

Ein Axiomensystem für die hyperbolischen Ebenen über euklidischen Körpern

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Carsten Augat

aus Buchen (Odenwald)

Hauptberichter: Prof. Dr. Hermann Hahl
Mitberichter: Prof. Dr. Markus Stroppel

Tag der mündlichen Prüfung: 7. März 2008

Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart

2008

Eingereicht am: *31. Januar 2008*

Hauptberichter: *Prof. Dr. Hermann Hähl*
Mitberichter: *Prof. Dr. Markus Stroppel*

Tag der mündlichen Prüfung: *7. März 2008*

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	4
Summary	5
1 Einleitung	9
2 Absolute Ebenen mit Mittellinien	13
2.1 Axiome	13
2.2 Bewegungen	14
2.3 Punktspiegelungen	15
2.4 Translationen	16
2.5 Orthogonalität	17
2.6 Geradenspiegelungen	19
2.7 Kreise	21
2.8 Weiteres zu Translationen	23
2.9 Kompositionen von Geradenspiegelungen	26
2.10 Drehungen	35
2.11 Halbdrehungen	36
2.12 Rechtecke	39
3 Hyperbolische Ebenen	41
3.1 Das hyperbolische Axiom	41
3.2 Eine Alternative zum hyperbolischen Axiom	43
3.3 Verbindbarkeit von Enden	44
3.4 Endenrechnung	50
3.5 Einführung von Koordinaten für einen Punkt	58
3.6 Einführung von Koordinaten für eine Gerade	59
3.7 Das Minkowski-Produkt; Lorentzmatrizen	61
3.8 Möbiustransformationen; Transformation von Geraden	63
3.9 Transformation von Punkten	67
3.10 Algebraisierung der hyperbolischen Ebenen	69
3.11 Winkel	75
3.12 Kollineationen	77
Literatur	87
Danksagung	88

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gehört zum Gebiet der metrischen Geometrie. Nach dem Vorbild der Vorlesung "Synthetische Geometrie" von Hahl [6], welche die euklidische Geometrie (genauer gesagt, die Geometrie der präreuklidischen Ebenen im Sinne von Degen-Profke [4]) aus einem sehr einfachen Axiomensystem entwickelt, wird hier ein ähnliches Axiomensystem für die ebenen hyperbolischen Geometrien aufgestellt und gezeigt, dass die Modelle dieses Axiomensystems genau die hyperbolischen Ebenen über euklidischen Körpern sind.

Zugrunde liegt ein linearer Raum, bestehend aus einer Punktmenge \mathcal{H} und einer Geradenmenge \mathcal{G} , zwischen denen eine Inzidenzrelation mit eindeutiger Verbindbarkeit herrscht. Als weiterer Grundbegriff ist eine Streckenkongruenz gegeben. Ein entscheidendes Axiom, das schon von Baer [2] für die euklidische Geometrie vorgeschlagen wurde, führt zum Begriff der Mittellinie.

Zunächst werden die absoluten Ebenen mit Mittellinien axiomatisch fundiert und ein Stück weit entwickelt, insbesondere im Hinblick auf die Bewegungen. Dann wird die Existenz von unverbindbaren Geraden, d.h. Geraden, die weder einen Punkt noch ein Lot gemeinsam haben, axiomatisch gefordert. Der Begriff des *Geradenbüschels* wird eingeführt und näher untersucht. Dabei stellen sich die Geradenbüschel als wichtig heraus, deren Geraden paarweise unverbindbar sind. Diese Büschel werden nach Hilbert [7] *Enden* genannt. Durch Einführung einer Addition und einer Multiplikation auf der Menge $\overline{\mathbb{K}}$ dieser Enden gelangt man zur "Hilbert'schen Endenrechnung". Dabei ergibt sich mit Hilfe der Gruppe der Bewegungen, dass die Menge $\overline{\mathbb{K}}$ der Enden, reduziert um ein Element, welches ∞ genannt wird, einen Körper \mathbb{K} bildet. Dieser Körper erweist sich als euklidischer Körper; mit seiner Hilfe lassen sich die Ebenen koordinatisieren. Unter anderem stellt sich heraus, dass die Bewegungsgruppe isomorph ist zur Gruppe der Möbiustransformationen auf $\overline{\mathbb{K}}$.

Im Anschluss folgt ein Abschnitt über Winkel und deren Kongruenz. Das zentrale Ergebnis ist dort der Kongruenzsatz (www), nach dem zwei Dreiecke schon dann kongruent sind, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen.

Den Abschluss der Arbeit bildet ein Abschnitt über die Bestimmung aller Kollineationen der hyperbolischen Ebenen. Dabei zeigt sich, dass ein nichtidentischer Körperautomorphismus von \mathbb{K} eine Kollineation definiert, und sich jede beliebige Kollineation als Produkt einer Bewegung und einer solchen, durch einen Körperautomorphismus definierten, Kollineation darstellen lässt.

Summary

The present thesis belongs to the field of metric geometry. In the spirit of the lecture "Synthetic Geometry" by Hähl [6], in which a simple axiomatisation of pre-euclidean planes in the sense of Degen-Profke [4] is presented, axioms for plane hyperbolic geometry will be proposed. It will be shown that the models of this axiom system are precisely the hyperbolic planes over euclidean fields.

One considers an incidence structure, consisting of a set of points \mathcal{H} , a set of lines \mathcal{G} and an incidence relation among them such that every two points are incident with a unique line. Furthermore, one assumes a congruence relation in the following sense:

Definition:

A line segment congruence is an equivalence relation \equiv on the set of point pairs $(a, b) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ with the following properties:

- (1) $(a, b) \equiv (b, a)$ for all $a, b \in \mathcal{H}$,
- (2) If $(a, b) \equiv (c, c)$, then $a = b$.

This structure will be assumed to satisfy the following axioms:

"Mirror point"

For two points z, a with $a \neq z$ there is a point $b \neq a$ with $(a, z) \equiv (z, b)$ and a, b, z collinear.

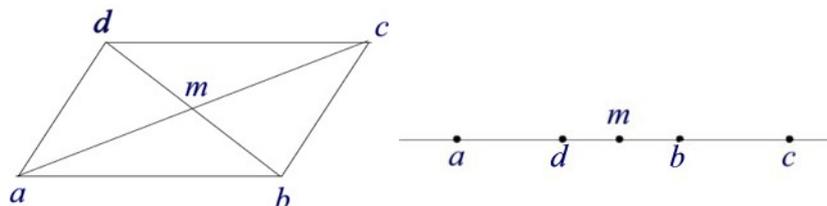
"Midline"

For $a \neq b$ the set $\{p \in \mathcal{H} \mid (a, p) \equiv (p, b)\}$ is the set of points of a line $M(a, b)$ which intersects $a \vee b$.

Remark: The intersection point is the unique point m on the line $a \vee b$ with the property $(a, m) \equiv (m, b)$. This point is called *midpoint* of a and b and is denoted by $m(a, b)$.

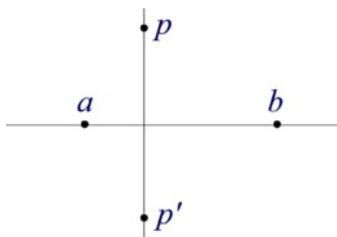
"Parallelogram"

Let a, b, c, d be four points with $a \neq c, b \neq d, m(a, c) = m(b, d)$. Then $(a, d) \equiv (b, c), (a, b) \equiv (c, d)$. The quadrangle (a, b, c, d) is called a parallelogram.



"Kite"

For three non-collinear points a, b, p there is a point $p' \neq p$ with $(a, p) \equiv (a, p'), (b, p) \equiv (b, p')$.



Such a structure is called an *absolute plane with midlines*.

Starting from the axioms, reflections in a point, translations and reflections in a line are constructed and shown to be motions. For reflections in a line, one uses an orthogonality relation for lines which can be defined using midlines. This relation turns out to be invariant under motions.

The proof that the translations along a fixed line form a group is much more difficult than in the pre-euclidean case. (Note that the set of all translations is not a group in the non-euclidean case.)

After the proof, following Bachmann [1], that every motion can be expressed as composition of at most three line reflections, the term *pencil of lines* is introduced and closely examined. We say that three lines G, H and K lie in a pencil, if the product of the reflections in these three lines is a line reflection again. The set of all lines K which lie in a pencil with two given lines G, H is denoted as *the pencil determined by G, H* .

If G and H have a common point, we realise that this point also lies on all other lines of the pencil. When there is a common perpendicular L of G and H we see that L is also orthogonal to all other lines of the pencil.

As a basis for further developments there follow three sections about rotations, semi-rotations and rectangles.

The results up to this point still are valid both for euclidean and hyperbolic planes. In order to distinguish these two types of planes, a further axiom is introduced:

”Hyperbolic axiom”

There are lines which cannot be joined, i.e. which do not have a point or a perpendicular in common. For a line G and a point p not lying on G , there are at most two lines through p which cannot be joined to G .

An absolute plane with midlines satisfying this axiom is called a *hyperbolic plane*.

As an immediate consequence of this axiom rectangles cannot exist in a hyperbolic plane. A further conclusion is the existence of pencils of lines determined by lines which cannot be joined; these pencils are called *ends* by Hilbert [7]. As we shall see, two ends can be joined, i.e. there is a unique line that belongs to both ends.

The calculus of ends shows that the set of ends can be considered as the projective line $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$

where \mathbb{K} is a field whose addition and multiplication are defined geometrically. As we shall see, \mathbb{K} is a euclidean field.

Following Szász [13], projective coordinates can be assigned to every point and every line of the hyperbolic plane. By means of a symmetric bilinear form, the *Minkowski form*, and the corresponding quadratic form it is then possible to express incidence, congruence and orthogonality algebraically and to describe the motions in the following way:

Theorem:

(a) *Let \mathbb{K} be a commutative euclidean field. Let μ be the symmetric bilinear form on \mathbb{K}^3 and q be the corresponding quadratic form defined by*

$$\begin{aligned}\mu(x, y) &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2, \\ q(x) &= \mu(x, x),\end{aligned}$$

for $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^3$. Then we can construct a hyperbolic plane $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \in)$ as follows:

(1) *The set \mathcal{H} of points consists of the vectors $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3$ with the property $q(x) = 1, x_0 > 0$ (a sheet of a two-sheeted hyperboloid).*

(2) *The set \mathcal{G} of lines consists of the two-dimensional linear subspaces $u^\perp, u \in \mathbb{K}^3$ with the property $q(u) < 0$.*

(3) *The congruence relation is given as follows: for four points $x, y, z, w \in \mathcal{H}$ one has*

$$(x, y) \equiv (z, w) \Leftrightarrow \mu(x, y) = \mu(z, w).$$

(4) *The orthogonality relation is given as follows: for lines $u^\perp, v^\perp \in \mathcal{G}$ one has*

$$u^\perp \perp v^\perp \Leftrightarrow \mu(u, v) = 0.$$

(5) *The incidence relation is given as follows: a point $x \in \mathcal{H}$ lies on a line $u^\perp \in \mathcal{G}$ if, and only if $x \in u^\perp$, i.e. $\mu(u, x) = 0$.*

(6) *The motions are the transformations*

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, x \mapsto Ax$$

with a matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ belonging to the group of Lorentz matrices satisfying $a_{00} > 0$.

(b) *Conversely, every hyperbolic plane can be described in that way.*

Thus, the theory of hyperbolic planes has been developed axiomatically. In order to characterize the hyperbolic planes over the real numbers a further axiom would have to be introduced enforcing the completeness of the field of ends.

In a section about angles and their congruence we prove a congruence lemma according to which two triangles are congruent if their angles are congruent.

The thesis ends with a section about collineations of hyperbolic planes. We first realize that a non-identical automorphism of the field of ends defines a collineation which is not a motion. Then we show that a collineation maps ends to ends. The result is that every collineation of the hyperbolic plane can be expressed as the product of a motion and a collineation defined by an automorphism of the field of ends.

1 Einleitung

Ausgangspunkt für diese Arbeit ist die Vorlesung "Synthetische Geometrie" von Hähl [6], die im SS 2003 an der Universität Stuttgart gehalten wurde. In dieser Vorlesung werden auf elementargeometrische Weise die sogenannten *präeuklidischen Ebenen* im Sinne von Degen-Profke [4] axiomatisiert. Als Grundlage dient dabei der Begriff der *Inzidenzstruktur*, unter dem man folgendes versteht:

Definition:

Eine *Inzidenzstruktur* ist ein Tripel $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, I)$, wobei \mathcal{X} und \mathcal{G} Mengen sind, und I eine Relation zwischen Elementen von \mathcal{X} und Elementen von \mathcal{G} ist.

Für $x \in \mathcal{X}, G \in \mathcal{G}$ schreibt man meist $x I G$ statt $(x, G) \in I$.

Diese allgemeine Definition wird konkretisiert, indem man die Menge \mathcal{X} als Punktmenge und die Menge \mathcal{G} als Geradenmenge einer Ebene betrachtet. Die Relation $x I G$ bedeutet dann, dass der Punkt x auf der Geraden G liegt. Durch eine zusätzliche Eigenschaft erhält man den Begriff des *linearen Raumes*:

Definition:

Ein *linearer Raum* ist eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, I)$ mit folgender Eigenschaft:

Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in \mathcal{X}$ existiert genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $x I G, y I G$.

Man schreibt dann $G = x \vee y$ und nennt G die eindeutige *Verbindungsgerade* der Punkte x und y . Eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{X}$ von Punkten heißt *kollinear*, wenn sie alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aus dieser Definition ergibt sich, dass zwei verschiedene Geraden G, H höchstens einen gemeinsamen Punkt haben können. Denn gäbe es zwei verschiedene Punkte x, y mit $x, y I G, H$, so würde aus der Definition $G = x \vee y = H$ folgen.

Haben zwei Geraden G und H einen gemeinsamen Punkt p , so heißt er *Schnittpunkt* von G und H , und man schreibt $p = G \wedge H$. Falls die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben oder gleich sind, so heißen sie *parallel*, und wir schreiben $G \parallel H$. Nach dem Vorbild Baers [2] wird ein weiterer für diese Arbeit wichtiger Begriff eingeführt, die sogenannte *Streckenkongruenz*:

Definition:

Eine *Streckenkongruenz* ist eine Äquivalenzrelation \equiv auf der Menge der Punktepaare $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $(x, y) \equiv (y, x)$ für alle $x, y \in \mathcal{X}$,
- (2) Falls $(x, y) \equiv (z, z)$, so gilt $x = y$.

Der Parallelitätsbegriff ermöglicht die Definition einer *affinen Ebene*:

Definition:

Eine affine Ebene ist ein linearer Raum (A, \mathcal{G}, I) , der dem folgenden Axiom genügt:

”Euklidisches Parallelenaxiom”

Zu jedem Punkt $p \in A$ und jeder Geraden $G \in \mathcal{G}$ existiert genau eine Gerade G' durch p mit $G' \parallel G$.

Mit Hilfe der Streckenkongruenz wird nun der Begriff einer *präeuklidischen Ebene* definiert:

Definition:

Eine präeuklidische Ebene ist eine affine Ebene (A, \mathcal{G}, I) mit einer Streckenkongruenz \equiv , die folgende Axiome erfüllt:

(PD) ”Parallele Dreiecke”

Für je zwei nicht-ausgeartete Dreiecke $(a, b, c), (a', b', c') \in A^3$ mit $a \vee b \parallel a' \vee b', a \vee c \parallel a' \vee c', b \vee c \parallel b' \vee c'$ gilt: $(a, b) \equiv (a', b') \Rightarrow (a, c) \equiv (a', c'), (b, c) \equiv (b', c')$;

(ML) ”Mittellinie”

Für je zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ ist $\{p \in A \mid (a, p) \equiv (p, b)\}$ die volle Punktreihe einer Geraden $M(a, b)$, die nicht parallel zu $a \vee b$ ist.

Dabei heißen zwei Dreiecke $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in A^3$ kongruent, wenn $(a_i, a_j) \equiv (b_i, b_j)$ gilt für $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Letztendlich lassen sich die präeuklidischen Ebenen algebraisieren:

Algebraisierungssatz für präeuklidischen Ebenen:

Es sei A ein kommutativer Körper der Charakteristik $\neq 2$ mit einem involutorischen Körperautomorphismus

$$A \rightarrow A : x \mapsto \bar{x},$$

und $L = \{x \in A \mid \bar{x} = x\}$ ihr Fixkörper. Dann lässt sich folgendermaßen eine präeuklidische Ebene konstruieren:

- (1) die Punkte sind die Elemente von A ,
- (2) die Geraden sind die Teilmengen der Form $a \cdot L + b$ mit $a, b \in L, a \neq 0$,
- (3) die Streckenkongruenz ist folgendermaßen gegeben: für $p, q, u, v \in A$ gilt:

$$(p, q) \equiv (u, v) \Leftrightarrow (q - p)\overline{(q - p)} = (v - u)\overline{(v - u)}.$$

Umgekehrt ist jede präeuklidische Ebene (bis auf Isomorphie) so darstellbar.

Wie sich aus dem Algebraisierungssatz ergibt, aber auch schon rein inzidenzgeometrisch aus

dem Axiomensystem herleiten lässt, ist die hier gegebene Definition einer präeuklidischen Ebene äquivalent zu der bei Degen-Profke [4]. Fordert man zusätzlich, dass der Fixkörper L angeordnet und vollständig ist, so ist er isomorph zu \mathbb{R} , und A ist isomorph zu \mathbb{C} . Es ergibt sich also dann die gewöhnliche euklidische Ebene in ihrer Beschreibung als komplexe Zahlenebene.

Die vorliegende Arbeit entwickelt eine entsprechende Theorie für die hyperbolische Geometrie. Zugrunde gelegt wird hier ein linearer Raum mit einer Streckenkongruenz, der ebenfalls gewissen wenigen Axiomen (s. Abschnitt 2.1 über *absolute Ebenen mit Mittellinien*) genügen soll. Es folgt nun ein kurzer Überblick über den Aufbau und Inhalt der Arbeit.

In den Abschnitten 2.2 - 2.6 wird zunächst der Begriff der Bewegung definiert. Ausgehend von dem, was die Axiome hergeben, wird erarbeitet, was man unter einer Punktspiegelung und einer Translation versteht, und diese werden als Bewegungen identifiziert. Dann wird der Begriff der Orthogonalität zweier Geraden eingeführt; er erweist sich als invariant unter Bewegungen. Mit dessen Hilfe lässt sich eine Geradenspiegelung einführen, die sich ebenfalls als Bewegung herausstellt. Die Beweise sind oft, aber nicht immer, Adaptionen von Beweisen aus [6].

Viel schwieriger als im präeuklidischen Fall ist in Abschnitt 2.8 der Beweis der Tatsache, dass die Translationen entlang einer festen Geraden eine Gruppe bilden. (Für die Gesamtheit aller Translationen trifft dies im nichteuklidischen Fall nicht zu, wie man aus der hyperbolischen Geometrie weiß.)

Anschließend folgt nach dem Vorbild Bachmanns [1] der Abschnitt 2.9, der sich insbesondere mit den Geradenspiegelungen beschäftigt. Nachdem sich jede Bewegung als Komposition höchstens dreier Geradenspiegelungen erwiesen hat, wird der Begriff des Geradenbüschels entwickelt. Ihm zufolge liegen drei Geraden G, H, K im Büschel, wenn das Produkt der Spiegelungen an diesen drei Geraden selbst wieder eine Geradenspiegelung ist. Die Gesamtheit aller Geraden K , die mit zwei Geraden G, H im Büschel liegen, werden *das durch G, H bestimmte Geradenbüschel* genannt. Wenn G und H einen gemeinsamen Punkt haben, so stellt sich heraus, dass auch alle anderen Geraden des Büschels durch diesen Punkt gehen. Haben G und H ein gemeinsames Lot, so ist dies auch ein Lot für alle anderen Geraden des Büschels. Interessanterweise erweist sich die Relation, im Büschel zu liegen, als ternäre Äquivalenzrelation. Dabei sind inzidenzgeometrische Versionen von Argumenten von Bachmann, die ja oft in der Sprache von Inzidenzgruppen formuliert sind, sehr hilfreich.

Es folgen drei weitere Abschnitte (2.10 - 2.12) über Drehungen, Halbdrehungen und Rechtecke; diese dienen als Sammlung weiterer Grundlagen für spätere Betrachtungen und Entwicklungen.

Die bis zu diesem Punkt erzielten Ergebnisse haben noch so allgemeinen Charakter, dass sie sowohl für die hyperbolische Geometrie als auch für die euklidische Geometrie gelten. Um zu einer Differenzierung zu kommen, folgt nun in Abschnitt 3.1 ein weiteres Axiom, das *hyperbolisches Axiom* genannt wird. Eine absolute Ebene mit Mittellinien, welche dieses Axiom erfüllt, nennen wir *hyperbolische Ebene*. Das hyperbolische Axiom gewährt unter anderem die Existenz von unverbindbaren Geraden, d.h. von Geraden, die weder einen gemeinsamen Punkt noch ein gemeinsames Lot besitzen. Eine unmittelbare Auswirkung besteht ferner darin, dass es keine Rechtecke geben kann. Als weitere wichtige Folgerung stellt sich die Existenz von

Geradenbüscheln heraus, die durch zwei unverbindbare Geraden bestimmt sind. Diese Büschel, sie werden nach Hilbert [7] *Enden* genannt, erweisen sich als Träger für die Koordinatisierung der hyperbolischen Ebenen.

In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, dass zwei verschiedene Enden verbindbar sind, d.h. dass es eine eindeutige Gerade gibt, die zu beiden Enden gehört.

Der erste Schritt zur Koordinatisierung der hyperbolischen Ebenen wird im darauf folgenden Abschnitt 3.4 über die Endenrechnung vollzogen. Die Menge der Enden erweist sich als projektive Gerade $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ zu einem Körper \mathbb{K} , dessen Addition und Multiplikation geometrisch definiert sind, dem sog. *Endenkörper* \mathbb{K} . Dieser stellt sich im Laufe der Betrachtungen als euklidisch heraus.

In Anlehnung an Szász [13] werden nun in den Abschnitten 3.5 und 3.6 den Punkten und Geraden der hyperbolischen Ebene projektive Koordinaten zugeordnet. Durch diese wird es dann möglich, in den Abschnitten 3.7 - 3.9 mit Hilfe einer symmetrischen Bilinearform, der *Minkowski-Form* $\mu(x, y) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2$ für $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^3$, die Begriffe Inzidenz, Kongruenz und Orthogonalität ebenso wie die Bewegungen rechnerisch zu erfassen.

Zunächst gilt: zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{K}^3$ sind orthogonal, wenn $\mu(x, y) = 0$ gilt. Die Punktmenge \mathcal{H} der hyperbolischen Ebene besteht aus den Vektoren $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3$ mit der Eigenschaft $q(x) = \mu(x, x) = 1, x_0 > 0$; die Geradenmenge \mathcal{G} besteht aus den zweidimensionalen Untervektorräumen u^\perp mit $u \in \mathbb{K}^3, q(u) < 0$; dabei ist u^\perp der Orthogonalraum des Vektors u in Bezug auf die Minkowski-Form. Ein Punkt $x \in \mathcal{H}$ inzidiert mit einer Geraden $u^\perp \in \mathcal{G}$, wenn $x \in u^\perp$, d.h. $\mu(u, x) = 0$ gilt. Anschaulich bildet die Punktmenge \mathcal{H} eine Schale eines zweiseitigen Hyperboloids im Vektorraum \mathbb{K}^3 , während die Punktreihe einer Geraden u^\perp den Schnitt dieser Geraden mit dem Hyperboloid bildet. Ferner gilt $(x, y) \equiv (z, w)$ genau dann, wenn $\mu(x, y) = \mu(z, w)$. Eine Bewegung entsteht durch eine Transformation der Koordinaten mit einer speziellen Matrix, einer sog. *Lorentz-Matrix*. Umgekehrt stellt jede so definierte Struktur eine hyperbolische Ebene dar.

Somit ist es gelungen, die Theorie der hyperbolischen Ebenen aus diesen Axiomen zu entwickeln; um die reelle hyperbolische Ebene zu erhalten, müsste nur noch durch ein zusätzliches Axiom gewährleistet werden, dass der zugrunde liegende Körper vollständig ist.

In Abschnitt 3.11 über Winkel und deren Kongruenz wird der Kongruenzsatz (www) bewiesen, demzufolge zwei Dreiecke schon dann kongruent sind, wenn ihre Winkel kongruent sind.

Die Arbeit schließt mit dem Abschnitt 3.12 über die Kollineationen der hyperbolischen Ebenen. Zunächst wird gezeigt, dass ein nichtidentischer Automorphismus des Endenkörpers eine Kollineation definiert, die keine Bewegung ist. Nachdem sich herausgestellt hat, dass Kollineationen Enden auf Enden abbilden, folgt der Nachweis, dass sich jede beliebige Kollineation der hyperbolischen Ebene als Produkt einer Bewegung und einer solchen, durch einen Körperautomorphismus definierten, Kollineation darstellen lässt.

2 Absolute Ebenen mit Mittellinien

Unter einer *absoluten Ebene mit Mittellinien* verstehen wir im Folgenden einen linearen Raum $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Streckenkongruenz im Sinne der Definition in der Einleitung, der den Axiomen im Abschnitt 2.1 genügt. Dabei sei \mathcal{H} die Punktmenge und \mathcal{G} die Menge der Geraden, wobei wir die Geraden als Teilmenge der Punktmenge betrachten. Aus diesem Grund ist die Inzidenzrelation die Elementrelation.

2.1 Axiome

(VP) "Verdopplungspunkt"

Zu zwei Punkten z, a mit $a \neq z$ existiert ein Punkt $b \neq a$ mit $(a, z) \equiv (z, b)$ und a, b, z kollinear.

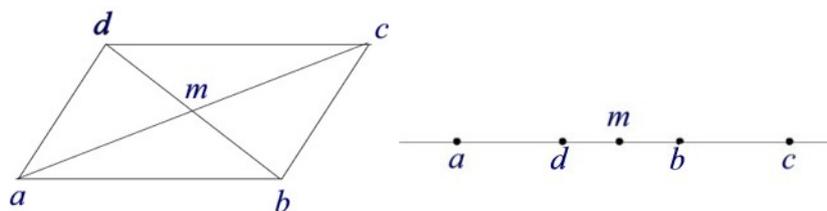
(ML) "Mittellinie"

Für $a \neq b$ ist $\{p \in \mathcal{H} \mid (a, p) \equiv (p, b)\}$ eine Gerade $M(a, b)$, die $a \vee b$ schneidet.

Bemerkung: Der Schnittpunkt in (ML) ist der eindeutige Punkt m auf der Geraden $a \vee b$ mit der Eigenschaft $(a, m) \equiv (m, b)$. Dieser Punkt heißt *Mittelpunkt* von a und b und wird mit $m(a, b)$ bezeichnet.

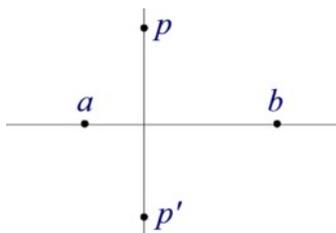
(PG) "Parallelogramm"

Seien Punkte a, b, c, d gegeben mit $a \neq c, b \neq d, m(a, c) = m(b, d)$. Dann gilt: $(a, d) \equiv (b, c)$, $(a, b) \equiv (c, d)$. Das Viereck (a, b, c, d) heißt Parallelogramm.



(DR) "Drachen"

Zu drei nichtkollinearen Punkten a, b, p existiert ein Punkt $p' \neq p$ mit $(a, p) \equiv (a, p')$, $(b, p) \equiv (b, p')$.



Satz 2.1.1:

Der Punkt b in (VP) ist eindeutig.

Beweis:

Angenommen, es existieren b, b' mit $b \neq b', b' \neq a, b \neq a$, die beide die Eigenschaft (VP) haben. Dann wäre $(a, z) \equiv (z, b)$ sowie $(a, z) \equiv (z, b')$, somit $(z, b) \equiv (z, b')$, also $z = m(b, b')$ wegen $b \neq b'$. Nun gilt aber auch $z = m(a, b)$, nach (PG) folgen $(a, b) \equiv (b, b')$ und $(a, b') \equiv (b, b)$, also $b' = a$. Widerspruch! \square

Bezeichnung: Der Punkt b wird *Verdopplungspunkt von a bzgl. z* genannt.

Satz 2.1.2:

Wenn a, b, c, d kollinear sind, $a \neq c, b \neq d$, dann gilt in (PG) auch die Umkehrung.

Beweis:

Es gelte $(a, d) \equiv (b, c), (a, b) \equiv (c, d)$. Seien $m_1 = m(a, c), m_2 = m(b, d)$. Wir zeigen: $m_1 = m_2$.

Sei a' der Verdopplungspunkt von c bzgl. m_2 . Es genügt zu zeigen: $a' = a$ (dann folgt $m_1 = m_2$ wegen der Eindeutigkeit des Mittelpunktes). Angenommen, es wäre $a' \neq a$. Dann wäre $m_2 = m(a', c) = m(b, d)$. Nach (PG) gilt $(a', b) \equiv (c, d) \equiv (a, b)$ sowie $(a', d) \equiv (b, c) \equiv (a, d)$ nach Voraussetzung. Dies bedeutet $b = m(a', a), d = m(a', a)$ (weil alle Punkte auf einer Geraden liegen), d.h. $b = d$. Widerspruch! \square

2.2 Bewegungen

Definition 2.2.1:

Eine Bewegung ist eine Bijektion $\beta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft $(\beta(a), \beta(b)) \equiv (a, b)$.

Bemerkung: Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Satz 2.2.2:

Für Punkte a, b, x mit $a \neq b$ und eine Bewegung β gilt: $x \in M(a, b) \Leftrightarrow \beta(x) \in M(\beta(a), \beta(b))$.

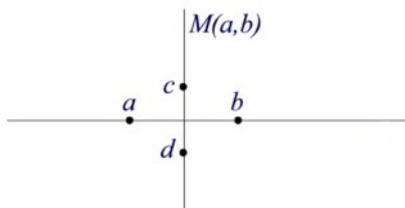
Beweis:

Es gelte $x \in M(a, b)$. Dann folgt $(\beta(a), \beta(x)) \equiv (a, x) \equiv (x, b) \equiv (\beta(x), \beta(b))$, also $\beta(x) \in M(\beta(a), \beta(b))$. Nun gelte umgekehrt $\beta(x) \in M(\beta(a), \beta(b))$. Dann folgt, weil β^{-1} auch eine Bewegung ist, $x = \beta^{-1} \circ \beta(x) \in M(\beta^{-1} \circ \beta(a), \beta^{-1} \circ \beta(b)) = M(a, b)$. \square

Satz 2.2.3:

Es seien $a \neq b$ zwei Punkte. Weiter sei $c \neq m(a, b)$ ein Punkt auf $M(a, b)$, und d der Verdopplungspunkt von c bzgl. $m(a, b)$. Dann gilt: $M(c, d) = a \vee b$.

Beweis: Nach (PG) gilt $(b, c) \equiv (a, d) \equiv (b, d)$, weil $d \in M(a, b)$. Also folgt $b \in M(c, d)$. Auf die gleiche Weise folgt $a \in M(c, d)$. Somit ist $M(c, d) = a \vee b$. \square

**Satz 2.2.4:**

Bewegungen sind Kollineationen.

Beweis:

Sei β eine Bewegung, G eine beliebige Gerade, und seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Weiter sei d ein Punkt auf $M(a, b)$ mit $d \notin G$, und $c \neq d$ der Verdopplungspunkt von d bzgl. $m(a, b)$. Nach 2.2.3 ist dann $G = M(c, d)$ und nach 2.2.2 gilt $\beta(G) = M(\beta(c), \beta(d))$, also ist $\beta(G)$ wieder eine Gerade. \square

Satz 2.2.5:

Für eine beliebige Bewegung β gilt $\beta(m(a, b)) = m(\beta(a), \beta(b))$.

Beweis:

Für $m = m(a, b)$ ist $(\beta(a), \beta(m)) \equiv (a, m) \equiv (m, b) \equiv (\beta(m), \beta(b))$ und β eine Kollineation nach 2.2.4, also $\beta(m) \in \beta(a) \vee \beta(b)$. \square

Satz 2.2.6:

Sei β eine Bewegung. Falls ein Punkt p existiert mit $\beta^2(p) = p$, so hat β einen Fixpunkt.

Beweis:

Falls $\beta(p) = p$ gilt, ist nichts zu zeigen. Sei also $\beta(p) \neq p$. Nach 2.2.5 gilt $\beta(m(p, \beta(p))) = m(\beta(p), \beta^2(p)) = m(\beta(p), p)$, also ist $m(\beta(p), p)$ Fixpunkt von β . \square

2.3 Punktspiegelungen

Definition 2.3.1: Sei z ein Punkt. Nach (VP) und 2.1.1 gibt es zu einem weiteren Punkt $a \neq z$ genau einen Verdopplungspunkt $b \neq a$ bzgl. z mit den in (VP) genannten Eigenschaften. Diese Zuordnung, die bei festem Punkt z jedem Punkt $a \neq z$ seinen eindeutigen Verdopplungspunkt zuordnet, heißt Punktspiegelung ι_z an z . Man setzt diese Abbildung auf z fort durch $\iota_z(z) = z$, d.h. der Punkt z ist einziger Fixpunkt.

Bemerkung: Zu Punkten a, b gibt es genau einen Punkt z mit $\iota_z(a) = b$, nämlich $z = m(a, b)$, falls $a \neq b$, und $z = a$, falls $a = b$.

Satz 2.3.2:

Die Punktspiegelung ι_z ist eine Bewegung.

Beweis: Zu drei Punkten a, b, z betrachte $a' = \iota_z(a)$, $b' = \iota_z(b)$. Für $a = z$ oder $b = z$ ist die Behauptung klar. Für $a, b \neq z$ ist $z = m(a, a') = m(b, b')$. Aus (PG) folgt $(a, b) \equiv (a', b') = (\iota_z(a), \iota_z(b))$. \square

Bemerkung: (a, b, a', b') ist dann ein Parallelogramm.

Satz 2.3.3:

Die Punktspiegelung ι_z ist involutorisch, d.h. $\iota_z^2(a) = a$.

Beweis:

Für $a = z$ ist das klar. Sei nun $a \neq z$. Dann ist $\iota_z(a) \neq z$ und es gilt $z = m(a, \iota_z(a))$, also $\iota_z(\iota_z(a)) = a$. \square

Satz 2.3.4:

Sei β eine Bewegung, z ein Punkt. Dann gilt: $\iota_{\beta(z)} = \beta \circ \iota_z \circ \beta^{-1}$.

Beweis:

Sei a ein beliebiger Punkt, $b = \beta^{-1}(a)$. Wenn $b = z$ gilt, so ist $b = \iota_z(b) = \iota_z \circ \beta^{-1}(a)$ und es folgt $\beta \circ \iota_z \circ \beta^{-1}(a) = \beta(b) = a = \iota_a(a) = \iota_{\beta(b)}(a) = \iota_{\beta(z)}(a)$. Wenn $b \neq z$ gilt, so ist $z = m(b, \iota_z(b)) = m(\beta^{-1}(a), \iota_z \circ \beta^{-1}(a))$, und aus 2.2.5 folgt $\beta(z) = m(a, \beta \circ \iota_z \circ \beta^{-1}(a))$, woraus sich die Behauptung ergibt. \square

2.4 Translationen

Definition 2.4.1: Es seien z und w zwei Punkte. Dann heißt die Abbildung $\tau = \iota_w \circ \iota_z$ Translation.

Bemerkung: Gilt $z \neq w$, so sei $G = z \vee w$, und wir sagen τ ist eine *Translation entlang G* . Die Gerade G ist Fixgerade der Translation τ , denn es gilt $\tau(p) \in G$ für alle $p \in G$.

Satz 2.4.2:

Eine Translation hat keinen Fixpunkt, außer sie ist die Identität.

Beweis:

Sei $\tau = \iota_w \circ \iota_z$. Angenommen, es gibt einen Punkt p mit $\tau(p) = p$.

Fall 1: $p = z$. Dann ist $p = \tau(p) = \iota_w \circ \iota_z(p) = \iota_w(p)$. Dies wiederum bedeutet $p = w$, also $z = w$, somit ist $\tau = \iota_w \circ \iota_w = \text{id}$.

Fall 2: $p = w$. Sei $p' = \iota_z(p)$. Dann ist $p = \tau(p) = \iota_w \circ \iota_z(p) = \iota_w(p') = \iota_p(p')$. Das heißt $p' = p$, also $\iota_z(p) = p$. Dies bedeutet $p = z$, also wiederum $z = w$ und $\tau = \text{id}$.

Fall 3: $p \neq w$ und $p \neq z$. Dann folgt aus $p = \iota_w \circ \iota_z(p)$ durch beidseitiges Anwenden von ι_w von links $\iota_w(p) = \iota_z(p) =: p'$. Weil nun $p' \neq p$ gilt, ist $z = m(p, p')$ und ebenso $w = m(p, p')$, daher ist $z = w$ wegen der Eindeutigkeit des Mittelpunktes, also $\tau = \text{id}$. \square

Bemerkungen:

- (a) Eine Translation ist als Produkt von Punktspiegelungen eine Bewegung.
- (b) Zu $\tau = \iota_w \circ \iota_z$ ist $\tau^{-1} = \iota_z \circ \iota_w$ ebenfalls eine Translation.

Satz 2.4.3:

Für eine Translation $\tau \neq \text{id}$ hat auch τ^2 keinen Fixpunkt. Insbesondere ist $\tau^{-1} \neq \tau$.

Beweis:

Angenommen, es gibt einen Punkt p mit $\tau^2(p) = p$. Dann hat τ nach 2.2.6 einen Fixpunkt, was nach 2.4.2 nicht sein kann. Insbesondere kann somit τ^2 nicht die Identität sein. \square

Satz 2.4.4:

Zu zwei Punkten $a \neq b$ existiert eine Translation entlang $a \vee b$, die a auf b abbildet.

Beweis:

Es seien $m = m(a, b)$ und $\tau = \iota_m \circ \iota_a$. Man prüft leicht: $\tau(a) = b$. \square

Satz 2.4.5:

Seien $m = m(a, b)$ und τ eine Translation entlang $a \vee b$ mit $\tau(a) = m$. Dann ist auch $\tau(m) = b$.

Beweis:

Es ist $(a, m) \equiv (\tau(a), \tau(m)) = (m, \tau(m))$. Nach 2.4.3 ist $\tau(m) = \tau^2(a) \neq a$, damit folgt $\tau(m) = b$ wegen der Eindeutigkeit der Streckenverdopplung. \square

Satz 2.4.6:

Sei τ eine Translation entlang einer Geraden G . Dann ist $\tau(a) = m(a, \tau^2(a))$ für $a \in G$.

Beweis:

Es ist $(a, \tau(a)) \equiv (\tau(a), \tau^2(a))$. Nach 2.4.3 ist $\tau^2(a) \neq a$, außerdem gilt $\tau(G) = G$, somit folgt die Behauptung. \square

2.5 Orthogonalität

Konstruktion und Satz 2.5.1:

Man definiert eine Relation \perp auf der Menge der Geraden mit Hilfe der Streckenkongruenz \equiv durch

$$H \perp G :\Leftrightarrow \exists a \neq b \in G : H = M(a, b).$$

Behauptung: die Relation \perp ist eine Orthogonalitätsrelation, d.h. eine Relation auf der Menge der Geraden mit den Eigenschaften

- (O1) Zu einer Geraden G gibt es eine Gerade H mit $H \perp G$,
- (O2) $H \perp G \Rightarrow G \perp H$.

Beweis:

(O1) ist klar wegen der Existenz der Mittellinie, (O2) folgt sofort aus 2.2.3. \square

Satz 2.5.2:

Es seien $a \neq b$ zwei Punkte, $G = a \vee b$. Weiter sei p ein Punkt, der nicht auf G liegt, und p' der Punkt, der a, p, b gemäß (DR) zu einem Drachen ergänzt. Dann gilt: $G \perp p \vee p'$.

Beweis:

Es ist $G = a \vee b = M(p, p')$. \square

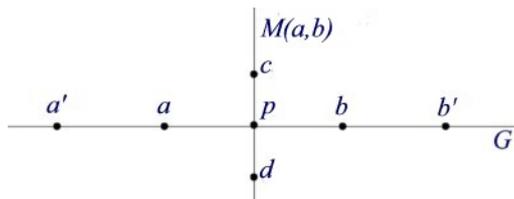
Satz 2.5.3 (Existenz und Eindeutigkeit des Lots):

Zu einer Geraden G und einem Punkt p gibt es genau eine Gerade H durch p mit $H \perp G$.

Beweis:

Fall 1: $p \in G$ (Errichten eines Lots)

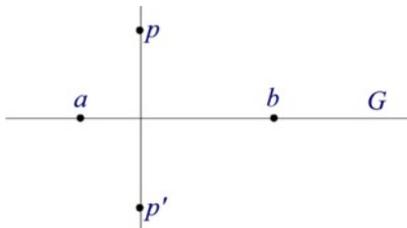
Sei $a \in G$ beliebig, $a \neq p$, $b = \iota_p(a)$. Dann ist $M(a, b) \perp G$ ein Lot durch p .



Eindeutigkeit: Sei $H' \perp G$ ein Lot durch p , und seien $a' \neq b'$ Punkte auf G mit $H' = M(a', b')$. Dann ist $m(a', b') = p = m(a, b)$. Sei nun $c \in M(a, b)$ und d der Verdopplungspunkt von c bzgl. p . Durch zweimalige Anwendung von 2.2.3 folgt $M(a, b) = c \vee d = M(a', b')$.

Fall 2: $p \notin G$ (Fällen eines Lots)

Seien $a \neq b \in G$, und p' der Punkt, der a, p, b gemäß (DR) zu einem Drachen ergänzt. Nach 2.5.2 ist dann $p \vee p' \perp G$.



Eindeutigkeit: Es sei $H \perp G$ mit $p \in H$. Seien $a', b' \in G$ mit $H = M(a', b')$. Zeige: $H = p \vee p'$. Wegen $a', b' \in G = M(p, p')$ gilt $(p', a') \equiv (p, a') \equiv (p, b') \equiv (p', b')$, also $p' \in M(a', b') = H$. Weil auch $p \in M(a', b') = H$ gilt, folgt $H = p \vee p'$. \square

Korollar 2.5.3':

Es seien a, b, p drei Punkte mit $p \notin a \vee b$. Der Punkt p' , der a, b, p gemäß (DR) zu einem Drachen ergänzt, ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Angenommen, es gibt zwei solche Punkte p'_1, p'_2 . Dann sind $p \vee p'_1, p \vee p'_2$ Lote auf $a \vee b$ durch p , somit sind p, p'_1, p'_2 kollinear wegen der Eindeutigkeit des Lotes nach 2.5.3. Zusätzlich gilt $a \vee b = M(p, p'_1) = M(p, p'_2)$, daraus folgt $p'_1 = p'_2$ wegen der Eindeutigkeit des Verdopplungspunktes. \square

Satz 2.5.4:

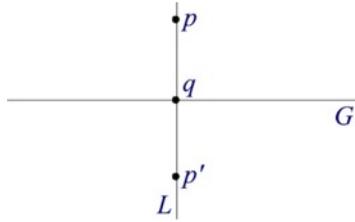
Eine Bewegung ist orthogonalitätserhaltend.

Beweis:

Sei φ eine Bewegung, $H \perp G$, d.h. es gibt Punkte $a, b \in G$ mit $H = M(a, b)$. Nach 2.2.2 gilt für jeden Punkt $p \in H$ dann auch $\varphi(p) \in M(\varphi(a), \varphi(b))$. Weil φ nach 2.2.4 eine Kollineation ist, gilt $\varphi(H) = M(\varphi(a), \varphi(b))$, also $\varphi(H) \perp \varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(G)$. \square

2.6 Geradenspiegelungen

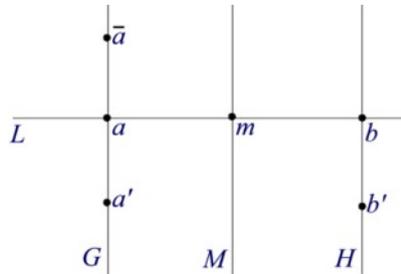
Es sei G eine Gerade. Zu einem Punkt p wird auf folgende Weise ein Punkt p' konstruiert:



$L = \perp(p, G)$, $q = L \wedge G$, $p' = \iota_q(p)$. Die Abbildung $p \mapsto p'$ nennt man *Geradenspiegelung* σ_G an G . Offensichtlich gilt $\sigma_G^2 = \text{id}$, und die Fixpunkte von σ_G sind genau die Punkte von G .

Satz 2.6.1:

Es seien $G \neq H$ Geraden mit $G \perp L$, $H \perp L$. Weiter seien $a = G \wedge L$, $b = H \wedge L$, $M = M(a, b)$. Außerdem seien Punkte a', b' gegeben mit $a' \in G$, $b' \in H$, $a' \neq a$, $b' \neq b$, $(a, a') \equiv (b, b')$, $m = m(a, b) \neq m(a', b')$. Dann gilt auch $M = M(a', b')$.

**Beweis:**

Es sei $\bar{a} = \iota_m(b')$. Dann folgt wegen $\iota_m(H) = G$ auch $\bar{a} \in G$. Wegen $\iota_m(b) = a$ gilt $(\bar{a}, a) \equiv (b', b) \equiv (a', a)$ nach Voraussetzung. Aus $m(a, b) \neq m(a', b')$ folgt $\bar{a} \neq a'$ und daher $a = m(a', \bar{a})$. Weiter sei τ die Translation entlang L mit $\tau(b) = m$. Dann ist nach 2.4.5 auch $\tau(m) = a$, und nach 2.5.4 gilt $\tau(H) = M$, $\tau(M) = G$. Somit ist $m' := \tau(b') \in M$, $m' \neq m$.

Nun wird $\tau(m') = a'$ gezeigt. Es gilt $(a, a') \equiv (b, b') \equiv (\tau(b), \tau(b')) = (m, m') \equiv (\tau(m), \tau(m')) = (a, \tau(m'))$. Dies bedeutet $\tau(m') \in \{a', \bar{a}\}$. Wäre $\tau(m') = \tau^2(b') = \bar{a}$, dann wäre $m' = \tau(b') = m(\bar{a}, b') = m$ nach 2.4.6. Widerspruch! Also ist $\tau(m') = \tau^2(b') = a'$.

Wegen $(m', b') \equiv (\tau(m'), \tau(b')) = (a', m')$ ist also $m' \in M(a', b')$. Außerdem ist $(b', m) \equiv (m, \bar{a}) \equiv (m, a')$, letzteres weil $L = \perp(a, G) = M(a', \bar{a})$. Somit folgt $m \in M(a', b')$, also $M(a', b') = m' \vee m = M$. \square

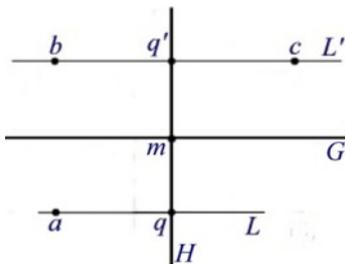
Satz 2.6.2:

Seien G, H Geraden, $G \perp H$, $m = G \wedge H$. Dann ist $\sigma_H \circ \sigma_G = \iota_m$ (Punktspiegelung an m).

Beweis:

Sei a ein beliebiger Punkt. Falls $a \in G$, dann ist $\sigma_H \circ \sigma_G(a) = \sigma_H(a) = \iota_m(a)$, weil $G \perp H$. Falls $a \in H$, so ist $\sigma_G(a) = \iota_m(a) \in H$ weil $G \perp H$, also $\sigma_H \circ \sigma_G(a) = \sigma_H \circ \iota_m(a) = \iota_m(a)$.

Im Weiteren gelte also $a \notin G$ und $a \notin H$. Es seien $L = \perp(a, H)$, $q = L \wedge H$, $L' = \iota_m(L)$, $q' = \iota_m(q)$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit des Lotes $G = M(q, q')$. Seien außerdem $c = \iota_m(a)$, $b = \iota_{q'}(c) = \iota_{q'} \circ \iota_m(a)$. Wegen $L \perp H$ ist nach 2.5.4 auch $L' \perp H$, weil ι_m eine Bewegung ist. Es gilt $(b, q') \equiv (a, q)$, und aus 2.6.1 folgt $G = M(a, b) \perp a \vee b$. Also ist $b \in \perp(a, G)$, und damit $\sigma_G(a) = b$.



Außerdem ist nach dieser Konstruktion $H = M(b, c)$ und somit gilt $\iota_m(a) = c = \sigma_H(b) = \sigma_H \circ \sigma_G(a)$. \square

Satz 2.6.3:

Für Geraden $G \neq H$ gilt: $G \perp H \Leftrightarrow \sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_H \circ \sigma_G$.

Beweis:

" \Rightarrow ": Es sei $G \perp H$. Aus 2.6.2 folgt $\sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_G = \iota_m^2 = \text{id}$ mit $m = G \wedge H$, und daraus $\sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_H \circ \sigma_G$.

" \Leftarrow ": Es gelte $\sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_H \circ \sigma_G$. Sei $p \in G$ ein Punkt mit $p \neq G \wedge H$. Dann gilt $\sigma_G \circ \sigma_H(p) = \sigma_H \circ \sigma_G(p) = \sigma_H(p)$, also $\sigma_H(p) \in G$. Wegen $p \notin H$ bedeutet dies $G \perp H$. \square

Satz 2.6.4:

Seien $p, q \in L$, so dass $\tau = \iota_q \circ \iota_p$ eine Translation entlang L ist. Außerdem seien $G = \perp(p, L)$, $H = \perp(q, L)$. Dann gilt $\tau = \sigma_H \circ \sigma_G$.

Beweis:

Unter Verwendung von 2.6.2 ergibt sich $\sigma_H \circ \sigma_G = \sigma_H \circ \text{id} \circ \sigma_G = \sigma_H \circ \sigma_L \circ \sigma_L \circ \sigma_G = \iota_q \circ \iota_p = \tau$. \square

Satz 2.6.5:

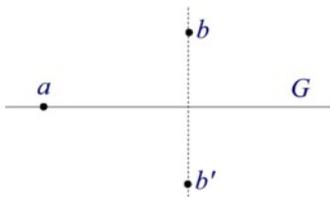
Geradenspiegelungen sind Bewegungen (und somit Kollineationen).

Beweis:

Wir betrachten das Bild (a', b') einer Strecke (a, b) bei der Spiegelung σ_G an der Geraden G .

Fall 1: $a, b \in G$. Dann sind a und b Fixpunkte, d.h. die Strecke (a, b) bleibt invariant.

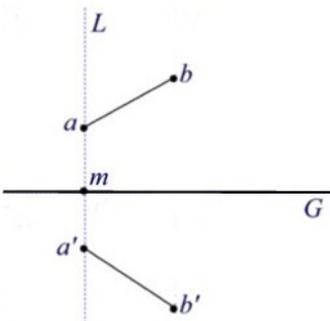
Fall 2: Genau einer der Punkte a, b liegt auf G , z.B. $a \in G$. Dann ist $a' = a, G = M(b, b')$, also $(a, b) \equiv (a, b') = (a', b')$.



Fall 3: a, b liegen beide nicht auf G .

Angenommen, $a \vee b \perp G$. Dann ist $\perp(a, G) = \perp(b, G)$ und $q := \perp(a, G) \cap G$ ist gemeinsame Mitte von $a' = \sigma(a)$ und a sowie von $b' = \sigma(b)$ und b . Aus (PG) folgt $(a, b) \equiv (a', b')$.

Nun sei $a \vee b$ nicht orthogonal zu G . Seien $L = \perp(a, G), m = L \cap G, a', b'$ die Bildpunkte von a, b unter σ_G . Nach 2.6.2 ist $\iota_m = \sigma_G \circ \sigma_L$, also gilt $\sigma_G = \iota_m \circ \sigma_L$. Da $a \in L$, folgt $(\sigma_L(a), \sigma_L(b)) \equiv (a, b)$ nach Fall 2, also insgesamt (weil ι_m eine Bewegung ist) $(a', b') = (\sigma_G(a), \sigma_G(b)) \equiv (a, b)$. \square



Satz 2.6.6:

Es gelte $(p, q) \equiv (p', q')$. Dann existiert eine Bewegung β mit $\beta(p) = p', \beta(q) = q'$.

Beweis:

Zunächst existiert nach 2.4.4 eine Translation τ , die p auf p' abbildet. Wenn $\tau(q) = q'$ ist, sind wir fertig. Sei also $\tau(q) \neq q'$. Weil τ eine Bewegung ist, gilt $(p', \tau(q)) = (\tau(p), \tau(q)) \equiv (p, q) \equiv (p', q')$, d.h. $p' \in M(q', \tau(q)) =: M$. Dann gilt $\sigma_M(\tau(p)) = \sigma_M(p') = p', \sigma_M(\tau(q)) = q'$. Da σ_M nach 2.6.5 eine Bewegung ist, folgt die Behauptung. \square

2.7 Kreise

Definition 2.7.1:

Der Kreis um $z \in \mathcal{H}$ durch den Punkt $a \neq z$ ist

$$\odot(z; a) := \{x \in \mathcal{H} \mid (z, x) \equiv (z, a)\}.$$

Bemerkung: Für $p, q \in \odot(z; a), p \neq q$, ist $z \in M(p, q)$.

Satz 2.7.2:

Sei G eine Gerade, K ein Kreis. Dann haben G und K höchstens zwei gemeinsame Punkte.

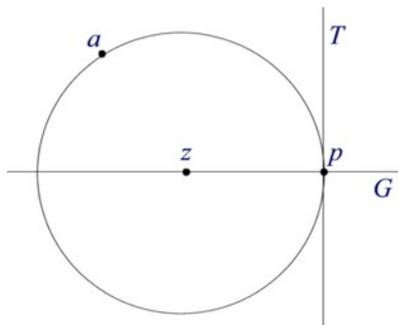
Beweis:

Angenommen, es gibt drei Punkte $a_1, a_2, a_3 \in G \cap K$, die paarweise verschieden sind. Sei $H_i := M(a_i, a_{i+1}), i = 1, 2$. Es gilt $H_1, H_2 \perp a_1 \vee a_2 = a_2 \vee a_3$, außerdem gilt $z \in H_1, z \in H_2$, insgesamt also $H_1 = H_2$ wegen der Eindeutigkeit des Lotes nach 2.5.3.

Nun ist $m(a_1, a_2) = M(a_1, a_2) \wedge (a_1 \vee a_2) = M(a_2, a_3) \wedge (a_2 \vee a_3) = m(a_2, a_3)$ (weil $H_1 = H_2$ und $a_1 \vee a_2 = a_2 \vee a_3 = G$). Wegen der Eindeutigkeit der Streckenverdopplung folgt $a_1 = a_3$. Widerspruch! \square

Satz 2.7.3 (Existenz und Eindeutigkeit der Tangente):

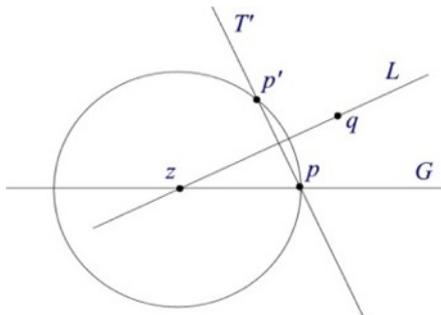
Durch jeden Punkt $p \in \odot(z; a) =: K$ geht genau eine Gerade T mit $T \cap K = \{p\}$, nämlich $T = \perp(p, p \vee z)$.

**Beweis:**

Existenz: sei $G = p \vee z$. Das Lot $T = \perp(p, G)$ ist eine Tangente, denn p ist der einzige gemeinsame Punkt von T und K :

Angenommen, es existiere $x \in T$ mit $x \in K, x \neq p$. Dann ist $M(p, x) \perp p \vee x = T$. Es ist $z \in G$, aber auch $z \in M(p, x)$, weil $x \in K$, somit $M(p, x) = \perp(z, T) = G$. Nun ist $G \wedge (p \vee x) = p$, jedoch $M(p, x) \wedge (p \vee x) = m(p, x) \neq p$. Widerspruch!

Eindeutigkeit: sei T' eine weitere Gerade durch p , $T' \neq T$, dann ist T' nicht orthogonal zu G . Sei $L = \perp(z, T')$; dann ist $L \neq G$. Ferner sei q ein beliebiger Punkt auf L mit $q \neq z$. Nach (DR) gibt es einen eindeutigen Punkt $p' \neq p$ mit $(p', q) \equiv (p, q)$ und $(p', z) \equiv (p, z)$ (*). Gemäß 2.5.3 gilt dabei $p' \in T'$, weil $p' \vee p \perp L$, somit $p' \vee p = T'$. Nun ist auch $p' \in K$ wegen (*), und T' ist keine Tangente. \square



2.8 Weiteres zu Translationen

Satz 2.8.1:

Für $a, b \in L$, $a \neq b$, und eine Translation τ entlang L gilt: $(a, \tau(a)) \equiv (b, \tau(b))$.

Beweis:

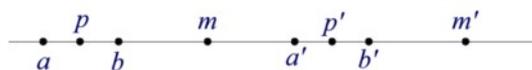
Seien $a' = \tau(a), b' = \tau(b) \in L$. Dann ist auch $a' \neq b'$.

Fall 1: $a' = b$. Dann ist $(a, a') = (a, b) \equiv (a', b') = (b, b')$.

Fall 2: $a = b'$. Dann ist $(a, a') = (b', a') \equiv (b, a) = (b, b')$.

Fall 3: $a' \neq b$ und $a \neq b'$.

Sei $p = m(a, b)$. Dann ist $p' := \tau(p) = m(a', b')$, weil $(a', p') \equiv (a, p) \equiv (b, p) \equiv (b', p')$. Sei $m = m(p, p'), m' = \tau(m) \neq m$.



Es gilt $p' = m(m, m')$, weil $(p', m') \equiv (p, m) \equiv (p', m)$. Somit ist $m(m, m') = p' = m(a', b')$ und nach (PG) gilt $(a', m) \equiv (b', m') \equiv (b, m)$, also $m = m(a', b)$, weil $a' \neq b$, außerdem gilt $(b', m) \equiv (a', m') \equiv (a, m)$, also $m = m(a, b')$, weil $a \neq b'$. Wiederum nach (PG) folgt somit u.a. $(a', a) \equiv (b', b)$. \square

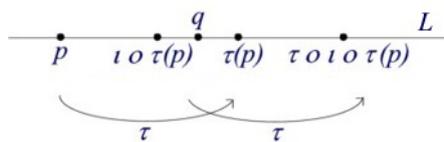
Satz 2.8.2:

Es seien τ eine Translation entlang einer Geraden L und ι die Punktspiegelung an $q \in L$. Dann gilt $\iota \circ \tau \circ \iota = \tau^{-1}$.

Beweis:

Es wird gezeigt, dass $\tau \circ \iota \circ \tau = \iota$ gilt. Sei p ein beliebiger Punkt.

Fall 1: $p \in L$.



Fall 1.1: $\tau(p) = q$. Dann ist $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = \tau \circ \iota(q) = \tau(q) = \tau^2(p)$. Nach 2.4.6 ist $q = \tau(p) = m(p, \tau^2(p))$. Somit gilt $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = \iota(p)$.

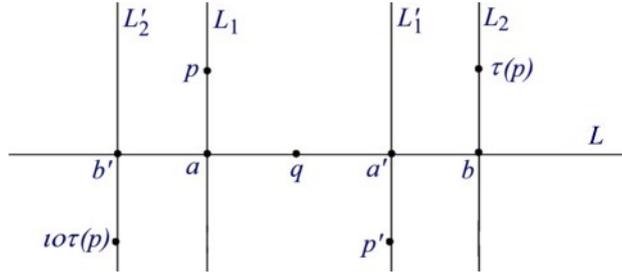
Fall 1.2: $q = m(p, \tau(p))$. Dann ist $\tau(p) = \iota(p)$, also $\iota \circ \tau(p) = p$, $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = \tau(p) = \iota(p)$.

Fall 1.3: $\tau(p) \neq q$ und $q \neq m(p, \tau(p))$.

Fall 1.3.1: $p = \tau \circ \iota \circ \tau(p)$. Dann gilt $(p, \iota \circ \tau(p)) \equiv (\tau(p), \tau \circ \iota \circ \tau(p)) = (\tau(p), p)$. Wegen $\tau(p) \neq q$ ist $\iota \circ \tau(p) \neq \tau(p)$, somit ist $p = m(\iota \circ \tau(p), \tau(p)) = q$. Es folgt damit $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = p = \iota(p)$.

Fall 1.3.2: $p \neq \tau \circ \iota \circ \tau(p)$. Dann gilt $(p, \iota \circ \tau(p)) \equiv (\tau(p), \tau \circ \iota \circ \tau(p))$, weil eine Translation eine Bewegung ist; außerdem gilt $(p, \tau(p)) \equiv (\iota \circ \tau(p), \tau \circ \iota \circ \tau(p))$ nach 2.8.1. Wegen $\iota \circ \tau(p) \neq \tau(p), \tau \circ \iota \circ \tau(p) \neq p$ sind die Voraussetzungen der Umkehrung von (PG) gegeben, d.h. nach 2.1.2 gilt $m(p, \tau \circ \iota \circ \tau(p)) = m(\iota \circ \tau(p), \tau(p)) = q$. Also ist auch hier $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = \iota(p)$.

Fall 2: $p \notin L$. Es sei $L_1 = \perp(p, L), a = L_1 \cap L, L_2 = \perp(\tau(p), L), b = L_2 \cap L$. Dann ist $\tau(a) = b$, weil $\tau(L_1) = L_2$ nach 2.5.3 gilt und $\tau(L) = L$. Außerdem seien $a' = \iota(a), b' = \iota(b), p' = \iota(p), L'_1 = \iota(L_1), L'_2 = \iota(L_2)$. Weil ι orthogonalitätserhaltend ist, gilt $L'_1, L'_2 \perp L$. Es wird $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = p'$ gezeigt:



Fall 2.1: $q \neq b$, d.h. $b' \neq b$. Nach 2.8.1 ist $(b', \tau(b')) \equiv (a, \tau(a)) = (a, b) \equiv (a', b')$ (letzteres, weil ι eine Bewegung ist). Somit folgt $\tau(b') \in \{a', \iota_{b'}(a')\}$. Angenommen, $\tau(b') \neq a'$, also $\tau(b') = \iota_{b'}(a')$. Dann ist $b' = m(a', \tau(b'))$. Andererseits ist $(\tau(b'), b) = (\tau(b'), \tau(a)) \equiv (b', a) \equiv (a', b)$, also $b = m(a', \tau(b'))$. Wegen der Eindeutigkeit des Mittelpunktes gilt $b = b'$. Widerspruch! Also ist $\tau(b') = a'$.

Fall 2.2: $q = b$, d.h. $b' = b$. Aus 2.4.3 und 2.4.5 folgt $\tau(b') = \tau(q) = a'$, weil $q = m(a, a')$.

In beiden Fällen folgt $\tau(L'_2) = L'_1$, weil τ orthogonalitätserhaltend ist. Es ist $\iota \circ \tau(p) \in L'_2$, also $\tau \circ \iota \circ \tau(p) \in L'_1$. Wegen $(\iota \circ \tau(p), b') \equiv (\tau \circ \iota \circ \tau(p), \tau(b')) = (\tau \circ \iota \circ \tau(p), a')$ und $(\iota \circ \tau(p), b') \equiv (\tau(p), b) \equiv (p, a) \equiv (p', a')$ folgt $\tau \circ \iota \circ \tau(p) \in \{p', \iota_{a'}(p')\}$. Angenommen, $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = \iota_{a'}(p')$. Dann wäre $a' = m(\tau \circ \iota \circ \tau(p), p')$ und es würde $L = M(\tau \circ \iota \circ \tau(p), p')$ folgen, weil $L \perp L'_1$. Nun ist aber $(p', \tau(p)) \equiv (p, \iota \circ \tau(p)) \equiv (\tau(p), \tau \circ \iota \circ \tau(p))$, somit würde $\tau(p) \in M(\tau \circ \iota \circ \tau(p), p') = L$ gelten, also $p \in L$. Widerspruch! Also ist $\tau \circ \iota \circ \tau(p) = p'$.

Insgesamt ist damit $\tau \circ \iota \circ \tau = \iota$ gezeigt, woraus die Behauptung folgt. \square

Folgerung 2.8.2':

Sei $\tau = \iota_a \circ \iota_b, \iota = \iota_c$ für $a, b, c \in L$. Die Beziehung $\iota \circ \tau \circ \iota = \tau^{-1}$ ergibt $\iota_c \circ \iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_b \circ \iota_a$, also $\iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_c \circ \iota_b \circ \iota_a$.

Satz 2.8.3:

Sei τ eine Translation entlang L . Seien $a, b \in L$ und $u = \tau(a), v = \tau(b)$. Dann gilt $\iota_a \circ \iota_b = \iota_u \circ \iota_v$.

Beweis:

Nach 2.3.4 gilt $\iota_u \circ \iota_v = \iota_{\tau(a)} \circ \iota_{\tau(b)} = \tau \circ \iota_a \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \iota_b \circ \tau^{-1} = \tau \circ \iota_a \circ \iota_b \circ \tau^{-1}$. Mit $\tau = \iota_x \circ \iota_y$ für Punkte $x, y \in L$ ergibt sich $\iota_u \circ \iota_v = \iota_x \circ \iota_y \circ \iota_a \circ \iota_b \circ \iota_y \circ \iota_x = \iota_a \circ \iota_y \circ \iota_x \circ \iota_x \circ \iota_y \circ \iota_b = \iota_a \circ \iota_b$ (unter Beachtung von 2.8.2'). \square

Satz 2.8.4:

Die Translationen entlang einer Geraden L bilden eine abelsche Gruppe.

Beweis:

Seien $\rho = \iota_x \circ \iota_y$, $\tau = \iota_u \circ \iota_v$ Translationen entlang L mit $x, y, u, v \in L$.

Fall 1: $y = u$. Dann ist $\rho \circ \tau = \iota_x \circ \iota_y \circ \iota_u \circ \iota_v = \iota_x \circ \iota_u \circ \iota_u \circ \iota_v = \iota_x \circ \iota_v$, also wieder eine Translation.

Fall 2: $y \neq u$. Betrachte die Translation $\iota_m \circ \iota_u$ mit $m = m(u, y)$. Letztere bildet u auf y ab, z sei das Bild von v .



Unter Verwendung von 2.8.3 ergibt sich dann $\rho \circ \tau = \iota_x \circ \iota_y \circ \iota_u \circ \iota_v = \iota_x \circ \iota_y \circ \iota_y \circ \iota_z = \iota_x \circ \iota_z$, also wieder eine Translation.

Außerdem gilt $\rho \circ \tau = \iota_x \circ \iota_y \circ \iota_u \circ \iota_v = \iota_x \circ \iota_v \circ \iota_u \circ \iota_y = \iota_u \circ \iota_v \circ \iota_x \circ \iota_y = \tau \circ \rho$ aufgrund von 2.8.2'. \square

Satz 2.8.5:

Translationen entlang einer Geraden L sind durch das Bild eines Punktes eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien τ, ρ Translationen entlang L . Wenn $\tau(x) = \rho(x)$, dann ist $\tau \circ \rho^{-1}(x) = x$, also $\tau \circ \rho^{-1} = \text{id}$ nach 2.4.2, weil $\tau \circ \rho^{-1}$ nach 2.8.4 eine Translation ist. \square

Korollar 2.8.6:

Sei τ eine Translation entlang L . Dann existiert eine eindeutige Translation ρ entlang L mit $\tau = \rho \circ \rho$.

Beweis:

Für einen Punkt $a \in L$ sei $m = m(a, \tau(a))$. Nach 2.4.4 gibt es eine Translation ρ entlang L mit $\rho(a) = m$, für die nach 2.4.5 auch $\rho(m) = \tau(a)$ gilt. Somit ergibt sich $\rho \circ \rho(a) = \tau(a)$ und damit $\rho \circ \rho = \tau$ nach 2.8.5. Gilt nun auch $\theta \circ \theta = \tau$ für eine Translation θ entlang L , so folgt $\rho \circ \theta^{-1} = \rho^{-1} \circ \theta$. Mit 2.8.4 ergibt sich $\rho \circ \theta^{-1} = \theta \circ \rho^{-1} = (\rho \circ \theta^{-1})^{-1}$. Aus 2.4.3 folgt nun $\rho \circ \theta^{-1} = \text{id}$ und damit $\rho = \theta$. \square

Korollar 2.8.7:

Das Produkt einer Punktspiegelung an einem Punkt auf einer Geraden L und einer Translation entlang L ist eine Punktspiegelung an einem Punkt auf L .

Beweis:

Für $\tau = \text{id}$ ist das klar. Seien nun $a, b, c \in L$ mit $a \neq b$, $\tau = \iota_a \circ \iota_b$ eine Translation entlang L , und ι_c eine Punktspiegelung. Sei $c' = \iota_a \circ \iota_b(c)$, $d = m(c, c')$. Dann gilt $\iota_d \circ \iota_c(c) = \iota_d(c) = c' = \iota_a \circ \iota_b(c)$. Nach 2.8.5 folgt $\iota_d \circ \iota_c = \iota_a \circ \iota_b$, also $\tau \circ \iota_c = \iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_d$. \square

2.9 Kompositionen von Geradenspiegelungen

Die Sachverhalte dieses Abschnittes ergeben sich häufig auf analoge Weise wie bei Hahl [6] bzw. wie bei Bachmann [1] (§ 3,4 - 3,7 bzw. § 4,4 - 4,5).

Satz 2.9.1:

Für eine Bewegung β mit zwei Fixpunkten $a \neq b$ gilt: $\beta \in \{id, \sigma_{a \vee b}\}$.

Beweis:

Die Gerade $a \vee b$ ist Achse von β , denn für einen Punkt $p \in a \vee b$ gilt $(a, \beta(p)) = (\beta(a), \beta(p)) \equiv (a, p)$, entsprechend $(b, \beta(p)) \equiv (b, p)$. Wäre $\beta(p) \neq p$, so hieße dies $a = m(p, \beta(p)) = b$. Widerspruch!

Falls β einen Fixpunkt $c \notin a \vee b$ besitzt, so gilt $\beta = id$. Denn dann wären auch $a \vee c$ und $b \vee c$ Achsen von β . Angenommen, für einen Punkt d , der nicht auf einer der Geraden $a \vee b, a \vee c$ und $b \vee c$ liegt, wäre $\beta(d) \neq d$. Dann wäre $(c, \beta(d)) = (\beta(c), \beta(d)) \equiv (c, d)$, also $c \in M(d, \beta(d))$. Ebenso wären $a, b \in M(d, \beta(d))$, d.h. a, b, c wären kollinear. Widerspruch!

Falls $\beta \neq id$, so ist also $\beta(c) \neq c$ für alle Punkte c , die nicht auf $a \vee b$ liegen. Es gilt $(a, \beta(c)) \equiv (a, c)$, $(b, \beta(c)) \equiv (b, c)$ wie oben, also $a, b \in M(c, \beta(c))$, $a \vee b = M(c, \beta(c))$. Daraus folgt $\beta(c) = \sigma_{a \vee b}(c)$. \square

Folgerung 2.9.1':

Eine Bewegung β ist durch das Bild dreier nichtkollinearer Punkte eindeutig bestimmt.

Beweis:

Es seien a_1, a_2, a_3 drei nichtkollineare Punkte. Angenommen, es existieren Bewegungen β und β' mit der Eigenschaft $\beta(a_i) = \beta'(a_i), i = 1, 2, 3$. Dann hat die Bewegung $\beta' \circ \beta^{-1}$ die drei nichtkollinearen Fixpunkte a_1, a_2, a_3 . Aus 2.9.1 folgt $\beta' \circ \beta^{-1} = id$. \square

Satz 2.9.2:

Jede Bewegung ist Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen.

Beweis:

Es sei B die Gruppe der Bewegungen, Σ die Menge der Geradenspiegelungen. Für Punkte $a \neq b$ seien

$$B_a = \{\beta \in B \mid \beta(a) = a\},$$

$$B_{a,b} = \{\beta \in B \mid \beta(a) = a, \beta(b) = b\} = \{id, \sigma_{a \vee b}\} \text{ nach 2.9.1.}$$

Es wird gezeigt:

- (1) $B \subseteq (\Sigma \cup \{id\}) \circ B_a$
- (2) $B_a \subseteq (\Sigma \cup \{id\}) \circ B_{a,b}$

Daraus folgt die Behauptung.

Zu (1): Sei $\beta \in B$. Falls $\beta(a) = a$, so $\beta \in B_a = \text{id} \circ B_a$. Falls $\beta(a) \neq a$, so sei $M = M(a, \beta(a))$. Dann gilt $\sigma_M \circ \beta(a) = a$, d.h. $\sigma_M \circ \beta \in B_a$, $\beta = \sigma_M \circ \sigma_M \circ \beta \in \Sigma \circ B_a$.

Zu (2): Sei $\beta \in B_a$. Falls $\beta(b) = b$, so $\beta \in B_{a,b} = \text{id} \circ B_{a,b}$. Falls $\beta(b) \neq b$, so $(a, \beta(b)) = (\beta(a), \beta(b)) \equiv (a, b)$, d.h. $a \in M(b, \beta(b)) =: M$. Dann ist $\sigma_M \circ \beta(a) = \sigma_M(a) = a$, $\sigma_M \circ \beta(b) = b$, also $\sigma_M \circ \beta \in B_{a,b}$, $\beta = \sigma_M \circ \sigma_M \circ \beta \in \Sigma \circ B_{a,b}$. \square

Satz 2.9.3:

Für eine Bewegung β und eine Gerade G gilt $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1} = \sigma_{\beta(G)}$.

Beweis:

Es seien p, q zwei Punkte auf G mit $p \neq q$, $p' = \beta(p)$, $q' = \beta(q)$. Dann ist auch $p' \neq q'$ und es ist $\beta(G) = \beta(p \vee q) = p' \vee q'$. Es gilt $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1}(p') = p'$, ebenso $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1}(q') = q'$, d.h. $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1}$ hat mindestens zwei Fixpunkte. Nach 2.9.1 gilt nun $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1} = \text{id}$ oder $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1} = \sigma_{p' \vee q'} = \sigma_{\beta(G)}$. Angenommen, $\beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1} = \text{id}$. Dann wäre $\beta \circ \sigma_G = \beta$, d.h. $\sigma_G = \text{id}$. Widerspruch! \square

Folgerungen aus Satz 2.9.3:

Seien G, H Geraden, β eine Bewegung. Dann gilt:

- (a) $\sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_H$ ist eine Geradenspiegelung.
- (b) Wenn $\sigma_G \circ \beta \circ \sigma_G$ eine Geradenspiegelung ist, so ist β auch eine Geradenspiegelung.

Satz 2.9.4:

Wenn $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_L$ eine Geradenspiegelung ist, so ist $\sigma_G \circ \sigma_L \circ \sigma_H$ auch eine Geradenspiegelung.

Beweis:

Es gelte $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_L = \sigma_K$ für eine Gerade K . Weil σ_K involutorisch ist, gilt $\sigma_K = \sigma_L \circ \sigma_H \circ \sigma_G$ und somit $\sigma_G \circ \sigma_L \circ \sigma_H = \sigma_G \circ \sigma_K \circ \sigma_G$, was nach den Folgerungen aus Satz 2.9.3 auch eine Geradenspiegelung ist. \square

Vorbemerkung zu Satz 2.9.5:

Seien G, H zwei Geraden, p ein Punkt. Wenn $\sigma_H(p) = \sigma_G(p)$ gilt, dann folgt entweder $p = G \wedge H$ oder $G = H$.

Beweis der Vorbemerkung:

Fall 1: p liegt auf einer der beiden Geraden, z.B. $p \in G$. Dann ist $\sigma_H(p) = \sigma_G(p) = p$ nach Voraussetzung, d.h. $p \in H$ und somit $p = G \wedge H$.

Fall 2: p liegt weder auf G noch auf H . Für $p' := \sigma_H(p) = \sigma_G(p)$ gilt dann $p' \neq p$. Damit ist $H = M(p, p')$, ebenso $G = M(p, p')$, also $G = H$. \square

Satz 2.9.5:

Das Produkt zweier Geradenspiegelungen ist nie eine Geradenspiegelung.

Beweis:

Seien G, H Geraden. Angenommen $\sigma_H \circ \sigma_G = \sigma_L$ für eine Gerade L . Für alle Punkte $p \in L$

wäre dann $\sigma_H \circ \sigma_G(p) = p$, d.h. $\sigma_H(p) = \sigma_G(p)$. Angenommen, $G \neq H$. Dann wäre nach der Vorbemerkung $p = G \wedge H$ für alle Punkte $p \in L$, was unmöglich ist. Also ist $G = H$, d.h. $\sigma_L = \text{id}$. Widerspruch! \square

Satz 2.9.6:

Für einen Punkt z und eine Gerade G sind äquivalent:

- (1) Die Punktspiegelung ι_z an z kommutiert mit der Geradenspiegelung σ_G an G .
- (2) $z \in G$.

Beweis:

(1) \Rightarrow (2): Es gelte $\iota_z \circ \sigma_G = \sigma_G \circ \iota_z$. Dann folgt $\iota_z(\sigma_G(z)) = \sigma_G(\iota_z(z)) = \sigma_G(z)$, also ist $\sigma_G(z)$ Fixpunkt von ι_z . Dies heißt $\sigma_G(z) = z$, somit $z \in G$.

(2) \Rightarrow (1): Sei $z \in G$, $H := \perp(G, z)$. Nach 2.6.2 und 2.6.3 gilt $\iota_z = \sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_H \circ \sigma_G$, also $\iota_z \circ \sigma_G = \sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_G = \sigma_H = \sigma_G \circ \sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_G \circ \iota_z$. \square

Satz 2.9.7:

Eine involutorische Bewegung ist eine Punkt- oder Geradenspiegelung.

Beweis:

Sei β eine Bewegung mit $\beta^2 = \text{id} \neq \beta$. Nach 2.2.6 hat β mindestens einen Fixpunkt.

Fall 1: β hat genau einen Fixpunkt z . Dann ist $z = m(x, \beta(x))$ für alle $x \neq z$, d.h. $\beta(x) = \iota_z(x)$.

Fall 2: β hat mindestens zwei Fixpunkte. Dann folgt aus 2.9.1, dass β eine Geradenspiegelung ist. \square

Satz 2.9.8 (Dreispiegelungssatz für kopunktales Geraden):

Seien G_1, G_2, G_3 drei Geraden durch denselben Punkt z . Dann gilt $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = \sigma_H$ für eine geeignete Gerade H durch z .

Beweis:

Sei $\beta = \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1}$. Wenn $G_2 = G_3$, so ist $\beta = \sigma_{G_1}$. Im Folgenden sei also $G_2 \neq G_3$ vorausgesetzt.

Für $x \in G_1$ mit $x \neq z$ gilt $\beta(x) = \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1}(x) = \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2}(x) \neq x$. Denn sonst hätte $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2}$ zwei verschiedene Fixpunkte x, z . Nach 2.9.1 wäre entweder $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \text{id}$, also $G_2 = G_3$ im Widerspruch zur Annahme, oder es wäre $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_{G_1}$, im Widerspruch zu 2.9.5.

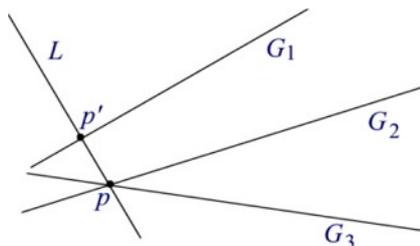
Somit existiert $H := M(x, \beta(x))$. Da G_1, G_2, G_3 durch z gehen, ist z Fixpunkt von $\sigma_{G_3}, \sigma_{G_2}, \sigma_{G_1}$ und damit von β , also gilt $(z, x) \equiv (\beta(z), \beta(x)) = (z, \beta(x))$, d.h. $z \in H$. Die Bewegung $\sigma_H \circ \beta$ lässt somit die Punkte x und z fest, d.h. nach 2.9.1 gilt $\sigma_H \circ \beta = \text{id}$ oder $\sigma_H \circ \beta = \sigma_{z \vee x} = \sigma_{G_1}$. Letzteres ergäbe $\sigma_{G_1} = \sigma_H \circ \beta = \sigma_H \circ \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1}$, d.h. $\sigma_H \circ \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \text{id}$, somit $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_H$, im Widerspruch zu 2.9.5. Also gilt $\sigma_H \circ \beta = \text{id}$, d.h. $\beta = \sigma_H$. \square

Satz 2.9.8':

Es seien G_2, G_3 verschiedene Geraden durch einen Punkt p . Wenn $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = \sigma_H$ für Geraden G_1 und H ist, dann gilt $p \in G_1$ (und insbesondere $p \in H$.)

Beweis:

Angenommen, $p \notin G_1$. Es seien $L = \perp(p, G_1), p' = L \wedge G_1$. Dann ist $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_L = \sigma_K$ für eine Gerade K durch p nach 2.9.8. Es folgt $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_K \circ \sigma_L$ und damit $\sigma_H = \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = \sigma_K \circ \sigma_L \circ \sigma_{G_1}$. Dies wiederum führt (unter Berücksichtigung von 2.6.2) zu $\sigma_K \circ \sigma_H = \sigma_L \circ \sigma_{G_1} = \iota_{p'}$.



Es gilt somit insbesondere $\sigma_K \circ \sigma_H(p') = p'$, also $\sigma_K(p') = \sigma_H(p')$. Nach der Vorbemerkung zu Satz 2.9.5 folgt nun $K = H$ oder $p' = K \wedge H$. Ersteres ist jedoch wegen $\sigma_K \circ \sigma_H = \iota_{p'}$ ausgeschlossen. Somit folgt $p' \in K$. Dies wiederum bedeutet $K = p \vee p' = L$. Wegen $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_K \circ \sigma_L$ folgt $G_3 = G_2$. Widerspruch! \square

Satz 2.9.9:

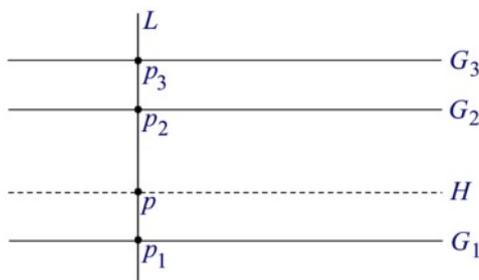
Es seien L, G Geraden, $G \perp L$. Weiter sei τ eine Translation entlang L und $H := \tau(G) \perp L$. Dann gilt $\sigma_H \circ \sigma_G = \tau \circ \tau$.

Beweis:

Seien $p = L \wedge G, q = L \wedge H, m = m(p, q)$. Dann ist $\tau = \iota_q \circ \iota_m = \iota_m \circ \iota_p$ nach 2.8.5, da sowohl $\iota_q \circ \iota_m$ als auch $\iota_m \circ \iota_p$ den Punkt p auf q abbilden. Es gilt dann $\sigma_H \circ \sigma_G = \sigma_H \circ \sigma_L \circ \sigma_L \circ \sigma_G = \iota_q \circ \iota_p = \iota_q \circ \iota_m \circ \iota_m \circ \iota_p = \tau \circ \tau$. \square

Satz 2.9.10 (Dreispiegelungssatz für Geraden mit gemeinsamem Lot):

Sei L eine Gerade, und seien G_1, G_2, G_3 drei Geraden mit $G_i \perp L$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = \sigma_H$ für eine geeignete Gerade H mit $H \perp L$.



Beweis:

Wenn $G_2 = G_3$, so ist $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = \sigma_{G_1}$. Im Folgenden gelte also $G_2 \neq G_3$. Es seien $p_i = G_i \wedge L, i = 1, 2, 3$ und τ die Translation entlang L mit $\tau(p_2) = p_3$. Dann ist $\tau(G_2) = G_3$. Weiter seien $H := \tau(G_1), p := \tau(p_1)$. Nach 2.9.9 gilt $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \tau \circ \tau$, ebenso gilt $\sigma_H \circ \sigma_{G_1} = \tau \circ \tau$,

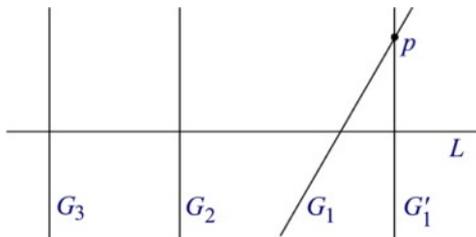
somit also $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_H \circ \sigma_{G_1}$, d.h. $\sigma_H = \sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1}$. \square

Satz 2.9.10':

Seien $G_2, G_3 \perp L, G_2 \neq G_3$. Für eine weitere Gerade G_1 gelte, dass $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1}$ eine Geradenspiegelung an einer Geraden H ist. Dann ist auch $G_1 \perp L$ (und insbesondere $H \perp L$).

Beweis:

Angenommen, G_1 ist nicht orthogonal zu L . Es sei $p \in G_1$ ein Punkt mit $p \notin L$, und $G'_1 := \perp(p, L)$.



Dann ist $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G'_1} = \sigma_{H'}$ mit $H' \perp L$, also $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_{H'} \circ \sigma_{G'_1}$. Andererseits gilt nach Voraussetzung $\sigma_{G_3} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_H \circ \sigma_{G_1}$, somit $\sigma_{H'} \circ \sigma_{G'_1} = \sigma_H \circ \sigma_{G_1}$ (*), d.h. $\sigma_{H'} \circ \sigma_{G'_1} \circ \sigma_{G_1} = \sigma_H$. Wegen $p \in G_1, G'_1$ folgt $p \in H'$ nach 2.9.8', da nach unserer Annahme $G_1 \neq G'_1$ ist. Wegen der Eindeutigkeit des Lotes folgt $H' = G'_1$ und wegen (*) $H = G_1$, d.h. $G_2 = G_3$. Widerspruch! \square

Bemerkung: Mit 2.9.8 und 2.9.10 ergibt sich, dass die zugrunde liegende Ebene das Axiomensystem der metrischen Geometrie im Sinne von Bachmann [1] (§ 3.1) erfüllt. Einige der folgenden Sätze sind Adaptionen seiner Aussagen, die hier inzidenzgeometrisch formuliert sind, während Bachmann diese in der Sprache der Inzidenzgruppen darstellt.

Satz 2.9.11:

Für eine Gerade K und zwei Punkte a, b sind äquivalent:

- (1) $\iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b$ ist eine Geradenspiegelung
- (2) $b \in \perp(a, K)$.

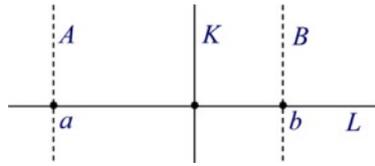
Zusatz: in diesem Fall ist dann $\iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b$ die Spiegelung an einer Geraden K' , die senkrecht auf $\perp(a, K)$ steht.

Beweis:

Fall 1: $a = b$. Dann ist (2) erfüllt. Außerdem gilt $\iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_a = \sigma_{K'}$ mit $K' := \iota_a(K)$ nach 2.9.3. Dies zeigt (1) und den Zusatz.

Fall 2: $a \neq b$. Es seien $L = a \vee b, A = \perp(a, L), B = \perp(b, L)$.

(2) \Rightarrow (1): Unter der Voraussetzung (2) ist dann $L = \perp(a, K)$, und folglich ist $\iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b = \sigma_A \circ \sigma_L \circ \sigma_K \circ \sigma_L \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_L \circ \sigma_L \circ \sigma_K \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_K \circ \sigma_B = \sigma_{K'}$ für eine Gerade K' . Aus 2.9.10 folgt $K' \perp L$.



(1) \Rightarrow (2): Es gelte $\iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b = \sigma_{K'}$ für eine Gerade K' . Dann ist $\sigma_{K'} = \iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b = \sigma_L \circ \sigma_A \circ \sigma_K \circ \sigma_B \circ \sigma_L$. Unter Verwendung von 2.9.3 folgt $\sigma_A \circ \sigma_K \circ \sigma_B = \sigma_{\sigma_L(K')}$. Mit 2.9.4 folgt, dass $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_K$ auch eine Geradenspiegelung ist. Unter Berücksichtigung von 2.9.10' folgt $K \perp L$. \square

Satz 2.9.12:

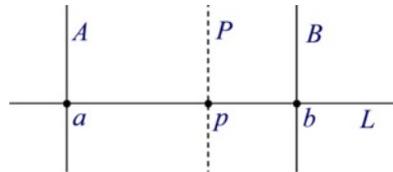
Für einen Punkt p und zwei Geraden A, B sind äquivalent:

- (1) $\sigma_A \circ \iota_p \circ \sigma_B$ ist eine Punktspiegelung
- (2) Es existiert eine Gerade L mit $p \in L$ und $A, B \perp L$.

Zusatz: in diesem Fall ist dann $\sigma_A \circ \iota_p \circ \sigma_B$ die Spiegelung an einem Punkt von L .

Beweis:

(2) \Rightarrow (1): Es seien $A, B \perp L, p \in L$. Weiter seien $a = A \cap L, b = B \cap L, P := \perp(p, L)$. Nach 2.9.10 gilt $\sigma_A \circ \sigma_P \circ \sigma_B = \sigma_K$ für eine Gerade $K \perp L$.



Damit ist $\sigma_A \circ \iota_p \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_P \circ \sigma_L \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_P \circ \sigma_B \circ \sigma_L = \sigma_K \circ \sigma_L = \iota_q$ für $q = K \cap L$ nach 2.6.2.

(1) \Rightarrow (2): Es gelte $\sigma_A \circ \iota_p \circ \sigma_B = \iota_q$ für einen Punkt q .

Fall 1: $p = q$. Es sei $L = \perp(p, A), P = \perp(p, L)$. Wegen $\sigma_P \circ \sigma_L = \iota_p = \sigma_A \circ \iota_p \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_L \circ \sigma_P \circ \sigma_B = \sigma_L \circ \sigma_A \circ \sigma_P \circ \sigma_B$ folgt $\sigma_A \circ \sigma_P \circ \sigma_B = \sigma_L \circ \sigma_P \circ \sigma_L = \sigma_{\sigma_L(P)} = \sigma_P$. Falls $A = P$ ist, gilt somit $B = P$, also $B \perp L$. Andernfalls folgt $B \perp L$ aus 2.9.10'.

Fall 2: $p \neq q$. Sei $L = p \vee q$. Wegen $\sigma_A = \iota_q \circ \sigma_B \circ \iota_p$ folgt $B \perp L$ aus 2.9.11. Außerdem ist $\sigma_B = \iota_q \circ \sigma_A \circ \iota_p$ und aus 2.9.11 folgt wiederum $A \perp L$.

In beiden Fällen gilt $q \in L$, was den Zusatz zeigt. \square

Satz 2.9.13:

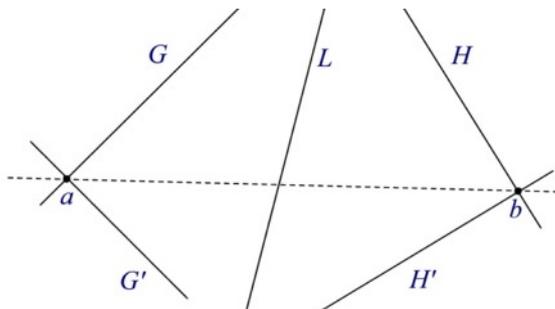
Für Geraden G, L, H und eine Gerade K gelte $\sigma_G \circ \sigma_L \circ \sigma_H = \sigma_K$. Weiter seien Geraden G', H' gegeben mit $G' \perp G, H' \perp H$, und es seien $a = G \cap G', b = H \cap H'$. Dann gilt sind äquivalent:

- (1) $\sigma_{G'} \circ \sigma_L \circ \sigma_{H'} = \sigma_{K'}$ für eine Gerade K'
- (2) $b \in \perp(a, K)$.

Insbesondere gilt dann auch $b \in \perp(a, K')$.

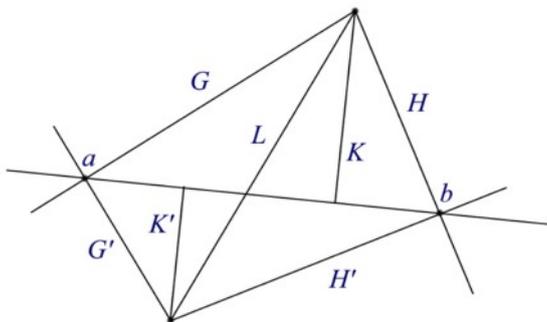
Beweis:

Es gilt $\sigma_{G'} \circ \sigma_L \circ \sigma_{H'} = \sigma_{G'} \circ \sigma_G \circ \sigma_G \circ \sigma_L \circ \sigma_H \circ \sigma_H \circ \sigma_{H'} = \iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b$. Nach 2.9.11 ist $\iota_a \circ \sigma_K \circ \iota_b$ genau dann eine Geradenspiegelung an einer Geraden K' , wenn $b \in \perp(a, K)$ gilt. Unter Vertauschung der Rollen von G und H folgt dann auch $b \in \perp(a, K')$. \square



Bemerkung: Insbesondere ist im Hinblick auf 2.9.15 unter anderem die spezielle Situation interessant, dass G, L, H bzw. G', L, H' jeweils kopunktal sind, und dass $G \wedge G' \neq H \wedge H'$ gilt.

Nach dem Dreispiegelungssatz 2.9.8 ist $\sigma_G \circ \sigma_L \circ \sigma_H = \sigma_K$ und $\sigma_{G'} \circ \sigma_L \circ \sigma_{H'} = \sigma_{K'}$ für Geraden K, K' ; somit folgt $K, K' \perp a \vee b$ aus 2.9.13.



Satz 2.9.14:

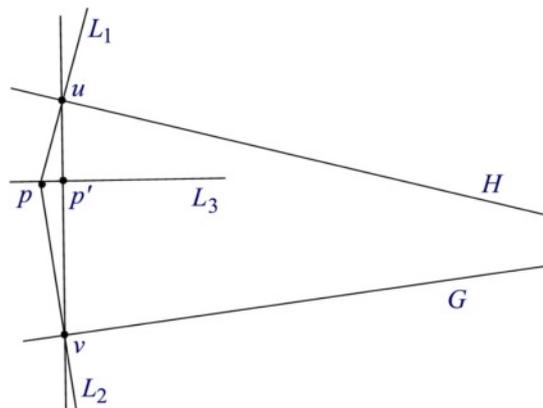
Es seien $G \neq H$ Geraden und p ein Punkt, der auf keiner der beiden Geraden liegt. Dann existiert genau eine Gerade K durch p so, dass $\sigma_G \circ \sigma_K \circ \sigma_H$ eine Geradenspiegelung ist.

Beweis:

Seien $L_1 = \perp(p, H)$, $u = L_1 \wedge H$, $L_2 = \perp(p, G)$, $v = L_2 \wedge G$. Es ist $u \neq v$; sei $L_3 = \perp(p, u \vee v)$.

Nach dem Dreispiegelungssatz 2.9.8 gilt $\sigma_{L_2} \circ \sigma_{L_3} \circ \sigma_{L_1} = \sigma_K$ für eine Gerade K durch p , also $\sigma_{L_3} = \sigma_{L_2} \circ \sigma_K \circ \sigma_{L_1}$. Aus 2.9.13 folgt nun, dass $\sigma_G \circ \sigma_K \circ \sigma_H$ eine Spiegelung an einer Geraden \bar{K} ist.

Seien nun K, K' zwei solche Geraden durch p , so dass $\sigma_G \circ \sigma_K \circ \sigma_H$ bzw. $\sigma_G \circ \sigma_{K'} \circ \sigma_H$ Geradenspiegelungen sind. Dann gibt es umgekehrt Geraden L, L' durch p mit $\sigma_L = \sigma_{L_2} \circ \sigma_K \circ \sigma_{L_1}$ bzw. $\sigma_{L'} = \sigma_{L_2} \circ \sigma_{K'} \circ \sigma_{L_1}$, die nach 2.9.13 orthogonal zu $u \vee v$ sind. Mit der Eindeutigkeit des Lotes folgt $L = L'$ und daraus $K = K'$. \square



Satz 2.9.15:

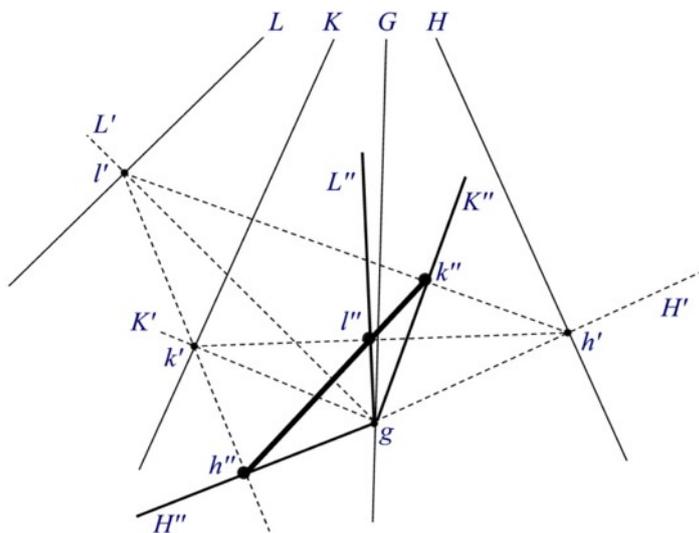
Es seien G, H, K, L paarweise verschiedene Geraden, und es seien $\sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_K$ und $\sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_L$ Geradenspiegelungen. Dann ist auch $\sigma_L \circ \sigma_G \circ \sigma_K$ eine Geradenspiegelung.

Beweis:

Es seien X, Y Geraden mit

- (1) $\sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_K = \sigma_X$,
- (2) $\sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_L = \sigma_Y$.

Von einem Punkt $g \in G$ aus seien H', K', L' die Lote auf H, K, L , die Lotfußpunkte seien h', k', l' . Diese sind dann auch paarweise verschieden.



Mit 2.9.13 und den Beziehungen (1) und (2), sowie aus dem Dreispiegelungssatz 2.9.8 folgen, weil H', G, K' bzw. H', G, L' jeweils kopunktal sind,

- (1') $\sigma_{H'} \circ \sigma_G \circ \sigma_{K'} = \sigma_{L''}$ mit $L'' \perp k' \vee h', g \in L''$,
- (2') $\sigma_{H'} \circ \sigma_G \circ \sigma_{L'} = \sigma_{K''}$ mit $K'' \perp l' \vee h', g \in K''$.

Es seien $l'' := L'' \wedge (k' \vee h')$, $k'' := K'' \wedge (l' \vee h')$. Zusätzlich sei $H'' := \perp(g, l' \vee k')$, $h'' := H'' \wedge (l' \vee k')$. Mit dem Dreispiegelungssatz 2.9.8 und 2.9.13 folgen weiter:

- (a) $\sigma_{L''} \circ \sigma_{H'} \circ \sigma_{K''} = \sigma_{X'}$ mit $X' \perp l'' \vee k''$,
 (b) $\sigma_{H''} \circ \sigma_{L'} \circ \sigma_{K''} = \sigma_{Y'}$ mit $Y' \perp h'' \vee k''$,
 (c) $\sigma_{H''} \circ \sigma_{K'} \circ \sigma_{L''} = \sigma_{Z'}$ mit $Z' \perp l'' \vee h''$,

mit $g \in X', Y', Z'$.

Aus (1') und (2') folgt nun $\sigma_{L''} \circ \sigma_{K'} = \sigma_{K''} \circ \sigma_{L'}$, also $\sigma_{K'} \circ \sigma_{L''} = \sigma_{L'} \circ \sigma_{K''}$. Berücksichtigt man dies in (b) und (c), so folgt $Y' = Z'$, d.h. h'', k'', l'' sind kollinear! Dies wiederum führt wegen $g \in X', Y', Z'$ zu $X' = Y' = Z'$. Aus (a) und (b) folgt nun $\sigma_{L''} \circ \sigma_{H'} = \sigma_{H''} \circ \sigma_{L'}$, d.h. $\sigma_{L''} = \sigma_{H'} \circ \sigma_{L'} \circ \sigma_{H''}$. Setzt man diesen Ausdruck in (1') ein, so ergibt sich $\sigma_{H'} \circ \sigma_G \circ \sigma_{K'} = \sigma_{H'} \circ \sigma_{L'} \circ \sigma_{H''}$, also $\sigma_{L'} \circ \sigma_G \circ \sigma_{K'} = \sigma_{H''}$. Weil $H'' \perp l' \vee k'$ gilt, folgt erneut mit 2.9.13 die Behauptung. \square

Definition 2.9.16:

Es seien G, H, K drei Geraden. Man sagt, (G, H, K) liegen im Büschel, wenn $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K$ eine Geradenspiegelung ist.

Definition 2.9.17:

Die Gesamtheit aller Geraden K , für die $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K$ eine Geradenspiegelung ist, nennt man das durch G und H bestimmte Geradenbüschel $B(G, H)$.

Bemerkung 2.9.18:

Es seien G, H, K drei Geraden, die im Büschel liegen. Dann gilt $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K = \sigma_K \circ \sigma_H \circ \sigma_G$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K$ eine Geradenpiegelung. Diese ist gleich ihrer Inversen. Daher folgt $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K = (\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K)^{-1} = \sigma_K^{-1} \circ \sigma_H^{-1} \circ \sigma_G^{-1} = \sigma_K \circ \sigma_H \circ \sigma_G$. \square

Satz 2.9.19:

Die ternäre Relation, im Büschel zu liegen, ist

- (a) symmetrisch, d.h. liegen (G, H, K) im Büschel, so auch $(G, K, H), (H, G, K), (H, K, G), (K, H, G), (K, G, H)$;
 (b) reflexiv, d.h. $(G, G, G), (G, G, H), (G, H, G), (H, G, G)$ liegen im Büschel;
 (c) transitiv, d.h. liegen (G, H, K) und (G, H, L) im Büschel, so auch (G, K, L) .

Beweis:

Mit Hilfe von 2.9.18 und 2.9.4 ergeben sich alle Fälle von (a). Ferner gilt $\sigma_G \circ \sigma_G \circ \sigma_G = \sigma_G, \sigma_G \circ \sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_H, \sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_G = \sigma_H$ und $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_G = \sigma_{\sigma_G(H)}$ nach 2.9.3; dies zeigt (b). Die Transitivität folgt unter Verwendung von (a), (b) und 2.9.15. \square

Satz 2.9.20:

Es seien $G \neq H$ und $G' \neq H'$ Geraden mit $G, H \in B(G', H')$. Dann gilt $B(G', H') = B(G, H)$.

Beweis:

Aufgrund der Symmetrie der Büschelrelation ist $B(G, H) \subseteq B(H, G)$ und somit $B(G, H) = B(H, G)$. Falls $\{G, H\} = \{G', H'\}$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Somit kann o.B.d.A. $G \neq H'$ angenommen werden, sonst benennt man die Geraden um. Mit der Transitivität folgt aus $G \in B(G', H')$, dass $B(G', H') \subseteq B(G, H')$. Ist zudem $H \in B(G', H')$, also insbesondere $H \in B(G, H') = B(H', G)$, so liefert derselbe Schluss $B(G, H') = B(H', G) \subseteq B(H, G) = B(G, H)$.

und insgesamt $B(G', H') \subseteq B(G, H)$. Wegen der Reflexivität sind $G', H' \in B(G', H')$, also $G', H' \in B(G, H)$, so dass mit vertauschten Rollen von G und G' sowie H und H' sich die umgekehrte Inklusion $B(G, H) \subseteq B(G', H')$ ergibt. \square

Ein Geradenbüschel ist also durch zwei Geraden des Büschels eindeutig bestimmt.

Folgerung 2.9.21:

Zwei verschiedene Geradenbüschel haben höchstens eine Gerade gemeinsam.

Beweis:

Für Geraden $G \neq H, G' \neq H', G'' \neq H''$ gelte $G, H \in B(G', H') \cap B(G'', H'')$. Nach 2.9.20 ist $B(G', H') = B(G, H) = B(G'', H'')$. \square

2.10 Drehungen

Konstruktion und Satz 2.10.1:

Für einen festen Punkt z seien

$$\begin{aligned}\Sigma_z &:= \{\sigma_G \mid G \text{ Gerade durch } z\} \\ \Delta_z &:= \{\sigma_H \circ \sigma_G \mid G, H \text{ Geraden durch } z\}\end{aligned}$$

Die Elemente von Δ_z heißen (eigentliche) Drehungen um z . Es gilt:

(1) *Für je zwei Punkte p, q auf einem Kreis um z existiert eine Drehung $\delta \in \Delta_z$ mit $\delta(p) = q$. Für jede feste Gerade K durch z ist*

$$\begin{aligned}\Delta_z &= \sigma_K \circ \Sigma_z = \Sigma_z \circ \sigma_K \text{ und folglich} \\ \Sigma_z &= \sigma_K \circ \Delta_z = \Delta_z \circ \sigma_K\end{aligned}$$

(2) *Für die Gruppe B_z aller Bewegungen mit Fixpunkt z ist*

$$B_z = \Delta_z \dot{\cup} \Sigma_z \text{ (disjunkte Vereinigung).}$$

(3) *Δ_z ist ein kommutativer Normalteiler von B_z vom Index 2. Genauer gilt für $\delta \in \Delta_z$ und eine Gerade K durch z die Beziehung $\sigma_K \circ \delta \circ \sigma_K^{-1} = \delta^{-1}$.*

(4) *Die Drehung in (1) ist eindeutig bestimmt. Insbesondere hat kein Element von $\Delta_z \setminus \{id\}$ neben z noch einen weiteren Fixpunkt.*

Der Punkt (3) besagt, dass B_z eine sog. Diedergruppe ist.

Beweis:

(1) Für $p = q$ sei $\delta = id \in \Delta_z$. Im Falle $p \neq q$ gilt $z \in M(p, q) =: M$. Mit $\delta := \sigma_M \circ \sigma_{z \vee p} \in \Delta_z$ ist $\delta(p) = \sigma_M \circ \sigma_{z \vee p}(p) = \sigma_M(p) = q$.

Nach Definition gilt $\sigma_K \circ \Sigma_z \subseteq \Delta_z, \Sigma_z \circ \sigma_K \subseteq \Delta_z$. Nun sei $\delta \in \Delta_z, \delta = \sigma_H \circ \sigma_G$ mit Geraden G, H durch z . Nach 2.9.8 gilt $\sigma_K \circ \delta = \sigma_K \circ \sigma_H \circ \sigma_G \in \Sigma_z$, ebenso $\delta \circ \sigma_K = \sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_K \in \Sigma_z$. Es folgt $\delta = \sigma_K \circ \sigma_K \circ \delta \in \sigma_K \circ \Sigma_z, \delta = \delta \circ \sigma_K \circ \sigma_K \in \Sigma_z \circ \sigma_K$. Also gilt auch $\Delta_z \subseteq \sigma_K \circ \Sigma_z, \Delta_z \subseteq \Sigma_z \circ \sigma_K$.

(2) Für $\beta \in B_z$ und einen Punkt $p \neq z$ ist $(p, z) \equiv (\beta(p), \beta(z)) = (\beta(p), z)$, also $p, \beta(p) \in \odot(z; p)$. Nach (1) existiert eine Drehung $\delta \in \Delta_z$ mit $\beta(p) = \delta(p), \delta^{-1} \circ \beta(p) = p$. Außer p hat $\delta^{-1} \circ \beta$ auch noch den Fixpunkt z . Nach 2.9.1 gilt $\delta^{-1} \circ \beta = \text{id}$ oder $\delta^{-1} \circ \beta = \sigma_{z \vee p}$, also $\beta = \delta \in \Delta_p$ oder $\beta = \delta \circ \sigma_{z \vee p} \in \Sigma_z$ nach (1). Es folgt $B_z \subseteq \Delta_z \cup \Sigma_z$. Offensichtlich gilt umgekehrt auch $\Delta_z \cup \Sigma_z \subseteq B_z$. Nach 2.9.5 ist $\Delta_z \cap \Sigma_z = \emptyset$.

(3) Δ_z ist eine Untergruppe von B_z : für eine feste Gerade K durch z gilt nach Punkt (1) $\Delta_z \circ \Delta_z = (\Sigma_z \circ \sigma_K) \circ (\sigma_K \circ \Sigma_z) = \Sigma_z \circ \Sigma_z = \Delta_z$. Sei $\delta \in \Delta_z, \delta = \sigma_H \circ \sigma_G$ für Geraden G, H durch z . Dann gilt $\delta^{-1} = (\sigma_H \circ \sigma_G)^{-1} = \sigma_G^{-1} \circ \sigma_H^{-1} = \sigma_G \circ \sigma_H \in \Delta_z$.

Δ_z ist kommutativ: seien $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_z, G_1, G_2, H_1, H_2$ Geraden durch z mit $\delta_1 = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_1}, \delta_2 = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_2}$. Unter Verwendung von 2.9.18 ergibt sich $\delta_1 \circ \delta_2 = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_1} = \delta_2 \circ \delta_1$.

Δ_z ist Normalteiler: für $\beta \in B_z$ ist $\beta \circ \Delta_z \circ \beta^{-1} = \Delta_z$ (*) zu zeigen. Für $\beta \in B_z$ gilt nach (2) $\beta \in \Delta_z$ oder $\beta = \sigma_K$ für eine Gerade K durch z . Für $\beta \in \Delta_z$ ist die Aussage (*) klar, weil Δ_z eine Untergruppe ist. Sei also $\beta = \sigma_K$. Ein Element $\delta \in \Delta_z$ lässt sich nach (1) schreiben als $\delta = \sigma_K \circ \sigma_H$ für eine Gerade H durch z . Damit gilt $\sigma_K \circ \delta \circ \sigma_K^{-1} = \sigma_K \circ (\sigma_K \circ \sigma_H) \circ \sigma_K = \sigma_H \circ \sigma_K = \delta^{-1}$.

Δ_z hat Index 2 in B_z : für eine Gerade K durch z gilt nach den Punkten (1) und (2) $B_z = \Delta_z \dot{\cup} \Sigma_z = \Delta_z \dot{\cup} \sigma_K \circ \Delta_z$, es existieren also genau zwei Nebenklassen von Δ_z in B_z .

(4) Seien $\delta, \delta' \in \Delta_z$ zwei Drehungen mit $\delta(p) = \delta'(p) = q$. Dann ist $\delta^{-1} \circ \delta'(p) = p$. Dies heißt, dass $\delta^{-1} \circ \delta'$ eine Bewegung mit Fixpunkten z und p ist, nach 2.9.1 folgt entweder $\delta^{-1} \circ \delta' = \text{id}$ oder $\delta^{-1} \circ \delta' = \sigma_{z \vee p}$. Der zweite Fall scheidet aber nach 2.9.5 aus, da $\delta^{-1} \circ \delta'$ nach (3) wieder eine Drehung, also das Produkt zweier Geradenspiegelungen ist. Somit ist $\delta = \delta'$. \square

Satz 2.10.2:

Sei $\delta \in \Delta_z$ eine Drehung um z und K eine Gerade durch z . Wenn $\delta(K) = K$ ist, so gilt entweder $\delta = \iota_z$ oder $\delta = \text{id}$.

Beweis:

Nach 2.10.1 (1) lässt sich δ in der Form $\delta = \sigma_G \circ \sigma_K$ schreiben. K ist dann auch Fixgerade von σ_G , so dass $K = G$ oder $K \perp G$ gilt. Im ersten Fall ist $\delta = \text{id}$, im zweiten Fall $\delta = \iota_z$ nach 2.6.2. \square

2.11 Halbdrehungen

Nach dem Vorbild Bachmanns [1] (§ 6,1) wird der Begriff der Halbdrehung eingeführt. Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts wird die Tatsache sein, dass das Bild eines Geradenbüschels bei einer solchen Halbdrehung wieder ein Geradenbüschel ist.

Konstruktion 2.11.1:

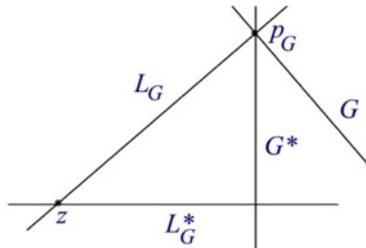
Es seien z ein fester Punkt und A, A^* zwei feste, nicht orthogonale Geraden durch z . Zu einer Geraden G seien stets $L_G = \perp(z, G)$ das Lot von z auf G und $p_G = L_G \wedge G$ der Lotfußpunkt. Einer Geraden G wird auf die folgende Art eine Gerade G^* zugeordnet:

Fall 1: $z \in G$. Nach 2.9.8 ist dann $\sigma_G \circ \sigma_A \circ \sigma_{A^*}$ auch eine Spiegelung an einer Geraden G^* durch z . Es gilt somit $\sigma_G \circ \sigma_{G^*} = \sigma_A \circ \sigma_{A^*}$, d.h. G und G^* erzeugen die gleiche Drehung wie

A und A^* .

Fall 2: $z \notin G$. Dann sei L_G^* das Bild von L_G gemäß Fall 1, und $G^* := \perp(p_G, L_G^*)$.

Die Abbildung $G \mapsto G^*$ heißt die von A, A^* erzeugte Halbdrehung um z . Der Geraden A wird dabei gemäß Fall 1 die Gerade A^* zugeordnet.



Satz 2.11.2:

Für Geraden G, H durch z ist $\sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_{G^*} \circ \sigma_{H^*}$ und folglich $G^* \neq H^*$, falls $G \neq H$.

Beweis:

Es ist $\sigma_G \circ \sigma_{G^*} = \sigma_A \circ \sigma_{A^*} = \sigma_H \circ \sigma_{H^*}$, daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 2.11.3:

Es gilt stets $G^* = \perp(p_G, L_G^*)$, d.h. $L_G^* = L_{G^*}$.

Beweis:

Für den Fall, dass $z \notin G$ gilt, ist nach Definition $G^* = \perp(p_G, L_G^*)$. Sei also $z \in G$. Nach 2.11.2 gilt dann $\iota_{p_G} = \sigma_G \circ \sigma_{L_G} = \sigma_{G^*} \circ \sigma_{L_G^*}$, d.h. $G^* \perp L_G^*$ nach 2.6.3, also $G^* = \perp(p_G, L_G^*)$. \square

Satz 2.11.4:

Es gelte $z \in G$. Aus $G \perp H$ folgt $G^* \perp H^*$.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt $G = L_H$. Aus 2.11.3 folgt nun $G^* = L_H^* = L_{H^*}$, d.h. $G^* \perp H^*$. \square

Satz 2.11.5:

Es gilt stets $G^* \neq L_G$.

Beweis:

Angenommen, $G^* = L_G$. Wegen $L_G^* \perp G^*$ ist dann $L_G^* \perp L_G$, also $\sigma_{L_G} \circ \sigma_{L_G^*} = \iota_z$, und mit $\sigma_{L_G} \circ \sigma_{L_G^*} = \sigma_A \circ \sigma_{A^*}$ folgt $A \perp A^*$. Widerspruch! \square

Satz 2.11.6:

Aus $G \neq H$ folgt $G^* \neq H^*$.

Beweis:

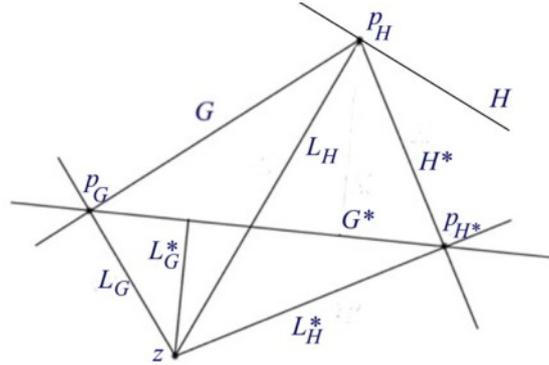
Es wird gezeigt: $G^* = H^* \Rightarrow G = H$. Nach 2.11.3 gilt $L_H^* = L_{H^*} = L_{G^*} = L_G^*$, und mit 2.11.2 folgt $L_G = L_H$. Nach 2.11.5 gilt $G^* \neq L_G$ und damit $p_G = G^* \wedge L_G = H^* \wedge L_H = p_H$, also $G = \perp(p_G, L_G) = \perp(p_H, L_H) = H$. \square

Satz 2.11.7:

Aus $p_H \in G$ folgt $p_{H^*} \in G^*$.

Beweis:

Laut Konstruktion 2.11.1 gilt $\sigma_{L_G} \circ \sigma_{L_G^*} = \sigma_{L_H} \circ \sigma_{L_H^*}$. Unter Verwendung von 2.11.3 folgt dann $\sigma_{L_{G^*}} = \sigma_{L_G} \circ \sigma_{L_H} \circ \sigma_{L_{H^*}}$. Nach 2.11.5 gilt $L_H \neq H^*$; ist nun $p_H \in G$, so gilt nach dem Dreispiegelungssatz 2.9.8 wegen $p_H \in L_H, H^*$, dass $\sigma_G \circ \sigma_{L_H} \circ \sigma_{H^*} = \iota_{p_G} \circ (\sigma_{L_G} \circ \sigma_{L_H} \circ \sigma_{L_{H^*}}) \circ \iota_{p_{H^*}} = \iota_{p_G} \circ \sigma_{L_{G^*}} \circ \iota_{p_{H^*}}$ eine Geradenspiegelung ist. Mit 2.9.11 folgt $p_{H^*} \in \perp(p_G, L_{G^*}) = G^*$. \square

**Satz 2.11.8:**

Gilt $z \in H$, so ist $(\perp(p_G, H))^* = \perp(p_{G^*}, H^*)$.

Beweis:

Sei $K = \perp(p_G, H)$. Aus $p_G \in K$ und $K \perp H$ und 2.11.7 bzw. 2.11.4 folgt $p_{G^*} \in K^*$ und $K^* \perp H^*$, also gilt $K^* = \perp(p_{G^*}, H^*)$. \square

Satz 2.11.9:

Es seien G, H, K drei Geraden durch z . Weiter sei B die vierte Spiegelungsgerade mit $\sigma_B = \sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K$. Dann gilt $\sigma_{B^*} = \sigma_{G^*} \circ \sigma_{H^*} \circ \sigma_{K^*}$.

Beweis:

Unter Verwendung von 2.11.2 ergibt sich $\sigma_{B^*} \circ \sigma_{K^*} = \sigma_B \circ \sigma_K = \sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K \circ \sigma_K = \sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_{G^*} \circ \sigma_{H^*}$, daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 2.11.10:

Es seien G, H, K drei Geraden mit $z \in H$. Wenn $\iota_{p_G} \circ \sigma_H \circ \iota_{p_K}$ eine Geradenspiegelung ist, dann ist auch $\iota_{p_{G^*}} \circ \sigma_{H^*} \circ \iota_{p_{K^*}}$ eine Geradenspiegelung.

Beweis:

Nach 2.9.11 gilt $p_K \in \perp(p_G, H)$. Mit 2.11.7 und 2.11.8 folgt $p_{K^*} \in (\perp(p_G, H))^* = \perp(p_{G^*}, H^*)$. Wieder mit 2.9.11 folgt die Behauptung. \square

Satz 2.11.11 (Büscheltreue bei Halbdrehungen):

Es seien G, H, K Geraden und es gelte $z \in H$. Liegen G, H, K im Büschel, so liegen auch G^*, H^*, K^* im Büschel.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K = \iota_{p_G} \circ (\sigma_{L_G} \circ \sigma_H \circ \sigma_{L_K}) \circ \iota_{p_K} = \iota_{p_G} \circ \sigma_B \circ \iota_{p_K}$ (mit einer geeigneten Geraden B) eine Geradenspiegelung. Mit 2.11.10 und 2.11.9 folgt, dass $\iota_{p_{G^*}} \circ \sigma_{B^*} \circ \iota_{p_{K^*}} =$

$\iota_{p_{G^*}} \circ (\sigma_{L_{G^*}} \circ \sigma_{H^*} \circ \sigma_{L_{K^*}}) \circ \iota_{p_{K^*}} = \sigma_{G^*} \circ \sigma_{H^*} \circ \sigma_{K^*}$ auch eine Geradenspiegelung ist. \square

2.12 Rechtecke

Definition 2.12.1:

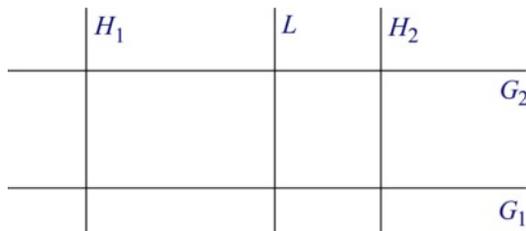
Es seien $G_1 \neq G_2, H_1 \neq H_2$ vier Geraden mit der Eigenschaft $G_1 \perp H_1, H_2$ und $G_2 \perp H_1, H_2$. Dann nennt man (G_1, G_2, H_1, H_2) ein Rechteck.

Satz 2.12.2:

Es seien G_1, G_2, H_1, H_2 Geraden, die ein Rechteck bilden. Weiter sei L eine Gerade mit $L \perp G_2$. Dann gilt auch $L \perp G_1$.

Beweis:

Die Gerade G_2 ist gemeinsames Lot von L, H_1 und H_2 . Aus 2.9.10 folgt, dass $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} \circ \sigma_L$ eine Geradenspiegelung ist.



Nun gilt auch $H_1, H_2 \perp G_1$. Aus 2.9.10' folgt $L \perp G_1$. \square

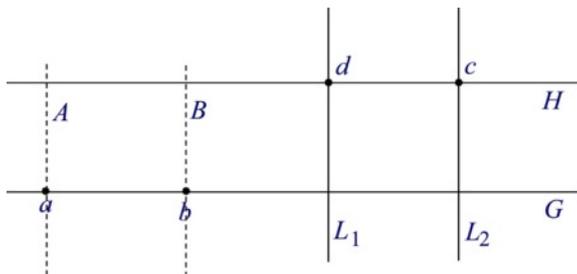
Bemerkung: Haben zwei Geraden zwei verschiedene gemeinsame Lote, so ist also jedes Lot der einen Geraden auch Lot der anderen Geraden. Wir nennen solche Geraden *lotgleich* oder *parallel*.

Satz 2.12.3:

Es seien $a \neq b$ zwei Punkte, $G = a \vee b$. Für zwei weitere Punkte $c \notin G$ und d gilt $\iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_d$ genau dann, wenn es durch c eine zu G lotgleiche Gerade gibt.

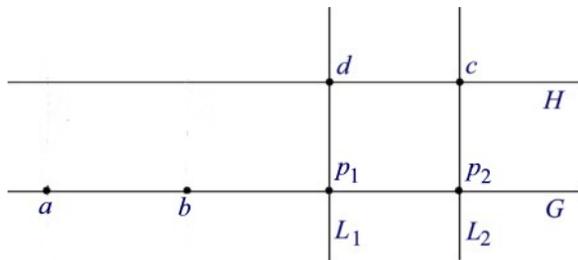
Beweis:

" \Rightarrow ": Es sei $\iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_d$. Weiter seien $H = c \vee d, L_1 = \perp(d, H), L_2 = \perp(c, H)$.



Dann gilt $\iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c \circ \sigma_H = \iota_d \circ \sigma_H$ und damit $\iota_a \circ \iota_b \circ \sigma_{L_2} = \sigma_{L_1}$. Es folgt $\iota_a \circ \iota_b = \sigma_{L_1} \circ \sigma_{L_2}$. Seien nun $A = \perp(a, G), B = \perp(b, G)$. Damit ergibt sich $\sigma_{L_1} \circ \sigma_{L_2} = \iota_a \circ \iota_b = \sigma_A \circ \sigma_G \circ \sigma_G \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_B$, also $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_{L_2} = \sigma_{L_1}$. Aus 2.9.10' folgt nun $L_1, L_2 \perp G$, also sind G und H lotgleich.

” \Leftarrow ”: Es sei H eine zu G lotgleiche Gerade durch c . Weiter sei $L_2 = \perp(c, H)$. Dann gilt auch $L_2 \perp G$; sei $p_2 = L_2 \wedge G$.



Wir betrachten nun die Translation τ entlang G mit $\tau(b) = p_2$. Es seien $p_1 = \tau(a)$, $L_1 = \perp(p_1, G)$. Nach Voraussetzung gilt auch $L_1 \perp H$; sei $d = L_1 \wedge H$. Aus 2.8.3 folgt nun $\iota_a \circ \iota_b = \iota_{p_1} \circ \iota_{p_2} = \sigma_{L_1} \circ \sigma_G \circ \sigma_G \circ \sigma_{L_2} = \sigma_{L_1} \circ \sigma_{L_2} = \sigma_{L_1} \circ \sigma_H \circ \sigma_H \circ \sigma_{L_2} = \iota_d \circ \iota_c$, also $\iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_d$. \square

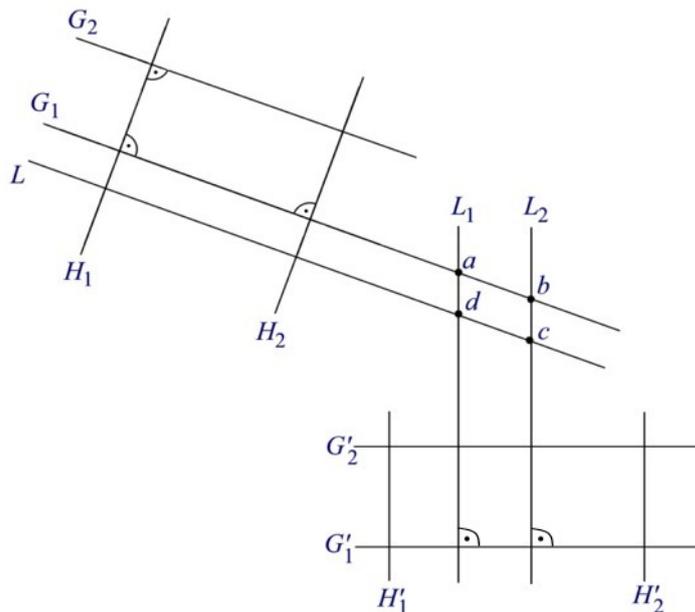
Es folgt ein Satz von Bachmann [1] (§ 6,8), der zeigt, dass sich aus der Existenz eines Rechtecks die Existenz von Rechtecken in beliebiger Lage ergibt.

Satz 2.12.4:

Es existiere ein Rechteck (G'_1, G'_2, H'_1, H'_2) . Für paarweise verschiedene Geraden G_1, G_2, H_1, H_2 mit $H_1 \perp G_1, G_2$ und $H_2 \perp G_1$ ist dann auch $H_2 \perp G_2$, also (G_1, G_2, H_1, H_2) ebenfalls ein Rechteck.

Beweis:

Seien $a \neq b$ zwei Punkte auf G_1 , $L_1 = \perp(a, G'_1)$, $L_2 = \perp(b, G'_1)$. Man kann a, b so wählen, dass $L_1 \neq L_2$ gilt, zur Not bezeichnet man das Rechteck (G'_1, G'_2, H'_1, H'_2) um. Es gilt $L_1, L_2 \perp G'_2$, weil die Geraden G'_1 und G'_2 lotgleich sind; somit folgt auch, dass L_1 und L_2 lotgleich sind.



Sei nun $c \in L_2, c \neq b$. Aus 2.12.3 folgt $\iota_c \circ \iota_b \circ \iota_a = \iota_d$ mit $d \in L_1$. Weil ι_d involutorisch ist, gilt $\iota_a \circ \iota_b \circ \iota_c = \iota_d$, und wieder nach 2.12.3 gibt es eine Gerade L durch c , so dass L und G_1 lotgleich sind. Wegen $H_1, H_2 \perp G_1$ folgt daher $H_1, H_2 \perp L$, also sind L und G_1 gemeinsame Lote von H_1 und H_2 . Dies heißt, dass H_1 und H_2 lotgleich sind, daher folgt $G_2 \perp H_2$. \square

3 Hyperbolische Ebenen

3.1 Das hyperbolische Axiom

Definition 3.1.1:

Zwei Geraden G, H heißen verbindbar, wenn sie einen gemeinsamen Punkt oder ein gemeinsames Lot besitzen.

Unter einer *hyperbolischen Ebene* verstehen wir im Folgenden eine absolute Ebene mit Mittellinien gemäß Abschnitt 2, die zusätzlich zu den Axiomen in 2.1 dem folgenden Axiom genügt:

”Hyperbolisches Axiom” (HA):

Es gibt Geraden, die nicht verbindbar sind. Zu einer Geraden G und einem Punkt p , der nicht auf G liegt, gibt es höchstens zwei Geraden durch p , die nicht mit G verbindbar sind.

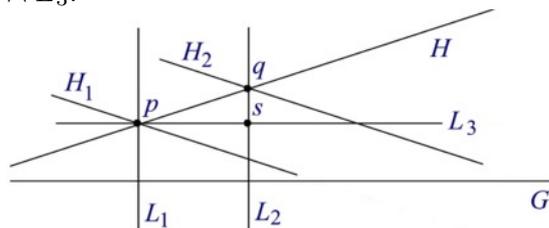
Bemerkung: Mit diesem Axiom ist die Bewegungsgruppe der zugrunde liegenden Ebene eine hyperbolische Bewegungsgruppe im Sinne Bachmanns [1] (§ 14.1). In den Abschnitten 3.1, 3.3 und 3.4 folgen nun u.a. Sätze, die in [1] wieder gruppentheoretisch formuliert sind, hier aber inzidenzgeometrisch dargestellt werden.

Satz 3.1.2:

Unter Voraussetzung der Gültigkeit von (HA) gibt es keine Rechtecke.

Beweis:

Es seien G, H zwei unverbindbare Geraden, weiter seien $p \neq q$ zwei Punkte auf H , $L_1 = \perp(p, G), L_2 = \perp(q, G), L_3 = \perp(p, L_1)$. Angenommen, es gibt ein Rechteck. Nach 2.12.4 gilt dann $L_3 \perp L_2$, es sei $s = L_2 \wedge L_3$.



Weiter seien $H_1 = \sigma_{L_1}(H), H_2 = \sigma_{L_2}(H)$. Dann sind H_1 und H_2 nicht mit G verbindbar, denn angenommen, es gäbe z.B. einen gemeinsamen Punkt a von G und H_1 . Dann wäre $\sigma_{L_1}(a)$ ein gemeinsamer Punkt von $\sigma_{L_1}(G) = G$ und $\sigma_{L_1}(H_1) = H$. Widerspruch! Eine ähnliche Argumentation schließt ein gemeinsames Lot von G und H_1 aus. Das gleiche gilt für G und H_2 .

Es gilt $H_2 = \sigma_{L_2} \circ \sigma_{L_1}(H_1) = \sigma_{L_2} \circ \sigma_{L_3} \circ \sigma_{L_1}(H_1) = \iota_s \circ \iota_p(H_1) = \iota_s(H_1)$. Sei $L := \perp(s, H_1)$. Dann ist $L = \iota_s(L) = \perp(s, \iota_s(H_1)) = \perp(s, H_2)$, also ist L ein gemeinsames Lot von H_1 und H_2 , d.h. H_1 und H_2 sind verbindbar.

Aus der Eindeutigkeit des Lotes folgt nun, dass H_1 und H_2 keinen Punkt gemeinsam haben. Wegen $p \in H_1$ gilt daher $p \notin H_2$. Nach 2.9.14 gibt es nun eine Gerade K durch p so, dass $\sigma_{H_2} \circ \sigma_K \circ \sigma_G$ eine Geradenspiegelung ist. Die Gerade K ist weder mit H_2 noch mit G verbindbar, denn sonst würde aus 2.9.8' bzw. 2.9.10' unter Einbeziehung von 2.9.4 folgen, dass H_2 mit G verbindbar ist. Insbesondere ist $K \neq H_1$, denn H_1 ist mit H_2 verbindbar. Außerdem gilt $K \neq H$, denn wegen $q \in H, H_2$ sind H und H_2 verbindbar.

Insgesamt gäbe es durch p also die drei paarweise verschiedenen Geraden H, H_1, K , die jeweils mit G unverbindbar sind. Dies steht im Widerspruch zur Forderung in (HA), dass höchstens zwei solche Geraden existieren. \square

Folgerung 3.1.3:

Zwei Geraden G, H haben höchstens ein gemeinsames Lot.

Beweis:

Angenommen, es gäbe zwei gemeinsame Lote von G und H . Aus der Eindeutigkeit des errichteten Lotes würde die Existenz eines Rechtecks folgen, was nach 3.1.2 nicht möglich ist. \square

Bezeichnungen: Sei $B(G, H)$ das durch $G \neq H$ bestimmte Geradenbüschel. Nach 2.9.14 existiert zu einem Punkt p , der weder auf G noch auf H liegt, eine Gerade K durch p , die zum Büschel $B(G, H)$ gehört. Wir unterscheiden drei Fälle:

- (1) G und H haben einen Punkt q gemeinsam. Nach 2.9.8' geht dann auch K durch q , d.h. q ist gemeinsamer Punkt aller Geraden des Büschels. Solch ein Büschel heißt *Punktbüschel*.
- (2) G und H haben ein gemeinsames Lot L . Dann gilt nach 2.9.10' auch $K \perp L$, d.h. L ist gemeinsames Lot aller Geraden im Büschel. Solch ein Büschel wird *Lotbüschel* genannt.
- (3) G und H sind unverbindbar. Aus 2.9.8' und 2.9.10' folgt, dass auch K mit G und H jeweils unverbindbar ist, d.h. alle Geraden des Büschels sind paarweise unverbindbar. Ein Büschel dieser Art heißt *singuläres Büschel* oder auch, nach Hilbert [7], ein *Ende*.

Definition 3.1.4:

Es seien G, H zwei unverbindbare Geraden, die einem Ende $B(L, K)$ angehören. Dann heißt die Abbildung $\sigma_G \circ \sigma_H$ Drehung um das Ende $B(L, K)$.

Satz 3.1.5:

Die Drehungen um ein festes Ende $B(L, K)$ bilden eine abelsche Gruppe.

Beweis:

Für $\delta = \sigma_G \circ \sigma_H$ mit $G, H \in B(L, K)$ ist $\delta^{-1} = \sigma_H \circ \sigma_G$ wieder eine Drehung um $B(L, K)$. Seien nun $\delta_1 = \sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_1}, \delta_2 = \sigma_{G_2} \circ \sigma_{H_2}$ mit $G_1, G_2, H_1, H_2 \in B(L, K)$ zwei Drehungen um das Ende $B(L, K)$. Dann ist $\delta_1 \circ \delta_2 = \sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_G \circ \sigma_{H_2}$ für eine Gerade $G \in B(L, K)$ auch eine Drehung um $B(L, K)$. Unter Verwendung von 2.9.18 ergibt sich analog zu 2.10.1 außerdem $\delta_1 \circ \delta_2 = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{G_2} \circ \sigma_{H_1} \circ \sigma_{G_1} = \delta_2 \circ \delta_1$. \square

Satz 3.1.6:

Eine Drehung um ein festes Ende ist durch das Bild einer zu dem Ende gehörenden Geraden eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien δ_1, δ_2 zwei Drehungen um ein Ende $B(L, K)$ mit $\delta_1(G) = \delta_2(G) = H$ für eine Gerade $G \in B(L, K)$. Dann ist $\delta_1 \circ \delta_2^{-1}$ nach 3.1.5 wieder eine Drehung um $B(L, K)$, d.h. es ist $\delta_1 \circ \delta_2^{-1} = \sigma_A \circ \sigma_B$ mit $A, B \in B(L, K)$, und sie lässt H fest, so dass $H = \sigma_A \circ \sigma_B(H) = \sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_H(H)$. Weil nun H auch in $B(L, K)$ liegt, ist $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_H = \sigma_{H'}$ mit einer Geraden $H' \in B(L, K)$. Diese Geradenspiegelung lässt also H fest. Weil H und H' demselben Ende angehören, ergibt sich $H' = H$. Daraus folgt $\sigma_A = \sigma_B$, also $\delta_1 = \delta_2$. \square

3.2 Eine Alternative zum hyperbolischen Axiom

In diesem Abschnitt wird ein Kontrast zum Axiom (HA) beleuchtet. Es gelte vorübergehend statt dem Axiom (HA) das folgende

”Rechteckaxiom” (RE):

Zwei Geraden sind stets verbindbar, und es existiert ein Rechteck.

Satz 3.2.1

Für Geraden $G \neq H$ sind äquivalent:

- (1) G und H haben ein gemeinsames Lot,
- (2) G und H sind lotgleich (d.h. parallel),
- (3) G und H sind punktfremd.

Beweis:

(1) \Rightarrow (2) gilt wegen der Existenz eines Rechtecks aus 2.12.2 und 2.12.4, (2) \Rightarrow (3) wegen der Eindeutigkeit des Lots, (3) \Rightarrow (1) wegen der Verbindbarkeit von G und H . \square

Satz 3.2.2: (Existenz und Eindeutigkeit der Parallelen)

Zu einer Geraden G und einem Punkt $p \notin G$ existiert genau eine Gerade H durch p , die parallel zu G ist.

Beweis:

Sei $L := \perp(p, G)$. Die Gerade $H := \perp(p, L)$ hat ein gemeinsames Lot mit G , ist also parallel zu G . Sei H' eine weitere zu G parallele Gerade mit $p \in H'$. Dann sind G und H' lotgleich, so dass $H' \perp L$. Aus $p \in H, H'$ folgt mit der Eindeutigkeit des Lots $H' = H$. \square

Also gilt das euklidische Parallelenaxiom; somit liegt eine affine Ebene vor.

Satz 3.2.3:

Es seien (a, b, c) und (a', b', c') zwei nicht-ausgeartete Dreiecke derart, dass $a \vee b \parallel a' \vee b'$, $a \vee c \parallel a' \vee c'$, $b \vee c \parallel b' \vee c'$ gilt. Ist dann $(a, b) \equiv (a', b')$, so gilt auch $(a, c) \equiv (a', c')$ und $(b, c) \equiv (b', c')$.

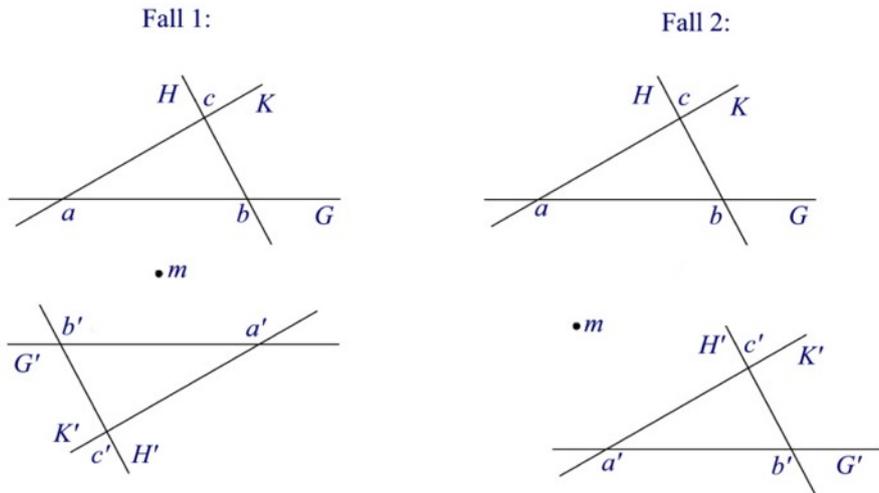
Beweis:

Seien $G = a \vee b, H = b \vee c, K = a \vee c$ und entsprechend $G' = a' \vee b', H' = b' \vee c', K' = a' \vee c'$. Für $a \neq a'$ sei $m := m(a, a')$, sonst sei $m = a$. Aus 3.2.1 ergibt sich $\iota_m(G) = G', \iota_m(K) = K'$.

Es ist $(a', \iota_m(b)) = (\iota_m(a), \iota_m(b)) \equiv (a, b)$, daher folgt $\iota_m(b) \in \{b', \iota_{a'}(b')\}$, da $\iota_m(b) \in G'$.

Fall 1: $\iota_m(b) = b'$. Dann folgt wie oben $\iota_m(H) = H'$, und wegen $c = H \wedge K$ gilt $\iota_m(c) = H' \wedge K' = c'$, also geht das Dreieck (a, b, c) durch die Punktspiegelung ι_m in das Dreieck (a', b', c') über.

Fall 2: $\iota_m(b) = \iota_{a'}(b')$. Für die Translation $\tau = \iota_{a'} \circ \iota_m$ gilt $\tau(a) = a', \tau(b) = b'$. Mit 3.2.1 ergibt sich $\tau(G) = G', \tau(K) = K', \tau(H) = H'$. Wegen $c = H \wedge K$ folgt $\tau(c) = H' \wedge K' = c'$, also geht das Dreieck (a, b, c) durch die Translation τ in das Dreieck (a', b', c') über.



Somit gehen die Dreiecke durch eine Bewegung ineinander über, entsprechende Seiten sind daher kongruent. \square

Satz 3.2.3 besagt, dass das Axiom (PD) gilt, das in der Einleitung vorgestellt wurde. Das Rechteckaxiom (RE) statt des hyperbolischen Axioms (HA) führt also zu den dort vorgestellten präeuklidischen Ebenen.

Im Folgenden gelte statt (RE) wieder das hyperbolische Axiom (HA).

3.3 Verbindbarkeit von Enden

Satz 3.3.1:

Das Bild eines Büschels unter einer Bewegung β ist wieder ein Büschel gleicher Art.

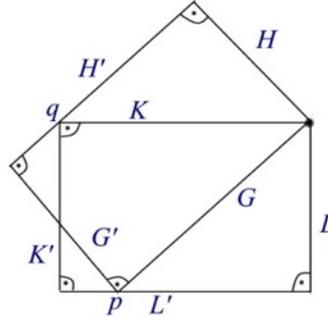
Beweis:

Für ein Lotbüschel und ein Punktbüschel ist die Behauptung klar. Nun seien ein Ende und eine Bewegung β gegeben. Die Geraden des Endes sind paarweise unverbindbar. Dies gilt dann natürlich auch für die Bilder der Geraden unter der Bewegung β . Seien nun ferner G, H, L drei Geraden des Endes. Dann gilt $\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_L = \sigma_K$ für eine Gerade K des Endes. Mit 2.9.3 ergibt sich $\sigma_{\beta(G)} \circ \sigma_{\beta(H)} \circ \sigma_{\beta(L)} = \beta \circ \sigma_G \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ \sigma_H \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ \sigma_L \circ \beta^{-1} = \beta \circ \sigma_K \circ \beta^{-1} = \sigma_{\beta(K)}$. Somit liegen auch die Bilder von G, H, L im Büschel. \square

Die folgenden Sätze dieses Abschnitts gehen teilweise wieder auf Bachmann [1] (§ 3,9 bzw. § 14,2 - 14,4) zurück; die Beweisführung ist den hier vorliegenden Umständen angepasst. Insbesondere sind die Sätze 3.3.11 und 3.3.12 zu würdigen, aus denen sich eine wichtige Aussage für die folgenden Betrachtungen ergibt, nämlich die Verbindbarkeit von Enden.

Satz 3.3.2:

Es seien Geraden $G, H, K, L, G', H', K', L'$ gegeben mit $\sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_L \circ \sigma_K$ und $G' \perp G, H' \perp H, K' \perp K, L' \perp L, p := G \wedge G' \in L', q := K \wedge K' \in H'$. Dann gilt: aus $G' \perp H'$ folgt $K' \perp L'$.



Beweis:

Nach 2.6.4 ist $\sigma_{G'} \circ \sigma_H$ eine Translation entlang H' . Aus 2.8.7 folgt, dass $\sigma_{G'} \circ \sigma_H \circ \iota_q = \sigma_{G'} \circ \sigma_G \circ (\sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_K) \circ \sigma_{K'} = \iota_p \circ \sigma_L \circ \sigma_{K'}$ eine Punktspiegelung ist. Nun sei $A := \perp(p, L')$. Dann ist $\iota_p \circ \sigma_L \circ \sigma_{K'} = \sigma_A \circ \sigma_{L'} \circ \sigma_L \circ \sigma_{K'} = \sigma_A \circ \iota_u \circ \sigma_{K'}$ mit $u = L \wedge L'$. Aus 2.9.12 folgt, dass es eine Gerade B gibt mit $u \in B$ und $B \perp A, K'$. Mit der Eindeutigkeit des Lotes folgt $B = L'$, somit gilt also $L' \perp K'$. \square

Satz 3.3.3:

Ein Punktbüschel wird durch eine Halbdrehung auf ein Punktbüschel abgebildet.

Beweis:

Es sei q gemeinsamer Punkt des Büschels $B(G, H)$ und $*$ die Halbdrehung um z . Aus $B(G, H)$ wähle Geraden L und K mit $z \in L$ und $L \perp K$. Nach 2.11.11 ist das Bild des Punktbüschels $B(G, H) = B(L, K)$ wieder ein Büschel, und nach 2.11.4 gilt dann auch $L^* \perp K^*$, d.h. es gibt einen Schnittpunkt q^* von L^* und K^* . Dieser Punkt ist nach 2.9.8' gemeinsamer Punkt aller Geraden des Bildbüschels, welches somit auch ein Punktbüschel ist. \square

Satz 3.3.4:

Ein Ende geht bei Spiegelung an einer Geraden H , die senkrecht auf einer Geraden G des Endes steht, in ein anderes Ende über, dem die Gerade G angehört.

Beweis:

Sei p ein Punkt von H . Nach 2.9.14 gibt es eine Gerade L durch p , die dem Ende angehört. Insbesondere ist $L \neq H$. Weil L und G unverbindbar sind, ist L nicht orthogonal zu H . Daher wird die Gerade L bei der Spiegelung an der Geraden H auf eine Gerade $L' \neq L$ abgebildet, und auch L' und $\sigma_H(G) = G$ sind unverbindbar. Wegen $p \in H, L, L'$ liegen L', L und H im Büschel. Würde L' auch mit L und G im Büschel liegen, so würde aus 2.9.19 (Transitivität) folgen, dass auch G, H und L im Büschel liegen, was nicht der Fall ist. Dies bedeutet aber, dass

G und L' ein anderes Ende definieren als G und L . \square

Satz 3.3.5:

Es seien K, L zwei Geraden. Dann liegen K, L und $\sigma_L(K)$ im Büschel.

Beweis:

Nach 2.9.3 gilt $\sigma_L \circ \sigma_K \circ \sigma_L = \sigma_{\sigma_L(K)}$ und damit $\sigma_K \circ \sigma_L \circ \sigma_{\sigma_L(K)} = \sigma_L$. \square

Folgerung 3.3.6:

Genau dann, wenn ein Ende $B(G, H)$ durch Spiegelung an einer Geraden L auf sich selbst abgebildet wird, gilt $L \in B(G, H)$.

Beweis:

Es sei $L \in B(G, H)$. Für jede von L verschiedene Gerade $K \in B(G, H)$ gilt nach 3.3.5, dass $K' := \sigma_L(K)$, K und L im Büschel liegen, d.h. $K' \in B(K, L) = B(G, H)$.

Für jede Gerade $K \in B(G, H)$ gelte umgekehrt $K' := \sigma_L(K) \in B(G, H)$. Zuerst ergibt sich aus 3.3.4, dass L nicht orthogonal zu K sein kann. Falls $K \neq K'$, liegen nach 3.3.5 die Geraden K, L und K' im Büschel, also $L \in B(K, K') = B(G, H)$. Im Falle $K = K'$ bleibt nur $K = L$. \square

Satz 3.3.7:

Es sei G eine Gerade, die einem Ende angehört, und p ein Punkt von G . Dann geht dieses Ende bei der Spiegelung an p in ein anderes Ende über, dem die Gerade G angehört.

Beweis:

Es sei $H := \perp(p, G)$. Dann ist $\iota_p = \sigma_H \circ \sigma_G$. Weil bei der Spiegelung an G das besagte Ende nach 3.3.6 in sich abgebildet wird, folgt die Behauptung aus 3.3.4. \square

Folgerung 3.3.8:

Gehört eine Gerade G einem Ende an, so gehört sie genau noch einem zweiten Ende an. Das Ende wird durch die Aufeinanderfolge von Spiegelungen an zwei zu G orthogonalen Geraden, zwei Punkten von G oder einer zu G orthogonalen Geraden und einem Punkt von G auf sich abgebildet.

Beweis:

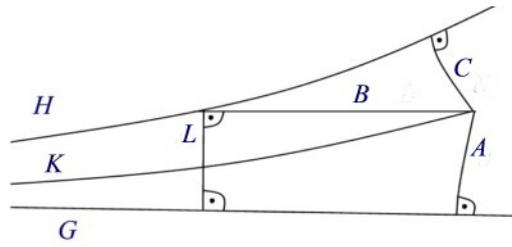
Angenommen, die Gerade G gehört drei verschiedenen Enden an. Dann gäbe es nach 2.9.14 von jedem Punkt $p \notin G$ aus von G verschiedene Geraden durch p , die zu den jeweiligen Enden gehören, also paarweise verschieden und mit G unverbindbar sind. Dies steht im Widerspruch zum hyperbolischen Axiom (HA). Die restlichen Behauptungen ergeben sich aus 3.3.4 und 3.3.7. \square

Definition 3.3.9:

Es seien G, H, A, B, C, L sechs Geraden mit folgenden Eigenschaften:

$A \neq L; G \perp A, L; L \perp B; L \wedge B \in H; H \perp C; A, B, C$ kopunktal.

Dann sagt man, die Geraden G, H, A, B, C, L bilden eine Endenfigur.

**Satz 3.3.10** (Lemma von Bergau):

Die Geraden G, H, A, B, C, L mögen eine Endenfigur bilden, und es sei K die Gerade mit $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C = \sigma_K$. Dann gilt: bestimmen zwei von den drei Geraden G, H und K ein Ende, so gehört auch die dritte Gerade diesem Ende an.

Beweis:

Zuerst wird der Fall betrachtet, dass G und H ein Ende $B(G, H)$ bilden. Nach 3.3.8 wird $B(G, H)$ durch die Abbildungen $\sigma_A \circ \sigma_L$ sowie $\iota_{L \wedge B} \circ \sigma_C = \sigma_L \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ jeweils auf sich abgebildet. Die Komposition $\sigma_A \circ \sigma_L \circ \sigma_L \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ ist nach Voraussetzung gleich σ_K , d.h. $B(G, H)$ wird durch σ_K auf sich abgebildet. Dies bedeutet nach 3.3.6, dass $K \in B(G, H)$.

Nun wird gezeigt: falls G und H verbindbar sind, so sind G, K sowie H, K verbindbar. Daraus folgt dann die Behauptung.

Wir behandeln zunächst den Fall, dass G und H einen gemeinsamen Punkt p haben. Es seien $D := \perp(L \wedge B, H)$, $u := H \wedge C$. Nach 2.6.4 ist $\sigma_A \circ \sigma_L$ eine Translation entlang G . Mit 2.8.7 ergibt sich, dass $\sigma_A \circ \sigma_L \circ \iota_p$ eine Punktspiegelung ι_q an einem Punkt $q \in G$ ist. Außerdem ist $\iota_p \circ \sigma_L \circ \sigma_B \circ \sigma_C = \iota_p \circ \iota_{L \wedge B} \circ \sigma_C = \iota_p \circ \sigma_D \circ \sigma_H \circ \sigma_C = \iota_p \circ \sigma_D \circ \iota_u = \sigma_{C'}$ nach 2.9.11 mit einer Geraden $C' \perp H$. Es folgt $\iota_q \circ \sigma_{C'} = \sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C = \sigma_K$, also $\iota_q = \sigma_K \circ \sigma_{C'}$. Das bedeutet $K \perp C'$ nach 2.6.3 und $q \in K$. Somit ist C' gemeinsames Lot von K und H und q gemeinsamer Punkt von K und G .

Nun behandeln wir den Fall, dass G und H ein gemeinsames Lot E haben. Nach 2.9.10 ist $\sigma_A \circ \sigma_L \circ \sigma_E = \sigma_F$ mit einer Geraden $F \perp G$. Außerdem gilt $\sigma_E \circ \sigma_L \circ \sigma_B \circ \sigma_C = \sigma_E \circ \iota_{L \wedge B} \circ \sigma_C = \iota_v$ für einen Punkt $v \in H$ nach 2.9.12. Es folgt $\sigma_F \circ \iota_v = \sigma_K$, also $\iota_v = \sigma_F \circ \sigma_K$. Das bedeutet wieder $K \perp F$ nach 2.6.3 und $v \in K$. Somit ist F gemeinsames Lot von K und G und v gemeinsamer Punkt von K und H . \square

Satz 3.3.11:

Es sei $B(K_1, K_2)$ ein Ende und N eine Gerade mit $N \notin B(K_1, K_2)$. Dann existiert eine eindeutige Gerade K mit $K \in B(K_1, K_2)$ und $K \perp N$.

Beweis:

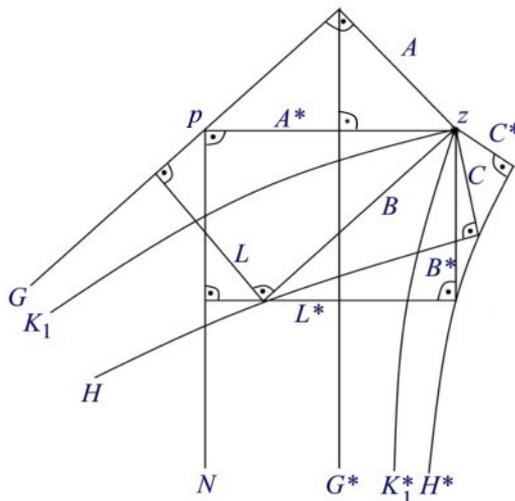
Es sei $z \in K_1$ ein Punkt mit $z \notin N$ und $A^* = \perp(z, N)$. Nach 2.9.14 gibt es durch den Punkt $p := A^* \wedge N \neq z$ eine Gerade G mit $G \in B(K_1, K_2)$. Falls $G = K_1$ ist, so gilt $z, p \in G = K_1$ und somit $A^* = z \vee p = G$, und G hat die gewünschten Eigenschaften. In Folgenden sei also $G \neq K_1$; dann ist $B(K_1, K_2) = B(G, K_1)$, und es gilt $z \notin G$, denn sonst wären G und K_1 verbindbar.

Es sei $A = \perp(z, G)$. Weil $N \notin B(K_1, K_2)$ ist, gilt $G \neq N$ und daher $A \neq A^*$. Außerdem

sind A und A^* nicht orthogonal, sonst wäre wegen $p \in A^*, G$ und $A^*, G \perp A$, sowie der Eindeutigkeit des Lotes $G = A^*$ und somit, weil dann $z \in G, K_1$ gilt, $G = K_1$ (andernfalls wäre $B(K_1, K_2) = B(G, K_1)$ ein Punktbüschel). Daher existiert die von A, A^* erzeugte Halbdrehung \circ um z .

Es wird gezeigt: die Geraden N und K_1^* haben ein gemeinsames Lot, welches zu dem Ende $B(G, K_1)$ gehört. Dazu werden den Geraden G, A, K_1 weitere Geraden folgendermaßen hinzugefügt: es sei L ein von A verschiedenes Lot auf G , und $B = \perp(z, L)$. Wegen $z \in B$ gilt dann $B \neq G$. Weiter seien C die Gerade mit $\sigma_{K_1} \circ \sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_C$, und $H = \perp(L \wedge B, C)$. Dabei gilt $H \neq K_1$, denn sonst wäre $K_1 \perp C$ und damit $A \perp B$ und wir hätten ein Rechteck. Damit bilden G, H, L, A, B, C eine Endenfigur, und wegen $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C = \sigma_{K_1}$ gehört H nach 3.3.10 zu dem Ende $B(G, K_1)$.

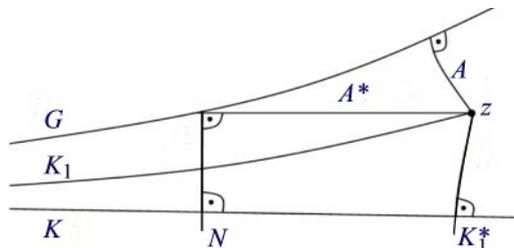
Diese Endenfigur wird nun der Halbdrehung \circ unterzogen. Dann bilden die Geraden $N, H^*, L^*, A^*, B^*, C^*$ auch eine Endenfigur. Unter Berücksichtigung von 2.11.2, 2.11.4, 2.11.6 und 2.11.7 gilt nämlich $A^* \neq B^*, L^* \neq A^*, L^* \perp B^*, L^* \wedge B^* \in H^*$ und $H^* \perp C^*$. Außerdem ist $N \perp A^*$ nach Definition. Ferner gilt $\sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_{B^*} \circ \sigma_{A^*}$ nach 2.11.2. Für die Geraden B, A, A^*, B^* sowie L, G, N, L^* sind die Voraussetzungen von 3.3.2 erfüllt, und wegen $L \perp G$ gilt somit auch $N \perp L^*$.



Da G, K_1, H im Büschel liegen und $z \in K_1$ gilt, liegen nach 2.11.11 (Büscheltreue bei Halbdrehungen) auch die Geraden G^*, K_1^*, H^* im Büschel (wegen $K_1 \neq H$ gilt dabei auch $K_1^* \neq H^*$). Lägen die Geraden N, K_1^*, H^* auch im Büschel, so würden nach 2.9.19 (Transitivität) auch N, G^*, K_1^* im Büschel liegen. Dabei gilt $N \neq G^*$ wegen $A^* \neq A$. Dies hieße aber wegen $N, G^* \perp A^*$ auch $K_1^* \perp A^*$ nach 2.9.10'. Wegen $z \in K_1, A$ ergäbe dies nach 2.11.2 unter Berücksichtigung von 2.6.2 die Beziehung $\sigma_{K_1} \circ \sigma_A = \sigma_{K_1^*} \circ \sigma_{A^*} = \iota_z$. Aus 2.6.3 würde dann $K_1 \perp A$ folgen, also hätten G und K_1 das gemeinsame Lot A . Dies steht im Widerspruch dazu, dass $B(G, K_1) = B(K_1, K_2)$ ein Ende bilden.

Weil die Geraden $N, H^*, L^*, A^*, B^*, C^*$ eine Endenfigur bilden, können N und K_1^* daher nicht unverbindbar sein, denn nach 3.3.10 wären sonst N, K_1^* und H^* im Büschel. Angenommen, N und K_1^* sind kopunktal. Dann ist $B(N, K_1^*)$ ein Punktbüschel. Sei nun \circ die von A^*, A erzeugte Halbdrehung um z . Gemäß der Konstruktion 2.11.1 gilt dann $N^\circ = G$ und $K_1^{\circ} = K_1$, und $B(G, K_1)$ ist als Bild von $B(N, K_1)$ unter \circ nach 3.3.3 auch ein Punktbüschel. Widerspruch!

Somit existiert ein gemeinsames Lot K von N und K_1^* . Die Geraden K, G, K_1^*, A^*, A, N bilden dann eine Endenfigur mit $\sigma_{K_1^*} \circ \sigma_{A^*} \circ \sigma_A = \sigma_K$ gemäß 2.11.2. Nach 3.3.10 gehört damit K zu dem Ende $B(G, K_1) = B(K_1, K_2)$, und hat die gewünschte Eigenschaft.



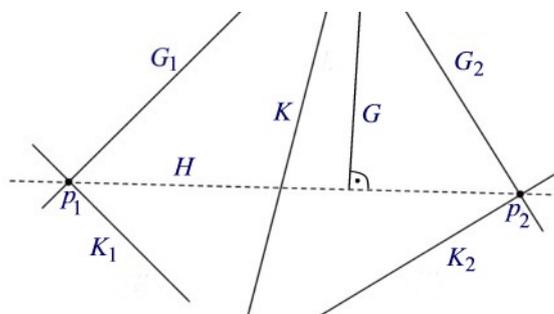
Angenommen, es gäbe zwei Geraden $K \neq K'$ mit $K, K' \in B(K_1, K_2)$ und $K, K' \perp N$. Dann wäre N ein gemeinsames Lot von K und K' . Andererseits sind K, K' unverbindbar. Widerspruch! \square

Satz 3.3.12 (Verbindbarkeit von Enden):

Je zwei verschiedene Enden sind verbindbar, d.h. es existiert eine eindeutige Gerade K , die zu beiden Enden gehört.

Beweis:

Es seien $B(G_1, G_2), B(H_1, H_2)$ zwei Enden. Falls G_1 oder G_2 zu $B(H_1, H_2)$ gehört, ist nichts zu zeigen. Andernfalls existieren nach 3.3.11 Geraden $K_1, K_2 \in B(H_1, H_2)$ mit $K_i \perp G_i, i = 1, 2$. Wegen $G_1 \neq G_2$ gilt dabei $K_1 \neq K_2$, denn sonst wäre $K_1 = K_2$ gemeinsames Lot von G_1 und G_2 . Somit ist $B(H_1, H_2) = B(K_1, K_2)$.



Seien $p_i = G_i \wedge K_i, i = 1, 2$. Dann gilt $p_1 \neq p_2$; sei $H = p_1 \vee p_2$. Wegen 2.9.8' ist $H \notin B(G_1, G_2)$. Erneut nach 3.3.11 gibt es eine Gerade $G \in B(G_1, G_2)$ mit $G \perp H$. Dann gilt $\sigma_{G_1} \circ \sigma_G \circ \sigma_{G_2} = \sigma_K$ für eine Gerade $K \in B(G_1, G_2)$, d.h. $\sigma_{G_1} \circ \sigma_K \circ \sigma_{G_2} = \sigma_G$. Somit gelten die Voraussetzungen von 2.9.13. Demzufolge ist auch $\sigma_{K_1} \circ \sigma_K \circ \sigma_{K_2}$ eine Geradenspiegelung, also $K \in B(K_1, K_2) = B(H_1, H_2)$. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus 2.9.21. \square

Nach 2.9.2 ist jede Bewegung als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellbar; gemäß Bachmann [1] (§ 3, Satz 16) ist jedes Produkt einer ungeraden Anzahl von Geradenspiegelungen darstellbar als Produkt einer Punktspiegelung und einer Geradenspiegelung. Zusammen mit den Ergebnissen dieses Abschnittes ergibt sich nun, auch gemäß den Ausführungen in [1], § 14.5, dass die zugrunde liegende Bewegungsgruppe eine H -Gruppe im Sinne Bachmanns ist (s. [1], § 11.1).

3.4 Endenrechnung

Satz 3.4.1:

Zu jeder Geraden K gibt es eine mit K unverbindbare Gerade. Jede Gerade gehört genau zwei Enden an.

Beweis:

Es seien G und H zwei unverbindbare Geraden. Diese beiden Geraden bestimmen ein Ende. Da G, H diesem Ende angehören, gehören sie nach 3.3.8 auch jeweils einem weiteren Ende an. Sei nun K eine beliebige Gerade. Dann sind folgende Fälle möglich:

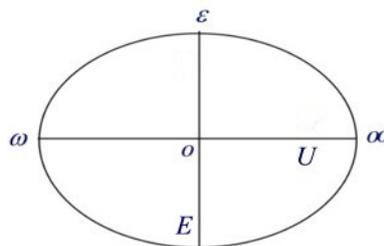
Fall 1: G und K sind unverbindbar. Dann ist nichts zu zeigen.

Fall 2: G und K haben ein gemeinsames Lot L . Seien $p = L \wedge G, q = L \wedge K, m = m(p, q)$. Dann gilt $\iota_m(G) = K$, somit gehört K den Bildenden der Enden von G an. Die Bildgerade von H ist dann mit K unverbindbar, weil G mit H unverbindbar ist.

Fall 3: G und K schneiden sich im Punkt q . Sei $L = \perp(q, K)$. Dann kann man o.B.d.A. $G \neq L$ annehmen. Denn falls $G = L$ ist, so nehme man H statt G . Für H tritt entweder Fall 1, Fall 2 oder Fall 3 ein mit einem Schnittpunkt $q' \neq q$ mit K . Weiter gilt dann $\perp(q', K) \neq H$, denn sonst hätten G und H ein gemeinsames Lot. Gemäß 3.3.11 wird nun von einem beliebigen Ende von G das Lot G' auf L gefällt. Dann ist Fall 2 anwendbar mit G' statt mit G .

Aus 3.3.8 ergibt sich, dass die Gerade K noch einem weiteren Ende angehört. \square

Wir betrachten im Folgenden die Menge $\overline{\mathbb{K}}$ der Enden, dabei seien drei verschiedene Enden ω, ε und ∞ ausgezeichnet; alle weiteren Enden werden in Zukunft mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Es sei \mathbb{K} die Menge der Enden $\neq \infty$. Die Enden ω und ∞ werden gemäß 3.3.12 durch die Gerade U verbunden, vom Ende ε aus wird gemäß 3.3.11 auf U das Lot E gefällt. Der Schnittpunkt der beiden "Achsen" U und E sei der "Ursprung" o .

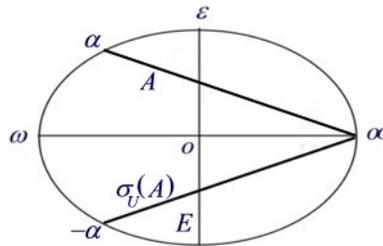


\mathbb{K} kann nun mit der Struktur eines angeordneten Körpers versehen werden, des sog. *Endenkörpers*. Diese Thematik wurde schon in Hilbert [7] (Anhang III, § 2 und 3), Bachmann [1] (§ 11) und Nöbeling [10] (V, § 5) behandelt, wobei die dort dargestellten Vorgehensweisen hier nur als Anregungen dienen. Beispielsweise stößt ein direkter Anschluss an Hilbert bzw. Nöbeling auf die Schwierigkeit, dass wir hier (noch) keinen Winkelbegriff haben. Ferner werden wir uns an dieser Stelle auch nicht nur damit begnügen, den Anschluss an bestehende Literatur herzustellen und Ergebnisse zu zitieren; vielmehr soll die Konstruktion des Endenkörpers und die darauf folgende Koordinatisierung der hyperbolischen Ebene hier in einer dem vorliegenden Kontext angepassten Form vollständig durchgeführt werden. Dabei wird auch deutlich werden,

dass sich die Ergebnisse alle sehr natürlich aus dem bisherigen Aufbau ergeben.

Sei zunächst α ein beliebiges Ende $\neq \omega, \infty, \varepsilon$. Man nennt α *positiv*, wenn die Verbindung $\varepsilon \vee \alpha$ mit U keinen Punkt gemeinsam hat; ε selbst wird auch als positiv definiert. Andernfalls nennt man α *negativ*. Im Folgenden seien mit \mathbb{K}^+ bzw. \mathbb{K}^- die Mengen der positiven bzw. negativen Enden bezeichnet.

Zu einem Ende $\alpha \neq \omega, \infty$ sei $A = \alpha \vee \infty$. Dann gehören A und U dem Ende ∞ an. Angenommen, es wäre $\sigma_U(A) = A$. Nach 2.9.3 gilt dann $\sigma_A = \sigma_{\sigma_U(A)} = \sigma_U \circ \sigma_A \circ \sigma_U$. Dies bedeutet $A \perp U$ nach 2.6.3, d.h. A und U sind verbindbar. Widerspruch! Also ist $\sigma_U(A) \neq A$. Die Gerade $\sigma_U(A)$ gehört nach 3.3.5 einerseits dem Ende ∞ an, andererseits nach 3.4.1 noch einem zweiten Ende, das wegen $\sigma_U(A) \neq A$ nach 2.9.21 von α verschieden ist; es wird mit $\sigma_U(\alpha) =: -\alpha$ bezeichnet. Für $\alpha = \omega$ gilt $\omega = -\omega$. Weil die Verbindungsgerade von $\alpha \neq \omega$ und $-\alpha$ Fixgerade bei der Spiegelung an U ist, gilt wie eben aufgrund dieser Konstruktion $\alpha \vee -\alpha \perp U$. Außerdem ist $-(-\alpha) = \alpha$.



Satz 3.4.2:

- (a) Sei p ein beliebiger Punkt auf U . Dann ist $\iota_p(\varepsilon)$ negativ.
 (b) Sei $\alpha \neq \omega, \infty$ ein Ende. Dann gilt: genau eines der beiden Enden $\alpha, -\alpha$ ist positiv, das andere negativ. Ferner gilt für alle $p \in U$: wenn α positiv ist, so ist $\iota_p(\alpha)$ negativ und umgekehrt.

Beweis:

(a) Mit Hilfe von 3.3.7 ergibt sich zunächst $\iota_p(\varepsilon) \neq \varepsilon$. Die Verbindungsgerade $\varepsilon \vee \iota_p(\varepsilon)$ ist Fixgerade von ι_p , geht also durch p . Somit ist p ein gemeinsamer Punkt von U und der Verbindung $\varepsilon \vee \iota_p(\varepsilon)$, d.h. $\iota_p(\varepsilon)$ ist negativ.

(b) Für $\alpha = \varepsilon$ ist die Behauptung klar, denn dann ist $-\alpha = -\varepsilon$, und wegen $\varepsilon \vee -\varepsilon \perp U$ hat diese Verbindung mit U einen Punkt gemeinsam. Sei also $\alpha \neq \varepsilon$, weiter sei $G = \alpha \vee -\alpha \perp U$ und $a = G \wedge U$; wegen $\alpha \neq \varepsilon$ ist $o \neq a$; sei $m = m(o, a)$. Dann gilt $\iota_m(E) = G$; somit gehört G dem Ende $\iota_m(\varepsilon)$ an. Da nach 3.4.1 jede Gerade genau zwei Enden angehört, folgt $\iota_m(\varepsilon) \in \{\alpha, -\alpha\}$; o.B.d.A. sei $\iota_m(\varepsilon) = -\alpha$. Nach (a) ist dann $-\alpha$ negativ.

Wäre nun α auch negativ, so hätte die Verbindung $L = \varepsilon \vee \alpha$ ebenfalls mit U einen Punkt q gemeinsam. Die Gerade $L' = -\varepsilon \vee -\alpha$ ist die Bildgerade von L bei Spiegelung an U und würde dann auch durch diesen Punkt q gehen. Nach 3.3.7 würden letztendlich $\iota_q(\varepsilon) = \alpha$ sowie $\iota_q(-\varepsilon) = -\alpha$ folgen, d.h. $\iota_q(E) = G$. Weil $q \in U$ gilt, würde $q = m$ und daraus $\alpha = -\alpha$ folgen. Widerspruch! Somit ist α positiv.

Sei nun $p \in U$; aus $\iota_m(\varepsilon) = -\alpha$ ergibt sich $\iota_a \circ \iota_m(\varepsilon) = \alpha$ mit Hilfe von 3.3.7, daraus folgt $\iota_p(\alpha) = \iota_p \circ \iota_a \circ \iota_m(\varepsilon) = \iota_q(\varepsilon)$ für einen Punkt $q \in U$ nach 2.8.7. Nach (a) ist dies negativ.

Ist andererseits α negativ, so ist $\iota_p(\alpha)$ positiv. Denn wäre $\iota_p(\alpha)$ auch negativ, so wäre $\sigma_U \circ \iota_p(\alpha)$ positiv und somit nach dem eben Geschilderten $\iota_p \circ \sigma_U \circ \iota_p(\alpha) = \sigma_{\iota_p(U)}(\alpha) = \sigma_U(\alpha) = -\alpha$ negativ. Widerspruch! \square

Korollar 3.4.3:

Sei τ eine Translation entlang U . Dann gilt:

- (a) τ bildet positive auf positive und negative auf negative Enden ab,
- (b) $\tau(\omega) = \omega, \tau(\infty) = \infty$.

Insbesondere gilt für zwei Enden $\alpha, \beta \neq \omega, \infty$: wenn α positiv ist und $\alpha \vee \beta$ mit U keinen Punkt gemeinsam hat, so ist auch β positiv.

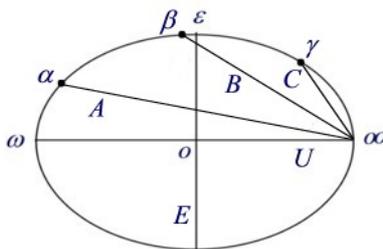
Beweis:

Eine Translation τ entlang U ist eine Hintereinanderausführung zweier Punktspiegelungen an Punkten auf U . Daher ergibt sich die Behauptung (a) aus 3.4.2 und die Behauptung (b) aus 3.3.8.

Nun seien α, β zwei Enden, und α sei positiv. Wenn eines der beiden Enden gleich ε ist, so ist nichts zu zeigen. Seien also $\alpha, \beta \neq \varepsilon$. Dann hat $\varepsilon \vee \alpha$ mit U keinen gemeinsamen Punkt, ist aber mit U auch nicht unverbindbar. Somit gibt es ein gemeinsames Lot L_1 zwischen $\varepsilon \vee \alpha$ und U . Nun hat $\alpha \vee \beta$ nach Voraussetzung auch ein gemeinsames Lot L_2 mit U . Mit Hilfe von 3.3.4 folgt $\sigma_{L_2} \circ \sigma_{L_1}(\varepsilon) = \beta$. Nach 2.6.4 ist $\sigma_{L_2} \circ \sigma_{L_1}$ eine Translation entlang U . Weil ε positiv ist, ist nach (a) somit auch β positiv. \square

Konstruktion 3.4.4 (Addition in \mathbb{K}):

Es seien α, β zwei Enden aus \mathbb{K} ; die Verbindungen mit ∞ seien $A = \alpha \vee \infty, B = \beta \vee \infty$. Dann liegen A, B und U im Büschel, und es gibt eine Gerade C mit $\sigma_C = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_B$. Diese Gerade C gehört auch dem Ende ∞ an, außerdem einem weiteren Ende γ . Dieses Ende γ wird die Summe der Enden α und β genannt: $\gamma = \alpha + \beta$.



Sei nun $A' = \sigma_U(A)$. Dann gilt $A' = -\alpha \vee \infty$ und weiter $\sigma_{A'} \circ \sigma_U \circ \sigma_A = \sigma_{\sigma_U(A)} \circ \sigma_U \circ \sigma_A = \sigma_U \circ \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_U \circ \sigma_A = \sigma_U$. Dies bedeutet $\alpha + (-\alpha) = \omega$.

Satz 3.4.5:

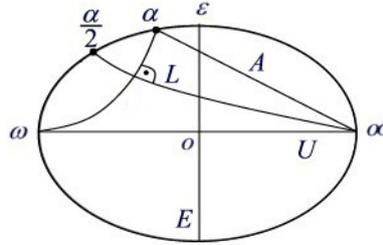
Zu einem Ende $\alpha \neq \omega, \infty$ existiert genau ein Ende $\frac{\alpha}{2}$ mit der Eigenschaft $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

Beweis:

Sei α ein beliebiges Ende $\neq \omega, \infty$. Fällt man gemäß 3.3.11 von ∞ aus das Lot L auf die Verbindung $\omega \vee \alpha$, so gehört L außer dem Ende ∞ noch einem weiteren Ende an. Dieses weitere

Ende sei mit $\frac{\alpha}{2}$ bezeichnet.

Es sei $A = \alpha \vee \infty$. Aus 3.3.4 folgt, dass bei der Spiegelung an L die Enden ω und α vertauscht werden; das Ende ∞ bleibt hingegen nach 3.3.6 fest. Es ergibt sich $\sigma_L(U) = A$. Nun ist $\sigma_A = \sigma_{\sigma_L(U)} = \sigma_L \circ \sigma_U \circ \sigma_L$ nach 2.9.3. Somit folgt $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.



Angenommen, es gäbe noch eine weitere Gerade $L' = \lambda \vee \infty$, für deren Ende λ auch $\lambda + \lambda = \alpha$ gilt. Dann wäre $\sigma_{L'} \circ \sigma_U \circ \sigma_{L'} = \sigma_A = \sigma_L \circ \sigma_U \circ \sigma_L$, nach 2.9.3 also $\sigma_{\sigma_{L'}(U)} = \sigma_{\sigma_L(U)}$, d.h. $\sigma_{L'}(U) = \sigma_L(U)$. Dies ist nur möglich, wenn $L = L'$ gilt, weil L, L' beide dem Ende ∞ angehören. \square

Mit den Bezeichnungen wie eben ist die Abbildung $\delta = \sigma_L \circ \sigma_U$ gemäß 3.1.4 eine Drehung um das Ende ∞ mit $\delta(U) = A$. Diese Drehung ist nach 3.1.6 eindeutig. Weil sowohl A als auch U zum Ende ∞ gehören, folgt $\delta(\omega) = \alpha$. Für $\alpha = \omega$ ist $\delta = \text{id}$. Es ergibt sich die

Folgerung 3.4.6:

Jedes Ende α aus \mathbb{K} lässt sich eindeutig in der Form $\delta_\alpha(\omega)$ schreiben mit einer Drehung δ_α um das Ende ∞ , d.h. die Gruppe der Drehungen um ∞ ist scharf transitiv auf \mathbb{K} . Für zwei Enden $\alpha = \delta_\alpha(\omega), \beta = \delta_\beta(\omega)$ gilt $\delta_\alpha(\omega) + \delta_\beta(\omega) = \alpha + \beta = \delta_\alpha(\beta) = \delta_\alpha \circ \delta_\beta(\omega)$.

Beweis:

Es seien A, B die Verbindungen von α, β mit ∞ . Dann gilt $A = \delta_\alpha(U), B = \delta_\beta(U)$. Sei nun C die Gerade mit $\sigma_C = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_B$. Nach 2.9.3 gilt $\sigma_A = \sigma_{\delta_\alpha(U)} = \delta_\alpha \circ \sigma_U \circ \delta_\alpha^{-1}$, also $\sigma_C = \delta_\alpha \circ \sigma_U \circ \delta_\alpha^{-1} \circ \sigma_U \circ \sigma_B$. Die Bewegung $\sigma_U \circ \sigma_B$ ist auch eine Drehung um ∞ ; da nach 3.1.5 die Drehungen um ein festes Ende kommutieren, folgt $\sigma_C = \delta_\alpha \circ \sigma_U \circ \sigma_U \circ \sigma_B \circ \delta_\alpha^{-1} = \delta_\alpha \circ \sigma_B \circ \delta_\alpha^{-1} = \sigma_{\delta_\alpha(B)}$. Also ergibt sich $C = \delta_\alpha(B) = \delta_\alpha \circ \delta_\beta(U)$ und somit $\alpha + \beta = \delta_\alpha(\beta) = \delta_\alpha \circ \delta_\beta(\omega)$. \square

Aus 3.4.6 folgt unmittelbar:

Bemerkung 3.4.7:

Sei (Δ_∞, \circ) die Gruppe der Drehungen um das Ende ∞ mit der Komposition als Verknüpfung. Die bijektive Zuordnung

$$\mathbb{K} \rightarrow \Delta_\infty, \alpha \mapsto \delta_\alpha$$

ist ein Isomorphismus der algebraischen Struktur $(\mathbb{K}, +)$ der Enden $\neq \infty$ mit der eingeführten Addition als Verknüpfung auf die Gruppe (Δ_∞, \circ) der Drehungen um ∞ . Die Umkehrabbildung ist

$$\Delta_\infty \rightarrow \mathbb{K}, \delta \mapsto \delta(\omega).$$

Aus 2.9.7 folgt, dass die Gruppe der Drehungen um das Ende ∞ keine Involutionen besitzt. Da die Drehungen um ein festes Ende nach 3.1.5 eine abelsche Gruppe bilden, ergibt sich die

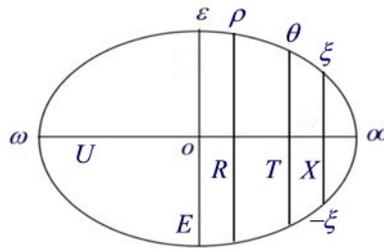
Folgerung 3.4.8:

Mit der soeben eingeführten Addition ist $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe. Das Ende ω ist das Nullelement der Addition. Für ein Ende $\alpha \neq \omega, \infty$ gilt $\alpha + \alpha \neq \omega$.

Die Addition wird auf $\overline{\mathbb{K}}$ fortgesetzt gemäß $\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty$ für ein beliebiges Ende $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$.

Konstruktion 3.4.9 (Multiplikation in \mathbb{K}):

Es seien $\rho, \theta \neq \omega, \infty$ zwei Enden. Von beiden Enden aus werden gemäß 3.3.11 die Lote R und T auf die Gerade U gefällt. Dann bilden R, T und E ein Lotbüschel, und nach 2.9.10 existiert eine Gerade $X \perp U$ mit der Eigenschaft $\sigma_X = \sigma_R \circ \sigma_E \circ \sigma_T$.



Die Gerade X gehört nach 3.4.1 wieder zwei Enden ξ, ξ' an. Wegen $X \perp U$ gilt $\sigma_U(\xi \vee \infty) = \xi' \vee \infty$ nach 3.3.4; dies bedeutet $\xi' = -\xi$. Nach 3.4.2 ist genau eines der beiden Enden positiv. Dieses Ende sei mit ξ bezeichnet; das Ende $-\xi$ ist dann das negative Ende.

Man legt nun das Produkt der Enden ρ und θ folgendermaßen fest: es sei $\rho \cdot \theta = \xi$, wenn ρ und θ beide positiv oder beide negativ sind; andernfalls sei $\rho \cdot \theta = -\xi$.

Zu einem Ende $\rho \neq \omega, \infty$ sei $\rho^{-1} := \sigma_E(\rho)$. Dann gilt: ist ρ positiv (bzw. negativ), so ist ρ^{-1} auch positiv (bzw. negativ). Dies ergibt sich aus $\sigma_E = \iota_o \circ \sigma_U$ unter Verwendung von 3.4.2. Ferner ist $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Sei nun $R' = \sigma_E(R)$. Dann gilt $R' = \rho^{-1} \vee -\rho^{-1}$ und weiter $\sigma_{R'} \circ \sigma_E \circ \sigma_R = \sigma_{\sigma_E(R)} \circ \sigma_E \circ \sigma_R = \sigma_E \circ \sigma_R \circ \sigma_E \circ \sigma_E \circ \sigma_R = \sigma_E$. Dies bedeutet $\rho \cdot \rho^{-1} = \varepsilon$.

Wir betrachten nun ein beliebiges positives Ende ρ . Es sei R das von ρ aus auf U gefällte Lot, $r = R \wedge U$. Dann existiert nach 2.4.4 eine Translation τ entlang U mit $\tau(o) = r$, für die ebenso $\tau(E) = R$ gilt. Diese Translation ist nach 2.8.5 eindeutig bestimmt. Weil τ nach 3.4.3 positive Enden auf positive Enden abbildet, folgt $\tau(\varepsilon) = \rho$. Es ergibt sich die

Folgerung 3.4.10:

Jedes positive Ende ρ lässt sich eindeutig in der Form $\tau_\rho(\varepsilon)$ schreiben mit einer Translation τ_ρ entlang U , d.h. die Gruppe der Translationen entlang U ist scharf transitiv auf der Menge \mathbb{K}^+ der positiven Enden. Für zwei positive Enden $\rho = \tau_\rho(\varepsilon), \theta = \tau_\theta(\varepsilon)$ gilt $\tau_\rho(\varepsilon) \cdot \tau_\theta(\varepsilon) = \rho \cdot \theta = \tau_\rho(\theta) = \tau_\rho \circ \tau_\theta(\varepsilon)$.

Beweis:

Es seien $\rho = \tau_\rho(\varepsilon), \theta = \tau_\theta(\varepsilon), R, T$ die von ρ, θ aus auf U gefällten Lote. Dann gilt $R =$

$\tau_\rho(E), T = \tau_\theta(E)$. Sei X die Gerade mit $\sigma_X = \sigma_R \circ \sigma_E \circ \sigma_T$. Nach 2.9.3 ist $\sigma_R = \sigma_{\tau_\rho(E)} = \tau_\rho \circ \sigma_E \circ \tau_\rho^{-1}$, also folgt $\sigma_X = \tau_\rho \circ \sigma_E \circ \tau_\rho^{-1} \circ \sigma_E \circ \sigma_T$. Nach 2.6.4 ist $\sigma_E \circ \sigma_T$ auch eine Translation entlang U . Nach 2.8.4 bilden die Translationen entlang einer Geraden eine kommutative Gruppe. Daher gilt $\sigma_X = \tau_\rho \circ \sigma_E \circ \sigma_E \circ \sigma_T \circ \tau_\rho^{-1} = \tau_\rho \circ \sigma_T \circ \tau_\rho^{-1} = \sigma_{\tau_\rho(T)}$. Also folgt $X = \tau_\rho(T) = \tau_\rho \circ \tau_\theta(E)$ und somit $\rho \cdot \theta = \tau_\rho(\theta) = \tau_\rho \circ \tau_\theta(\varepsilon)$. \square

Aus 3.4.10 folgt unmittelbar:

Bemerkung 3.4.11:

Sei (T_U, \circ) die Gruppe der Translationen entlang der Geraden U mit der Komposition als Verknüpfung, und \mathbb{K}^+ die Menge der positiven Enden. Die bijektive Zuordnung

$$\mathbb{K}^+ \rightarrow T_U, \rho \mapsto \tau_\rho$$

ist ein Isomorphismus der algebraischen Struktur (\mathbb{K}^+, \cdot) mit der eingeführten Multiplikation als Verknüpfung auf die Translationsgruppe (T_U, \circ) . Die Umkehrabbildung ist

$$T_U \rightarrow \mathbb{K}^+, \tau \mapsto \tau(\varepsilon).$$

Gemäß 2.8.4 bilden die Translationen entlang U eine abelsche Gruppe; nach 2.4.3 besitzt diese Gruppe keine Involutionen. Nach 2.8.6 existiert zu jeder Translation τ entlang U eine eindeutige Translation θ entlang U mit $\tau = \theta \circ \theta$. Somit ergibt sich die

Folgerung 3.4.12:

Mit der soeben eingeführten Multiplikation ist (\mathbb{K}^+, \cdot) eine abelsche Gruppe. Das Ende ε ist das Einselement der Multiplikation. Für Enden $\rho, \alpha \neq \infty$ ergibt sich aufgrund der Vorzeichenkonvention $(-\alpha) \cdot \rho = -\alpha \cdot \rho = \alpha \cdot (-\rho)$. Gilt $\rho \neq \varepsilon$ so ist $\rho \cdot \rho \neq \varepsilon$. Zu einem positiven Ende ρ existiert genau ein positives Ende $\sqrt{\rho}$ mit der Eigenschaft $\sqrt{\rho} \cdot \sqrt{\rho} = \rho$.

Bemerkung: Aufgrund der Vorzeichenregeln ergibt sich nun auch, dass die algebraische Struktur $(\mathbb{K} \setminus \{\omega\}, \cdot)$ (also ohne die Einschränkung auf positive Enden) eine abelsche Gruppe ist, da sie isomorph ist zur Gruppe $(\mathbb{K}^+, \cdot) \times \{-1, 1\}$.

Bemerkung 3.4.13:

Für ein Ende $\alpha \neq \omega, \infty$ und eine Translation τ entlang U gilt:

- (1) $\tau(-\alpha) = -\tau(\alpha)$
- (2) $\tau(\alpha) = \tau(\varepsilon) \cdot \alpha$.

Beweis:

(1) Sei $A = \alpha \vee -\alpha \perp U$. Dann ist auch $\tau(A) = \tau(\alpha) \vee \tau(-\alpha) \perp U$. Andererseits gilt $\tau(\alpha) \vee -\tau(\alpha) \perp U$. Aus der Eindeutigkeit des von einem Ende aus auf eine Gerade gefällten Lots nach 3.3.11 folgt $\tau(-\alpha) = -\tau(\alpha)$.

(2) Sei zunächst α positiv. Dann gilt $\alpha = \tau'(\varepsilon)$ für eine Translation τ' entlang U . Aus 3.4.10 ergibt sich $\tau(\alpha) = \tau \circ \tau'(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \cdot \tau'(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \cdot \alpha$.

Ist nun α negativ, so ist $-\alpha$ positiv, und es ist $-\alpha = \tau'(\varepsilon)$ für eine Translation τ' entlang U . Dann ist $\alpha = -\tau'(\varepsilon)$, und mit (1) ergibt sich $\tau(\alpha) = \tau(-\tau'(\varepsilon)) = -\tau \circ \tau'(\varepsilon) = -\tau(\varepsilon) \cdot \tau'(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \cdot \alpha$ unter Beachtung von 3.4.10 und 3.4.12. \square

Die Multiplikation wird auf $\overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}} \setminus \{(\omega, \infty), (\infty, \omega)\}$ fortgesetzt gemäß $\omega \cdot \rho = \rho \cdot \omega = \omega$ für $\rho \neq \infty$, $\infty \cdot \rho = \rho \cdot \infty = \infty$ für $\rho \neq \omega$. Wir setzen $\infty^{-1} = \sigma_E(\infty) = \omega$ und $\omega^{-1} = \sigma_E(\omega) = \infty$, entsprechend der geometrischen Beschreibung von multiplikativen Inversen. Statt ρ^{-1} bzw. $\theta \cdot \rho^{-1}$ schreiben wir in Zukunft auch $\frac{1}{\rho}$ bzw. $\frac{\theta}{\rho}$.

Satz 3.4.14:

Für eine Drehung $\delta \in \Delta_\infty$ und eine Translation τ entlang U gilt $\tau \circ \delta \circ \tau^{-1} \in \Delta_\infty$, d.h. die Drehgruppe Δ_∞ normalisiert die Translationen entlang U .

Beweis:

Es sei $\delta = \sigma_G \circ \sigma_H$ mit Geraden G, H , die dem Ende ∞ angehören. Mit Hilfe von 2.9.3 ergibt sich $\tau \circ \delta \circ \tau^{-1} = \tau \circ \sigma_G \circ \sigma_H \circ \tau^{-1} = \tau \circ \sigma_G \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma_H \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(G)} \circ \sigma_{\tau(H)}$. Nach 3.4.3 gilt $\tau(\infty) = \infty$. Somit gehören $\tau(G), \tau(H)$ auch dem Ende ∞ an, woraus die Behauptung folgt. \square

Satz 3.4.15:

Für die Addition und Multiplikation in \mathbb{K} gilt das Distributivgesetz.

Beweis:

Für drei Enden ρ, α, β ist $\rho \cdot (\alpha + \beta) = \rho \cdot \alpha + \rho \cdot \beta$ zu zeigen. Wenn eines dieser Enden gleich ω ist, ist die Aussage klar. Es gelte also $\rho, \alpha, \beta \neq \omega$. Sei zunächst ρ positiv und τ_ρ die Translation gemäß 3.4.10 mit $\rho = \tau_\rho(\varepsilon)$. Seien weiter $\delta_\alpha, \delta_\beta$ die Drehungen um ∞ mit $\alpha = \delta_\alpha(\omega), \beta = \delta_\beta(\omega)$. Man erhält $\rho \cdot (\alpha + \beta) = \tau_\rho(\alpha + \beta) = \tau_\rho(\delta_\alpha(\beta)) = \tau_\rho(\delta_\alpha \circ \delta_\beta(\omega)) = \tau_\rho \circ \delta_\alpha \circ \delta_\beta \circ \tau_\rho^{-1}(\omega) = \tau_\rho \circ \delta_\alpha \circ \tau_\rho^{-1} \circ \tau_\rho \circ \delta_\beta \circ \tau_\rho^{-1}(\omega)$ unter Verwendung von 3.4.3. Gemäß 3.4.14 sind $\tau_\rho \circ \delta_\alpha \circ \tau_\rho^{-1}$ und $\tau_\rho \circ \delta_\beta \circ \tau_\rho^{-1}$ Drehungen um das Ende ∞ , somit ergibt sich mit 3.4.6 weiter $\rho \cdot (\alpha + \beta) = \tau_\rho \circ \delta_\alpha \circ \tau_\rho^{-1}(\omega) + \tau_\rho \circ \delta_\beta \circ \tau_\rho^{-1}(\omega) = \tau_\rho(\delta_\alpha(\omega)) + \tau_\rho(\delta_\beta(\omega)) = \tau_\rho(\alpha) + \tau_\rho(\beta) = \rho \cdot \alpha + \rho \cdot \beta$.

Sei nun ρ negativ. Nach 3.4.12 gilt dann $\rho \cdot (\theta + \zeta) = -((- \rho) \cdot (\theta + \zeta)) = -(-\rho \cdot \theta - \rho \cdot \zeta) = \rho \cdot \theta + \rho \cdot \zeta$. \square

Damit ist \mathbb{K} ein Körper. Im Folgenden wird nun gezeigt, dass \mathbb{K} ein angeordneter Körper ist.

Satz 3.4.16:

Das Ende $\frac{\varepsilon}{2}$ ist positiv.

Beweis:

Es seien $H := \varepsilon \vee \omega, L := \perp(\infty, H), q = H \wedge L$. Dann gehört L außer dem Ende ∞ gemäß 3.4.5 dem Ende $\frac{\varepsilon}{2}$ an. Angenommen, es gibt einen gemeinsamen Punkt p von $\varepsilon \vee \frac{\varepsilon}{2}$ und U . Dann ist $p \neq q$, denn sonst wäre $p = q$ gemeinsamer Punkt von H und U . Außerdem gilt $\iota_p(\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon, \iota_p(\infty) = \omega$. Insgesamt ist somit $\iota_p(L) = \iota_p(\frac{\varepsilon}{2} \vee \infty) = \varepsilon \vee \omega = H$, d.h. $q \neq p$ ist Fixpunkt von ι_p . Widerspruch! \square

Korollar 3.4.17:

Ein Ende α ist positiv genau dann, wenn $\frac{\alpha}{2}$ positiv ist.

Beweis:

Mit dem Distributivgesetz gilt $\alpha = \alpha \cdot \varepsilon = \alpha \cdot (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt $\alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha}{2}$ nach 3.4.5, und mit 3.4.16 und der Vorzeichenkonvention die Behauptung. \square

Satz 3.4.18:

Für zwei positive Enden α, β ist auch $\alpha + \beta$ positiv.

Beweis:

Für $\alpha = \beta$ ist $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, daher gilt dann die Aussage nach 3.4.17. Sei also $\alpha \neq \beta$. Es seien A, B die Verbindungen von α, β mit ∞ , G das Lot von ∞ aus auf die Verbindung $\alpha \vee \beta$, und γ das von ∞ verschiedene Ende von G . Weiter sei C die Gerade mit $\sigma_C = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_B$, d.h. das von ∞ verschiedene Ende von C ist $\alpha + \beta$. Nun gilt $\sigma_G(A) = B$ und daher $\sigma_C = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_{\sigma_G(A)} = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_G \circ \sigma_A \circ \sigma_G$ nach 2.9.3. Weil A, G und U im Büschel liegen, folgt aus 2.9.18 und 2.9.3 weiter $\sigma_C = \sigma_A \circ \sigma_A \circ \sigma_G \circ \sigma_U \circ \sigma_G = \sigma_G \circ \sigma_U \circ \sigma_G = \sigma_{\sigma_G(U)}$. Daraus ergibt sich zunächst $C = \sigma_G(U)$; ferner bedeutet dies $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Es wird gezeigt, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ positiv ist; die Behauptung folgt dann aus 3.4.17. Wegen $C = (\alpha + \beta) \vee \infty = \sigma_G(U)$ ist $\sigma_G(\omega) = \alpha + \beta$. Da ferner $\sigma_G(\alpha) = \beta$ gilt, ist G gemeinsames Lot der Geraden $\alpha \vee \beta$ und $\omega \vee (\alpha + \beta)$; die Lotfußpunkte seien l_1, l_2 . Wegen $\alpha \vee \beta \neq \omega \vee (\alpha + \beta)$ ist $l_1 \neq l_2$; sei $q := m(l_1, l_2)$. Dann gilt $\iota_q(\alpha \vee \beta) = \omega \vee (\alpha + \beta)$, und somit insbesondere $\iota_q(\beta) \in \{\omega, \alpha + \beta\}$. Wegen $q \in G$ ist $\iota_q(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \infty$.

Falls $\iota_q(\beta) = \omega$ gilt, so folgt $\iota_q(\beta \vee \frac{\alpha+\beta}{2}) = \omega \vee \infty = U$. Das Lot von q auf $\beta \vee \frac{\alpha+\beta}{2}$ ist Fixgerade von ι_q und daher auch senkrecht auf U ; also haben $\beta \vee \frac{\alpha+\beta}{2}$ und U keinen Punkt gemeinsam. Weil β positiv ist, folgt aus 3.4.3, dass auch $\frac{\alpha+\beta}{2}$ positiv ist.

Falls $\iota_q(\beta) = \alpha + \beta$ gilt, so folgt $\iota_q(\beta \vee \frac{\alpha+\beta}{2}) = (\alpha + \beta) \vee \infty$, und durch Anwenden von σ_G auf beiden Seiten $\sigma_G \circ \iota_q(\beta \vee \frac{\alpha+\beta}{2}) = \sigma_G((\alpha + \beta) \vee \infty) = U$. Nach 2.9.6 kann man ι_q und σ_G vertauschen. Dann ergibt sich daraus $\iota_q(\alpha \vee \frac{\alpha+\beta}{2}) = \iota_q \circ \sigma_G(\beta \vee \frac{\alpha+\beta}{2}) = U$. Dies bedeutet wie im vorherigen Abschnitt, dass die Gerade $\alpha \vee \frac{\alpha+\beta}{2}$ mit U keinen Punkt gemeinsam hat. Weil α positiv ist, folgt daraus auch hier mit Hilfe von 3.3.4, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ positiv ist. \square

Aus der Beziehung $(-\varepsilon) \cdot \rho = -\rho$ für ein positives Ende ρ gemäß 3.4.12 folgt $-\varepsilon \cdot \mathbb{K}^+ = \mathbb{K}^-$. Mit 3.4.18 ergibt sich nun, dass der Endenkörper \mathbb{K} angeordnet werden kann, da die Teilmenge \mathbb{K}^+ der positiven Enden einen Positivbereich bildet. Auch in [1] (§ 15.1) ergibt sich die Anordnungsfähigkeit des Endenkörpers, und zwar wieder mit einem gruppentheoretischen Zugang, während man sie hier auf rein geometrische Weise erhält.

Feststellung 3.4.19:

Die Menge \mathbb{K} der von ∞ verschiedenen Enden bildet somit, versehen mit der oben dargestellten Addition und Multiplikation, einen angeordneten Körper, den sogenannten Endenkörper. Wegen der Existenz von Wurzeln aus positiven Elementen handelt es sich um einen euklidischen Körper.

Wir führen an dieser Stelle, angelehnt an Szász [13], eine neue Schreibweise für die positiven Enden ein.

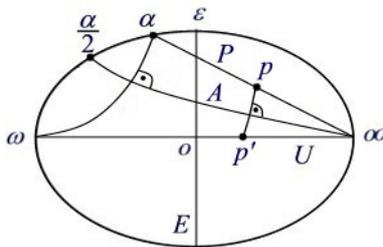
Neue Notation 3.4.20:

Im Folgenden wird die Verknüpfung der Gruppe T_U der Translationen entlang U additiv geschrieben. Aufgrund von 2.8.6 gilt, dass es zu einer Translation $\tau \in T_U$ eine eindeutig bestimmte Translation $\theta \in T_U$ gibt mit $\theta \circ \theta = \tau$; wir schreiben $\frac{\tau}{2}$ für θ . Das Ende $\tau(\varepsilon)$ wird als $\varepsilon(\tau)$ notiert; die Enden ω, ε werden mit 0 bzw. 1 bezeichnet, entsprechend der Bedeutung dieser Elemente im Endenkörper \mathbb{K} .

Mit dieser neuen Notation lässt sich die Multiplikation zweier positiver Enden $\varepsilon(\tau_1)$ und $\varepsilon(\tau_2)$ gemäß 3.4.10 schreiben als $\varepsilon(\tau_1) \cdot \varepsilon(\tau_2) = \varepsilon(\tau_1 + \tau_2)$. Außerdem gilt $\varepsilon(\tau) \cdot \varepsilon(-\tau) = \varepsilon(\text{id}) = 1$. Die nach 3.4.10 existierende positive Quadratwurzel von $\varepsilon(\tau)$ ist $\varepsilon(\frac{\tau}{2})$.

3.5 Einführung von Koordinaten für einen Punkt

Es sei p ein Punkt. Dann kann dieser Punkt durch zwei Daten gekennzeichnet werden. Sei P die nach 2.9.14 existierende eindeutige Verbindungsgerade von p und ∞ . Diese Gerade gehört außer ∞ noch einem weiteren Ende α an. Weiter sei A die Verbindungsgerade von $\frac{\alpha}{2}$ und ∞ . Dann gilt $\sigma_A(P) = U$ und daher $p' := \sigma_A(p) \in U$, und es gibt eine eindeutige Translation τ entlang U mit $\tau(o) = p'$.



Durch die beiden Angaben τ, α ist der Punkt p eindeutig bestimmt. Weil diese aus einer Bewegung und einem Ende bestehen, nennen wir sie *gemischte Koordinaten von p* .

Satz 3.5.1:

Die Abbildung

$$\mathbb{K}^+ \times \mathbb{K} \rightarrow \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_0 > 0\}$$

$$(\xi, \alpha) \mapsto \left(\frac{\xi + \xi^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2\xi^{-1}, \frac{\xi - \xi^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2\xi^{-1}, \alpha\xi^{-1} \right)$$

ist eine Bijektion. Die Umkehrabbildung ist

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1}{x_0 - x_1}, \frac{x_2}{x_0 - x_1} \right).$$

Beweis:

Die genannten Tatsachen ergeben sich durch unmittelbare Rechnung. Dass bei der Umkehrabbildung tatsächlich $\frac{1}{x_0 - x_1} \in \mathbb{K}^+$ gilt, ergibt sich aus $x_0^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 > x_1^2$ und mit $x_0 > 0$. \square

Nach 3.4.11 ist die Abbildung

$$T_U \rightarrow \mathbb{K}^+, \tau \mapsto \varepsilon(\tau)$$

bijektiv. Dies bedeutet, dass es zu jedem Element $\xi \in \mathbb{K}^+$ eine eindeutige Translation τ entlang U gibt, so dass $\xi = \varepsilon(\tau)$ gilt.

Über die gemischten Koordinaten von Punkten ergibt sich damit und mit 3.5.1 eine bijektive Entsprechung zwischen den Punkten aus \mathcal{H} und den Vektoren $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3$ mit $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_0 > 0$; einem Punkt $x \in \mathcal{H}$ mit den gemischten Koordinaten (τ, α) entspricht dabei der Vektor mit den Koordinaten

$$x_0 = \frac{\varepsilon(\tau) + \varepsilon(\tau)^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2\varepsilon(\tau)^{-1}, x_1 = \frac{\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau)^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2\varepsilon(\tau)^{-1}, x_2 = \alpha\varepsilon(\tau)^{-1}, \quad (5.1)$$

und umgekehrt ist

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{x_0 - x_1}, \quad \alpha = \frac{x_2}{x_0 - x_1}. \quad (5.2).$$

Das Tripel (x_0, x_1, x_2) nennt man die *Weierstraß'schen Koordinaten* des Punktes x . In Zukunft identifizieren wir x mit (x_0, x_1, x_2) und schreiben $x = (x_0, x_1, x_2)$. Mit dieser Identifikation wird die Punktmenge also

$$\mathcal{H} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_0 > 0\}.$$

Es handelt sich um eine Schale eines zweischaligen Hyperboloids.

Feststellung 3.5.2:

Ein Punkt auf U hat die Gestalt $x = (x_0, x_1, 0)$, und es ist $\iota_o(x) = (x_0, -x_1, 0)$. Ferner gilt $o = (1, 0, 0)$.

Beweis:

Ein Punkt $x \in U$ hat die gemischten Koordinaten $(\tau, 0)$, wobei τ die Translation ist, die o auf x abbildet. Sei $\xi = \varepsilon(\tau)$; nach (5.1) gilt $x_0 = \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}, x_1 = \frac{\xi - \xi^{-1}}{2}, x_2 = 0$ für die Weierstraß'schen Koordinaten von x . Damit hat x die angegebene Gestalt. Nach 2.8.2 gilt $\tau \circ \iota_o(x) = \iota_o \circ \tau^{-1}(x) = o$; daraus folgt $\iota_o(x) = \tau^{-1}(o)$, und $\iota_o(x)$ hat die gemischten Koordinaten $(-\tau, 0)$. Nun ist $\varepsilon(-\tau) = \xi^{-1}$ gemäß 3.4.20; wieder aus (5.1) ergeben sich damit die Weierstraß'schen Koordinaten von $\iota_o(x)$ als $\left(\frac{\xi^{-1} + \xi}{2}, \frac{\xi^{-1} - \xi}{2}, 0\right) = (x_0, -x_1, 0)$. Für $x = o$ gilt zusätzlich $\tau = \text{id}$, und mit 3.4.20 folgt $o = (1, 0, 0)$. \square

3.6 Einführung von Koordinaten für eine Gerade

Zunächst folgen zwei Hilfssätze nach Hilbert [7] (Anhang III, § 2 und 3):

Satz 3.6.1:

Es seien $\alpha, \beta \neq \infty$ zwei Enden. Weiter seien $A = \alpha \vee \infty, B = \beta \vee \infty$. Dann gehört $\sigma_B(A)$ außer dem Ende ∞ noch dem Ende $2\beta - \alpha$ an.

Beweis:

Es sei $C = \sigma_B(A)$. Nach 3.3.5 gehört C auch dem Ende ∞ an; das von ∞ verschiedene Ende von C sei γ . Es wird $\gamma + \alpha = 2\beta$ gezeigt, woraus die Behauptung folgt. Es gilt $\sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_C = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_{\sigma_B(A)} = \sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_B \circ \sigma_A \circ \sigma_B$ nach 2.9.3. Weil A, B, U im Büschel liegen, ist $\sigma_U \circ \sigma_B \circ \sigma_A$ gemäß 2.9.18 involutorisch, und es folgt $\sigma_A \circ \sigma_U \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_U \circ \sigma_B$. Dies bedeutet $\alpha + \gamma = \beta + \beta$. \square

Satz 3.6.2:

Sei G eine Gerade durch o . Für die beiden Enden α, β von G gilt $\alpha \cdot \beta = -1$.

Beweis:

Gemäß den Festlegungen von Inversen bei der Addition bzw. Multiplikation in 3.4 gilt $\beta = \iota_o(\alpha) = \sigma_U \circ \sigma_E(\alpha) = \sigma_U\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha}$. \square

Nun wird nach dem Vorbild von Szász [13] die Gleichung einer Geraden entwickelt. Dazu betrachten wir zunächst eine Gerade G , deren Enden ξ, η von ∞ verschieden sind. Sei p ein beliebiger Punkt von G , dessen gemischte Koordinaten durch τ und α gegeben sind. Gemäß Abschnitt 3.5 geht dieser Punkt p durch die Spiegelung an der Geraden $\frac{\alpha}{2} \vee \infty$ und anschließende Anwendung der Translation $-\tau$ in den Ursprung o über. Unterzieht man die Gerade G dieser Transformation, so erhält man eine Gerade G' , die dann durch den Ursprung geht.

Die Enden ξ, η werden durch die Spiegelung an $\frac{\alpha}{2} \vee \infty$ nach 3.6.1 auf die Enden $\alpha - \xi, \alpha - \eta$ abgebildet. Unter der Translation $-\tau$ gehen diese Enden dann gemäß 3.4.13 (2) in die Enden $\varepsilon(-\tau)(\alpha - \xi), \varepsilon(-\tau)(\alpha - \eta)$ über. Dies sind dann die Enden von G' ; weil G' durch den Ursprung geht, gilt nach 3.6.2 die Beziehung

$$\varepsilon(-2\tau)(\alpha - \xi)(\alpha - \eta) = -1. \quad (6.1)$$

Diese Gleichung gilt also für jeden Punkt $p \in G = \xi \vee \eta$ mit den gemischten Koordinaten τ, α und stellt somit die Gleichung dieser Geraden in gemischten Koordinaten dar. Umgekehrt ist klar, dass jeder Punkt, dessen gemischte Koordinaten diese Gleichung erfüllen, auf der Geraden liegt. Wegen $(\alpha - \xi)(\alpha - \eta) = \xi\eta - (\xi + \eta)\alpha + \alpha^2$ wird aus (6.1) durch Multiplikation mit $\varepsilon(\tau)$ die Gleichung

$$\xi\eta\varepsilon(-\tau) - (\xi + \eta)\alpha\varepsilon(-\tau) + \alpha^2\varepsilon(-\tau) + \varepsilon(\tau) = 0. \quad (6.2)$$

Verwendet man die Gleichungen (5.2), welche den Zusammenhang zwischen den gemischten Koordinaten und den Weierstraß'schen Koordinaten darstellen, so wird aus (6.2) mit $\varepsilon(-\tau) = \varepsilon(\tau)^{-1}$

$$\xi\eta(x_0 - x_1) - (\xi + \eta)x_2 + x_0 + x_1 = 0.$$

Durch Umformen erhält man: eine Gerade G mit den von ∞ verschiedenen Enden ξ, η kann in Weierstraß'schen Koordinaten durch die Gleichung

$$(\xi\eta + 1)x_0 - (\xi\eta - 1)x_1 - (\xi + \eta)x_2 = 0 \quad (6.3)$$

dargestellt werden.

Sei nun G eine Gerade, die dem Ende ∞ angehört; das zweite Ende sei η . Die Gleichung für die gemischten Koordinaten der Punkte auf G lautet offensichtlich $\eta = \alpha$ bzw. $(\alpha - \eta)\varepsilon(-\tau) = 0$. Wieder mit den Gleichungen (5.2) ergibt diese Beziehung

$$x_2 - \eta(x_0 - x_1) = 0.$$

Durch Umformen ergibt sich: eine Gerade G , die das Ende η mit dem Ende ∞ verbindet, kann in Weierstraß'schen Koordinaten durch die Gleichung

$$\eta x_0 - \eta x_1 - x_2 = 0 \quad (6.4)$$

dargestellt werden. Mit

$$u_0 := \frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta}, u_1 := \frac{\xi\eta-1}{\xi-\eta}, u_2 := \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta} \quad (6.5)$$

falls $G = \xi \vee \eta$, $\xi, \eta \neq \infty$, bzw.

$$u_0 := \eta, u_1 := \eta, u_2 := 1 \quad (6.6)$$

falls $G = \eta \vee \infty$, ergeben die Gleichungen (6.3) bzw. (6.4): eine Gerade G ist in Weierstraß'schen Koordinaten in der "Normalform"

$$u_0 x_0 - u_1 x_1 - u_2 x_2 = 0 \quad (6.7)$$

darstellbar. Für die Koeffizienten u_0, u_1, u_2 gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = -1. \quad (6.8)$$

Umgekehrt stellt jede Gleichung der Form (6.7) mit der Eigenschaft (6.8) eine Gerade dar. Denn für gegebene Koordinaten $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{K}^3$ mit der Eigenschaft (6.8) ergeben sich aus den Gleichungen (6.5) und (6.6)

$$\xi = \frac{u_2+1}{u_0-u_1}, \eta = \frac{u_2-1}{u_0-u_1}, \quad (6.9)$$

wenn $u_0 \neq u_1$ gilt. Im Falle $u_0 = u_1$ ergibt sich $u_2 = \pm 1$ aus (6.8). Dann folgt

$$\xi = \infty, \eta = u_0, \quad (6.10)$$

wenn $u_2 = 1$. Für $u_2 = -1$ folgt

$$\xi = -u_0, \eta = \infty. \quad (6.11)$$

Aus dem Tripel $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{K}^3$ ergeben sich also wieder die Enden ξ, η , womit man die obigen Rechnungen in umgekehrter Reihenfolge vollziehen kann. Die Gleichung (6.7) stellt somit die Gerade $\xi \vee \eta$ dar, deren Enden ξ, η sich gemäß (6.9) - (6.11) unter Einbeziehung von (6.8) ergeben.

Das Tripel $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{K}^3$ nennen wir die *Weierstraß'schen Koordinaten* der Geraden G , und wir schreiben $G = [u] = [u_0, u_1, u_2]$. Diese Koordinaten sind bis auf das Vorzeichen bestimmt; vertauscht man die Enden ξ, η , so ergibt sich das Tripel $(-u_0, -u_1, -u_2) \in \mathbb{K}^3$, welches jedoch die gleiche Gerade darstellt.

3.7 Das Minkowski-Produkt; Lorentzmatrizen

Definition 3.7.1:

Wir definieren auf \mathbb{K}^3 eine symmetrische Bilinearform μ sowie die zugehörige quadratische Form q auf folgende Weise: zu $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^3$ sei

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &:= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2, \\ q(x) &:= \mu(x, x). \end{aligned}$$

Die Bilinearform $\mu(x, y)$ wird Minkowski-Produkt genannt.

Bemerkung: Das Minkowski-Produkt lässt sich mit Hilfe des Standard-Skalarprodukts $\langle x, y \rangle =$

$x^t y$ in der Form $\mu(x, y) = \langle x, Jy \rangle$ darstellen mit der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für einen Punkt $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{H}$ gilt $q(x) = 1, x_0 > 0$; für eine Gerade $G = [u] = [u_0, u_1, u_2]$ lässt sich die Gleichung (6.8) in der Form $q(u) = -1$ schreiben. Liegt der Punkt $x \in \mathcal{H}$ auf der Geraden $G = [u]$, so gilt $\mu(u, x) = 0$ gemäß Gleichung (6.7).

Es folgt eine Definition, die sich als wichtig herausstellt in Zusammenhang mit den Bewegungen der hyperbolischen Ebene.

Definition 3.7.2:

Eine 3×3 -Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ über \mathbb{K} mit der Eigenschaft

$$\mu(Ax, Ay) = \mu(x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{K}^3$$

heißt Lorentz-Matrix.

Feststellung 3.7.3:

A ist eine Lorentz-Matrix genau dann, wenn $A^t J A = J$. Insbesondere gilt $\det(A) = \pm 1$.

Beweis:

A ist eine Lorentz-Matrix

$$\Leftrightarrow \forall x, y : \langle Ax, JAy \rangle = \langle x, Jy \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y : \langle x, A^t J A y \rangle = \langle x, Jy \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y : \langle x, (A^t J A - J)y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow A^t J A - J = 0, \text{ da das Standard-Skalarprodukt } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ nicht-ausgeartet ist.}$$

Weiter gilt $1 = \det(J) = \det(A^t J A) = \det(A^t) \det(J) \det(A) = (\det(A))^2$, und deshalb $\det(A) = \pm 1$. \square

Durch Umformung ergibt sich aus 3.7.3 die

Folgerung 3.7.4:

Für eine Lorentz-Matrix A ist $A^{-1} = J A^t J$ und $A J A^t = J$.

Die Lorentz-Matrizen bilden offensichtlich eine Gruppe, die sog. *Lorentzgruppe*.

Satz 3.7.5:

Es seien $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^3$ zwei Vektoren mit $q(x) = q(y) = 1, x_0, y_0 > 0$. Dann ist $\langle x, y \rangle$ positiv.

Beweis:

Die Beweisführung erfolgt angelehnt an Beardon [3] (§ 3.7). Nach Voraussetzung ist

$$x_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}, y_0 = \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}. \quad (7.1)$$

Ferner ist $\langle x, y \rangle = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \geq x_0 y_0 - |x_1 y_1 + x_2 y_2| \geq x_0 y_0 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$,

letzteres nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Mit (7.1) ergibt sich die Behauptung. \square

Satz 3.7.6:

Die Lorentz-Matrizen mit der Eigenschaft $a_{00} > 0$ bilden eine Untergruppe der Lorentzgruppe.

Beweis:

Es seien $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$, $B = (b_{ij})_{i,j=0,1,2}$ zwei Lorentz-Matrizen mit $a_{00} > 0$, $b_{00} > 0$. Sei $a = (a_{00}, a_{01}, a_{02})$ der erste Zeilenvektor von A , $b = (b_{00}, b_{10}, b_{20})$ der erste Spaltenvektor von B . Nach 3.7.4 ist auch A^t eine Lorentz-Matrix, daher gilt $q(a) = q(A^t(e_1)) = q(e_1) = 1$, $q(b) = q(B(e_1)) = q(e_1) = 1$. Für $C = A \cdot B = (c_{ij})_{i,j=0,1,2}$ gilt nun $c_{00} = \langle a, b \rangle$. Mit 3.7.5 folgt $c_{00} > 0$, und C hat ebenfalls die gewünschte Eigenschaft. Wegen $A^{-1} = JA^tJ$ nach 3.7.4 gilt dies auch für die inverse Matrix. \square

3.8 Möbiustransformationen; Transformation von Geraden

Für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{K}$ mit $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \neq 0$ ist die Abbildung $T : \overline{\mathbb{K}} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$, die durch

$$T(\zeta) := \frac{\alpha_1\zeta + \alpha_2}{\alpha_3\zeta + \alpha_4} \text{ für } \zeta \neq \infty \text{ und } \alpha_3\zeta + \alpha_4 \neq 0,$$

$$T(\zeta) := \infty \text{ für } \zeta \neq \infty \text{ und } \alpha_3\zeta + \alpha_4 = 0,$$

$$T(\infty) := \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \text{ für } \alpha_3 \neq 0,$$

$$T(\infty) := \infty \text{ für } \alpha_3 = 0.$$

definiert wird, eine Bijektion. Die so definierten Bijektionen werden *gebrochen lineare Transformationen* von $\overline{\mathbb{K}}$ oder auch *Möbiustransformationen* genannt. Auch in den Sonderfällen wird in Zukunft, wie allgemein üblich, einfach $\frac{\alpha_1\zeta + \alpha_2}{\alpha_3\zeta + \alpha_4}$ statt $T(\zeta)$ geschrieben.

Wir bezeichnen die Menge aller Möbiustransformationen mit \mathcal{M} . Die Abbildung

$$GL_2\mathbb{K} \rightarrow \mathcal{M} : \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\alpha_1\zeta + \alpha_2}{\alpha_3\zeta + \alpha_4}$$

ist ein Homomorphismus, wovon man sich leicht überzeugt; damit ergibt sich, dass die Möbiustransformationen mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bilden, die sog. *Möbiusgruppe*. Wir werden nun den Zusammenhang zwischen den Bewegungen der hyperbolischen Ebene und den Möbiustransformationen studieren.

Vorbemerkung zu Satz 3.8.1:

Zwei Bewegungen, welche drei Enden gleich abbilden, sind gleich.

Beweis der Vorbemerkung:

Es seien $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ drei Enden und β, φ zwei Bewegungen mit $\beta(\zeta_i) = \varphi(\zeta_i) =: \zeta'_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Sei a der Lotfußpunkt des von ζ_3 aus auf $\zeta_1 \vee \zeta_2$ gefällten Lotes; entsprechend sei a' der Lotfußpunkt des von ζ'_3 aus auf $\zeta'_1 \vee \zeta'_2$ gefällten Lotes. Durch zyklische Vertauschung der Indizes 1,2,3 erhalten wir auch die Punkte b, b' sowie c, c' . Dann sind a, b, c nichtkollinear, denn bei Spiegelung an $a \vee \zeta_3$ wird b auf c abgebildet und umgekehrt; lägen a, b, c auf einer Geraden H , so hieße dies $H \perp a \vee \zeta_3$, d.h. $H = \zeta_1 \vee \zeta_2$ und somit wäre z.B. $b \in \zeta_1 \vee \zeta_2$. Dies ist unmöglich.

Es folgt $\beta(a) = a' = \varphi(a), \beta(b) = b' = \varphi(b), \beta(c) = c' = \varphi(c)$, d.h. die Bilder dreier nicht-kollinearer Punkte unter β und φ stimmen überein. Nach 2.9.1' gilt $\beta = \varphi$.

Satz 3.8.1:

Eine Bewegung induziert auf der Menge $\overline{\mathbb{K}}$ der Enden eine Möbiustransformation, und die Abbildung

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M} : \beta \mapsto \beta|_{\overline{\mathbb{K}}}$$

ist ein Isomorphismus der Bewegungsgruppe \mathcal{B} auf die Gruppe \mathcal{M} der Möbiustransformationen.

Beweis:

Zunächst sei T eine gebrochen lineare Transformation von $\overline{\mathbb{K}}$. Es wird gezeigt, dass eine eindeutige Bewegung β existiert mit $\beta|_{\overline{\mathbb{K}}} = T$. Da jede solche Transformation T sich aus endlich vielen Transformationen der Gestalt $\zeta \mapsto \kappa \cdot \zeta, \zeta \mapsto \zeta + \lambda, \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ mit $\kappa, \lambda \neq 0, \infty$ erzeugen lässt, wird die Existenz von β für diese drei Arten von Transformationen gezeigt.

Sei zunächst κ ein positives Ende. Dann geht das Ende ζ gemäß 3.4.10, 3.4.13 und der Vorzeichenkonvention der Multiplikation durch eine Translation τ in das Ende $\kappa \cdot \zeta$ über. Dabei ist τ die Translation, die den Ursprung o in den Lotfußpunkt des von κ aus auf U gefällten Lotes überführt. Wenn κ negativ ist, so vollzieht die Bewegung $\sigma_U \circ \tau$ das Erwünschte.

Zu einem Ende $\lambda \neq \infty$ gibt es nach 3.4.6 eine Drehung δ_λ um ∞ mit $\delta_\lambda(0) = \lambda$; diese bildet das Ende ζ auf das Ende $\zeta + \lambda$ ab.

Nach 3.4.9 bildet die Spiegelung σ_E das Ende ζ auf das Ende $\frac{1}{\zeta}$ ab.

Somit ist die Existenz einer Bewegung β nachgewiesen, die auf den Enden die Transformation T induziert. Diese Bewegung β ist nach der Vorbemerkung eindeutig bestimmt.

Nun ist noch zu zeigen, dass jede beliebige Bewegung φ auf $\overline{\mathbb{K}}$ eine gebrochen lineare Transformation induziert. Da die Gruppe der Möbiustransformationen bekanntlich dreifach transitiv ist, existiert eine Möbiustransformation T mit $T(0) = \varphi(0), T(1) = \varphi(1), T(\infty) = \varphi(\infty)$. Wie oben gezeigt, existiert eine Bewegung β mit $\beta|_{\overline{\mathbb{K}}} = T$. Insbesondere werden die Enden $0, 1, \infty$ durch β und φ gleich abgebildet. Aus der Vorbemerkung folgt $\varphi = \beta$. \square

Bemerkung: Der in 3.8.1 gezeigte Sachverhalt, dass die Bewegungsgruppe \mathcal{B} der hyperbolischen Ebene isomorph zur Gruppe \mathcal{M} der Möbiustransformationen ist, wird auch ähnlich in Nöbeling [10] (V, § 5 und 6) und auch in Karzel/Sörensen/Windelberg [8] (VI, § 27 und 28) bewiesen.

Nun sei $G = [u] = [u_0, u_1, u_2]$ eine Gerade mit den Enden ξ, η ; zunächst gelte $\xi, \eta \neq \infty$. Wir betrachten das Bild dieser Geraden unter einer Bewegung; diese induziert gemäß 3.8.1 eine gebrochen lineare Transformation, welche auf den Enden der Geraden G wirkt. Wir beschränken uns im Folgenden wieder auf die Transformationen der Gestalt $\zeta \mapsto \kappa \cdot \zeta, \zeta \mapsto \zeta + \lambda, \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$.

Bei der Transformation $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ sind $\frac{1}{\xi}, \frac{1}{\eta}$ die Enden der Bildgeraden G' . Für $\xi, \eta \neq 0, \infty$ ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (6.5) für die Weierstraß'schen Koordinaten $[u'] = [u'_0, u'_1, u'_2]$ der Bildgeraden dann

$$\begin{aligned}
u'_0 &= \frac{1/\xi\eta+1}{1/\xi-1/\eta} = \frac{1+\xi\eta}{\eta-\xi} = -u_0, \\
u'_1 &= \frac{1/\xi\eta-1}{1/\xi-1/\eta} = \frac{1-\xi\eta}{\eta-\xi} = u_1, \\
u'_2 &= \frac{1/\xi+1/\eta}{1/\xi-1/\eta} = \frac{\eta+\xi}{\eta-\xi} = -u_2,
\end{aligned} \tag{8.1}$$

d.h. $u' = A \cdot u$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist offensichtlich eine Lorentz-Matrix.

Falls eines der beiden Enden ξ, η gleich 0 oder ∞ ist, so gelten die Gleichungen (8.1) auch. Sei z.B. $\xi = \infty$. Dann sind $0, \frac{1}{\eta}$ die Enden der Bildgeraden G' . Nach den Gleichungen (6.6) ist $u_0 = \eta, u_1 = \eta, u_2 = 1$. Unter Verwendung der Gleichungen (6.5) erhält man dann ebenfalls $u'_0 = \frac{1}{-1/\eta} = -u_0, u'_1 = \frac{-1}{-1/\eta} = u_1, u'_2 = \frac{1/\eta}{-1/\eta} = -u_2$.

Im Falle $\xi = 0$ sind $\infty, \frac{1}{\eta}$ die Enden der Bildgeraden G' . Nach den Gleichungen (6.5) ist $u_0 = \frac{1}{-\eta}, u_1 = \frac{1}{\eta}, u_2 = -1$. Aus den Gleichungen (6.6) ergibt sich dann auch hier $u'_0 = \frac{1}{\eta} = -u_0, u'_1 = \frac{1}{\eta} = u_1, u'_2 = 1 = -u_2$.

Nun gelte wieder $\xi, \eta \neq 0, \infty$. Unter der Transformation $\zeta \mapsto \kappa \cdot \zeta$ sind $\kappa \cdot \xi, \kappa \cdot \eta$ die Enden der Bildgeraden G' . Für die Weierstraß'schen Koordinaten $[u] = [u'_0, u'_1, u'_2]$ der Bildgeraden gilt dann

$$\begin{aligned}
u'_0 &= \frac{\kappa^2 \xi \eta + 1}{\kappa \cdot (\xi - \eta)}, \\
u'_1 &= \frac{\kappa^2 \xi \eta - 1}{\kappa \cdot (\xi - \eta)}, \\
u'_2 &= \frac{\kappa \cdot \xi + \kappa \cdot \eta}{\kappa \cdot \xi - \kappa \cdot \eta} = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta} = u_2,
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (6.5) ergeben sich durch Umformen

$$\xi - \eta = \frac{2}{u_0 - u_1}, \quad \xi \eta = \frac{u_0 + u_1}{u_0 - u_1}, \quad \xi + \eta = \frac{2u_2}{u_0 - u_1}. \tag{8.2}$$

Verwendet man dies hier, so erhält man

$$u'_0 = \frac{\kappa^2 \frac{u_0 + u_1}{u_0 - u_1} + 1}{\kappa \frac{2}{u_0 - u_1}} = \frac{\kappa^2 (u_0 + u_1) + u_0 - u_1}{2\kappa} = \frac{\kappa + 1/\kappa}{2} u_0 + \frac{\kappa - 1/\kappa}{2} u_1.$$

Analog ergibt sich

$$u'_1 = \frac{\kappa - 1/\kappa}{2} u_0 + \frac{\kappa + 1/\kappa}{2} u_1.$$

Insgesamt gilt hier somit $u' = A \cdot u$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1/\kappa}{2} & \frac{\kappa-1/\kappa}{2} & 0 \\ \frac{\kappa-1/\kappa}{2} & \frac{\kappa+1/\kappa}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ebenfalls eine Lorentz-Matrix, wovon man sich leicht überzeugt. Wie oben kann man zeigen, dass sich auch in der Situation, dass eines der Enden ξ, η gleich 0 oder ∞ ist, die Formeln unter Einbeziehung der Gleichungen (6.5) bzw. (6.6) als richtig erweisen.

Nun betrachten wir noch die Transformation $\zeta \mapsto \zeta + \lambda$. Für $\xi, \eta \neq 0, \infty$ sind dann $\xi + \lambda, \eta + \lambda$ die Enden der Bildgeraden G' , und für die Weierstraß'schen Koordinaten $[u'_0, u'_1, u'_2]$ der Bildgeraden ergibt sich

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{\xi\eta + \lambda \cdot (\xi + \eta) + \lambda^2 + 1}{\xi - \eta}, \\ u'_1 &= \frac{\xi\eta + \lambda \cdot (\xi + \eta) + \lambda^2 - 1}{\xi - \eta}, \\ u'_2 &= \frac{\xi + \eta + 2\lambda}{\xi - \eta}. \end{aligned}$$

Wieder mit den Umformungen (8.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{\frac{u_0 + u_1}{u_0 - u_1} + \lambda \frac{2u_2}{u_0 - u_1} + \lambda^2 + 1}{\frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_1}} = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) u_0 - \frac{\lambda^2}{2} u_1 + \lambda u_2, \\ u'_1 &= \frac{\frac{u_0 + u_1}{u_0 - u_1} + \lambda \frac{2u_2}{u_0 - u_1} + \lambda^2 - 1}{\frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_1}} = \frac{\lambda^2}{2} u_0 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) u_1 + \lambda u_2, \\ u'_2 &= \lambda u_0 - \lambda u_1 + u_2, \end{aligned}$$

d.h. $u' = A \cdot u$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier liegt eine Lorentz-Matrix vor. Wieder kann man zeigen, dass die Gleichungen auch dann gelten, wenn eines der Enden ξ, η gleich 0 oder ∞ ist.

Durch Transformationen der Gestalt $\zeta \mapsto \kappa \cdot \zeta, \zeta \mapsto \zeta + \lambda, \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ wird also eine Gerade $G = [u] = [u_0, u_1, u_2]$ in eine Gerade $G' = [u'] = [u'_0, u'_1, u'_2]$ übergeführt, deren Koordinaten darstellbar sind durch

$$u' = \varepsilon A u \quad (8.3)$$

mit einer Lorentz-Matrix A . Wegen $[u_0, u_1, u_2] = [-u_0, -u_1, -u_2]$ ist dabei $\varepsilon = \pm 1$ zulässig. Da jede gebrochen lineare Transformation eine Komposition obiger Transformationen ist, ergibt sich insgesamt die

Feststellung 3.8.2:

Sei $G = [u] = [u_0, u_1, u_2]$ eine Gerade und $G' = [u'] = [u'_0, u'_1, u'_2]$ das Bild der Geraden G unter einer Bewegung. Dann ergeben sich die Koordinaten von G' gemäß Gleichung (8.3) mit einer Lorentz-Matrix A .

Mit 3.7.2 ergibt sich die

Folgerung 3.8.3:

Es seien $G = [u], H = [v]$ zwei Geraden, und $G' = [u'], H' = [v']$ ihre Bildgeraden unter einer Bewegung. Dann gilt $\mu(u', v') = \pm \mu(u, v)$.

Satz 3.8.4:

Es seien $G = [u], H = [v]$ zwei verschiedene Geraden. Dann gilt $G \perp H$ genau dann, wenn $\mu(u, v) = 0$.

Vorüberlegung 1: Gemäß den Gleichungen (6.5) und (6.6) ist $U = [0, 0, \pm 1], E = [0, \pm 1, 0]$. Sei $L = [w]$ mit $w = (w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{K}^3, q(w) = -1$ eine Gerade. Genau dann ist $\mu((0, 0, 1), w) = 0$, wenn $w_2 = 0$, d.h. wenn $[w] = [w_0, w_1, 0]$ mit $w_0^2 - w_1^2 = -1$. Dann hat L mit $U = [0, 0, 1]$ den Punkt $(w_1, w_0, 0)$ gemeinsam.

Vorüberlegung 2: Falls L durch $o = (1, 0, 0)$ geht, so gilt $w_0 = 0$; damit ist $\mu((0, 0, 1), w) = 0$ gleichbedeutend mit $w_0 = w_2 = 0$, d.h. $L = [0, \pm 1, 0] = E \perp U$.

Beweis von Satz 3.8.4:

Sei β eine Bewegung mit $\beta(G) = U$. Sei $H' = \beta(H) = [v']$. Mit 3.8.3 ergibt sich zunächst $0 = \mu(u, v) = \pm \mu((0, 0, 1), v')$. Dies bedeutet nach Vorüberlegung 1, dass U, H' (und somit G, H) einen gemeinsamen Punkt haben.

Dann kann o.B.d.A. $\beta(G \wedge H) = 0$ angenommen werden; dies bedeutet, dass H' durch o geht. Aus der Vorüberlegung 2 ergibt sich nun $\mu(u, v) = 0 \Leftrightarrow U \perp H' \Leftrightarrow G \perp H$. \square

3.9 Transformation von Punkten

Satz 3.9.1:

Es seien $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^3$ zwei Vektoren mit $q(x) = q(y) = 1$. Dann gilt $\mu(x, y) \geq 1$, und $\mu(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Beweis:

Wegen $x_0, y_0 > 0$ gibt es Enden $\xi, \eta > 0$, so dass $\xi x_0 - \eta y_0 = 0$ gilt. Für $w := \xi x - \eta y$ ist dann $q(w) \leq 0$. Dabei gilt Gleichheit nur für $w = 0$; dies bedeutet, dass x und y linear abhängig sind. Aus der Bedingung $q(x) = q(y) = 1$ folgt dann $x = y$.

Nun gilt $\xi^2 - 2\xi\eta\mu(x, y) + \eta^2 = q(\xi x - \eta y) = q(w) \leq 0 \leq (\xi - \eta)^2 = \xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2$; daraus folgt die Behauptung. \square

Im Folgenden wird ermittelt, wie bei einer Bewegung β die Weierstraß'schen Koordinaten eines Punktes $x \in \mathcal{H}$ transformiert werden. Eine ähnliche Vorgehensweise ist in Szász [13] dargestellt. Es sei x' der Bildpunkt unter der Bewegung β ; ferner sei $G = [u]$ eine beliebige Gerade durch x . Nach Gleichung (6.7) gilt dann

$$\mu(u, x) = 0.$$

Die Gerade G wird durch β auf die Gerade $G' = [u']$ abgebildet. Gemäß Gleichung (8.3) gilt $u' = \varepsilon Au$ mit einer Lorentz-Matrix A , wobei $\varepsilon = \pm 1$ zulässig ist. Da x' auf G' liegt, gilt einerseits $\mu(u', x') = 0$.

Andererseits gilt aufgrund der Definition einer Lorentz-Matrix

$$\mu(u', \varepsilon Ax) = \mu(\varepsilon Au, \varepsilon Ax) = \mu(u, x) = 0.$$

Wegen $q(\varepsilon Ax) = q(x) = 1$ bedeutet dies, dass der Vektor εAx bei richtiger Wahl des Vorzeichens ε einen Punkt aus \mathcal{H} darstellt, der auf der Geraden G' liegt. Da G eine beliebige Gerade durch x darstellt, folgt, dass x' und εAx übereinstimmen müssen, d.h.

$$x' = \varepsilon Ax, \quad (9.1)$$

mit einer Lorentz-Matrix A .

Satz 3.9.2:

Es seien $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2), z = (z_0, z_1, z_2), w = (w_0, w_1, w_2) \in \mathcal{H}$ vier Punkte. Dann gilt:

- (1) $(x, y) \equiv (z, w) \Leftrightarrow \mu(x, y) = \mu(z, w)$
- (2) Zu jeder Lorentz-Matrix A , die gemäß (9.1) einen Punkt in seinen Bildpunkt transformiert, gehört ein festes Vorzeichen ε , das für alle Punkte gilt.

Beweis:

(1) " \Rightarrow ": Es sei $(x, y) \equiv (z, w)$. Nach 2.6.6 existiert eine Bewegung β mit $\beta(x) = z, \beta(y) = w$. Somit gilt, wie oben gesehen,

$$z = \varepsilon_z Ax,$$

mit $\varepsilon_z \in \{1, -1\}$ und einer Lorentz-Matrix A . Ebenso gilt mit $\varepsilon_w \in \{1, -1\}$

$$w = \varepsilon_w Ay.$$

Die Werte für $\varepsilon_z, \varepsilon_w$ sind bestimmt durch die Bedingung $z_0, w_0 > 0$. Weil A eine Lorentz-Matrix ist, ergibt sich $\mu(z, w) = \varepsilon_z \varepsilon_w \mu(Ax, Ay) = \varepsilon_z \varepsilon_w \mu(x, y)$; weil aber sowohl $\mu(z, w)$ als auch $\mu(x, y)$ nach 3.9.1 positiv sind, folgt $\varepsilon_z \varepsilon_w = 1$, dies zeigt $\varepsilon_z = \varepsilon_w$, und somit (2). Also gilt $\mu(x, y) = \mu(z, w)$, d.h. der Ausdruck $\mu(x, y)$ ist invariant unter Bewegungen.

(1) " \Leftarrow ": Es seien $G_1 = x \vee y, G_2 = z \vee w$; die beiden Enden von G_i seien mit $\xi_i, \eta_i (i = 1, 2)$ bezeichnet. Weiter seien $L_1 = \perp(x, G_1), L_2 = \perp(z, G_2)$; eines der beiden Enden von L_1 sei λ_1 , und eines der beiden Enden von L_2 sei λ_2 . Es gibt nun Möbiustransformationen T_i mit $T_i(\xi_i) = 0, T_i(\lambda_i) = 1, T_i(\eta_i) = \infty (i = 1, 2)$ aufgrund der dreifachen Transitivität der Möbiusgruppe; gemäß 3.8.1 existiert zu jeder Transformation T_i eine Bewegung β_i . Dann gilt $\beta_1(x) = \beta_2(z) = o$, und weiter $y' := \beta_1(y) \in U, w' := \beta_2(w) \in U$. Für die Weierstraß'schen Koordinaten von y', w' ergibt sich aus 3.5.2 dann $y' = (y'_0, y'_1, 0), w' = (w'_0, w'_1, 0)$.

Da die Ausdrücke $\mu(x, y)$ sowie $\mu(z, w)$ invariant sind unter Bewegungen, und unter Beachtung von $o = (1, 0, 0)$ nach 3.5.2 ergibt sich $\mu(x, y) = y'_0$ sowie $\mu(z, w) = w'_0$. Nach Voraussetzung gilt dann $y'_0 = w'_0$. Aus $q(y') = q(w') = 1$ folgt zudem $y_0'^2 - y_1'^2 = 1$ sowie $w_0'^2 - w_1'^2 = 1$; daraus ergibt sich $y_1'^2 = w_1'^2$, d.h. $y_1' = \pm w_1'$.

Fall 1: $y_1' = w_1'$. Dann ist $y' = w'$, und die Bewegung $\beta_2^{-1} \circ \beta_1$ führt x in den Punkt z und y in den Punkt w über; damit gilt $(x, y) \equiv (z, w)$.

Fall 2: $y_1' = -w_1'$. Nach 3.5.2 ist dann $y' = \iota_o(w')$, und die Bewegung $\beta_2^{-1} \circ \iota_o \circ \beta_1$ bildet x auf z und y auf w ab. \square

Zusatz 3.9.3:

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ eine Lorentz-Matrix, mit der gemäß der Gleichung (9.1) die Koordinaten eines Punktes $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{H}$ auf die Koordinaten des Bildpunktes $x' = (x'_0, x'_1, x'_2) \in \mathcal{H}$ bei einer Bewegung transformiert werden. Dann ist das Vorzeichen ε so zu wählen, dass $\varepsilon a_{00} > 0$ gilt.

Beweis:

Nach 3.9.2 (2) gilt das Vorzeichen ε für alle Punkte, somit unter anderem für den Punkt $o = (1, 0, 0)$. Der Bildpunkt von o unter der Bewegung hat dann nach Gleichung (9.1) die Koordinaten $(\varepsilon a_{00}, \varepsilon a_{10}, \varepsilon a_{20})$. Weil die erste Koordinate des Bildpunktes auch positiv sein muss, folgt die Behauptung. \square

Zusammenfassend ergibt sich die

Feststellung 3.9.4:

Sei $x \in \mathcal{H}$ ein Punkt, und x' das Bild des Punktes x unter einer Bewegung. Dann ergeben sich die Koordinaten von x' durch

$$x' = Ax$$

mit einer Lorentz-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$, in der $a_{00} > 0$ gilt.

Umgekehrt gilt der

Satz 3.9.5:

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ eine Lorentz-Matrix mit $a_{00} > 0$. Für einen Punkt $x \in \mathcal{H}$ gilt dann auch $Ax \in \mathcal{H}$, und die Abbildung $x \mapsto Ax$ ist eine Bewegung.

Beweis:

Es seien $x, y \in \mathcal{H}$ zwei Punkte. Weiter seien $x' = Ax = (x'_0, x'_1, x'_2)$ sowie $y' = Ay = (y'_0, y'_1, y'_2)$. Dann gilt zunächst $q(x') = q(y') = 1$, weil A eine Lorentz-Matrix ist. Für den Zeilenvektor $a = (a_{00}, a_{01}, a_{02})$ der Matrix A ergibt sich $q(a) = q(A^t(e_1)) = q(e_1) = 1$, weil A^t nach 3.7.4 auch eine Lorentz-Matrix ist. Mit $q(x) = 1, x_0 > 0$ und 3.7.5 folgt, dass $x'_0 = \langle a, x \rangle$ positiv ist. Der Schluss gilt analog für y'_0 . Somit gilt $x', y' \in \mathcal{H}$.

Weil die Matrix A das Minkowski-Produkt invariant lässt, gilt $\mu(x', y') = \mu(x, y)$, und mit 3.9.2 folgt $(x, y) \equiv (x', y')$. Damit hat man eine Bewegung. \square

3.10 Algebraisierung der hyperbolischen Ebenen

Es sei $x \in \mathbb{K}^3$ ein Vektor. Im Folgenden bezeichnen wir mit $x^\perp := \{y \in \mathbb{K}^3 \mid \mu(x, y) = 0\}$ den Orthogonalraum von x bzgl. μ . Da das Minkowski-Produkt nicht-ausgeartet ist, hat x^\perp im Falle $x \neq 0$ die Dimension 2.

Gemäß Abschnitt 3.6 kann eine Gerade $G = [u]$ mit $q(u) = -1$ aufgefasst werden als die Menge der Punkte $x \in \mathcal{H}$, welche die Bedingung $\mu(u, x) = 0$ erfüllen, d.h. die im Orthogonalraum u^\perp liegen. Sei umgekehrt v^\perp mit $q(v) < 0$ ein Orthogonalraum; ferner sei $v^* := \frac{v}{\sqrt{-q(v)}}$.

Dann ist $v^\perp = (v^*)^\perp$ und $q(v^*) = -1$.

Jede Gerade der hyperbolischen Ebene entspricht also genau einem zweidimensionalen Untervektorraum u^\perp , $u \in \mathbb{K}^3$, $q(u) < 0$ von \mathbb{K}^3 . Wir identifizieren von nun an die Menge dieser Untervektorräume mit der Geradenmenge \mathcal{G} und schreiben in Zukunft $G = u^\perp \in \mathcal{G}$ für eine Gerade G der hyperbolischen Ebene.

Satz 3.10.1 (Algebraisierungssatz für hyperbolische Ebenen):

(a) *Es sei \mathbb{K} ein kommutativer euklidischer Körper. Auf \mathbb{K}^3 sei eine symmetrische Bilinearform μ und die zugehörige quadratische Form q definiert durch*

$$\begin{aligned}\mu(x, y) &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2, \\ q(x) &= \mu(x, x),\end{aligned}$$

für $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^3$. Dann lässt sich folgendermaßen eine hyperbolische Ebene $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \epsilon)$ konstruieren:

(1) Die Punktmenge \mathcal{H} wird gebildet von den Vektoren $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3$ mit der Eigenschaft $q(x) = 1, x_0 > 0$.

(2) Die Geradenmenge \mathcal{G} wird gebildet von den zweidimensionalen Untervektorräumen u^\perp , $u \in \mathbb{K}^3$ mit der Eigenschaft $q(u) < 0$.

(3) Die Kongruenzrelation ist folgendermaßen gegeben: für vier Punkte $x, y, z, w \in \mathcal{H}$ gilt

$$(x, y) \equiv (z, w) \Leftrightarrow \mu(x, y) = \mu(z, w).$$

(4) Die Orthogonalitätsrelation ist folgendermaßen gegeben: für Geraden $u^\perp, v^\perp \in \mathcal{G}$ gilt

$$u^\perp \perp v^\perp \Leftrightarrow \mu(u, v) = 0.$$

(5) Die Inzidenzrelation ist die Elementrelation: ein Punkt $x \in \mathcal{H}$ inzidiert mit einer Geraden $u^\perp \in \mathcal{G}$ genau dann, wenn $x \in u^\perp$, d.h. $\mu(u, x) = 0$.

(6) Bewegungen sind die Transformationen

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, x \mapsto Ax$$

mit einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ aus der Gruppe der Lorentz-Matrizen mit $a_{00} > 0$.

(b) Umgekehrt ist jede hyperbolische Ebene wie in (a) darstellbar.

Die Überlegungen in den Abschnitten 2.1 - 3.9 zeigen (b). In diesem Abschnitt wird umgekehrt gezeigt, dass unter den Voraussetzungen (a) ein linearer Raum vorliegt, in dem die Axiome (VP), (ML), (PG), (DR) und (HA) gelten.

Hilfssatz 3.10.2:

Es sei $w \in \mathbb{K}^3$. Gilt $q(w) > 0$, so ist w^\perp negativ definit bzgl. q .

Beweis:

Angenommen, es gibt ein Element $v \in w^\perp$ mit $q(v) \geq 0$. Dann ist $v \neq w$, und es gilt einerseits $q \geq 0$ auf dem zweidimensionalen Untervektorraum $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w$. Andererseits ist q negativ defi-

nit auf dem zweidimensionalen Untervektorraum $\mathbb{K}(0, 0, 1) + \mathbb{K}(0, 1, 0)$, der aber mit $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w$ mindestens eindimensionalen Schnitt hat. Widerspruch! \square

Es seien nun $a, b \in \mathcal{H}$ zwei verschiedene Punkte. Wir zeigen zunächst, dass die beiden Punkte eine eindeutige Verbindungsgerade haben. Es gilt $a^\perp \cap b^\perp = \mathbb{K}u$ für einen von Null verschiedenen Vektor $u \in \mathbb{K}^3$, der nach 3.10.2 die Bedingung $q(u) < 0$ erfüllt. Damit ist u^\perp eine Verbindungsgerade von a und b , und sie ist eindeutig bestimmt.

Feststellung 3.10.3:

Die Punkte $a, b \in \mathcal{H}$ haben eine eindeutige Verbindungsgerade, nämlich

$$a \vee b = u^\perp$$

für einen Vektor $u \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ mit $a^\perp \cap b^\perp = \mathbb{K}u$. Es liegt somit ein linearer Raum vor.

Wir zeigen nun, dass das Axiom (ML) gilt. Es seien $a, b \in \mathcal{H}$ zwei Punkte; nach Definition gilt für einen Punkt $p \in \mathcal{H}$

$$(a, p) \equiv (p, b) \Leftrightarrow \mu(a, p) = \mu(p, b) \Leftrightarrow \mu(a - b, p) = 0. \quad (*)$$

Nach 3.9.1 ist $q(a - b) = q(a) - 2\mu(a, b) + q(b) = 2 - 2\mu(a, b) < 0$; der Vektor $v = a - b$ erfüllt also $q(v) < 0$, und $M(a, b) := v^\perp$ ist eine Gerade, deren Punkte genau die Punkte mit den in (*) genannten äquivalenten Eigenschaften sind.

Es wird noch gezeigt, dass $M(a, b)$ die Verbindungsgerade $a \vee b$ schneidet. Es ist $q(a + b) = q(a) + 2\mu(a, b) + q(b) = 2 + 2\mu(a, b) > 0$ gemäß 3.9.1; also ist $m = \frac{a+b}{\sqrt{2(\mu(a,b)+1)}}$ ein Punkt, der offensichtlich orthogonal zu $a^\perp \cap b^\perp$ ist, also entsprechend 3.10.3 auf $a \vee b$ liegt. Wegen $\mu(a + b, a - b) = q(a) - q(b) = 0$ liegt er auch auf $M(a, b)$. Damit ist gezeigt:

Feststellung 3.10.4:

Es seien $a, b \in \mathcal{H}$ zwei verschiedene Punkte. Die Menge der Punkte $p \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft $(a, p) \equiv (p, b)$ bildet die volle Punktreihe einer Geraden

$$M(a, b) = v^\perp \text{ mit } v = a - b.$$

Diese Gerade schneidet die Verbindungsgerade $a \vee b$ im Punkt

$$m = m(a, b) = \frac{a+b}{\sqrt{2(\mu(a,b)+1)}},$$

dem Mittelpunkt von a und b . Es gilt somit das Axiom (ML).

Nun seien $a = (a_0, a_1, a_2), z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathcal{H}$ zwei verschiedene Punkte. Es wird die Existenz des Verdopplungspunktes $b = (b_0, b_1, b_2) \in \mathcal{H}$ von a bzgl. z mit $b \neq a$ gezeigt. Dies bedeutet, dass das Axiom (VP) gilt.

Wenn der Verdopplungspunkt b existiert, so gilt $a + b = \lambda z$ für ein Element $\lambda \neq 0$ aus \mathbb{K} nach 3.10.4, also $b = \lambda z - a$. Die Normierungsbedingung $q(b) = 1$ liefert $\lambda^2 - 2\lambda\mu(a, z) = 0$ und somit $\lambda = 2\mu(a, z)$. Es ergibt sich

$$b = 2\mu(a, z)z - a.$$

Wir nehmen dies nun als Ansatz für b und haben $b_0 > 0$ zu zeigen. Aus dem Ansatz ergibt sich $a_0 b_0 = 2\mu(a, z)z_0 a_0 - a_0^2$; ferner gilt

$$2\mu(a, z)z_0 a_0 = 2a_0^2 z_0^2 - 2a_0 a_1 z_0 z_1 - 2a_0 a_2 z_0 z_2.$$

Ergänzt man dies mit $-2a_1 a_2 z_1 z_2 + 2a_1 a_2 z_1 z_2$ und beachtet man $a_0^2 = 1 + a_1^2 + a_2^2$ bzw. $z_0^2 = 1 + z_1^2 + z_2^2$, so ergibt sich

$$2\mu(a, z)z_0 a_0 = a_0^2 z_0^2 - 2a_0 a_1 z_0 z_1 - 2a_0 a_2 z_0 z_2 - 2a_1 a_2 z_1 z_2 + 2a_1 a_2 z_1 z_2 + 1 + a_1^2 + a_2^2 + z_1^2 + a_1^2 z_1^2 + a_2^2 z_1^2 + z_2^2 + a_1^2 z_2^2 + a_2^2 z_2^2 = (a_0 z_0 - a_1 z_1 - a_2 z_2)^2 + (a_1 z_2 - a_2 z_1)^2 + a_0^2 + z_1^2 + z_2^2.$$

Damit folgt $a_0 b_0 = 2\mu(a, z)z_0 a_0 - a_0^2 > 0$, und daraus wegen $a_0 > 0$ auch $b_0 > 0$. Somit ist die Existenz eines Verdopplungspunktes gewährleistet.

Feststellung 3.10.5:

Für zwei verschiedene Punkte $a, z \in \mathcal{H}$ ist der Punkt

$$b = 2\mu(a, z)z - a$$

der Verdopplungspunkt von a bzgl. z ; somit gilt das Axiom (VP).

Nun seien $a, b, c, d \in \mathcal{H}$ vier Punkte mit der Eigenschaft $a \neq c, b \neq d, m(a, c) = m(b, d) = m$, d.h. es gelten

- (1) $\mu(a, m) = \mu(c, m)$,
- (2) $\mu(b, m) = \mu(d, m)$.

Es wird die Gültigkeit des Axioms (PG) nachgewiesen, d.h. es werden $(a, b) \equiv (c, d)$ und $(a, d) \equiv (b, c)$ gezeigt. Nach 3.10.4 gilt

- (3) $m = \frac{a+c}{\sqrt{2(\mu(a,c)+1)}}$,
- (4) $m = \frac{b+d}{\sqrt{2(\mu(b,d)+1)}}$.

Einsetzen von (4) in (1) liefert $\mu(a, b+d) = \mu(c, b+d)$ bzw.

$$(1') \quad \mu(a, b) - \mu(c, d) = \mu(b, c) - \mu(a, d).$$

Einsetzen von (3) in (2) liefert $\mu(b, a+c) = \mu(d, a+c)$ bzw.

$$(2') \quad \mu(a, b) - \mu(c, d) = \mu(a, d) - \mu(b, c).$$

Die rechten Seiten von (1') und (2') müssen somit gleich 0 sein; damit folgen

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= \mu(c, d), \\ \mu(a, d) &= \mu(b, c). \end{aligned}$$

Nach 3.9.2 heißt dies $(a, b) \equiv (c, d), (a, d) \equiv (b, c)$.

Weiter seien $a = (a_0, a_1, a_2), b = (b_0, b_1, b_2), p = (p_0, p_1, p_2) \in \mathcal{H}$ drei nichtkollineare Punkte. Es wird das Axiom (DR), d.h. die Existenz eines Punktes $p' = (p'_0, p'_1, p'_2) \in \mathcal{H}, p' \neq p$

nachgewiesen mit der Eigenschaft $(a, p) \equiv (a, p')$, $(b, p) \equiv (b, p')$.

Die beiden Kongruenzen bedeuten $\mu(a, p') = \mu(a, p)$, $\mu(b, p') = \mu(b, p)$, d.h. $\mu(a, p' - p) = 0 = \mu(b, p' - p)$. Den Fall $p' = p$ wollen wir ausschließen; es ergibt sich $p' - p \in a^\perp \cap b^\perp = \mathbb{K}u$ mit $q(u) < 0$ nach 3.10.2. Daraus folgt $p' = p + \lambda u$, $\lambda \neq 0$. Die Normierungsbedingung $q(p') = 1$ liefert $2\lambda\mu(p, u) + \lambda^2q(u) = 0$, d.h. $\lambda = -\frac{2\mu(p, u)}{q(u)}$ und damit

$$p' = p - \frac{2\mu(p, u)}{q(u)}u.$$

Wir nehmen dies als Ansatz für p' und zeigen nun noch $p'_0 > 0$. Aus dem Ansatz ergibt sich $p_0p'_0 = p_0^2 - \frac{2\mu(p, u)}{q(u)}p_0u_0$; eine analoge Rechnung wie beim Nachweis der Existenz des Verdopplungspunktes gemäß 3.10.5 führt unter Berücksichtigung von $p_0^2 = 1 + p_1^2 + p_2^2$ bzw. $u_0^2 = q(u) + u_1^2 + u_2^2$ zu

$$2\mu(p, u)p_0u_0 = (p_0u_0 - p_1u_1 - p_2u_2)^2 + (p_1u_2 - p_2u_1)^2 + q(u)p_0^2 + u_1^2 + u_2^2.$$

Unter Berücksichtigung von $q(u) < 0$ folgt damit $p_0p'_0 > 0$, und wegen $p_0 > 0$ auch $p'_0 > 0$. Ferner gilt $\mu(p, u) \neq 0$, weil a, b, p nichtkollinear sind, und damit $p \neq p'$.

Feststellung 3.10.6:

Zu drei nichtkollinearen Punkten $a, b, p \in \mathcal{H}$ existiert ein Punkt $p' \in \mathcal{H}$, $p' \neq p$ mit der Eigenschaft $(a, p) \equiv (a, p')$, $(b, p) \equiv (b, p')$, nämlich

$$p' = p - \frac{2\mu(p, u)}{q(u)}u$$

mit $u \in a^\perp \cap b^\perp \setminus \{0\}$. Es gilt somit das Axiom (DR).

Nun wird allgemein die gegenseitige Lage zweier Geraden untersucht. Bei deren Beschreibung spielt insbesondere das Minkowski-Produkt eine bedeutende Rolle. Weil dieses Produkt nicht invariant ist gegenüber der Multiplikation eines Vektors mit einem Element aus \mathbb{K} , ist es für die beiden folgenden Feststellungen 3.10.7 und 3.10.8 notwendig, die auftretenden Vektoren, mit denen Geraden beschrieben werden, zu normieren.

Es seien also $u^\perp, v^\perp \in \mathcal{G}$ zwei verschiedene Geraden für $u, v \in \mathbb{K}^3$ mit $q(u) = q(v) = -1$. Sei $x \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ mit $u^\perp \cap v^\perp = \mathbb{K}x$. Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $q(x) > 0$. Dann haben u^\perp und v^\perp den gemeinsamen Punkt $\pm \frac{x}{\sqrt{q(x)}}$. Dabei ist das Vorzeichen so zu wählen, dass die erste Koordinate positiv ist.

Aus $\mu(u, x) = 0 = \mu(v, x)$ folgt insbesondere $\mu(u - v, x) = 0 = \mu(u + v, x)$. Mit 3.10.2 ergibt sich $q(u - v) < 0$, $q(u + v) < 0$. Durch Umformung erhält man $-1 < \mu(u, v) < 1$.

Fall 2: $q(x) < 0$. Dann haben u^\perp und v^\perp das gemeinsame Lot x^\perp .

Wieder gilt $\mu(u - v, x) = 0 = \mu(u + v, x)$. Außerdem gilt $\mu(u - v, u + v) = q(u) - q(v) = 0$, d.h. $u + v, u - v$ und x bilden eine Orthogonalbasis von \mathbb{K}^3 . Wären $q(u + v), q(u - v)$ beide ≤ 0 , so wäre q negativ semidefinit. Somit folgt $q(u + v) > 0$ oder $q(u - v) > 0$, und durch Umformung $\mu(u, v) > 1$ oder $\mu(u, v) < -1$.

Fall 3: $q(x) = 0$. Dann gibt es keinen gemeinsamen Punkt und kein gemeinsames Lot von u^\perp und v^\perp , d.h. u^\perp und v^\perp sind unverbindbar. Es gilt $x, u \in x^\perp$; wegen $\dim x^\perp = 2$ folgt $x^\perp = \mathbb{K}u + \mathbb{K}x$. Weil v in x^\perp liegt, lässt sich somit v darstellen als $v = \xi u + \eta x$ mit $\xi, \eta \in \mathbb{K}$, die nicht beide gleich 0 sind. Damit ist $-1 = q(v) = \xi^2 q(u) + \mu(\xi u, \eta x) = -\xi^2$ wegen $u \in x^\perp$, also $\xi = \pm 1$. Daraus ergibt sich $\mu(u, v) = \mu(u, \pm u + \eta x) = \pm q(u) = \mp 1$.

Feststellung 3.10.7:

Es seien $u^\perp, v^\perp \in \mathcal{G}$ zwei verschiedene Geraden; o.B.d.A. gelte $q(u) = q(v) = -1$. Ferner sei $x \in u^\perp \cap v^\perp \setminus \{0\}$. Dann gibt es drei Fälle:

- (1) *Gilt $-1 < \mu(u, v) < 1$, so haben u^\perp und v^\perp den gemeinsamen Punkt $\pm \frac{x}{\sqrt{q(x)}}$. Dabei ist das Vorzeichen so zu wählen, dass die erste Koordinate von x positiv ist.*
- (2) *Gilt $\mu(u, v) < -1$ oder $\mu(u, v) > 1$, so haben u^\perp und v^\perp das gemeinsame Lot x^\perp .*
- (3) *Gilt $\mu(u, v) = 1$ oder -1 , so ist $q(x) = 0$. Dann haben u^\perp und v^\perp weder ein gemeinsames Lot noch einen gemeinsamen Punkt, d.h. sie sind unverbindbar.*

Weiterhin gelte $q(u) = -1$. Sei $p \in \mathcal{H}$ ein Punkt, der nicht auf der Geraden u^\perp liegt. Es wird gezeigt, dass es höchstens zwei Geraden durch p gibt, die mit u^\perp unverbindbar sind. Sei u'^\perp eine solche Gerade mit $q(u') = -1$. Dann gilt $u' \in p^\perp, \mu(u, u') = \pm 1$; o.B.d.A. sei $\mu(u, u') = 1$, andernfalls wird u' durch $-u'$ ersetzt.

Wegen $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K}p + p^\perp$ lässt sich u darstellen als $u = \xi p + u_\perp$ mit $u_\perp \in p^\perp, \xi \in \mathbb{K}$. Es ist dann $1 = \mu(u, u') = \mu(u_\perp, u')$, da $u' \in p^\perp$.

Sei u''^\perp mit $q(u'') = -1$ eine weitere Gerade mit den genannten Eigenschaften; o.B.d.A. gelte auch $\mu(u, u'') = 1$. Dann gilt wie oben $\mu(u_\perp, u'') = \mu(u, u'') = 1$ und damit $\mu(u_\perp, u'' - u') = 0$, d.h. $u'' - u' = \lambda v$ für $0 \neq v \in u_\perp^\perp \cap p^\perp, \lambda \in \mathbb{K}$. Aus 3.10.2 folgt $q(v) < 0$, weil p^\perp negativ definit bzgl. q ist.

Somit gilt $u'' = u' + \lambda v$. Die Normierungsbedingung $q(u'') = -1$ führt zu $-1 = q(u') + 2\lambda\mu(u', v) + \lambda^2 q(v)$ und damit zu $\lambda(2\mu(u', v) - \lambda q(v)) = 0$. Die Lösung $\lambda = 0$ führt zu $u'' = u'$; als zweite Lösung ergibt sich $\lambda = \frac{2\mu(u', v)}{q(v)}$.

Da es keine weiteren Lösungen gibt, gibt es also höchstens zwei Geraden durch p , die mit u^\perp unverbindbar sind. Die Existenz unverbindbarer Geraden wird nach 3.10.7 belegt durch die Geraden $(0, 0, 1)^\perp$ und $(1, 1, 1)^\perp$.

Feststellung 3.10.8:

Es gibt unverbindbare Geraden; zu einer Geraden $u^\perp \in \mathcal{G}$ und einem Punkt $p \in \mathcal{H}$, der nicht auf u^\perp liegt, gibt es höchstens zwei Geraden durch p , die mit u^\perp unverbindbar sind. Es gilt somit das Axiom (HA).

Bemerkung: Man kann sich fragen, welche Eigenschaften verloren gehen, wenn die Konstruktion einer Inzidenzstruktur entsprechend dem Algebraisierungssatz 3.10.1 über einem Körper durchgeführt wird, der kein euklidischer ist. Zwar existiert die Verbindungsgerade zweier Punkte weiterhin; auch ist der Verdopplungspunkt gemäß (VP) gewährleistet sowie der Punkt, der gemäß (DR) drei Punkte zu einem Drachen ergänzt. Auch die Parallelogrammeigenschaft (PG)

ist nach wie vor erfüllt.

Im Allgemeinen ist jedoch nicht mehr gewährleistet, dass ein eindimensionaler Untervektorraum aus dem positiven Kegel von q von einem Punkt x mit $q(x) = 1$ aufgespannt wird. Dies führt dazu, dass es durch einen Punkt p außerhalb einer Geraden G mehr als zwei mit G unverbindbare Geraden geben kann, was dem hyperbolischen Axiom (HA) widerspricht. Aus demselben Grund ist in 3.10.4 die Existenz des Mittelpunktes und damit das Axiom (ML) in Frage gestellt.

3.11 Winkel

Definition 3.11.1:

Eine Bewegung, die sich aus einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen zusammensetzt, nennen wir orientierungserhaltend.

Satz 3.11.2:

Die orientierungserhaltenden Bewegungen bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe. Eine Punktspiegelung ι_m ist eine orientierungserhaltende Bewegung.

Beweis:

Die erste Behauptung ist klar. Seien G, H zwei beliebige orthogonale Geraden durch m . Nach 2.6.2 gilt $\iota_m = \sigma_G \circ \sigma_H$, damit folgt die Behauptung. \square

Definition 3.11.3:

Es seien G, H zwei Geraden durch den Punkt p . Das geordnete Geradenpaar (G, H) heißt Winkel. Der Punkt p heißt Scheitel von (G, H) .

Weiter seien (G, H) bzw. (G', H') zwei Winkel mit den Scheiteln p bzw. p' . Dann heißen die beiden Winkel kongruent, wenn $\sigma_{\beta(G)} \circ \sigma_{\beta(H)} = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$ gilt für eine orientierungserhaltende Bewegung β mit $\beta(p) = p'$. Schreibweise: $(G, H) \equiv (G', H')$.

Bemerkung: Die Definition der Kongruenz von Winkeln ist unabhängig von der Wahl von β . Denn sei β' eine weitere orientierungserhaltende Bewegung mit $\beta'(p) = p'$. Für die Bewegung $\varphi := \beta \circ \beta'^{-1}$ gilt dann $\varphi(\beta'(G)) = \beta(G), \varphi(\beta'(H)) = \beta(H)$. Weil φ ebenfalls eine orientierungserhaltende Bewegung ist und den Fixpunkt p' hat, folgt aus 2.10.1 (2), dass φ eine Drehung um p' ist. Somit gilt $\beta' = \delta \circ \beta$ mit $\delta \in \Delta_{p'}$ und damit $\sigma_{\beta'(G)} \circ \sigma_{\beta'(H)} = \sigma_{\delta(\beta(G))} \circ \sigma_{\delta(\beta(H))} = \delta \circ \sigma_{\beta(G)} \circ \sigma_{\beta(H)} \circ \delta^{-1}$ nach 2.9.3. Weil die Drehungen um einen festen Punkt nach 2.10.1 (3) kommutieren, kann man δ und $\sigma_{\beta(G)} \circ \sigma_{\beta(H)}$ vertauschen, und es folgt $\sigma_{\beta'(G)} \circ \sigma_{\beta'(H)} = \sigma_{\beta(G)} \circ \sigma_{\beta(H)} = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$.

Korollar 3.11.4:

Die Winkelkongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Die Reflexivität $(G, H) \equiv (G, H)$ folgt sofort aus 3.11.3 mit $\beta = \text{id}$. Nun gelte $(G, H) \equiv (G', H')$, d.h. $\sigma_{\beta(G)} \circ \sigma_{\beta(H)} = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$ für eine orientierungserhaltende Bewegung β . Mit 2.9.3 ergibt sich $\beta \circ \sigma_G \circ \sigma_H \circ \beta^{-1} = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$, also $\sigma_G \circ \sigma_H = \beta^{-1} \circ \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'} \circ \beta = \sigma_{\beta^{-1}(G')} \circ \sigma_{\beta^{-1}(H')}$. Damit folgt $(G', H') \equiv (G, H)$. Gilt $(G, H) \equiv (G', H')$ und $(G', H') \equiv (G'', H'')$, so kann man auf analoge Weise zeigen, dass $(G, H) \equiv (G'', H'')$. \square

Satz 3.11.5:

Sei (G, H) ein Winkel mit dem Scheitel p . Dann existiert eine Gerade W durch p mit $\sigma_W(G) = H$. Für eine Gerade W' durch p gilt $\sigma_{W'}(G) = H$ genau dann, wenn $W' = W$ oder $W' \perp W$ gilt.

Beweis:

Für $G = H$ kann man $W = G$ wählen. Im Folgenden sei $G \neq H$. Es seien ξ_G, η_G bzw. ξ_H, η_H die Enden von G bzw. H . Dann existiert nach 3.3.12 eine Verbindungsgerade L von ξ_G und ξ_H . Weiter sei $W = \perp(p, L)$. Mit Hilfe von 2.9.14 ergibt sich $\sigma_W(G) = H$.

Sei nun W' eine Gerade mit $\sigma_{W'}(G) = H$. Für die Drehung $\sigma_W \circ \sigma_{W'}$ gilt dann $\sigma_W \circ \sigma_{W'}(G) = G$. Aus 2.10.2 folgt $\sigma_W \circ \sigma_{W'} \in \{\text{id}, \iota_p\}$, d.h. $W' = W$ oder $W \perp W'$ mit 2.6.3. \square

Satz 3.11.6:

Es gelte $\sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$ für Geraden G, H, G', H' durch p . Dann existiert eine Drehung δ um p mit $\delta(G) = G', \delta(H) = H'$.

Beweis:

Nach 3.11.5 existiert eine Gerade L durch p mit $\sigma_L(G) = G'$. Für die Drehung $\delta = \sigma_L \circ \sigma_G$ gilt dann $\delta(G) = G'$; mit Hilfe von 2.9.3 und 2.9.18 erhält man außerdem $\sigma_{\delta(H)} = \sigma_{\sigma_L \circ \sigma_G(H)} = \sigma_L \circ \sigma_G \circ \sigma_H \circ \sigma_G \circ \sigma_L = \sigma_L \circ \sigma_G \circ \sigma_L \circ \sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_{\sigma_L(G)} \circ \sigma_G \circ \sigma_H$. Wegen $\sigma_L(G) = G'$ und $\sigma_G \circ \sigma_H = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$ nach Voraussetzung ergibt sich $\sigma_{\delta(H)} = \sigma_{H'}$, d.h. $\delta(H) = H'$. \square

Korollar 3.11.7:

Es seien (G, H) bzw. (G', H') zwei Winkel mit den Scheiteln p bzw. p' . Genau dann, wenn $(G, H) \equiv (G', H')$ gilt, existiert eine orientierungserhaltende Bewegung β mit $\beta(G) = G', \beta(H) = H'$.

Beweis:

Zunächst gelte $(G, H) \equiv (G', H')$. Sei φ eine orientierungserhaltende Bewegung mit $\varphi(p) = p'$ und seien $G_1 = \varphi(G), H_1 = \varphi(H)$. Dann gilt $p' \in G_1, H_1$ und nach 3.11.3 und der anschließenden Bemerkung $\sigma_{G_1} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{G'} \circ \sigma_{H'}$. Nach 3.11.6 gibt es nun eine Drehung δ um p' mit $\delta(G_1) = G', \delta(H_1) = H'$. Da δ eine orientierungserhaltende Bewegung ist, gilt dies auch für $\beta := \delta \circ \varphi$, und offensichtlich ist $\beta(G) = G', \beta(H) = H'$.

Die umgekehrte Aussage gilt nach Definition 3.11.3. \square

Korollar 3.11.8:

Seien G_1, G_2, H Geraden durch p . Gilt $(G_1, H) \equiv (G_2, H)$, so folgt $G_1 = G_2$.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der Definition 3.11.3 und der anschließenden Bemerkung mit $\beta = \text{id}$. \square

Satz 3.11.9 ("Kongruenzsatz (www)"):

Es seien (a, b, c) und (a', b', c') zwei Dreiecke, $A = b \vee c, B = a \vee c, C = a \vee b, A' = b' \vee c', B' = a' \vee c', C' = a' \vee b'$. Ferner gelte $(A, B) \equiv (A', B'), (A, C) \equiv (A', C'), (B, C) \equiv (B', C')$. Dann kann man die beiden Dreiecke durch eine orientierungserhaltende Bewegung zur Deckung bringen.

Beweis:

Wegen $(B, C) \equiv (B', C')$ existiert nach 3.11.7 eine orientierungserhaltende Bewegung β mit $\beta(B') = B, \beta(C') = C$; dann ist auch $\beta(a') = a$. Wir betrachten nun $\beta(A') =: A_1$. Es ist $(A_1, B) = (\beta(A'), \beta(B')) \equiv (A', B')$; mit der Voraussetzung $(A', B') \equiv (A, B)$ ergibt sich $(A_1, B) \equiv (A, B)$ aufgrund der Transitivität der Winkelkongruenz nach 3.11.4, und analog $(A_1, C) \equiv (A, C)$.

Nun seien $b_1 := \beta(b') \in C, c_1 := \beta(c') \in B$; es ist dann $A_1 = b_1 \vee c_1$. Falls $b_1 = b$ oder $c_1 = c$, so gilt $A_1 = A$ nach 3.11.10, und die orientierungserhaltende Bewegung β bildet das Dreieck (a', b', c') auf das Dreieck (a, b, c) ab. Es sei also $b_1 \neq b$ und $c_1 \neq c$; dann gilt $A_1 \neq A$. Wir setzen $m_1 = m(b_1, b), m_2 = m(c_1, c)$. Nach 3.11.2 sind die Bewegungen ι_{m_1}, ι_{m_2} orientierungserhaltend.

Nach 3.11.3 gilt $(\iota_{m_1}(A), C) = (\iota_{m_1}(A), \iota_{m_1}(C)) \equiv (A, C) \equiv (A_1, C)$, und aus 3.11.8 folgt $\iota_{m_1}(A) = A_1$ wegen $b_1 \in \iota_{m_1}(A)$. Analog ergibt sich $\iota_{m_2}(A) = A_1$. Sei $L_1 = \perp(m_1, A)$. Dann ist $L_1 = \iota_{m_1}(L_1) \perp \iota_{m_1}(A) = A_1$, also ist L_1 ein gemeinsames Lot von A und A_1 . Analog ergibt sich, dass $L_2 = \perp(m_2, A)$ gemeinsames Lot von A und A_1 ist.

Wäre $L_1 \neq L_2$, so hätten wir ein Rechteck. Also gilt $L_1 = L_2$, d.h. $m_1 = m_2$. Wegen $m_1 \in C$ und $m_2 \in B$ folgt $m_1 = m_2 = a$ und $\beta(A') = A_1 = \iota_a(A)$; letzteres bedeutet $\beta(c') = c_1 = \iota_a(c), \beta(b') = b_1 = \iota_a(b)$. Wegen $\beta(a') = a = \iota_a(a)$ wird also das Dreieck (a', b', c') durch die orientierungserhaltende Bewegung $\iota_a \circ \beta$ auf das Dreieck (a, b, c) abgebildet. \square

3.12 Kollineationen

In diesem Kapitel werden alle Kollineationen einer hyperbolischen Ebene bestimmt. Sei \mathbb{K} ein euklidischer Körper; wir betrachten die zugehörige hyperbolische Ebene gemäß dem Algebraisierungssatz 3.10.1. Da \mathbb{K} im Allgemeinen Automorphismen zulässt, betrachten wir diese zunächst.

Satz 3.12.1:

Ein nichtidentischer Körperautomorphismus φ von \mathbb{K} definiert eine orthogonalitätserhaltende Kollineation mit der Punktabbildung

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, x = (x_0, x_1, x_2) \mapsto \varphi(x) := (\varphi(x_0), \varphi(x_1), \varphi(x_2)),$$

sowie der Geradenabbildung

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, u^\perp = (u_0, u_1, u_2)^\perp \mapsto (\varphi(u))^\perp := (\varphi(u_0), \varphi(u_1), \varphi(u_2))^\perp,$$

die keine Bewegung ist.

Beweis:

Zunächst ergibt sich $\mu(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(\mu(x, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^3$ aufgrund der Eigenschaften von φ . Sei nun u^\perp eine Gerade. Für Punkte $x \in u^\perp$ gilt dann $\mu(u, x) = 0$. Daraus ergibt sich $\mu(\varphi(u), \varphi(x)) = \varphi(0) = 0$. Dies bedeutet, dass φ eine Kollineation ist.

Sind zwei Geraden u^\perp und v^\perp orthogonal, so gilt $\mu(u, v) = 0$ und dann auch $\mu(\varphi(u), \varphi(v)) = \varphi(0) = 0$. Die Bildgeraden sind somit auch orthogonal zueinander.

Ist nun φ nichtidentisch, so gibt es ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\varphi(\lambda) \neq \lambda$. Dann gilt zunächst $\lambda \neq 1$. Man kann o.B.d.A. $\lambda > 1$ annehmen; denn im Fall $0 < \lambda < 1$ würde man λ durch λ^{-1} ersetzen; wäre λ negativ, so würde man $-\lambda$ nehmen. Für die Punkte $x = (1, 0, 0)$ und $y = (\lambda, 0, \sqrt{\lambda^2 - 1})$ ergibt sich $\mu(x, y) = \lambda \neq \varphi(\lambda) = \mu(\varphi(x), \varphi(y))$, d.h. es gibt eine Strecke, die nicht kongruent zur Bildstrecke ist. \square

Bemerkung: Aus den eben ausgeführten Betrachtungen folgt, dass zueinander kongruente Strecken auf zueinander kongruente Strecken abgebildet werden.

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass sich jede Kollineation als Produkt einer Bewegung und einer Kollineation darstellen lässt, die gemäß 3.12.1 durch einen Automorphismus von \mathbb{K} definiert wird. Dies wird auf zwei unterschiedliche Arten geschehen. Der erste Nachweis verwendet gängige Ergebnisse aus der Literatur. Alternativ dazu wird ein Weg aufgezeigt, wie sich der Nachweis ausschließlich mit Ergebnissen aus vergangenen Kapiteln dieser Arbeit ergibt.

Für den ersten Nachweis betrachten wir das Bündelmodell der projektiven Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_{\mathcal{P}})$ zum Vektorraum \mathbb{K}^3 , d.h. die Punkte sind die eindimensionalen Untervektorräume von \mathbb{K}^3 , die Geraden sind die zweidimensionalen Untervektorräume, oder äquivalent die Orthogonalräume von Vektoren $\neq 0$ (bezüglich des in 3.7.1 eingeführten Minkowski-Produkts μ).

Der angeordnete Körper \mathbb{K} ist bekanntlich in natürlicher Weise ein topologischer Körper (siehe z.B. Salzmann et al. [11], ch. 13, Bemerkung nach Bsp. 13.2). Nach Salzmann et al. [12] (ch. 1, Theorem 14.4 und anschließende Bemerkung) ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_{\mathcal{P}})$ eine topologische projektive Ebene.

Durch folgende kanonische Abbildung lässt sich nun die zu \mathbb{K} gehörige hyperbolische Ebene in die projektive Ebene einbetten: ein Punkt $x \in \mathcal{H}$ wird auf den Punkt $\mathbb{K}x$ abgebildet, und eine Gerade u^\perp der hyperbolischen Ebene wird mit der entsprechenden Geraden u^\perp der projektiven Ebene identifiziert.

Die Punkte der hyperbolischen Ebene werden dabei bijektiv auf die Punkte der projektiven Ebene abgebildet, die sich im "Innern" der Quadrik $Q := \{\mathbb{K}x \mid q(x) = 0\}$ befinden, d.h. auf die Punkte $\mathbb{K}x \in \mathcal{P}$ mit der (offenen) Eigenschaft $q(x) > 0$. Denn umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $\mathbb{K}x \in \mathcal{P}$ mit $q(x) = \varepsilon > 0$ den Punkt $\pm \frac{x}{\sqrt{q(x)}}$ in \mathcal{H} , wobei das Vorzeichen so gewählt werden muss, dass die erste Koordinate des Punktes positiv ist. Die Menge Q^+ der inneren Punkte bildet eine offene Menge; ihr Abschluss $\overline{Q^+}$ ist $\overline{Q^+} = Q^+ \cup Q$. Die Punkte einer hyperbolischen Geraden werden injektiv, aber nicht surjektiv auf Punkte einer projektiven Geraden abgebildet. Da die projektive Ebene eine topologische Ebene ist, ist auch auf jeder Geraden der Ebene eine Topologie gegeben. Ferner ist der Schnitt jeder Geraden von $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ mit Q^+ eine offene Menge ihrer Punktreihe.

Die Kollineationen der hyperbolischen Ebene können damit aufgefasst werden als bijektive Abbildungen von Q^+ auf sich, die Kollinearität in der projektiven Ebene erhalten. Mit den oben genannten Tatsachen sind die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes von Frank [5] erfüllt, gemäß dem diese Kollineationen sich auf die ganze projektive Ebene erweitern lassen.

Nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie werden Kollineationen der projekti-

ven Ebene durch semilineare Abbildungen induziert. Es folgt, dass jede Kollineation κ der hyperbolischen Ebene die Gestalt $\kappa = A\varphi$ besitzt mit einer linearen Abbildung A und einem Automorphismus φ des Körpers \mathbb{K} , der gemäß 3.12.1 eine orthogonalitätserhaltende Kollineation induziert. Der Automorphismus φ ist ordnungserhaltend, weil \mathbb{K} euklidisch ist; dies folgt aus $\varphi(\xi) = \varphi(\sqrt{\xi}\sqrt{\xi}) = \varphi(\sqrt{\xi})\varphi(\sqrt{\xi}) > 0$ für alle $\xi > 0$. Somit ist φ monoton und daher stetig, und damit auch die Kollineation κ .

Aufgrund der Stetigkeit von κ folgt nun $\kappa(\overline{Q^+}) = \overline{Q^+}$; da weiter $\kappa(Q^+) = Q^+$ gilt, folgt $\kappa(Q) = Q$, d.h. κ lässt die Quadrik Q invariant. Geometrisch bedeutet dies nach 3.10.7 (3), dass eine Kollineation der hyperbolischen Ebene Enden auf Enden abbildet. Nach Lester [9] (Lemma 3.6) ist damit κ eine projektive Ähnlichkeit, d.h. es existiert ein Faktor $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\mu(\kappa(x), \kappa(y)) = k \cdot \varphi(\mu(x, y)) = k \cdot \mu(\varphi(x), \varphi(y))$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^3$. Mit $\kappa = A\varphi$ folgt $\mu(A\varphi(x), A\varphi(y)) = k \cdot \mu(\varphi(x), \varphi(y))$, also

$$\mu(Ax, Ay) = k \cdot \mu(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{K}^3$ und somit $A^tJA = k \cdot J$ analog zu 3.7.3. Aus $\det(A^tJA) = k^3 \det(J)$ folgt $\det(A)^2 = k^3$ und daraus $k > 0$. Durch die Matrix $B := \sqrt{k^{-1}}A$ wird nun die gleiche Kollineation wie durch die Matrix A induziert, so dass $\kappa = B\varphi$. Wegen $B^tJB = J$ ist B eine Lorentz-Matrix, und die Kollineation κ stellt sich heraus als das Produkt einer Bewegung und einer Kollineation, die durch den Körperautomorphismus φ induziert wird.

Nun folgt der alternative Nachweis dieser Tatsache, der sich nur auf Ergebnisse dieser Arbeit stützt. Zunächst wird ein Kriterium erarbeitet, aus dem sich ermitteln lässt, wann sich zwei durch ihre Enden definierte Geraden der hyperbolischen Ebene schneiden. Dazu brauchen wir die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 3.12.2:

Es seien α, β zwei positive Enden, $B = \beta \vee \infty$. Dann gilt: $\alpha \geq 2\beta \Leftrightarrow \sigma_B(\alpha) \leq 0$.

Beweis:

Sei $A = \alpha \vee \infty$. Nach 3.6.1 gehört $\sigma_B(A)$ außer dem Ende ∞ noch dem Ende $2\beta - \alpha$ an. Somit ist $\sigma_B(\alpha) = 2\beta - \alpha$, woraus die Behauptung folgt. \square

Hilfssatz 3.12.3:

Es seien α, β zwei Enden, $\alpha < 0, \beta > 0, B = 0 \vee \beta$. Dann gilt $\sigma_B(\alpha) > 0$.

Beweis:

Nach 3.4.9 ist $\alpha^{-1} = \sigma_E(\alpha)$ und $\beta^{-1} = \sigma_E(\beta)$; ferner ist $\sigma_E(0) = \infty$ nach 3.3.4, weil $E \perp U = 0 \vee \infty$. Damit ist $B' = \sigma_E(B) = \beta^{-1} \vee \infty$, und nach 3.6.1 ist $\sigma_{B'}(\alpha) = 2\beta^{-1} - \alpha^{-1}$. Nun ergibt sich $\sigma_B(\alpha) = \sigma_{\sigma_E(B')}(\alpha) = \sigma_E \circ \sigma_{B'} \circ \sigma_E(\alpha) = \sigma_E \circ \sigma_{B'}(\alpha^{-1}) = \sigma_E(2\beta^{-1} - \alpha^{-1}) = (2\beta^{-1} - \alpha^{-1})^{-1} > 0$. \square

Hilfssatz 3.12.4:

Es seien $\alpha > \beta$ zwei positive Enden, $B = \beta \vee \infty$ und $a, b \in B$. Für die Translation $\tau = \iota_a \circ \iota_b$ entlang B gilt $\tau(\alpha) > 0$.

Beweis:

Es sei $L = \frac{\beta}{2} \vee \infty$. Analog zum Beweis von 3.4.5 ergibt sich $\sigma_L(U) = B$ bzw. $\sigma_L(B) = U$. Mit $a' = \sigma_L(a), b' = \sigma_L(b)$ ist dann $\tau' = \iota_{a'} \circ \iota_{b'}$ eine Translation entlang U , und es gilt $\tau = \iota_a \circ \iota_b = \iota_{\sigma_L(a')} \circ \iota_{\sigma_L(b')} = \sigma_L \circ \iota_{a'} \circ \iota_{b'} \circ \sigma_L = \sigma_L \circ \tau' \circ \sigma_L$. Angenommen, $0 \geq \tau(\alpha) = \sigma_L \circ \tau' \circ \sigma_L(\alpha)$. Aus 3.12.2 folgt dann $\tau' \circ \sigma_L(\alpha) \geq \beta$. Nach 3.4.3 bildet τ'^{-1} positive Enden auf positive Enden ab und es gilt $\tau'^{-1}(0) = 0$. Daraus ergibt sich $\sigma_L(\alpha) \geq 0$. Dies ist gleichbedeutend mit $0 \leq \sigma_L \circ \sigma_U(-\alpha) = \delta_\beta(-\alpha) = \beta - \alpha$, also $\alpha \leq \beta$. Widerspruch! \square

Hilfssatz 3.12.5:

Es seien $\alpha < \beta$ zwei positive Enden, $B = 0 \vee \beta$ und $a, b \in B$. Für die Translation $\tau = \iota_a \circ \iota_b$ entlang B gilt $\tau(\alpha) > 0$.

Beweis:

Es seien $a' = \sigma_E(a), b' = \sigma_E(b)$. Dann ist $\tau' = \iota_{a'} \circ \iota_{b'}$ eine Translation entlang $\sigma_E(B) = \beta^{-1} \vee \infty$, und es gilt $\tau = \iota_{\sigma_E(a')} \circ \iota_{\sigma_E(b')} = \sigma_E \circ \iota_{a'} \circ \iota_{b'} \circ \sigma_E = \sigma_E \circ \tau' \circ \sigma_E$. Es folgt $\tau(\alpha) = \sigma_E \circ \tau' \circ \sigma_E(\alpha) = \sigma_E \circ \tau'(\alpha^{-1}) = (\tau'(\alpha^{-1}))^{-1}$. Wegen $\alpha^{-1} > \beta^{-1}$ ergibt sich $\tau'(\alpha^{-1}) > 0$ nach 3.12.4 und damit die Behauptung. \square

Es seien nun $G = \alpha \vee \beta$ und $H = \gamma \vee \delta$ zwei Geraden mit den vier paarweise verschiedenen Enden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dabei kann o.B.d.A. $\gamma, \delta \neq \infty$ angenommen werden, sonst benennt man die Enden und die Geraden um. Es gilt der folgende

Satz 3.12.6:

Genau dann schneiden sich die Geraden G und H in einem Punkt, wenn genau ein Ende von G zwischen γ und δ liegt.

Beweis:

Zunächst gelte o.B.d.A. $\delta < \gamma$. Man kann $\alpha \neq \infty$ annehmen, denn nicht beide Enden α, β können gleich ∞ sein. Außerdem sei o.B.d.A. $\alpha = 0$, denn im Falle $\alpha \neq 0$ kann man die Anordnung der Addition von $-\alpha$ unterziehen, was einer Drehung um ∞ entspricht, also einer Bewegung.

Nun gelte, dass genau ein Ende von G zwischen γ und δ liegt. Falls $\beta = \infty$ ist, so gilt $G = U$, und nach Voraussetzung $\delta < \alpha = 0 < \gamma$. Dann ergibt sich aus 3.4.3, dass die Gerade $H = \gamma \vee \delta$ mit $G = U$ einen Punkt gemeinsam hat.

Im Folgenden gelte also auch $\beta \neq \infty$, und zwar gelte o.B.d.A. $\beta > 0$, denn sonst unterzieht man die Anordnung der Bewegung σ_U und vertauscht die Enden γ und δ . Nach Voraussetzung sind dann die beiden Fälle $\delta < \alpha = 0 < \gamma < \beta$ bzw. $0 = \alpha < \delta < \beta < \gamma$ möglich; o.B.d.A. kann man $\delta < \alpha = 0 < \gamma < \beta$ annehmen, denn andernfalls unterzieht man die Anordnung der Addition von $-\delta$ und tauscht danach α mit δ und β mit γ aus (was zunächst einer Drehung, also einer Bewegung entspricht, und danach einem Austauschen der Geraden). Es seien L_γ, L_δ die Lote von γ, δ aus auf G , $a = L_\gamma \wedge G, b = L_\delta \wedge G$ die Lotfußpunkte. Falls $L_\gamma = L_\delta$, so ist $H = L_\gamma \perp G$, und wir sind fertig. Im Folgenden sei also $a \neq b$, und es sei $m = m(a, b) \in G$. Dann gilt $\iota_m(L_\gamma) = L_\delta$, d.h. $\iota_m(\gamma) \in \{\delta, \sigma_G(\delta)\}$. Nach 3.12.3 erhält man $\sigma_G(\delta) > 0$.

Die Translation $\iota_a \circ \iota_m$ bildet L_γ auf L_δ ab; dabei gilt $\iota_a \circ \iota_m(\gamma) > 0$ nach 3.12.5, und da-

mit $\iota_a \circ \iota_m(\gamma) = \sigma_G(\delta)$. Nach 3.3.7 kann dies nicht gleich $\iota_m(\gamma)$ sein. Somit ist $\iota_m(\gamma) = \delta$, also $m \in H$, d.h. m ist gemeinsamer Punkt von G und H .

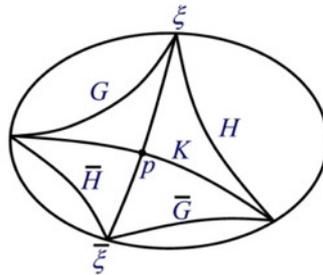
Nun liege nicht genau ein Ende von G zwischen γ und δ . Beispielsweise sei $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. Nach den gerade ausgeführten Betrachtungen haben dann die beiden Geraden $G' = \alpha \vee \gamma$ und $H' = \beta \vee \delta$ einen gemeinsamen Punkt p , und es gilt $\iota_p(G) = H$. Für das Lot L von p auf G hat man $L = \iota_p(L) \perp \iota_p(G) = H$. Dies bedeutet, dass G und H das gemeinsame Lot L haben, somit haben sie keinen gemeinsamen Punkt. Die weiteren möglichen Fälle, sowie der Fall, dass ein Ende gleich ∞ ist, können analog behandelt werden. \square

Folgerung 3.12.7:

Eine Kollineation bildet Enden auf Enden ab.

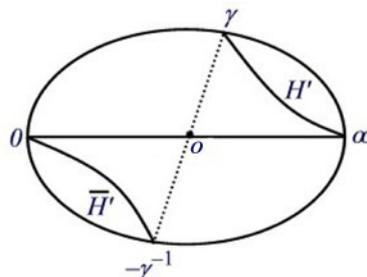
Beweis:

Es seien G, H zwei Geraden, die einem Ende ξ angehören, und sei K die Verbindungsgerade der von ξ verschiedenen Enden von G und H . Weiter sei p ein beliebiger Punkt auf K . Die nach 2.9.14 existierende Gerade, die p mit ξ verbindet, hat nach 3.4.1 ein weiteres Ende $\bar{\xi}$. Verbindet man nun die Enden von K mit $\bar{\xi}$, so erhält man die Geraden \bar{G}, \bar{H} . Es ist dann $\iota_p(G) = \bar{G}, \iota_p(H) = \bar{H}$. In dem Punktbüschel durch p gibt es zwei Geraden, die mit keiner der Geraden G, H, \bar{G}, \bar{H} einen Punkt gemeinsam haben. Alle anderen Geraden schneiden nach 3.12.6 entweder G und \bar{G} oder H und \bar{H} .



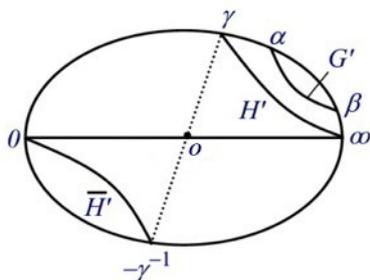
Wir betrachten nun das Bild dieser Anordnung unter einer Kollineation κ . Es seien $G' = \kappa(G), \bar{G}' = \kappa(\bar{G}), H' = \kappa(H), \bar{H}' = \kappa(\bar{H})$. Dann kann o.B.d.A. folgendes angenommen werden: $\kappa(p) = o$, und die Enden von H' sind $\gamma > 0$ und ∞ . Sonst wird die Anordnung einer Bewegung unterzogen, die dies bewirkt. Das Punktbüschel durch p wird somit unter κ auf das Punktbüschel durch o abgebildet; dies bedeutet nach 3.6.2, dass die Enden $\eta, \bar{\eta}$ der Bildgeraden einer jeden Geraden durch p die Beziehung $\bar{\eta} = -\eta^{-1}$ erfüllen.

Die Geraden durch p , die H und \bar{H} schneiden, werden nun auf Geraden durch o abgebildet, die dann H' und \bar{H}' schneiden. Daraus folgt unter Verwendung von 3.12.6, dass die Gerade \bar{H}' als Bild von \bar{H} unter κ die Enden 0 und $-\gamma^{-1}$ verbindet.

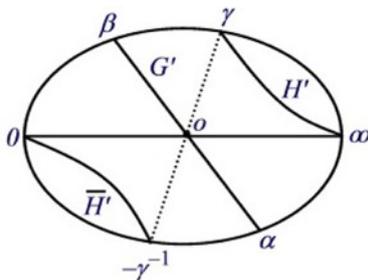


Es seien nun $\alpha < \beta$ die Enden von G' . Die Geraden durch p , die G und \overline{G} schneiden, werden auf Geraden durch o abgebildet, die G' und \overline{G}' schneiden; damit ergeben sich die Enden von \overline{G}' zu $-\alpha^{-1}, -\beta^{-1}$. Diese Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt mit H' und \overline{H}' . Weil nun auch die Gerade G' keinen Punkt mit H', \overline{H}' gemeinsam hat, ergeben sich für die Lage von G' unter Zuhilfenahme von 3.12.6 die folgenden drei möglichen Fälle:

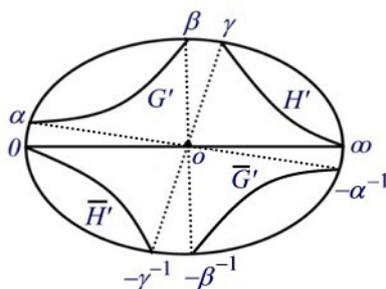
Fall 1: $\alpha, \beta \geq \gamma$, d.h. $-\gamma^{-1} \leq -\alpha^{-1}, -\beta^{-1} < 0$ (oder analog $-\gamma^{-1} \leq \alpha, \beta < 0$, d.h. $-\alpha^{-1}, -\beta^{-1} \geq \gamma$). Ist dann η ein Ende mit $\alpha < \eta < \beta$, so ergibt sich mit Hilfe von 3.12.6, dass die Verbindungsgerade $o \vee \eta$ mit G' und H' einen Punkt gemeinsam hat. Das kann nicht sein.



Fall 2: $\alpha \leq -\gamma^{-1}, 0 \leq \beta \leq \gamma$. Aus 3.12.6 folgt, dass jede Gerade durch o , die H' mit \overline{H}' verbindet, auch G' trifft, was nicht sein kann.



Fall 3: $0 \leq \alpha, \beta \leq \gamma$, d.h. $-\alpha^{-1}, -\beta^{-1} \leq -\gamma^{-1}$ (oder analog $\alpha, \beta \leq -\gamma^{-1}$, d.h. $0 \leq -\alpha^{-1}, -\beta^{-1} \leq \gamma$). Dies ist die einzige mögliche Lage der Geraden G' (und somit auch von \overline{G}').



Nimmt man nun an, dass β echt kleiner als γ ist (d.h. auch $-\beta^{-1} < -\gamma^{-1}$), so existieren viele Geraden $\delta \vee -\delta^{-1}$ durch o mit $\beta < \delta < \gamma$, die dann mit keiner der vier Geraden $G', H', \overline{G}', \overline{H}'$ einen gemeinsamen Punkt haben. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass es nur zwei solche Geraden geben kann. \square

Satz 3.12.8:

Eine Kollineation κ ist durch ihre Wirkung auf den Enden eindeutig bestimmt.

Beweis:

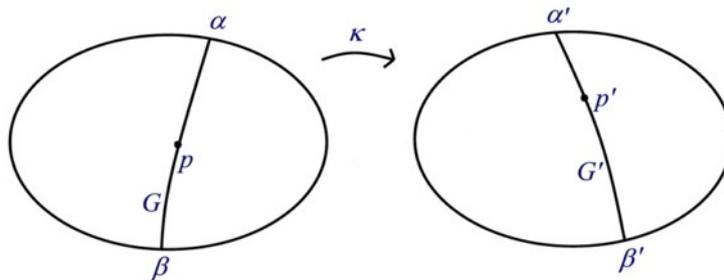
Zunächst sei G eine Gerade. Die beiden Enden ξ, η von G werden nach 3.12.7 durch κ wieder auf zwei Enden ξ', η' abgebildet, wobei $\kappa(G)$ diesen Enden angehört. Mit 3.3.12 ist $\kappa(G)$ eindeutig bestimmt. Nun sei p ein Punkt; weiter seien G, H zwei Geraden durch p . Dann ist $\kappa(p) = \kappa(G \wedge H) = \kappa(G) \wedge \kappa(H)$. Gibt es nun eine weitere Kollineation κ' mit der Eigenschaft $\kappa'(\alpha) = \alpha$ für alle Enden $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$, so folgt $\kappa'(p) = \kappa(p)$ für alle Punkte p , d.h. $\kappa' = \kappa$. \square

Satz 3.12.9:

Sei κ eine Kollineation, p ein Punkt. Dann gilt $\iota_{\kappa(p)} = \kappa \circ \iota_p \circ \kappa^{-1}$.

Beweis:

Sei α ein beliebiges Ende, $G = p \vee \alpha$ und β das andere Ende von G . Dann gilt $\beta = \iota_p(\alpha)$. Weiter seien $p' = \kappa(p), G' = \kappa(G), \alpha' = \kappa(\alpha), \beta' = \kappa(\beta)$. Dann gilt auch $\beta' = \iota_{p'}(\alpha')$, d.h. $\kappa \circ \iota_p(\alpha) = \iota_{\kappa(p)} \circ \kappa(\alpha)$. Es folgt $\kappa \circ \iota_p = \iota_{\kappa(p)} \circ \kappa$ mit Hilfe von 3.12.8, und damit die Behauptung. \square

**Korollar 3.12.10:**

Sei τ eine Translation entlang einer Geraden G , und sei κ eine Kollineation. Dann ist $\kappa \circ \tau \circ \kappa^{-1}$ eine Translation entlang der Geraden $\kappa(G)$.

Beweis:

Sei $\tau = \iota_p \circ \iota_q$ mit $p, q \in G$. Nach 3.12.9 gilt dann $\kappa \circ \tau \circ \kappa^{-1} = \kappa \circ \iota_p \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \iota_q \circ \kappa^{-1} = \iota_{\kappa(p)} \circ \iota_{\kappa(q)}$. Dies ist eine Translation entlang $\kappa(G) = \kappa(p) \vee \kappa(q)$. \square

Satz 3.12.11:

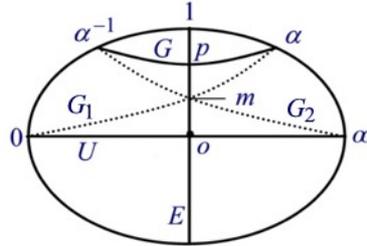
Es sei κ eine Kollineation, die $0, 1, \infty$ festlässt. Dann gilt:

- (1) Für beliebige Enden $\alpha, \beta \neq \infty$ ist $\kappa(\alpha) \cdot \kappa(\beta) = \kappa(\alpha \cdot \beta)$;
- (2) $\kappa(E) = E$.

Beweis:

Zunächst gilt offensichtlich $\kappa(U) = U$. Zu positiven Enden α, β seien τ_α, τ_β die Translationen entlang U gemäß 3.4.10 mit $\tau_\alpha(1) = \alpha, \tau_\beta(1) = \beta$. Nach 3.12.10 ist $\kappa \circ \tau_\alpha \circ \kappa^{-1}$ wieder eine Translation entlang U , und es gilt $\kappa \circ \tau_\alpha \circ \kappa^{-1}(1) = \kappa \circ \tau_\alpha(1) = \kappa(\alpha) = \tau_{\kappa(\alpha)}(1)$. Gemäß 3.4.10 ist diese Translation eindeutig bestimmt. Daher folgt $\kappa \circ \tau_\alpha \circ \kappa^{-1} = \tau_{\kappa(\alpha)}$. Ebenso folgt $\kappa \circ \tau_\beta \circ \kappa^{-1} = \tau_{\kappa(\beta)}$. Wieder mit 3.4.10 ergibt sich somit $\kappa(\alpha) \cdot \kappa(\beta) = \tau_{\kappa(\alpha)} \circ \tau_{\kappa(\beta)}(1) = \kappa \circ \tau_\alpha \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \tau_\beta \circ \kappa^{-1}(1) = \kappa \circ \tau_\alpha \circ \tau_\beta(1) = \kappa(\alpha \cdot \beta)$.

Nun sei $\alpha^{-1} = \sigma_E(\alpha)$ das inverse Ende. Die Gerade $G = \alpha \vee \alpha^{-1}$ ist dann orthogonal zu E ; sei $p = E \wedge G$. Für den Mittelpunkt $m = m(o, p) \in E$ hat man $\iota_m(G) = U$. Verbindet man durch zwei Geraden G_1, G_2 den Punkt m mit den beiden Enden von G , so gehören G_1, G_2 auch jeweils einem Ende von U an.



Aus $1 = \kappa(1) = \kappa(\alpha \cdot \alpha^{-1}) = \kappa(\alpha) \cdot \kappa(\alpha^{-1})$ folgt $\kappa(\alpha^{-1}) = (\kappa(\alpha))^{-1} = \sigma_E(\kappa(\alpha))$. Daraus ergibt sich, dass die Gerade $G' = \kappa(G) = \kappa(\alpha) \vee \kappa(\alpha^{-1})$ wieder orthogonal zu E ist, d.h. E ist gemeinsames Lot von U und G' . Mit $m' = \kappa(m)$ gilt $\iota_{m'}(G') = \kappa \circ \iota_m \circ \kappa^{-1}(G') = U$ nach 3.12.9. Die Gerade $L = \perp(m', G')$ ist dann wegen $L = \iota_{m'}(L) = \perp(m', \iota_{m'}(G')) = \perp(m', U)$ gemeinsames Lot von G' und U . Da nach 3.1.3 zwei Geraden höchstens ein gemeinsames Lot haben können, ergibt sich $L = E$ und somit $m' \in E$. Daraus folgt $\kappa(E) = \kappa(m \vee 1) = m' \vee 1 = E$ und somit (2).

Damit gilt nun auch $\kappa(o) = o$, und mit Hilfe von 3.12.9 ergibt sich $\kappa \circ \iota_o = \iota_o \circ \kappa$. Für ein positives Ende α hat man damit $\kappa(-\alpha) = \kappa(\iota_o(\alpha^{-1})) = \iota_o(\kappa(\alpha^{-1})) = \iota_o((\kappa(\alpha))^{-1}) = -\kappa(\alpha)$. Dieser Zusammenhang gilt dann auch für $\alpha < 0$, wenn man ihn umgekehrt betrachtet. Es folgt nun (1) unabhängig vom Vorzeichen von α und β , denn seien z.B. $\alpha < 0, \beta > 0$. Dann ist $-\alpha > 0$, und es gilt $\kappa(\alpha \cdot \beta) = \kappa(-((-\alpha) \cdot \beta)) = -\kappa((-\alpha) \cdot \beta) = -\kappa(-\alpha) \cdot \kappa(\beta) = \kappa(\alpha) \cdot \kappa(\beta)$. Die anderen Fälle ergeben sich analog. \square

Satz 3.12.12:

Eine Kollineation ist orthogonalitätserhaltend.

Beweis:

Seien κ eine Kollineation, G, H zwei Geraden mit $H \perp G$. Die Enden von G seien γ_1, γ_2 , ein Ende von H sei γ_3 . Weiter seien $\kappa(\gamma_i) = \gamma'_i$ für $i = 1, 2, 3$, $G' = \kappa(G)$. Aufgrund der dreifachen Transitivität der Bewegungsgruppe gibt es nun eine Bewegung β_1 mit $\beta_1(\gamma'_i) = \gamma_i, i = 1, 2, 3$, d.h. $\beta_1(G') = G$. Die Kollineation $\beta_1 \circ \kappa$ lässt somit die Enden γ_i fest.

Weiter sei β_2 eine Bewegung mit $\beta_2(\gamma_1) = 0, \beta_2(\gamma_2) = \infty, \beta_2(\gamma_3) = 1$. Dann gilt $\beta_2(G) = U$ und $\beta_2(H) = E$, weil β orthogonalitätserhaltend ist. Die Kollineation $\beta_2 \circ \beta_1 \circ \kappa \circ \beta_2^{-1}$ lässt die Enden $0, 1, \infty$ fest. Aus 3.12.11 folgt $\beta_2 \circ \beta_1 \circ \kappa \circ \beta_2^{-1}(E) \perp U$. Daraus ergibt sich $\beta_1 \circ \kappa \circ \beta_2^{-1}(E) \perp \beta_2^{-1}(U) = G$, und weiter $\kappa \circ \beta_2^{-1}(E) \perp \beta_1^{-1}(G) = G'$. Wegen $\beta_2^{-1}(E) = H$ heißt dies $\kappa(H) \perp G' = \kappa(G)$. \square

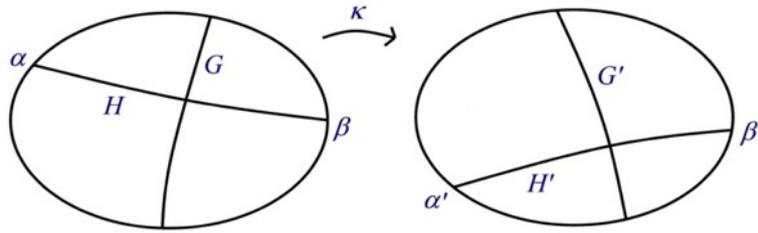
Satz 3.12.13:

Sei κ eine Kollineation, G eine Gerade. Dann gilt $\sigma_{\kappa(G)} = \kappa \circ \sigma_G \circ \kappa^{-1}$.

Beweis:

Sei α ein Ende, H das Lot von α auf G und β das andere Ende von H . Dann gilt $\beta = \sigma_G(\alpha)$. Weiter seien $G' = \kappa(G), H' = \kappa(H), \alpha' = \kappa(\alpha), \beta' = \kappa(\beta)$. Dann gilt auch $H' \perp G'$ nach 3.12.12,

und somit $\beta' = \sigma_{G'}(\alpha')$, d.h. $\kappa \circ \sigma_G(\alpha) = \sigma_{\kappa(G)} \circ \kappa(\alpha)$. Es folgt $\kappa \circ \sigma_G = \sigma_{\kappa(G)} \circ \kappa$ mit Hilfe von 3.12.8, und damit die Behauptung. \square



Korollar 3.12.14:

Sei δ eine Drehung um ein Ende α , und sei κ eine Kollineation. Dann ist $\kappa \circ \delta \circ \kappa^{-1}$ eine Drehung um das Ende $\kappa(\alpha)$.

Beweis:

Sei $\delta = \sigma_G \circ \sigma_H$ mit Geraden G, H , die das gemeinsame Ende α haben. Aus 3.12.7 ergibt sich, dass die Bilder von G, H unter κ wieder ein gemeinsames Ende $\kappa(\alpha)$ haben. Nach 3.12.13 gilt $\kappa \circ \delta \circ \kappa^{-1} = \kappa \circ \sigma_G \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \sigma_H \circ \kappa^{-1} = \sigma_{\kappa(G)} \circ \sigma_{\kappa(H)}$, und dies ist eine Drehung um das gemeinsame Ende $\kappa(\alpha)$. \square

Satz 3.12.15:

Es sei κ eine Kollineation, die $0, 1, \infty$ festlässt. Für beliebige Enden $\alpha, \beta \neq \infty$ gilt dann $\kappa(\alpha) + \kappa(\beta) = \kappa(\alpha + \beta)$, d.h. κ induziert einen Automorphismus des Endenkörpers.

Beweis:

Zu den Enden $\alpha, \beta \neq \infty$ seien $\delta_\alpha, \delta_\beta$ die Drehungen um ∞ gemäß 3.4.6 mit $\delta_\alpha(0) = \alpha, \delta_\beta(0) = \beta$. Nach 3.12.14 ist $\kappa \circ \delta_\alpha \circ \kappa^{-1}$ wieder eine Drehung um ∞ , und es gilt $\kappa \circ \delta_\alpha \circ \kappa^{-1}(0) = \kappa \circ \delta_\alpha(0) = \kappa(\alpha) = \delta_{\kappa(\alpha)}(0)$. Nach 3.1.6 ist eine Drehung um ∞ durch das Bild einer zu dem Ende gehörenden Geraden eindeutig bestimmt. Daher folgt $\kappa \circ \delta_\alpha \circ \kappa^{-1} = \delta_{\kappa(\alpha)}$, und ebenso $\kappa \circ \delta_\beta \circ \kappa^{-1} = \delta_{\kappa(\beta)}$. Somit ist $\kappa(\alpha) + \kappa(\beta) = \delta_{\kappa(\alpha)} \circ \delta_{\kappa(\beta)}(0) = \kappa \circ \delta_\alpha \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \delta_\beta \circ \kappa^{-1}(0) = \kappa \circ \delta_\alpha \circ \delta_\beta(0) = \kappa(\alpha + \beta)$.

Unter Einbeziehung von 3.12.11 ergibt sich somit, dass κ einen Automorphismus des Endenkörpers induziert. \square

Satz 3.12.16:

Sei κ eine Kollineation, welche die Enden $0, 1, \infty$ festlässt, und sei φ der von ihr induzierte Automorphismus des Endenkörpers \mathbb{K} . Wenn wir entsprechend der Algebraisierung der hyperbolischen Ebenen die Ebene auffassen als die zu \mathbb{K} gehörige hyperbolische Ebene, so ist κ genau die Kollineation aus 3.12.1.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass κ die Geraden abbildet wie diese Kollineation. Sei G eine Gerade, $G = (u_0, u_1, u_2)^\perp$ mit $u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = -1$. Im Fall $u_0 \neq u_1$ sind die Enden ξ und η von G von ∞ verschieden, und bis auf Vertauschung von ξ und η lassen sich die Koordinaten durch die Enden ausdrücken als $u_0 = \frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta}, u_1 = \frac{\xi\eta-1}{\xi-\eta}, u_2 = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}$, siehe (6.5) in 3.6. Die Bildgerade $\kappa(G)$ hat die Enden $\varphi(\xi), \varphi(\eta)$, also die Koordinaten $u'_0 = \frac{\varphi(\xi)\varphi(\eta)+1}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)} = \varphi\left(\frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta}\right) = \varphi(u_0)$ und entsprechend

$u'_1 = \varphi(u_1), u'_2 = \varphi(u_2)$. Also ist $\kappa(G)$ die Bildgerade von G unter der Kollineation aus 3.12.1.

Im Fall $u_0 = u_1$ ist o.B.d.A. $u_2 = 1$, und ∞ ist eines der Enden von G ; das andere Ende ist dann $\eta = u_0 = u_1$. Da nach Voraussetzung $\varphi(\infty) = \infty$ ist, hat die Bildgerade $\kappa(G)$ die Enden ∞ und $\varphi(\eta) = \varphi(u_0) = \varphi(u_1)$, so dass auch hier $\kappa(G) = (\varphi(u_0), \varphi(u_1), 1)^\perp = (\varphi(u_0), \varphi(u_1), \varphi(u_2))^\perp$ gilt, wie in 3.12.1. \square

Satz 3.12.17:

Jede Kollineation ist das Produkt einer Bewegung und einer durch einen Automorphismus des Körpers \mathbb{K} gemäß 3.12.1 definierten Kollineation.

Beweis:

Es seien λ eine beliebige Kollineation und $\gamma_1 = \lambda(0), \gamma_2 = \lambda(1), \gamma_3 = \lambda(\infty)$ die Bilder der Enden $0, 1, \infty$ unter λ . Wegen 3.8.1 und der dreifachen Transitivität der Möbiusgruppe existiert eine Bewegung β mit $\beta(\gamma_1) = 0, \beta(\gamma_2) = 1, \beta(\gamma_3) = \infty$. Die Kollineation $\kappa = \beta \circ \lambda$ lässt nun die Enden $0, 1, \infty$ fest. Es folgt $\lambda = \beta^{-1} \circ \kappa$, und mit 3.12.16 die Behauptung. \square

Literatur

- [1] Bachmann, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. Auflage, Springer, Berlin (1973)
- [2] Baer, R.: *The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), 94-129
- [3] Beardon, A. F.: *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, New York (1983)
- [4] Degen, W.; Profke, L.: *Grundlagen der affinen und euklidischen Geometrie*, Teubner, Stuttgart (1976)
- [5] Frank, R.: *Ein lokaler Fundamentalsatz für Projektionen*, Geometriae Dedicata 44 (1992), 53-66
- [6] Hähl, H.: *Synthetische Geometrie*, Vorlesung an der Universität Stuttgart, Sommersemester 2003
- [7] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie*, 9. Auflage, Teubner, Stuttgart (1962)
- [8] Karzel, H.; Sörensen, K.; Windelberg, D.: *Einführung in die Geometrie*, UTB Vandenhoeck, Göttingen (1973)
- [9] Lester, J.A.: *Cone preserving mappings for quadratic cones*, Canad. J. Math. 29 (1977), 1247-1253
- [10] Nöbeling, G.: *Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene*, de Gruyter, Berlin (1976)
- [11] Salzmann, H.; Grundhöfer, T.; Hähl, H.; Löwen, R.: *The classical fields*, Cambridge University Press, Cambridge (2007)
- [12] Salzmann, H.; Betten, D.; Grundhöfer, T.; Hähl, H.; Löwen, R.; Stroppel, M.: *Compact Projective Planes*, de Gruyter, Berlin (1995)
- [13] Szász, P.: *Unmittelbare Einführung Weierstraß'scher homogenen Koordinaten in der hyperbolischen Ebene aufgrund der Hilbert'schen Endenrechnung*, Acta Mathematica Hungarica 9 (1957), 1-28

Danksagung

Es ist mir ein Bedürfnis, mich ganz besonders bei Herrn Prof. Dr. Hermann Hähl für die Betreuung dieser Arbeit zu bedanken; seine Offenheit mir gegenüber hat diese Dissertation neben meinem Beruf als Lehrer überhaupt erst ermöglicht. Seine wertvollen Anregungen, besonders in schwierigen Phasen, haben mich stets neu motiviert und vorwärts gebracht. Besonders hervorzuheben ist dabei seine mir gegenüber immer offene Tür, und die Fülle an Zeit, die er mir zur Verfügung gestellt hat.

Ferner bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Markus Stroppel für die Bereitschaft, die Rolle als Zweitgutachter zu übernehmen. Auch bei ihm fühlte ich mich stets willkommen. Die zahlreichen Stunden, die ich bei ihm verbrachte, waren ihm nie zuviel, und für mich immer gewinnbringend und sehr angenehm.

Neben der sehr hohen fachlichen Kompetenz kann ich den genannten Professoren auch eine hohe menschliche Kompetenz bescheinigen; ich habe mich bei beiden sehr gut aufgehoben gefühlt.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Jürgen Pöschel dafür, dass er als zusätzlicher Prüfer in der mündlichen Prüfung zur Verfügung stand.

Nicht zuletzt geht auch ein besonderer Dank an meine Freundin Stefanie Schulz. Sie hat mich in den letzten Jahren ständig begleitet und mich auch immer bei dem Promotionsvorhaben unterstützt. In nicht ganz einfachen Situationen war es insbesondere auch ihr Glaube an mich, der mich immer wieder neu motiviert hat.