ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 4, T 162 – T 163

LESKY, JUN., P.

Zur Charakterisierung von Lösungen polyharmonischer Gleichungen im Ganzraum

1. Motivation

Wir betrachten die Resolventengleichung

$$(-\Delta)^m u_z - z u_z = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

des polyharmonischen Operators $\left(f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$. Das Prinzip der Grenzabsorption

$$u_{\varrho+i\tau}(x) \to u_{\varrho+i0}(x) \quad \text{für} \quad \tau \downarrow 0\,, \qquad (-\Delta)^m\, u_{\varrho+i0} - \varrho u_{\varrho+i0} = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

gilt für $\varrho \neq 0$. Ist die Ordnung $2m$ des Operators kleiner als die Raumdimension n, so ist (1.2) auch für $\varrho = 0$ erfüllt. Wir setzen im folgenden $2m \geqq n$ voraus. Es sei z. B. $m = n = 3$. Dann gilt

$$u_{i\tau}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{\tau}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, dx' + \frac{c_2}{\sqrt[6]{\tau}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, |x - x'|^2\, dx' + c_3 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, |x - x'|^3\, dx' + o(1) \quad \text{für} \quad \tau \downarrow 0\,. \tag{1.3}$$

Erfüllt $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, dx' = 0\,, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, x_i'\, dx' = 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, |x'|^2\, dx' = 0\,, \tag{1.4}$$

so erhalten wir

$$u_{i\tau}(x) \to u_0(x) := c_3 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x')\, |x - x'|^3\, dx' \quad \text{für} \quad \tau \downarrow 0\,, \tag{1.5}$$

$$(-\Delta)^3\, u_0 = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3\,. \tag{1.6}$$

Es stellt sich die Frage, ob die Lösung u_0 von (1.6) durch ihr Verhalten für $|x| \to \infty$ charakterisiert werden kann. Für $|x| \to \infty$ gilt

$$|x - x'|^3 = |x|^3 \left(\frac{|x - x'|^2}{|x|^2}\right)^{3/2} = |x|^3 \sum_{\nu=0}^{3} \binom{3/2}{\nu} \left(\frac{|x - x'|^2}{|x|^2} - 1\right)^\nu + O\left(\frac{1}{|x|}\right) =$$

$$= |x|^3 \sum_{\nu=0}^{3} \binom{3/2}{\nu} \left(\frac{|x'|^2 - 2x \cdot x'}{|x|^2}\right)^\nu + O\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{1.7}$$

Setzen wir dies in (1.5) ein und beachten (1.4), so ergibt sich

$$u_0(x) = \frac{3c_3}{2|x|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x')\, [(x \cdot x')^2 - x \cdot x' |x'|^2]\, dx' + \frac{c_3}{2|x|^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x')\, (x \cdot x')^3\, dx' + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty\,. \tag{1.8}$$

Hieraus folgt $u_0(x) = O(|x|)$ für $|x| \to \infty$. Durch $u(x) := u_0(x) + x$ ist eine weitere Lösung von (1.6) gegeben, für die ebenfalls $u(x) = O(|x|)$ für $|x| \to \infty$ zutrifft. Somit kann u_0 nicht durch das Verhalten für $|x| \to \infty$ charakterisiert werden.

Aus (1.8) und (1.4) erhalten wir

$$\int\limits_{|x|=R} u_0(x)\, dS = \frac{3c_3}{2R} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x') \left\{ \int\limits_{|x|=R} (x \cdot x')^2\, dS_x \right\} dx' + O(R) =$$

$$= 2\pi c_3 R^3 \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x')\, |x'|^2\, dx' + O(R) = O(R) \quad \text{für} \quad R \to \infty\,.$$

Es gilt sogar

$$\int\limits_{|x-x_0|=R} u_0(x)\, dS_x = O(R) \quad \text{für} \quad R \to \infty \quad \text{für alle} \quad x_0 \in \mathbb{R}^3\,. \tag{1.9}$$

Diese Unendlichkeitsbedingung genügt zur eindeutigen Charakterisierung von u_0, wie im folgenden gezeigt wird.

2. Der Eindeutigkeitsbeweis

In diesem Kapitel beweisen wir

Lemma 2.1: *Die Differentialgleichung*

$$(-\Delta)^m\, u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^{2m}(\mathbb{R}^n)$, *für die gilt:*

$$\int_{|x-x_0|=R} u(x)\,\mathrm{d}S_x = o(R^{n-1}) \quad \textit{für} \quad R \to \infty \quad \textit{für alle} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n . \tag{2.2}$$

Wir führen den Beweis für $n \geqq 3$ (Im Fall $n = 2$ und $n = 1$ verläuft der Beweis analog.) Es sei $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Nach der Greenschen Formel gilt

$$g(x_0) = \frac{1}{\Gamma_n R^{n-1}} \int_{|x-x_0|=R} g\,\mathrm{d}S_x + \frac{1}{(n-2)\,\Gamma_n R^{n-2}} \int_{|x-x_0|\leq R} \Delta g\,\mathrm{d}S_x - \frac{1}{(n-2)\,\Gamma_n} \int_{|x-x_0|\leq R} \frac{\Delta g}{|x-x_0|^{n-2}}\,\mathrm{d}x$$

(Γ_n = Oberfläche der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$). Daraus folgt

$$\int_{|x-x_0|=R} g\,\mathrm{d}S_x = \Gamma_n R^{n-1} g(x_0) + \frac{R^{n-1}}{n-2} \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r^{n-2}} \left\{ \int_{|x-x_0|=r} \Delta g\,\mathrm{d}S_x \right\} \mathrm{d}r - \frac{R}{n-2} \int_{r=0}^{R} \left\{ \int_{|x-x_0|=r} \Delta g\,\mathrm{d}S_x \right\} \mathrm{d}r . \tag{2.3}$$

Es sei nun $v \in C^{2m}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $(-\Delta)^m v = 0$ in $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $g_k := (-\Delta)^{m-k} v$ und berechnen $\int_{|x-x_0|=R} (-\Delta)^{m-k} v\,\mathrm{d}S_x$. Für $k = 1$ ergibt sich aus (2.3)

$$\int_{|x-x_0|=R} (-\Delta)^{m-1} v\,\mathrm{d}S_x = \Gamma_n R^{n-1} (-\Delta)^{m-1} v(x_0) .$$

Durch k-fache Anwendung von (2.3) erhalten wir

$$\int_{|x-x_0|=R} v\,\mathrm{d}S_x = \Gamma_n R^{n-1} v(x_0) + \sum_{\nu=0}^{m-2} d_\nu R^{n+1+2\nu} \tag{2.4}$$

mit geeigneten Konstanten $d_\nu \in \mathbb{R}$. Da v eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung war, folgt hieraus Lemma 2.1.

3. Folgerungen

Es sei $2m \geqq n$. Damit die Lösung $u_{i\tau}$ von (1.1) für $\tau \downarrow 0$ konvergiert, muß

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x')\,|x-x'|^{2s}\,\mathrm{d}x' = 0 \quad \text{für} \quad s = 0, \dots, \left[m - \frac{n}{2}\right], \quad x \in \mathbb{R}^n , \tag{3.1}$$

gelten. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x')\,x'^p |x'|^{2s}\,\mathrm{d}x' = 0 \quad \text{für} \quad p \in \mathbb{N}_0^n , \quad s \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad |p| + s \leqq \left[m - \frac{n}{2}\right]. \tag{3.2}$$

Die Grenzfunktion $u_0(x) := \lim_{\tau \downarrow 0} u_{i\tau}(x)$ erfüllt (2.1) und ist durch

$$u_0(x) := \begin{cases} C_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x')\,|x-x'|^{2m-n}\,\mathrm{d}x' , & n \text{ ungerade} , \\ C_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x')\,|x-x'|^{2m-n} \ln|x-x'|\,\mathrm{d}x' , & n \text{ gerade} , \end{cases} \tag{3.3}$$

gegeben, wobei $C_n \in \mathbb{R}$ geeignete Konstanten sind. Durch eine zu (1.7) analoge Reihenentwicklung kann gezeigt werden, daß u_0 die Bedingung (2.2) erfüllt. Somit besitzt das Problem (2.1)—(2.2) eine Lösung, falls $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ der Orthogonalitätsbedingung (3.2) genügt. Da für jede homogene Lösung v das Verhalten von $\int_{|x-x_0|=R} v\,\mathrm{d}S_x$ wegen (2.4) genau bekannt ist, gilt sogar der folgende Alternativsatz.

Satz 3.1: *Es sei* $2m \geqq n$ *und* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(i) *Erfüllt f die Orthogonalitätsbedingung* (3.2), *so gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung von* (2.1)—(2.2). *Sie ist durch* (3.3) *gegeben.*

(ii) *Ist* (3.2) *nicht erfüllt, so besitzt* (2.1)—(2.2) *keine Lösung.*

Anschrift: Dr. Peter Lesky jun., Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, D-7000 Stuttgart 80, BRD