  $l_0$  bzw.  $l_0^{x^{-1}}$  die Punktmenge  $\overline{P}$  derart in zwei Halbebenen teilt, dass die Menge  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  nicht ganz in einer der beiden enthalten ist. Dazu führen wir die Situation auf die in der Abbildung 10 gezeigten Situation zurück: Da die Punkte  $A$ ,  $C$  und  $D$  ein nicht ausgeartetes Dreieck bilden und  $B$  auf der Verbindungsgeraden  $C \vee D$  liegt, gibt es eine Abbildung  $\gamma \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  mit  $A^\gamma = x_\infty$ ,  $B^\gamma = y_\infty$ ,  $C^\gamma = [0, 1, 1]$ ,  $D^\gamma = [0, -1, 1]$  und  $X(p)^\gamma = H_L$ . Wenn  $A \in l_{0,p}$  ist, dann gilt  $l_0^\gamma = l_0$  und  $l_{0,p}^\gamma = g_\infty$ . Wenn  $A \in l_0$  ist, dann gilt  $l_0^\gamma = g_\infty$  und  $l_{0,p}^\gamma = l_0$ . In beiden Fällen gilt also

$$(X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma = \{[x, y, 0] \mid x < 0, y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\} .$$

Die Kandidaten für  $l_{0,\tilde{p}}$  werden durch  $\gamma$  auf die Geradenmenge  $\{l_{0,z} \mid z \in ]-1, 1[ \}$  abgebildet. Wenn  $A \in l_{0,p}$  ist, dann gilt  $\tilde{X}(\tilde{p})^\gamma \in \{S(\tilde{p}), F(\tilde{p})\}$  für  $\tilde{p} \in ]-1, 1[$ . Wenn


 Abbildung 10:  $l = l_{0,p} = g_\infty$  und  $A = x_\infty$ 

$A \in l_0$  ist, dann gilt

$$(\tilde{X}(\tilde{p}))^\gamma \in \{ \{ [x, y, 1] \mid y - \tilde{p} > 0 \}, \{ [x, y, 1] \mid y - \tilde{p} < 0 \} \} .$$

Folglich liegt in beiden Fällen für alle  $\tilde{p} \in ]-1, 1[$  der Punkt  $[-1, -2, 1]$  in der Menge

$$\tilde{X}(\tilde{p}) \cap (X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$$

und der Punkt  $[-1, 2, 1]$  in der Menge

$$(P \setminus \tilde{X}(\tilde{p})) \cap (X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$$

oder umgekehrt. Also gibt es kein  $\tilde{p} \in ]-1, 1[$  und kein  $\tilde{X} \in \{S, F\}$  so, dass die Inklusion  $(X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma \subset \tilde{X}(\tilde{p})^\gamma$  erfüllt ist.

Kandidaten für  $l_{0, \tilde{q}}^{x^{-1}}$  sind die Geraden durch  $B$ , welche das Gebiet  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  nicht schneiden. Diese werden durch  $\gamma$  auf die Menge

$$\{l_z \mid z > 0\} \cup \{g_\infty\}$$

abgebildet. Folglich gilt  $(\tilde{Y}(\tilde{q})^{x^{-1}})^\gamma \in \{U, \overline{P} \setminus \overline{U}\}$  mit

$$U \in \{ \{ [x, y, 1] \mid x \in \mathbb{R}, y > -1 \} \} \\ \cup \{ \{ [x, y, 1] \mid (x - z)(y + 1) > 0 \} \cup \{ [1, s, 0] \mid s > 0 \} \mid z > 0 \} .$$

Demnach gilt

$$[-1, 2, 1] \in \left( \tilde{Y}(\tilde{q})^{x^{-1}} \cap X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma \quad \text{und} \\ [-1, -2, 1] \in \left( \left( \overline{P} \setminus \overline{\tilde{Y}(\tilde{q})^{x^{-1}}} \right) \cap X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma$$

oder umgekehrt. Insgesamt erhalten wir, dass es keine Gerade  $l_{0, \tilde{q}}^{x^{-1}}$  im Büschel  $\overline{\mathcal{L}_B}$  und kein  $\tilde{Y} \in \{S, F\}$  derart gibt, dass die Inklusion  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \subset \tilde{Y}(\tilde{q})$  erfüllt ist.



#### 4. Die Moulton-Ebenen

- (iii) Sei  $l \in \{l_0, l_{0,q}\}$ . Es gelte  $(l_0 \wedge l_{0,p})^x \in l \setminus \{l_0 \wedge l_{0,q}\}$  und  $l \subset \overline{X(p)^x \cap Y(q)}$ . In diesem Fall erfüllt die Lineation  $\psi^{-1} = (\alpha_{YX}(\chi^{-1}))|_{Y(q)}^{X(p)}$  die Bedingungen von (ii). Da  $\psi$  genau dann maximal ist, wenn  $\psi^{-1}$  maximal ist gibt es auch in diesem Fall keine Halbebenen  $\tilde{X}(\tilde{p})$  und  $\tilde{Y}(\tilde{q})$  mit  $(\tilde{X}(\tilde{p}), \tilde{Y}(\tilde{q})) \neq (X(p), Y(q))$  derart, dass die gewünschte Inklusion erfüllt ist.
- (iv) Seien  $A = (l_0 \wedge l_{0,p})^x \in Y(q)$  und  $B = (l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in X(p)$ . Sei außerdem  $C := l_{0,q}^{x^{-1}} \wedge l_0$ ,  $C' := l_{0,q}^{x^{-1}} \wedge l_{0,p}$ ,  $D := l_0^{x^{-1}} \wedge l_{0,p}$  und  $D' := l_0^{x^{-1}} \wedge l_0$ . Es gibt es eine Abbildung  $\gamma \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  mit  $A^\gamma = [1, -1, 0] \in g_\infty$ ,  $B^\gamma = [0, 0, 1]$ ,  $D'^\gamma = [0, -1, 1]$  und  $C^\gamma = [0, 1, 1]$ . Denn da die Gruppe  $\text{PGL}_2 \mathbb{R}$  transitiv auf den Dreiecken wirkt, finden wir eine Abbildung  $\gamma_1 \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  derart, dass  $A^{\gamma_1} = [1, -1, 0]$ ,  $D'^{\gamma_1} = [0, -1, 1]$  und  $C^{\gamma_1} = [0, 1, 1]$  gilt. Alle Abbildungen aus  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$  der Form

$$\beta(e, b, c) := \begin{bmatrix} -b + e & b & c \\ 0 & e & c \\ 0 & c & e \end{bmatrix}$$

fixieren die Punkte  $[1, -1, 0]$ ,  $[0, -1, 1]$  und  $[0, 1, 1]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} [0, z, 1]^{\beta(e,b,c)} &= [0, ez + c, cz + e] \text{ und} \\ [1, y, 0]^{\beta(e,b,c)} &= [(e - b), b + ey, c(1 + y)] . \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} [0, z, 1]^{\beta(1,-y,-z)} &= [0, 0, 1] \text{ für } z \neq \pm 1 \text{ und} \\ [1, y, 0]^{\beta(1,-y,-z)} &= [1, 0, 0] \text{ für } y \neq -1 . \end{aligned}$$

Also können  $y$  und  $z$  so gewählt werden, dass  $\gamma := \gamma_1 \beta(1, -y, -z)$  die gewünschten Eigenschaften hat. Es gilt dann  $X(p)^\gamma = F(0)$ , weil  $A^\gamma \in X(p)^\gamma$  ist. Außerdem gilt  $C^\gamma = [0, 1, 1]$  und  $D'^\gamma = [0, -1, 1]$ . Weil  $A^\gamma \wedge B^\gamma \subset (X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$  ist, gilt

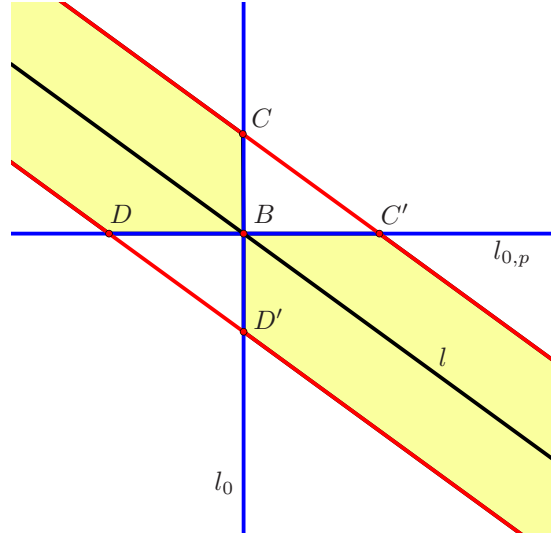
$$(X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma = \{[x, -x + t, 1] \mid t \in ]-1, 1[, x(-x + t) < 0\} .$$

Diese Situation ist in Abbildung 11 dargestellt. Die Kandidaten für  $l_{0,\tilde{p}}$  werden durch  $\gamma$  auf  $\overline{\mathcal{L}}_{[1,-1,0]} \setminus \{l_{-1,v} \mid v \in \{\infty\} \cup \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\}$  abgebildet. Sei also  $l_{0,\tilde{p}}^\gamma \in \{g_\infty, l_{-1,v}\}$  für ein  $v \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ , dann gilt

$$\tilde{X}(\tilde{p})^\gamma \in \{U, \overline{P} \setminus \overline{U}\} ,$$

mit

$$U \in \left\{ \begin{array}{l} H_L, U_v := \{[x, y, 1] \mid x(y + x - v) > 0\} \cup \{[1, t, 0] \mid t > -1\} , \\ \text{mit } v \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{array} \right\} .$$


 Abbildung 11:  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}}$  für  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{x^{-1}} \in X(p)$  und  $(l_0 \wedge l_{0,p})^x \in Y(q)$ 

Es gilt

$$\overline{P} \setminus \overline{U} = \begin{cases} H_R & \text{wenn } U = H_L \\ \{[x, y, 1] \mid x(y+x-v) < 0\} \cup \{1, t, 0 \mid t < -1\} & \text{wenn } U = U_v \end{cases}$$

Für  $W \in \{U, \overline{P} \setminus \overline{U}\}$  gilt

$$W \cap \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma = \begin{cases} \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma \cap H_R & \text{wenn } W = H_R \\ & \text{oder } W = U_v \text{ mit } v < -1 \\ \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma \cap H_L & \text{wenn } W = H_L \\ & \text{oder } W = U_v \text{ mit } v > 1 \end{cases}$$

Weil  $t \in ]-1, 1[$  und  $v \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$  ist, gilt für  $[x, -x+t, 1] \in (X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$  Folgendes:

$$\begin{aligned} [x, -x+t, 1] \in U_v &\iff x(t-v) > 0 \\ &\iff (x > 0 \text{ und } v < -1) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } v > 1) \end{aligned}$$

Da aber  $(X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$  einen nicht leeren Schnitt mit beiden Halbebenen  $H_R$  und  $H_L$  besitzt, erhalten wir, dass für keine Gerade  $l_{0,\tilde{p}} \in \overline{\mathcal{L}}_A$  und für kein  $\tilde{X} \in \{S, F\}$  die Inklusion  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \subset \tilde{X}(\tilde{p})$  erfüllt ist.

Nun betrachten wir die Kandidaten für  $l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}}$ . Diese werden durch  $\gamma$  auf die Menge  $\{l_{u,0} \mid u > 0\}$  abgebildet. Sei nun  $(l_{0,\tilde{q}}^{x^{-1}})^\gamma = l_{u,0}$  für ein  $u > 0$ , dann gilt  $\tilde{Y}(\tilde{q})^\gamma \in \{V, \overline{P} \setminus \overline{V}\}$  mit

$$V = \{[x, y, 1] \mid (y-x)(y+x+1) < 0\} \cup \{[1, t, 0] \mid -1 < t < 1\} \text{ .}$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Es gilt

$$V \cap \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma = \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma \cap H_R$$

und

$$\overline{P} \setminus \overline{V} \cap \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma = \left( X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \right)^\gamma \cap H_L .$$

Denn für  $[x, -x+t, 1] \in (X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$  gilt genau dann  $[x, -x+t, 1] \in V$ , wenn  $(-2x+t)(t+1) < 0$  ist. Da aber  $t \in ]-1, 1[$  gilt, folgt  $t+1 > 0$ . Insgesamt erhalten wir, dass  $[x, -x+t, 1]$  genau dann ein Element des Schnitts  $V \cap (X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}})^\gamma$  ist, wenn  $x > \frac{t}{2}$  gilt und zugleich entweder  $x > 0$  und  $x > t$  oder  $x < 0$  und  $x < t$  erfüllt ist. Die Bedingung  $x < 0$  und  $x < t$  und  $x > \frac{t}{2}$  führt zu einem Widerspruch. Insgesamt erhalten wir also, dass  $[x, -x+t, 1]$  genau dann in obigem Schnitt liegt, wenn  $x > 0$  und  $x > t$  gilt. Folglich gibt es keine Gerade  $l_{0,\tilde{q}} \in \overline{\mathcal{L}}_B$  und kein  $\tilde{Y} \in \{S, F\}$  derart, dass die Inklusion  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} \subset \tilde{Y}(\tilde{q})$  erfüllt ist.

In jedem der vier Fälle erhalten wir  $X(p) \cap Y(q)^{x^{-1}} = \tilde{X}(\tilde{p}) \cap \tilde{Y}(\tilde{q})^{x^{-1}}$  und somit einen Widerspruch zur Annahme  $\psi \notin \Psi_{max}(\overline{\mathcal{M}}_k)$ . Also ist die Annahme falsch und die Aussage des Lemmas bewiesen. ■

### 4.6. Beispiele partieller Lineationen von $\overline{\mathcal{M}}_k$

Da sich eine desarguessche Unterebene von  $\overline{\mathcal{M}}_k$  oft auf verschiedene Weisen zu einer desarguesschen Halbebene der Moulton-Ebene fortsetzen lässt, ist die Fortsetzung einer partiellen Lineation von  $\overline{\mathcal{M}}_k$  zu einer maximalen partiellen Lineation im Allgemeinen nicht eindeutig. Das sehen wir im nächsten Beispiel:

**4.6.1 Beispiel.** Wir betrachten die desarguessche Unterebene  $\mathcal{U} := (U, (\mathcal{L}_k)_U)$  mit

$$U := \{[x, y, 1] \mid x < 0, y > 0\} = F(0) \cap H_L .$$

Außerdem die Abbildung  $A^\lambda$  mit

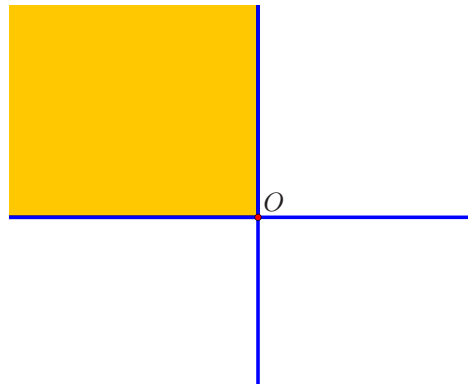


Abbildung 12: Die Unterebene  $\mathcal{U}$  mit  $O = [0, 0, 1]$  aus Beispiel 4.6.1.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung  $A^\lambda$  induziert auf der Punktmenge eine Spiegelung an der  $x$ -Achse (d.h. der Geraden  $l_{0,0}$ ). Deswegen ist

$$v := A^\lambda|_U \in \Psi(\mathcal{M}_k)$$

eine partielle Lineation. Da  $\det(A) < 0$  ist, wissen wir nach 4.2.1 und 4.2.19, dass sich die partielle Lineation  $v$  nicht zu einem Automorphismus fortsetzen lässt. Die Einschränkung von  $A^\lambda$  auf die linke Halbebene  $H_L$  ist eine Fortsetzung von  $v$  auf ein maximales Definitionsgebiet. Das Definitionsgebiet kann nach 4.5.2 auch in folgender Weise auf  $F(p)$  für  $p < 0$  fortgesetzt werden: Die Lineation

$$\tilde{v}_p := (A^\lambda \llbracket 1|k^{-1} \rrbracket)|_{F(p)} \text{ mit } p < 0$$

ist eine Fortsetzung von  $v$  und die Ebenen  $F(p)$  sind maximale desarguessche Halbebenen von  $\mathcal{M}_k$ . Folglich gilt

$$\{\tilde{v}_p \mid p < 0\} \cup \{A^\lambda|_{H_L}\} \subset \Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k}) .$$

Maximale Definitionsgebiete von partiellen Lineationen der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$  sind nicht immer Halbebenen, also eine Zusammenhangskomponente des Komplements zweier Geraden, wie wir an folgendem Beispiel sehen:

**4.6.2 Beispiel.** Wir betrachten in  $P$  die Drehung um  $\frac{1}{4}\pi$  mit Fixpunkt  $[0, 0, 1]$ . Sei

$$\gamma := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und sei

$$V := \{[x, y, 1] \mid x < 0, y > x\} .$$

Dann gilt  $\gamma|_V \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ . Wir wollen nun einsehen, dass  $\gamma|_V \in \Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k})$  ist. Es gilt  $V \subset H_L$  und  $V^\gamma \subset H_L$ . Da  $\gamma$  nicht die Gestalt  $A^\lambda$  mit  $A \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$  hat, lässt sich die partielle Lineation  $\gamma$  nicht zu einem Automorphismus fortsetzen. Nach 4.2.17 hat jede Fortsetzung von  $\gamma$  ein desarguessches Definitionsgebiet. Da die einzige maximale desarguessche Halbebene die  $V$  enthält ( $H_L, \mathcal{L}_{H_L}$ ) ist, sind die einzigen Kandidaten für eine Fortsetzung die Punkte in  $H_L \setminus V$ . Wir betrachten diese Punkte als Schnittpunkte von steigenden Geraden  $l_{s,t}$  mit  $0 < s < 1$ . Die Bilder dieser Geraden unter  $\gamma$  sind steigende Geraden. Folglich induziert  $\gamma|_V$  auf den Schnittpunkten dieser Geraden nach 4.1.16 die Abbildung  $\gamma|_{H_L \setminus V}$ . Es folgt  $\gamma|_V \in \Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k})$ , da  $H_L$  die einzige maximale desarguessche Halbebene ist, welche  $V^\gamma$  enthält und  $(H_L \setminus V)^\gamma \subset H_R$  gilt.

#### 4. Die Moulton-Ebenen

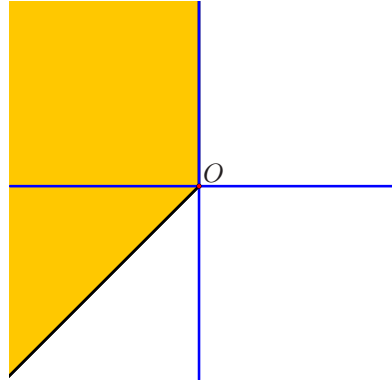


Abbildung 13: Die Definitionsmenge  $V$  mit  $O = [0, 0, 1]$  aus Beispiel 4.6.2

Die folgenden Beispiele verdeutlichen, dass man auch bei den partiellen Lineationen der Gestalt  $(\alpha_{XY}(\chi))\big|_{X(p)}^{Y(q)}$  nicht immer allein am Definitionsgebiet erkennt, ob dieses maximal ist. Wir stellen im Folgenden zwei Lineationen  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  dieser Gestalt vor, für die  $\text{dom}(\psi) = \text{dom}(\tilde{\psi})$  gilt, aber dennoch ist  $\psi \in \Psi_{\max}(\mathcal{M}_k) \not\cong \tilde{\psi}$ .

**4.6.3 Beispiel.** Wir betrachten die Halbebene  $S(0)$  und die Lineation

$$\psi = (\alpha_{SS}(\chi))\big|_{S(0)}^{S(0)}$$

mit

$$\chi = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\chi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung  $\chi^{-1}$  ist die Hintereinanderausführung einer Drehung um  $\frac{\pi}{4}$  mit Fixpunkt  $[0, 0, 1]$  und einer Translation, welche den Punkt  $[0, 0, 1]$  auf den Punkt  $[-1, 2, 1]$  abbildet. Dann gilt  $l_{0,0}^{\chi^{-1}} = l_{-1,1}$  und  $l_{0,0}^{\chi^{-1}} = l_{1,3}$ . Folglich gilt

$$(S(0))^{\chi^{-1}} = \{[x, y, 1] \mid (y - x - 3)(y + x - 1) > 0\} \cup \{[s, 1, 0] \mid s \in ]-1, 1[ \}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{dom}(\psi) &= S(0) \cap (S(0))^{\chi^{-1}} \\ &= \{[x, y, 1] \mid (y - x - 3)(y + x - 1) > 0, xy > 0\} \cup \{[s, 1, 0] \mid s \in ]0, 1[ \}. \end{aligned}$$

Dieses Definitionsgebiet ist maximal, denn wenn es sich noch vergrößern ließe, gäbe es nach 4.5.5 Halbebenen  $X(p)$  und  $Y(q)$  so dass

$$S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}} \subset X(p) \cap (Y(q))^{x^{-1}}$$

gelte. Jede Gerade  $l_{0,\tilde{p}}$  mit  $\tilde{p} \in \mathbb{R} \setminus [1, 3]$  hat einen nicht leeren Schnitt mit  $S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}}$ . Für  $\tilde{p} \in [1, 3]$  gibt es unter der Geraden  $l_{0,\tilde{p}}$  in der linken und in der rechten Halbebene Punkte von  $S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}}$ . Folglich ist  $S(0)$  die einzige maximale desarguessche Halbebene in der  $S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}}$  enthalten ist. Nun betrachten wir  $l_{0,q}^{x^{-1}}$  für  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Jede dieser Geraden hat die gleiche Steigung wie  $l_{0,0}^{x^{-1}}$ , weil  $\chi^{-1}$  die Hintereinanderausführung einer Drehung um  $\frac{\pi}{4}$  mit Fixpunkt  $[0, 0, 1]$  und einer Translation ist. Folglich haben alle Geraden  $l_{0,p}^{x^{-1}}$  für  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  einen nicht leeren Schnitt mit  $S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}}$ . Insgesamt haben wir das Ergebnis, dass aus der Bedingung  $S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}} \subset X(p) \cap (Y(q))^{x^{-1}}$  die Gleichungen  $X = Y = S$  und  $q = p = 0$  folgen.

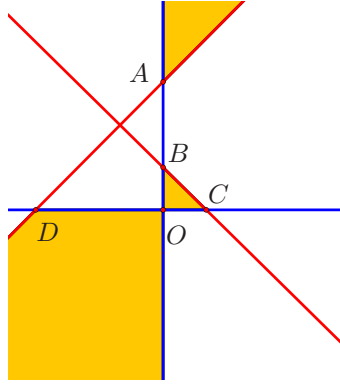


Abbildung 14:  $S(0) \cap (S(0))^{x^{-1}}$  mit  $O = [0, 0, 1]$ ,  $A = [0, 3, 1]$ ,  $B = [0, 1, 1]$ ,  $C = [1, 0, 1]$ ,  $D = [-3, 0, 1]$

#### 4.6.4 Beispiel. Wir betrachten die Lineation

$$\tilde{\psi} = (\alpha_{SS}(\tilde{\chi}))|_{S(0)}^{S(1)}$$

mit

$$\tilde{\chi}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt  $a := [1, 0, 0]^{\tilde{\chi}^{-1}} = [-2, 1, 1]$  und  $b := [0, 1, 1]^{\tilde{\chi}^{-1}} = [-1, 2, 1]$ . Wir berechnen die Verbindungsgerade und erhalten  $a \vee b = l_{0,1}^{\tilde{\chi}^{-1}} = l_{1,3}$ . Ferner gilt  $c := [0, 0, 1]^{\tilde{\chi}^{-1}} = [0, 1, 1]$ . Also folgt  $c \vee b = l_0^{\tilde{\chi}^{-1}} = l_{-1,1}$ . Wir berechnen nun das Urbild eines Punktes in  $S(1)$ . Es gilt  $[-1, 0, 1]^{\tilde{\chi}^{-1}} = [-1, 1, 1]$ . Folglich gilt

$$\text{dom}(\tilde{\psi}) = S(0) \cap S(1)^{\tilde{\chi}^{-1}} = S(0) \cap S(0)^{x^{-1}}$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

mit  $\chi$  aus 4.6.3. Andererseits gilt  $l_{0,0}^{\chi^{-1}} = a \vee c = l_{0,1}$ . Also gilt

$$(S(0))^{\chi^{-1}} = \{[x, y, 1] \mid (y-1)(y+x) > 0\} \cup \{[s, 1, 0] \mid s \in ]-1, \infty[ \} .$$

Daher erhalten wir

$$S(0) \cap (S(0))^{\chi^{-1}} = \{[x, y, 1] \mid (y-1)(y+x) > 0, xy > 0\} \cup \{[s, 1, 0] \mid s \in ]0, \infty[ \} .$$

Somit erhalten wir

$$S(0) \cap S(1)^{\tilde{\chi}^{-1}} \subset S(0) \cap (S(0))^{\tilde{\chi}^{-1}} .$$

Folglich ist die Lineation  $(\alpha_{SS}(\tilde{\chi}))|_{S(0)}^{S(0)}$  eine Fortsetzung von  $\tilde{\psi}$  und es gilt  $\tilde{\psi} \notin \Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k})$ .

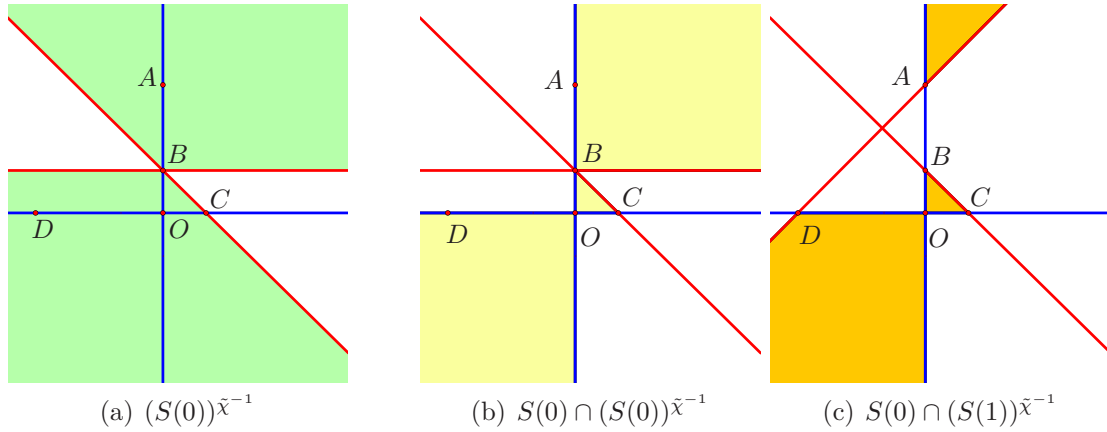


Abbildung 15:  $O = [0, 0, 1]$ ,  $A = [0, 3, 1]$ ,  $B = [0, 1, 1]$ ,  $C = [1, 0, 1]$ ,  $D = [-3, 0, 1]$ .

Die Menge  $\Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k})$  erfüllt nicht die Verknüpfungsvoraussetzung aus Definition 1.7.6. Es gibt also Produkte von maximalen partiellen Lineationen von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  in  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$ , die sich nicht eindeutig zu einem Element aus  $\Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k})$  fortsetzen lassen, wie wir an folgendem Beispiel sehen:

**4.6.5 Beispiel.** Wir betrachten zuerst die Wirkung von

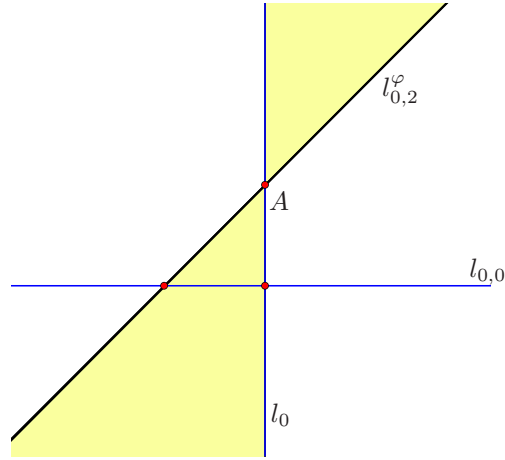
$$\varphi := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

auf der Punktmenge  $\overline{P}$ . Für  $[x, y, z] \in \overline{P}$  gilt

$$[x, y, z]^\varphi = [x, x+y, z] .$$

Folglich gilt

$$l_{0,2}^\varphi = l_{1,2} .$$


 Abbildung 16:  $S(2)^\varphi$  mit  $A = [0, 2, 1]$ 

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} H_L^\varphi &= H_L, \\ H_R^\varphi &= H_R \end{aligned}$$

und

$$S(2)^\varphi = \left\{ [x, y, 1] \in P \mid \begin{array}{ll} y > x + 2 & \text{für } x > 0 \\ y < x + 2 & \text{für } x < 0 \end{array} \right\} \cup \{ [1, s, 0] \mid s > 1 \} \subseteq S(2).$$

Nach 4.5.3 gilt  $\varphi|_{S(2)} = \alpha_{SS}(\varphi) \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ . Da  $S(2)$  eine maximale desarguessche Unterebene von  $\mathcal{M}_k$  ist und sich die Lineation nicht zu einem Automorphismus fortsetzen lässt (vgl. 4.2.1 und 4.2.19), gilt  $\varphi|_{S(2)} \in \Psi_{\max}(\mathcal{M}_k)$ .

Als nächstes betrachten wir die Abbildung  $A^\lambda$  aus Beispiel 4.6.1. Die Abbildung  $A^\lambda|_{H_R}$  ist eine maximale partielle Lineation von  $\mathcal{M}_k$ , da  $H_R$  eine maximale desarguessche Unterebene ist und  $A^\lambda$  sich wegen  $\det(A) < 0$  nicht zu einem Automorphismus fortsetzen lässt. Da  $S(2)^\varphi \cap H_R \neq \emptyset$  ist, ist die Verknüpfung von  $\varphi|_{S(2)}$  und  $A^\lambda|_{H_R}$  in  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  definiert (vgl. dazu Definition 1.4.6) und es gilt

$$\varphi|_{S(2)} \diamond A^\lambda|_{H_R} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Big|_{S(2) \cap H_R}.$$

Als nächstes betrachten wir die Wirkung von

$$\tilde{\varphi} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



#### 4. Die Moulton-Ebenen

auf  $\overline{P}$ . Für  $[x, y, z] \in \overline{P}$  gilt

$$[x, y, z]^{\tilde{\varphi}} = [x, -x - y, z] .$$

Also folgt

$$l_{0,2}^{\tilde{\varphi}} = l_{-1,-2}$$

und insgesamt gilt

$$H_L^{\tilde{\varphi}} = H_L$$

$$H_R^{\tilde{\varphi}} = H_R$$

sowie

$$S(2)^{\tilde{\varphi}} = \{[x, y, 1] \in P \mid (y + x + 2)x < 0\} \cup \{[1, s, 0] \mid s < -1\} \subseteq F(-2) .$$

Mit der in 4.1.7 definierten Abbildung  $\Lambda_k$  erhalten wir nach 4.5.2, dass

$$\alpha_{SF}(\tilde{\varphi}\Lambda_k^{-1})|_{H_R} = \tilde{\varphi}\Lambda_k^{-1}[[1|k^{-1}]]^{-1}|_{H_R} = \tilde{\varphi}|_{H_R}$$

gilt.

Also sind  $\tilde{\varphi}|_{H_R}$  und  $\alpha_{SF}(\tilde{\varphi}\Lambda_k^{-1})|_{S(2)}^{F(-2)} = \alpha_{SF}(\tilde{\varphi}\Lambda_k^{-1})|_{S(2)}$  Elemente von  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k})$  und Fortsetzungen von  $\varphi|_{S(2)} \diamond A^\lambda|_{H_R}$ . Da  $H_R$  und  $S(2)$  maximale desarguessche Ebenen sind, sind beide Lineationen maximal.

### 4.7. Endomorphismen-Halbgruppen von Unterebenen

Sei  $\mathcal{U}_k := (U, (\mathcal{L}_k)_U)$  eine Unterebene von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ . Wenn  $\mathcal{U}_k$  nicht desarguessch ist, so lässt sich nach Satz 4.2.17 jeder Endomorphismus von  $\mathcal{U}_k$  zu einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  fortsetzen. Ist  $\mathcal{U}_k$  desarguessch, so liegt  $\mathcal{U}_k$  in einer desarguesschen Halbebene der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$  und lässt sich mit einer geeignet gewählten Abbildung  $[[1|c(X)]]_{\iota_k}$  aus 4.5.2 in die reelle projektive Ebene abbilden. Dort sind die Endomorphismen nach dem lokalen Fundamentalsatz von LÖWEN [31] bekannt. Insgesamt erhalten wir aus 4.5.5 das folgende Korollar:

**4.7.1 Korollar.** Sei  $\mathcal{U}_k = (U_k, \mathcal{L}_k|_{U_k})$  eine offene Unterebene von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ . Falls  $\mathcal{U}_k$  nicht desarguessch ist, gilt

$$\text{End}(\mathcal{U}_k) = \left\{ \psi \in \Sigma \mid U_k^\psi \subseteq U_k \right\} .$$

Ansonsten gibt es ein  $X \in \{S, F\}$  und ein  $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  so, dass  $U_k \subseteq X(p)$  ist. In diesem Fall gilt

$$\text{End}(\mathcal{U}_k) \cong \text{End}(\mathcal{U}_k^{[[1|c(X)]]_{\iota_k}}) = \left\{ \psi \in \text{Aut}(\mathcal{P}_2\mathbb{R}) \mid (U_k^{[[1|c(X)]]_{\iota_k}})^\psi \subseteq U_k^{[[1|c(X)]]_{\iota_k}} \right\}$$

mit  $c(X)$  wie in 4.5.2.

#### 4.7. Endomorphismen-Halbgruppen von Unterebenen

Wir betrachten im Folgenden Beispiele von nicht desarguesschen Unterebenen. Als erstes Beispiel betrachten wir im radialen Modell  $\mathcal{M}(s)$  mit  $s > 0$  die schon von SEMMLER in [60] betrachtete Unterebene  $\mathcal{D} := (D, (\mathcal{L}_f)_D)$  mit

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} .$$

Wir können hier das Ergebnis [60, Satz 4.5] von SEMMLER deutlich präzisieren.

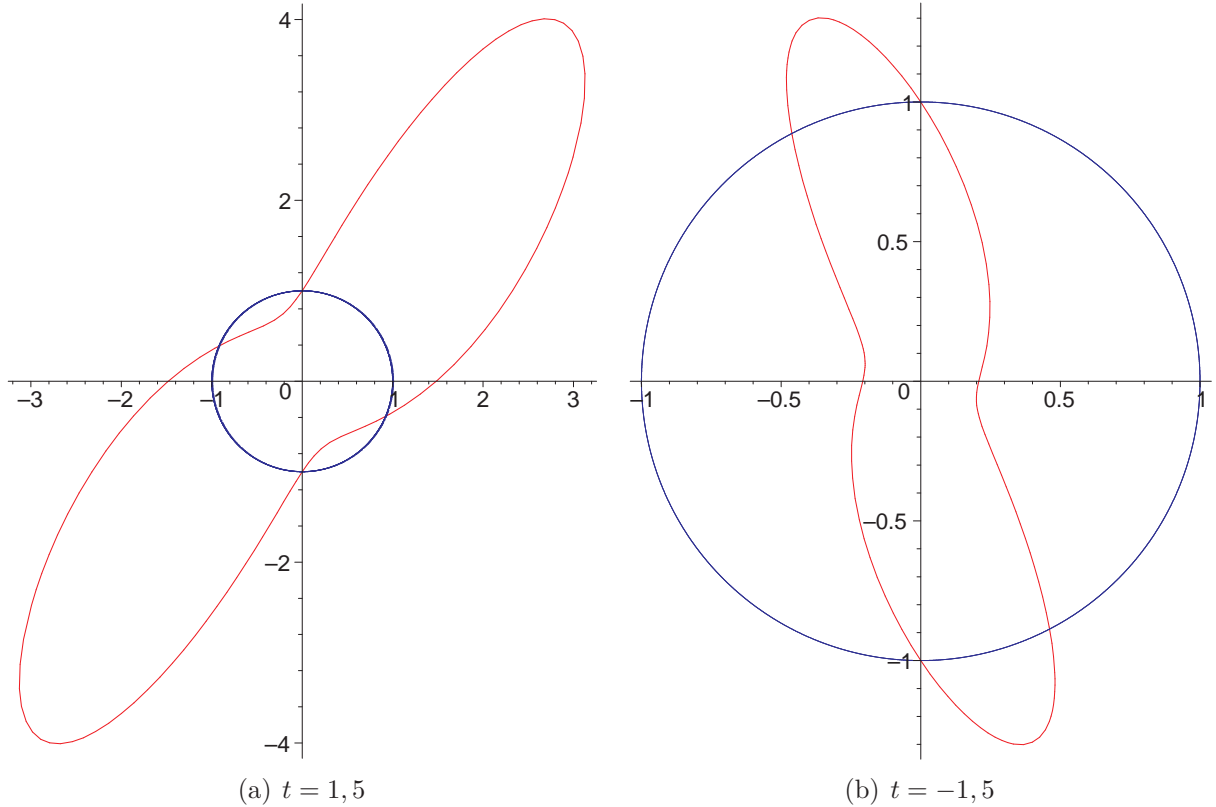


Abbildung 17: Bilder vom Rand von  $D$  unter  $\varepsilon_t$

**4.7.2 Lemma.** *Jedes Bild des Rands  $\partial D$  von  $D$  unter einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}(s)}$  ist beschränkt. Für  $\sigma \in \Sigma(s)$  sei  $r_{\max}(\sigma) := \max \{|z| \mid z \in (\partial D)^\sigma\}$ . Die Endomorphismen-Halbgruppe ist die folgende vierdimensionale Halbgruppe:*

$$\text{End}(\mathcal{D}) = \{(\sigma\eta_{t_m})|_D \mid \sigma \in \langle \varepsilon_t, \xi_u, \rho_r \text{ mit } t, r \in \mathbb{R}, u > 0 \rangle, t_m \leq -\ln(r_{\max}(\sigma))\}$$

**Beweis.** In der Ebene  $\overline{\mathcal{M}(s)}$  ist die Ferngerade eine Fixgerade unter allen Automorphismen. Da der Rand  $\partial D$  kompakt ist, ist also auch für jeden Automorphismus  $\sigma \in \Sigma(s)$  das Bild  $(\partial D)^\sigma$  beschränkt. Jede Lineation  $(\sigma\eta_{t_m})|_D$  aus obiger Menge ist ein Endomorphismus von  $\mathcal{D}$ , denn der Punkt 0 ist ein Fixpunkt und das Bild des Randes  $\partial D$  unter  $\sigma$  liegt

#### 4. Die Moulton-Ebenen

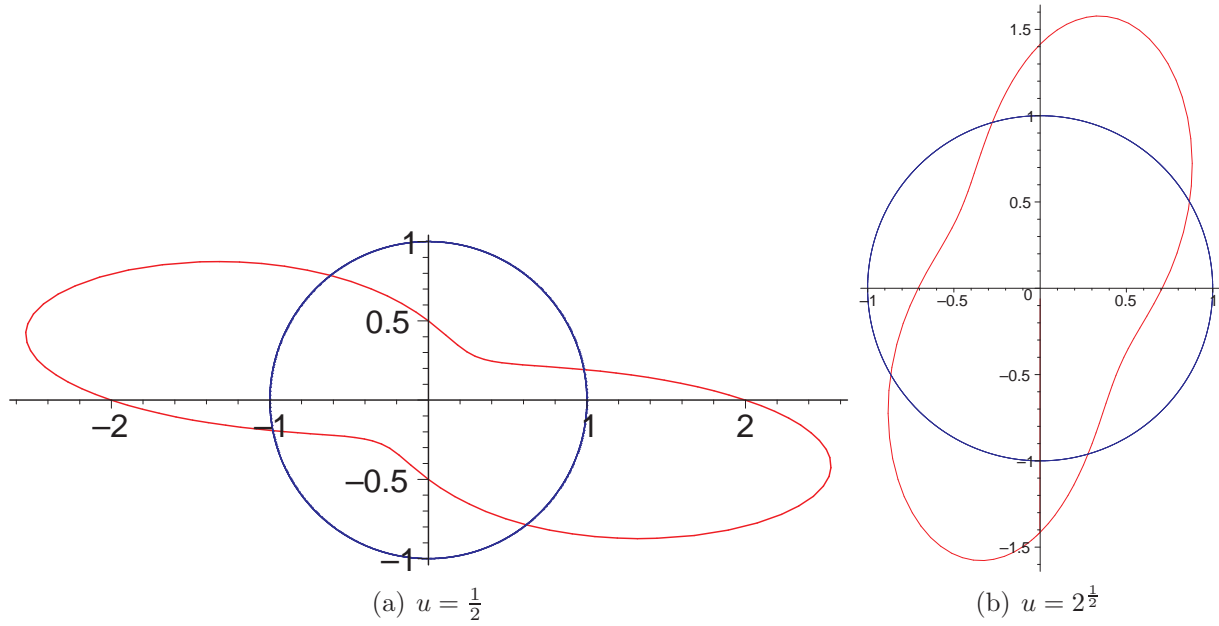


Abbildung 18: Bilder vom Rand von  $D$  unter  $\xi_u$

im Kreis mit Radius  $r_{max}(\sigma)$ . Dieser Kreis wird von der zentrischen Streckung  $\eta_{t_m}$  in  $\overline{D}$  abgebildet. Sei nun  $\delta \in \text{End}(\mathcal{D})$ . Die Unterebene  $\mathcal{D}$  ist nicht desarguessch, denn die drei Punkte  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$  und  $\frac{1}{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$  liegen in  $D$ . Die Bilder unter  $\alpha$  sind die drei Punkte  $[2, 0, 1]$ ,  $[2\frac{e^{s\frac{3}{4}\pi}}{\cos(\frac{3}{4}\pi)}, -1, 1]$  und  $[\frac{e^{s\frac{5}{4}\pi}}{\cos(\frac{5}{4}\pi)}, 1, 0]$ . Der Punkt  $\frac{1}{2}^\alpha$  liegt in der rechten Halbebene, die beiden anderen Punkte in der linken Halbebene. Die Verbindungsgerade  $\frac{1}{2}^\alpha \vee \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)^\alpha$  ist steigend, aber die Verbindungsgerade  $\frac{1}{2}^\alpha \vee \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}\right)^\alpha$  ist geknickt. Nach 4.2.13 und 4.2.17 folgt, dass die Unterebene  $\mathcal{D}^\alpha$  von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  nicht desarguessch ist. Folglich gibt es nach 4.7.1 einen Automorphismus  $\tilde{\delta} \in \Sigma(s)$  so, dass  $\delta = \tilde{\delta}|_D$ . Die Automorphismen-Gruppe wird von den Einparametergruppen  $H, P, E$  und  $\Xi$  erzeugt. Da  $H$  eine Teilmenge des Zentrums von  $\Sigma(s)$  ist, lässt sich  $\delta$  in der Form  $(\sigma\eta_{t_m})|_D$  darstellen. Wenn  $t_m > -\ln(r_{max}(\sigma))$  wäre, so lägen die Bilder der Punkte des Randes mit maximalem Abstand außerhalb von  $\overline{D}$ . ■

Um die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{D}$  bestimmen zu können, beweisen wir zuerst Folgendes:

**4.7.3 Lemma.** *In jedem Punkt des Randes von  $\mathcal{D}$  gibt es genau eine Tangente.*

**Beweis.** Eine Gerade

$$\left\{ ce^{i\alpha} \frac{e^{s\varphi}}{\cos(\varphi)} e^{i\varphi} \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

mit  $c > 0$  und  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  ist genau dann Tangente, wenn es genau ein  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  so

#### 4.7. Endomorphismen-Halbgruppen von Unterebenen

gibt, dass die Gleichung

$$c \frac{e^{s\varphi}}{\cos(\varphi)} = 1$$

erfüllt ist. Wir suchen also ein  $c > 0$  derart, dass die Graphen der beiden Funktionen  $f_c(\varphi) := ce^{s\varphi}$  und  $\cos(\varphi)$  mit  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  genau einen Schnittpunkt besitzen. Am Schnittpunkt müssen die Tangenten an die Graphen der beiden Funktionen übereinstimmen. Folglich suchen wir  $c$  und  $\varphi$  derart, dass die zwei folgenden Gleichungen gelten:

$$ce^{s\varphi} = \cos(\varphi)$$

$$cse^{s\varphi} = -\sin(\varphi)$$

Wir erhalten daraus: Die Funktionen schneiden sich im Punkt

$$\varphi_T := \arctan(-s)$$

und es gilt

$$c = \frac{\cos(\varphi_T)}{e^{s\varphi_T}} =: c_T .$$

Folglich ist die Gerade

$$T_\alpha := \left\{ c_T e^{i\alpha} \frac{e^{s\varphi}}{\cos(\varphi)} e^{i\varphi} \mid \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right\}$$

eine Tangente im Punkt  $e^{(\varphi_T + \alpha)i}$ . Die Menge  $\{T_\alpha \mid \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$  ist die Tangentenschar an den Rand von  $\mathcal{D}$ . Da durch obige Gleichungen  $\varphi_T$  und  $c_T$  eindeutig bestimmt sind, gibt es genau eine Tangente in jedem Randpunkt von  $\mathcal{D}$  ■

**4.7.4 Bemerkung.** Die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{D}$  ist die Restriktion der Einparametergruppe

$$\Delta = \{ \rho_t \eta_{(-st)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

auf  $D$ .

**Beweis.** Die Menge  $\Delta$  besteht aus allen Drehungen um das Zentrum 0. Folglich gilt  $\text{Aut}(\mathcal{D}) \supseteq \Delta|_D$ . Da  $\mathcal{D}$ , wie wir in 4.7.2 gesehen haben, nicht desarguessch ist, besteht  $\text{Aut}(\mathcal{D})$  ausschließlich aus Restriktionen von Automorphismen von  $\mathcal{M}(s)$ . Sei  $\delta \in \Sigma(s)$  mit  $\delta|_D \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ . Da  $\Delta$  transitiv auf dem Rand von  $\mathcal{D}$  operiert, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $i^\delta = i$  gilt. Folglich ist die Gerade  $i \vee 0 = \mathbb{R}i$  eine Fixgerade. Weil  $\delta$  injektiv ist, gilt  $(-i)^\delta \in \mathbb{R}i \cap \partial D \setminus \{i\}$ . Also ist  $-i$  ein Fixpunkt. Die Tangente  $t$  an den Kreis  $\mathcal{D}$  im Punkt  $i$  wird durch  $\delta$  auf sich abgebildet. Ebenso ist die Tangente  $\tilde{t}$  durch den Fixpunkt  $-i$  eine Fixgerade. Folglich ist der Schnittpunkt  $T := t \wedge \tilde{t}$  ein Fixpunkt. Die Gerade  $T \vee 0$  hat zwei Schnittpunkte  $X$  und  $Y$  mit dem Kreis  $\mathcal{D}$ . Da die Gerade  $T \vee 0$  die Verbindung von zwei Fixpunkten ist, ist sie eine Fixgerade, also gilt  $\{X, Y\}^\delta = \{X, Y\}$ . Wenn  $X^\delta = Y$  und  $Y^\delta = X$  gilt, so fixiert  $\delta^2$  die vier Punkte

#### 4. Die Moulton-Ebenen

$i, -i, X, Y$  und ist folglich die Identität (vgl. [55, 32.10]). Also ist  $\delta$  eine Involution. Nach 4.2.26 gibt es in  $\Sigma$  genau eine Involution ungleich der Identität, nämlich  $(-\sqrt{k}\mathbf{1})^{\mathcal{O}}$ . Der Automorphismus  $\alpha^{-1}\delta\alpha$  von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , mit dem Isomorphismus  $\alpha$  aus 4.2.31, besitzt den Fixpunkt  $i^\alpha \notin \{x_\infty, y_\infty\}$ . Hingegen besitzt  $(-\sqrt{k}\mathbf{1})^{\mathcal{O}}$  auf der Ferngerade  $g_\infty = (\mathbb{R}i)^\alpha$  nur die beiden Fixpunkte  $x_\infty$  und  $y_\infty$ . Folglich ist  $\alpha^{-1}\delta\alpha \neq (-\sqrt{k}\mathbf{1})^{\mathcal{O}}$ . Insgesamt folgt, dass  $\delta$  die Identität ist und die Behauptung ist bewiesen. ■

Sei  $U \subset P$ . Für  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R}$  verwenden wir in diesem Unterkapitel die folgende Kurzschreibweise: Statt  $(A^{\mathcal{O}})|_U$  schreiben wir  $A_U^{\mathcal{O}}$  und für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  schreiben wir statt  $(A^{\sigma_i})|_U$  einfach  $A_U^{\sigma_i}$ . Die nächsten Beispiele sind Streifenebenen in  $\mathcal{M}_k$ . Eine Streifenebene ist eine Unterebene einer affinen  $\mathbb{R}^2$ -Ebene, deren Rand von zwei parallelen Geraden gebildet wird (vgl. [60, Definition 4.3]).

Sei  $\mathcal{S}$  eine Streifenebene in  $\mathcal{M}_k$ . Dann besitzt  $\mathcal{S}$  genau ein Bündel affiner Geraden und keine weiteren affinen Antifahren außer denen, die mit diesen Geraden gebildet werden. Außerdem gibt es in  $\mathcal{S}$  keine projektiven Antifahren. Da das Bild einer affinen Antifahrt unter einem Endomorphismus nach [60, Lemma 2.7] immer eine affine oder eine projektive Antifahrt ist, gilt Folgendes: Jeder Automorphismus  $\delta$  von  $\mathcal{M}_k$  der einen Endomorphismus von  $\mathcal{S}$  induziert, fixiert den Schnittpunkt  $p_a$  des Bündels der affinen Geraden. Wenn  $p_a \neq x_\infty$  ist, dann ist die Ferngerade  $g_\infty$  eine Fixgerade von  $\delta$ , da der Punkt  $x_\infty$  ein Fixpunkt jedes Automorphismus ist. In diesem Fall gilt  $\delta \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ .

Zunächst betrachten wir für  $t \in \mathbb{R}$  die Streifenebene

$$\mathcal{S}_t := (S_t, \tilde{\mathcal{L}}_{S_t})$$

mit

$$S_t := \left\{ [x, y, 1] \mid -\sqrt{kt} < x < t, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \tilde{\mathcal{L}}_{S_t} := (\mathcal{L}_k)_{S_t} .$$

Diese wurde auch schon von SEMMLER in [60, Satz 4.4] betrachtet. Wir nutzen hier die Gelegenheit, einen offensichtlichen Tippfehler zu verbessern.

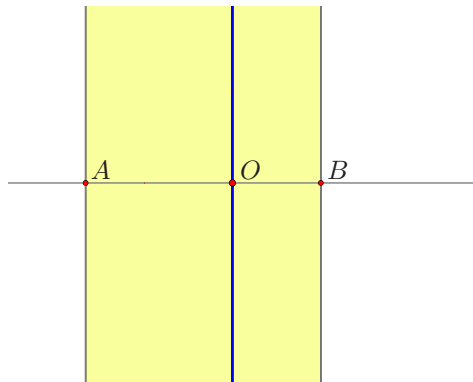


Abbildung 19: Die Ebene  $\mathcal{S}_t$  mit  $O = [0, 0, 1]$ ,  $A = [-kt, 0, 1]$  und  $B = [t, 0, 1]$

**4.7.5 Lemma.** Die Streifenebene  $\mathcal{S}_t$  besitzt die Involution

$$\beta|_{\mathcal{S}_t} := \left( -\sqrt{k}\mathbf{1} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\overline{\sigma}}.$$

Die Endomorphismen-Halbgruppe ist folgende dreidimensionale Halbgruppe:

$$\text{End}(\mathcal{S}_t) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} b & 0 \\ z & a \end{array} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\sigma_3} \mid a \geq 1, b > 0, z \in \mathbb{R} \right\} \times \left\langle \left( \begin{array}{cc} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{array} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\sigma_4} \right\rangle$$

**Beweis.** Die Lineation  $\beta|_{\mathcal{S}_t}$  ist nach 4.2.26 die Restriktion der Involution  $\beta = \left( -\sqrt{k}\mathbf{1} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\overline{\sigma}}$ . Außerdem werden die beiden Randgeraden vertauscht, denn es gilt

$$[-\sqrt{kt}, 0, 1]^\beta = [t, 0, 1].$$

Sei  $\delta \in \Sigma$  mit  $\delta|_{\mathcal{S}_t} \in \text{End}(\mathcal{S}_t)$ . Dann ist  $y_\infty$  ein Fixpunkt von  $\delta$ . Sei zuerst  $\delta \in \Sigma_3$ . Wir machen den Ansatz

$$\delta = \left( \begin{array}{cc} b & 0 \\ z & a \end{array} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\overline{\sigma}}$$

mit  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $z \in \mathbb{R}$ . Der Automorphismus  $\delta$  mit Fixpunkt  $y_\infty$  induziert genau dann einen Endomorphismus von  $\mathcal{S}_t$ , wenn die Bilder der Punkte  $[x, 0, 1]$  für  $-\sqrt{kt} \leq x \leq t$  in  $\overline{\mathcal{S}_t}$  liegen. Es gilt

$$[x, 0, 1]^\delta = \left[ \frac{x}{a}, \frac{z}{a}, 1 \right]. \quad (3)$$

Folglich gilt  $a \geq 1$  und  $z \in \mathbb{R}$ .

Sei nun  $\delta \in \Sigma_4$ . Nach 4.2.25 gilt dann  $\delta\beta \in \Sigma_3$  und  $(\delta\beta)|_{\mathcal{S}_t} \in \text{End}(\mathcal{S}_t)$ . Damit ist die obige Gestalt der Endomorphismen-Halbgruppe bewiesen.  $\blacksquare$

Aus Gleichung (3) in obigem Beweis lesen wir ab, dass genau dann die Randgeraden Fixgeraden sind, wenn  $a = 1$  gilt. Also kennen wir nun auch die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{S}_t$ :

**4.7.6 Bemerkung.** Die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{S}_t$  ist zweidimensional. Es gilt

$$\text{Aut}(\mathcal{S}_t) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} b & 0 \\ z & 1 \end{array} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\sigma_3} \mid b > 0, z \in \mathbb{R} \right\} \times \left\langle \left( \begin{array}{cc} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{array} \right)_{\mathcal{S}_t}^{\sigma_4} \right\rangle.$$

Nun betrachten wir eine Streifenebene parallel zur  $x$ -Achse:

#### 4. Die Moulton-Ebenen

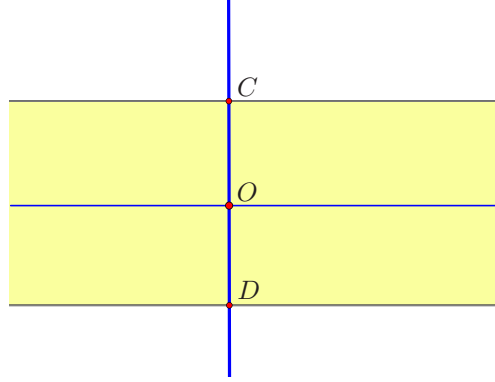


Abbildung 20: Die Ebene  $\mathcal{W}$  mit  $O = [0, 0, 1]$ ,  $C = [0, 1, 1]$  und  $D = [0, -1, 1]$ .

**4.7.7 Lemma.** Sei

$$\mathcal{W} := \{[x, y, 1] \mid -1 < y < 1, x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\mathcal{W} := (W, \tilde{\mathcal{L}}_W) \text{ mit } \tilde{\mathcal{L}}_W := (\mathcal{L}_k)_W .$$

Die Endomorphismen-Halbgruppe von  $\mathcal{W}$  ist die vierdimensionale Kompressionshalbgruppe

$$\text{End}(\mathcal{W}) = \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix}_W^{\overline{\mathcal{Q}}} \mid \begin{array}{l} ej - hf > 0, \\ f + j \neq 0, \\ j - f \neq 0, \end{array} \begin{array}{l} -1 \leq \frac{e+h}{j+f} \leq 1, \\ -1 \leq \frac{h-e}{j-f} \leq 1, \end{array} \left( f \neq 0 \Rightarrow -\frac{j}{f} \notin [-1, 1] \right) \right\} .$$

**Beweis.** Sei  $\delta \in \Sigma$ . Wir machen den Ansatz

$$\delta = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix}_W^{\overline{\mathcal{Q}}} \text{ mit } \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{R} .$$

Der Automorphismus  $\delta$  induziert genau dann einen Endomorphismus von  $\mathcal{W}$ , wenn alle Punkte der Menge  $L_0 \cap \overline{W} = \{[x, 0, 1] \mid x \in [-1, 1]\}$  unter  $\delta$  in  $L_0 \cap \overline{W}$  abgebildet werden. Da diese Menge zusammenhängend ist, ist das genau dann der Fall, wenn die Bilder der Randpunkte  $[1, 0, 1]$  und  $[-1, 0, 1]$  in  $\overline{W}$  liegen und  $y_\infty \notin (L_0 \cap W)^\delta$  gilt. Nach 4.1.17(iii) gilt genau dann  $y_\infty \notin (L_0 \cap W)^\delta$ , wenn  $f = 0$  oder  $f \neq 0$  und zugleich  $-\frac{j}{f} \notin [-1, 1]$  gilt. Nun betrachten wir die Bilder der beiden Randpunkte:

$$[0, 1, 1]^\delta = [0, e + h, f + j] =: P_1$$

$$[0, -1, 1]^\delta = [0, -e + h, -f + j] =: P_2$$

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  liegen genau dann in  $\overline{W}$  wenn  $f + j \neq 0 \neq -f + j$ ,  $-1 < \frac{e+h}{f+j} < 1$  und  $-1 < \frac{-e+h}{-f+j} < 1$  gilt. ■

**4.7.8 Bemerkung.** Die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{W}$  ist zweidimensional:

$$\text{Aut}(\mathcal{W}) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} e & h \\ h & e \end{array} \right)_W^{\overline{\sigma}} \mid e^2 - h^2 > 0 \right\}$$

**Beweis.** Wir suchen nun diejenigen Endomorphismen, welche die Menge der beiden Randgeraden in sich abbilden. Wir machen den Ansatz

$$\delta = \left( \begin{array}{cc} e & f \\ h & j \end{array} \right)^{\overline{\sigma}}$$

mit  $\delta|_{\mathcal{W}} \in \text{End}(\mathcal{W})$ . 1. Fall: Beide Randgeraden sind Fixgeraden von  $\delta$ . Dann gilt

$$\frac{e+h}{j+f} = 1 \text{ und } \frac{h-e}{j-f} = -1$$

und es folgt  $e = j$  und  $h = f$ . Die Determinante der  $2 \times 2$  Matrix muss positiv sein. Folglich gilt  $e^2 - h^2 > 0$ . Daraus folgt  $e + h \neq 0$ ,  $e - h \neq 0$ ,  $e \neq 0$  und  $-1 < \frac{h}{e} < 1$ . Somit besteht obige Menge aus allen Endomorphismen von  $\mathcal{W}$ , deren Fortsetzung die Randgeraden fixiert. Der 2. Fall, dass durch  $\delta$  die beiden Randgeraden vertauscht werden, führt zu einem Widerspruch: Denn in diesem Fall gilt

$$\frac{e+h}{j+f} = -1 \text{ und } \frac{h-e}{j-f} = 1$$

und es folgt  $e = -j$  und  $h = -f$ . Da  $\delta|_{\mathcal{W}}$  ein Endomorphismus ist, gilt (vgl. 4.7.7)  $h^2 - e^2 > 0$ . Daraus folgt  $|\frac{e}{h}| < 1$ . Das ist ein Widerspruch zu  $-\frac{e}{h} \notin [-1, 1]$ . ■

**4.7.9 Bemerkung.** Die Automorphismen-Gruppe von  $\mathcal{W}$  ist

$$\text{Aut}(\mathcal{W}) = \left( \tilde{\mathbb{E}} \times \mathbb{Z} \times \langle \beta \rangle \right) \Big|_{\mathcal{W}}$$

mit der Einparametergruppe

$$\mathbb{Z} := \left\{ \zeta_t := \left( \begin{array}{cc} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{array} \right)^{\overline{\sigma}} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

der Einparametergruppe  $\tilde{\mathbb{E}}$  wie in 4.3.6 und der Involution

$$\beta = \left( \begin{array}{cc} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{array} \right)^{\overline{\sigma}}.$$



#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Beweis.** Die Automorphismen  $\tilde{\eta}_t|_W = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}_W^{\overline{\mathcal{O}}}$  sind die Streckungen in  $x$ -Richtung. Ferner gilt

$$Z|_W = \left\{ \begin{pmatrix} e & h \\ h & e \end{pmatrix}_W^{\overline{\mathcal{O}}} \mid e^2 - h^2 = 1, e > 0 \right\} .$$

Folglich gilt

$$\text{Aut}(\mathcal{W}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{Z} \times \langle \beta \rangle)|_W .$$

Wir zeigen nun, dass  $\mathbf{Z}$  eine Einparametergruppe ist. Mithilfe der Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen rechnen wir leicht nach, dass die Abbildung

$$\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{Z}^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} : t \mapsto \zeta_t^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Da  $\cosh(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  positiv ist, gilt  $Z \cap \Sigma_4 = \emptyset$ . Um einzusehen, dass die Abbildung  $\zeta_t^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} \rightarrow \zeta_t$  ein Gruppenhomomorphismus ist, betrachten wir  $\zeta_t, \zeta_{\tilde{t}} \in \mathbf{Z}$ . Nach 4.2.22 müssen wir nur noch die beiden Fälle  $\zeta_t, \zeta_{\tilde{t}} \in \Sigma_1$  und  $\zeta_t, \zeta_{\tilde{t}} \in \Sigma_2$  betrachten.

Seien also  $\sinh(t), \sinh(\tilde{t}) \in \mathbb{R}^+$ . Weil  $\cosh(t)$  und  $\cosh(\tilde{t})$  positiv sind, gilt dann die Ungleichung

$$\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} > -\frac{\cosh(\tilde{t})}{\sinh(\tilde{t})} .$$

Nach 4.2.22 gilt folglich

$$\zeta_t \zeta_{\tilde{t}} = \left( \zeta_t^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} \zeta_{\tilde{t}}^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} = \zeta_{t+\tilde{t}} \in \Sigma_1 .$$

Seien nun  $\sinh(t)$  und  $\sinh(\tilde{t})$  negativ. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} < -\frac{\cosh(\tilde{t})}{\sinh(\tilde{t})} .$$

Nach 4.2.22 gilt also

$$\zeta_t \zeta_{\tilde{t}} = \left( \zeta_t^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} \zeta_{\tilde{t}}^{\overline{\mathcal{O}}^{-1}} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} = \zeta_{t+\tilde{t}} \in \Sigma_2 .$$

Insgesamt wissen wir nun mit 4.2.22, dass die Abbildung  $\zeta$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir betrachten die Intervalle

$$I_1 := ] - \infty, -1[ ,$$

$$I_2 := ] - 2, 2[ \text{ und}$$

$$I_3 := ]1, \infty[ .$$

Die Abbildung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

#### 4.7. Endomorphismen-Halbgruppen von Unterebenen

ist stetig. Wenn  $t \in I_1$  ist, ist  $\sinh(t) < 0$  und folglich ist  $\zeta_t \in \Sigma_2$ . Außerdem gilt in diesem Fall  $-\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} > 1$ . Folglich liegt nach 4.1.17(iii) und (vi) die Menge  $W$  unter der Geraden  $g_\infty^{\zeta_t^{-1}}$ . Wenn  $t \in I_3$  ist, dann ist  $\sinh(t) > 0$  und folglich ist  $\zeta_t \in \Sigma_1$ . In diesem Fall gilt  $-\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} < 1$ . Also liegt in diesem Fall die Menge  $W$  über der Geraden  $g_\infty^{\zeta_t^{-1}}$ . Nach 4.2.1 gilt insgesamt in beiden Fällen

$$\zeta_t|_W = \left( \begin{array}{cc} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{array} \right)^\lambda \Big|_W$$

Wegen 4.1.6 ist also  $\zeta|_{I_1 \cup I_3}$  stetig. Wir erinnern uns nun an die in 4.2.29 definierten Mengen  $Y_{b,d}$  mit  $1 > b > 0$  und  $d > 0$ . Für  $1 > b > 0$  und  $\sinh(2) > d > 0$  gilt

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{array} \right) \Big| t \in I_2 \right\} \subset Y_{b,d} .$$

Da die Abbildung  $\varrho$ , wie wir in 4.2.29 gesehen haben, auf  $Y_{b,d}$  ein lokaler Isomorphismus ist, folgt, dass auch  $\zeta|_{I_2}$  stetig ist. Da  $\mathbb{R}$  die Vereinigung der offenen Intervalle  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  ist, haben wir insgesamt bewiesen, dass  $\zeta$  ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist. ■

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Bahnen unter  $Z$ . In  $W$  sind die Bahnen halbe Ellipsen, deren Halbachsen in  $x$ -Richtung und in  $y$ -Richtung zeigen, wobei die Halbachse in  $y$ -Richtung immer die Länge 1 hat. Das sehen wir an Folgendem: Es gilt

$$[x, 0, 1]^{\zeta_t} = \left[ \frac{x}{\cosh(t)}, \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}, 1 \right]$$

und der Bildpunkt liegt auf einer Ellipse mit Halbachsen der Länge 1 und  $x$ :

$$\frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{\cosh(t)} \right)^2 + \left( \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \right)^2 = \frac{1 + (\sinh(t))^2}{(\cosh(t))^2} = 1$$

Als letztes betrachten wir nicht desarguessche Streifenebenen, mit steigenden Randgeraden:

**4.7.10 Lemma.** Für  $t > 0$  sei

$$Q_t := \{[x + m, tx, 1] \mid -1 < m < 1, x \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{L}}_{Q_t} := (\mathcal{L}_k)_{Q_t} .$$

Die Endomorphismen-Halbgruppe der Unterebene  $\mathcal{Q}_t := (Q_t, \tilde{\mathcal{L}}_{Q_t})$  ist die folgende zwei-dimensionale Halbgruppe:

$$\text{End}(\mathcal{Q}_t) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ z & a \end{array} \right)_{Q_t}^{\sigma_3} \mid a > 0, -1 \leq \frac{t+z}{ta} \leq 1, -1 \leq \frac{-t+z}{ta} \leq 1, z \in \mathbb{R} \right\}$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

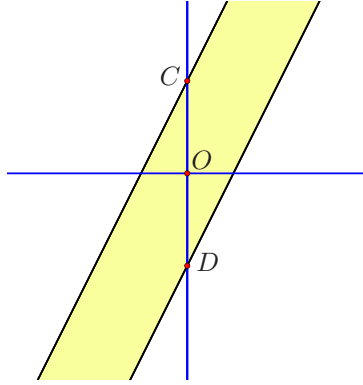


Abbildung 21: Die Ebene  $\mathcal{Q}_t$  mit  $O = [0, 0, 1]$ ,  $C = [0, 1, 1]$  und  $D = [0, -1, 1]$ .

**Beweis.** Sei  $\delta \in \Sigma$  so, dass  $\delta|_{\mathcal{Q}_t} \in \text{End}(\mathcal{Q}_t)$ . Wie bei den beiden anderen Streifenebenen wird das Bündel der affinen Geraden in sich abgebildet. Folglich ist der Punkt  $[1, t, 0]$  ein Fixpunkt von  $\delta$ . Also wird die Ferngerade  $g_\infty$  in sich abgebildet und es ist  $\delta \in \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ . Wir machen den Ansatz

$$\delta = \begin{pmatrix} b & 0 \\ z & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{\sigma} \\ \overline{\sigma} \end{matrix}$$

mit  $ba > 0$  und  $z \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$[1, t, 0]^\delta = [1, bt, 0].$$

Aus der Bedingung, dass dieser Fernpunkt ein Fixpunkt ist, folgt  $b = 1$  und  $a > 0$ . Also ist  $\delta \in \Sigma_3$ . Nun betrachten wir den Schnittpunkt der Randgeraden mit der Knickachse und einen Punkt in  $\mathcal{Q}_t$ :

$$\begin{aligned} [0, t, 1]^\delta &= [0, t + z, a] = [0, \frac{t+z}{a}, 1] \\ [0, -t, 1]^\delta &= [0, -t + z, a] = [0, \frac{-t+z}{a}, 1] \\ [0, 0, 1]^\delta &= [0, z, a] = [0, \frac{z}{a}, 1] \end{aligned}$$

Da  $t > 0$  vorausgesetzt ist, gilt immer  $-t + z < z < t + z$ . Folglich induziert der Automorphismus  $\delta$  genau dann einen Endomorphismus von  $\mathcal{Q}_t$ , wenn die beiden Randpunkte richtig abgebildet werden. Daraus erhalten wir die Ungleichungen

$$-t \leq \frac{t+z}{a} \leq t \quad \text{und} \quad -t \leq \frac{-t+z}{a} \leq t.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

**4.7.11 Bemerkung.** Der einzige Automorphismus der Unterebene  $\mathcal{Q}_t$  ist die Identität.

#### 4.8. Partielle Lineationen der Pickert-Moulton-Ebenen $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$

**Beweis.** Da die Knickachse Fixgerade von jedem Endomorphismus ist, muss jeder Automorphismus die Menge  $\{[0, t, 1], [0, -t, 1]\}$  in sich abbilden. Sei  $\delta$  ein Automorphismus von  $\mathcal{Q}_t$ . Wir machen den Ansatz

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & a \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{Q}}_t} \in \text{End}(\mathcal{Q}_t).$$

Aus den Gleichungen  $[0, t, 1]^\delta = [0, t, 1]$  und  $[0, -t, 1]^\delta = [0, -t, 1]$  folgt  $z = 0$  und  $a = 1$ . Hingegen führen die Gleichungen  $[0, t, 1]^\delta = [0, -t, 1]$  und  $[0, -t, 1]^\delta = [0, t, 1]$  zum Widerspruch  $a < 0$ . ■

Der Automorphismus

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{Q}}_t}$$

der Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k$  bildet die Streifenebene  $\mathcal{Q}_s$  auf eine Streifenebene ab, deren affine Geraden geknickt sind.

#### 4.8. Partielle Lineationen der Pickert-Moulton-Ebenen $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$

Pickert-Moulton-Ebenen wurden von PICKERT in [39, S. 93] definiert. Dabei handelt es sich, wie wir sehen werden, um affine Ebenen, die genauso konstruiert werden wie die Moulton-Ebenen. Die Verallgemeinerung entsteht dadurch, dass statt  $\mathbb{R}$  ein beliebiger angeordneter Körper  $\mathbb{F}$  genommen wird. PIERCE hat die Konstruktion der Pickert-Moulton-Ebene weiter verallgemeinert. Die Geraden sind bei ihm von der Form  $\{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid y = b + m \circ x\}$  mit  $m \circ x = mx$  für  $x \geq 0$  und sonst  $m \circ x = \varphi(m)x$ . Hierbei ist  $\varphi$  eine geeignete Funktion des Körpers  $\mathbb{F}$  auf  $\mathbb{F}$  (vgl. [43]). Wir werden diese Verallgemeinerung im Folgenden Pierce-Moulton-Ebenen nennen. In [42, Theorem 3] beweist PIERCE das folgende Ergebnis: Genau dann besitzt eine Pierce-Moulton-Ebene eine Kollineation, die den Fernpunkt  $y_\infty$  der  $y$ -Achse bewegt, wenn die Ebene eine Pickert-Moulton-Ebene ist. Außerdem erfahren wir aus [43], dass zwei Pickert-Moulton-Ebenen  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$  und  $\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})$  genau dann isomorph sind, wenn es einen ordnungserhaltenden Automorphismus  $\alpha$  von  $\mathbb{F}$  so gibt, dass  $k = (k')^\alpha$  oder  $k(k')^\alpha = 1$  gilt. In [43] bestimmt PIERCE alle Kollineationen einer Pickert-Moulton-Ebene. Im Folgenden wollen wir die Ergebnisse, die wir über partielle Lineationen der Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k}$  gefunden haben, auf Pickert-Moulton-Ebenen verallgemeinern. Dabei können wir die Ergebnisse von PIERCE präzisieren und kleine Ungenauigkeiten berichtigen. Wir topologisieren die Pickert-Moulton-Ebene wie die projektive Ebene  $\overline{\mathcal{P}_2\mathbb{F}}$  mit der Anordnungs-Topologie (vgl. [48, V §2 Satz 24]). Mit dieser Topologie sind  $\overline{\mathcal{P}_2\mathbb{F}}$  und  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  stabile Ebenen, die aber im Allgemeinen nicht lokalkompakt sind. Deswegen werden wir nur solche Ergebnisse über  $\overline{\mathcal{M}_k}$  verallgemeinern, in die die Topologie der Menge der partiellen Lineationen bzw. die Topologie der Automorphismen-Gruppe nicht eingeht.

Sei im Folgenden  $\mathbb{F}$  ein angeordneter Körper und  $0 < k \in \mathbb{F}$ . Die projektive Pickert-Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} = (\overline{P^\mathbb{F}}, \overline{\mathcal{L}_k^\mathbb{F}})$  und die affine Pickert-Moulton-Ebene  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F}) = (P^\mathbb{F}, \mathcal{L}_k^\mathbb{F})$  sind genauso definiert wie  $\overline{\mathcal{M}_k}$  bzw.  $\mathcal{M}_k$  in 4.1.1 und 4.1.3, es wird nur der

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Körper  $\mathbb{R}$  durch den angeordneten Körper  $\mathbb{F}$  ersetzt. Mit dieser Notation gilt dann  $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_k$ . Die Elemente der  $\text{PGL}_3 \mathbb{F}$  schreiben wir in der Form  $(\alpha, [A])$  mit  $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{F})$  und  $[A] \in \text{PGL}_3 \mathbb{F}$ . Für  $[x, y, z] \in \overline{P^{\mathbb{F}}}$  gilt  $[x, y, z]^{(\alpha, [A])} = [x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha]^{[A]}$ . Außerdem gilt  $(\alpha, [A])(\beta, [B]) = (\alpha\beta, [A]^\beta[B])$ . In allen Definitionen und Aussagen von 4.1.1 bis 4.1.8 ersetzen wir  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$  und haben auf diesem Weg die Pickert-Moulton-Ebenen und die Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  definiert. Die Abbildung  $\overline{\iota_k^{\mathbb{F}}}$  ist eine zu  $\iota_k$  analog definierte Abbildung, welche die Pickert-Moulton-Ebene  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  auf die projektive Ebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$  abbildet. Wir werden als nächstes sehen, dass zwei angeordnete Körper  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{F}'$  isomorph sind, wenn die Menge  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}, \overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F}')}))$  nicht leer ist. Deswegen betrachten wir in dem dem Lemma 4.8.1 folgenden Kapitel nur noch partielle Lineationen zwischen Pickert-Moulton-Ebenen über demselben angeordneten Körper  $\mathbb{F}$ .

**4.8.1 Lemma.** *Seien  $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$  angeordnete Körper mit  $0 < k \in \mathbb{F}$  und  $0 < k' \in \mathbb{F}'$ . Sei  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}, \overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F}')}))$ . Dann sind  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{F}'$  isomorph.*

**Beweis.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge des Definitionsgebiets von  $\psi$  derart, dass  $U$  und  $U^\psi$  jeweils in  $P^{\mathbb{F}}$  bzw.  $P^{\mathbb{F}'}$  ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegen. Mit Hilfe der Abbildungen  $\iota_k^{\mathbb{F}}$  bzw.  $\iota_{k'}^{\mathbb{F}'}$ , welche wie  $\iota_k$  in 4.1.7 die Ebenen  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$  bzw.  $\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F}')$  auf  $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$  bzw.  $\mathcal{P}_2(\mathbb{F}')$  abbilden, erhalten wir, dass die partielle Lineation  $(\iota_k^{\mathbb{F}})^{-1}\psi\iota_{k'}^{\mathbb{F}'}$  ein Element von  $\Psi(\mathcal{P}_2(\mathbb{F}), \mathcal{P}_2(\mathbb{F}'))$  ist. Nach dem lokalen Fundamentalsatz von FRANK [5, Satz 1] lässt sich diese Lineation zu einem Isomorphismus  $\hat{\psi} : \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F}')$  fortsetzen. Folglich sind nach [20, Theorem 2.8] die Körper  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{F}'$  isomorph und der Isomorphismus  $\hat{\psi}$  wird durch eine semilineare Transformation induziert. ■

Wir definieren nun die Abbildungen  $[[b|c]]\iota_k$  wie in 4.1.9 und 4.1.10. Die Definition der Halbebenen  $S(p)$  bzw.  $F(q)$  erfolgt wie in 4.1.12. Hierbei ist zu beachten, dass diese Halbebenen offene Teilmengen von  $\overline{P^{\mathbb{F}}}$  sind, aber im Allgemeinen keine Zusammenhangskomponenten sind. Deswegen betrachten wir diese Halbebenen als Punktmengen des Büschels zwischen den beiden Randgeraden:

**4.8.2 Bemerkung.** *Für  $q \in \mathbb{F}$  gilt*

$$\begin{aligned} S(q) &= \{p \in [0, q, 1] \vee [x, q+1, 1] \in \overline{\mathcal{L}_k} \mid \mathbb{F} \ni x > 0\} \setminus \{[0, q, 1]\} \\ F(q) &= \{p \in [0, q, 1] \vee [x, q+1, 1] \in \overline{\mathcal{L}_k} \mid \mathbb{F} \ni x < 0\} \setminus \{[0, q, 1]\} . \end{aligned}$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned} H_L = S(\infty) &= \{p \in [0, 1, 0] \vee [x, 0, 1] \in \overline{\mathcal{L}_k} \mid \mathbb{F} \ni x < 0\} \setminus \{[0, 1, 0]\} \\ H_R = S(-\infty) &= \{p \in [0, 1, 0] \vee [x, 0, 1] \in \overline{\mathcal{L}_k} \mid \mathbb{F} \ni x > 0\} \setminus \{[0, 1, 0]\} . \end{aligned}$$

Wir erhalten wie in 4.1.13, dass die Restriktionen geeigneter Abbildungen der Form  $[[b|c]]\iota_k$  auf die Halbebenen  $S(p)$  bzw.  $F(q)$  Elemente von  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}, \mathcal{P}_2\mathbb{F})$  sind. Mit der wie in 4.1.14 definierten Lineation  $\gamma(G, U, V)$  erhalten wir im Folgenden die zu Lemma 4.1.16 analoge Aussage.

4.8. Partielle Lineationen der Pickert-Moulton-Ebenen  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$

**4.8.3 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k(\mathbb{F}), \mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F}))$ . Seien  $U$  und  $V$  nicht leere offene Teilmengen des Definitionsgebietes von  $\psi$  mit der Eigenschaft, dass die Mengen  $U$ ,  $V$ ,  $U^\psi$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegen. Wir wählen eine Gerade  $L$ , die  $U$  und  $V$  so schneidet, dass  $s_U(L) \notin \{0, \infty\}$  und  $s_U^\psi(L) \notin \{0, \infty\}$  erfüllt ist. Es gelte

$$\psi|_U = (\alpha, \chi)|_U$$

für eine Abbildung  $(\alpha, \chi) \in \text{PGL}_3 \mathbb{F}$ . Dann gilt

$$\psi|_V = (\alpha, \tilde{\chi})|_V ,$$

wobei die Abbildung  $\tilde{\chi} \in \text{PGL}_3 \mathbb{F}$  für die verschiedenen Fälle die aus der folgenden Tabelle zu entnehmende Gestalt annimmt.

	$s_U^\psi(L) = s_V^\psi(L)$	$s_U^\psi(L) = (k')^{-1} s_V^\psi(L)$	$s_U^\psi(L) = k' s_V^\psi(L)$
$s_U(L) = s_V(L)$	$\chi$	$\chi \Lambda_{k'}$	$\chi \Lambda_{k'}^{-1}$
$s_U(L) = k^{-1} s_V(L)$	$\Lambda_{k^\alpha}^{-1} \chi$	$\Lambda_{k^\alpha}^{-1} \chi \Lambda_{k'}$	$\Lambda_{k^\alpha}^{-1} \chi \Lambda_{k'}^{-1}$
$s_U(L) = k s_V(L)$	$\Lambda_{k^\alpha} \chi$	$\Lambda_{k^\alpha} \chi \Lambda_{k'}$	$\Lambda_{k^\alpha} \chi \Lambda_{k'}^{-1}$

**Beweis.** In dem Beweis von 4.1.16 ersetzen wir  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$  und die Gruppe  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$  durch  $\text{PGL}_3 \mathbb{F}$ . Statt des lokalen Fundamentalsatzes von LÖWEN [31] zitieren wir hier den lokalen Fundamentalsatz von FRANK [5, Satz 1]. Zu beachten ist, dass bei der Abbildung  $\gamma(L, \tilde{U}, \tilde{V})$ , welche die Teilmengen  $\tilde{U}$  und  $\tilde{V}$  von  $U$  bzw. von  $V$  nach  $\mathcal{P}_2 \mathbb{F}$  abbildet, die Konstante  $c(L, \tilde{U}, \tilde{V})$  die Werte  $1, k$  und  $k^{-1}$  annimmt, hingegen bei der Abbildung  $\gamma(L^\psi, \tilde{U}^\psi, \tilde{V}^\psi)$  die Konstante  $c(L^\psi, \tilde{U}^\psi, \tilde{V}^\psi)$  die Werte  $1, k'$  und  $(k')^{-1}$  annimmt. ■

Die Aussagen von 4.1.17 über die Wirkung von  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$  übernehmen wir und ersetzen  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$ . Wir betrachten hier zusätzlich, wie Elemente  $(\alpha, A^\lambda) \in \text{PGL}_3 \mathbb{F}$  auf  $\overline{P^\mathbb{F}}$  wirken:

**4.8.4 Lemma.** Es gilt

$$(\alpha, A^\lambda)^{-1} = (\alpha^{-1}, ((A^{\alpha^{-1}})^{-1})^\lambda) .$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} .$$

Dann gilt

$$g_\infty^{(\alpha, A^\lambda)} = l_{0, \frac{e}{f}} \quad \text{und} \quad g_\infty^{(\alpha, A^\lambda)^{-1}} = l_{0, t} \quad \text{mit} \quad t = -\frac{j^{\alpha^{-1}}}{f^{\alpha^{-1}}} .$$

**Beweis.** Es gilt  $(\alpha, A^\lambda)(\alpha^{-1}, ((A^{\alpha^{-1}})^{-1})^\lambda) = (\text{id}, (A^\lambda)^{\alpha^{-1}}((A^{\alpha^{-1}})^{-1})^\lambda) = (\text{id}, \mathbb{1}^\lambda)$ . Das Bild von  $g_\infty$  berechnen wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} g_\infty^{(\alpha, A^\lambda)} &= \left\{ [x, y, 0]^{(\alpha, A^\lambda)} \mid (x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} \setminus \{(0, 0)\} \right\} \\ &= \left\{ [x^\alpha, y^\alpha, 0]^{A^\lambda} \mid (x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} \setminus \{(0, 0)\} \right\} \\ &= \left\{ [x^\alpha, ey^\alpha, fy^\alpha] \mid (x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} \setminus \{(0, 0)\} \right\} = l_{0, \frac{e}{f}} \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Aussagen folgt die dritte. ■

#### 4. Die Moulton-Ebenen

Nun definieren wir die Menge  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$ , die sich später als Automorphismen-Gruppe von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  herausstellen wird.

**4.8.5 Definition.** Wir ersetzen in den Definitionen 4.2.1, 4.2.2 und 4.2.23 den Körper  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$ . Nun definieren wir für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\tilde{\Sigma}_i^{\mathbb{F}} := \{(\alpha, A^{\sigma_i}) \mid \alpha \in \text{oAut}(\mathbb{F}), k^\alpha = k, A \in \text{dom } \sigma_i\}$$

und

$$\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}} := \tilde{\Sigma}_1^{\mathbb{F}} \cup \tilde{\Sigma}_2^{\mathbb{F}} \cup \tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}} \cup \tilde{\Sigma}_4^{\mathbb{F}} = \left\{ (\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}}) \mid \alpha \in \text{oAut } \mathbb{F}, k^\alpha = k, A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F} \right\} .$$

Hierbei ist  $\text{oAut}(\mathbb{F})$  die Gruppe der ordnungserhaltenden Körperautomorphismen von  $\mathbb{F}$ .

**4.8.6 Lemma.** Es gilt  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}} \subseteq \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$ .

**Beweis.** Da der Körperautomorphismus  $\alpha$  ordnungserhaltend ist und  $k^\alpha = k$  gilt, induziert  $\alpha$  eine affine Lineation von  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ . Es gilt folglich

$$\begin{aligned} l_{s,t}^{(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})} &= l_{s^\alpha, t^\alpha}^{A^{\overline{\mathcal{O}}}} , \\ (l_{s,t}^*)^{(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})} &= (l_{s^\alpha, t^\alpha}^*)^{A^{\overline{\mathcal{O}}}} , \\ l_x^{(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})} &= l_{x^\alpha}^{A^{\overline{\mathcal{O}}}} , \\ g_\infty^{(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})} &= g_\infty^{A^{\overline{\mathcal{O}}}} . \end{aligned}$$

Die Abbildung  $A^{\overline{\mathcal{O}}}$  induziert eine Lineation auf  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . Dies sehen wir wie in den Beweisen von 4.2.3 bis 4.2.11 durch Ersetzen von  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$ . Um zu zeigen, dass alle Elemente von  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  stetig, injektiv und offen sind, benutzen wir die gleiche Argumentation wie in 4.2.12. Für  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F}$  ist die Abbildung  $A^{\overline{\mathcal{O}}}$  bijektiv auf  $\overline{\mathcal{P}^{\mathbb{F}}}$ : Denn aus 4.1.17 und 4.8.4 folgern wir, dass die Abbildung  $(\alpha, A^\lambda)$  die vier Viertelebenen  $O_L(A^{\alpha^{-1}}), U_L(A^{\alpha^{-1}}), O_R(A^{\alpha^{-1}}), O_L(A^{\alpha^{-1}})$  bzw. die Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  bijektiv auf die Viertelebenen  $\tilde{O}_L(A), \tilde{U}_L(A), \tilde{O}_R(A), \tilde{O}_L(A)$  bzw. die Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  abbildet. Ferner gilt  $A^{\overline{\mathcal{O}}}|_{l_0} = A^\lambda|_{l_0}$ . Die beiden Halbgeraden  $\{[x, y, 0] \mid xy > 0\}$  und  $\{[x, y, 0] \mid xy < 0\}$  werden jeweils mit einer der Abbildungen  $A^\lambda, (kA)^\lambda$  oder  $(k^{-1}A)^\lambda$  surjektiv abgebildet. ■

Wir sehen wie in 4.2.13, dass eine Unterebene  $(U, \overline{\mathcal{L}_k^{\mathbb{F}}})$  von  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$  genau dann nicht desarguessch ist, wenn es drei Punkte  $p_1, p_2$  und  $p_3$  derart in  $U$  gibt, dass die Bedingungen von 4.2.13 erfüllt sind. Unser nächstes Ziel ist, zu beweisen, dass jedes  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$  mit nicht desarguesschem Definitionsgebiet eine Einschränkung eines Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  ist. Dazu müssen wir zuerst einsehen, dass nicht ordnungserhaltende Körperautomorphismen keine stetigen partiellen Lineationen induzieren können:

**4.8.7 Lemma.** Sei  $\alpha$  ein nicht ordnungserhaltender Körperautomorphismus von  $\mathbb{F}$ . Sei  $U$  eine beliebige offene Teilmenge von  $\mathbb{F}$ . Dann ist  $\alpha|_U$  unstetig.

#### 4.8. Partielle Lineationen der Pickert-Moulton-Ebenen $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$

**Beweis.** Da  $\alpha$  nicht ordnungserhaltend ist, existiert ein  $0 < x \in \mathbb{F}$  so, dass  $x^\alpha < 0$ . In  $\mathbb{F}$  gibt es einen Unterkörper  $Q$ , der zu den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  o-isomorph ist, d.h. der Isomorphismus ist eine ordnungserhaltende Abbildung (vgl. [48, II §1 Satz 2]). Wenn wir  $0 < y \in \mathbb{F}$  und  $a, b \in Q$  derart finden, dass  $y^\alpha < 0$  und  $a < y < b$  gilt, dann konstruieren wir durch Halbieren des Intervalls  $]a, b[$  und Auswählen derjenigen Hälfte in der sich  $y$  befindet eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in Q$ , welche gegen  $y$  konvergiert. Dann konvergiert aber die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}^\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $y > 0$  und nicht gegen  $y^\alpha < 0$ . Folglich ist dann  $\alpha$  auf  $]a, b[$  unstetig. Wenn es ein  $b \in Q$  mit  $x < b$  gibt, dann setzen wir  $y = x$  und  $a = 0$ . Ansonsten liegt  $x^{-1}$  im Intervall  $]0, 1[$  und wir setzen  $y = x^{-1}$ ,  $a = 0$  und  $b = 1$ . Jede beliebige offene Teilmenge von  $\mathbb{F}$  enthält ein offenes Intervall  $]c, d[$ . Das Intervall  $]a, b[$  lässt sich durch Multiplikation mit  $\frac{d-c}{b-a}$  und Addition von  $\frac{-a(d-c)}{b-a} + c$  stetig in das Intervall  $]c, d[$  abbilden. Insgesamt erhalten wir, dass  $\alpha$  auf jeder offenen Teilmenge von  $\mathbb{F}$  unstetig ist. ■

Nun wollen wir das Analogon zu 4.2.15 formulieren und beweisen. Gleichzeitig erhalten wir, wie sich aber erst in Satz 4.8.12 herausstellen wird, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Isomorphie von zwei Pickert-Moulton-Ebenen.

**4.8.8 Lemma.** Sei  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k(\mathbb{F}), \mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F}))$ . Seien  $U$  und  $V$  nicht leere offene Teilmengen des Definitionsgebietes von  $\psi$  so, dass  $U, V, U^\psi$  und  $V^\psi$  jeweils ganz in  $H_R$  oder ganz in  $H_L$  liegen. Es gebe Geraden  $l$  und  $m$ , die beide  $U$  und  $V$  derart schneiden, dass für die Steigungen der Geraden  $s_U(l) = s_V(l)$  und  $s_U(m) \neq s_V(m)$  gilt. Dann gibt es einen ordnungserhaltenden Körperautomorphismus  $\beta$  von  $\mathbb{F}$  mit  $k^\beta = k'$  oder  $k^\beta = (k')^{-1}$ . Sei nun  $k = k'$ . Dann ist  $\psi$  die Einschränkung einer Lineation  $(\alpha, \sigma) \in \tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  und lässt sich folglich zu einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  fortsetzen.

**Beweis.** Wie im Beweis von 4.2.15 können wir annehmen, dass  $U, U^\psi \subset H_L$  und  $V \subset H_R$  gilt. Nach dem lokalen Fundamentalsatz von FRANK [5, Satz 1] gibt es eine Abbildung  $(\alpha, [A]) \in \text{PFL}_3 \mathbb{F}$  mit  $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{F})$  und  $[A] \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$  derart, dass  $\psi|_U = (\alpha, [A])|_U$ . Da  $\psi$  stetig ist, folgt aus 4.8.7, dass  $\alpha$  ordnungserhaltend ist. Mit den gleichen Argumenten wie in 4.2.15 sehen wir, dass eine der folgenden Gleichungen erfüllt sein muss:

$$(\alpha, [A]) = \Lambda_k^{-1}(\alpha, [A]) = (\alpha, \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]) \quad (1)$$

$$(\alpha, [A]) = \Lambda_k^{-1}(\alpha, [A])\Lambda_{k'} = (\alpha, \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]\Lambda_{k'}) \quad (2)$$

$$(\alpha, [A])\Lambda_k = \Lambda_k^{-1}(\alpha, [A]) = (\alpha, \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]) \quad (3)$$

$$(\alpha, [A])\Lambda_k = \Lambda_k^{-1}(\alpha, [A])\Lambda_{k'} = (\alpha, \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]\Lambda_{k'}) \quad (4)$$

Gleichung (3) ist äquivalent zu

$$(\alpha, [A]) = (\alpha, \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]\Lambda_{k'}^{-1}) .$$

Gleichung (4) ist äquivalent zu

$$(\alpha, [A]) = (\alpha, \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]) .$$



#### 4. Die Moulton-Ebenen

Sei

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}.$$

Wie in 4.2.15 erhalten wir aus Gleichung (1) und Gleichung (3), jeweils im Widerspruch zur Invertierbarkeit von  $[A]$ , dass  $[A]$  eine Nullzeile besitzen müsste. Aus Gleichung (4) folgt  $[A] = \Lambda_{k^\alpha}^{-1}[A]\Lambda_{k'}$ . Folglich gilt  $a = k^\alpha a k'$  und es ist  $k^\alpha = (k')^{-1}$ . Die Gleichung (2) führt auf die Gleichung  $a = (k^\alpha)^{-1} a k'$ . Folglich gilt  $k^\alpha = k'$ .

Sei nun im Folgenden  $k = k'$ . Dann steht die Folgerung  $k^\alpha = k^{-1}$  aus Gleichung (4) im Widerspruch dazu, dass  $\alpha$  ordnungserhaltend ist. Es gilt also in diesem Fall  $k^\alpha = k$ . Da  $\alpha$  ordnungserhaltend ist, werden die beiden Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  von der von  $\alpha$  induzierten affinen Kollineation jeweils auf sich abgebildet und es werden steigende Geraden auf steigende und geknickte Geraden auf geknickte Geraden abgebildet. Also erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie in 4.2.15, dass  $[A]$  die Gestalt  $B^\lambda$  mit  $B \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F}$  besitzt. Außerdem können wir wie in 4.2.15 für die verschiedenen Fälle genau einen Automorphismus  $(\alpha, B^{\overline{\mathcal{O}}})$  konstruieren, der Fortsetzung von  $\psi$  ist. ■

Die Aussage, dass jede stetige injektive offene partielle Lineation  $\psi$  von  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$  alle Punkte  $l_0 \cap \text{dom } \psi$  in die Gerade  $l_0$  abbildet, beweisen wir wie in 4.2.16. Indem wir  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$  und  $\text{PGL}_3 \mathbb{R}$  durch  $\text{PFL}_3 \mathbb{F}$  ersetzen und statt des lokalen Fundamentalsatzes von LÖWEN den von FRANK [5, Satz 1] zitieren, erhalten wir genauso wie in 4.2.17 die Aussage, dass sich jede auf einem nicht desarguesschen Gebiet definierte stetige injektive offene partielle Lineation von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  zu einem Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  fortsetzen lässt. Daraus erhalten wir

#### 4.8.9 Satz.

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}) &= \tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}, \\ \text{Aut}(\mathcal{M}_k(\mathbb{F})) &= \tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}} \cup \tilde{\Sigma}_4^{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

**4.8.10 Lemma.** Die Abbildung  $(\text{id}, [C]) \in \text{PFL}_3 \mathbb{F}$  mit

$$[C] := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

induziert einen stetigen Isomorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  auf  $\overline{\mathcal{M}_{\frac{1}{k}}(\mathbb{F})}$ .

**Beweis.** Für  $x \in \mathbb{F}$  gilt  $l_x^{[C]} = l_{-x}$ . Für  $s \geq 0$  und  $t \in F$  gilt  $l_{s,t}^{[C]} = l_{s,-t}$ . Wir bezeichnen nun die geknickten Geraden in  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  mit  $l_{s,t}^k$  und die geknickten Geraden in  $\overline{\mathcal{M}_{\frac{1}{k}}(\mathbb{F})}$  mit  $l_{s,t}^{\frac{1}{k}}$ . Dann gilt  $(l_{s,t}^k)^{[C]} = l_{ks,-t}^{\frac{1}{k}}$ . Da die Abbildung  $(\text{id}, [C])$  von  $[C] \in \text{PFL}_3 \mathbb{F}$  induziert wird, ist sie stetig. ■

#### 4.8. Partielle Lineationen der Pickert-Moulton-Ebenen $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$

Als nächstes zeigen wir, dass jede bijektive Lineation zweier Pickert-Moulton-Ebenen stetig ist.

**4.8.11 Lemma.** *Sei  $\varphi : \overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})}$  eine bijektive Lineation, dann ist  $\varphi$  stetig.*

**Beweis.** Die Automorphismen-Gruppe  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  ist  $(x_\infty, l_0)$ -transitiv, denn die Untergruppe

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} s & 0 \\ 0 & s \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid s \in \mathbb{F} \right\}$$

operiert für alle  $t \in \mathbb{F}$  transitiv auf den Punkten  $l_{0,t} \setminus \{[0, t, 1], x_\infty\}$ . Da die Pickert-Moulton-Ebenen den Lenz-Barlotti-Typ III.2 besitzen (vgl. [72]), kann es keine weitere Antifahne  $(p, L)$  derart geben, dass  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$   $(p, L)$ -transitiv ist. Folglich gilt  $l_0^\varphi = l_0$  und  $x_\infty^\varphi = x_\infty$ . Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, dass

$$\begin{aligned} y_\infty^\varphi &= y_\infty, \\ [0, 0, 1]^\varphi &= [0, 0, 1] \\ \text{und } [1, 1, 1]^\varphi &\in \{[1, 1, 1], [1, -1, 1]\} \end{aligned}$$

gilt. Denn wir finden Elemente der Automorphismen-Gruppe von  $\overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})}$  derart, dass die Verknüpfung von  $\varphi$  mit diesen Automorphismen die Punkte wie gewünscht abbildet: Es gibt eine Abbildung  $\sigma \in \tilde{\Sigma}_1^{\mathbb{F}}$  mit  $g_\infty^{\varphi\sigma} = g_\infty$ . Dann gilt  $y_\infty^{\varphi\sigma} = y_\infty$ . Wir finden außerdem eine Translation  $\tau$  aus  $\tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}}$  derart, dass  $[0, 0, 1]^{\varphi\sigma\tau} = [0, 0, 1]$  gilt. Ferner finden wir einen Automorphismus der Form

$$\tilde{\sigma} := \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & c \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}}$$

mit  $ac > 0$  derart, dass  $[1, 1, 1]^{\varphi\sigma\tau\tilde{\sigma}} \in \{[1, 1, 1], [1, -1, 1]\}$  gilt. Denn die Menge der Automorphismen dieser Form wirkt transitiv auf jeder der beiden Punktfolgen

$$\{[x, y, 1] \mid y > 0, x \neq 0\} \quad \text{und} \quad \{[x, y, 1] \mid y < 0, x \neq 0\}.$$

Wir betrachten zuerst den Fall  $[1, 1, 1]^\varphi = [1, 1, 1]$ . Dann gilt  $l_{1,0}^\varphi = l_{1,0}$ . Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt  $[r, r, 1] \in l_{1,0}$  mit  $[r, r, 1]^\varphi = [\tilde{r}, \tilde{r}, 1]$ , wobei  $r > 0$  und  $\tilde{r} < 0$  gelten soll. Sei

$$\psi = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & r \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Dann gilt

$$[\tilde{r}, \tilde{r}, 1]^{\varphi^{-1}\psi\varphi} = [1, 1, 1].$$

Weil die Lineation  $\psi$  das Zentrum  $[0, 0, 1]$  und die Achse  $g_\infty$  besitzt, hat auch die Lineation  $\varphi^{-1}\psi\varphi$  das Zentrum  $[0, 0, 1]$  und die Achse  $g_\infty$ . Folglich besteht die Gruppe

$$\left\langle \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^{\overline{\mathcal{O}}} \mid a \in \mathbb{F}, a > 0 \right\}, \langle \varphi^{-1}\psi\varphi \rangle \right\rangle$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

aus Homologien mit Zentrum  $[0, 0, 1]$  und Achse  $g_\infty$  und ist  $([0, 0, 1], g_\infty)$ -transitiv. Das ist ein Widerspruch dazu, dass die Pickert-Moulton-Ebenen den Lenz-Barlotti-Typ III.2 besitzen. Wenn  $[1, 1, 1]^\varphi = [1, -1, 1]$  gilt, bilden wir die Ebene  $\overline{\mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F})}$  mit der stetigen Lineation  $(\text{id}, [C])$  aus 4.8.10 auf  $\overline{\mathcal{M}_{\frac{1}{k'}}(\mathbb{F})}$  ab und erhalten den eben behandelten Fall. Es folgt ebenfalls ein Widerspruch. Insgesamt erhalten wir, dass  $\varphi$  ordnungserhaltend und somit stetig ist, weil die Ebene mit der Anordnungs-Topologie topologisiert ist (vgl [48, V §2 Satz 24].  $\blacksquare$

**4.8.12 Satz.** *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

- (i)  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  ist isomorph zu  $\overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})}$ .
- (ii) Es existiert ein ordnungserhaltender Körper-Automorphismus  $\alpha$  von  $\mathbb{F}$  derart, dass  $k^\alpha = \tilde{k}$  oder  $k^\alpha = (\tilde{k})^{-1}$  gilt.
- (iii) Es existiert eine Lineation  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}, \overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})})$  mit nicht desarguesschem Definitionsgebiet.

Die Menge

$$\left\{ \overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})} \mid \text{es existiert } \alpha \in \text{oAut} \text{ mit } \tilde{k} = k^\alpha \text{ oder } (\tilde{k})^{-1} = k^\alpha \right\}$$

der zu  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  isomorphen Pickert-Moulton-Ebenen über  $\mathbb{F}$  ist die Bahn von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  unter der Gruppe

$$\{(\gamma, \mathbf{1}^\lambda) \mid \gamma \in \text{oAut}(\mathbb{F})\} \times \langle (\text{id}, [C]) \rangle ,$$

wobei  $[C]$  wie in 4.8.10 definiert ist.

**Beweis.** „(i) $\implies$ (ii)“: Ein Isomorphismus  $\varphi : \overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})}$  ist eine bijektive Lineation. Nach 4.8.11 ist diese Lineation stetig und offen. Da  $\text{dom}(\varphi) = \overline{P^\mathbb{F}}$  nicht desarguessch ist, folgt wegen 4.8.8 die Aussage (ii).

„(ii) $\implies$ (i)“: Sei  $\alpha$  ein ordnungserhaltender Körperautomorphismus von  $\mathbb{F}$ . Dann induziert die Abbildung  $(\alpha, \mathbf{1}^\lambda) \in \text{PFL}_3 \mathbb{F}$  eine stetige bijektive Lineation von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  auf  $\overline{\mathcal{M}_{k^\alpha}(\mathbb{F})}$ . Denn für  $x, t \in \mathbb{F}$ ,  $\mathbb{F} \ni s > 0$  und  $\mathbb{F} \ni \tilde{s} < 0$  gilt

$$\begin{aligned} l_x^{(\alpha, \mathbf{1})} &= l_{x^\alpha} , \\ l_{s,t}^{(\alpha, \mathbf{1})} &= l_{s^\alpha, t^\alpha} \text{ und} \\ (l_{\tilde{s}, t}^k)^{(\alpha, \mathbf{1})} &= l_{\tilde{s}^\alpha, t^\alpha}^{k^\alpha} . \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $l_{\tilde{s}, t}^k$  eine geknickte Gerade in  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ . Wenn  $k^\alpha = \tilde{k}$  ist, dann ist  $(\alpha, \mathbf{1}^\lambda)$  der gewünschte Isomorphismus. Wenn  $k^\alpha = (\tilde{k})^{-1}$  ist, dann ist nach 4.8.10 die Abbildung  $(\alpha, [C])$  mit  $[C]$  wie in 4.8.10 der gewünschte Isomorphismus.

Nach 4.8.8 und 4.2.17 gilt „(iii) $\implies$ (ii)“. Also müssen wir nur noch „(ii) $\implies$ (iii)“ zeigen: Der in „(ii) $\implies$ (i)“ konstruierte Isomorphismus  $(\alpha, \mathbf{1}^\lambda)$  bzw.  $(\alpha, [C])$  ist eine stetige injektive

#### 4.9. Die Struktur von $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$

offene partielle Lineation, die auf einem nicht desarguesschen Gebiet definiert ist. Also ist  $(\alpha, \mathbf{1})$  bzw.  $(\alpha, [C])$  das gewünschte Element aus  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}, \overline{\mathcal{M}_{\bar{k}}(\mathbb{F})})$ .

Wenn die Ebenen  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  und  $\overline{\mathcal{M}_{\bar{k}}(\mathbb{F})}$  isomorph sind, gibt es einen der in „(ii) $\implies$ (i)“ konstruierten Isomorphismen. Deswegen besteht die Menge aller zu  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  isomorphen Pickert-Moulton-Ebenen über  $\mathbb{F}$  aus der Bahn unter der angegebenen Gruppe. ■

Wir wollen nun eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  erstellen. Sei  $(\beta, B^{\overline{\mathcal{Q}}}) \in \tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$ . Dann ist der Körperautomorphismus  $\beta$  ordnungserhaltend. Für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ist folglich  $A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F}$  genau dann ein Element von  $\text{dom } \sigma_i$ , wenn  $A^\beta \in \text{dom } \sigma_i$  gilt. Also erfahren wir aus Lemma 4.2.21, in welchem Definitionsgebiet das Produkt  $AB$  in den verschiedenen Fällen liegt. Folglich erhalten wir analog zu 4.2.22 die folgenden Verknüpfungsregeln:

**4.8.13 Lemma.** *Es gilt*

$$(\alpha, A^{\sigma_i}) \circ (\beta, B^{\sigma_j}) = (\alpha\beta, (A^\beta)^{\sigma_i} \circ B^{\sigma_j}) .$$

Den Wert von  $(A^\beta)^{\sigma_i} \circ B^{\sigma_j}$  entnimmt man aus 4.2.22. Mit der Abbildung  $(\overline{\mathcal{Q}})$  erhalten wir Folgendes:

$$(\alpha, A^{\overline{\mathcal{Q}}}) \circ (\beta, B^{\overline{\mathcal{Q}}}) = \begin{cases} (\alpha\beta, (kA^\beta B)^{\overline{\mathcal{Q}}}) & \text{wenn } A, B \in \text{dom } \sigma_2 \text{ und } AB \notin \text{dom } \sigma_2 \\ (\alpha\beta, (k^{-1}A^\beta B)^{\overline{\mathcal{Q}}}) & \text{wenn } A, B \in \text{dom } \sigma_1 \text{ und } AB \in \text{dom } \sigma_2 \\ & \text{oder } A, B \in \text{dom } \sigma_4 \\ & \text{oder } (A, B) \in \text{dom } \sigma_1 \times \text{dom } \sigma_4 \cup \text{dom } \sigma_4 \times \text{dom } \sigma_1 \\ (\alpha\beta, (A^\beta B)^{\overline{\mathcal{Q}}}) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\alpha, A^{\overline{\mathcal{Q}}})^{-1} = \begin{cases} (\alpha^{-1}, (k(A^{\alpha^{-1}})^{-1})^{\overline{\mathcal{Q}}}) & \text{wenn } A \in \text{dom } \sigma_4 \\ (\alpha^{-1}, ((A^{\alpha^{-1}})^{-1})^{\overline{\mathcal{Q}}}) & \text{sonst} \end{cases}$$

### 4.9. Die Struktur von $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$

**4.9.1 Definition.** *Sei*

$$\Sigma^{\mathbb{F}} := \left\{ (\text{id}, A^{\overline{\mathcal{Q}}}) \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F} \right\} ,$$

$$S^{\mathbb{F}} := \left\{ (\text{id}, (k^r C)^{\overline{\mathcal{Q}}}) \mid r \in \mathbb{Z}, C \in \text{SL}_2 \mathbb{F} \right\}$$

und

$$\tilde{\mathbb{F}} := \left\{ (\alpha, \mathbf{1}^{\overline{\mathcal{Q}}}) \mid \alpha \in \text{oAut}(\mathbb{F}), k^\alpha = k \right\} .$$

Im Fall  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ist  $\Sigma^{\mathbb{R}} \cong \Sigma$  und  $S^{\mathbb{R}} \cong S$  mit der in 4.3.2 definierten Gruppe  $S$ .

**4.9.2 Satz.** *Die Gruppe  $\Sigma^{\mathbb{F}}$  ist ein Normalteiler von  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$ . Es gilt*

$$\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}} = \Sigma^{\mathbb{F}} \rtimes \tilde{\mathbb{F}} .$$

#### 4. Die Moulton-Ebenen

**Beweis.** Für  $(\beta, B^{\overline{\mathcal{O}}}) \in \tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  und  $(\text{id}, A^{\overline{\mathcal{O}}}) \in \Sigma^{\mathbb{F}}$  gilt

$$\begin{aligned} (\beta, B^{\overline{\mathcal{O}}})(\text{id}, A^{\overline{\mathcal{O}}})(\beta, B^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1} &= (\beta, B^{\overline{\mathcal{O}}}A^{\overline{\mathcal{O}}})(\beta^{-1}, ((B^{\beta^{-1}})^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}}) \\ &= (\text{id}, B^{\overline{\mathcal{O}}}A^{\overline{\mathcal{O}}}((B^{\beta^{-1}})^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}}) \in \Sigma^{\mathbb{F}} . \end{aligned}$$

Um einzusehen, dass der Schnitt von  $\Sigma^{\mathbb{F}}$  und  $\tilde{\mathbb{F}}$  trivial ist, betrachten wir das Viereck mit den Ecken  $o := [0, 0, 1]$ ,  $x_{\infty}$ ,  $e := [1, 1, 1]$ ,  $y_{\infty}$ . Die Untergruppe  $\tilde{\mathbb{F}}$  fixiert dieses Viereck, hingegen gilt  $\Sigma_{(o, x_{\infty}, e, y_{\infty})}^{\mathbb{F}} = \{(\text{id}, \mathbf{1}^{\overline{\mathcal{O}}})\}$ . ■

**4.9.3 Lemma.** Die Gruppe  $S^{\mathbb{F}}$  ist perfekt. Es gilt

$$\begin{aligned} Z(\Sigma^{\mathbb{F}}) &= \left\{ (\text{id}, (f\mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}}) \mid f \in \mathbb{F} \right\} \text{ und} \\ Z(S^{\mathbb{F}}) &= \left\langle (\text{id}, (-1)^{\overline{\mathcal{O}}}) \right\rangle \\ &= \left\langle (\text{id}, (k\mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}}) \right\rangle \cup \left\langle (\text{id}, (k\mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}}) \right\rangle (\text{id}, (-1)^{\overline{\mathcal{O}}}) \\ &= (Z(S^{\mathbb{F}}) \cap \tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}}) \cup (Z(S^{\mathbb{F}}) \cap \tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}})(\text{id}, (-1)^{\overline{\mathcal{O}}}) . \end{aligned}$$

Das Zentrum von  $\Sigma^{\mathbb{F}}$  besteht aus allen Homologien von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  mit Achse  $l_0$  und Zentrum  $x_{\infty}$ .

**Beweis.** Das Zentrum von  $\Sigma^{\mathbb{F}}$  und von  $S^{\mathbb{F}}$  berechnen wir genauso wie in 4.3.3.

Die Aussage  $(S^{\mathbb{F}})' = S^{\mathbb{F}}$  beweisen wir analog zu dem Fall  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ : Wie in 4.3.4 zeigen wir, dass für alle  $x \in \mathbb{F}$  die Automorphismen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\overline{\mathcal{O}}} \text{ und } (k^{-1}\mathbf{1})^{\overline{\mathcal{O}}}$$

Elemente von  $(S^{\mathbb{F}})'$  sind und dass sich jedes Element aus  $S^{\mathbb{F}}$  als Produkt dieser Elemente schreiben lässt. Deswegen gilt  $S^{\mathbb{F}} = (S^{\mathbb{F}})'$ .

Ein Automorphismus  $(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})$  hat genau dann die Achse  $l_0$ , wenn

$$[0, y, 1] = [0, y, 1]^{(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})} = [0, y^{\alpha}, 1]^{A^{\lambda}}$$

gilt. Da  $x_{\infty}$  ein Fixpunkt ist, ist  $(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})$  eine affine Abbildung. Sei also

$$A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ h & j \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F} .$$

Dann gilt für alle  $y$ , die im Primkörper von  $\mathbb{F}$  liegen, die Gleichheit

$$[0, y, 1] = [0, ey + h, j] .$$

Folglich gilt  $h = 0$  und  $e = j$ . Insgesamt erhalten wir, dass für alle  $y \in \mathbb{F}$

$$[0, y, 1] = [0, y^{\alpha}, 1]$$

gilt. Es folgt  $\alpha = \text{id}$ . ■

**4.9.4 Satz.** *Es gilt*

$$(\Sigma^{\mathbb{F}})' = S^{\mathbb{F}} .$$

Die Kommutatorgruppe  $(\Sigma^{\mathbb{F}})'$  ist das Gruppenerzeugnis aller Elationen von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ .

**Beweis.** Die Aussage, dass  $(\Sigma^{\mathbb{F}})' = S^{\mathbb{F}}$  gilt, beweisen wir genauso wie im reellen Fall (vgl. Satz 4.3.5).

Nun bestimmen wir die Menge aller Automorphismen von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  mit Achse  $g_{\infty}$  und Zentrum  $y_{\infty}$ . Sei  $(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}}) \in (\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}})_{[y_{\infty}, g_{\infty}]}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & j \end{pmatrix} .$$

Da  $g_{\infty}$  Achse ist, ist  $(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})$  ein Automorphismus der affinen Pickert-Moulton-Ebene. Folglich gilt  $f = 0$ . Aus der Definition der Abbildung  $A^{\overline{\mathcal{O}}}$  lesen wir ab, dass die Abbildung  $(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})$  auf einer der beiden Mengen

$$\{[x, y, 0] \in g_{\infty} \mid xy > 0\} \text{ bzw. } \{[x, y, 0] \in g_{\infty} \mid xy < 0\}$$

als Abbildung  $(\alpha, A^{\lambda})$  wirkt. Da  $g_{\infty}$  Achse ist, gilt also für alle  $[x, y, 0] \in g_{\infty}$  mit  $xy > 0$  oder für alle  $[x, y, 0]$  mit  $xy < 0$  die Gleichheit

$$[x, y, 0]^{(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}})} = [x^{\alpha}, y^{\alpha}e, 0] = [x, y, 0] .$$

Folglich erhalten wir, dass  $\alpha$  die Identität ist und  $e = 1$  gilt. Es folgt  $j > 0$  und  $(\alpha, A^{\overline{\mathcal{O}}}) = (\alpha, A^{\sigma_3})$ . Für  $x \in \mathbb{F}$  werden die Geraden  $l_x$  in sich abgebildet, weil  $y_{\infty}$  Zentrum ist. Also erhalten wir

$$[x, t, 1]^{(\text{id}, A^{\sigma_3})} = [x, t + h, j] \in l_x .$$

Es folgt  $j = 1$ . Wir erhalten das Ergebnis

$$(\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}})_{[y_{\infty}, g_{\infty}]} = \left\{ (\text{id}, A^{\sigma_3}) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } h \in \mathbb{F} \right\} .$$

Durch Konjugation mit Elementen  $(\text{id}, B^{\overline{\mathcal{O}}})$  aus  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  erhalten wir alle Elationen, deren Achse durch  $x_{\infty}$  geht und deren Zentrum auf  $l_0$  liegt. Für  $(\text{id}, B^{\overline{\mathcal{O}}})$  gilt

$$(\text{id}, B^{\overline{\mathcal{O}}})(\text{id}, A^{\sigma_3})(\text{id}, B^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1} = (\text{id}, (BAB^{-1})^{\overline{\mathcal{O}}}) ,$$

wie wir aus der Verknüpfungstafel 4.8.13 ablesen können. Also gilt

$$(\text{id}, B^{\overline{\mathcal{O}}})(\text{id}, A^{\sigma_3})(\text{id}, (B^{\overline{\mathcal{O}}})^{-1}) \in S^{\mathbb{F}} .$$

Eine Elation von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  hat als Achse eine Gerade durch  $x_{\infty}$ , weil  $x_{\infty}$  Fixpunkt ist und ihr Zentrum liegt auf  $l_0$ , weil  $l_0$  von allen Automorphismen in sich abgebildet wird. Folglich ist sie eine von den berechneten Elationen. ■

#### 4. Die Moulton-Ebenen

YAQUB betrachtet in [72] Pickert-Moulton-Ebenen über einem angeordneten Schiefkörper. Sie zeigt dort, dass Pickert-Moulton-Ebenen genau dann den Lenz-Barlotti-Typ III.2 besitzen, wenn der Knickfaktor  $k$  im Zentrum des Schiefkörpers liegt, andernfalls haben sie den Lenz-Barlotti-Typ III.1. In dieser Arbeit betrachten wir nur Pickert-Moulton-Ebenen über kommutativen Körpern. Wir haben nun genau die axialen Automorphismen von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  berechnet, die man für den Lenz-Barlotti-Typ III.2 braucht. Dass der Lenz-Barlotti-Typ nicht größer sein kann, ist eine Folgerung aus der Tatsache, dass jede angeordnete Moulton-Ebene desarguessch ist [48, V Satz 2].

Wir betrachten hier die Automorphismen-Gruppe  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{F}}$  ohne jegliche Topologie, deswegen fragen wir nun auch nicht nach lokaler Isomorphie oder einer Überlagerungsabbildung. Trotzdem ist die in 4.3.8 definierte Abbildung von Interesse. Auf der Gruppe  $S^{\mathbb{F}}$  induziert  $\nu$  einen Gruppenhomomorphismus mit dem Kern  $Z(S^{\mathbb{F}}) \cap \tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}}$ .

**4.9.5 Lemma.** *Wir betrachten die folgenden Abbildungen.*

$$\nu^{\mathbb{F}} : S^{\mathbb{F}} \rightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{F} : (\mathrm{id}, (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}}) \mapsto C$$

$$\bar{\nu}^{\mathbb{F}} : S^{\mathbb{F}} \rightarrow \mathrm{PSL}_2 \mathbb{F} : (\mathrm{id}, (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}}) \mapsto [C] .$$

Dann sind  $\nu^{\mathbb{F}}$  und  $\bar{\nu}^{\mathbb{F}}$  surjektive Gruppenhomomorphismen mit  $\mathrm{Ker}(\bar{\nu}^{\mathbb{F}}) = Z(S^{\mathbb{F}})$  und  $\mathrm{Ker}(\nu^{\mathbb{F}}) = Z(S^{\mathbb{F}}) \cap \tilde{\Sigma}_3^{\mathbb{F}}$ . Folglich gilt

$$\frac{S^{\mathbb{F}}}{Z(S^{\mathbb{F}})} \cong \mathrm{PSL}_2 \mathbb{R}$$

$$\frac{S^{\mathbb{F}}}{\langle (\mathrm{id}, (k\mathbb{1})^{\overline{\mathcal{O}}}) \rangle} \cong \mathrm{SL}_2 \mathbb{F}$$

und  $S^{\mathbb{F}}$  ist eine zentrale Erweiterung von  $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{F}$  und auch von  $\mathrm{SL}_2 \mathbb{F}$ .

**Beweis.** Dass  $\nu^{\mathbb{F}}$  ein Gruppenhomomorphismus ist, beweisen wir genauso wie bei  $\nu$  im Beweis von 4.3.8 Schritt 1. Die Surjektivität von  $\nu$  sieht man an der Definition von  $S^{\mathbb{F}}$ . Ferner gilt genau dann  $(\mathrm{id}, (k^r C)^{\overline{\mathcal{O}}})\nu^{\mathbb{F}} = \mathbb{1}^{\tilde{\lambda}}$ , wenn  $C = \mathbb{1}$  gilt. Insgesamt erhalten wir obige Isomorphismen. ■

#### 4.10. Maximale partielle Lineationen von $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$

Die Betrachtung der maximalen partiellen Lineationen von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  verläuft völlig analog zum reellen Fall. In Anlehnung an 4.5.2 definieren wir:

**4.10.1 Definition.** Sei  $(\beta, \chi) \in \mathrm{PTL}_3 \mathbb{F}$ . Wir definieren mit den Bezeichnungen von 4.1.12 für  $X, Y \in \{S, F\}$  auf  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  die folgenden Abbildungen

$$\alpha_{XY}(\beta, \chi) := \llbracket 1|c(X) \rrbracket \iota_k \diamond (\beta, \chi) \diamond \iota_k^{-1} \llbracket 1|c(Y) \rrbracket^{-1}$$

mit

$$c(X) = \begin{cases} 1 & \text{für } X = S \\ k^{-1} & \text{für } X = F \end{cases}$$

Wir erinnern uns an die in 4.5.1 gemachte Definition von Restriktionen und Corestriktionen von partiellen Lineationen. Außerdem erinnern wir uns, dass ein ordnungserhaltender Automorphismus von  $\mathbb{F}$ , einen Automorphismus von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  induziert, welcher die beiden Halbebenen  $H_L$  und  $H_R$  jeweils in sich abbildet. Dabei werden steigende Geraden auf steigende und fallende Geraden auf fallende Geraden abgebildet. Deswegen erhalten wir aus den Beweisen von 4.5.3, 4.5.4 und 4.5.5 durch Ersetzen von  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{F}$  und  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  durch  $\text{PGL}_3\mathbb{F}$  und das Zitieren des lokalen Fundamentalsatzes von FRANK [5, Satz 1] an der Stelle, an der im reellen Fall der lokale Fundamentalsatz von LÖWEN zitiert wird, die Beweise für 4.10.2, 4.10.3 und 4.10.4. Dabei benutzen wir das Ergebnis 4.8.7, dass stetige partielle Lineationen von ordnungserhaltenden Körperautomorphismen induziert werden.

**4.10.2 Lemma.** *Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.1.12. Sei  $\chi \in \text{PGL}_3\mathbb{F}$ ,  $\beta \in \text{oAut}(\mathbb{F})$  und  $X, Y \in \{S, F\}$ . Sei  $c(X)$  wie in 4.10.1 und  $p, q \in \mathbb{F} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Wenn  $X(p)^{\llbracket 1^{c(X)} \rrbracket_{\ell_k(\beta, \chi)}} \cap Y(q)^{\llbracket 1^{c(Y)} \rrbracket_{\ell_k}} \neq \emptyset$  gilt, dann ist die Abbildung*

$$(\alpha_{XY}(\beta, \chi)) \Big|_{X(p)}^{Y(q)}$$

ein Element von  $\Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$ .

**4.10.3 Lemma.** *Sei  $\psi \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$  mit desarguesschen Definitionsgebiet  $\text{dom}\psi$ . Dann gibt es  $\chi \in \text{PGL}_3\mathbb{F}$  sowie  $\beta \in \text{oAut}(\mathbb{F})$  und  $X, Y \in \{S, F\}$  so, dass  $\psi$  die Restriktion der Abbildung  $\alpha_{XY}(\beta, \chi)$  ist.*

**4.10.4 Korollar.**

$$\Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}) \subset \left\{ \alpha_{XY}(\beta, \chi) \Big|_{X(p)}^{Y(q)} \mid \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{F} \cup \{-\infty, \infty\}, X, Y \in \{F, S\}, \\ \chi \in \text{PGL}_3\mathbb{F}, \beta \in \text{oAut}(\mathbb{F}) \end{array} \right\} \cup \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$$

In dem Beweis von 4.5.6 benutzen wir in dem Teil (v), in dem wir zeigen dass keine ganze Gerade der reellen projektiven Ebene im Abschluss eines Dreiecks liegt, Zusammenhangskomponenten. An dieser Stelle beweisen wir diese Aussage in  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  ohne Zusammenhangskomponenten zu benutzen.

**4.10.5 Bemerkung.** *Seien  $X, Y \in \{S, F\}$  und  $p, q \in \mathbb{F} \cup \{\infty, -\infty\}$  und  $\chi \in \text{PGL}_3\mathbb{F}$  und  $\beta \in \text{oAut}(\mathbb{F})$ . Sei  $l_0 \wedge l_{0,p} \in (l_0 \cup l_{0,q})^{(\beta, \chi)^{-1}} \setminus \{l_0 \wedge l_{0,q}\}^{(\beta, \chi)^{-1}}$  und  $(l_0 \wedge l_{0,q})^{(\beta, \chi)^{-1}} \in l_0 \cup l_{0,p} \setminus \{l_0 \wedge l_{0,p}\}$ . Dann ist die Gerade  $l := (l_0 \wedge l_{0,p}) \vee (l_0 \wedge l_{0,q})^{(\beta, \chi)^{-1}} \in \overline{\mathcal{L}}$  keine Teilmenge von  $X(p) \cap Y(q)^{(\beta, \chi)^{-1}}$ .*

**Beweis.** Sei  $\{g\} = \{l_0, l_{0,p}\} \setminus \{l\}$  und sei  $\{h\} = \{l_0^{(\beta, \chi)^{-1}}, l_{0,q}^{(\beta, \chi)^{-1}}\} \setminus \{l\}$ . Wir bezeichnen  $O := g \wedge l = l_0 \wedge l_{0,p}$ ,  $V := l \wedge h$  und  $U := h \wedge g$ . Wir wählen einen Punkt  $E \in X(p) \cap Y(q)^{(\beta, \chi)^{-1}}$  und koordinatisieren die affine Ableitung von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$  an der Geraden  $U \vee V$  wie in [55, 22.1] mit dem Viereck  $O, U, V, E$ . Da nach [48, V.2 Satz 15] für eine papposche angeordnete projektive Ebenen die zu verschiedenen Punktequadrupeln gebildeten



#### 4. Die Moulton-Ebenen

Ternärkörper angeordnete Körper sind, und diese alle zueinander o-isomorph sind, können wir die Punktmenge als  $\mathbb{F}^2$  betrachten. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} X(p) &= \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid xy > 0\} , \\ Y(q)^{(\beta, \chi)^{-1}} &= \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid x > 0\} \text{ und} \\ X(p) \cap Y(q)^{(\beta, \chi)^{-1}} &= \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid xy > 0 \text{ und } x > 0\} . \end{aligned}$$

Nach [48, V.2 Satz 24] bilden die konvexen Vierecke eine Basis für die Topologie der angeordneten Ebene. Die Menge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid -1 < x < 1, -2 < y < -\frac{1}{2} \right\}$$

ist also eine offene Umgebung des Punktes  $(0, -1) \in l$ , die mit  $X(p) \cap Y(q)^{(\beta, \chi)^{-1}}$  leeren Schnitt hat. Folglich ist  $l$  keine Teilmenge von  $\overline{X(p) \cap Y(q)^{(\beta, \chi)^{-1}}}$ . ■

In Lemma 4.5.7 wird unter der Voraussetzung, dass es eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}$  mit  $l \subset \overline{X(\tilde{p}) \cap Y(\tilde{q})^{\chi^{-1}}}$  gibt, untersucht, für welche Geraden  $l_{0, \tilde{p}}$  und  $l_{0, \tilde{q}}$  die Inklusion

$$X(p) \cap Y(q)^{\chi^{-1}} \subset X(\tilde{p}) \cap Y(\tilde{q})^{\chi^{-1}}$$

erfüllt ist. Das Ergebnis ist, dass  $l_{0, \tilde{p}} = l_{0, p}$  und  $l_{0, \tilde{q}} = l_{0, q}$  gilt. Mithilfe von Bemerkung 4.10.5 erhalten wir aus dem Beweis von Lemma 4.5.7 den Beweis für das folgende Lemma.

**4.10.6 Lemma.** *Seien  $X, Y \in \{S, F\}$  und  $p, q \in \mathbb{F} \cup \{\infty, -\infty\}$  sowie  $\chi \in \text{PGL}_3 \mathbb{F}$  und  $\beta \in \text{oAut}(\mathbb{F})$  derart, dass  $(\beta, \chi) \notin \{\gamma \in \text{oAut} \mid k^\gamma = k\} \times \{A^\lambda \mid A \in \text{GL}_2^+ \mathbb{F}\}$ . Sei  $\psi = (\alpha_{XY}(\beta, \chi)) \Big|_{X(p)}^{Y(q)} \in \Psi(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$ . Wenn es eine Gerade  $l \in \overline{\mathcal{L}}$  gibt mit  $l \subset \overline{X(p) \cap Y(q)^{(\beta, \chi^{-1})}}$ , dann gilt  $\psi \in \Psi_{\max}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$ . (Wir schreiben hier statt  $g_\infty$  einfach  $l_{0, \infty} = l_{0, -\infty}$ , wenn  $p \in \{\infty, -\infty\}$  oder wenn  $q \in \{\infty, -\infty\}$ .)*

## A. Anhang

### Topologische Gruppen und Liegruppen

In diesem Kapitel wollen wir darstellen, dass eine topologische Gruppe, die lokal isomorph zu einer Liegruppe ist, selbst eine Liegruppe ist. Wir zitieren hier aus der Vorlesung über Liegruppen, die HÄHL im Winter-Semester 1998/1999 an der Universität Stuttgart gelesen hat. Dort findet man die im Folgenden aufgeführte schöne Definition A.4 einer Liegruppe, die ohne den Begriff Mannigfaltigkeit auskommt.

**A.1 Definition.** [70, 3.1] *Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe  $G$ , die gleichzeitig ein topologischer Raum ist derart, dass die durch die Gruppenoperationen gegebenen Abbildungen*

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\rightarrow G : (g, h) \mapsto gh \\ \iota : G &\rightarrow G : g \mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

*stetig sind.*

Aus dieser Definition erhalten wir Folgendes:

**A.2 Bemerkung.** *Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Für  $a \in G$  sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned}\lambda_a : G &\rightarrow G : x \mapsto ax, \\ \rho_a : G &\rightarrow G : x \mapsto xa\end{aligned}$$

*und die Inversion Homöomorphismen.*

**Beweis.** [70, 3.10] ■

Damit lassen sich die folgenden Aussagen leicht zeigen:

**A.3 Lemma.** *Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Dann hat eine beliebige Umgebungsbasis  $\mathcal{W}$  der 1 in  $G$  folgende Eigenschaften:*

- (i)  $\forall U, V \in \mathcal{W} \quad \exists W \in \mathcal{W} : W \subseteq U \cap V$
- (ii)  $\forall U \in \mathcal{W} \quad \exists W \in \mathcal{W} : WW \subseteq U$
- (iii)  $\forall U \in \mathcal{W} \quad \exists W \in \mathcal{W} : W^{-1} \subseteq U$
- (iv)  $\forall U \in \mathcal{W} \quad \forall a \in G \quad \exists W \in \mathcal{W} : aWa^{-1} \subseteq U.$

**Beweis.** [70, 3.21] ■

**A.4 Definition.** [21] *Eine Liegruppe ist eine hausdorffsche topologische Gruppe  $G$  für die Folgendes existiert:*

## Anhang

- Eine offene Umgebung  $U$  von  $1$  in  $G$
- eine offene Teilmenge  $\overrightarrow{U} \subset \mathbb{R}^n$
- ein Homöomorphismus  $\rightarrow : U \rightarrow \overrightarrow{U} : g \mapsto \overrightarrow{g}$

mit folgenden Differenzierbarkeitseigenschaften: Es existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $1$  in  $G$  mit  $VV \subseteq U$  und  $V^{-1} \subseteq U$  derart, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mu} : \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{V} &: (\overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}) \mapsto \overrightarrow{gh} \text{ für } g, h \in V \\ \overrightarrow{\iota} : \overrightarrow{V} \rightarrow \overrightarrow{V} &: \overrightarrow{g} \mapsto \overrightarrow{g^{-1}} \text{ für } g \in V\end{aligned}$$

analytisch sind.

Man kann annehmen, dass  $U$  so gewählt ist, dass die Differenzierbarkeitsforderung an  $\overrightarrow{\mu}$  und  $\overrightarrow{\iota}$  für jede offene Umgebung  $V$  von  $1$  in  $G$  mit  $VV \subseteq U$  und  $V^{-1} \subseteq U$  gilt.

Das Paar  $(U, \rightarrow)$  heißt dann (analytische) Karte von  $G$ .

Aus der Karte um  $1$  in  $G$  wird auf folgende Weise eine Karte um ein Element  $a \in G$  konstruiert:

**A.5 Bemerkung.** [21] Sei  $G$  eine Liegruppe und  $(U, \rightarrow)$  eine Karte von  $G$ . Wegen der Stetigkeit von  $\mu$  und  $\iota$  gibt es offene Umgebungen der  $1$  in  $G$  derart, dass  $VV^{-1} \subseteq U$  und  $WW^{-1} \subseteq V$  gilt. Für beliebige  $a \in G$  erhält man mit der Abbildung  $\rho_a$  aus A.2 einen Homöomorphismus

$$\overrightarrow{\rho_a^{-1}} : Ua \rightarrow \overrightarrow{U} : x \mapsto \overrightarrow{xa^{-1}} .$$

**A.6 Lemma.** [21] Eine Liegruppe  $G$  im Sinne von Definition A.4 ist eine analytische Mannigfaltigkeit.

**Beweis.** Seien die Umgebungen  $U$  und  $V$  gewählt wie in A.4, das heißt insbesondere ist  $(U, \rightarrow)$  eine Karte von  $G$ . Nach A.5 gibt es eine Umgebung  $W$  von  $1$  in  $G$  mit  $W^{-1}W \subseteq V$ . Für  $a, b \in G$  sind nach A.2 die Mengen  $Wa$  und  $Wb$  Umgebungen von  $a$  bzw.  $b$ . Seien nun  $a$  und  $b$  in  $G$  so gewählt, dass  $Wa \cap Wb \neq \emptyset$  gilt. Seien  $\overrightarrow{W_1} := (Wa \cap Wb)^{\overrightarrow{\rho_a^{-1}}}$  und  $\overrightarrow{W_2} := (Wa \cap Wb)^{\overrightarrow{\rho_b^{-1}}}$ , dann ist die Kartenwechselabbildung

$$\Phi : \overrightarrow{W_2} \rightarrow \overrightarrow{W_1} : \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x} \left( \overrightarrow{\rho_b^{-1}} \right)^{-1} \overrightarrow{\rho_a^{-1}} = \overrightarrow{xba^{-1}}$$

analytisch. Denn für  $x \in Wa \cap Wb$  existieren  $w_1, w_2 \in W$  derart, dass  $x = w_1a = w_2b$  gilt. Folglich ist  $w_2^{-1}w_1 = ba^{-1}$ , und weil  $W^{-1}W \subset V$  gilt, liegt  $ba^{-1}$  in  $V$ . ■

**A.7 Lemma.** Die Zusammenhangskomponente einer Liegruppe im Sinne von Definition A.4 ist eine analytische Mannigfaltigkeit mit analytischer Gruppenmultiplikation und -inversion.

**Beweis.** Sei  $G$  eine Liegruppe im Sinne von Definition A.4. Nach [70, 4.9] ist die Zusammenhangskomponente der 1 einer topologischen Gruppe eine topologische Gruppe. Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponente der 1 in  $G$  mit  $G_1$ . Die Umgebung  $U$  aus Definition A.4 kann zusammenhängend gewählt werden, da es im  $\mathbb{R}^n$  beliebig kleine zusammenhängende Umgebungen gibt. Folglich ist  $G_1$  nach [70, 4.10] offen in  $G$ . Wegen A.6 folgt, dass  $G_1$  eine Mannigfaltigkeit ist. Insgesamt ist  $G$  eine lokale Liegruppe nach Definition in [53, 4.4] (Vorsicht: SAGLE und WALDE definieren in [53, 3.7] eine lokale Gruppe anders als wir in Definition 1.7.1). Es folgt nach [53, 4.7], dass in  $G_1$  die Gruppenmultiplikation und die Inversion analytisch sind, dass also  $G_1$  eine Liegruppe im Sinne von [53, Def. 4.1] ist. ■

**A.8 Satz.** [21] *Eine Liegruppe im Sinne von Definition A.4 ist eine analytische Mannigfaltigkeit mit analytischer Gruppenmultiplikation und -inversion, also eine Liegruppe im Sinne von [53, Def. 4.1].*

**Beweis.** Sei  $G$  eine Liegruppe im Sinne von Definition A.4. Dann ist  $G$  nach A.6 eine Mannigfaltigkeit.

Seien die Umgebungen  $U$  und  $V$  gewählt wie in A.4. Sei  $W$  gewählt wie im Beweis von A.6. Wir zeigen nun, dass die Multiplikation überall analytisch ist. Wir wählen  $a$  und  $b$  in  $G$  beliebig. Da die Multiplikation stetig ist, gibt es eine Umgebung  $\tilde{W}$  von 1 derart, dass  $\tilde{W}a\tilde{W}b \subseteq Wab$  und  $a\tilde{W}a^{-1} \subset W$  gilt. Seien  $xa \in \tilde{W}a$  und  $yb \in \tilde{W}b$ . Wir wollen einsehen, dass die Abbildung

$$((xa)^{\overrightarrow{\rho_a^{-1}}}, (yb)^{\overrightarrow{\rho_b^{-1}}}) \mapsto (xayb)^{\overrightarrow{\rho_{ab}^{-1}}},$$

also die Abbildung

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \mapsto \overrightarrow{xaya^{-1}},$$

analytisch ist: Die Abbildung  $\overrightarrow{y} \mapsto \overrightarrow{aya^{-1}}$  ist nach [53, Theorem 5.22] analytisch, da  $y \mapsto aya^{-1}$  ein stetiger Gruppenhomomorphismus der Liegruppe  $G_1$  ist. Die Abbildung  $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{aya^{-1}}) \mapsto \overrightarrow{xaya^{-1}}$  ist analytisch, da  $x$  und  $aya^{-1}$  Elemente von  $W$  sind.

Nun zeigen wir, dass das Invertieren überall in  $G$  analytisch ist. Es gibt eine Umgebung  $\hat{W} \subset W$  derart, dass  $(\hat{W}a)^{-1} \subset Wa^{-1}$  und  $a^{-1}\hat{W}a \subset W$  gilt, weil das Invertieren stetig ist. Da auf  $W$  das Invertieren analytisch ist und nach [53, Theorem 5.22] die Abbildung  $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{a^{-1}xa}$  analytisch ist, folgt, dass die Abbildung

$$\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{a^{-1}xa} \mapsto \overrightarrow{a^{-1}x^{-1}a}$$

analytisch ist. Wegen  $\overrightarrow{x} = (xa)^{\overrightarrow{\rho_a^{-1}}}$  und  $\overrightarrow{a^{-1}x^{-1}a} = (a^{-1}x^{-1})^{\overrightarrow{\rho_a}} = ((xa)^{-1})^{\overrightarrow{\rho_{a^{-1}}}}$  ist die Aussage bewiesen. ■

Damit ist die Definition A.4 äquivalent zu der in der Literatur häufig benutzten Definition einer Liegruppe als analytische Mannigfaltigkeit mit analytischer Gruppenmultiplikation und -inversion (vgl. [53, Def. 4.1]). Da eine topologische Gruppe, die lokal isomorph zu einer Liegruppe ist, eine Liegruppe im Sinne der Definition A.4 ist, erhalten wir Folgendes:

## *Anhang*

**A.9 Korollar.** *Sei  $G$  eine topologische Gruppe, die lokal isomorph zur Liegruppe  $H$  ist, dann ist  $G$  eine Liegruppe.*

## Literatur

- [1] CLIFFORD, A. H. und G. B. PRESTON: *The Algebraic Theory of Semigroups*, Bd. 1. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.
- [2] CLIFFORD, A. H. und G. B. PRESTON: *The Algebraic Theory of Semigroups*, Bd. 2. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.
- [3] DUGUNDJI, J.: *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [4] EST, W. T. VAN und M. A. M. VAN DER LEE: *Enlargeability of local groups according to Malcev and Cartan-Smith*. In: DAZORD, P., N. DESOLNEUX-MOULIS und J. MORVAN (Hrsg.): *Actions hamiltoniennes de groupes Troisieme theoreme de Lie*, S. 97–127, 1988.
- [5] FRANK, R.: *Ein lokaler Fundamentalsatz für Projektionen*. *Geom. Dedicata*, 44(1):53–66, 1992.
- [6] GROH, H.:  $\mathbb{R}^2$ -planes with 2-dimensional point transitive automorphism group. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 48:171–202, 1979.
- [7] GRUNDHÖFER, T. und R. LÖWEN: *Linear topological geometries*. In: *Handbook of incidence geometry*, S. 1255–1324. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [8] GRUNDHÖFER, T. und M. STROPPEL: *On Restrictions of Automorphism Groups of Compact Projective Planes to Subplanes*. *Results in Mathematics*, 21:319–327, 1992.
- [9] GRUNDHÖFER, T. und M. STROPPEL: *Direct Limits and Maximality of Stable Planes*. *Arch. Math*, 75:65–74, 2000.
- [10] HANNER, O.: *Some Theorems on absolute neighborhood retracts*. *Arkiv för Matematik*, 1:389–408, 1951.
- [11] HARZHEIM, E. und H. RATSCHKE: *Einführung in die allgemeine Topologie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1975.
- [12] HILGERT, J. und K. H. HOFMANN: *Old and new on  $Sl(2)$* . *Manuscripta Math.*, 54(1-2):17–52, 1985.
- [13] HILGERT, J., K. H. HOFMANN und J. D. LAWSON: *Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [14] HILGERT, J. und K.-H. NEEB: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [15] HOCHSCHILD, G.: *The Structure of Lie Groups*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1965.

## Literatur

- [16] HOFMANN, K. H., J. D. LAWSON und J. S. PYM (Hrsg.): *The Analytical and Topological Theory of Semigroups*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1990.
- [17] HOFMANN, K. H. und S. A. MORRIS: *The structure of compact groups*, Bd. 25 d. Reihe *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998.
- [18] HOFMANN, K. H. und W. WEISS: *More on cancellative semigroups on manifolds*. Semigroup Forum, 37:93–111, 1988.
- [19] HOWIE, J. M.: *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.
- [20] HUGHES, D. R. und F. C. PIPER: *Projective planes*. Springer-Verlag, New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 6.
- [21] HÄHL, H.: *Liegruppen*. Vorlesung an der Universität Stuttgart, WS 1998/1999.
- [22] JACOBY, R.: *Some theorems on the structure of locally compact local groups*. Ann. of Math. (2), 66:36–69, 1957.
- [23] JAKÓBOWSKI, J.: *A new generalization of Moulton affine planes*. Geom. Dedicata, 42(3):243–253, 1992.
- [24] KALHOFF, F.: *Anordnungsräume unter der Moulton Konstruktion und Ebenen der Lenz Klasse III*. J. Geom., 38(1-2):59–77, 1990.
- [25] KARZEL, H., K. SÖRENSEN und D. WINDELBERG: *Einführung in die Geometrie*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1973. Studia mathematica/Mathematische Lehrbücher, Taschenbuch 1, Uni-Taschenbücher, No. 184.
- [26] KELLENDONK, J. und M. LAWSON: *Tiling Semigroups*. Journal of Algebra, 224:140–150, 2000.
- [27] KRIENER, M.: *Zur Topologie stabiler Ebenen*. Diplomarbeit bei H. Salzmann, Tübingen, 1993.
- [28] LENZ, H.: *Vorlesungen über projektive Geometrie*. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 30. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1965.
- [29] LÖWEN, R.: *Vierdimensionale stabile Ebenen*. Geom. Dedicata, 5:239–294, 1976.
- [30] LÖWEN, R.: *Central Collineations and the Parallel Axiom in Stable Planes*. Geom. Dedicata, 10:283–315, 1981.
- [31] LÖWEN, R.: *A local “Fundamental Theorem” for classical topological projective spaces*. Arch. Math., 38:286–288, 1982.

- [32] LÖWEN, R.: *Topology and dimension of stable planes: On a conjecture of H. Freudenthal*. J. reine und angewandte Math, 343:108–122, 1983.
- [33] LÜNEBURG, H.: *Die euklidische Ebene und ihre Verwandten*. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [34] MIO, W.: *Homology manifolds*. In: *Surveys on surgery theory, Vol. 1*, Bd. 145 d. Reihe *Ann. of Math. Stud.*, S. 323–343. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [35] NAGAMI, K.: *Dimension Theory*. Academic Press, New York, London, 1970.
- [36] OLVER, P. J.: *Non-Associative Local Lie Groups*. Journal of Lie Theory, 6:23–51, 1996.
- [37] PATERSON, A. L. T.: *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Bd. 170 d. Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [38] PETRICH, M.: *Lectures in semigroups*. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1977.
- [39] PICKERT, G.: *Projektive Ebenen*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.
- [40] PIERCE, W. A.: *Moulton planes*. Canad. J. Math., 13:427–436, 1961.
- [41] PIERCE, W. A.: *Collineations of affine Moulton planes*. Canad. J. Math., 16:46–62, 1964.
- [42] PIERCE, W. A.: *Collineations of projective Moulton planes*. Canad. J. Math., 16:637–656, 1964.
- [43] PIERCE, W. A.: *Isomorphisms of Pickert-Moulton planes*. Proc. Amer. Math. Soc., 19:976–980, 1968.
- [44] POLLEY, C.: *Lokal desarguessche Salzmann-Ebenen*. Arch. Math., 19:553–557, 1968.
- [45] POLLEY, C.: *Lokal desarguessche Geometrien auf dem Möbiusband*. Arch. Math., 23:346–347, 1972.
- [46] PONTRYAGIN, L. S.: *Topological groups*. Translated from the second Russian edition by Arlen Brown. Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1966.
- [47] POSTNIKOV, M.: *Lie Groups and Lie Algebras*, Bd. 5 d. Reihe *Lectures in Geometrie*. Mir Publishers, Moskau, 1986.
- [48] PRIESS-CRAMPE, S.: *Angeordnete Strukturen*, Bd. 98 d. Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Gruppen, Körper, projektive Ebenen.



## Literatur

- [49] RAYMOND, F.: *Separation and union theorems for generalized manifolds with boundary*. Michigan Math. J., 7:7–21, 1960.
- [50] ROBINSON, D. J. S.: *A Course in the Theory of Groups*. Springer-Verlag, 2 Aufl., 1996.
- [51] ROSEHR, N.: *Stable Graphs and Polygons*. Habilitationsschrift, Würzburg, 2003.
- [52] ROSEHR, N.: *Compact generalized polygons and Moore graphs as stable graphs*. Preprint, 2007.
- [53] SAGLE, A. A. und R. E. WALDE: *Introduction to Lie groups and Lie algebras*. Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 51.
- [54] SALZMANN, H.: *Kompakte Ebenen mit einfacher Kollineationsgruppe*. Arch. Math., 13:98–109, 1962.
- [55] SALZMANN, H., D. BETTEN, T. GRUNDHÖFER, H. HÄHL, R. LÖWEN und M. STROPPEL: *Compact projective planes*, Bd. 21 d. Reihe *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995. With an introduction to octonion geometry.
- [56] SAMUEL, P.: *Projective geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French by Silvio Levy, Readings in Mathematics.
- [57] SCHUBERT, H.: *Topologie*. Teubner, Stuttgart, 1969.
- [58] SEIDEL, H.-P.: *Zur Topologie homogener ANR-Räume*. Zulassungsarbeit, Tübingen, 1983.
- [59] SEIDEL, H.-P.: *Locally homogeneous ANR-spaces*. Arch. Math, 44:79–81, 1985.
- [60] SEMMLER, J.:  $\mathbb{R}^2$ -Ebenen und ihre Endomorphismen. Diplomarbeit bei M. Stroppel, Darmstadt, 1996.
- [61] STEINKE, G. F.: *Topological affine planes composed of two Desarguesian half planes and projective planes with trivial collineation group*. Arch. Math. (Basel), 44(5):472–480, 1985.
- [62] STEINKE, G. F.: *Semi-classical projective planes over half-ordered fields*. Geom. Dedicata, 58(1):21–44, 1995.
- [63] STEINKE, G. F.: *Lenz-Barlotti classes of semi-classical ordered projective planes*. Australas. J. Combin., 16:1–20, 1997.
- [64] STÖCKER, R. und H. ZIESCHANG: *Algebraische Topologie*. Teubner, Stuttgart, 1988.

- [65] STROPPEL, M.: *Endomorphisms of Stable Planes*. Seminar Sophus Lie, 3:17–23, 1992.
- [66] STROPPEL, M.: *Point-Regular Geometries*. Journal of Geometry, 59:173–181, 1997.
- [67] STROPPEL, M.: *The Semigroup of Continuous Lineations of a Stable Plane*. Semigroup Forum, 55:89–93, 1997.
- [68] STROPPEL, M.: *Bemerkungen zur ersten nicht desarguesschen ebenen Geometrie bei Hilbert*. Journal of Geometry, 63:183–195, 1998.
- [69] STROPPEL, M.: *Embedding actions of cancellative directed semigroups*. Semigroup Forum, 62(3):430–437, 2001.
- [70] STROPPEL, M.: *Locally compact groups*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006.
- [71] TAYLOR, D. E.: *The Geometry of the Classical Groups*. Heldermann, Berlin, 1992.
- [72] YAQUB, J. C. D. S.: *On projective planes of class III*. Arch. Math., 12:146–150, 1961.

## *Literatur*

## Symbolverzeichnis

- $\left[ \begin{array}{c|c} C & A \\ \hline A & B \end{array} \right]$ , 68  
 $\left[ A \mid B \right]$ , 68  
 $(\alpha_{XY}(\beta, \chi)) \Big|_{X^{(p)}}^{Y^{(q)}}$ , 155  
 $(\alpha_{XY}(\chi)) \Big|_{X^{(p)}}^{Y^{(q)}}$ , 117  
 $\bigcup_{\tilde{\alpha} \in [\alpha]_{\infty}} \tilde{\alpha}$ , 25  
  
 $(\alpha, [A])$ , 144  
 $(\alpha, A^{\mathbb{Q}})$ , 146  
 $(\alpha, A^{\sigma_i})$ , 146  
 $(\alpha, A^{\lambda})$ , 145  
 $(D, \varepsilon)$ , 12  
 $(\mathbb{F} \times \mathbb{F}, \mathcal{L})$ , 42  
 $(P, \mathcal{L})$ , 1  
 $(P, \mathcal{L})^*$ , 47  
 $(U, \mathcal{L}_U)$ , 1  
 $(s)$ , 42  
 $[c]$ , 42  
 $[\infty]$ , 42  
 $[s, t]$ , 42  
 $[C, U]$ , 8  
 $\llbracket C, U \rrbracket$ , 8  
 $\llbracket b|c \rrbracket$ , 58  
  
 $\underline{\mathcal{A}}_2\mathbb{F}$ , 42  
 $\overline{\mathcal{A}}_2\mathbb{F}$ , 42  
 $\text{Aut}(\mathbb{F})$ , 144  
 $\text{Aut}(\mathcal{N})$ , 10  
 $\text{Aut}(\mathcal{P})$ , 8, 21  
  
 $\diamond$ , 7  
 $\mathcal{D}$ , 133  
 $D_n$ , 27  
 $\text{dom}(\diamond)$ , 7  
 $\text{dom}(\psi)$ , 5  
 $\text{dom } \sigma_i$ , 69  
 $d(v, w)$ , 27  
  
 $\mathbb{1}$ , 58  
 $EH_t$ , 45  
  
 $\frac{E}{\infty}$ , 50  
 $\text{Emb}(\mathcal{U}, \mathcal{P}')$ , 10  
 $\text{End}(\mathcal{P})$ , 8  
 $\text{End}_{\mathcal{P}}$ , 50  
 $\text{End}_{\overline{\mathcal{P}}}$ , 50  
 $E$ , 95  
 $H$ , 95  
  
 $F(p)$ , 60  
 $\tilde{F}$ , 151  
  
 $\gamma(G, U, V)$ , 61  
 $g_{\infty}$ , 55  
 $\text{GL}_2 \mathbb{R}$ , 63  
 $\text{GL}_2^+ \mathbb{R}$ , 56  
 $\text{GO}_3(\mathbb{R}, 1)$ , 44  
  
 $\mathcal{H}$ , 43  
 $H_L$ , 55  
 $H_{\overline{L}}$ , 55  
 $H_R$ , 55  
 $H_{\overline{R}}$ , 55  
  
 $\text{id}_U$ , 117  
 $\text{id}_U$ , 5  
 $IH_t$ , 45  
 $\iota_k$ , 58  
  
 $K(\gamma, D, \varepsilon)$ , 12  
 $\tilde{K}(\gamma, D, \varepsilon)$ , 12  
 $\text{Komp}(A, \mathcal{L}_A, \mathcal{P})$ , 19  
 $\tilde{\mathcal{K}}_{\psi}$ , 13  
 $K_r(m)$ , 12  
  
 $\lambda$ , 57  
 $\tilde{\lambda}$ , 57  
 $\Lambda_x$ , 58  
 $\underline{\mathcal{L}}_k$ , 55  
 $\overline{\mathcal{L}}_k$ , 55  
 $\omega$ , 23  
 $L_{s,t}$ , 55

## Index

- $l_{s,t}$ , 55  
 $L_{s,t}^*$ , 55  
 $l_{s,t}^*$ , 55  
 $L_x$ , 55  
 $l_x$ , 55  
  
 $\mathcal{M}_k = (P, \mathcal{L}_k)$ , 55  
 $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 143  
 $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 143  
 $\overline{\mathcal{M}_k} = (\overline{P}, \overline{\mathcal{L}_k})$ , 55  
 $m_\infty^E$ , 50  
 $m_\infty$ , 24  
 $\overline{\mathcal{M}(s)}$ , 95  
 $\mathcal{M}(s)$ , 95  
  
 $\nu$ , 107  
 $\nu^\mathbb{F}$ , 154  
 $\overline{\nu}^\mathbb{F}$ , 154  
  
 $O_3(\mathbb{R}, 1)$ , 44  
 $\circ\text{Aut}(\mathbb{F})$ , 146  
 $O_L$ , 64  
 $O_{\overline{L}}$ , 64  
 $\hat{O}_{\overline{L}}$ , 64  
 $\tilde{O}_L$ , 64  
 $\omega_V$ , 10  
 $O_R$ , 64  
 $O_{\overline{R}}$ , 64  
 $\hat{O}_{\overline{R}}$ , 64  
 $\tilde{O}_R$ , 64  
  
 $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ , 42  
 $\text{P}\Gamma\text{L}_3\mathbb{F}$ , 144  
 $\text{P}\Gamma\text{L}_3\mathbb{F}$ , 145  
 $\text{P}\Gamma\text{L}_3\mathbb{F}$ , 144  
 $(\text{P}\Gamma\text{L}_3\mathbb{R})_{x_\infty, l_0}$ , 63  
 $\pi_n(\Sigma)$ , 116  
 $\pi^-$ , 47  
 $\text{P}\text{O}_3(\mathbb{R}, 1)$ , 44  
 $\overline{P}$ , 55  
 $\Psi_{lin}(\mathcal{H}_t)$ , 26  
 $\Psi_{max}$ , 117  
 $\hat{\Psi}_{max}$ , 43  
 $\Psi_{max}(\mathcal{P})$ , 24  
  
 $\Psi_{max}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ , 24  
 $\hat{\Psi}_{max}(\mathcal{U})$ , 41  
 $\Psi(\mathcal{P})$ , 5  
 $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ , 6  
 $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ , 5  
  
 $Q_t$ , 141  
  
 $\mathbb{P}$ , 95  
  
 $S$ , 101  
 $S^\mathbb{F}$ , 151  
 $\Sigma$ , 69  
 $\Sigma_1$ , 69  
 $\sigma_1$ , 69  
 $\Sigma_2$ , 69  
 $\sigma_2$ , 69  
 $\Sigma_3$ , 69  
 $\sigma_3$ , 69  
 $\Sigma_4$ , 69  
 $\sigma_4$ , 69  
 $\Sigma^\mathbb{F}$ , 151  
 $\tilde{\Sigma}^\mathbb{F}$ , 146  
 $\tilde{\Sigma}_i^\mathbb{F}$ , 146  
 $\overline{\mathcal{O}}$ , 90  
 $\overline{\Sigma(s)}$ , 95  
 $\overline{\text{SL}_2\mathbb{R}}$ , 100  
 $S(p)$ , 60  
 $\mathcal{S}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$ , 9  
 $\mathcal{S}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'})$ , 8  
 $\mathcal{S}_t$ , 136  
 $s_U(L)$ , 60  
 $s_U^\psi(L)$ , 60  
  
 $\Theta$ , 63  
 $\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}}$ , 9  
 $\mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'})$ , 8  
  
 $\mathcal{U}_k$ , 132  
 $U_L$ , 64  
 $U_{\overline{L}}$ , 64  
 $\tilde{U}_{\overline{L}}$ , 64  
 $\tilde{U}_L$ , 64  
 $U_R$ , 64

$U_{\overline{R}}$ , 64

$\tilde{U}_{\overline{R}}$ , 64

$\tilde{U}_R$ , 64

$\mathcal{W}$ , 138

$\Xi$ , 95

$x_\infty$ , 58

$Y_{\beta,\delta}$ , 92

$y_\infty$ , 58

$Y^X$ , 8

*Index*

## Index

- absoluter Umgebungsretrakt, 2
  - metrischer, 2
- Abstand in einem Graphen, 27
- Addition in stabilen Dreiecken, 33
- affine Ebene über dem Körper  $\mathbb{F}$ , 42
- affine Moulton-Ebene, 55
- analytische Karte, 158
- angeordneter Körper, 144
- Anordnungs-Topologie, 143
- ANR, 2
  - metrischer, 2
- Äquivalenzklasse, 24
- Äquivalenzrelation  $\omega$ , 23–26, 39, 41, 49, 50
- assoziativ
  - bis zur Ordnung  $n$ , 4
  - bis zur Ordnung 3, 4
  - generell, 4
- äußere modifizierte hyperbolische Ebene, 45
  - lineare partielle Lineation der, 46
- Automorphismen-Gruppe, 8, 21, 24
  - Restriktion der, 10
  - von  $\mathcal{D}$ , 135
  - von  $\mathcal{H}$ , 43
  - von  $\mathcal{H}_t$ , 45
  - von  $\mathcal{M}_k$ , 84
  - von  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ , 148
  - von  $\mathcal{W}$ , 139
  - von  $\overline{\mathcal{M}(s)}$ , 95
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 146, 148
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 68, 69, 76–78, 84, 87, 95, 100, 111
  - von  $E\mathcal{H}_t$ , 48
  - von  $\mathcal{S}_t$ , 137
- Bijektion
  - partielle, 6
- DDP, 21
- Definitionsgebiet, 5
  - desarguessch, 117, 155
    - einer partiellen Lineation, 5
    - einer partiellen Verknüpfung, 7
    - maximales, 25
    - nicht desarguessch, 84
  - desarguessch, 45, 117
  - desarguessche Halbebene, 60, 77, 144
  - disjoint disks property, 21
- Einbettungen
  - Menge der, 10
  - Restriktion der Menge der, 10
- Einparametergruppe, 95, 105, 107, 134
- Elation, 153
- Endomorphismen-Halbgruppe, 8, 19, 21, 24
  - von  $\mathcal{D}$ , 133
  - von  $\mathcal{H}$ , 43
  - von  $\mathcal{Q}_t$ , 141
  - von  $\mathcal{S}_t$ , 137
  - von  $\mathcal{U}_k$ , 132
  - von  $\mathcal{W}$ , 138
  - von  $E\mathcal{H}_t$ , 48
  - von Unterebenen von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 132
- ENR, 21
- entgegengesetzte Ebene, 47
- $\varepsilon$ -stabiles Viereck, 12
- Ferngerade, 55
- Fortsetzung
  - nicht eindeutig, 126
  - von  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k(\mathbb{F}), \mathcal{M}_{k'}(\mathbb{F}))$ , 145, 147
  - von  $\psi \in \Psi(\mathcal{M}_k)$ , 62
  - zu Automorphismus von  $\mathcal{M}_k$ , 78
  - zu Automorphismus von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 81, 84
- Fundamentalgruppe von  $\Sigma$ , 116
- Gebietsinvarianz, 2
  - generell assoziativ, 4
  - gleichgradig stetig, 17
- Gruppoid, 3



## Index

- Gruppoid, partielles, 3
- Halbebene
  - desarguessch, 77
- Halbebene, desarguessch, 60
- Halbgruppe, 3
  - inverse, 3
  - lokale, 4
- Homologie, 152
- Homologie-n-Mannigfaltigkeit, 21
- Homotopiegruppe von  $\Sigma$ , 116
- hyperbolische Ebene
  - innere, 45
  - modifizierte, 43
    - äußere, 45
  - reelle, 43, 53
- hyperbolische Polarität, 47
- innere hyperbolische Ebene, 45
- inverse Halbgruppe, 3
- inverse lokale Halbgruppe, 4
- Involution in  $\Sigma$ , 91
- isomorph, lokal, 23
- Isomorphie
  - von  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{F}'$ , 144
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$  und  $\overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}}$ , 115
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  und  $\overline{\mathcal{M}_{\frac{1}{k}}(\mathbb{F})}$ , 148
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$  und  $\overline{\mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{F})}$ , 150
- Isomorphietyp von  $\Sigma$ , 111
- Isomorphismus lokaler Gruppen, 23
- Iwasawa-Zerlegung, 109
- Jordan-Brouwerschen Separationssatz, 21
- Karte, analytische, 158
- kollabiert, 5, 70
- Kommutatorgruppe
  - von  $\Sigma$ , 104, 107, 111
  - von  $\Sigma^{\mathbb{F}}$ , 153
- kompakt-offene Topologie, 8–10, 20
- Kompressions-Halbgruppe, 19
- Konvergenz, stetig, 9
- Körper, angeordnet, 144
- Körperautomorphismus
  - nicht ordnungserhaltend, 146
  - ordnungserhaltend, 146
- kürzbare lokale Halbgruppe, 4
- Lenz-Barlotti-Typ, 154
- Liegruppe, 95, 157, 158, 160
- lineare partielle Lineation, 46
  - von  $E\mathcal{H}_t$ , 46
- Lineation, 5
  - injektiv, 29
  - kollabiert, 5, 70
  - maximale partielle, 24
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 154–156
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 118, 121, 127, 128
  - partielle, 5
    - Definitionsgebiet einer, 5
    - lokal konstant, 69
    - Verknüpfung, 7
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 62, 81, 84
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 155, 156
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 78, 118, 121, 126–130
  - stabiler Dreiecke, 29
- linke Halbebene, 55
- lokal gleich, 23–26, 39, 41, 49, 50
- lokal homogen, 2
- lokal isomorph, 23, 160
- lokal konstant, 69
- lokale Gruppe, 22
  - $(E, m_{\infty}^E)$ , 51
  - $(\frac{\Psi}{\infty}, [\text{id}]_{\infty}^{-1}, m_{\infty})$ , 25
  - der Endomorphismen, 50, 51
  - Isomorphismus, 23
  - Morphismus, 4
  - nach Malcev, 22, 51
  - partieller Lineationen, 22
  - topologische, 22
  - zu einer Gruppe erweiterbar, 4, 5
- lokale Halbgruppe, 4
  - inverse, 4
  - kürzbare, 4
- lokale Untergruppe
  - $\widehat{\Psi}_{max}(\mathcal{U})$ , 41
  - von  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ , 41

- von  $\mathrm{PGL}_3 \mathbb{R}$ , 43
- lokaler Fundamentalsatz
  - für  $E\mathcal{H}_t$ , 48
  - für stabile Unterdreiecke von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ , 37, 38
  - relativer, 39
  - von Frank, 144, 145, 147, 148, 155
  - von Löwen, 1, 56, 62, 63, 78, 81, 83, 118, 132, 145, 148
- lokaler Isomorphismus, 92
  - $\mathcal{Q}$ , 90, 92
- lokales Tupel, 4
- Lokalkompaktheit
  - von  $(\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \mathcal{T}_{\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')} )$ , 14, 20
  - von  $(\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}, \mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}} )$ , 20
  - von  $(E, \mathcal{T}_E)$ , 54
  - von  $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ , 21
  - von  $\mathrm{End}(\mathcal{P})$ , 20
- Mannigfaltigkeit, 2, 12–14, 21, 52–54, 158
  - Homologie-n-, 21
  - verallgemeinerte, 21
- maximale desarguessche Halbebenen, 60, 77
- maximale partielle Lineation, 24
  - von  $\mathcal{H}$ , 43
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 155, 156
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 118, 121, 127–129
- maximales Definitionsgebiet, 25
- maximale desarguessche Halbebenen
  - in  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 144
- Menge der Einbettungen, 10
  - Restriktion der, 10
- modifizierte hyperbolische Ebene, 26, 43
- Morphismus lokaler Gruppen, 4
- Moulton-Ebenen, 55
  - radiales Modell, 95
- Multiplikation in stabilem Dreieck, 34, 35
- nicht desarguessche Unterebene
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 146
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 77
- offene Unterebene, 1
- Operation, partielle binäre, 3
  - ordnungserhaltender Körperautomorphismus, 146
- Paar, zulässiges, 12
- partielle Bijektion, 6
  - Corestriktion, 117
  - Restriktion, 117
  - Verknüpfung, 6
- partielle binäre Operation, 3
- partielle Lineation, 5
  - Definitionsgebiet einer, 5
  - kollabiert, 5, 70
  - lineare, 46
  - lokal konstant, 69
  - maximale, 24
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 154–156
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 118, 121, 127–129
  - Verknüpfung, 7
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 62, 81, 84
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})}$ , 155, 156
    - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 78, 118, 121, 126–130
    - von  $E\mathcal{H}_t$ , 46
- partielle Verknüpfung
  - $\diamond$ , 7
  - $m_\infty^E$ , 50
  - $m_\infty$ , 24
  - auf  $\frac{\Phi}{\infty}$ , 24
  - auf  $\mathcal{B}(X)$ , 6
  - auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ , 7
  - auf  $E$ , 50
  - Definitionsgebiet, 7
- partielles Gruppoid, 3
- perfekt, 101, 152
- Pickert-Moulton-Ebenen, 143
- Polarität
  - hyperbolische, 47
- Produkt, stabiles, 4
- projektive Ebene über dem Körper  $\mathbb{F}$ , 42
- projektive Ebene  $\overline{\mathcal{P}_2\mathbb{F}}$ , 143
- projektiver Abschluss
  - $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ , 42
  - von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 55

## Index

Quadrik, 44

rechte Halbebene, 55

reelle affine Ebene, 55

reelle hyperbolische Ebene, 43

reelle projektive Ebene, 55, 63

Relation „lokal gleich“, 23–26, 39, 41, 49, 50

relativ kompakt, 1

relativer lokaler Fundamentalsatz, 39

Restriktion

der Automorphismen-Gruppe, 10

der Menge der Einbettungen, 10

saturierte Multiplikation, 4

stabile Ebene, 1

stabile lp-Ebene, 1

stabiles Dreieck, 27

Addition in, 33

Lineation

injektiv, 29

Lineation eines, 29

Multiplikation in, 34, 35

Unterdreieck, 28

Unterdreiecke von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$

lokaler Fundamentalsatz, 37, 38

zusammenhängend, 27

stabiles lph-Dreieck, 27

stabiles Produkt, 4

Standgruppe

von  $l_0$ , 65

von  $x_\infty$ , 65

stetige Konvergenz, 9

Streifenebenen in  $\mathcal{M}_k$ , 136

$\mathcal{Q}_t$ , 141

$\mathcal{S}_t$ , 136

$\mathcal{W}$ , 138

Struktur

von  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k(\mathbb{F})})$ , 151

von  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{M}_k})$ , 111

Submersion, 4

Taille eines Graphen, 27

Topologie

auf  $\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ , 8

auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ , 9

der Moulton-Ebene, 56

kompakt-offene, 8–10, 20

topologische Gruppe, 157

topologische lokale Gruppe, 22

der Endomorphismen, 52

Transformationsgruppe, 113

Trennungseigenschaft

$T_0$ , 11

$T_1$ , 11, 26

$T_2$ , 54

$T_3$ , 11

von  $\frac{\Psi}{\infty}$ , 26

von  $\mathcal{T}_E$ , 54

von  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ , 11

Überlagerungsabbildung, 107

universelle Überlagerungsgruppe  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$ ,  
100, 107

Unterdreieck, 28

Unterdreiecke von  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$

Addition und Multiplikation in, 35

Unterebene, nicht desarguessch

von  $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ , 146

von  $\overline{\mathcal{M}_k}$ , 77

verallgemeinerte Mannigfaltigkeit, 21

Verknüpfung

auf  $\mathcal{B}(X)$ , 6

auf  $\Psi_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ , 7

auf  $E$ , 50

in  $\Sigma$ , 84, 87, 90

Verknüpfungstafel

von  $\Sigma$ , 84, 87

Verknüpfungsvoraussetzung, 24, 130

Viereck,  $\varepsilon$ -stabil, 12

Wirkung

der  $\text{PGL}_3\mathbb{F}$  auf  $\mathcal{P}_2\mathbb{F}$ , 145

der  $\text{PGL}_3\mathbb{R}$  auf  $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ , 63

zentrale Erweiterung, 154

Zentrum

von  $\Sigma$ , 101, 111  
von  $\Sigma^{\mathbb{R}}$ , 152  
von  $S$ , 101  
von  $S^{\mathbb{R}}$ , 152  
zulässiges Paar  $(D, \varepsilon)$ , 12  
zusammenhängendes stabiles Dreieck, 27