
Realisierungen Hilbertscher Liniensysteme

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität
Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Thomas Schneider
geboren in Riedlingen

Hauptberichter: Prof. Dr. Markus Stroppel
Mitberichter: Prof. Dr. Hermann Hähnel
Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juni 2008

Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart
2008

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein auf D. Hilbert zurückgehendes und von M. Stoppel systematisch untersuchtes Konstruktionsprinzip zur Realisierung nichtklassischer affiner Ebenen verfolgt und erweitert. Ein sogenanntes Hilbertsches Liniensystem entsteht, indem eine desarguessche affine Ebene im Innern einer streng konvexen geschlossenen Kurve modifiziert wird. Anstelle des ursprünglichen Innengebiets der Kurve wird eine flach oder räumlich realisierte Inzidenzstruktur „eingeklebt“, welche die von Stoppel stammenden Axiome einer *Compact Disk (CD)* erfüllt und sich vermöge einer stetigen injektiven Lineation λ in die reelle affine Ebene einbetten lässt. Im Falle von CDs etwa, die durch Flächenstücke konstanter Gauß-Krümmung in \mathbb{R}^3 realisiert werden, sind derartige Lineationen durch (lokale) geodätische Abbildungen in die reelle euklidische Ebene gegeben.

Als zentrales Resultat dieser Arbeit wird gezeigt, dass ein Hilbertsches Liniensystem genau dann desarguessch ist, wenn die Randkurve C der zur Konstruktion des Hilbertsystems eingesetzten CD *punktweise projektiv äquivalent* zum Bild von C unter der Lineation λ ist. Zur Prüfung der projektiven Äquivalenz für je zwei vorgelegte Kurven werden Techniken aus der Projektiven Differentialgeometrie eingesetzt.

Mit diesen Methoden wird zunächst die Klasse der Ebenen untersucht, die wie das von Hilbert im Jahre 1899 vorgestellten Beispiel auf CDs basieren, deren Randkurven Ellipsen sind. Weiterhin wird eine räumliche Realisierung eines Hilbertschen Liniensystems studiert, dessen Konstruktion eine spezielle Drehfläche, die sogenannten Spindelfläche, verwendet. Es wird explizit gezeigt, dass die Hilbertebenen und die betrachtete Spindelflächenebene nicht desarguessch sind. Wird die Spindelfläche in der räumlichen Konstruktion jedoch durch eine Sphäre in \mathbb{R}^3 ersetzt, so resultiert eine desarguessche affine Ebene. Im Falle der Hilbertebenen ergibt sich eine desarguessche Struktur genau dann, wenn als Randkurve der CD eine rotationssymmetrische Ellipse, d.h. ein Kreis gewählt wird.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	i
Einleitung	v
English Summary	xiii
1 Grundlagen	1
1.1 Inzidenzgeometrische Grundlagen	1
1.1.1 Inzidenzstrukturen und Morphismen	1
1.1.2 Desarguessche projektive und affine Ebenen	18
1.1.3 Reelle projektive Ebene und Projektivitäten	34
1.2 Aus der Topologischen Geometrie	37
1.2.1 Topologische Ebenen und Morphismen	38
1.2.2 Lokaler Fundamentalsatz für $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$	43
1.2.3 Affine \mathbb{R}^2 -Ebenen	45
1.3 Differentialgeometrische Grundlagen	46
1.3.1 Flächenstücke in \mathbb{R}^3	46
1.3.2 Geodätische auf Drehflächen	55
1.3.3 Geodätische Abbildungen	69
2 Hilbertsche Liniensysteme	75
2.1 Affine \mathbb{R}^2 -Ebenen mit eingeklebten CDs	76
2.2 Desarguessche Hilbertsysteme	89
2.3 Liniensysteme in \mathbb{R}^3	97
3 Werkzeuge der Projektiven Differentialgeometrie	101
3.1 Ebene Kurven und Konvexität	102
3.2 Projektive Darstellungen ebener Kurven	107
3.3 Projektive Äquivalenz ebener Kurven	121

4 Die Hilbert-Ebene von 1899	127
4.1 Überblick	127
4.2 Inversion am Kreis	137
4.3 Inversionsbilder von Ellipsen	146
4.4 Kriterien für die Desargues-Eigenschaft	181
4.5 Der desarguessche Spezialfall	193
5 Räumliche Realisierungen nichtklassischer Ebenen	199
5.1 Die Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,a}$	200
5.1.1 Differentialgeometrische Grunddaten	200
5.1.2 Geodätische Abbildungen von $\mathcal{S}_{K,a}$ auf $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$	202
5.1.3 Geodäten auf der Spindelfläche	211
5.2 Ebene Abschnitte von $\mathcal{S}_{K,a}$ als CDs	231
5.3 Prüfung projektiver Äquivalenz	240
5.4 Eine Spindelflächenebene	250
6 Ausblick	255
A Anhang	261
A.1 Programm für computeralgebraische Berechnungen	261
A.2 Programm-Modul zur numerischen Auswertung .	271
Literaturverzeichnis	273
Symbolverzeichnis	279
Sachverzeichnis	281

Einleitung

In der Mathematik und in vielen anderen wissenschaftlichen Disziplinen gehören Methoden der analytischen Geometrie seit Jahrhunderten zum unverzichtbaren Grundwerkzeug. Deren praktische Handhabbarkeit (und Akzeptanz bis in den Schulunterricht und – mitunter implizit – auch in den Alltag hinein) liegt nicht zuletzt an den „überschaubaren“ Rechengesetzen der algebraischen Strukturen, die zur Beschreibung (Koordinatisierung) der geometrischen Objekte verwendet werden, welche etwa in Anwendungen von Interesse sind. Darunter fallen selbstverständlich Ebenen und eine Vielzahl von Teilmengen derselben (Punkte, Geraden, Polygone, usw.). Nach einem von Hilbert in [23] veröffentlichten Resultat besitzen genau diejenigen Ebenen, die sich mit Hilfe von Körpern¹ koordinatisieren lassen, die sogenannte Desargues-Eigenschaft (vgl. Abschnitt 1.1.2). Also sind alle Ebenen, in denen der desarguessche Schließungssatz gilt, der Beschreibung durch Körper zugänglich und können in diesem Sinne als „gut verstanden“ betrachtet werden.²

In der vorliegenden Arbeit wird ein bestimmter Bereich aus der immens großen Gesamtheit *nicht* desarguesscher Ebenen beleuchtet. Neben flachen Realisierungen nicht desarguesscher Geometrien werden auch Realisierungen im dreidimensionalen Raum ins Blickfeld genommen. Das hier verfolgte Konstruktionsprinzip besteht darin, Geradensysteme affiner Ebenen, deren Punkträume

¹ Bekanntlich gilt im Falle kommutativer Körper zudem der Satz von Pappus (vgl. etwa [14], Kapitel 3).

² Jüngere Publikationen aus der theoretischen Physik (vgl. [21], [44]) dokumentieren, dass die Desargues-Eigenschaft auch über den Bereich innermathematischer Grundlagenfragen hinaus von Interesse und Bedeutung ist.

homöomorph zu \mathbb{R}^2 sind, *lokal zu stören*. Genauer wird die Störung für eine gegebene affine Ebene auf das Innere einer konvexen geschlossenen Kurve in der Ebene beschränkt. Anstelle des ursprünglichen Innengebiets der Kurve wird eine flach oder räumlich realisierte Inzidenzstruktur „eingeklebt“, die den von Stroppel formulierten Anforderungen an *Compact Disks* (s.u.) genügt. Bei räumlichen Realisierungen wird das Innere J der Kurve durch ein passendes Flächenstück ersetzt, und für jede Gerade der Ebene, die den Rand der Kurve in zwei Punkten trifft, tritt das die beiden Randpunkte verbindende Geodätensegment des Flächenstücks an die Stelle des ursprünglich in J verlaufenden Geradenstücks. Hierbei wird *nicht* gefordert, dass die so modifizierten Geraden an den Anschlussstellen glatt sein sollen.³

Es mag zunächst überraschen, dass solcherart konstruierte Inzidenzstrukturen durchaus isomorph zur gewöhnlichen reellen affinen Ebene und damit insbesondere desarguessch⁴ sein können. Als notwendige Bedingungen hierfür muss sowohl der Innenbereich als auch der Außenbereich mit den jeweiligen Liniensystemen desarguessch sein. Diese Bedingung ist jedoch *nicht* hinreichend für die Desargues-Eigenschaft der Ebene insgesamt, und wir interessieren uns gerade für diejenigen Fälle, bei denen das Einkleben eines desarguesschen Innenbereichs in eine desarguessche Ebene zu einer nicht desarguesschen Struktur führt.

Die vorliegende Arbeit setzt eine Entwicklungslinie fort, die ihren Ausgangspunkt bei David Hilberts Monographie *Grundlagen der Geometrie* [23] genommen hat. Um die Arbeit für den Leser chronologisch und inhaltlich verortbar zu machen, wollen wir den hier relevanten Strang der insgesamt weit verzweigten Entwicklung kurz skizzieren.

Im Jahre 1899 stellt David Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* ein Beispiel einer nicht desarguesschen affinen Ebene vor.⁵ Im

³ Dass Systeme geknickter Linien keineswegs „unnatürlich“ sind, zeigt etwa ein Blick auf die Brechung von Lichtstrahlen in der Strahlenoptik.

⁴ Vgl. Definition 1.1.41.

⁵ Für die vorliegende Arbeit wurde die 6. (unveränderte) Auflage [24] von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* herangezogen.

Rahmen einer Begründung seiner Axiomatisierung der Geometrie weist Hilbert anhand dieses Beispiels nach, dass der desarguesche Schließungssatz nicht allein aus den von ihm vorgelegten ebenen Inzidenz- und Anordnungsaxiomen folgt.⁶ Hilbert ersetzt sein Beispiel, das wir in Kapitel 4 ausführlich vorstellen werden, ab der 7. Auflage [25] seiner *Grundlagen* durch die von Moulton in [42] vorgestellte Ebene.

Die Hilbertsche Ebene von 1899 wird jedoch in der Folge Gegenstand der Forschung: So nimmt Mohrmann [41] Hilberts Konstruktion zum Anlass, den Begriff *Hilbertsches Liniensystem* zu prägen, und er schlägt Verallgemeinerungen vor, die insbesondere auch räumliche Liniensysteme umfassen (vgl. die Bemerkungen gegen Ende von Abschnitt 2.1). Stroppel greift in [55] die Mohrmannsche Begriffsbildung auf und schafft eine Axiomatik für das von Hilbert in [23] verwandte und von Mohrmann als solches thematisierte Konstruktionsprinzip, indem er zunächst sogenannte *Compact Disks* bzw. *CDs* definiert und dann das „Einkleben“ von CDs in eine gegebene affine Ebene präzise fasst. Wir bezeichnen solcherart konstruierte Geometrien als *Stroppel-Mohrmann-Hilbert-Liniensysteme* bzw. kurz als *SMH-Systeme* (vgl. Definition 2.1.11). Auch der Begriff des Hilbertschen Liniensystems erfährt in [55] eine inzidenzgeometrische Präzisierung. Stroppel fordert nämlich, dass die zur Konstruktion eines Hilbertschen Liniensystems verwandte *CD lokal desarguessch* sein soll.

Eine Untersuchung der Automorphismengruppe der Hilbertschen Ebene von 1899 wird von Anisov [4] veröffentlicht. In [53] werden die dort offen gebliebenen Fragen geklärt, insbesondere wird bewiesen, dass diese Automorphismengruppe, abgesehen von Spezialfällen, die in [53] explizit benannt werden, trivial ist.⁷

⁶ Eine ausführliche Erörterung der Hilbertschen Monographie und der von Hilbert vorgelegten Axiomatisierung der Geometrie findet sich in [60]. Im Manuskript einer Vorlesung, die Hilbert im Wintersemester 1898/99 gehalten hat, finden sich noch frühere, nicht von Hilbert selbst veröffentlichte Beispiele nicht desarguesscher Ebenen (vgl. [22]). Eine dieser Ebenen wurde von Stroppel [54] eingehend untersucht.

⁷ Siehe [53], Theorem 6.2 und Korollar 6.3.

Für die vorliegende Arbeit ist Stroppels Publikation [55] von fundamentaler Bedeutung nicht zuletzt deshalb, weil sie Hilbertsche Liniensysteme in den Kontext der von Salzmann begründeten *Topologischen Geometrie*⁸ stellt. Aus der Tatsache, dass der offene Kern jeder CD eine \mathbb{R}^2 -Ebene⁹ ist¹⁰, folgt zusammen mit Resultaten von Busemann und Polley, dass sich das Innere jeder lokal desarguesschen CD in die reelle affine Ebene einbetten lässt.¹¹ Dieses Faktum nehmen wir zum Anlass, in der vorliegenden Arbeit genau solche Hilbertsche Liniensysteme zu betrachten, deren CDs sich (als ganze) vermöge einer Lineation λ in die reelle affine Ebene einbetten lassen.¹² Im Falle der Hilbertebene von 1899 stellt die Inversionsabbildung eine derartige Lineation dar (siehe Kapitel 4, insbesondere Lemma 4.2.2). Stroppel zeigt in [55], dass SMH-Systeme und damit insbesondere Hilbertsche Liniensysteme stets affine \mathbb{R}^2 -Ebenen sind. Nach einem tiefliegenden Resultat der Topologischen Geometrie sind *desarguessche* affine \mathbb{R}^2 -Ebenen als topologische Inzidenzstrukturen isomorph zur reellen affinen Ebene.¹³

Zur Identifikation nichtklassischer Ebenen der von uns betrachteten Bauart stellt sich somit die Frage nach Kriterien zur Charakterisierung desarguesscher Hilbertscher Liniensysteme. Als zentrale Resultate der vorliegenden Arbeit werden solche Kriterien in Abschnitt 2.2 vorgestellt. Es konnte nämlich gezeigt werden, dass Hilbertsche Liniensysteme genau dann desarguessch sind, wenn die Randkurve C der zur Konstruktion eingesetzten CD *punktweise projektiv äquivalent*¹⁴ zum Bild von C unter der Lineation λ ist,

⁸ Salzmanns sechzigseitige Publikation [52] kann wohl als Beginn der Topologischen Geometrie angesehen werden.

⁹ In frühen Beiträgen zur Topologischen Geometrie werden \mathbb{R}^2 -Ebenen (vgl. Definition 1.2.24) als *Salzmann-Ebenen* bezeichnet, so etwa in [48].

¹⁰ Siehe [55].

¹¹ Einzelheit hierzu finden sich in Abschnitt 2.1.

¹² Vgl. die Definitionen 1.1.10, 1.1.12 und 1.2.8.

¹³ Dieses Resultat folgt mit der im Beweis von Satz 1.2.27 angegebenen Überlegung unmittelbar aus Proposition 32.8 von [50].

¹⁴ Unsere Definition von punktweiser projektiver Äquivalenz findet sich in Abschnitt 3.3.

vgl. Satz 2.2.3 und Satz 2.2.4. Um diese Kriterien auf konkrete Beispiele anwenden zu können, bedarf es einer Methode, die es erlaubt, zwei vorgelegte Kurven auf punktweise projektive Äquivalenz zu überprüfen. Für hinreichend oft differenzierbare Kurven können hierzu Techniken herangezogen werden, die dem Gebiet der *Projektiven Differentialgeometrie* zuzurechnen sind. In Kapitel 3 haben wir die zur Fundierung und zum Verständnis dieser Techniken benötigte Theorie¹⁵ entfaltet.

In Kapitel 4 wenden wir die im vorigen Absatz genannten Resultate aus den Kapiteln 2 und 3 auf die Hilbertsche Ebene von 1899 an. Für deren Konstruktion wird eine von einer Ellipse berandete CD mit einem System von Kreisbögen, die alle durch einen festen, außerhalb der Ellipse liegenden Punkt verlaufen, in die reelle Ebene eingeklebt. In Abschnitt 4.3 untersuchen wir zunächst die Gesamtheit derjenigen Ellipsen, die mit ihrem jeweiligen System von Kreisbögen den CD-Axiomen genügen. Eine Ellipse gehört genau dann dieser Gesamtheit an, wenn ihr Inversionsbild geschlossen und konvex bezüglich des Geradensystems der reellen affinen Ebene ist. In Abschnitt 4.4 weisen wir explizit nach, dass das entstehende Hilbertsche Liniensystem die Desargues-Eigenschaft genau für den Spezialfall besitzt, in dem die Ellipse ein Kreis ist. Für diesen Spezialfall geben wir die die projektive Äquivalenz vermittelnde Abbildung konkret an (vgl. Abschnitt 4.5).

Andere Beispiele flacher Realisierungen von Hilbertschen Liniensystemen können auf analoge Weise untersucht werden. Zur Konstruktion räumlicher Realisierungen dient der in Abschnitt 2.3 eingeführte Begriff der *räumlich mit ebenem Rand realisierten CD*. Derartige CDs werden auf geeigneten Flächenstücken in \mathbb{R}^3 abgegrenzt, die Spuren der Geodäten¹⁶ des Flächenstücks auf der CD, genauer Bilder von Einschränkungen parametrisierter

¹⁵ In den einführenden Bemerkungen zu Kapitel 3 legen wir die Gründe dar, aus denen wir eine ausführliche Darstellung für notwendig erachten.

¹⁶ Der von uns verwendete Geodätenbegriff wird in Abschnitt 1.3.2 spezifiziert.

Geodätischer auf geeignete Intervalle, bilden das Geradensystem.¹⁷ Wir erhalten insbesondere räumliche Verallgemeinerungen der bislang betrachteten Hilbertschen Liniensysteme, indem wir Flächenstücke heranziehen, die (lokale) geodätische Abbildungen (vgl. Abschnitt 1.3.3) in die reelle affine bzw. euklidische Ebene zulassen. Nach einem klassischen Resultat von Beltrami [6] besitzen derartige Flächenstücke notwendig konstante Gauß-Krümmung. Die für den flachen Fall bereits zur Verfügung gestellten Kriterien zur Prüfung der Desargues-Eigenschaft übertragen wir in Abschnitt 2.3 auf den Fall räumlicher Hilbertsysteme.

Damit ist der Boden bereitet für die explizite Konstruktion und Analyse eines räumlich realisierten Hilbertschen Liniensystems in Kapitel 5. Wir wählen hierzu CDs, die auf einer Drehfläche konstanter Gauß-Krümmung, nämlich der sogenannten Spindel­fläche, realisiert werden. In Abschnitt 5.1 verschaffen wir uns zunächst explizite Parametrisierungen der Geodätischen dieser Fläche. Im darauffolgenden Abschnitt 5.2 stellen wir sicher, dass geeignet gewählte ebene Abschnitte der Spindel­fläche tatsächlich CDs liefern. Schließlich wenden wir die in den Kapiteln 2 und 3 bereitgestellten Methoden an, um nachzuweisen, dass das mithilfe der Spindel­fläche konstruierte Hilbertsystem nicht desarguessch ist. Ferner zeigen wir, dass eine desarguessche affine Ebene resultiert, wenn die Spindel­fläche in der Konstruktion durch eine Sphäre in \mathbb{R}^3 ersetzt wird. Für die Ausführung der hierzu notwendigen Rechnungen setzen wir ein Computeralgebrasystem ein, da die zur Analyse verwandten Methoden aus der Projektiven Differentialgeometrie in diesem Fall die Handhabung und Umformung sehr umfänglicher Ausdrücke erfordern, vgl. Bemerkung 5.3.1. Im Abschnitt 5.4 schließlich wird ein konkretes Beispiel einer Spindel­flächenebene mitsamt einer nicht schließenden Desargues-Figur dargestellt.

¹⁷ Damit werden Ideen, die bereits von Klein angedeutet wurden (vgl. [28], S. 135f.) und die Mohrmann in [41] expliziert, so umgesetzt, dass sie sich mit dem bereitgestellten Instrumentarium analysieren lassen.

Es sei noch nachgetragen, dass das erste Kapitel eine Zusammenstellung der für die vorliegende Arbeit grundlegenden Begriffe und Resultate aus der Inzidenzgeometrie, der Topologischen Geometrie und der Differentialgeometrie enthält.

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit gefördert bzw. unterstützt haben, an erster Stelle Herrn Prof. Dr. Markus Stroppel für die Anregung zu dem von mir bearbeiteten Thema und für seine unermüdliche Bereitschaft zur Diskussion von Mathematik im näheren und ferneren Umkreis der Dissertation. Weiterhin bin ich Herrn Prof. Dr. Hermann Hähl für die Möglichkeit zum regelmäßigen wissenschaftlichen Austausch am Lehrstuhl für Geometrie in Stuttgart zu außerordentlichem Dank verpflichtet. Ich möchte hinzufügen, dass ich beider Art und Weise, Mathematik zu treiben und zu lehren, stets als höchst motivierend empfunden habe.

Ein besonderer Dank für die gemeinsame Überwindung so mancher „mathematischer Höhenmeter“ in Stuttgart gilt Dr. Bernd Ackermann, Dr. Tanja Dörfner, Simone Maier, Steffen Poppitz und Antje Rothmund. Für die Durchsicht des Manuskripts danke ich Herrn Dr. Gerhard Gerlich aus Braunschweig. Den ehemaligen Kollegen und Kolleginnen der Bruchsaler *International University in Germany*, die mir Unterstützung haben zuteil werden lassen, sei ebenfalls vielmals gedankt. Schließlich sage ich meiner Familie, ohne deren Geduld und Verständnis diese Arbeit niemals hätte entstehen können, allerherzlichsten Dank und *Grazie* !

Einleitung

Summary

In Mathematics and many other scientific disciplines, methods from Analytic Geometry have been indispensable tools for centuries. We venture the conjecture that the universal acceptance of these methods is not least due to the relative simplicity of the underlying algebraic structures that are used to describe (coordinatize) those objects that are of interest in typical applications. The range of such objects includes planes and a variety of subsets of planes (e.g. points, straight lines, polygons, etc.). By a well-known result that David Hilbert published in [23], planes can be coordinatized by skew fields if and only if they have the so-called Desargues property. Therefore, to the extent that one masters (skew) fields, Desarguesian planes can be considered as “well understood.”

The present thesis aims at shedding light onto one particular subset of the immensely large variety of *non-Desarguesian* planes. To this end, flat realizations of non-Desarguesian geometries as well as models in three-dimensional space have been studied. The construction principle pursued here uses *local* perturbations of the line systems of existing affine planes whose point spaces are homeomorphic to \mathbb{R}^2 . More precisely, for a given affine plane, the perturbation of the line system will be restricted to the interior of a convex closed curve \mathcal{C} . To construct models in 3-space, the interior \mathcal{J} of \mathcal{C} is replaced by a suitable surface. For each line meeting \mathcal{C} in two points, the original line segment in \mathcal{J} is replaced by the geodesic arc on that surface that joins the two points. It is not required that the lines modified in this way be everywhere smooth.¹⁸

¹⁸ Keeping in mind, for instance, light ray models of optical refraction phenomena, we consider systems in which some or all lines have kinks to be quite natural.

Summary

It may come as a surprise at first that incidence structures constructed as described above may well be isomorphic to the classical affine plane and hence Desarguesian. As a necessary condition for such a situation, both the interior of the curve \mathcal{C} and its exterior with the respective line systems must possess the Desargues property. This condition is, however, far from being sufficient. In fact we are interested in precisely those non-Desarguesian planes that arise from “gluing” some Desarguesian patch into a given Desarguesian affine plane.

The present dissertation takes up a thread of research emerging from Hilbert’s monograph entitled *Grundlagen der Geometrie (Foundations of Geometry)*. In order to place our work into context, both chronologically and in terms of the subject matter, we briefly outline that research strand. In 1899, Hilbert presents in his *Grundlagen der Geometrie* an example of a non-Desarguesian plane and uses it as part of a detailed motivation of the set of axioms that he proposes in his monograph. For the 7th edition of the *Grundlagen*, Hilbert replaces this example with the non-Desarguesian plane that was presented by Moulton in 1902 (cf. [42]).

Hilbert’s original example, which we will analyze in Chapter 4, does, however, not fall into oblivion. Mohrmann refers to it in [41] and coins the term *Hilbertsches Liniensystem (Hilbert line system)* for constructions that are similar to Hilbert’s example in a sense yet to be made rigorous. This is achieved by Stroppel who adopts Mohrmann’s terminology in [55], and presents an axiomatic foundation of Hilbert-like constructions by defining so-called *Compact Disks (CDs)* and by making precise the procedure of gluing CDs into affine planes. Stroppel shows that the resulting structures are always *affine \mathbb{R}^2 planes*, a notion from Topological Geometry, which field has taken a rapid and fruitful development in the wake of Salzmann’s seminal paper [52].¹⁹ It is useful to note that, by construction, the interior of any Compact Disk is an \mathbb{R}^2 -plane.

¹⁹ \mathbb{R}^2 planes are referred to as *Salzmann planes* in early publications on topics from Topological Geometry, e.g. in [48].

Definition (Stroppel [55], cf. also Definition 2.1.6). Let D be a topological space and \mathcal{D} a family of subsets of D . The incidence structure (D, \mathcal{D}, \in) is called a *Compact Disk* or *CD*, if the following conditions are satisfied:

- (a) (D, \mathcal{D}) is a linear space, i.e. each line l in \mathcal{D} contains at least two points, and to any two distinct points there is exactly one line containing them;
- (b) the point set D is homeomorphic to the closed unit disk;
- (c) each line $l \in \mathcal{D}$ is homeomorphic to the closed interval $[0, 1]$; moreover, the boundary ∂l is contained in ∂D , and $l \setminus \partial D$ is connected.

For the purposes of this thesis, we require in addition that CDs be *strictly convex*, by which we mean that $l \cap \partial D = \partial l$ holds for each line $l \in \mathcal{D}$. A CD (or any linear space, for that matter) is called *locally Desarguesian* if, to each of its points, there exists a neighborhood that is a Desarguesian partial linear space (cf. Definitions 1.1.40 and 2.1.9).

Definition (Stroppel [55], see also Definition 2.1.11). Let $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ be an affine \mathbb{R}^2 place, $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ a strictly convex CD, E a \mathcal{A} -convex subset of \mathbb{R}^2 and $\gamma: D \rightarrow E$ a homeomorphism. For each line $l \in \mathcal{D}$ we put $\hat{l} = \gamma(l) \cup (k \setminus E)$, where $k \in \mathcal{A}$ is to denote the line that connects the endpoints (in ∂E) of $\gamma(l)$. We obtain a (new) line system $\mathcal{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = \{l \in \mathcal{A} \mid |l \cap E| \leq 1\} \cup \{\hat{l} \mid l \in \mathcal{D}\}$ and a (new) incidence structure $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_\gamma^{\mathbb{D}})$. We call $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ a *Stroppel-Mohrman-Hilbert line system* or an *SMH system* for short.

Following Stroppel, we define Hilbert line systems as SMH systems involving CDs that are locally Desarguesian. Results by Busemann and Polley imply that the interior of a locally Desarguesian CD can be embedded into the real affine plane (cf. Section 2.1). We consider CDs only that are embeddable as a whole into the real affine plane via some continuous injective lineation λ .

Summary

By a significant result from Topological Geometry (cf. Proposition 32.8 of [50]), affine \mathbb{R}^2 planes having the Desargues property are isomorphic to the real affine plane. In order to construct non-classical planes, we must hence develop criteria to ascertain whether a given Hilbert line system is Desarguesian or not. Such criteria are presented in Chapter 2 as central results of this dissertation. To wit, we show that a Hilbert line system is Desarguesian if and only if the curve C bounding the CD is *pointwise projectively equivalent* to the image of C under the lineation λ . To make this statement precise, some definitions are in order. Let π denote the point map inducing the standard embedding of the real affine plane into the real projective plane, i.e. $\pi(x_1, x_2) := \langle (x_1, x_2, 1) \rangle$ for all $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definition. Two plane curves $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ are *pointwise projectively equivalent* if there exists a projective mapping $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ such that $(\mu \circ \pi \circ x)(t) = (\pi \circ y)(t)$ holds for all $t \in I$.

We are now in a position to summarize the results proven as Satz 2.2.3 and Satz 2.2.4 of this dissertation:

Theorem. Let $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ be a strictly convex CD, $\gamma: D \rightarrow E$ a homeomorphism onto a strictly $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -convex subset E of \mathbb{R}^2 . Let moreover $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a continuous injective lineation (inducing an embedding $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ of the CD into the real affine plane).

- (a) If the SMH line system $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ is Desarguesian then there exists a uniquely determined projective mapping $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ such that

$$(\mu \circ \pi)(x) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) \text{ for all } x \in \partial E. \quad (\spadesuit)$$

- (b) If there exists a projective map $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ such that \spadesuit holds, then the mapping

$$\Lambda: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) & \text{for } x \in E, \\ (\mu \circ \pi)(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^2 \setminus E^\circ \end{cases}$$

is an injective, continuous, and open lineation from $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ into the real projective plane $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, which induces an open embedding (of incidence structures) $\Lambda: \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Thus $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ is Desarguesian.

In order to be able to apply this criterion to concrete examples, a method is needed that allows one to test two given curves, which are defined on the same parameter domain, for projective equivalence. For sufficiently smooth curves, techniques from Projective Differential Geometry can be used to this end. We elaborate the theory underlying these techniques in Chapter 3, from which we now quote the salient points.

Definition (Cf. Definition 3.2.1). Let $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a parameterized curve that is at least thrice continuously differentiable. Any C^3 -map $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto X(t)$ having the property that

$$\left\langle \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} \right\rangle = (\pi \circ x)(t) \quad \text{for all } t \in I$$

will be called a *projective representation* of x .

Definition (Cf. Definition 3.2.10). Given a parameterized curve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ and a projective representation X of x we call the equation

$$X'''(t) = \alpha(t)X(t) + \beta(t)X'(t) + \gamma(t)X''(t)$$

the *general fundamental equation* of X . In case $\gamma(t) = 0$ for all $t \in I$, we say that the fundamental equation of X is of *special form*.

In Chapter 3 we demonstrate for any plane curve x the existence of a projective representation X whose fundamental equation is of special form, and we elaborate how to construct such a representation for a given curve x . Moreover, we show that the special fundamental equation is uniquely determined by the plane curve x . That is, uniquely determined coefficient functions α_x and β_x are associated to each plane curve x . Based on these results, we proceed to state the following theorem, which is of pivotal importance for our intents.

Theorem (Cf. Satz 3.3.2). *Two parameterized curves $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ are pointwise projectively equivalent if and only if the respective associated functions α_x , β_x , α_y , and β_y fulfill the conditions $\alpha_x = \alpha_y$ and $\beta_x = \beta_y$.*

Summary

In Chapter 4, we apply the methods outlined here to the original example presented by Hilbert in 1899, and close relatives thereof. Each of those planes employs a CD which is bounded by an ellipse and whose line system consists of circular arcs all passing through one fixed point in the exterior of the ellipse. In Section 4.3, we study the set of those CDs with elliptic boundaries (and line systems as just described) that satisfy the CD axioms. To this end, we use the fact that an ellipse bounds a CD precisely if its image under inversion is a closed and convex curve. In Section 4.4, we prove that the planes resulting from this construction are Desarguesian precisely for the special cases in which the ellipse is a circle. Section 4.5 is dedicated to this special Desarguesian case. We analyze and interpret geometrically the projective mapping which, for each circle point embedded projectively, yields the same image point as the inversion map.

In order to be able to construct and analyze models of SMH systems in three-dimensional space, we present a non-flat variant of the notion of CDs (cf. Section 2.3). Such CDs are construed on suitable surfaces, and the systems of geodesics constitute their line systems. One obtains generalizations of the Hilbert planes considered so far by using surfaces that permit (local) geodesic mappings into the Euclidean plane. According to a classical result by Beltrami [6], such surfaces have, of necessity, constant Gaussian curvature. The criteria for Desarguesian Hilbert systems carry over to the case of non-flat models (cf. *Satz 2.3.8* and *Satz 2.3.9*).

Thus, we have laid the cornerstones for the explicit construction and analysis of non-flat Hilbert line systems. We use CDs on a particular surface of revolution of positive Gaussian curvature K , the so-called spindle surface. For values of K and the radius a of the equator that satisfy $0 < a^2 K < 1$, a covering map of this surface is given by $\tilde{f}: \left(\frac{-\pi}{2\sqrt{K}}, -\frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{f}(u, v) = \left(a \cos\left(\sqrt{K} u\right) \cos v, a \cos\left(\sqrt{K} u\right) \sin v, \mathfrak{E}(u)\right)$ with the

elliptic integral

$$\mathfrak{E}(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} x)} dx.$$

In Section 5.1 we study the local and global behavior of the geodesics on the spindle surface and procure explicit parameterizations of these geodesics. We then ensure that suitable sections of the spindle surface with planes that are parallel to the axis of rotation do actually yield realizations of CDs in 3-space. Any such CD can be embedded into the real affine plane via a local geodesic mappings that the spindle surface (as any constant-curvature surface) permits. For a given point on the surface with azimuthal angle v_0 , a local geodesic mapping λ_{v_0} is given by $\bar{\lambda}_{v_0} \circ f_{v_0}^{-1}$, where

$$f_{v_0}: D_{v_0} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \tilde{f}(u, v)$$

is the restriction of \tilde{f} to a suitably chosen domain D_{v_0} (cf. Definition 5.1.1), and

$$\bar{\lambda}_{v_0}: D_{v_0} \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \tan(a\sqrt{K}(v - v_0)) \\ \tan(\sqrt{K}u) \sec(a\sqrt{K}(v - v_0)) \end{pmatrix}$$

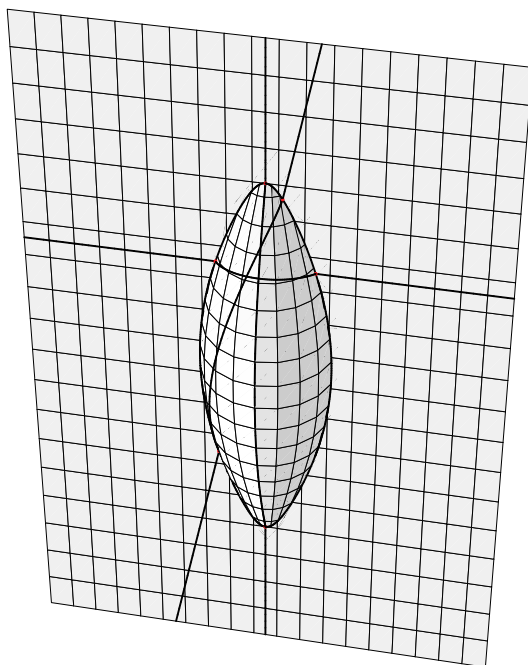
is a geodesic parameter transformation (cf. Definition 1.3.42 and Proposition 5.1.5).

In the final two sections of this thesis, we apply the methods established in Chapters 2 and 3 to show that the Hilbert line system construed by means of a concrete spindle surface is not Desarguesian. In order to do so, we demonstrate that the curve bounding the CD on the surface and its image under λ_{v_0} are not pointwise projectively equivalent (cf. *Ergebnis* 5.3.7). The situation is quite different, however, when the spindle surface is replaced with a sphere, in which case a Desarguesian line system is obtained. To handle the rather voluminous terms and lengthy calculations required to test the (transcendental) curves occurring here for projective equivalence, programs were written for and run within a

Summary

computer algebra system. Listings of the computer programs are shown in the appendix.

We conclude this summary by depicting the *spindle surface plane* that we have analyzed. The figure below shows how three lines that are confluent in the plane are modified by means of geodesic arcs on the surface. The three geodesics and, consequently, the modified lines are not confluent. When placing the vertices of two triangles with pairwise parallel sides onto the lines in the flat part of the plane, we obtain a configuration of triangles that have the ideal line as axis but do not lie centrally. Consequently, this Hilbert line system is a realization of a non-Desarguesian affine plane in three-dimensional space.



1 Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die für die vorliegende Arbeit grundlegenden Begriffe und Resultate zusammen. Da wir Strukturen der Topologischen Geometrie mit für uns interessanten inzidenzgeometrischen Eigenschaften aus Teilstrukturen konstruieren, die wir differentialgeometrisch beschreiben, benötigen wir eine gewisse Auswahl von Grundlagen aus der Inzidenzgeometrie, der Topologischen Geometrie und der klassischen Differentialgeometrie. Wir haben für unsere Darstellung einen Grad an Ausführlichkeit gewählt, der sicherstellen soll, dass alle wesentlichen Grundtatsachen und Begründungszusammenhänge innerhalb dieser Arbeit zur Verfügung stehen. Über die zitierte Literatur sind die von uns nicht ausgeführten Beweise und technischen Einzelheiten sowie weiterführende Resultate zugänglich.

1.1 Inzidenzgeometrische Grundlagen

1.1.1 Inzidenzstrukturen und Morphismen

Wir geben zunächst einige grundlegende Definitionen inzidenzgeometrischer Strukturen an.

1.1.1 Definition. (a) Es seien P und L Mengen und $F \subseteq P \times L$. Dann heißt das Tripel (P, L, F) *Inzidenzstruktur*. Wir nennen ein Paar $(p, l) \in P \times L$ *inzident*, falls $(p, l) \in F$ gilt. Die Elemente von P heißen *Punkte*, die Elemente von L heißen *Blöcke* (bzw. *Geraden*, s.u.), die Elemente von F heißen *Fahnen* oder *Inzidenzen*.

1 Grundlagen

- (b) Für ein Element $l \in L$ heißt $\mathcal{P}_l := \{p \in P \mid (p, l) \in F\}$ die *Punktreihe* von l .
- (c) Für einen Punkt $p \in P$ heißt $\mathcal{L}_p := \{l \in L \mid (p, l) \in F\}$ das *Büschel* des Punktes p .

1.1.2 Definition. Eine Inzidenzstruktur (P, L, F) heißt *partieller linearer Raum*, wenn es zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten $p, q \in P$ höchstens ein Element $l \in L$ mit $\{p, q\} \subseteq \mathcal{P}_l$ gibt.

1.1.3 Definition. Eine Inzidenzstruktur (P, L, F) wird als *linearer Raum* bezeichnet, wenn die Punktreihe \mathcal{P}_l jedes Blocks $l \in L$ mindestens zweielementig ist und es zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten $p, q \in P$ genau einen Block $l \in L$ mit $\{p, q\} \subseteq \mathcal{P}_l$ gibt.

Insbesondere, wenn (P, L, F) ein linearer Raum ist, werden die Elemente von L *Geraden* genannt, das Büschel \mathcal{L}_p eines Punktes $p \in P$ wird dann als *Geradenbüschel* bezeichnet. In Fällen, in denen bei gegebener Punktmenge P und Geradenmenge L unterschiedliche Familienmengen F und G zu behandeln sind, verwenden wir zur Verdeutlichung auch Bezeichnungen wie *F-Geradenbüschel* eines Punktes von $p \in P$ bzw. *F-Punktreihe* einer Geraden $l \in L$.

1.1.4 Bemerkung. Es sei $S = (P, L, F)$ ein linearer Raum. Dann ist jede Unterinzidenzstruktur $U = (Q, M, G)$ mit $Q \subseteq P$, $M \subseteq L$ und $G \subseteq F \cap (Q \times M)$ ein partieller linearer Raum.

1.1.5 Definition. Es sei (P, L, F) ein linearer Raum.

- (a) Eine Menge von Punkten $A \subseteq P$ heißt *kollinear in* (P, L, F) , wenn eine Gerade $l \in L$ mit $A \subseteq \mathcal{P}_l$ existiert.
- (b) Eine Menge von Geraden $B \subseteq L$ heißt *konfluent in* (P, L, F) , wenn ein Punkt $p \in P$ derart existiert, dass für alle $l \in B$ die Beziehung $p \in \mathcal{P}_l$ gilt.
- (c) Für zwei voneinander verschiedene Punkte p und q von P bezeichne $p \vee q$ die (in Definition 1.1.3 postulierte) eindeutig bestimmte Gerade $l \in L$ mit $\{p, q\} \subseteq \mathcal{P}_l$. Diese heie *Verbindungsgerade* der Punkte p und q .

1.1.6 Lemma. *In einem linearen Raum (P, L, F) ist die Schnittmenge der Punktreihen je zweier voneinander verschiedener Geraden höchstens einelementig.*

Beweis durch Kontraposition. Falls für zwei Geraden $l, m \in L$ zwei voneinander verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}_m$ existieren, so gilt wegen der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden $p \vee q$ die Identität $l = m$. □

Nachdem wir die Bezeichnungen inzidenzgeometrischer Objekte fixiert haben, führen wir die zugehörigen Morphismen ein.

1.1.7 Definition. Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) Inzidenzstrukturen und $\alpha: P \rightarrow Q$, $\beta: L \rightarrow M$ Abbildungen.

- (a) Es heißt $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ *Morphismus (von Inzidenzstrukturen)*, falls für die Abbildung $\alpha \times \beta: P \times L \rightarrow Q \times M$, $(p, l) \mapsto (\alpha(p), \beta(l))$ die Inklusion $(\alpha \times \beta)(F) \subseteq G$ gilt.
- (b) Ein Morphismus $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ heißt *Monomorphismus (von Inzidenzstrukturen)*, falls α und β beide injektiv sind.
- (c) Ein Morphismus $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ heißt *Isomorphismus (von Inzidenzstrukturen)*, falls α und β beide bijektiv sind und $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}): (Q, M, G) \rightarrow (P, L, F)$ Morphismus ist.
- (d) Ein Isomorphismus $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (P, L, F)$ heißt *Automorphismus* der Inzidenzstruktur (P, L, F) .

Blöcke von Inzidenzstrukturen sind im Allgemeinen nicht durch ihre Punktreihen festgelegt. Das folgende Lemma beschreibt einen kanonischen Isomorphismus für diejenigen Inzidenzstrukturen, in denen sich Blöcke mit ihren Punktreihen identifizieren lassen.

1 Grundlagen

1.1.8 Lemma. *Es sei (P, B, F) eine Inzidenzstruktur mit der Eigenschaft, dass für alle $b, c \in B$ aus der Gleichung $\mathcal{P}_b = \mathcal{P}_c$ die Identität $b = c$ folgt. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen:*

(a) *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \varphi_B: B &\rightarrow \{\mathcal{P}_b \mid b \in B\}, b \mapsto \mathcal{P}_b && \text{und} \\ \varphi_F: F &\rightarrow \{(a, \mathcal{P}_b) \mid (a, b) \in F\}, (p, b) \mapsto (p, \mathcal{P}_b) \end{aligned}$$

sind bijektiv.

(b) *Es ist $(\text{id}_P, \varphi_B): (P, B, F) \rightarrow (P, \{\mathcal{P}_b \mid b \in B\}, \in)$ ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen. \square*

1.1.9 Bemerkung. Die Voraussetzungen von Lemma 1.1.8 sind insbesondere für lineare Räume erfüllt.

1.1.10 Definition. Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume, und es seien $\alpha: P \rightarrow Q$ und $\beta: L \rightarrow M$ injektive Abbildungen derart, dass $(p, l) \in F$ genau dann zutrifft, wenn $(\alpha(p), \beta(l)) \in G$ gilt. In diesem Falle heißt (α, β) *Einbettung* von (P, L, F) in (Q, M, G) .

1.1.11 Bemerkungen. (a) Für eine Einbettung (α, β) ist ausgeschlossen, dass ein Bildpunkt $\alpha(p)$ inzident mit einer Bildgeraden $\beta(l)$ ist, wenn nicht bereits p und l inzident sind.

(b) Eine Einbettung (α, β) ist insbesondere ein Monomorphismus von Inzidenzstrukturen. Dagegen braucht ein Monomorphismus noch keine Einbettung zu sein, vgl. Bemerkung 1.1.18.

(c) Für eine Einbettung $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ sei $\alpha|_{\alpha(P)}$ die Korestriktion von α auf $\alpha(P)$ und $\beta|_{\beta(L)}$ die Korestriktion von β auf $\beta(L)$. Dann ist $(\alpha|_{\alpha(P)}, \beta|_{\beta(L)}): (P, L, F) \rightarrow (\alpha(P), \beta(L), (\alpha \times \beta)(F))$ ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen.

Wir wollen im Folgenden näher beleuchten, welche Anforderungen an die Abbildungen zwischen den Punktmengen linearer Räume zu stellen sind, damit sich Morphismen (Monomorphismen, Isomorphismen) ergeben, und so in formaler Hinsicht die Verbindung zu den Literaturstellen herstellen, an denen mit Punktabbildungen gearbeitet wird, ohne dass die zugehörigen Geradenabbildungen explizit erwähnt werden.¹

1.1.12 Definition. Für lineare Räume (P, L, F) und (Q, M, G) heißt eine Abbildung $\alpha: P \rightarrow Q$ *Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G)* , wenn es zu jedem $l \in L$ ein $m \in M$ mit $\alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_m$ gibt.

1.1.13 Lemma. Es sei $A \subseteq P$ eine in (P, L, F) kollineare Menge von Punkten und $\alpha: P \rightarrow Q$ eine Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) . Dann ist die Menge $\alpha(A)$ kollinear in (Q, M, G) .

Beweis. Falls $A \subseteq P$ eine in (P, L, F) kollineare Menge von Punkten ist, so existiert eine Gerade l mit $A \subseteq \mathcal{P}_l$. Für eine Lineation α von (P, L, F) nach (Q, M, G) existiert nach Definition eine Gerade $m \in M$ mit $\alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_m$. Insgesamt gilt also $\alpha(A) \subseteq \alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_m$, d.h. die Menge $\alpha(A)$ der Bildpunkte ist kollinear in (Q, M, G) . \square

Jede Lineation erhält also die Kollinearität von Punkten. Wir wollen nun insbesondere *injektive* Lineationen charakterisieren.

1.1.14 Lemma. Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume, und es sei $\alpha: P \rightarrow Q$ eine injektive Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Falls p, q und r drei voneinander verschiedene, in (P, L, F) kollineare Punkte sind, so ist die Menge $\{\alpha(p), \alpha(q), \alpha(r)\}$ der Bildpunkte kollinear in (Q, M, G) .
- (b) α ist Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) .

¹ Vgl. Abschnitt 1.2.2.

1 Grundlagen

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Es gelte die Aussage, dass die Bilder dreier voneinander verschiedener kollinear Punkte kollinear sind, und es sei $l \in L$. Da (P, L, F) ein linearer Raum ist, enthält \mathcal{P}_l mindestens zwei Punkte p und q , die unter der injektiven Abbildung α auf voneinander verschiedene Punkte $\alpha(p)$ und $\alpha(q)$ abgebildet werden. Diese Bildpunkte liegen, da (Q, M, G) ein linearer Raum ist, auf einer eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden $m := \alpha(p) \vee \alpha(q)$. Falls \mathcal{P}_l zweielementig ist, so gilt $\alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_m$, und wir sind fertig. Im Falle $|\mathcal{P}_l| > 2$ folgern wir für jeden weiteren Punkt $r \in \mathcal{P}_l \setminus \{p, q\}$ durch Anwendung von Aussage (a) auf die Menge $\{p, q, r\}$, dass $\alpha(r) \in \mathcal{P}_m$ gilt. Somit ist auch in diesem Fall $\alpha(\mathcal{P}_l)$ in \mathcal{P}_m enthalten, d.h. α ist eine Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) .

Die Implikation (b) \Rightarrow (a) folgt unmittelbar aus Lemma 1.1.13. \square

1.1.15 Lemma. *Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume. Dann ist durch jede injektive Lineation $\alpha: P \rightarrow Q$ eine Geradenabbildung $\beta_\alpha: L \rightarrow M$ eindeutig bestimmt, und es ist $(\alpha, \beta_\alpha): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ ein Morphismus von Inzidenzstrukturen.*

Beweis. Es sei $l \in L$. Da α Lineation ist, existiert eine Gerade $m \in M$ mit $\alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_m$. Es bleibt zu zeigen, dass m eindeutig bestimmt ist. Sei $m' \in M$ und $\alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_{m'}$. Dann haben \mathcal{P}_m und $\mathcal{P}_{m'}$ die Punkte in $\alpha(\mathcal{P}_l)$ gemein. Da mit der Geraden l in dem linearen Raum (P, L, F) mindestens zwei Punkte inzident sind, ist $\alpha(\mathcal{P}_l)$ wegen der Injektivität von α mindestens zweielementig. Aus der Eigenschaft von (Q, M, G) als linearer Raum folgt somit $m = m'$. Mit $\beta_\alpha(l) := m$ folgt für alle $p \in \mathcal{P}_l$, mithin für alle $(p, l) \in F$, die Beziehung $(\alpha(p), \beta_\alpha(l)) \in G$. \square

1.1.16 Bemerkungen.

- (a) In der Situation von Lemma 1.1.15 nennen wir β_α die *von α induzierte Geradenabbildung* und (α, β_α) den *von α induzierten Morphismus*.

- (b) Die Aussage von Lemma 1.1.15 gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen, dass (Q, M, G) ein partieller linearer Raum und (P, L, F) eine Inzidenzstruktur ist, in der die Punktreihe jeder Geraden mindestens zwei Punkte enthält.
- (c) Eine injektive Lineation garantiert noch keine injektive Geradenabbildung, wie aus Lemma 1.1.17 deutlich wird, vgl. auch Bemerkung 1.1.28 (b).

1.1.17 Lemma. Für lineare Räume (P, L, F) und (Q, M, G) sei $\alpha: P \rightarrow Q$ eine injektive Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) und $\beta: L \rightarrow M$ die von α induzierte Geradenabbildung.

- (a) Falls ein nicht inzidenten Punkt-Geradenpaar $(p, l) \notin F$ existiert, das auf ein inzidenten Paar $(\alpha(p), \beta(l)) \in G$ abgebildet wird, so ist β nicht injektiv.
- (b) Falls β injektiv ist, so ist $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ eine Einbettung.

Beweis. (a) Es sei $l \in L$ und $p \in P \setminus \mathcal{P}_l$, dann existieren voneinander (und von p) verschiedene Punkte $q, q' \in \mathcal{P}_l$. Wir betrachten nun die (eindeutig bestimmte) Gerade $m := p \vee q$. Es ist $m \neq l$, denn sonst gälte $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_m$ nach Bemerkung 1.1.9, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wegen der Injektivität von α sind $\alpha(p)$, $\alpha(q)$ und $\alpha(q')$ paarweise verschieden. Die Abbildung β ordnet m die Gerade $\beta(m) := \alpha(p) \vee \alpha(q)$ und $l = q \vee q'$ die Gerade $\beta(l) := \alpha(q) \vee \alpha(q')$ zu. Der Punkt $\alpha(q)$ inzidiert also mit den Geraden $\beta(l)$ und $\beta(m)$, und der Punkt $\alpha(p)$ ist inzident mit $\beta(m)$. Da (Q, M, G) ein linearer Raum ist, kann es zu den beiden Punkten $\alpha(p)$ und $\alpha(q)$ nur eine Gerade $\alpha(p) \vee \alpha(q)$ geben. Falls also $\alpha(p)$ mit $\beta(l)$ inzidiert, so gilt notwendig $\beta(l) = \beta(m)$, und es folgt, dass die Abbildung β nicht injektiv ist.

- (b) Die Aussage folgt nach Kontraposition von Aussage (a) direkt aus Definition 1.1.10. □

1 Grundlagen

1.1.18 Bemerkung. Wir weisen darauf hin, dass die Aussage (a) von Lemma 1.1.17 im Allgemeinen nicht gilt, wenn (P, L, F) lediglich ein partieller linearer Raum ist. So gibt es etwa Monomorphismen der (abstrakten) Desargueskonfiguration (vgl. Definition 1.1.40) in die reelle projektive Ebene, bei denen in der Bildkonfiguration zusätzliche Inzidenzen bestehen, so etwa in der Situation des „kleinen Satzes von Desargues“ (vgl. Definition 1.1.46).

Wenngleich injektive Lineationen, wie eben beobachtet, nicht in jedem Fall Einbettungen liefern, so sind umgekehrt die Punktabbildungen von Einbettungen auch im Falle allgemeiner Inzidenzstrukturen stets injektive Lineationen.

1.1.19 Lemma. *Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) Inzidenzstrukturen, und es sei (α, β) eine Einbettung von (P, L, F) in (Q, M, G) . Dann ist die Abbildung α eine injektive Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) .*

Beweis. Die Injektivität von α folgt direkt aus der Definition von Einbettungen. Für jede Gerade $l \in L$ und jeden Punkt $p \in \mathcal{P}_l$ gilt nach Voraussetzung $(\alpha(p), \beta(l)) \in G$, also ist $\alpha(\mathcal{P}_l) \subseteq \mathcal{P}_{\beta(l)}$, somit ist α eine Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) . \square

1.1.20 Bemerkung. Falls (P, L, F) ein linearer Raum ist, so besitzt auch die von (α, β) als Unterstruktur von (Q, M, G) induzierte Inzidenzstruktur $(\alpha(P), \beta(L), (\alpha \times \beta)(F))$ diese Eigenschaft. Auch in diesem Fall kann es jedoch *außerhalb von* $(\alpha \times \beta)(F)$ weitere Inzidenzen geben. So lassen sich Einbettungen denken, bei denen die Schnittmenge der G -Punktreihen der β -Bilder zweier sich nicht schneidender Geraden aus L nicht leer ist, oder bei denen gar die G -Geradenbüschel zweier voneinander verschiedener Punkte aus $\alpha(P)$ mehr als eine Gerade gemein haben.

Der letztere Fall kann nur eintreten, wenn Verbindungsgeraden in der Zielstruktur (Q, M, G) nicht eindeutig sind, und aufgrund dieser Mehrdeutigkeit lässt sich eine solche Einbettung *nicht* durch Vorgabe einer injektiven Lineation gewinnen. Im Folgenden wollen wir derlei Komplikationen aus dem Weg gehen und uns für

solche Einbettungen interessieren, bei denen die Ausgangs- und Zielstrukturen lineare Räume sind.

1.1.21 Lemma. *Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume, und es sei $\alpha: P \rightarrow Q$ eine injektive Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *Die von α nach Lemma 1.1.15 induzierte Geradenabbildung $\beta: L \rightarrow M$ ist injektiv.*
- (b) *Drei voneinander verschiedene Punkte p, q und r in P sind kollinear in (P, L, F) , wenn ihre Bilder $\alpha(p), \alpha(q)$ und $\alpha(r)$ kollinear in (Q, M, G) sind.*

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Es sei die Geradenabbildung β injektiv. Wir zeigen, dass die Kontraposition der Aussage (b) gilt. Es seien also p, q und r drei voneinander verschiedene, nicht kollineare Punkte. Dann sind die Geraden $l := p \vee q$ und $l' := q \vee r$ voneinander verschieden, also sind auch $\beta(l) = \alpha(p) \vee \alpha(q)$ und $\beta(l') = \alpha(q) \vee \alpha(r)$ wegen der Injektivität von β voneinander verschieden. Dann kann aber $\alpha(r) \in \mathcal{P}_{\beta(l)}$ nicht gelten, das heißt, die Menge $\{\alpha(p), \alpha(q), \alpha(r)\}$ ist nicht kollinear in (Q, M, G) .

(b) \Rightarrow (a): Es gelte Aussage (b), und es seien l und l' zwei voneinander verschiedene Geraden in L . Dann existieren wenigstens zwei voneinander verschiedene Punkte p und q in \mathcal{P}_l sowie mindestens ein von p und q verschiedener Punkt r in $\mathcal{P}_{l'}$. Denn gäbe es letzteren nicht, so wäre die Menge der zwei Punkte in $\mathcal{P}_{l'}$, deren Existenz durch die Definition des linearen Raums gesichert ist, identisch mit $\{p, q\}$, und es gälte $l = l'$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Nach Aussage (b) ist die Menge $\{\alpha(p), \alpha(q), \alpha(r)\}$ nicht kollinear. Die Bildgeraden $\beta(l) = \alpha(p) \vee \alpha(q)$ und $\beta(l')$ sind also nicht identisch, denn sonst gälte $\mathcal{P}_{\beta(l)} = \mathcal{P}_{\beta(l')}$, also insbesondere $\alpha(r) \in \mathcal{P}_{\beta(l)}$, ein Widerspruch. Damit ist β injektiv. \square

Wir fassen die bislang diskutierten Zusammenhänge im folgenden Korollar zusammen.

1 Grundlagen

1.1.22 Korollar. *Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume, und es sei $\alpha: P \rightarrow Q$ eine injektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass drei voneinander verschiedene Punkte p, q und r in P genau dann kollinear in (P, L, F) sind, wenn ihre Bilder $\alpha(p), \alpha(q)$ und $\alpha(r)$ kollinear in (Q, M, G) sind. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Es ist α eine Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) .*
- (b) *Die von α induzierte Geradenabbildung $\beta: L \rightarrow M$ ist injektiv.*
- (c) *Der Monomorphismus $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ ist eine Einbettung von (P, L, F) in (Q, M, G) .*

Beweis. Aussage (a) folgt direkt aus 1.1.14, (b) ist eine direkte Konsequenz von Lemma 1.1.21, und (c) ist unmittelbare Folge von Lemma 1.1.17. \square

Für eine direkte Anwendung in Kapitel 2, nämlich den Beweis von Satz 2.2.4, wenden wir die Formulierung noch einmal anders:

1.1.23 Lemma. *Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume, und es sei $\alpha: P \rightarrow Q$ eine injektive Lineation. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *Die von α induzierte Geradenabbildung $\beta: L \rightarrow M$ ist injektiv.*
- (b) *Der Monomorphismus $(\alpha, \beta): (P, L, F) \rightarrow (Q, M, G)$ ist eine Einbettung.*
- (c) *Drei voneinander verschiedene Punkte p, q und r in P sind genau dann kollinear in (P, L, F) , wenn ihre Bilder $\alpha(p), \alpha(q)$ und $\alpha(r)$ kollinear in (Q, M, G) sind.*

Beweis. Die Implikation (b) \Rightarrow (a) ist klar, die Umkehrung wurde in Lemma 1.1.17 bewiesen. Die Implikation (c) \Rightarrow (a) folgt aus Lemma 1.1.21, die Umkehrung aus der Kombination von Lemma 1.1.14 und Lemma 1.1.21. \square

Wir greifen nun den zuvor geknüpften Faden wieder auf und konstatieren, dass sich im Falle bijektiver Lineationen sogar die Surjektivität der Geradenabbildung ergibt.

1.1.24 Lemma. *Für lineare Räume (P, L, F) und (Q, M, G) sei $\alpha: P \rightarrow Q$ eine bijektive Lineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) . Dann ist die von α induzierte Geradenabbildung $\beta: L \rightarrow M$ surjektiv.*

Beweis. Es sei $m \in M$. Dann existieren zwei voneinander verschiedene Punkte $q, q' \in Q$ mit $\{q, q'\} \subseteq \mathcal{P}_m$, die durch α^{-1} auf die voneinander verschiedenen Punkte $\alpha^{-1}(q)$ und $\alpha^{-1}(q')$ abgebildet werden. Da (P, L, F) ein linearer Raum ist, existiert genau eine Gerade $l \in L$ mit $\{\alpha^{-1}(q), \alpha^{-1}(q')\} \subseteq \mathcal{P}_l$. Es folgt $m = \beta(l)$, denn q, q' legen (wegen der Wohldefiniertheit von β) einerseits die Gerade $\beta(l)$ und andererseits (nach Voraussetzung) die Gerade m fest. Wir folgern, dass zu jedem $m \in M$ ein Urbild unter β existiert, also ist β surjektiv. \square

Wir nehmen Korollar 1.1.22 und Lemma 1.1.24 zum Anlass für die folgende Definition.

1.1.25 Definition. Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume. Eine bijektive Abbildung $\alpha: P \rightarrow Q$ heißt *Kollineation* von (P, L, F) nach (Q, M, G) , falls drei voneinander verschiedene Punkte p, q, r von P genau dann kollinear in (P, L, F) sind, wenn $\alpha(p), \alpha(q), \alpha(r)$ kollinear in (Q, M, G) sind.

1.1.26 Lemma. *Es seien (P, L, F) und (Q, M, G) lineare Räume, und es sei α eine Kollineation von (P, L, F) nach (Q, M, G) . Dann ist der von α induzierte Morphismus ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen.*

Beweis. Die von α induzierte Geradenabbildung $\beta: L \rightarrow M$ ist nach Korollar 1.1.22 injektiv und nach Lemma 1.1.24 surjektiv. Es bleibt noch zu zeigen, dass $(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ ein Morphismus ist: Für $(q, m) \in G$ setzen wir $p := \alpha^{-1}(q)$ und $l := \beta^{-1}(m)$. Nach Lemma 1.1.17 folgt aus $(\alpha(p), \beta(l)) = (q, m) \in G$, dass $(p, l) \in F$ gilt. Somit

1 Grundlagen

besteht die Inklusion $(\alpha^{-1} \times \beta^{-1})(G) \subseteq F$, mithin ist $(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ ein Morphismus. \square

In Kapitel 2 werden wir die Punktmenge einer gegebenen Inzidenzstruktur vermöge einer injektiven Abbildung, an die noch topologische Anforderungen gestellt werden, in eine vorgelegte Zielmenge „transportieren“. Mit dem folgenden Lemma vergewissern wir uns der Tatsache, dass die inzidenzgeometrischen Eigenschaften hierbei korrekt übertragen werden.

1.1.27 Lemma. *Es sei D eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(D)$ ein System von Teilmengen von D derart, dass $\mathbf{S} := (D, \mathcal{D}, \in)$ ein linearer Raum ist. Ferner sei A eine Menge und $\gamma: D \rightarrow A$ eine injektive Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) *Die Abbildung γ' , die jeder Geraden $l \in \mathcal{D}$ die Teilmenge $\gamma(l) = \{\gamma(p) \mid p \in l\}$ von A zuordnet, ist injektiv.*
- (b) *Die Inzidenzstruktur $\mathbf{T} := (\gamma(D), \gamma'(\mathcal{D}), \in)$ ist ein linearer Raum.*
- (c) *Die Punktabbildung γ ist eine Lineation von \mathbf{S} nach \mathbf{T} , und die von dieser injektiven Lineation nach Lemma 1.1.15 induzierte Geradenabbildung β_γ stimmt auf \mathcal{D} mit γ' überein.*
- (d) *Die Korestriktion $\gamma|_{\gamma(D)}: D \rightarrow \gamma(D)$ ist eine Kollineation, und das Paar $(\gamma|_{\gamma(D)}, \gamma'|_{\gamma'(\mathcal{D})}): \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$ ist ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen.*

Beweis. (a) Es seien $l, m \in \mathcal{D}$ mit $\gamma'(l) = \gamma'(m)$, d.h. $\gamma(l) = \gamma(m)$. Wegen der Injektivität von γ gilt $l = (\gamma^{-1} \circ \gamma)(l)$ und $(\gamma^{-1} \circ \gamma)(m) = m$, aus der Voraussetzung $\gamma(l) = \gamma(m)$ folgt somit $l = m$, also ist γ' injektiv.

- (b) Da \mathbf{S} nach Voraussetzung ein linearer Raum ist, besitzt jede Gerade aus \mathcal{D} mindestens zwei voneinander verschiedene Punkte; wegen der Injektivität von γ ist daher auch jede Gerade in $\gamma'(\mathcal{D})$ mindestens zweipunktig.

Ferner existiert zu je zwei voneinander verschiedene Punkten p und q in $\gamma(\mathcal{D})$ genau eine Gerade aus $\gamma'(\mathcal{D})$, die $\{p, q\}$ enthält, und zwar das Bild der Verbindungsgeraden $\gamma^{-1}(p) \vee \gamma^{-1}(q) \in \mathcal{D}$ unter γ' .

(c) ist klar.

(d) Die Abbildung $\gamma|_{\gamma(\mathcal{D})}$ ist bijektiv. Es seien drei Punkte p, q, r kollinear in \mathbf{T} . Dann existiert eine Gerade $l \in \mathcal{D}$ mit $\{p, q, r\} \subset \gamma'(l)$, folglich sind die Urbilder der drei Punkte in $l = \gamma'^{-1}(\gamma'(l))$ enthalten. Damit ist $\gamma|_{\gamma(\mathcal{D})}$ Kollineation. Mit Aussage c), der Feststellung $\beta_\gamma = \gamma'|_{\gamma'(\mathcal{D})}$ sowie Lemma 1.1.26 folgt, dass $(\gamma|_{\gamma(\mathcal{D})}, \gamma'|_{\gamma'(\mathcal{D})})$ ein Isomorphismus ist. \square

Im Hinblick auf die Untersuchungen in Kapitel 2 wollen wir noch die Fälle betrachten, in denen auf der Menge A bereits ein Mengensystem \mathcal{A} so ausgezeichnet ist, dass sich ein linearer Raum ergibt.

1.1.28 Bemerkungen. Es seien A und D Mengen und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(D)$ bzw. $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ Systeme von Teilmengen derart, dass $\mathbf{S} = (D, \mathcal{D}, \in)$ und $\mathbf{A} := (A, \mathcal{A}, \in)$ lineare Räume sind. Ferner sei $\gamma: D \rightarrow A$ injektiv, und es sei γ' die Abbildung, die jeder Geraden $l \in \mathcal{D}$ die Teilmenge $\gamma(l) = \{\gamma(p) \mid p \in l\}$ von A zuordnet.

- (a) Im Allgemeinen ist die zu \mathbf{S} isomorphe Inzidenzstruktur $(\gamma(\mathcal{D}), \gamma'(\mathcal{D}), \in)$ völlig unabhängig von \mathbf{A} . Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf Fälle, in denen γ eine (injektive) Lineation von \mathbf{S} nach \mathbf{A} ist, in denen also zu jedem Element $l' \in \gamma'(\mathcal{D})$ ein Element $m \in \mathcal{A}$ mit $l' \subseteq m$ existiert.
- (b) Wie bereits erwähnt (vgl. Lemma 1.1.17), ist die von der injektiven Lineation γ induzierte Geradenabbildung β_γ im Allgemeinen nicht injektiv. Zur Veranschaulichung betrachte man etwa die linearen Räume $\mathbf{S} := \left(4, \binom{4}{2}, \in\right)$ und $\mathbf{A} :=$

1 Grundlagen

$(4, \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \in)$ sowie die Lineation $\gamma = \text{id}$.² Es gilt hier $\beta_\gamma(\{1, 2\}) = \beta_\gamma(\{2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$.

- (c) Am vorigen Beispiel sieht man ferner, dass sich γ' sehr wohl von β_γ unterscheiden kann. So gilt etwa $\gamma'(\{1, 2\}) = \{1, 2\} \neq \{1, 2, 3\} = \beta_\gamma(\{1, 2\})$.

In Kapitel 2 werden wir unser Augenmerk jedoch auf Inzidenzstrukturen und Lineationen richten, bei denen die Nichtinjektivität der Geradenabbildung ausgeschlossen werden kann, vgl. Lemma 2.1.13.

1.1.29 Lemma. *Es seien $\mathbf{S} = (D, \mathcal{D}, \in)$ und $\mathbf{A} = (A, \mathcal{A}, \in)$ lineare Räume, und es sei $\gamma: D \rightarrow A$ eine injektive Lineation von \mathbf{S} nach \mathbf{A} . Ferner sei γ' die Abbildung, die jeder Geraden $l \in \mathcal{D}$ die Teilmenge $\gamma(l)$ von A zuordnet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *Die von γ induzierte Geradenabbildung $\beta_\gamma: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ist injektiv (und der Morphismus $(\gamma, \beta_\gamma): \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}$ ist eine Einbettung).*
- (b) *Für jede Gerade $l \in \mathcal{D}$ gilt $\gamma'(l) = \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D)$.*

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Es sei β_γ injektiv und es sei $l \in \mathcal{D}$. Dass $\gamma'(l) \subseteq \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D)$ gilt, ist klar, wir weisen die umgekehrte Inklusion nach. Es sei also $y \in \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D)$, und es sei x der Punkt aus D mit $\gamma(x) = y$. Mit der Absicht, einen Widerspruch herbeizuführen, nehmen wir an, dass y nicht auf $\gamma'(l)$ und x somit nicht auf l liegt. Für einen beliebigen Punkt $p \in l$ ist die Gerade $g := p \vee x$ dann von l verschieden. Die Punkte $\gamma(p)$ und $\gamma(x)$ sind wegen der Injektivität von γ voneinander verschieden, ihre Verbindungsgerade ist $\beta_\gamma(g)$. Da andererseits nach Konstruktion $\gamma(p)$ und $\gamma(x) = y$ auf $\beta_\gamma(l)$ liegen, gilt $\beta_\gamma(g) = \beta_\gamma(l)$ im Widerspruch zur Voraussetzung der Injektivität von β_γ .

(b) \Rightarrow (a): Es sei Bedingung (b) erfüllt und es gelte $\beta_\gamma(l) = \beta_\gamma(m)$ für zwei Geraden l und m aus \mathcal{D} . Unter Verwendung von

² Hierbei ist $4 := \{0, 1, 2, 3\}$ und $\binom{4}{2} := \{M \subset 4 \mid |M| = 2\}$, vgl. Definition 1.1.40.

$\gamma'(l) = \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D)$ bzw. $\gamma'(m) = \beta_\gamma(m) \cap \gamma(D)$ folgt hieraus $\gamma'(m) = \gamma'(l)$, wegen der Injektivität von γ und damit von γ' (vgl. Lemma 1.1.27) gilt somit $m = l$, also ist β_γ injektiv. \square

1.1.30 Lemma. *Wenn eine der beiden in Lemma 1.1.29 genannten Bedingungen erfüllt ist, so sind die Inzidenzstrukturen $(\gamma(D), \gamma'(\mathcal{D}), \in)$ und $(\gamma(D), \beta_\gamma(\mathcal{D}), \in)$ isomorph.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Behauptung aus Aussage (b) des vorstehenden Lemmas folgt: Es gelte für jede Gerade $l \in \mathcal{D}$ die Identität $\gamma'(l) = \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D)$. Die Punktabbildung $\text{id}: \gamma(D) \rightarrow \gamma(D)$ ist bijektiv, ebenso die (wegen der Injektivität von γ' wohldefinierte) Geradenabbildung, die jeder Geraden $\gamma'(l) \in \gamma'(\mathcal{D})$ die Gerade $\beta_\gamma(l) \in \beta_\gamma(\mathcal{D})$ zuweist: Deren Surjektivität ist klar, die Injektivität sieht man so ein: Falls $\beta_\gamma(l) = \beta_\gamma(m)$ gilt, so folgt $\gamma'(l) = \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D) = \beta_\gamma(m) \cap \gamma(D) = \gamma'(m)$.

Wir haben schließlich zu zeigen, dass ein Punkt $\gamma(p)$ genau dann auf einer Geraden $\gamma'(l)$ liegt, wenn $\gamma(p)$ mit $\beta_\gamma(l)$ inzidiert. Es sei also $\gamma(p) \in \gamma'(l)$, dann liegt p nach Lemma 1.1.27 und Lemma 1.1.17 auf l . Nach Definition von β_γ gilt auch $\gamma(p) \in \beta_\gamma(l)$. Es sei umgekehrt $\gamma(p) \in \beta_\gamma(l) \cap \gamma(D)$, dann folgt mit Teil (a) von Lemma 1.1.29 die Beziehung $p \in l \cap D$ und somit auch $\gamma(p) \in \gamma'(l)$. \square

1.1.31 Bemerkung. Aufgrund der durch das vorstehende Lemma gesicherten Isomorphie dürfen wir uns Formulierungen erlauben, in denen von der bisherigen strengen Unterscheidung der Geradenmengen $\gamma'(\mathcal{D})$ und $\beta_\gamma(\mathcal{D})$ abgewichen wird. Wir werden allerdings bei der Definition induzierter Unterebenen eine analoge Unterscheidung beachten, vgl. Definition 1.2.13 und Bemerkung 1.2.14.

Damit haben wir die Erörterung der für uns relevanten Aspekte allgemeiner linearer Räume (vgl. Bemerkung 1.1.9) und ihrer Morphismen abgeschlossen. Zu Ende dieses Abschnitts erinnern

1 Grundlagen

wir an die Definitionen zweier spezieller Klassen von Inzidenzstrukturen, die für alles Weitere wesentlich sind, nämlich die der affinen bzw. projektiven Ebenen. Hierzu benötigen wir zunächst den Begriff der Parallelität.

1.1.32 Definition. Zwei Geraden l und m eines linearen Raums heißen *parallel*, falls (entweder) $l = m$ oder $\mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}_m = \emptyset$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $l \parallel m$.

1.1.33 Definition. Ein linearer Raum $\mathbb{A} = (P, L, F)$ heißt *affine Ebene*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Die Geradenmenge L ist nicht leer, und es sind nicht alle Punkte von P kollinear in \mathbb{A} .
- (b) Zu jedem Punkt $p \in P$ und zu jeder Geraden $l \in L$ existiert genau eine zu l parallele Gerade $l' \in \mathcal{L}_p$.

1.1.34 Definition. Ein linearer Raum $\mathbb{P} := (P, L, F)$ mit nichtleerer Punktmenge P wird *projektive Ebene* genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Das Geradenbüschel \mathcal{L}_p jedes Punktes $p \in P$ enthält mindestens drei Geraden, und die Punktreihe \mathcal{P}_l jeder Geraden $l \in L$ enthält mindestens drei Punkte.
- (b) Zu je zwei Geraden l und m in L existiert genau ein Punkt p , welcher sowohl mit l als auch mit m inzident ist.

1.1.35 Bemerkung. In jeder projektiven Ebene existiert ein *Viereck in allgemeiner Lage*, d.h. eine vierelementige Teilmenge $V \subset P$ mit der Eigenschaft, dass keine dreielementige Teilmenge von V kollinear ist. Man kann dies bei der Definition projektiver Ebenen zugrundelegen und zeigen, dass dann die Eigenschaft (a) aus Definition 1.1.34 folgt, vgl. etwa [45].

Wir beschreiben nun noch die (engen) Beziehungen zwischen affinen und projektiven Ebenen.

1.1.36 Definition. Es sei $\mathbb{A} = (P, L, F)$ eine affine Ebene. Dann ist \parallel eine Äquivalenzrelation auf L . Für $l \in L$ bezeichne $[l]_{\parallel}$ die Klasse der zu l parallelen Geraden. Ferner sei $L/\parallel := \{[l]_{\parallel} \mid l \in L\}$ die Menge aller Parallelklassen in L . Wir setzen

$$\bar{P} := P \cup L/\parallel,$$

$$\bar{L} := L \cup \{L\},$$

$$\bar{F} := F \cup \{([l]_{\parallel}, l) \mid l \in L\} \cup \{([l]_{\parallel}, \{L\}) \mid l \in L\}$$

und nennen $\bar{\mathbb{A}} := (\bar{P}, \bar{L}, \bar{F})$ den *projektiven Abschluss* oder die *projektive Hülle* von \mathbb{A} .

Die eben eingeführte Bezeichnung wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

1.1.37 Satz. *Es seien \mathbb{A} und \mathbb{B} affine Ebenen.*

- (a) *Die nach Definition 1.1.36 konstruierte projektive Hülle $\bar{\mathbb{A}}$ von \mathbb{A} ist eine projektive Ebene.*
- (b) *Zu jedem Isomorphismus (von Inzidenzstrukturen) $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ existiert genau ein Isomorphismus $\bar{\Phi}: \bar{\mathbb{A}} \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$, welcher Φ fortsetzt.*

Beweis. Dieser Satz gehört zur inzidenzgeometrischen Folklore, ein detaillierter Beweis wird zum Beispiel in [57] vorgeführt. \square

1.1.38 Lemma und Definition. *Es sei $\mathbb{P} = (P, L, F)$ eine projektive Ebene, und es sei $w \in L$. Dann ist die Inzidenzstruktur $\mathbb{P}^w := (P \setminus \mathcal{P}_w, L \setminus \{w\}, F \setminus \{(p, w) \mid p \in F\})$ eine affine Ebene. Diese bezeichnen wir als affine Ableitung von \mathbb{P} an der Geraden w . \square*

1.1.39 Bemerkungen. (a) In der Situation von Lemma 1.1.38 wird w häufig als *Ferngerade* von \mathbb{P}^w bezeichnet.

1 Grundlagen

- (b) Für voneinander verschiedene Geraden $v, w \in L$ sind die affinen Ableitungen \mathbb{P}^v und \mathbb{P}^w im Allgemeinen *nicht* isomorph. Falls es jedoch einen Automorphismus Φ von \mathbb{P} mit einer Geradenabbildung Φ derart gibt, dass $\Phi(v) = w$ gilt, so induziert Φ einen Isomorphismus von \mathbb{P}^v nach \mathbb{P}^w .

1.1.2 Desarguessche projektive und affine Ebenen

Wir formulieren die Desargues-Eigenschaft in der Sprache der Morphismen von Inzidenzstrukturen und erweitern die übliche Definition auf partielle lineare Räume. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts diskutieren wir Konsequenzen des so gewonnenen Begriffs.

1.1.40 Definition. Es sei $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4\}$, und für $k \in \{2, 3\}$ sei $\binom{\Omega}{k} := \{M \subseteq \Omega \mid |M| = k\}$. Ferner sei C die Inklusionsrelation auf $\binom{\Omega}{2} \times \binom{\Omega}{3}$, d.h. es gelte $(M, N) \in C$ für $M \in \binom{\Omega}{2}$ und $N \in \binom{\Omega}{3}$ genau dann, wenn M eine Teilmenge von N ist.

- (a) Die Inzidenzstruktur $\mathbf{D} := \left(\binom{\Omega}{2}, \binom{\Omega}{3}, C \right)$ nennen wir (*abstrakte*) *Desargues-Konfiguration*.
- (b) Für eine Fahne $f \in C$ setzen wir $\mathbf{D}_f := \left(\binom{\Omega}{2}, \binom{\Omega}{3}, C \setminus \{f\} \right)$. Für den speziellen Fall $f_s := (\{2, 4\}, \{2, 3, 4\})$ schreiben wir $C' := C \setminus \{f_s\}$ und $\mathbf{D}' := \mathbf{D}_{f_s}$.

1.1.41 Definition (Desargues-Eigenschaft). Ein partieller linearer Raum $\mathbf{S} = (P, L, F)$ heißt *desarguessch*, falls für jede Fahne $f \in C$ und für jeden Monomorphismus $(\alpha, \beta): \mathbf{D}_f \rightarrow \mathbf{S}$ die Bedingung $(\alpha \times \beta)(f) \in F$ erfüllt ist.

Aus dem folgenden Lemma ergibt sich eine äquivalente, formal schwächere Bedingung für die Desargues-Eigenschaft.

1.1.42 Lemma. Es sei $\text{Sym}(5)$ die Gruppe der Permutationen auf Ω , und die Abbildung $\omega: C \times \text{Sym}(5) \rightarrow C$ sei durch $((q, m), \sigma) \mapsto$

$(\sigma(q), \sigma(m))$ gegeben. Dann ist ω eine transitive Wirkung auf der Fahnenmenge C von \mathbf{D} . \square

1.1.43 Korollar. Ein partieller linearer Raum \mathbf{S} ist genau dann desarguessch, wenn für jeden Monomorphismus $(\alpha, \beta): \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{S}$ die Bedingung $\alpha(\{2, 4\}) \in \mathcal{P}_{\beta(\{2, 3, 4\})}$ erfüllt ist.

1.1.44 Bemerkungen.

- (a) Wir werden die Desargues-Eigenschaft überwiegend im Falle *linearer Räume* betrachten. Falls ein linearer Raum die Desargues-Eigenschaft nach Definition 1.1.41 bzw. Korollar 1.1.43 besitzt, so wird er *desarguesscher linearer Raum* heißen.
- (b) Die abstrakte Desargues-Konfiguration \mathbf{D} ist ein partieller linearer Raum mit zehn Punkten, zehn Geraden und 30 Inzidenzen.
- (c) Jeder Monomorphismus $\mu: \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{S}$ erzeugt eine Unterstruktur von \mathbf{S} mit zehn Punkten, zehn Geraden und mindestens 29 Inzidenzen.
- (d) Falls \mathbf{S} desarguessch ist, so lässt sich jeder Monomorphismus $\mu: \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{S}$ auf \mathbf{D} fortsetzen. Es ist dann $\mu(\mathbf{D})$ eine Unterstruktur von \mathbf{S} mit zehn Punkten, zehn Geraden und mindestens 30 Inzidenzen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass $\mu(\mathbf{D})$ mehr als 30 Inzidenzen aufweist.
- (e) Eine Konsequenz unserer Definition der Desargues-Eigenschaft ist, dass lineare Räume mit sehr wenigen Punkten und Geraden automatisch desarguessch sind, dann nämlich, wenn sie als Zielbereiche von Monomorphismen gar nicht in Frage kommen.

Das folgende einfache Lemma über Unterstrukturen desarguesscher linearer Räume wird sich später (zum Beweis von Satz 1.1.50) als nützlich erweisen, vgl. Abbildung 1.4.

1 Grundlagen

1.1.45 Lemma. *Es sei $\mathbf{S} = (P, L, F)$ ein desarguesscher linearer Raum. Dann ist jede Unterinzidenzstruktur $\mathbf{U} = (Q, M, G)$ mit $Q \subseteq P$, $M \subseteq L$ und $G = F \cap (Q \times M)$ ein desarguesscher partieller linearer Raum.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.1.4 ist jede Unterstruktur \mathbf{U} eines linearen Raums \mathbf{S} ein partieller linearer Raum. Falls die Bedingung von Korollar 1.1.43 für jeden Monomorphismus $\mu: \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{S}$ erfüllt ist, so gilt dies *a fortiori* für jeden Monomorphismus $\mu: \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{U}$. \square

Wir wollen nun den Anschluss an die übliche (geometrische) Sicht- und Sprechweise im Zusammenhang mit der Desargues-Eigenschaft herstellen. Hierzu demonstrieren wir, dass sich im Falle eines desarguesschen linearen Raums \mathbf{S} für einen Monomorphismus $\mu := (\alpha, \beta): \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{S}$ die Inzidenzstruktur $(\alpha, \beta)(\mathbf{D})$ als *Desargues-Figur* mit dem Punkt $\alpha(\{0, 1\})$ als *Zentrum* und der Geraden $\beta(\{2, 3, 4\})$ als *Achse* interpretieren lässt:

Durch die Punkte $\alpha(\{0, 2\})$, $\alpha(\{0, 3\})$ und $\alpha(\{0, 4\})$ bzw. $\alpha(\{1, 2\})$, $\alpha(\{1, 3\})$ und $\alpha(\{1, 4\})$ sind zwei Dreiecke festgelegt. Für jedes der Dreiecke gilt, dass je eine Ecke auf einer der in $\alpha(0, 1)$ konfluenten Geraden $\beta(\{0, 1, 2\})$, $\beta(\{0, 1, 3\})$ bzw. $\beta(\{0, 1, 4\})$ liegt. Die beiden Dreiecke sind somit *in zentraler Lage mit Zentrum* $\alpha(0, 1)$. Die drei Schnittpunkte der drei Geradenpaare $\beta(\{0, 2, 3\})$ und $\beta(\{1, 2, 3\})$, $\beta(\{0, 2, 4\})$ und $\beta(\{1, 2, 4\})$ sowie $\beta(\{0, 3, 4\})$ und $\beta(\{1, 3, 4\})$ liegen auf einer Geraden, nämlich $\beta(2, 3, 4)$. Die beiden Dreiecke sind somit *in axialer Lage mit Achse* $\beta(2, 3, 4)$.

Eine alternative Interpretation ergibt sich, wenn man die Dreiecke mit Ecken $\alpha(\{0, 2\})$, $\alpha(\{1, 2\})$ und $\alpha(\{2, 3\})$ bzw. $\alpha(\{0, 4\})$, $\alpha(\{1, 4\})$ und $\alpha(\{3, 4\})$ betrachtet. Es liegen die drei Schnittpunkte der drei Geradenpaare $\beta(\{0, 1, 2\})$ und $\beta(\{0, 1, 4\})$, $\beta(\{0, 2, 3\})$ und $\beta(\{0, 3, 4\})$ sowie $\beta(\{1, 2, 3\})$ und $\beta(\{1, 3, 4\})$ auf der Geraden $\beta(\{0, 1, 3\})$, die somit Achse ist. Die drei Verbindungsgeraden der drei Punktepaare $\alpha(\{0, 2\})$ und $\alpha(\{0, 4\})$, $\alpha(\{1, 2\})$ und $\alpha(\{1, 4\})$ sowie $\alpha(\{2, 3\})$ und $\alpha(\{3, 4\})$ sind in einem Punkt, dem Zentrum $\alpha(\{2, 4\})$ konfluent.

Wenn von einer Inzidenzstruktur die Desargues-Eigenschaft erst noch nachzuweisen ist, so betrachten wir für jeden Monomorphismus $\mu := (\alpha, \beta): \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{S}$ die Struktur $\mu(\mathbf{D}')$. Es kann entweder $\beta(\{2, 3, 4\})$ als *Kandidat* für die Achse interpretiert werden, dann ergibt sich zwingend $\alpha(\{0, 1\})$ als Zentrum der Figur. Interpretiert man $\alpha(\{2, 4\})$ als *Kandidat* für das Zentrum der Figur, ergibt sich zwingend $\beta(\{0, 1, 3\})$ als Achse der Figur.

Ist die Desargues-Bedingung $\alpha(\{2, 4\}) \in \mathcal{P}_{\beta(\{2,3,4\})}$ erfüllt, so bedeutet dies in der ersteren Interpretation, dass $\beta(\{2, 3, 4\})$ *tatsächlich* Achse der Figur ist, in der letzteren Interpretation, dass die Geraden $\beta(\{0, 2, 4\})$, $\beta(\{1, 2, 4\})$ und $\beta(\{2, 3, 4\})$ im Punkte $\alpha(\{2, 4\})$ konfluent sind, dass also $\alpha(\{2, 4\})$ *tatsächlich* Zentrum der Figur ist. Wir werden uns zumeist der ersten Interpretation anschließen.

Im Falle affiner Ebenen konkurriert die von uns verwandte Definition der Desargues-Eigenschaft mit der folgenden, gemeinhin üblichen (vgl. etwa [36]).

1.1.46 Definition. Es sei \mathbb{A} eine affine Ebene.

- (a) \mathbb{A} heißt *desarguessch*, wenn folgende Aussage gilt: Liegen die entsprechenden Ecken zweier Dreiecke jeweils auf genau einer von drei in \mathbb{A} konfluenten Geraden, (den sogenannten *Trägergeraden*), und sind zwei Paare entsprechender Dreiecksseiten parallel, so ist auch das dritte Paar entsprechender Dreiecksseiten parallel.
- (b) Falls die Aussage in (a) für den Fall *paralleler* Trägergeraden zutrifft, so sagt man, dass in \mathbb{A} der *kleine (affine) Satz von Desargues* gilt.

1.1.47 Lemma. *Für jede (im Sinne von Definition 1.1.46) desarguessche affine Ebene gilt der kleine affine Satz von Desargues.*

Beweis. Siehe etwa Satz 3.1 in [14] oder §2 von [36]. □

1 Grundlagen

Die Umkehrung von Lemma 1.1.47 ist nicht richtig, es gibt affine Ebenen, in denen zwar der kleine affine Satz von Desargues gilt, die aber die Desargues-Eigenschaft gemäß Definition 1.1.46 (a) nicht besitzen (vgl. die Bemerkungen 1.1.67). Als Konsequenz von Lemma 1.1.47 ergibt sich der wichtige, von uns als Satz 1.1.66 festgehaltene Sachverhalt, dass jede desarguessche affine Ebene eine Translationsebene ist.

Unter Verwendung des projektiven Abschlusses übersetzen wir die Bedingung in Definition 1.1.46 (a) so, dass Desargues-Figuren, bei denen das Zentrum in \mathbb{A} liegt und die Achse die Ferngerade ist, schließen (vgl. Definition 1.1.48). Entsprechend bedeutet die Bedingung (b), dass Desargues-Figuren schließen, deren Achse die Ferngerade ist und deren Zentrum auf der Ferngeraden liegt.

1.1.48 Definition. Es sei \mathbb{A} eine affine Ebene, $\overline{\mathbb{A}}$ ihr nach Definition 1.1.36 konstruierter projektiver Abschluss und l die Ferngerade, d.h. die Gerade von $\overline{\mathbb{A}}$, für die $\overline{\mathbb{A}}^l = \mathbb{A}$ gilt. Falls für jeden Monomorphismus $(\alpha, \beta) : \mathbf{D}' \rightarrow \overline{\mathbb{A}}$ mit $\beta(\{2, 3, 4\}) = l$ die Relation $\alpha(\{2, 4\}) \in \mathcal{P}_l$ gilt, so wird \mathbb{A} als *desarguessche affine Ebene* bezeichnet.

Auf den im folgenden Lemma ausgedrückten Sachverhalt werden wir in Kapitel 4 wieder zurückkommen.

1.1.49 Lemma. *Eine affine Ebene \mathbb{A} ist genau dann desarguessch, wenn die folgende Aussage gilt: Sind die Seiten zweier Dreiecke paarweise parallel, so liegen die beiden Dreiecke zentral.*³

Beweis. Es sei \mathbb{A} eine desarguessche Ebene, und es seien zwei Dreiecke mit Eckpunkten p, q, r bzw. p', q', r' so gewählt, dass entsprechende Seiten parallel sind. Wir betrachten zunächst den

³ Gemäß Definition 1.1.48 bezieht sich die *zentrale* Lage der beiden Dreiecke auf den projektiven Abschluss $\overline{\mathbb{A}}$ der affinen Ebene: Falls die Trägergeraden *parallel* sind, so liegt das Zentrum auf der Ferngeraden.

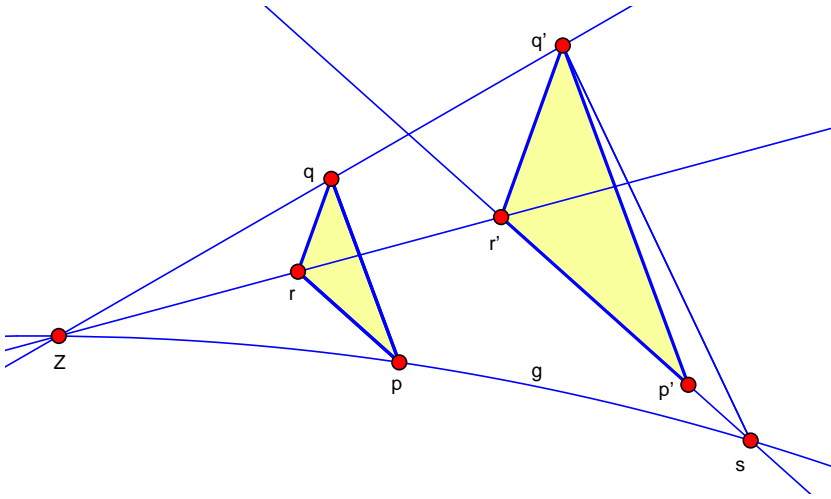


Abbildung 1.1: Zu Lemma 1.1.49 – der Fall konfluenter Geraden.

Fall, in dem sich die Geraden $q \vee q'$ und $r \vee r'$ in einem Punkt Z treffen, wie in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Zu zeigen ist, dass auch die Gerade $p \vee p'$ durch den Punkt Z verläuft. Es bezeichne g die Verbindungsgerade der Punkte Z und p , ferner sei s der Schnittpunkt der Geraden g und $p' \vee r'$.

Da \mathbb{A} nach Voraussetzung desarguessch ist, folgt aus der zentralen Lage der Dreiecke mit Eckpunkten p, q, r bzw. s, q', r' , dass die Seiten pq und sq' (bzw. die Geraden $p \vee q$ und $s \vee q'$) parallel sind. Da in der affinen Ebene \mathbb{A} die Parallele zur Geraden pq durch den Punkt q' eindeutig bestimmt ist, gilt $sq' = p'q'$. Aus der Eindeutigkeit des Schnittpunkts der Geraden $p' \vee q'$ und $p' \vee r'$ folgt $p' = s$. Folglich liegt p' auf der Geraden g , d.h. $p \vee p' = g$, und damit ist gezeigt, dass die beiden Dreiecke zentral liegen.

Für den Fall, dass die Geraden $q \vee q'$ und $r \vee r'$ parallel sind, ist zu zeigen, dass die Gerade $p \vee p'$ derselben Parallelklasse angehört. In diesem Fall bezeichne g die Parallele zur Geraden $q \vee q'$ durch den Punkt p , ferner sei s der Schnittpunkt der Geraden g und $p' \vee r'$, vgl. Abbildung 1.2. Da in \mathbb{A} nach Lemma 1.1.47 der kleine

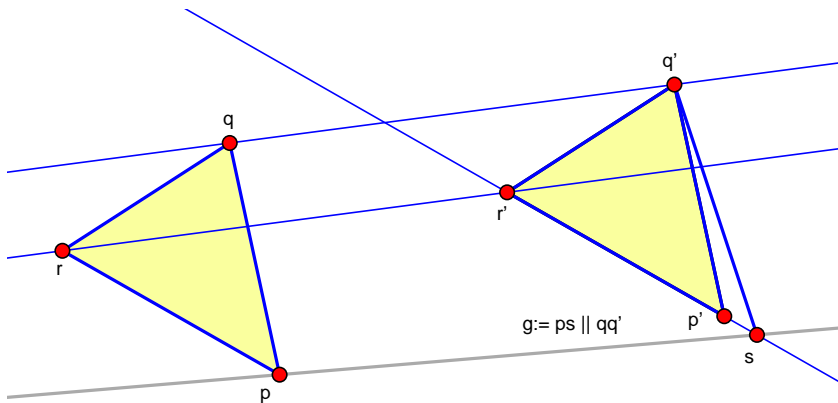


Abbildung 1.2: Zu Lemma 1.1.49 – der Fall paralleler Geraden.

desarguessche Satz gilt, ist die Gerade $s \vee q'$ parallel zu $p \vee q$. Wiederum folgt aus der Eindeutigkeit der Parallele zu $p \vee q$ durch den Punkt q' , dass $s = p'$ gilt. Somit ist $p' \vee p = p \vee s = g$, also gehört $p \vee p'$ derselben Parallelklasse an wie $q \vee q'$ und $r \vee r'$, d.h. die beiden Dreiecke sind zentral, und das Zentrum liegt auf der Ferngeraden.

Es habe \mathbb{A} umgekehrt die Eigenschaft, dass zwei Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten zentral liegen. Wir haben zu zeigen, dass \mathbb{A} eine desarguessche affine Ebene ist. Es seien also Dreiecke mit Eckpunkten p, q und r bzw. p', q' und r' derart gegeben, dass die drei Geraden $p \vee p', q \vee q'$ und $r \vee r'$ in einem Punkt Z konfluent und die Geradenpaare $q \vee r$ und $q' \vee r'$ bzw. $p \vee r$ und $p' \vee r'$ jeweils parallel sind, wie in Abbildung 1.3 veranschaulicht. Ferner bezeichne h die zu $p \vee q$ parallele Gerade durch den Punkt q' und s deren Schnittpunkt mit $p' \vee r'$. Die Dreiecke mit Eckpunkten p, q, r und s, q', r' besitzen paarweise parallele Seiten, liegen also nach Voraussetzung zentral, und das Zentrum ist notwendig der Punkt Z . Mithin liegt s auf der Geraden Zp , woraus $s = p'$ folgt. Damit ist $p' \vee q' = s \vee q' = h$, also ist $p' \vee q'$ parallel zu $p \vee q$. \square

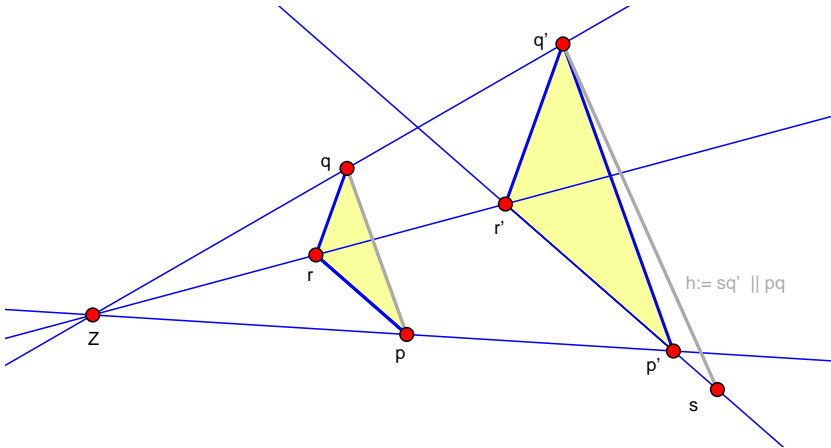


Abbildung 1.3: Zu Lemma 1.1.49 – Nachweis der Desargues-Eigenschaft.

Die Beziehung zwischen desarguesschen affinen Ebenen (im Sinne von Definition 1.1.46 (a) bzw. Definition 1.1.48) und affinen Ebenen, die desarguessche lineare Räume (im Sinne von Definition 1.1.41 bzw. Korollar 1.1.43) sind, ist bislang teilweise geklärt.

1.1.50 Satz. *Jede desarguessche affine Ebene ist ein desarguesscher linearer Raum.*

1.1.51 Vermutung. *Falls eine affine Ebene \mathbb{A} ein desarguesscher linearer Raum ist, so ist \mathbb{A} eine desarguessche affine Ebene.*

Der Beweis von Satz 1.1.50 bedarf einiger Vorbereitungsschritte, die der klassischen Theorie affiner und projektiver Ebenen entstammen. Im Folgenden bezeichne \mathbb{K} einen (nicht notwendig kommutativen) Körper.

1.1.52 Satz (Dimensionssatz). *Es sei \mathbb{V} ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} . Dann gilt für Untervektorräume \mathbb{A} und \mathbb{B} von \mathbb{V} die Identität*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{A} + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{B} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}).$$

1 Grundlagen

Beweis. Siehe etwa Abschnitt 2.2 von [32]. □

Für einen mindestens dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{V} über einem Körper \mathbb{K} bezeichne $u_1\mathbb{V}$ die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume und $u_2\mathbb{V}$ die Menge aller zweidimensionalen Untervektorräume von \mathbb{V} .

1.1.53 Korollar. *Es sei \mathbb{V} ein Vektorraum der Dimension 3 über einem Körper \mathbb{K} .*

- (a) *Zwei zweidimensionale Untervektorräume \mathbb{A} und \mathbb{B} von \mathbb{V} sind entweder identisch oder ihr Schnitt $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ ist ein Untervektorraum der Dimension 1 von \mathbb{V} .*
- (b) *Zwei eindimensionale Untervektorräume \mathbb{A} und \mathbb{B} von \mathbb{V} sind entweder identisch oder ihr Aufspann $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ ist ein Untervektorraum der Dimension 2 von \mathbb{V} .*
- (c) *Die Inzidenzstruktur $\mathbb{P}_2(\mathbb{V}) := (u_1\mathbb{V}, u_2\mathbb{V}, <)$ mit der Unterraumrelation $<$ ist eine projektive Ebene.*

1.1.54 Definition. Es sei \mathbb{V} ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und $v \in \mathbb{V}$ nicht der Nullvektor in \mathbb{V} . Falls \mathbb{V} ein \mathbb{K} -Linksvektorraum ist, so gelte $\langle v \rangle := \mathbb{K}v := \{kv \mid k \in \mathbb{K}\}$, falls \mathbb{V} ein \mathbb{K} -Rechtsvektorraum ist, so gelte $\langle v \rangle := \{vk \mid k \in \mathbb{K}\}$.

1.1.55 Lemma. *Es sei \mathbb{V} ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} mit $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = 3$. In der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{V})$ sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 aus $u_1(\mathbb{V})$ genau dann kollinear, wenn für eine (und dann jede) Wahl von Vektoren $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{V}$ mit $\langle p_i \rangle = P_i$ gilt, dass die Menge $\{p_1, p_2, p_3\}$ linear abhängig ist. □*

Wir weisen nun explizit nach, dass jede in einem dreidimensionalen Vektorraum realisierte projektive Ebene die Desargues-Eigenschaft besitzt.

1.1.56 Satz. *Es sei \mathbb{V} Vektorraum der Dimension 3 über einem Körper \mathbb{K} . Dann ist die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{V})$ desarguessch.*

1.1 Inzidenzgeometrische Grundlagen

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass \mathbb{V} ein \mathbb{K} -Linksvektorraum ist. Wähle vier Punkte Z, P_1, P_2, P_3 derart, dass keine drei Punkte kollinear sind, sowie Repräsentanten z, p_1, p_2, p_3 mit $Z = \langle z \rangle$ sowie $\langle p_i \rangle = P_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Wähle ferner Punkte $Q_1 \in Z \vee P_1, Q_2 \in Z \vee P_1, Q_3 \in Z \vee P_3$ mit $Z \neq Q_i \neq P_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann existieren Repräsentanten q_1, q_2, q_3 mit $\langle q_i \rangle = Q_i$ sowie $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ derart, dass

$$q_i = \alpha_i p_i + \beta_i z$$

und

$$\alpha_i \neq 0 \neq \beta_i \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Nach Konstruktion sind die Dreiecke P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 in zentraler Lage. Wir berechnen nun die Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten. Für alle $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= (P_i \vee P_j) \wedge (Q_i \vee Q_j) \\ &= \{s_i p_i + s_j p_j \mid s_i, s_j \in \mathbb{K}\} \cap \{t_i q_i + t_j q_j \mid t_i, t_j \in \mathbb{K}\} \\ &= \{s_i p_i + s_j p_j \mid s_i, s_j \in \mathbb{K}\} \cap \\ &\quad \{t_i (\alpha_i p_i + \beta_i z) + t_j (\alpha_j p_j + \beta_j z) \mid t_i, t_j \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Für den Punkt S_{ij} muss also gelten:

$$s_i p_i + s_j p_j = t_i (\alpha_i p_i + \beta_i z) + t_j (\alpha_j p_j + \beta_j z),$$

d.h.

$$(s_i - t_i \alpha_i) p_i + (s_j - t_j \alpha_j) p_j - (t_i \beta_i + t_j \beta_j) z = 0.$$

Da nach Voraussetzung $\{p_i, p_j, z\}$ linear unabhängig ist, folgt:

$$(s_i - t_i \alpha_i) = 0, \text{ d.h. } s_i = t_i \alpha_i,$$

$$(s_j - t_j \alpha_j) = 0, \text{ d.h. } s_j = t_j \alpha_j$$

sowie

$$t_i \beta_i + t_j \beta_j = 0, \text{ d.h. } t_j = -t_i \beta_i (\beta_j)^{-1}.$$

1 Grundlagen

Es gilt also

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \{s_i p_i + s_j p_j \mid s_i, s_j \in \mathbb{K}\} \cap \{t_i \alpha_i p_i + t_j \alpha_j p_j \mid t_i, t_j \in \mathbb{K}\} \\ &= \{t_i \alpha_i p_i - (t_i \beta_i (\beta_j)^{-1}) \alpha_j p_j \mid t_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \{t_i (\alpha_i p_i - \beta_i (\beta_j)^{-1} \alpha_j p_j) \mid t_i \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} S_{12} &= \{t_1 (\alpha_1 p_1 - \beta_1 (\beta_2)^{-1} \alpha_2 p_2) \mid t_1 \in \mathbb{K}\}, \\ S_{13} &= \{t_1' (\alpha_1 p_1 - \beta_1 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 p_3) \mid t_1' \in \mathbb{K}\}, \\ S_{23} &= \{t_2 (\alpha_2 p_2 - \beta_2 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 p_3) \mid t_2 \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Wir wählen Repräsentanten s_{ij} von S_{ij} :

$$\begin{aligned} s_{12} &= \alpha_1 p_1 - \beta_1 (\beta_2)^{-1} \alpha_2 p_2, \\ s_{13} &= \alpha_1 p_1 - \beta_1 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 p_3, \\ s_{23} &= \alpha_2 p_2 - \beta_2 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 p_3. \end{aligned}$$

Wir weisen nach, dass die beiden Dreiecke P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 axial liegen, d.h., dass die Punkte S_{12}, S_{13} und S_{23} kollinear sind. Hierfür genügt es zu zeigen, dass die Menge $\{s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$ linear abhängig ist. Es sei also

$$t_1 s_{12} + t_1' s_{13} + t_2 s_{23} = 0.$$

Das heißt,

$$\begin{aligned} t_1 (\alpha_1 p_1 - \beta_1 (\beta_2)^{-1} \alpha_2 p_2) + t_1' (\alpha_1 p_1 - \beta_1 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 p_3) \\ + t_2 (\alpha_2 p_2 - \beta_2 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 p_3) = 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (t_1 \alpha_1 + t_1' \alpha_1) p_1 + (-t_1 \beta_1 (\beta_2)^{-1} \alpha_2 + t_2 \alpha_2) p_2 \\ - (t_1' \beta_1 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 + t_2 \beta_2 (\beta_3)^{-1} \alpha_3) p_3 = 0. \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{p_1, p_2, p_3\}$ folgt

$$t_1 \alpha_1 + t_1' \alpha_1 = 0,$$

$$-t_1 \beta_1 (\beta_2)^{-1} \alpha_2 + t_2 \alpha_2 = 0,$$

$$t_1' \beta_1 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 + t_2 \beta_2 (\beta_3)^{-1} \alpha_3 = 0.$$

Wegen $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$ gilt also

$$t_1 + t_1' = 0,$$

$$t_1 \beta_1 (\beta_2)^{-1} + t_2 = 0,$$

$$t_1' \beta_1 (\beta_3)^{-1} + t_2 \beta_2 (\beta_3)^{-1} = 0.$$

Rechtsmultiplikation der zweiten Gleichung mit β_2 und der dritten Gleichung mit β_3 liefert

$$t_1 + t_1' = 0,$$

$$-t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 = 0,$$

$$t_1' \beta_1 + t_2 \beta_2 = 0.$$

Es folgt also

$$t_1 + t_1' = 0,$$

$$-t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 = 0,$$

$$-t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 = 0.$$

und

$$t_1 + t_1' = 0,$$

$$t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems besteht aus allen Tripeln (t_1, t_1', t_2) der Form

$$(-t \beta_2 (\beta_1)^{-1}, t \beta_2 (\beta_1)^{-1}, t)$$

mit $t \in \mathbb{K}$. Also ist $\{s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$ linear abhängig, und die Punkte S_{12}, S_{13} und S_{23} sind nach Lemma 1.1.55 kollinear. \square

1 Grundlagen

Wir fassen im Folgenden \mathbb{K}^2 und \mathbb{K}^3 als \mathbb{K} -Linksvektorräume auf und schreiben die Elemente als Zeilenvektoren.

1.1.57 Definition und Lemma. Es sei \mathbb{K} ein Körper und

$$\text{aff}_1\mathbb{K}^2 := \{ \mathbf{a} + \langle \mathbf{v} \rangle \mid \mathbf{v} \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbf{a} \in \mathbb{K}^2 \}$$

die Menge aller (eindimensionalen) affinen Unterräume von \mathbb{K}^2 . Dann ist die Inzidenzstruktur $\mathbb{A}_2\mathbb{K} := (\mathbb{K}^2, \text{aff}_1\mathbb{K}^2, \in)$ eine affine Ebene. \square

Für die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ verwenden wir im Folgenden die kürzere Bezeichnung $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$.

1.1.58 Lemma. *Die Abbildung*

$$\pi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbf{u}_1\mathbb{K}^3, (x_1, x_2) \mapsto \langle (x_1, x_2, 1) \rangle$$

ist eine injektive Lineation, und der von π induzierte Morphismus π ist eine Einbettung von $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ in $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$.

Beweis. Die Injektivität von π ist klar. Es sei l eine Gerade von $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$, dann existieren nach Definition 1.1.57 Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^2$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $l = \mathbf{a} + \langle \mathbf{v} \rangle$. Man überlegt sich leicht, dass die Vektoren $(a_1, a_2, 1)$ und $(a_1 + v_1, a_2 + v_2, 1)$ linear unabhängig sind und somit den zweidimensionalen Unterraum $\pi(\mathbf{a}) + \pi(\mathbf{v} + \mathbf{a})$ von \mathbb{K}^3 , d.h. eine Gerade von $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$ aufspannen. Zu jedem Punkt p in l existiert $k \in \mathbb{K}$ mit $p = \mathbf{a} + k\mathbf{v}$. Wir weisen nun nach, dass $\pi(p) \in \pi(\mathbf{a}) + \pi(\mathbf{v} + \mathbf{a})$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} & (a_1 + k v_1, a_2 + k v_2, 1) \\ &= (1 - k)(a_1, a_2, 1) + k(a_1 + v_1, a_2 + v_2, 1). \end{aligned}$$

Also ist $(a_1 + k v_1, a_2 + k v_2, 1) \in \pi(\mathbf{a}) + \pi(\mathbf{v} + \mathbf{a})$, und es folgt $\pi(p) \in \pi(\mathbf{a}) + \pi(\mathbf{v} + \mathbf{a})$. Also ist π eine Lineation.

Wir haben noch zu zeigen, dass die von π induzierte Geradenabbildung injektiv ist. Es seien $\pi(\mathbf{a})$, $\pi(\mathbf{b})$ und $\pi(\mathbf{c})$ voneinander

verschiedene kollineare Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$. Nach Lemma 1.1.55 existiert ein Tripel $(r, s, t) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ derart, dass die Gleichung

$$r(a_1, a_2, 1) + s(b_1, b_2, 1) + t(c_1, c_2, 1) = 0$$

erfüllt ist. Daraus folgt $r + s + t = 0$ und weiter

$$r(a_1, a_2) + s(b_1, b_2) - (r + s)(c_1, c_2) = 0.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $r \neq 0$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} a &= (1 + r^{-1}s)c - (r^{-1}s)b \\ &= c + (r^{-1}s)(c - b). \end{aligned}$$

Wegen der Injektivität von π sind die Punkte a , b , und c der affinen Ebene $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ voneinander verschieden, also ist $c - b$ nicht der Nullvektor, und die Punkte a , b und c sind kollinear in $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$. Mit Lemma 1.1.21 folgt, dass die von π induzierte Geradenabbildung injektiv ist. Nach Lemma 1.1.17 ist der von π induzierte Monomorphismus eine Einbettung. \square

1.1.59 Lemma. *Die Inzidenzstruktur $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ ist ein desarguesscher linearer Raum.*

Beweis. Nach dem eben bewiesenen Lemma in Verbindung mit Bemerkung 1.1.11 ist $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ isomorph zu der Unterebene $\pi(\mathbb{A}_2\mathbb{K})$ von $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$. Da $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$ nach Satz 1.1.56 ein desarguesscher linearer Raum ist, folgt mit Lemma 1.1.45, dass $\pi(\mathbb{A}_2\mathbb{K})$ und somit auch $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ selbst desarguessche lineare Räume sind. \square

1.1.60 Satz. *Es sei \mathbb{A} eine desarguessche affine Ebene. Dann existiert ein (nicht notwendig kommutativer) Körper \mathbb{K} und ein Isomorphismus $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{K}$.*

Beweis. Ein Beweis dieses klassischen Resultats findet sich beispielsweise in [36]. \square

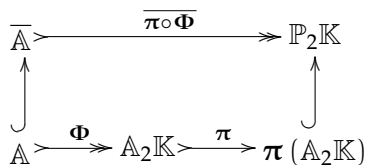


Abbildung 1.4: Diagramm zum Beweis von Satz 1.1.50.

Wir sind nun in der Lage, den Beweis von Satz 1.1.50 zu führen. Es sei \mathbb{A} eine desarguessche affine Ebene. Nach Satz 1.1.60 existiert ein Körper \mathbb{K} und ein Isomorphismus $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{K}$. Die Korestriktion der Einbettung π auf ihr Bild $\pi(\mathbb{A}_2\mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus, also ist (bei Verzicht auf die ausdrückliche Kennzeichnung der Korestriktion in der Notation) $\pi \circ \Phi$ ein Isomorphismus. Vermöge der Fortsetzung $\pi \circ \Phi$ gemäß Satz 1.1.37 ist der projektive Abschluss $\overline{\mathbb{A}}$ von \mathbb{A} isomorph zu $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$, also nach Satz 1.1.56 insbesondere desarguessch. Nach Lemma 1.1.45 ist \mathbb{A} als Unterstruktur von $\overline{\mathbb{A}}$ ein desarguesscher linearer Raum. Das kommutierende Diagramm in Abbildung 1.4 veranschaulicht die Zusammenhänge.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer (sehr knappen) Erwähnung der Beziehung zwischen desarguesschen affinen Ebenen und Translationsebenen.

1.1.61 Definition. Es sei $\mathbb{P} = (P, L, F)$ eine projektive Ebene, und es sei α ein Automorphismus von \mathbb{P} .

- (a) Ein Punkt $z \in P$ heißt *Zentrum* von α , falls jede Gerade $l \in \mathcal{L}_p$ unter α auf sich selbst abgebildet wird.
- (b) Eine Gerade $l \in L$ heißt *Achse* von α , falls α jeden Punkt $p \in \mathcal{P}_l$ fixiert.

1.1.62 Satz (Vgl. etwa [26], Theorem 4.9.). *Falls ein Automorphismus α einer projektiven Ebene ein Zentrum besitzt, so besitzt α auch eine Achse.* \square

1.1.63 Definition. Es sei \mathbb{P} eine projektive Ebene, und es sei α ein Automorphismus von \mathbb{P} .

- (a) Falls α ein Zentrum besitzt, wird α *Zentralkollineation* genannt.
- (b) Eine Zentralkollination mit Zentrum p und Achse l heißt *Elation*, falls $p \in \mathcal{P}_l$ gilt.

1.1.64 Definition. Es sei \mathbb{A} eine affine Ebene mit Ferngerade w .

- (a) Eine Elation heißt *Translation*, falls ihre Achse die Ferngerade w ist.
- (b) \mathbb{A} heißt (*affine*) *Translationsebene*, falls die Gruppe der Translationen transitiv auf den Punkten von \mathbb{A} wirkt.

1.1.65 Lemma. *Eine affine Ebene \mathbb{A} ist genau dann Translationsebene, wenn in \mathbb{A} der kleine Satz von Desargues (vgl. Def. 1.1.46) gilt.*

Beweis. Ein Beweis dieses Resultats findet sich z.B. in Abschnitt 2.1 von [14]. □

Als Konsequenz ergibt sich die folgende wichtige Aussage.

1.1.66 Satz. *Jede desarguessche affine Ebene ist eine Translationsebene.*

1.1.67 Bemerkungen. (a) Eine frühe Übersichtsdarstellung der Theorie von Translationsebenen wurde von André in [3] vorgelegt, darin finden sich Hinweise auf grundlegende Vorgängerarbeiten, wie etwa die von Moufang und M. Hall. Unter der Vielzahl jüngerer Publikationen über Translationsebenen seien die in [50] zitierten Arbeiten von Hähle (u.a. zur Klassifikation 8- und 16-dimensionaler lokalkompakter Translationsebenen, vgl. [20]) sowie die Monographien von Knarr [30] und von Lüneburg [38] genannt.

- (b) Affine Translationsebenen lassen sich durch Quasikörper koordinatisieren, siehe etwa Abschnitt 25 in [50].

1 Grundlagen

- (c) Es gibt (viele) Translationsebenen, welche die Desargues-Eigenschaft nicht besitzen, diese werden durch Quasikörper koordinatisiert, welche keine Schiefkörper sind.
- (d) Eine Studie des interessanten Phänomens nicht isomorpher Quasikörper, welche dieselbe Ebene koordinatisieren, findet sich etwa in [58].

1.1.3 Reelle projektive Ebene und Projektivitäten

In diesem Abschnitt spezialisieren wir zunächst einige in Abschnitt 1.1.2 eingeführte Bezeichnungen und Resultate auf den Fall der reellen projektiven Ebene und diskutieren in Vorbereitung der Kapitel 3 und 4 deren Automorphismen. Wir betrachten \mathbb{R}^3 als \mathbb{R} -Linksvektorraum und identifizieren die Elemente von \mathbb{R}^3 mit den Koordinatenspalten bezüglich der Standardbasis. Der typographischen Vereinfachung halber verwenden wir auch (zu transponierende) Zeilenvektoren und setzen

$(v_1, v_2, v_3)^T := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Die Menge $u_1\mathbb{R}^3$ der eindimensionalen

Untervektorräume von \mathbb{R}^3 bezeichnen wir auch mit $P_2\mathbb{R}$.

1.1.68 Definition. Die Inzidenzstruktur $P_2\mathbb{R} := (u_1\mathbb{R}^3, u_2\mathbb{R}^3, <)$ mit der Unterraumrelation als Inzidenzrelation heißt *reelle projektive Ebene*. Die Elemente von $u_1\mathbb{R}^3$ heißen (*projektive*) *Punkte*, die Elemente von $u_2\mathbb{R}^3$ (*projektive*) *Geraden*.

1.1.69 Bemerkung. Jede Gerade $l \in u_2\mathbb{R}^3$ lässt sich bequem als Kern einer durch einen Zeilenvektor gegebenen Linearform ausdrücken.

1.1.70 Definition. Für einen Punkt $p \in P_2\mathbb{R}$ heißen (a_1, a_2, a_3) *homogene Koordinaten* von p , falls $p = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle$ gilt.

1.1.71 Bemerkung. Zwei Tripel (a_1, a_2, a_3) und (a'_1, a'_2, a'_3) sind genau dann homogene Koordinaten desselben projektiven Punktes, wenn $r \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derart existiert, dass $(a'_1, a'_2, a'_3) = (r a_1, r a_2, r a_3)$ gilt.

Wir spezialisieren die in Lemma 1.1.58 eingeführte Abbildung auf den Fall der reellen affinen Ebene $\mathbb{A}_2\mathbb{R} = (\mathbb{R}^2, \text{aff}_1\mathbb{R}^2, \in)$ und ordnen durch

$$\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \langle (x_1, x_2, 1)^T \rangle$$

jedem Punkt x von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ den projektiven Punkt $\pi(x)$ zu. Ersichtlich sind $(x_1, x_2, 1)$ spezielle homogene Koordinaten von $\pi(x)$, und die homogenen Koordinaten aller Punkte in $\pi(\mathbb{R}^2)$ haben von Null verschiedene dritte Komponenten. Dies entspricht der Tatsache, dass Punkte, deren homogenen Koordinaten von der Form $(a_1, a_2, 0)$ sind, auf der Ferngeraden liegen. Genauer erhalten wir vermöge der durch π induzierten Einbettung π die affine Unterebene $\mathbb{A} := \pi(\mathbb{A}_2\mathbb{R})$ von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Diese ist affine Ableitung von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ an der Geraden $w := \text{Ker}(0, 0, 1)$, und die homogenen Koordinaten jedes Punktes auf der Geraden w sind von der Form $(a_1, a_2, 0)$.

Wir wenden uns nun den Automorphismen von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ zu. Wie üblich, bezeichne $GL_3\mathbb{R}$ die Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen von \mathbb{R}^3 . Wir identifizieren $GL_3\mathbb{R}$ mit der Menge der invertierbaren 3×3 -Matrizen mit reellen Einträgen und bezeichnen das Bild eines Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ unter der Abbildung $A \in GL_3\mathbb{R}$ durch das Matrixprodukt⁴ Av . Die Verknüpfung zweier Abbildungen $A, B \in GL_3\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit AB . Für $r \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung $(rA): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $v \mapsto r(Av)$ gegeben.

1.1.72 Lemma. *Es sei $A \in GL_3\mathbb{R}$. Ordnet man jedem Punkt $\langle v \rangle$ der projektiven Ebene den Punkt $\langle Av \rangle$ zu, so erhält man eine wohldefinierte Abbildung $\mu_A: \mathbb{P}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Die Abbildung μ_A ist eine Kollineation, und der von μ_A induzierte Morphismus μ_A ist ein Automorphismus von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$.*

⁴ Da \mathbb{R} ein kommutativer Körper ist, verträgt sich diese Multiplikation mit der Auffassung von \mathbb{R}^3 als Linksvektorraum.

1 Grundlagen

Beweis. Wir zeigen die Wohldefiniertheit von μ_A . Falls $u \in \langle v \rangle \setminus \{(0,0,0)\}$, so existiert $l \in \mathbb{R}^*$ mit $u = lv$. Also ist $Au = l(Av)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\langle Au \rangle &= \{k(Au) \mid k \in \mathbb{R}\} = \{k(lAv) \mid k \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(kl)(Av) \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle Av \rangle.\end{aligned}$$

Damit ist $\mu_A: \mathbb{P}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}, \langle v \rangle \mapsto \langle Av \rangle$ wohldefiniert. Die Injektivität und Surjektivität von μ_A sind klar. Wir zeigen, dass μ_A eine Kollineation ist: Es seien $\langle u \rangle, \langle v \rangle$ und $\langle w \rangle$ drei voneinander verschiedene Punkte. Diese sind nach Lemma 1.1.55 genau dann kollinear, wenn $(r, s, t) \neq (0,0,0)$ derart existiert, dass die Gleichung $ru + sv + tw = 0$ erfüllt ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Gleichung $rAu + sAv + tAw = 0$ erfüllt ist. Damit sind die Punkte $\langle u \rangle, \langle v \rangle$ und $\langle w \rangle$ genau dann kollinear, wenn dies für $\langle Au \rangle, \langle Av \rangle$ und $\langle Aw \rangle$ gilt. Nach Lemma 1.1.26 ist der von μ_A induzierte Morphismus μ_A ein Isomorphismus und somit ein Automorphismus von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. \square

Wir bezeichnen jeden gemäß Lemma 1.1.72 durch eine lineare Abbildung induzierten Automorphismus von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ auch als *projektive Abbildung* oder als *Projektivität*. Da der Körper der reellen Zahlen keine nichttrivialen Automorphismen zulässt, wird jeder Automorphismus von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie durch eine lineare Abbildung induziert. Näheres hierzu findet sich etwa in [50] (vgl. u.a. Bemerkung 13.7) und in [51] (vgl. Theorem 6.4).

1.1.73 Satz. *Zwei lineare Abbildungen A und B in $GL_3\mathbb{R}$ liefern genau dann dieselbe Projektivität, wenn $r \in \mathbb{R}^*$ mit $A = rB$ existiert.*

Beweis. Siehe z.B. Abschnitt 8.5 von [32]. \square

1.1.74 Korollar. *Die Gruppe $PGL_3\mathbb{R}$ der Projektivitäten der reellen projektiven Ebene ist isomorph zu $GL_3\mathbb{R}/Z(GL_3\mathbb{R})$ mit $Z(GL_3\mathbb{R}) := \{r \text{id}_{\mathbb{R}^3} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$.*

1.2 Aus der Topologischen Geometrie

Wir stellen in diesem Abschnitt die von uns benötigten Grundlagen zu topologischen Inzidenzstrukturen zusammen. Für die hierbei verwandten Begriffe der mengentheoretischen Topologie verweisen wir generell auf den Text von Querenburg [49]. Unserer Auswahl von topologisch-geometrischen Fakten wollen wir zwei Hilfssätze der allgemeinen Topologie voranstellen, die wir in den Beweisen der Sätze 2.2.2 bzw. 2.2.4 von Kapitel 2 anwenden werden.

1.2.1 Lemma. *Es seien X und Y Hausdorffräume. Falls $f: X \rightarrow Y$ und $g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen sind, so ist die Menge $G := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X .*

Beweis. Die Menge $X \setminus G$ ist trivialerweise offen, falls $X \setminus G$ leer ist. Falls aber $x \in X \setminus G$ existiert, so ist $f(x) \neq g(x)$, und es existieren in Y offene, disjunkte Mengen U und V mit $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$. Wegen der Stetigkeit von f und g ist $W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x . Für alle $w \in W$ ist $f(w) \in U$ und $g(w) \in V$, also gilt wegen $U \cap V = \emptyset$, dass $f(w) \neq g(w)$. Somit liegt W ganz in $X \setminus G$, und es folgt die Behauptung. \square

1.2.2 Lemma. *Es seien X und Y topologische Räume. Ferner seien A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$ und $f_1: A_1 \rightarrow Y$ und $f_2: A_2 \rightarrow Y$ stetige Abbildungen derart, dass $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$ gilt. Dann ist die Abbildung*

$$f: X \longrightarrow Y, x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in A_1, \\ f_2(x) & \text{für } x \in A_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. Ein Beweis wird etwa in [59] unter 1.6 vorgeführt. \square

1.2.1 Topologische Ebenen und Morphismen

In linearen Räumen (P, L, F) existieren zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten eindeutig bestimmte Verbindungsgeraden. Dagegen brauchen zwei voneinander verschiedene Geraden keinen gemeinsamen Punkt zu besitzen. Andererseits ist die Schnittmenge der Punktreihen zweier voneinander verschiedener Geraden höchstens einelementig. Bei geeigneter Wahl der Definitionsbereiche lassen sich die genannten Zuordnungen somit als Abbildungen formulieren. Wir setzen

$$\begin{aligned} \text{diag}_P &:= \{(p, q) \in P^2 \mid p = q\}, \\ \text{diag}_L &:= \{(l, m) \in L^2 \mid l = m\}, \\ \mathfrak{S} &:= \{(l, m) \in L^2 \setminus \text{diag}_L \mid \mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}_m \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

1.2.3 Definition. Es sei (P, L, F) ein linearer Raum.

- (a) Die Abbildung $\vee: P^2 \setminus \text{diag}_P \rightarrow L, (p, q) \mapsto p \vee q$ heie *Verbinden (von Punkten)* oder *Verbinde-Abbildung*.
- (b) Die Abbildung $\wedge: \mathfrak{S} \rightarrow P, (l, m) \mapsto \mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}_m$ heie *Schneiden (von Geraden)* oder *Schneide-Abbildung*.

Im Falle projektiver Ebenen ist die Schneide-Abbildung fur jedes Paar voneinander verschiedener Geraden definiert.

1.2.4 Definition. Es seien P und L nicht diskrete Hausdorff-Räume, die Mengen P^2 und L^2 seien mit den jeweiligen Produkttopologien versehen, und es sei $F \subset P \times L$. Die Inzidenzstruktur (P, L, F) heißt *topologische projektive Ebene*, wenn gilt:

- (a) (P, L, F) ist eine projektive Ebene.
- (b) Die Verbinde-Abbildung $\vee: P^2 \setminus \text{diag}_P \rightarrow L$ ist stetig.
- (c) Die Schneide-Abbildung $\wedge: L^2 \setminus \text{diag}_L \rightarrow P$ ist stetig.

In affinen Ebenen lässt sich jedem Punkt-Geradenpaar eine eindeutig bestimmte parallele Gerade zuordnen. Im Kontext der Topologischen Geometrie wird auch von dieser Abbildung Stetigkeit verlangt.

1.2.5 Definition. Es seien A und L nicht diskrete Hausdorff-Räume, die Mengen A^2 , L^2 und $A \times L$ seien mit den jeweiligen Produkttopologien versehen, und es sei $F \subset A \times L$. Die Inzidenzstruktur (A, L, F) heißt *topologische affine Ebene*, wenn gilt:

- (a) (A, L, F) ist eine affine Ebene.
- (b) Die Verbinde-Abbildung $\vee: A^2 \setminus \text{diag}_A \rightarrow L$ ist stetig.
- (c) Die Schneide-Abbildung $\wedge: \mathfrak{S} \rightarrow A$ ist stetig.
- (d) Die Abbildung $A \times L \rightarrow L$, die jedem Punkt-Geradenpaar (p, l) die zu l parallele Gerade aus dem Büschel \mathcal{L}_p von p zuordnet, ist stetig.

Wir benötigen schließlich noch den Begriff der stabilen Ebene.

1.2.6 Definition. Es seien P und L nicht diskrete Hausdorff-Räume, und die Mengen P^2 und L^2 seien mit den jeweiligen Produkttopologien versehen. Die Inzidenzstruktur (P, L, F) heißt *stabile Ebene*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) (P, L, F) ist ein linearer Raum.
- (b) Es gibt ein Viereck in allgemeiner Lage in P .
- (c) Die Verbinde-Abbildung $\vee: P^2 \setminus \text{diag}_P \rightarrow L$ ist stetig.
- (d) Die Menge \mathfrak{S} ist offen in L^2 .
- (e) Die Schneide-Abbildung $\wedge: \mathfrak{S} \rightarrow P$ ist stetig.

1.2.7 Bemerkung. Nach Bemerkung 1.1.35 enthält die Punktmenge jeder projektiven Ebene ein Viereck in allgemeiner Lage. Um einzusehen, dass jede topologische projektive Ebene eine stabile Ebene ist, überzeugt man sich noch davon, dass $\mathfrak{S} = L^2 \setminus \text{diag}_L$ offen in L^2 ist: Da L nach Voraussetzung die Hausdorff-Eigenschaft besitzt, ist diag_L abgeschlossen in L^2 (vgl. etwa [59], Lemma 1.16). Also ist \mathfrak{S} als Komplement von diag_L offen in L^2 .

1 Grundlagen

Nach Lemma 1.1.8 ist es keine Einschränkung, wenn wir lineare Räume bzw. stabile Ebenen betrachten, bei denen jede Gerade eine Teilmenge der Punktmenge ist. Weiterhin wollen wir uns anstelle von (P, L, ϵ) auch die Notation (P, L) gestatten. Wir wenden uns nun den Morphismen topologischer Ebenen zu.

1.2.8 Definition. Es seien (P, L) und (P', L') stabile Ebenen, und es seien $\alpha: P \rightarrow P'$ und $\beta: L \rightarrow L'$ stetige Abbildungen.

- (a) Falls $\alpha(p) \in \beta(l)$ für alle $(p, l) \in P \times L$ mit $p \in l$ gilt, so heißt (α, β) *Morphismus (stabiler Ebenen)*.
- (b) Falls α und β Homöomorphismen mit der Eigenschaft sind, dass $\alpha(p) \in \beta(l)$ genau dann gilt, wenn $p \in l$ ist, so heißt (α, β) *Isomorphismus (stabiler Ebenen)* oder *Isomorphismus (topologischer Ebenen)*.
- (c) Falls α und β injektive (und stetige) Abbildungen derart sind, dass (α, β) eine Einbettung linearer Räume (im Sinne von Definition 1.1.10) und $\alpha(P)$ offen in P' ist, so heißt (α, β) *offene Einbettung von (P, L) in (P', L')* .

Nach Lemma 1.1.15 induzieren injektive Lineationen Geradenabbildungen (und Morphismen) linearer Räume. Im Falle von Lineationen stabiler Ebenen erweisen sich die folgenden Eigenschaften als Injektivitäts-Hindernisse, vgl. die Lemmata 1.2.10 und 1.2.11:

1.2.9 Definition. Es seien (P, L, ϵ) und (P', L', ϵ) lineare Räume, wobei zumindest P mit einer Topologie versehen ist. Eine Lineation $\alpha: P \rightarrow P'$ heißt

- (a) *kollabierend*, wenn eine Gerade $l' \in L'$ mit $\alpha(P) \subseteq l'$ existiert,
- (b) *lokal konstant*, wenn es zu jedem Punkt $p \in P$ eine Umgebung U und einen Wert $w \in P'$ derart gibt, dass $\alpha(u) = w$ für alle $u \in U$ gilt.

1.2.10 Lemma (Stroppel [56]). *Es seien (P, L) und (P', L') stabile Ebenen. Ferner sei $\alpha: P \rightarrow P'$ eine injektive Lineation von (P, L) nach (P', L') . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $\beta: L \rightarrow L'$ derart, dass $\alpha(l) \subseteq \beta(l)$ für alle $l \in L$ gilt.*
- (b) *Falls α nicht kollabierend ist, so ist β injektiv.*
- (c) *Wenn α stetig ist, so ist auch β stetig.* □

1.2.11 Lemma (Stroppel [56]). *Es seien (P, L) und (P', L') stabile Ebenen. Dann ist jede stetige Lineation von (P, L) nach (P', L') , die nicht injektiv ist, kollabierend oder lokal konstant.* □

Wir notieren eine nützliche Folgerung aus Lemma 1.2.10.

1.2.12 Lemma. *Es seien (P, L) und (P', L') stabile Ebenen mit Abbildungen $\alpha: P \rightarrow P'$ und $\beta: L \rightarrow L'$ derart, dass (α, β) ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen ist. Falls α ein Homöomorphismus ist, so ist auch β ein Homöomorphismus.*

Beweis. Da (α, β) inzidenzgeometrischer Morphismus ist, ist α eine Lineation von (P, L) nach (P', L') . Die von der injektiven Lineation α induzierte Geradenabbildung β_α ist nach Lemma 1.2.10 eindeutig bestimmt, also gilt $\beta_\alpha = \beta$. Aus der Stetigkeit von α folgt nach Lemma 1.2.10 somit die Stetigkeit von β . Ebenso folgt die Stetigkeit von β^{-1} aus der von α^{-1} . □

Im nächsten Abschnitt betrachten wir Unterstrukturen der reellen projektiven Ebene. Wir nehmen dies zum Anlass für die folgende Definition.

1.2.13 Definition. *Es sei (P, L) eine stabile Ebene, und es sei U eine nicht leere Teilmenge von P , die ein nicht ausgeartetes Viereck enthält. Ferner sei $\mathcal{U} := \{l \in L \mid |l \cap U| \geq 2\}$ die Menge all jener Geraden in L , die mit mindestens zwei Punkten in U inzident sind. Dann heißt die Inzidenzstruktur $\mathbb{U} := (U, \mathcal{U})$ die von (P, L) auf U induzierte Unterebene. Falls U offen in P ist, so heißt \mathbb{U} offene Unterebene von (P, L) .*

1.2.14 Bemerkung. Eine offene Unterebene einer stabilen Ebene ist eine stabile Ebene. Wir haben hier getroffene Festlegung von \mathcal{U} und nicht der prinzipiell möglichen Alternative $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} := \{\mathcal{l} \cap \mathcal{U} \mid \mathcal{l} \in L \text{ und } |\mathcal{l} \cap \mathcal{U}| \geq 2\}$ zur Definition von \mathcal{U} den Vorzug gegeben, vgl. hierzu auch Bemerkung 1.1.31. Denn im Allgemeinen ist $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}$ keine Teilmenge von L , was sich für die nun zu betrachtenden Fortsetzungen von Isomorphismen topologischer Ebenen als ungünstig erwiesen hätte.

1.2.15 Definition. Es seien $\mathbb{P} = (P, L)$ und $\mathbb{P}' = (P', L')$ topologische projektive Ebenen, $\mathcal{U} \subseteq P$ und $\mathcal{U}' \subseteq P'$ seien offene Teilmengen, und $\mathbb{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U})$ bzw. \mathbb{U}' seien die durch \mathbb{P} bzw. \mathbb{P}' induzierten offenen Unterebenen. Ferner seien $\Phi := (\Phi_p, \Phi_l): \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ und $\varphi := (\varphi_p, \varphi_l): \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}'$ Isomorphismen topologischer Ebenen. Falls $\Phi_p|_{\mathcal{U}} = \varphi_p$ und $\Phi_l|_{\mathcal{U}} = \varphi_l$ gilt, so heißt Φ Fortsetzung von φ .

1.2.16 Satz. Es seien $\mathbb{P} = (P, L)$ und $\mathbb{P}' = (P', L')$ topologische projektive Ebenen, $\mathcal{U} \subseteq P$ und $\mathcal{U}' \subseteq P'$ seien offene Teilmengen, auf denen durch \mathbb{P} bzw. \mathbb{P}' offene Unterebenen \mathbb{U} bzw. \mathbb{U}' induziert werden. Ferner sei $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ ein Homöomorphismus mit der Eigenschaft, dass drei Punkte $x, y, z \in \mathcal{U}$ genau dann kollinear in \mathbb{P} sind, wenn $\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)$ kollinear in \mathbb{P}' sind. Schließlich sei $\Phi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}'$ der von φ induzierte Isomorphismus topologischer Ebenen. Falls \mathcal{U} dicht in P liegt, so besitzt φ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Isomorphismus $\overline{\varphi}$ topologischer Ebenen.

Beweis. Wir bemerken, dass φ nach Lemma 1.1.26 eine bijektive Geradenabbildung sowie nach Lemma 1.2.12 ein Homöomorphismus ist und somit einen Isomorphismus topologischer Ebenen induziert. Für den Hauptteil des Beweises verweisen wir auf [50], Proposition 44.9. \square

1.2.2 Lokaler Fundamentalsatz für $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$

Für die Untersuchungen Hilbertscher Liniensysteme in Kapitel 2 spielt der folgende Satz⁵ von R. Löwen eine zentrale Rolle.

1.2.17 Satz (Lokaler Fundamentalsatz, Löwen [37]). *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, und es sei $\mathbb{U} = (U, U)$ die gemäß Definition 1.2.13 von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ auf U induzierte offene Unterebene. Dann lässt sich jede stetige und injektive Lineation $\varphi: U \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ in eindeutiger Weise zu einem Homöomorphismus $\bar{\varphi}: \mathbb{P}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ fortsetzen, der Kollinearität von Punkten erhält.*

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.17 induziert die Abbildung φ eine offene Einbettung:

1.2.18 Lemma. *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, und es sei $\mathbb{U} = (U, U)$ die von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ auf U induzierte offene Unterebene. Falls $\alpha: U \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ eine stetige und injektive Lineation von \mathbb{U} nach $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ ist, so gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Die Abbildung α ist offen und nicht kollabierend.*
- (b) *Die von α induzierte Geradenabbildung $\beta: \mathbb{U} \rightarrow u_2\mathbb{R}^3$ ist injektiv und stetig.*
- (c) *Drei voneinander verschiedene Punkte sind genau dann kollinear in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, wenn ihre Bilder unter α kollinear in \mathbb{U} sind.*
- (d) *Es ist (α, β) eine offene Einbettung von \mathbb{U} in die reelle projektive Ebene.*

Beweis. (a) Nach dem Satz über die Gebietsinvarianz, (vgl. etwa [50], 51.18), ist α eine offene Abbildung. Insbesondere ist die Menge $\alpha(U)$ offen in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ und daher nicht in einer Geraden enthalten, (vgl. etwa [50], Korollar 13.7). Also ist α nicht kollabierend. Aussage (b) folgt unmittelbar aus (a) und Lemma 1.2.10, Teil (c) ist eine direkte Konsequenz von (b) und Lemma 1.1.21. Somit sind alle Bedingungen von Definition 1.2.8 erfüllt. \square

⁵ Der Vollständigkeit halber weisen wir auf die von R. Frank in [18] vorgelegte Verallgemeinerung des Löwenschen Resultats hin.

1 Grundlagen

Wir stellen sicher, dass eine stetige, bijektive Lineation von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ nach $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ einen Automorphismus induziert.

1.2.19 Lemma. *Falls $\alpha: \mathbb{P}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ eine stetige, bijektive Lineation von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ nach $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ ist, so ist α eine Kollineation im Sinne von Definition 1.1.25.*

Beweis. Mit der Absicht, einen Widerspruch herbeizuführen nehmen wir an, es gibt drei nicht kollineare Punkte p, q, r in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, deren Bilder unter α kollinear sind. Nach Lemma 1.1.21 ist die von α induzierte Geradenabbildung dann nicht injektiv, d.h. α ist nach Lemma 1.2.10 kollabierend und damit nicht surjektiv, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

1.2.20 Bemerkung. Die Aussage des Lemmas lässt sich für projektive Ebenen auch rein inzidenzgeometrisch beweisen, also insbesondere ohne Stetigkeitsanforderungen an α .

1.2.21 Korollar. *Es sei $\alpha: \mathbb{P}_2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ ein Homöomorphismus und eine Lineation von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ nach $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, und es sei β die von α induzierte Geradenabbildung. Dann ist (α, β) ein Automorphismus der reellen projektiven Ebene.*

Wir sind nun in der Lage, zwei alternative Formulierungen des Löwenschen Fundamentalsatzes unter Verwendung der im vorigen Abschnitt bereitgestellten Begriffe anzugeben.

1.2.22 Satz. *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ und $\mathcal{U} = (U, \mathcal{U})$ die von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ auf U induzierte offene Unterebene. Ferner sei $\varphi: U \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ eine stetige und injektive Lineation. Dann lässt sich die von φ induzierte offene Einbettung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ auf eindeutige Weise zu einem Automorphismus $\overline{\varphi}$ von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ fortsetzen.*

1.2.23 Satz. *Es sei U eine offene Unterebene von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Dann lässt sich jede offene Einbettung φ von U in die reelle projektive Ebene auf eindeutige Weise zu einem Automorphismus $\overline{\varphi}$ von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ fortsetzen.*

1.2.3 Affine \mathbb{R}^2 -Ebenen

1.2.24 Definition. Es sei P eine mit einer Topologie versehene Punktmenge und es sei $L \subset \mathfrak{P}(P)$. Die Inzidenzstruktur (P, L, \in) heißt \mathbb{R}^2 -Ebene, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) (P, L, \in) ist ein linearer Raum;
- (b) die Punktmenge P ist homöomorph zu \mathbb{R}^2 , d.h. es existiert ein Homöomorphismus $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}^2$;
- (c) jede Gerade $l \in L$ ist homöomorph zu \mathbb{R} ;
- (d) das Bild $\varphi(l)$ jeder Geraden $l \in L$ ist abgeschlossen in \mathbb{R}^2 .

1.2.25 Bemerkungen. (a) Jede \mathbb{R}^2 -Ebene ist eine stabile Ebene, vgl. [50], 31.26.

- (b) Zwei affine \mathbb{R}^2 -Ebenen sind genau dann isomorph, wenn es einen Isomorphismus stabiler Ebenen (im Sinne von Definition 1.2.8) zwischen ihnen gibt, denn Kollineationen zwischen affinen \mathbb{R}^2 -Ebenen sind stetig, vgl. etwa Theorem 32.9 in [50].

1.2.26 Satz. Falls eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene eine Translationsebene ist, so ist sie isomorph zu $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$.

Beweis. Die Aussage folgt aus Proposition 32.8 in [50]. □

1.2.27 Satz. Jede desarguessche affine \mathbb{R}^2 -Ebene ist isomorph zur reellen affinen Ebene $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$.

Beweis. Nach Satz 1.1.66 ist jede desarguessche affine Ebene eine (affine) Translationsebene. Die Behauptung folgt mit Satz 1.2.26. □

1.3 Differentialgeometrische Grundlagen

Für die differentialgeometrischen Belange dieser Arbeit halten wir es für zweckmäßig, den Begriff des *Flächenstücks* zugrunde zu legen, wie ihn etwa Laugwitz in [34] oder Kühnel in [33] verwendet haben, insbesondere, weil wir so Überlagerungen von Drehflächen mit erfassen können. Im Unterschied zu (zweidimensionalen) *Untermannigfaltigkeiten* von \mathbb{R}^3 bzw. eingebetteten *Flächen*, die im Allgemeinen durch eine *Familie* von Kartenabbildungen bzw. Parametrisierungen beschrieben werden, genügt zur Parametrisierung eines Flächenstücks *eine* Immersion in den Raum \mathbb{R}^3 , die allerdings nicht injektiv zu sein braucht. Wir wollen im Folgenden an den Stellen, an denen sich aus der Verwendung des Flächenstückbegriffs Wohldefiniertheitsfragen ergeben oder Definitionen notwendig auf Parametrisierungen bezogen werden müssen, die gebotene Sorgfalt walten lassen.

1.3.1 Flächenstücke in \mathbb{R}^3

Für eine nicht leere, offene Teilmenge U von \mathbb{R}^2 und eine stetig differenzierbare Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2)$ setzen wir

$$\partial_1 f(u) := \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2), \quad \partial_2 f(u) := \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2),$$

und wir schreiben $Df(u)$ für die (aus drei Zeilen und zwei Spalten bestehende) Jacobimatrix $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$. Anstelle der Parameter (u_1, u_2) werden wir, wo es sich zur Vermeidung der Indexnotation anbietet, auch (u, v) verwenden.

1.3.1 Definition. (a) Es sei U eine nicht leere, einfach zusammenhängende⁶ offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine mindestens viermal stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Menge $\{\partial_1 f(u), \partial_2 f(u)\}$

⁶ Wir bemerken, dass eine einfach zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 wegzusammenhängend und somit zusammenhängend ist.

für jedes $u \in U$ linear unabhängig ist. Dann nennen wir f ein *parametrisiertes Flächenstück* oder eine *Parametrisierung*.

- (b) Zwei parametrisierte Flächenstücke $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sollen *äquivalent* heißen, wenn ein C^4 -Diffeomorphismus $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ derart existiert, dass $\tilde{f} = f \circ \varphi$ gilt.
- (c) Eine Äquivalenzklasse parametrisierter Flächenstücke bezüglich der in (b) definierten Äquivalenzrelation nennen wir *unparametrisiertes Flächenstück* oder einfach *Flächenstück*.

1.3.2 Bemerkungen.

- (a) Parametrisierte Flächenstücke brauchen nicht injektiv zu sein, jedoch ist jede Parametrisierung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ *lokal injektiv*, d.h. es gibt zu jedem $u \in U$ eine offene Umgebung $O \subseteq U$ derart, dass die Restriktion $f|_O$ von f auf O injektiv ist.
- (b) Zwei äquivalente parametrisierte Flächenstücke überstreichen dieselbe Bildmenge. Falls ein Flächenstück S die Parametrisierung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ enthält, so sagen wir, dass S *durch f parametrisiert wird*. In diesem Fall soll das Symbol S auch die Punktmenge $f(U)$ bezeichnen; somit ist die Schreibweise $f: U \rightarrow S$ für eine Parametrisierung von S erklärt.

Falls ein Flächenstück S eine injektive Parametrisierung enthält, so sind alle Parametrisierungen in S injektiv. In diesem Falle nennen wir S ein *injektives Flächenstück*.

1.3.3 Definition. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück.

- (a) Für $p \in \mathbb{R}^3$ heißt $T_p \mathbb{R}^3 := \{p\} \times \mathbb{R}^3$ mit den Vektorraumoperationen $k(p, X) := (p, kX)$ für $k \in \mathbb{R}$ sowie $(p, X) + (p, Y) := (p, X + Y)$ *Tangententialraum an \mathbb{R}^3 in p* .
- (b) Für $u \in U$ wird der von $\{(f(u), \partial_1 f(u)), (f(u), \partial_2 f(u))\}$ erzeugte Unterraum $T_u f$ von $T_{f(u)} \mathbb{R}^3$ als *Tangentialebene an f in u* bezeichnet.

1 Grundlagen

(c) Wir nennen $\left((f(u), \partial_1 f(u)), (f(u), \partial_2 f(u)) \right)$ die zu f assoziierte Basis von $T_u f$.

(d) Für jedes $u \in U$ nennen wir

$$n_f(u) := \left(f(u), \frac{\partial_1 f(u) \times \partial_2 f(u)}{\|\partial_1 f(u) \times \partial_2 f(u)\|} \right) \in T_{f(u)} \mathbb{R}^3$$

die Normale an f in u .

(e) Der von $n_f(u)$ erzeugte Unterraum $\perp_u f$ von $T_{f(u)} \mathbb{R}^3$ heißt Normalenraum an f in u .

1.3.4 Bemerkung. Für jedes $u \in U$ ist $\perp_u f$ das orthogonale Komplement von $T_u f$ in $T_{f(u)} \mathbb{R}^3$. Damit besitzt jeder Vektor $w \in T_{f(u)} \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Darstellung $w = w_t + w_n$ mit $w_t \in T_u f$ und $w_n \in \perp_u f$. Wir nennen w_t den Tangentialanteil und w_n den Normalanteil von w .

1.3.5 Definition. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Für jedes $u \in U$ bezeichne

$$\Pi_{f,u}: T_{f(u)} \mathbb{R}^3 \rightarrow T_u f, w \mapsto w - w_n$$

die orthogonale Projektion auf die Tangentialebene $T_u f$.

1.3.6 Bemerkung. Für Parametrisierungen $f: U \rightarrow S$, die nicht injektiv sind, können voneinander verschiedene u und v in U derart existieren, dass $f(u) = f(v)$, aber $T_u f \neq T_v f$ gilt. Aus diesem Grund haben wir den eben eingeführte Projektionsoperator mit dem Parameter u indiziert.

1.3.7 Lemma. Es seien $f: U \rightarrow S$ und $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow S$ (äquivalente) Parametrisierungen eines Flächenstücks S , und es sei $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus mit $f = \tilde{f} \circ \varphi$. Dann gilt:

(a) $T_{(\tilde{f} \circ \varphi)(u)} \mathbb{R}^3 = T_{f(u)} \mathbb{R}^3$ für alle $u \in U$,

(b) $T_{\varphi(u)} \tilde{f} = T_u f$ für alle $u \in U$,

(c) $\perp_{\varphi(u)} \tilde{f} = \perp_u f$ für alle $u \in U$,

(d) $\Pi_{\tilde{f}, \varphi(\mathbf{u})} w = \Pi_{f, \mathbf{u}} w$ für alle $\mathbf{u} \in U$ und alle $w \in T_{f(\mathbf{u})} \mathbb{R}^3$.

Beweis. (a) ist klar.

(b) Aus $f(\mathbf{u}) = \tilde{f}(\varphi(\mathbf{u}))$ und $Df(\mathbf{u}) = D\tilde{f}(\varphi(\mathbf{u})) D\varphi(\mathbf{u})$ folgt, dass der Aufspann von

$$\left\{ (f(\mathbf{u}), \partial_1 f(\mathbf{u})), (f(\mathbf{u}), \partial_2 f(\mathbf{u})) \right\}$$

im Aufspann von

$$\left\{ (\tilde{f}(\varphi(\mathbf{u})), \partial_1 \tilde{f}(\varphi(\mathbf{u}))), (\tilde{f}(\varphi(\mathbf{u})), \partial_2 \tilde{f}(\varphi(\mathbf{u}))) \right\}$$

enthalten ist. Die umgekehrte Inklusion erhalten wir, indem wir die Identitäten $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = f(\varphi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}))$ und $D\tilde{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = Df(\varphi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}})) D\varphi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}})$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{u}} = \varphi(\mathbf{u})$ auswerten.

(c) folgt aus (a) und (b) sowie Bemerkung 1.3.4.

(d) folgt aus (b) und (c) sowie der Eindeutigkeit der Zerlegung von w in einen Tangentialanteil und einen Normalanteil (vgl. Bemerkung 1.3.4). \square

Bei gegebenem parametrisiertem Flächenstück $f: U \rightarrow S$ induziert das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ des \mathbb{R}^3 für jedes $\mathbf{u} \in U$ eine positiv definite Bilinearform $I_{\mathbf{u}}: T_{\mathbf{u}}f \times T_{\mathbf{u}}f \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte *erste Fundamentalform*:

$$I_{\mathbf{u}}((f(\mathbf{u}), X), (f(\mathbf{u}), Y)) := \langle X | Y \rangle$$

Die Gram-Matrix

$$g_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} E(\mathbf{u}) & F(\mathbf{u}) \\ F(\mathbf{u}) & G(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

von $I_{\mathbf{u}}$ bezüglich der zu f assoziierten Basis von $T_{\mathbf{u}}f$ ist gegeben durch $E(\mathbf{u}) = \langle \partial_1 f(\mathbf{u}) | \partial_1 f(\mathbf{u}) \rangle$, $F(\mathbf{u}) = \langle \partial_1 f(\mathbf{u}) | \partial_2 f(\mathbf{u}) \rangle$ und $G(\mathbf{u}) = \langle \partial_2 f(\mathbf{u}) | \partial_2 f(\mathbf{u}) \rangle$.

1 Grundlagen

Für eine Parametrisierung $f: U \rightarrow S$ liefern die *Christoffel-Symbole* $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $u \in U$ die Komponenten des Tangentialanteils von $\partial_i \partial_j f(u)$ bezüglich der zu f assoziierten Basis von $T_u f$:

$$\partial_i \partial_j f(u) = \Gamma_{ij}^1(u) \partial_1 f(u) + \Gamma_{ij}^2(u) \partial_2 f(u) + l_{ij}(u) n_f(u) \quad (1.1)$$

Aus dem folgenden Lemma können wir die Differenzierbarkeitsklasse der Christoffelsymbole ablesen (vgl. Bemerkung 1.3.9).

1.3.8 Lemma. *Für jede Parametrisierung lassen sich die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k durch die Komponenten (der Gram-Matrix) der ersten Fundamentalform sowie ihrer ersten partiellen Ableitungen ausdrücken:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial_1 E \\ \partial_1 F - \frac{1}{2} \partial_2 E \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial_2 E \\ \frac{1}{2} \partial_1 G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_2 F - \frac{1}{2} \partial_1 G \\ \frac{1}{2} \partial_2 G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis findet sich etwa in [15], Abschnitt 4.3 oder in [39], Kapitel 10. \square

1.3.9 Bemerkung. In Definition 1.3.1 haben wir festgelegt, dass parametrisierte Flächenstücke mindestens viermal stetig differenzierbar sind. Daraus folgt, dass die Funktionen E , F und G jeweils mindestens dreimal stetig differenzierbar und alle Christoffelsymbole nach dem vorstehenden Lemma mindestens zweimal stetig differenzierbar sind.

Für die Definitionen der zweiten Fundamentalform, der mittleren Krümmung und der Gauß-Krümmung verweisen wir auf die Lehrbuchliteratur, vgl. etwa [15], [29], [33] und [39].

1.3.10 Definition. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, es seien $k \geq 1$ und $n \geq 1$ natürliche Zahlen, und es sei O eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Eine C^k -Abbildung $\gamma: I \rightarrow O$ heißt *regulär C^k -parametrisierte Kurve in O* , wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Im Falle $k = 1$ heißt γ auch einfach *regulär parametrisierte Kurve in O* .

1.3.11 Bemerkung. Wir wählen für den Tangentenvektor einer Kurve γ an einer Stelle t die Bezeichnung $\gamma'(t)$, unabhängig davon, ob γ durch die Bogenlänge parametrisiert ist oder nicht.

1.3.12 Lemma. Es seien $f: U \rightarrow S$ und $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow S$ (äquivalente) Parametrisierungen eines Flächenstücks S , und es sei $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ der nach Definition 1.3.1 existierende Diffeomorphismus mit $f = \tilde{f} \circ \varphi$. Falls $\gamma: I \rightarrow U$ eine regulär parametrisierte Kurve in U ist, so ist $\tilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma: I \rightarrow \tilde{U}$ eine regulär parametrisierte Kurve in \tilde{U} . Ferner ist $f \circ \gamma = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^3 . \square

1.3.13 Definition. Es sei S ein Flächenstück, und es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 4$. Eine Abbildung $\gamma: I \rightarrow S$ heißt *regulär C^k -parametrisierte Kurve auf S* , wenn es zu einer (und dann zu jeder) Parametrisierung $f: U \rightarrow S$ von S eine regulär C^k -parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow U$ derart gibt, dass $\gamma = f \circ \gamma$ gilt.⁷ Im Falle $k = 1$ bezeichnen wir γ auch einfach als *regulär parametrisierte Kurve auf S* .

1.3.14 Bemerkungen. (a) Wir weisen darauf hin, dass eine in \mathbb{R}^3 regulär parametrisierte Kurve, deren Bildpunkte auf S liegen, die Bedingung von Definition 1.3.13 im Allgemeinen noch nicht erfüllt. Als Gegenbeispiel betrachte man eine nicht geschlossene Kurve, die über die „Nahtstelle“ eines „leicht überlappend parametrisierten“ Zylinders verläuft.

(b) Für eine (injektive) Parametrisierung $f: U \rightarrow S$ eines injektiven Flächenstücks S und eine regulär parametrisierte Kurve γ auf S ist die Kurve γ durch $\gamma = f \circ \gamma$ eindeutig bestimmt.

⁷ Wir werden, wo dies angezeigt ist, parametrisierte Kurven auf Flächen mit fett gedruckten Symbolen und ihre Urbilder mit normal gedruckten Symbolen bezeichnen.

1 Grundlagen

- (c) Die Beschränkung der Differenzierbarkeitsordnung in Definition 1.3.13 (ebenso wie in der nachfolgenden Definition 1.3.15) ist der Tatsache geschuldet, dass wir für parametrisierte Flächenstücke lediglich die Zugehörigkeit zur Differenzierbarkeitsklasse C^4 gefordert haben.

Wir betrachten nun Vektorfelder auf Flächenstücken, die längs parametrisierter Kurven definiert sind.

1.3.15 Definition. Es sei S ein Flächenstück, es sei $\gamma: I \rightarrow S$ eine regulär parametrisierte Kurve auf S , und es sei $1 \leq k \leq 4$.

- (a) Es heißt $(\gamma, \mathbf{X}): I \rightarrow T\mathbb{R}^3$ ein C^k -Vektorfeld auf S entlang γ , wenn es zu einer (und dann jeder) Parametrisierung $f: U \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow U$ mit $\gamma = f \circ \gamma$ und eine C^k -Funktion $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart gibt, dass

$$\mathbf{X}(t) = X_1(t) \partial_1 f(\gamma(t)) + X_2(t) \partial_2 f(\gamma(t)) + X_3(t) n_f(\gamma(t))$$

für alle $t \in I$ gilt.

- (b) Wir nennen $(\gamma, \mathbf{X}): I \rightarrow T\mathbb{R}^3$ ein *tangentiales* C^k -Vektorfeld auf S entlang γ , wenn es zu einer (und dann jeder) Parametrisierung $f: U \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow U$ mit $\gamma = f \circ \gamma$ und eine C^k -Funktion $X: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart gibt, dass

$$\mathbf{X}(t) = X_1(t) \partial_1 f(\gamma(t)) + X_2(t) \partial_2 f(\gamma(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

- (c) In der unter (a) bzw. (b) beschriebenen Situation nennen wir das Tripel (f, γ, \mathbf{X}) eine *Darstellung* des Vektorfeldes (γ, \mathbf{X}) .

Wenn nichts anderes gesagt wird, soll ein *Vektorfeld* immer als mindestens einmal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden. Wir wollen begründen, dass die Definition 1.3.15 in der Tat unabhängig von der Wahl der Parametrisierung des Flächenstücks ist und führen dies für den Fall tangentialer Vektorfelder aus; der

allgemein Fall kann analog betrachtet werden. Es sei also (f, γ, X) eine Darstellung eines tangentialen C^k -Vektorfeldes (γ, X) entlang einer Kurve γ , d.h. es gilt

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t) \partial_1 f(\gamma(t)) + X_2(t) \partial_2 f(\gamma(t)) \\ &= Df(\gamma(t)) X(t) \end{aligned}$$

Für jede weitere Parametrisierung $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow S$ von S existiert ein Diffeomorphismus φ mit $f = \tilde{f} \circ \varphi$, und es ist $\tilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma$ eine parametrisierte Kurve in \tilde{U} mit $\gamma = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}$. Aus der Kettenregel $Df(u) = D\tilde{f}(\varphi(u)) D\varphi(u)$ folgt

$$X(t) = D\tilde{f}(\gamma(t)) D\varphi(\gamma(t)) X(t)$$

Mit $\tilde{X}(t) := D\varphi(\gamma(t)) X(t)$, ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(t) &:= X_1(t) \partial_1 \varphi_1(\gamma(t)) + X_2(t) \partial_2 \varphi_1(\gamma(t)), \\ \tilde{X}_2(t) &:= X_1(t) \partial_1 \varphi_2(\gamma(t)) + X_2(t) \partial_2 \varphi_2(\gamma(t)), \end{aligned}$$

gilt somit

$$X(t) = \tilde{X}_1(t) \partial_1 \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)) + \tilde{X}_2(t) \partial_2 \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)).$$

Da X nach Voraussetzung k -mal stetig differenzierbar ist und φ in der Klasse C^4 liegt, sind \tilde{X}_1 und \tilde{X}_2 k -mal stetig differenzierbar, also ist $(\tilde{f}, \tilde{\gamma}, \tilde{X})$ eine Darstellung des Vektorfeldes (γ, X) .

1.3.16 Definition. Wir wollen zwei Darstellungen (f, γ, X) und $(\tilde{f}, \tilde{\gamma}, \tilde{X})$ von Vektorfeldern *äquivalent* nennen, wenn es einen C^4 -Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ derart gibt, dass $f = \tilde{f} \circ \varphi$, $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ sowie $\tilde{X}(t) = D\varphi(\gamma(t)) X(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

1.3.17 Lemma. Es sei (γ, X) ein tangentiales C^1 -Vektorfeld entlang einer Kurve γ auf einem Flächenstück S . Dann gilt für jede Darstellung (X, f, γ) des Vektorfeldes mit den Bezeichnungen von Gleichung 1.1 die

1 Grundlagen

folgende Identität:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) &= \left(X_1'(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^1(\gamma(t)) \right) \partial_1 f(\gamma(t)) \\ &+ \left(X_2'(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^2(\gamma(t)) \right) \partial_2 f(\gamma(t)) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_i(t) \gamma_j'(t) l_{ij}(\gamma(t)) \right) n_f(\gamma(t)) \quad \square \end{aligned}$$

1.3.18 Korollar. Es sei (γ, \mathbf{X}) ein tangentiales Vektorfeld entlang einer Kurve γ auf einem Flächenstück S . Dann gilt für jede Darstellung (X, f, γ) des Vektorfeldes die Identität

$$\begin{aligned} &\Pi_{f, \gamma(t)} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right) \\ &= \left(\gamma(t), \left(X_1'(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^1(\gamma(t)) \right) \partial_1 f(\gamma(t)) \right) \\ &+ \left(\gamma(t), \left(X_2'(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^2(\gamma(t)) \right) \partial_2 f(\gamma(t)) \right) \end{aligned}$$

1.3.19 Satz. Es seien (X, f, γ) und $(\tilde{X}, \tilde{f}, \tilde{\gamma})$ zwei äquivalente Darstellungen eines tangentialen Vektorfeldes (γ, \mathbf{X}) entlang der Kurve γ . Dann gilt

$$\Pi_{f, \gamma(t)} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right) = \Pi_{\tilde{f}, \tilde{\gamma}(t)} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right)$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Wie aus Lemma 1.3.17 ersichtlich ist, liegt $(\gamma(t), \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t))$ für jedes $t \in I$ in $T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3$. Die Aussage des Satzes folgt direkt aus Teil (d) von Lemma 1.3.7. \square

Nachdem die im Raume stehenden Wohldefiniertheitsfragen geklärt sind, können wir die kovariante Ableitung definieren.

1.3.20 Definition. Es sei (γ, \mathbf{X}) ein tangentiales C^1 -Vektorfeld entlang einer Kurve γ auf einem Flächenstück S mit einer beliebigen Darstellung (X, f, γ) . Dann ist

$$\left(\gamma(t), \frac{\nabla}{dt} \mathbf{X}(t) \right) := \Pi_{f, \gamma(t)} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right)$$

die *kovariante Ableitung* von (γ, \mathbf{X}) an der Stelle $\gamma(t)$.

Für eine regulär C^2 -parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow S$ auf einem Flächenstück S liefert die Ableitung γ' ein tangentiales C^1 -Vektorfeld (γ, γ') entlang γ . Wir werden im folgenden Abschnitt derartige Vektorfelder und ihre kovarianten Ableitungen betrachten. Zur Vereinfachung der Notation werden wir im Folgenden Elemente von Tangentialräumen und Vektorfelder ohne Angabe der Aufpunkte schreiben.

1.3.2 Geodätische auf Drehflächen

1.3.21 Definition. Es sei S ein Flächenstück, und es sei $\gamma: I \rightarrow S$ eine regulär C^2 -parametrisierte, Kurve auf S . Falls eine stetige Funktion $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ derart existiert, dass

$$\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = h(t) \gamma'(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt, so heißt γ *parametrisierte Geodätische* auf S .

1.3.22 Bemerkung. Wir wollen den von uns verwendeten Geodätenbegriff motivieren. Auf Flächenstücken im \mathbb{R}^3 sind diejenigen (nicht konstanten) parametrisierten Kurven γ ausgezeichnet, deren geodätische Krümmung überall verschwindet. Dies ist genau dann der Fall (vgl. etwa [39] 11.3), wenn der Tangentenvektor $\gamma'(t)$ und die Projektion des Beschleunigungsvektors $\gamma''(t)$ auf

1 Grundlagen

die Tangentialebene, also die kovariante Ableitung von $\gamma'(t)$, für jeden Parameterwert t linear abhängig sind.

In der Literatur werden Geodätische oft als Lösungen der Gleichung $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0$ definiert, was dazu führt, dass der Kurvenparameter zur Bogenlänge proportional ist. Wir ziehen für die vorliegende Arbeit die allgemeinere Definition vor, die den Spezialfall $h = 0$ natürlich zulässt.⁸ Im Prinzip kann man sich für jede parametrisierte Geodätische γ eine Bogenlängenparametrisierung $\tilde{\gamma}$ verschaffen (vgl. etwa Bemerkung 2 in Abschnitt 1.5 von [15]) und so $\frac{\nabla}{dt}\tilde{\gamma}'(t) = 0$ erreichen (vgl. auch Korollar 1.3.31). Für unsere Zwecke wäre es jedoch hinderlich, zu jeder konkret vorliegenden Kurve zunächst eine Umparametrisierung auf die Bogenlänge vorzunehmen. Außerdem erhalten die von uns benötigten *geodätische Abbildungen* (siehe Abschnitt 1.3.3) den Bogenlängenparameter im Allgemeinen nicht (vgl. hierzu auch [19], Abschnitt I.3).

Wir drücken die Bedingung aus Definition 1.3.21 mit Hilfe von Parametrisierungen aus. Es sei also $f: U \rightarrow S$ eine Parametrisierung eines Flächenstücks S , und es sei $\gamma: I \rightarrow U$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ eine regulär parametrisierte Kurve. Für $\gamma := f \circ \gamma$ gilt

$$\gamma'(t) = u'(t) \partial_1 f(u(t), v(t)) + v'(t) \partial_2 f(u(t), v(t)).$$

Somit ist die Gleichung $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = h(t)\gamma'(t)$ nach Korollar 1.3.18 äquivalent zu dem folgenden System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u''(t) + (u'(t))^2 \Gamma_{11}^1(\gamma(t)) + 2u'(t)v'(t) \Gamma_{12}^1(\gamma(t)) \\ + (v'(t))^2 \Gamma_{22}^1(\gamma(t)) &= h(t)u'(t), \\ v''(t) + (u'(t))^2 \Gamma_{11}^2(\gamma(t)) + 2u'(t)v'(t) \Gamma_{12}^2(\gamma(t)) \\ + (v'(t))^2 \Gamma_{22}^2(\gamma(t)) &= h(t)v'(t). \end{aligned}$$

⁸ Wir verwenden das Symbol 0 für Funktionen, die den konstanten Funktionswert 0 annehmen.

Dieses System können wir bei Unterdrückung der Argumente platzsparender notieren:

$$\begin{pmatrix} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

In Vorbereitung des nächsten Lemmas setzen wir

$$U := \left(u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 \right) \quad \text{sowie}$$

$$V := \left(v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 \right)$$

und bezeichnen zur Vermeidung von Bezeichnungskonflikten den Definitionsbereich eines Flächenstücks bis auf Weiteres mit D .

1.3.23 Lemma. *Zu einer C^2 -Abbildung $\gamma: I \rightarrow D$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ mit $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ für alle $t \in I$ existiert genau dann eine stetige Funktion $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I, \quad (1.3)$$

wenn

$$U(t)v'(t) = V(t)u'(t) \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.} \quad (1.4)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass γ die Gleichung 1.4 jedenfalls dann erfüllt, wenn $h \in C^0(I)$ derart existiert, dass Gleichung 1.3 erfüllt ist. Nach Voraussetzung gilt für jedes $t \in I$, dass $u'(t) \neq 0$ oder $v'(t) \neq 0$. Falls $u'(t) \neq 0$, so folgt $h(t) = \frac{U(t)}{u'(t)}$ und damit $V(t) = \frac{v'(t)}{u'(t)} U(t)$. Der Fall $v'(t) \neq 0$ führt in analoger Weise auf die Gleichung $u'(t)V(t) = v'(t)U(t)$, deren Gültigkeit damit für alle $t \in I$ nachgewiesen ist.

Falls umgekehrt Gleichung 1.4 erfüllt ist, so definieren wir eine Abbildung $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{U(t)}{u'(t)} & \text{für alle } t \in I \text{ mit } u'(t) \neq 0, \\ \frac{V(t)}{v'(t)} & \text{für alle } t \in I \text{ mit } v'(t) \neq 0. \end{cases}$$

1 Grundlagen

Diese Zuordnung ist eindeutig, denn im Falle $u'(t) \neq 0$ folgt aus Gleichung 1.4, dass $\frac{U(t)v'(t)}{u'(t)} = V(t)$; falls gleichzeitig $v'(t) \neq 0$ gilt, so ist $\frac{U(t)}{u'(t)} = \frac{V(t)}{v'(t)}$. Weiter gilt im Falle $u'(t) \neq 0$, dass $U(t) = h(t)u'(t)$, woraus zusammen mit Gleichung 1.4 die Beziehung $V(t) = \frac{U(t)}{u'(t)}v'(t) = h(t)v'(t)$ folgt. Im Falle $v'(t) \neq 0$ ergibt sich $V(t) = h(t)v'(t)$ unmittelbar aus der Definition von h , während $U(t) = h(t)u'(t)$ aus Gleichung 1.4 folgt. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I. \quad (1.5)$$

Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Abbildung h stetig auf I ist. Wir halten zunächst fest, dass u' und v' sowie u'' und v'' stetig auf I sind. Da alle Christoffelsymbole C^2 -Funktionen sind (vgl. Bemerkung 1.3.9), hängen auch U und V stetig von t ab. Aus Gleichung 1.5 folgt mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ in \mathbb{R}^2 , dass

$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \right\rangle} = h(t) \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Also ist h in der Tat stetig auf I . □

1.3.24 Definition. Für jede Parametrisierung f eines Flächenstücks bezeichnen wir die (implizite) Differentialgleichung 1.4 als *die zu f gehörige Geodätendifferentialgleichung* oder auch als *die Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f}* .

1.3.25 Lemma. Es seien $f: D \rightarrow S$ und $\tilde{f}: \tilde{D} \rightarrow S$ Parametrisierungen eines Flächenstückes S , und es sei $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$ ein C^4 -Diffeomorphismus mit $f = \tilde{f} \circ \varphi$. Falls eine regulär C^2 -parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ eine Lösung der zu f gehörigen Geodätendifferentialgleichung ist, so erfüllt $\tilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma$ die Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} .

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt $f \circ \gamma = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}$ und für $\gamma := f \circ \gamma$ sind (f, γ, γ') und $(\tilde{f}, \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}')$ äquivalente Darstellungen des Vektorfeldes (γ, γ') . Nach Satz 1.3.19 ist die kovariante Ableitung unabhängig von der Wahl der Parametrisierung bzw. Darstellung, woraus mit Lemma 1.3.23 die Behauptung folgt. \square

1.3.26 Korollar. *Es sei S ein Flächenstück, und es sei $\gamma: I \rightarrow S$ eine regulär C^2 -parametrisierte Kurve auf S . Genau dann ist γ eine parametrisierte Geodätische auf S , wenn für eine (und dann jede) Parametrisierung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ von S eine regulär parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow D, t \mapsto (u(t), v(t))$ mit $\gamma = f \circ \gamma$ derart existiert, dass die Differentialgleichung 1.4 erfüllt ist.* \square

Wir untersuchen die Lösungsmengen von Geodätendifferentialgleichungen bzw. der zugehörigen Anfangswertprobleme. Zunächst erinnern wir an die folgende wichtige Existenz- und Eindeutigkeitsaussage.

1.3.27 Satz. *Es sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $(u_0, v_0) \in D$ und $w \in T_{\gamma(t_0)}(D)$. Das durch das Gleichungssystem 1.2 zusammen mit der Forderung $\gamma(t_0) = (u_0, v_0), \gamma'(t_0) = w$ gegebene Anfangswertproblem besitzt eine maximal definierte Lösung $\gamma: J \rightarrow D$ mit offenem Definitionsintervall J , und für jede andere Lösung $\delta: I \rightarrow D$ dieses Anfangswertproblems gilt $I \subset J$ sowie $\delta(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in I$.*

Beweis. Mit den Setzungen $y_1 := u, y_2 := v, y_3 := u'$ und $y_4 := v'$ lässt sich das Gleichungssystem 1.2 in die (explizite) Form $y' = F(t, y)$ bringen, auf die sich der Existenz- und Eindeigkeitssatzes nach Picard und Lindelöf bei geeigneten Voraussetzungen an die rechte Seite F anwenden lässt, vgl. etwa [17], §2. Da $f \in C^4(D)$ gilt und h stetig ist, folgt mit Lemma 1.3.8 bzw. Bemerkung 1.3.9, dass die in [17], §2, 3.1 genannten Voraussetzungen (Stetigkeit von F sowie Stetigkeit aller partiellen Ableitungen $\partial F_i / \partial y_j$) erfüllt sind. Die Behauptung ergibt sich somit direkt dem Existenz- und Eindeigkeitssatz, siehe [17], §2, 5.1. \square

1 Grundlagen

Wir untersuchen das Verhalten von Lösungen des Systems 1.2 unter Umparametrisierungen.

1.3.28 Lemma. Für ein parametrisiertes Flächenstück $f: D \rightarrow S$ und eine stetige Funktion $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\gamma: I \rightarrow D, \gamma(t) = (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung 1.2, und es sei $\phi: J \rightarrow I$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Dann existiert eine Funktion $\tilde{h}: J \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi: J \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto (\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{v}}(s))$ eine Lösung des folgenden Systems ist:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}'' + (\tilde{\mathbf{u}}')^2 \Gamma_{11}^1 + 2 \tilde{\mathbf{u}}' \tilde{\mathbf{v}}' \Gamma_{12}^1 + (\tilde{\mathbf{v}}')^2 \Gamma_{22}^1 \\ \tilde{\mathbf{v}}'' + (\tilde{\mathbf{u}}')^2 \Gamma_{11}^2 + 2 \tilde{\mathbf{u}}' \tilde{\mathbf{v}}' \Gamma_{12}^2 + (\tilde{\mathbf{v}}')^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \tilde{h} \tilde{\gamma}'.$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Umparametrisierung ϕ die Eigenschaft besitzt, dass $\phi'(s) \neq 0$ für alle $s \in J$ gilt. Ferner gelten für alle $s \in J$ die Identitäten

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{v}}'(s) \end{pmatrix} = \phi'(s) \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(\phi(s)) \\ \mathbf{v}'(\phi(s)) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}''(s) \\ \tilde{\mathbf{v}}''(s) \end{pmatrix} = (\phi'(s))^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u}''(\phi(s)) \\ \mathbf{v}''(\phi(s)) \end{pmatrix} + \phi''(s) \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(\phi(s)) \\ \mathbf{v}'(\phi(s)) \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben im Folgenden kurz ϕ' für $\phi'(s)$, $\tilde{\mathbf{u}}'$ für $\tilde{\mathbf{u}}'(s)$, Γ_{11}^1 für $\Gamma_{11}^1(\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{v}}(s))$, \mathbf{u}' für $\mathbf{u}'(\phi(s))$, usw. Der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}'' + (\tilde{\mathbf{u}}')^2 \Gamma_{11}^1 + 2 \tilde{\mathbf{u}}' \tilde{\mathbf{v}}' \Gamma_{12}^1 + (\tilde{\mathbf{v}}')^2 \Gamma_{22}^1 \\ \tilde{\mathbf{v}}'' + (\tilde{\mathbf{u}}')^2 \Gamma_{11}^2 + 2 \tilde{\mathbf{u}}' \tilde{\mathbf{v}}' \Gamma_{12}^2 + (\tilde{\mathbf{v}}')^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

ist damit gleich

$$(\phi')^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u}'' + (\mathbf{u}')^2 \Gamma_{11}^1 + 2 \mathbf{u}' \mathbf{v}' \Gamma_{12}^1 + (\mathbf{v}')^2 \Gamma_{22}^1 \\ \mathbf{v}'' + (\mathbf{u}')^2 \Gamma_{11}^2 + 2 \mathbf{u}' \mathbf{v}' \Gamma_{12}^2 + (\mathbf{v}')^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} + \phi'' \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung ist der erste Term gleich

$$(\phi'(s))^2 h(\phi(s)) \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(\phi(s)) \\ \mathbf{v}'(\phi(s)) \end{pmatrix} = \phi'(s) h(\phi(s)) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{v}}'(s) \end{pmatrix},$$

der zweite Ausdruck ist gleich $\frac{\phi''(s)}{\phi'(s)} \begin{pmatrix} \tilde{u}'(s) \\ \tilde{v}'(s) \end{pmatrix}$. Mit

$$\tilde{h}(s) := \phi'(s) h(\phi(s)) + \frac{\phi''(s)}{\phi'(s)}$$

ist die Summe beider Terme gleich $\tilde{h}(s) \tilde{\gamma}'(s)$, und es folgt die Behauptung. \square

1.3.29 Bemerkung. Da ϕ nach Voraussetzung bijektiv ist, existiert zu jedem $t_0 \in I$ ein $s_0 \in J$ mit $\phi(s_0) = t_0$. Angenommen, mit den Bezeichnungen des vorstehenden Satzes gelte $\gamma(t_0) = \gamma_0$ und $\gamma'(t_0) = w_0$. Dann ist $\tilde{\gamma}(s_0) = \gamma(\phi(s_0)) = \gamma(t_0)$ sowie $\tilde{\gamma}'(s_0) = \phi'(s_0) \gamma'(\phi(s_0)) = \phi'(s_0) w_0$.

Wir zeigen, dass bei Vorgabe verschiedener Funktionen auf der rechten Seite des Systems 1.2 die zugehörigen Anfangswertprobleme Lösungen besitzen, die durch Umparametrisierung ineinander übergeführt werden können.

1.3.30 Satz. Es sei $f: D \rightarrow S$ ein parametrisiertes Flächenstück, und es seien $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Ferner seien $\gamma: I \rightarrow D$ und $\delta: J \rightarrow D$ Lösungen der sich aus $\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = h(t) \gamma'(t)$ bzw. $\frac{\nabla}{dt} \delta'(t) = k(t) \delta'(t)$ ergebenden Differentialgleichungen, und es seien $t_0 \in I$, $s_0 \in J$ und $l \neq 0$ derart, dass $\gamma(t_0) = \delta(s_0)$ und $\delta'(s_0) = l \gamma'(t_0)$ gilt. Dann existiert ein offenes Intervall $J' \subseteq J$ mit $s_0 \in J'$ und ein C^2 -Diffeomorphismus $\phi: J' \rightarrow I'$ mit

$$\phi'(s) \neq 0 \quad \text{und} \quad \delta(s) = (\gamma \circ \phi)(s) \quad \text{für alle } s \in J'.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Gleichungen

$$\gamma'' + (\gamma_1')^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} + 2\gamma_1' \gamma_2' \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} + (\gamma_2')^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = h \gamma'$$

und

$$\delta'' + (\delta_1')^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} + 2\delta_1' \delta_2' \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} + (\delta_2')^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = k \delta'$$

erfüllt. Wir betrachten das Anfangswertproblem

1 Grundlagen

$$(i) \quad \phi'' + h (\phi')^2 - k \phi = 0,$$

$$(ii) \quad \phi(s_0) = t_0, \phi'(s_0) = l$$

Dieses besitzt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz eine eindeutig bestimmte C^2 -Lösung ϕ . Insbesondere ist ϕ' stetig. Da nach Voraussetzung $l \neq 0$ gilt, existiert eine offene Umgebung J' von s_0 , in der ϕ' nicht verschwindet; mit $I' := \phi(J')$ ist $\phi|_{J'}$ somit ein C^2 -Diffeomorphismus.

Wir setzen nun $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi: J' \rightarrow D$. Mit dem im Beweis von Lemma 1.3.28 erhaltenen Ausdruck für \tilde{h} und der Differentialgleichung, deren Lösung ϕ ist, folgt

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}'' + (\tilde{\gamma}'_1)^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} + 2\tilde{\gamma}'_1\tilde{\gamma}'_2 \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} + (\tilde{\gamma}'_2)^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \\ &= \left(h (\phi')^2 + \phi'' \right) \gamma' = k \phi' \gamma' = k \tilde{\gamma}'. \end{aligned}$$

Ferner ist $\tilde{\gamma}(s_0) = \gamma(\phi(s_0)) = \gamma(t_0) = \delta(s_0)$ und

$$\tilde{\gamma}'(s_0) = \phi'(s_0) \gamma'(\phi(s_0)) = l \gamma'(t_0) = \delta'(s_0)$$

Das bedeutet, dass $\tilde{\gamma}$ das gleiche Anfangswertproblem wie δ löst. Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz stellt sicher, dass $\tilde{\gamma}$ mit δ auf der Schnittmenge J' der Definitionsbereiche übereinstimmt. \square

1.3.31 Korollar. (a) *Mit Lemma 1.3.23 folgt aus Satz 1.3.30, dass das Anfangswertproblem, das aus der (impliziten) Differentialgleichung 1.4 sowie den Bedingungen $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ und $(u'(t_0), v'(t_0)) = w$ besteht, eine ganze Klasse von Lösungen besitzt, die jeweils durch Umparametrisierungen auseinander hervorgehen.*

(b) *Aus Satz 1.3.30 folgt ferner, dass parametrisierte Geodätische auf einem Flächenstück, die durch einen gegebenen Punkt und in eine gegebene Richtung (aber möglicherweise mit verschiedenen Geschwindigkeiten) laufen, dieselben Punkte des Flächenstücks durchlaufen.*

In Abschnitt 5.1.3 werden wir Geodätische auf speziellen Flächenstücken, den sogenannten Spindelflächen, untersuchen. Zur Vorbereitung stellen wir im Folgenden einige allgemeine Resultate über Geodätische auf Drehflächen bereit.

1.3.32 Definition. Es sei J ein offenes Intervall und $\mu: J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (r(s), z(s))$ eine viermal stetig differenzierbare Kurve derart, dass $r(s) > 0$ und $z'(s) > 0$ sowie $(r'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1$ für alle $s \in J$ gilt. Dann wird das Bild des parametrisierten Flächenstücks

$$f: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} r(u) \cos v \\ r(u) \sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

als *Drehfläche* oder *Rotationsfläche* bezeichnet, die Parametrisierung f heißt *Standardüberlagerung* der Drehfläche.

1.3.33 Lemma. Für eine Drehfläche S mit Standardüberlagerung f ist jede zu f äquivalente Parametrisierung, insbesondere f selbst, eine (unverzweigte) topologische Überlagerung (vgl. etwa [31], Definition 127 oder [27], Kapitel IX, §2).

Beweis. Es genügt, den Beweis für f zu führen. Für $p \in S$ wählen wir

$$U = \begin{cases} f(J \times (-\pi, \pi)), & \text{falls } p \notin f(J \times \{\pi\}), \\ f(J \times (0, 2\pi)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge U ist offene Umgebung von p , und es ist

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J \times ((2n-1)\pi, (2n+1)\pi), & p \notin f(J \times \{\pi\}), \\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J \times (2n\pi, 2(n+1)\pi) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist somit $f^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von Mengen, deren jede durch f homöomorph auf U abgebildet wird. \square

1 Grundlagen

1.3.34 Bemerkung. Für jeden festen Wert $v_0 \in \mathbb{R}$ ist die parametrisierte Kurve $\mu_{v_0}: J \rightarrow S, u \mapsto f(u, v_0)$ durch die Bogenlänge parametrisiert. Wir nennen die Bildmenge von μ_{v_0} eine *Meridianlinie* oder einen *Meridian* von S .

1.3.35 Satz (von Clairaut für Drehflächen). *Es sei*

$$f: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} r(u) \cos v \\ r(u) \sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

die Standardüberlagerung einer Drehfläche S und

$$\gamma: I \rightarrow S, t \mapsto f(u(t), v(t))$$

eine parametrisierte Geodätische. Ferner bezeichne $\varphi(t)$ den Winkel zwischen $\gamma'(t)$ und dem Tangentenvektor $\partial_u f(u(t), v(t))$ der Meridianlinie an der Stelle $(u(t), v(t))$. Dann ist die Funktion

$$c: I \rightarrow \mathbb{R}, c(t) = r(u(t)) \sin \varphi(t)$$

konstant.

Die Aussage des Satzes ist nicht nur für Drehflächen sondern auch für den etwas allgemeineren Fall sogenannter Clairaut-Parametrisierungen von Flächen richtig. In der Literatur wird er andererseits oft nur für bogenlängenparametrisierte Geodätische formuliert, vgl. etwa [15], Abschnitt 4.4. Wir beweisen die Aussage in der hier gegebenen Fassung für (nichtkonstante) Geodätische mit beliebiger Parametrisierung.

Beweis. Wir verschaffen uns zunächst die differentialgeometrischen Grunddaten. Es ist

$$\partial_u f(u, v) = \begin{pmatrix} r'(u) \cos v \\ r'(u) \sin v \\ z'(u) \end{pmatrix}, \quad \partial_v f(u, v) = \begin{pmatrix} -r(u) \sin v \\ r(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$E(\mathbf{u}, \nu) = 1, F(\mathbf{u}, \nu) = 0, G(\mathbf{u}, \nu) = (r(\mathbf{u}))^2;$$

$$\partial_{\mathbf{u}\mathbf{u}}f(\mathbf{u}, \nu) = \begin{pmatrix} r''(\mathbf{u}) \cos \nu \\ r''(\mathbf{u}) \sin \nu \\ z''(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \partial_{\mathbf{u}\nu}f(\mathbf{u}, \nu) = \begin{pmatrix} -r'(\mathbf{u}) \sin \nu \\ r'(\mathbf{u}) \cos \nu \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\nu\nu}f(\mathbf{u}, \nu) = \begin{pmatrix} -r(\mathbf{u}) \cos \nu \\ -r(\mathbf{u}) \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{11}^1(\mathbf{u}, \nu) = \Gamma_{11}^2(\mathbf{u}, \nu) = \Gamma_{12}^1(\mathbf{u}, \nu) = \Gamma_{22}^2(\mathbf{u}, \nu) = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2(\mathbf{u}, \nu) = \frac{r'(\mathbf{u})}{r(\mathbf{u})}, \quad \Gamma_{22}^1(\mathbf{u}, \nu) = -r(\mathbf{u}) r'(\mathbf{u});$$

Mit den soeben berechneten Ausdrücken für die Christoffelsymbole nimmt die Geodätendifferentialgleichung

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{u}'' + (\mathbf{u}')^2 \Gamma_{11}^1 + 2 \mathbf{u}' \nu' \Gamma_{12}^1 + (\nu')^2 \Gamma_{22}^1 \right) \nu' \\ & = \left(\nu'' + (\mathbf{u}')^2 \Gamma_{11}^2 + 2 \mathbf{u}' \nu' \Gamma_{12}^2 + (\nu')^2 \Gamma_{22}^2 \right) \mathbf{u}' \end{aligned}$$

nach Umsortierung die folgende Gestalt⁹ an:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{u}'' \nu' - \nu'' \mathbf{u}') r(\mathbf{u}) \\ & \quad - 2 \frac{dr}{du}(\mathbf{u}) (\mathbf{u}')^2 \nu' - r(\mathbf{u})^2 \frac{dr}{du}(\mathbf{u}) (\nu')^3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Wir leiten nun einen Ausdruck für den Winkel $\varphi(t)$ her. Es bezeichne $\psi(t)$ den Winkel zwischen $\partial_{\nu}f(\mathbf{u}(t), \nu(t))$ und $\boldsymbol{\gamma}'(t)$. Wie wie oben gesehen haben, gilt $F(\mathbf{u}(t), \nu(t)) = 0$, also stehen die Vektoren $\partial_{\mathbf{u}}f(\mathbf{u}(t), \nu(t))$ und $\partial_{\nu}f(\mathbf{u}(t), \nu(t))$ senkrecht aufeinander. Es folgt $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi$. Mit $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = \cos \psi$ ergibt sich $\cos \psi = \sin \varphi$. Somit ist

$$\left\langle \partial_{\nu}f(\mathbf{u}(t), \nu(t)), \boldsymbol{\gamma}'(t) \right\rangle = \left\| \partial_{\nu}f(\mathbf{u}(t), \nu(t)) \right\| \left\| \boldsymbol{\gamma}'(t) \right\| \sin \varphi(t),$$

⁹ Wir schreiben an dieser Stelle $\frac{dr}{du}$ anstelle von r' , da u' und ν' für die jeweiligen Ableitungen nach dem Parameter t stehen

1 Grundlagen

das heißt

$$v'(t) r(u(t))^2 = r(u(t)) \sqrt{(u'(t))^2 + r(u(t))^2 (v'(t))^2} \sin \varphi(t),$$

und es folgt schließlich

$$c(t) = r(u(t)) \sin \varphi(t) = \frac{r(u(t))^2 v'(t)}{\sqrt{(u'(t))^2 + r(u(t))^2 (v'(t))^2}}.$$

Wir vereinfachen die Notation nun wieder durch Fortlassen der Argumente¹⁰.

$$c = \frac{r^2 v'}{\sqrt{(u')^2 + r^2 (v')^2}}. \quad (1.7)$$

Ziel ist es nun nachzuweisen, dass die Ableitung von c identisch verschwindet. Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$c' = -r u' \frac{(u'' v' - v'' u') r - 2 \frac{dr}{du} (u')^2 v' - r^2 \frac{dr}{du} (v')^3}{\left((u')^2 + r^2 (v')^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mit Gleichung 1.6 folgt $c' = 0$, also ist $c: I \rightarrow \mathbb{R}$ konstant. \square

1.3.36 Korollar. *Es sei S eine Drehfläche mit Standardüberlagerung f . Zu jeder parametrisierten Geodätischen $\gamma: I \rightarrow S$, $t \mapsto f(u(t), v(t))$ existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $r(u(t)) \sin \varphi(t) = c$ für alle $t \in I$.*

Wir wollen die Konstante c als *Neigungskonstante* (englisch: *slant*) der parametrisierten Geodätischen bezeichnen.

1.3.37 Satz (Clairaut-Parametrisierung für Drehflächen). *Es sei f die Standardüberlagerung einer Drehfläche S , $f(u_0, v_0)$ ein Punkt auf S ,*

¹⁰ Zur Sicherheit halten wir fest, dass beim Differenzieren von r nach dem Parameter t die Kettenregel anzuwenden ist: $\frac{d}{dt} r(u(t)) = u'(t) \cdot \frac{dr}{du}(u'(t))$.

I ein Intervall mit $u_0 \in I$, c eine reelle Zahl, und es gelte $r(t)^2 > c^2$ für alle $t \in I$. Dann ist $\gamma: I \rightarrow S, t \mapsto f(t, v(t))$ mit

$$v(t) = v_0 + \int_{u_0}^t \frac{c}{r(u) \sqrt{r(u)^2 - c^2}} du$$

eine parametrisierte Geodätische auf S mit Neigungskonstante c .

Beweis. Wir zeigen, dass die Funktion $t \mapsto (u(t), v(t)) = (t, v(t))$ mit dem angegebenen Ausdruck für $v(t)$ die Differentialgleichung 1.6 erfüllt. Es ist

$$\begin{aligned} u'(t) &= 1, \quad u''(t) = 0, \\ v'(t) &= \frac{c}{r(t) \sqrt{r(t)^2 - c^2}}, \quad v''(t) = -\frac{c r'(t) (2 r(t)^2 - c^2)}{r(t)^2 (r(t)^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &(u'' v' - v'' u') r - 2 r' (u')^2 v' - r^2 r' (v')^3 \\ &= \frac{c r r' (2 r^2 - c^2) - 2 c r r' (r^2 - c^2) - c^3 r r'}{r^2 (r^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass die Geodätische die Neigungskonstante c besitzt, verwenden wir die Identität 1.7 sowie die eben abgeleiteten Ausdrücke für u' und v' .

$$\begin{aligned} r \sin \varphi &= \frac{r^2 v'}{\sqrt{(u')^2 + r^2 (v')^2}} = \frac{r^2 \frac{c}{r \sqrt{r^2 - c^2}}}{\sqrt{1 + r^2 \frac{c^2}{r^2 (r^2 - c^2)}}} = \frac{r \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}}{\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - c^2}}} \\ &= c. \quad \square \end{aligned}$$

1.3.38 Bemerkungen. Es sei $\gamma: I \rightarrow S, t \mapsto (u(t), v(t))$ eine (nicht-konstante) parametrisierte Geodätische mit Neigungskonstante c auf einer Drehfläche S mit Standardüberlagerung f .

1 Grundlagen

- (a) Wegen $|\sin \varphi(t)| \leq 1$ gilt $r(u(t)) \geq |c|$ für alle $t \in I$. Insbesondere verlaufen durch einen Punkt $f(u_0, v_0)$ auf S nur solche Geodätische, für deren Neigungskonstante die Ungleichung $|c| \leq r(u_0)$ erfüllt ist. Je kleiner der Wert von $|c|$ ist, desto steiler verläuft die Geodätische mit Neigungskonstante c .
- (b) Es sind $\gamma'(t_0)$ und $\partial_v f(u(t_0), v(t_0))$ genau dann linear unabhängig, wenn $r(u(t_0)) = |c|$. In diesem Fall ist $u'(t_0) = 0$, d.h. der Tangentenvektor $\gamma'(t_0)$ ist horizontal.
- (c) Falls $c = 0$, so gilt wegen $r > 0$, dass $\sin \varphi(t) = 0$ für alle $t \in I$, d.h. das Bild von γ liegt auf einem Meridian.
- (d) Wie aus Gleichung 1.7 ersichtlich, ist $v'(t) > 0$ für alle $t \in I$, falls $c > 0$, und $v'(t) < 0$, falls $c < 0$. Insbesondere wechseln $v'(t)$ und $\sin \varphi(t)$ im Falle $c \neq 0$ das Vorzeichen nicht. Sonst gäbe es ein t_0 mit $\sin \varphi(t_0) = 0$. Da aber genau eine parametrisierte Geodätische durch den Punkt $\gamma(t_0)$ und den Richtungsvektor $\gamma'(t_0)$ existiert, wäre γ eine Parametrisierung (eines Teils) der Meridianlinie, im Widerspruch zur Annahme $c \neq 0$.

Für $c > 0$ liegen die Werte von $\varphi(t)$ im Intervall $(0, \pi)$, im Falle $c < 0$ gilt $\varphi(t) \in (-\pi, 0)$ für alle $t \in I$. Anschaulich gesprochen verlaufen parametrisierte Geodätische mit $c > 0$ im Gegenuhrzeigersinn (in Bezug auf die e_3 -Achse), diejenigen mit $c < 0$ im Uhrzeigersinn.

Mit Hilfe von Satz 1.3.37 erhält man zu gegebenem Punkt $f(u_0, v_0)$ und gegebener *Neigungskonstante* c eine parametrisierte Geodätische durch Integration. Da der Integrand an den Stellen u_S , für die $r(u_S) = |c|$ gilt, nicht definiert ist, lassen sich durch Clairaut-Parametrisierungen lediglich Teile von Geodäten beschreiben.

1.3.3 Geodätische Abbildungen

Wir wollen nun das differentialgeometrische Analogon des inzidenzgeometrischen Begriffs der *Lineation*, nämlich den Begriff der *geodätischen Abbildung* bzw. der *lokalen geodätischen Abbildung* definieren. Die in der Literatur üblichen Definitionen (vgl. etwa [15], Abschnitt 4.6 oder [39], Kapitel 15) beziehen sich auf eingebettete Flächen bzw. auf Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^3 . In diesen Fällen sind Abbildungen zwischen zwei Flächen, nachdem für jede der Flächen eine feste Familie von Parametrisierungen gewählt wird, eindeutig durch Abbildungen zwischen den Parameterbereichen bestimmt und umgekehrt. Im Gegensatz hierzu können im Fall nicht injektiver parametrisierter Flächenstücke zwei voneinander verschiedene Abbildungen zwischen den Parameterbereichen in derselben Abbildung zwischen den Flächenstücken resultieren. Wir haben diesen Sachverhalt im Folgenden zu berücksichtigen.

1.3.39 Definition. Es sei $1 \leq k \leq 4$. Für zwei injektive Flächenstücke S_1 und S_2 bezeichnen wir eine bijektive Abbildung $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ als C^k -Diffeomorphismus, wenn zu einem (und dann jedem) Paar (injektiver) Parametrisierungen $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ und $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ ein C^k -Diffeomorphismus $\bar{\varphi}: U_1 \rightarrow U_2$ derart existiert, dass $\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \bar{\varphi}$ gilt.

1.3.40 Definition. Es seien S_1 und S_2 zwei injektive Flächenstücke. Einen C^2 -Diffeomorphismus $\lambda: S_1 \rightarrow S_2$ nennen wir *geodätische Abbildung (von S_1 nach S_2)*, wenn für jede parametrisierte Geodätische $\gamma: I \rightarrow S_1$ auf S_1 die Kurve $\lambda \circ \gamma$ eine parametrisierte Geodätische auf S_2 ist.

1.3.41 Definition. Es seien S_1 und S_2 zwei injektive Flächenstücke, und es sei $V_1 \subseteq S_1$ eine offene Umgebung eines Punktes $p \in S_1$. Eine injektive Abbildung $\lambda: V_1 \rightarrow S_2$ heißt *lokale geodätische Abbildung* bei p , wenn es eine Umgebung V_2 von $\varphi(p)$ in S_2 derart gibt, dass die Korestriktion $\lambda|_{V_2}^V: V_1 \rightarrow V_2$ von λ auf V_2 eine geodätische Abbildung ist.

1.3.42 Definition. Es seien $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ bzw. $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ parametrisierte Flächenstücke, und es sei $\bar{\lambda}: U_1 \rightarrow U_2$ ein C^2 -Diffeomorphismus derart, dass für jede Lösung $\gamma: I \rightarrow U_1$ der Geodätendifferentialgleichung von f_1 die Abbildung $\bar{\lambda} \circ \gamma: I \rightarrow U_2$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von f_2 ist. Dann nennen wir $\bar{\lambda}$ eine *geodätische Parameterabbildung* oder eine *geodätische Parametertransformation* (von U_1 nach U_2).

1.3.43 Definition. Es seien $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ bzw. $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ parametrisierte Flächenstücke, und es sei O_1 eine offene Umgebung eines Punktes $u \in U_1$. Eine injektive Abbildung $\bar{\lambda}: O_1 \rightarrow U_2$ heißt *lokale geodätische Parameterabbildung* oder *lokale geodätische Parametertransformation* bei u , wenn es eine Umgebung O_2 von $\bar{\lambda}(u)$ in U_2 derart gibt, dass die Korestriktion $\bar{\lambda}|_{O_2}^{-1}: O_2 \rightarrow O_1$ von $\bar{\lambda}$ auf O_2 eine geodätische Parametertransformation ist.

Wir stellen für den Fall unparametrisierter Flächenstücke den Zusammenhang zwischen geodätischen Abbildungen und geodätischen Parametertransformationen dar. Zunächst machen wir uns klar, dass die Existenz einer geodätischen Parametertransformation sich von einem gegebenen Paar von Parametrisierungen auf jedes andere Paar jeweils äquivalenter Parametrisierungen (vgl. Definition 1.3.1) überträgt.

1.3.44 Lemma. Es seien S_1 und S_2 zwei Flächenstücke. Für ein Paar von Parametrisierungen $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ und $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ sei $\bar{\lambda}: U_1 \rightarrow U_2$ eine geodätische Parametertransformation. Dann ist für je zwei Parametrisierungen $\tilde{f}_1: \tilde{U}_1 \rightarrow S_1$ und $\tilde{f}_2: \tilde{U}_2 \rightarrow S_2$ von S_1 bzw. S_2 mit C^4 -Diffeomorphismen $\varphi_1: \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ und $\varphi_2: \tilde{U}_2 \rightarrow U_2$, für die $\tilde{f}_1 = f_1 \circ \varphi_1$ und $\tilde{f}_2 = f_2 \circ \varphi_2$ gilt, die Abbildung $\varphi_2^{-1} \circ \bar{\lambda} \circ \varphi_1$ eine geodätische Parametertransformation von \tilde{U}_1 nach \tilde{U}_2 .

Beweis. Eine Lösung γ der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f}_1 wird durch $\varphi_2^{-1} \circ \bar{\lambda} \circ \varphi_1$ auf eine Lösung der zu \tilde{f}_2 gehörigen Differentialgleichung abgebildet, vgl. Lemma 1.3.25. \square

Auf der Grundlage des vorstehenden Lemmas formulieren wir nun ein Kriterium, mit dem unter Verwendung beliebig gegebener Parametrisierungen festgestellt werden kann, ob ein vorgelegter C^2 -Diffeomorphismus eine geodätische Abbildung darstellt oder nicht.

1.3.45 Lemma. *Es seien S_1 und S_2 zwei injektive Flächenstücke. Ein C^2 -Diffeomorphismus $\lambda: S_1 \rightarrow S_2$ ist genau dann eine geodätische Abbildung, wenn für ein (und dann jedes) Paar (injektiver) Parametrisierungen $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ von S_1 bzw. $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ von S_2 die Abbildung*

$$\bar{\lambda} := f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1$$

eine geodätische Parametertransformation ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die genannte Bedingung hinreichend ist. Es sei also γ eine parametrisierte Geodätische auf S_1 . Nach Korollar 1.3.26 existiert für jede Parametrisierung f_1 von S_1 eine Lösung $\gamma: I \rightarrow U_1$ der zu f_1 gehörigen Geodätendifferentialgleichung mit $\gamma = f_1 \circ \gamma$. Da f_1 injektiv ist, gilt $\gamma := f_1^{-1} \circ \gamma$. Für jede Parametrisierung f_2 von S_2 gilt nach Voraussetzung, dass $f_2^{-1} \circ \lambda \circ \gamma = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1 \circ f_1^{-1} \circ \gamma$ eine Lösung der zu f_2 gehörigen Geodätendifferentialgleichung ist. Damit ist $\lambda \circ \gamma = f_2 \circ f_2^{-1} \circ \lambda \circ \gamma$ nach Korollar 1.3.26 eine parametrisierte Geodätische auf S_2 , folglich ist λ eine geodätische Abbildung.

Es sei umgekehrt λ eine geodätische Abbildung, es seien f_1 und f_2 beliebige Parametrisierungen von S_1 bzw. S_2 , und es sei $\gamma: I \rightarrow U_1$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von f_1 . Dann ist $f_1 \circ \gamma$ eine parametrisierte Geodätische auf S_1 , und $\lambda \circ f_1 \circ \gamma$ nach Voraussetzung eine parametrisierte Geodätische auf S_2 . Es folgt, dass $f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1 \circ \gamma$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von f_2 ist, somit ist $f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1$ eine geodätische Parametertransformation. \square

1.3.46 Korollar. *Es seien $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ und $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ injektive Parametrisierungen von Flächenstücken S_1 und S_2 , und es sei $\bar{\lambda}: U_1 \rightarrow$*

1 Grundlagen

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\lambda} & S_2 \\ f_1 \uparrow & & \uparrow f_2 \\ U_1 & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & U_2 \end{array}$$

Abbildung 1.5: Geodätische Parametertransformation $\bar{\lambda}$ und geodätische Abbildung λ für zwei Flächenstücke mit injektiven Parametrisierungen.

U_2 eine geodätische Parametertransformation. Dann ist

$$\lambda := f_2 \circ \bar{\lambda} \circ f_1^{-1}: S_1 \rightarrow S_2$$

eine geodätische Abbildung von S_1 nach S_2 .

Das Diagramm in Abbildung 1.5 veranschaulicht den Sachverhalt. Wir überzeugen uns nun davon, dass die sich die definierende Eigenschaft geodätischer Parametertransformationen bzw. geodätischer Abbildungen auf deren Inverse überträgt.

1.3.47 Satz. *Es seien $f_1: U_1 \rightarrow S_1$ und $f_2: U_2 \rightarrow S_2$ parametrisierte Flächenstücke, und es sei $\bar{\lambda}: U_1 \rightarrow U_2$ eine geodätische Parametertransformation. Dann ist auch $\bar{\lambda}^{-1}: U_2 \rightarrow U_1$ eine geodätische Parametertransformation.*

Beweis. Es sei $\gamma: I \rightarrow U_2$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von f_2 . Wir weisen nach, dass $\delta := \bar{\lambda}^{-1} \circ \gamma: I \rightarrow U_1$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von f_1 ist.

Für ein zunächst fest gewähltes $t_0 \in I$ setzen wir $u_0 := \delta(t_0)$ und $X_0 := \delta'(t_0) = D(\bar{\lambda}^{-1})(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = (D\bar{\lambda})^{-1}(\delta(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz gibt es $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\eta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_1$ der zu f_1 gehörigen

Geodätendifferentialgleichung, welche die Bedingungen $\eta(0) = u_0$ und $\eta'(0) = X_0$ erfüllt.

Da $\bar{\lambda}$ nach Voraussetzung eine geodätische Parametertransformation ist, erfüllt $\bar{\lambda} \circ \eta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_2$ die Geodätendifferentialgleichung von f_2 . Weiterhin gilt

$$(\bar{\lambda} \circ \eta)(0) = \bar{\lambda}(u_0) = \bar{\lambda}(\delta(t_0)) = \gamma(t_0)$$

sowie

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} \circ \eta)'(0) &= D\bar{\lambda}(\eta(0)) \cdot \eta'(0) = D\bar{\lambda}(\eta(0)) \cdot X_0 \\ &= D\bar{\lambda}(\eta(0)) \cdot (D\bar{\lambda})^{-1}(\delta(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \\ &= D\bar{\lambda}(\eta(0)) \cdot (D\bar{\lambda})^{-1}(\eta(0)) \cdot \gamma'(t_0) = \gamma'(t_0). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.3.30 existieren offene Intervalle $I' \subseteq I$ und $J \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ und ein Diffeomorphismus $\Phi: J \rightarrow I'$ derart, dass

$$(\bar{\lambda} \circ \eta)(s) = (\gamma \circ \Phi)(s) \quad \text{und damit auch}$$

$$(\bar{\lambda}^{-1} \circ \bar{\lambda} \circ \eta)(s) = (\bar{\lambda}^{-1} \circ \gamma \circ \Phi)(s) \quad \text{für alle } s \in J \text{ gilt.}$$

Da zu jedem $s \in J$ genau ein $t \in I'$ mit $s = \Phi^{-1}(t)$ existiert, folgt

$$(\eta \circ \Phi^{-1})(t) = (\bar{\lambda}^{-1} \circ \gamma)(t), \quad \text{also } (\eta \circ \Phi^{-1})(t) = \delta(t)$$

für alle $t \in I'$. Das bedeutet, dass die Einschränkung von δ auf I' mit $\eta \circ \Phi^{-1}$ übereinstimmt und somit nach Lemma 1.3.28 eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von f_1 ist. Da $t_0 \in I$ beliebig gewählt werden kann, folgt, dass die parametrisierte Kurve δ auf ihrem vollen Definitionsbereich I die zu f_1 gehörende Geodätendifferentialgleichung erfüllt. \square

1.3.48 Korollar. *Es seien S_1 und S_2 zwei injektive Flächenstücke. Falls $\lambda: S_1 \rightarrow S_2$ eine geodätische Abbildung von S_1 nach S_2 ist, so ist $\lambda^{-1}: S_2 \rightarrow S_1$ eine geodätische Abbildung von S_2 nach S_1 .*

1 Grundlagen

Wir wollen noch den Anschluss an die Literaturstellen herstellen, in denen Geodäten (auch) als Punktmengen aufgefasst werden, siehe etwa [15], Abschnitt 4.4. sowie die Bemerkungen auf S. 10 von [7].

1.3.49 Definition (Geodätische Punktmengen). Es sei S ein Flächenstück und $C \subset S$ eine Teilmenge von S . Wir nennen C eine *Geodäte* oder eine *geodätische Punktmenge* (auf S), falls eine parametrisierte Geodätische $\gamma: I \rightarrow S$ mit $\gamma(I) = C$ existiert.

1.3.50 Bemerkung. Im Falle von Flächenstücken, die nicht injektiv parametrisiert sind, können geodätische Punktmengen auftreten, denen ihre „Herkunft“ als Bild parametrisierter Geodätischer schwer anzusehen ist. So werden wir in Kapitel 5 ein Flächenstück S betrachten, auf welchem geodätische Punktmengen existieren, die jeweils *dicht* in einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge von S liegen.

Wir beschließen dieses Grundlagenkapitel mit einem fundamentalen klassischen Resultat, das von E. Beltrami in [6] bewiesen wurde.

1.3.51 Satz (Beltrami, 1865). *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück mit der Eigenschaft, dass zu jedem Punkt $u \in U$ eine lokale geodätische Parameterabbildung in die reelle euklidische Ebene existiert. Dann ist die Gauß-Krümmung $K: U \rightarrow \mathbb{R}$ konstant.*

Beweis. Die Originalarbeit [6] von Beltrami ist nicht zuletzt wegen einer Reihe von (äußerst ingeniosen) Transformationen, die in „klassischer“ Notation ausgedrückt sind, nicht ganz leicht nachzuvollziehen. Ein Beweis in heute gebräuchlicher Notation findet sich zum Beispiel in [39]. \square

1.3.52 Korollar. *Es sei S eine zusammenhängende reguläre Fläche mit der Eigenschaft, dass zu jedem Punkt $p \in S$ eine lokale geodätische Abbildung in die reelle euklidische Ebene existiert. Dann besitzt S notwendig konstante Gauß-Krümmung.*

2 Hilbertsche Liniensysteme

In seiner Arbeit *A Note on Hilbert and Beltrami Systems* definiert M. Stroppel [55] sogenannte *Compact Disks (CDs)* und konstruiert affine \mathbb{R}^2 -Ebenen durch „Einkleben“ von CDs in die reelle affine Ebene (oder allgemeiner in beliebige affine \mathbb{R}^2 -Ebenen). Bei einer solchen Konstruktion werden diejenigen Geraden der zugrundeliegenden affinen Ebene, welche die (konvexe) Punktmenge der eingeklebten CD in mehr als einem Punkt treffen, modifiziert, indem man jedes im Innern der CD verlaufende Geradenstück durch ein Element des Liniensystems der CD ersetzt. Die auf diese Weise konstruierten affinen Ebenen sind Verallgemeinerungen der von H. Mohrmann in [41] so benannten *Hilbertschen* bzw. *Beltramischen Liniensysteme*, die ihrerseits auf dem in unserem Einleitungskapitel bereits erwähnten ersten veröffentlichten Beispiel einer nicht desarguesschen affinen Ebene von David Hilbert basieren, vgl. [23] bzw. [24], S. 66-71.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels stellen wir die Konstruktion affiner Ebenen nach Hilbert bzw. Mohrmann in der Fassung von Stroppel vor. Nach einer kurzen Erörterung der Mohrmannschen Begriffsbildung legen wir dar, inwiefern sich eine CD für die Zwecke der vorliegenden Arbeit gerade dann eignet, wenn eine topologische Lineation λ zur Verfügung steht, vermöge derer sie sich in die reelle affine Ebene einbetten lässt. Im zweiten Abschnitt geben wir Bedingungen an die Randkurve der CD und ihr Bild unter λ an, mit deren Hilfe sich entscheiden lässt, ob ein mit einer derartigen CD konstruiertes Hilbertsches Liniensystem die Desargues-Eigenschaft besitzt. Im dritten Abschnitt betrachten wir räumliche Realisierungen von CDs, die sich unmittelbar in konkret gegebene affine \mathbb{R}^2 -Ebenen in \mathbb{R}^3 einkleben lassen.

2.1 Affine \mathbb{R}^2 -Ebenen mit eingeklebten CDs

Die Konstruktion affiner \mathbb{R}^2 -Ebenen mit eingeklebten CDs, die wir in diesem Abschnitt vorstellen, erfordert verschiedene Konvexitätsbegriffe. Wir erinnern zunächst an die Definitionen von Konvexität und strenger Konvexität in der reellen affinen Ebene $(\mathbb{R}^2, \text{aff}_1\mathbb{R}^2)$ und verallgemeinern diese Definitionen auf affine \mathbb{R}^2 -Ebenen mit Geradensystemen, die von $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ verschieden sein können.

Für zwei voneinander verschiedene Punkte p, q der reellen affinen Ebene bezeichne pq deren Verbindungsstrecke. Wir wollen Strecken mitunter auch *Geradensegmente* nennen.

2.1.1 Definition. Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex* (bezüglich des Geradensystems $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$) oder *$\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvex*, wenn E mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

Alternativ zu den in der Definition verwandten Formulierungen werden wir abkürzend auch von einer konvexen Menge $E \subseteq \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ sprechen. Wir betrachten nun \mathbb{R}^2 mit der Standardtopologie und erinnern daran, dass der *offene Kern* E^0 einer Menge E die Vereinigung aller offenen Mengen ist, die in E enthalten sind.

2.1.2 Definition (vgl. etwa Leichtweiß [35], §10). Eine konvexe Teilmenge $E \subseteq \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ heißt *streng konvex*, wenn jeder von p und q verschiedene Punkt einer beliebigen in E liegenden Strecke pq zum offenen Kern von E gehört.

2.1.3 Lemma. *Es sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge der reellen affinen Ebene. Genau dann ist K streng konvex, wenn der Rand ∂K von K kein Geradensegment enthält, d.h. wenn es zu zwei voneinander verschiedenen Punkten $p, q \in \partial K$ wenigstens einen Punkt $z \in pq \setminus \{p, q\}$ gibt, der nicht auf ∂K liegt.*

Beweis. Falls K streng konvex ist, so gehört nach Definition 2.1.2 jeder von p und q verschiedene Punkt einer beliebigen in K liegenden Strecke pq zum offenen Kern K^0 von K . Insbesondere gilt

dies für Punkte p und q , die auf ∂K liegen, dann enthält das Geradensegment pq (viele) Punkte, die nicht auf ∂K liegen.

Besitzt K umgekehrt die Eigenschaft, dass ∂K kein Geradensegment enthält, so unterscheiden wir drei Fälle. Für zwei in K^0 liegende Punkte p und q ist die Verbindungsstrecke ganz in K^0 enthalten, da der offene Kern einer konvexen Menge konvex ist (vgl. [35], Satz 1.6). Falls einer der beiden Punkte, etwa p , auf ∂K liegt, während $q \in K^0$ gilt, so ist die Menge $pq \setminus \{p\}$ in K^0 enthalten (vgl. [35], Lemma 1.1). Es seien schließlich p, q zwei voneinander verschiedene auf ∂K liegende Punkte. Nach Voraussetzung ist ausgeschlossen, dass pq ganz in ∂K liegt, also existiert mindestens ein Punkt $z \in pq \setminus \{p, q\}$ mit $z \in K^0$. Nach dem eben zitierten Resultat liegen dann aber $pz \setminus \{p\}$ sowie $qz \setminus \{q\}$ und folglich auch $pq \setminus \{p, q\}$ in K^0 . In jedem der drei Fälle ist K somit streng konvex. \square

2.1.4 Definition. Es sei $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene.

- (a) $E \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex bezüglich \mathcal{A}* oder *\mathcal{A} -konvex*, wenn für je zwei Punkte $p, q \in E$ die Spur $E \cap (p \vee q)$ der Verbindungsgeraden $p \vee q$ in E zusammenhängend ist.
- (b) Eine \mathcal{A} -konvexe Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *streng konvex* (bezüglich \mathcal{A}), falls gilt: Für je zwei voneinander verschiedene Punkte $p, q \in E$ ist $E \cap (p \vee q) \setminus \{p, q\} \subseteq E^0$.

2.1.5 Bemerkung. Man macht sich leicht klar, dass eine Teilmenge von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ genau dann konvex nach Definition 2.1.1 ist, wenn sie im Sinne von Definition 2.1.4 $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvex ist.

Der folgende Begriff ist für die von uns konstruierten affinen Ebenen mit speziellen lokalen Störungen des jeweiligen Geradensystems von fundamentaler Bedeutung.

2.1.6 Definition (Stroppel [55], 1993). Es sei D eine mit einer Topologie versehene Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(D)$. Die Inzidenzstruktur (D, \mathcal{D}, \in) heißt *Compact Disk* bzw. kurz *CD*, falls die folgenden Kriterien erfüllt sind:

- (a) (D, \mathcal{D}) ist ein linearer Raum;¹
- (b) die Punktmenge D ist homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in \mathbb{R}^2 ;
- (c) jede Gerade $g \in \mathcal{D}$ ist homöomorph zum abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$. Ferner ist der Rand ∂g in ∂D enthalten, und $g \setminus \partial D$ ist zusammenhängend.

2.1.7 Bemerkungen. (a) Durch die CD-Axiome werden Geraden ausgeschlossen, deren Endpunkte (genauer: Randpunkte) im Innern der CD liegen; ferner wird sichergestellt, dass eine Gerade entweder ganz im Rand der CD verläuft oder außer ihren Endpunkten keine weiteren Punkte auf dem Rand besitzt.

- (b) Das dritte CD-Axiom kann als Konvexitätsbedingung interpretiert werden. Dies wird deutlich, wenn man sich Korollar (3) in [55] vor Augen hält. Dieses besagt, dass zu jeder CD $\mathbb{D} := (D, \mathcal{D})$ ein Homöomorphismus $\gamma: D \rightarrow E$ auf eine kompakte $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge E von \mathbb{R}^2 derart existiert, dass γ einen Isomorphismus der Inzidenzstrukturen induziert, welche durch \mathbb{D} auf ∂D bzw. durch $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ auf ∂E induziert werden.
- (c) Im Allgemeinen wird das Bild des Liniensystem \mathcal{D} unter der Abbildung γ ein System von Kurven in E sein, die nicht notwendig Geradensegmente sind. Falls jedoch ein Homöomorphismus $\lambda: D \rightarrow K$ auf eine kompakte $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge K von \mathbb{R}^2 existiert, der Lineation² ist, so liefert λ eine Einbettung der CD in die reelle affine Ebene, vgl. Lemma 2.1.13. Genau solche CDs werden für uns von besonderem Interesse sein.

¹ Nach den Definitionen 1.1.2 und 1.1.3 erfordert dies, dass jede Gerade mindestens zweielementig ist.

² Nach Definition 1.1.12 existiert in diesem Fall zu jedem Element $g \in \mathcal{D}$ eine affine Gerade $l \in \text{aff}_1\mathbb{R}^2$ mit $\lambda(g) \subset l$.

Als Beispiel sei die von Hilbert in [23] verwandte CD genannt, die wir in Kapitel 4 ausführlich behandeln werden. Deren Punktmenge ist eine von einer Ellipse berandete Teilmenge von \mathbb{R}^2 ; Kreisbögen durch einen außerhalb der Ellipse gelegenen und hinreichend weit entfernten Punkt Z liefern das Geradensystem der CD. Die Inversion am Kreis mit Zentrum Z stellt eine Lineation von der CD nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ dar, ihr Bild ist eine $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe, kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

2.1.8 Definition (Streng konvexe CD). Eine CD $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ heißt *streng konvex*, falls für jede Gerade $l \in \mathcal{D}$ gilt: $l \cap \partial D = \partial l$.

2.1.9 Definition (Desarguessche CD).

- (a) Eine CD $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ heißt *lokal desarguessch*, wenn zu jedem Punkt p eine Umgebung U existiert, die mit dem System der Spurgeraden $\mathcal{U} = \{l \cap U \mid l \in \mathcal{D}\}$ ein desarguesscher partieller linearer Raum³ ist.
- (b) Eine CD \mathbb{D} heißt *desarguessch*, wenn \mathbb{D} ein desarguesscher linearer Raum ist.

2.1.10 Lemma. *Eine desarguessche CD ist lokal desarguessch.*

Beweis. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine desarguessche CD, p ein Punkt in D und U eine Umgebung von p in D . Nach Definition 1.1.40 ist für jeden Monomorphismus von Inzidenzstrukturen⁴

$$(\alpha, \beta): \left(\left(\begin{pmatrix} \Omega \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega \\ 3 \end{pmatrix}, C \setminus \{(\{2, 4\}, \{2, 3, 4\})\} \right) \rightarrow \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$$

die Bedingung $\alpha(\{2, 4\}) \in \beta(\{2, 3, 4\})$ erfüllt. Dies gilt insbesondere für diejenigen Monomorphismen (α, β) mit $\text{Im}(\alpha) \subset U$. Mit Lemma 1.1.43 folgt, dass U ein desarguesscher partieller linearer Raum ist. □

³ Vgl. Definition 1.1.40.

⁴ Vgl. Definition 1.1.7.

Nach diesen Vorbereitungen können wir (homöomorphe Bilder von) CDs in die reelle affine Ebene bzw. allgemeiner in eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene einkleben.

2.1.11 Definition. Es sei $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene, $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD, E eine streng \mathcal{A} -konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 und $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus. Für jede Gerade $l \in \mathcal{D}$ setzen wir $\hat{l} = \gamma(l) \cup (k \setminus E)$, wobei $k \in \mathcal{A}$ die Gerade ist, welche die (auf ∂E liegenden) Endpunkte von $\gamma(l)$ verbindet. Mit der Geradenmenge

$$\mathcal{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = \left\{ l \in \mathcal{A} \mid |l \cap E| \leq 1 \right\} \cup \left\{ \hat{l} \mid l \in \mathcal{D} \right\}$$

erhalten wir die Inzidenzstruktur $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_\gamma^{\mathbb{D}})$. Wir nennen $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein *Stoppel-Mohrman-Hilbert-Liniensystem* oder kurz ein *SMH-System*.

Wir verwenden die eben eingeführte Bezeichnungsweise für die Formulierung des folgenden Resultats von Stoppel [55].

2.1.12 Satz. *Jedes SMH-System ist eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene.*

Wir betrachten nun auch *Einbettungen* von CDs in die reelle affine Ebene, die wir mit stetigen injektiven Lineationen erhalten.

2.1.13 Lemma. *Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD und $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Die Korestriktion der Abbildung λ auf ihr Bild $K := \lambda(D)$ ist ein Homöomorphismus.*
- (b) *Die von λ induzierte Geradenabbildung $\beta_\lambda: \mathcal{D} \rightarrow \text{aff}_1\mathbb{R}^2$ ist injektiv.*
- (c) *Der Morphismus $(\lambda, \beta_\lambda): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ist eine Einbettung von Inzidenzstrukturen.*
- (d) *Die Menge $K = \lambda(D)$ ist streng konvex bezüglich $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$.*

Beweis. (a) Da D kompakt ist und \mathbb{R}^2 die Hausdorff-Eigenschaft besitzt, ist λ eine abgeschlossene Abbildung, somit ist die (bijektive) Korestriktion von λ auf $K := \lambda(D)$ ein Homöomorphismus, vgl. etwa [49], Satz 8.11.

(b) Wir stellen zunächst fest, dass die auf dem Inneren von \mathbb{D} induzierte Inzidenzstruktur $\mathbb{D}^0 := (D^0, \mathcal{D} \cap D^0)$ eine \mathbb{R}^2 -Ebene, also insbesondere eine stabile Ebene ist, vgl. [55] sowie [50], 31.26. Wir betrachten nun die Einschränkung $\lambda^0: D^0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ von λ und konstatieren, dass λ^0 eine stetige injektive Lineation von \mathbb{D}^0 nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ist. Mit Lemma 1.2.10 folgt, dass die von λ^0 induzierte Geradenabbildung β_{λ^0} injektiv ist, denn λ^0 ist nicht kollabiert: Angenommen es gibt eine Gerade $l \in \text{aff}_1\mathbb{R}^2$ mit $\lambda^0(D) \subseteq l$. Für einen beliebigen Punkt $p \in D$ ist $D \setminus \{p\}$ und somit auch $\lambda^0(D \setminus \{p\})$ zusammenhängend. Dies steht im Widerspruch dazu, dass die Menge $\lambda^0(D \setminus \{p\})$ durch Wegnahme von $\lambda(p)$ aus $\lambda^0(D)$ entsteht und somit nicht zusammenhängend sein kann.

Aus der Injektivität von β_{λ^0} folgt nun, dass auch β_λ injektiv ist, denn für jede Gerade $l \in \mathcal{D}$ gilt $\beta_{\lambda^0}(l \cap D^0) = \beta_{\lambda^0}(l \setminus \partial l) = \beta_\lambda(l)$.

(c) Mit Lemma 1.1.17 folgt unmittelbar, dass (λ, β_λ) eine Einbettung ist.

(d) Wir zeigen zunächst, dass K konvex ist: Es seien p und q voneinander verschiedene Punkte in K . Dann existiert genau eine Gerade $g \in \text{aff}_1\mathbb{R}^2$, die p und q verbindet. Wir nehmen an, es gibt einen auf der Verbindungsstrecke pq zwischen p und q gelegenen Punkt $z \notin K$. Nach Bemerkung 2.1.5 ist dann $g \cap K$ und somit auch $\lambda^{-1}(g \cap K) \in \mathcal{D}$ nicht zusammenhängend, im Widerspruch zu den für \mathbb{D} gültigen CD-Axiomen. Also kann kein außerhalb von K gelegener Punkt zwischen p und q existieren, d.h. K ist konvex.

Zum Nachweis der strengen Konvexität von K nehmen wir an, dass der Rand $\partial K = \lambda(\partial D)$ eine Strecke $p'q'$ enthält, die

Teilmenge einer Geraden $l \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ ist. Die Urbilder p von p' bzw. q von q' unter λ liegen in ∂D , es sei $g := p \vee q$ ihre Verbindungsgerade in \mathcal{D} . Wir wählen zwei voneinander verschiedene Punkte r und s auf ∂D , die echt zwischen p und q liegen, und setzen $h := r \vee s$. Aus der Stetigkeit von λ folgt, dass die Punkte r und s auf Punkte in $p'q' \subset l$ abgebildet werden. Es ist somit $\beta_\lambda(g) = l = \beta_\lambda(h)$, im Widerspruch zur Injektivität von β_λ . Also ist die Annahme zu verwerfen, und es folgt, dass $K = \gamma(D)$ streng konvex ist. \square

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

2.1.14 Definition. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD und $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2 \mathbb{R}$. Dann bezeichne $\beta_\lambda: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{A}_2 \mathbb{R}$ die von λ induzierte Einbettung.

In den nachfolgenden Bemerkungen tragen wir die bislang erarbeiteten Fakten zu Einbettungen von CDs in die reelle affine Ebene zusammen.

2.1.15 Bemerkungen. Eine CD $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ lasse sich vermöge einer stetigen injektiven Lineation $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ in die reelle affine Ebene einbetten. Es sei $\beta_\lambda: \mathcal{D} \rightarrow \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ die von λ induzierte Geradenabbildung. Wir setzen ferner $K = \lambda(D)$ und $\mathcal{K} := \beta_\lambda(\mathcal{D})$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\beta_\lambda(\mathcal{D}) = \{p \vee q \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2 \mid \{p, q\} \in K \text{ und } p \neq q\}$;
- (b) $\beta_\lambda(\mathcal{D}) = \{g \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2 \mid |g \cap K| \geq 2\}$;
- (c) $\mathcal{K} = \beta_\lambda(\mathcal{D}) \cap K = \{g \cap K \mid g \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2, |g \cap K| \geq 2\}$, vgl. Lemma 1.1.29;
- (d) (K, \mathcal{K}) ist isomorph zu \mathbb{D} , vgl. Lemma 1.1.27;
- (e) $(K, \beta_\lambda(\mathcal{D}))$ ist zu (K, \mathcal{K}) isomorph, vgl. Lemma 1.1.30;
- (f) $(K, \beta_\lambda(\mathcal{D}))$ ist gleich der im Sinne von Definition 1.2.13 von $\mathbb{A}_2 \mathbb{R}$ auf K induzierten Unterebene.

Die Existenz einer Einbettung einer CD in die reelle affine Ebene zieht deren Desargues-Eigenschaft nach sich.

2.1.16 Lemma. *Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine CD und $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ eine Einbettung mit Punktabbildung λ . Dann ist \mathbb{D} ein desarguesscher linearer Raum.*

Beweis. Die Punktabbildung $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$, vgl. Lemma 1.1.19. Wir setzen wieder $K := \lambda(D)$ und $\mathcal{K} := \lambda(\mathcal{D})$. Nach Satz 1.1.50 ist die desarguessche affine Ebene $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ein desarguesscher linearer Raum im Sinne von Definition 1.1.41 bzw. Korollar 1.1.43. Damit ist für jeden Monomorphismus von Inzidenzstrukturen⁵

$$(\alpha, \beta): \left(\left(\begin{pmatrix} \Omega \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega \\ 3 \end{pmatrix}, C \setminus \{(\{2, 4\}, \{2, 3, 4\})\} \right) \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$$

die Bedingung $\alpha(\{2, 4\}) \in \beta(\{2, 3, 4\})$ erfüllt. Dies gilt insbesondere für diejenigen Monomorphismen (α, β) mit $\text{Im}(\alpha) \subset K$, (für die notwendig jede Gerade aus $\text{Im}(\beta)$ nichtleeren Schnitt mit K besitzt). Mit Lemma 1.1.43 folgt, dass (K, \mathcal{K}) als Unterstruktur von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ein desarguesscher linearer Raum ist. Diese Eigenschaft besitzt damit auch \mathbb{D} als zu (K, \mathcal{K}) isomorphe Inzidenzstruktur. \square

Wir müssen an dieser Stelle die Frage offenlassen, ob sich jede lokal desarguessche CD $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ in die reelle affine Ebene einbetten lässt, ob es also eine (stetige oder unstetige) injektive Lineation λ von (D, \mathcal{D}) nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ derart gibt, dass drei Punkte in D genau dann kollinear in \mathbb{D} sind, wenn dies für deren Bilder unter λ gilt.

Für den *offenen Kern* einer lokal desarguesschen CD $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ lässt sich dies mit Hilfe der Resultate von Busemann zeigen: Nach [55] ist der offene Kern $\mathbb{D}^0 := (D^0, \mathcal{D} \cap D^0)$ der CD eine \mathbb{R}^2 -Ebene, die wir (nach Definition 1.2.24) nötigenfalls vermöge eines

⁵ Vgl. Definition 1.1.7.

Homöomorphismus φ auf eine hierzu isomorphe Ebene $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G})$ abbilden können. Diese erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 11.2 in [12], es gibt also eine Abstandsmetrik $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, derart, dass die Geodäten (Kürzesten) bezüglich d genau das System \mathcal{G} liefern. In der (Übertragung der englischen) Terminologie von Busemann ist $\mathbb{S} := (\mathbb{R}^2, d, \mathcal{G})$ ein *stracker G-Raum*. Mit [48] erhalten wir die Desargues-Eigenschaft von \mathbb{S} . Nach Theorem 13.2 von [12] existiert eine offene konvexe Teilmenge C der reellen affinen Ebene und ein Homöomorphismus $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ derart, dass jedes Element g von \mathcal{G} auf $\psi(g) = l \cap C$ mit $l \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ abgebildet wird. Die Komposition $\psi \circ \varphi$ stellt eine (stetige und injektive) Lineation von \mathbb{D}^0 nach $\mathbb{A}_2 \mathbb{R}$ dar. Wir wenden uns nun desarguesschen SMH-Systemen zu.

2.1.17 Satz. *Es sei $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene, $\mathbb{D} = (\mathbb{D}, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD, E eine streng \mathcal{A} -konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 und $\gamma: \mathbb{D} \rightarrow E$ ein Homöomorphismus so, dass die affine \mathbb{R}^2 -Ebene $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ desarguessch ist. Dann existiert eine stetige injektive Lineation $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche eine Einbettung $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2 \mathbb{R}$ induziert.*

Beweis. Nach Satz 1.2.27 existiert für eine desarguessche \mathbb{R}^2 -Ebene $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein Isomorphismus⁶ $\varphi: \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{A}_2 \mathbb{R}$ mit Punktabbildung φ . Das Bild von $E = \gamma(\mathbb{D})$ unter φ ist eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^2 , die wir mit K bezeichnen wollen. Die Abbildung $\lambda := \varphi \circ \gamma: \mathbb{D} \rightarrow K$ ist ein Homöomorphismus.

Für jedes Element l des Geradensystems \mathcal{D} von \mathbb{D} existiert eine Gerade $g \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ mit $\lambda(l) = g \cap K$, also ist λ eine Lineation: Es sei $l \in \mathcal{D}$. Dann existiert nach Konstruktion $\hat{l} \in \mathcal{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ mit $\hat{l} = \gamma(l) \cup (m \setminus E)$, wobei m die Gerade in \mathcal{A} ist, welche die beiden Randpunkte von $\gamma(l)$ in E verbindet. Es ist $\hat{l} \cap E = \gamma(l)$, und nach (a) existiert $g \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(\hat{l}) = g$. Da φ injektiv ist, gilt $\varphi(\hat{l} \cap E) = \varphi(\hat{l}) \cap \varphi(E)$, somit gilt $\lambda(l) = \varphi(\hat{l} \cap E) = g \cap K$.

Nach Lemma 2.1.13 induziert die stetige injektive Lineation λ eine Einbettung von \mathbb{D} in $\mathbb{A}_2 \mathbb{R}$. □

⁶ Vgl. Definition 1.2.8.

2.1.18 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.17 ist \mathbb{D} ein desarguesscher linearer Raum.*

Beweis. Nach Satz 1.1.50 ist die desarguessche affine Ebene $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein desarguesscher linearer Raum. Mit Lemma 1.1.43 folgt, dass $(E, \gamma(\mathcal{D}))$ als Unterstruktur von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ebenfalls ein desarguesscher linearer Raum ist. Dies gilt dann auch für die nach Lemma 1.1.27 zu $(E, \gamma(\mathcal{D}))$ isomorphe Inzidenzstruktur \mathbb{D} . \square

Mohrmann führte in [41] die Bezeichnung *Hilbertsches Liniensystem* ein. Zur genauen Bestimmung der Teilklasse von SMH-Systemen, die wir mit diesem Begriff bezeichnen wollen, folgen wir Stoppels Präzisierung, vgl. [55].

2.1.19 Definition. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD, E eine streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ und $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = \left(\mathbb{R}^2, (\text{aff}_1\mathbb{R}^2)_\gamma^{\mathbb{D}}\right)$ das resultierende SMH-System. Falls \mathbb{D} lokal desarguessch ist, so heißt $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein *Hilbertsches Liniensystem* oder kurz ein *Hilbertsystem*.

Selbstverständlich ist bei einem Hilbertschen Liniensystem $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ die nach Lemma 1.1.27 zu \mathbb{D} isomorphe Inzidenzstruktur $(E, \gamma(\mathcal{D}))$ ebenfalls lokal desarguessch.

Wir ziehen eine wichtige Schlussfolgerung aus den Lemmata 2.1.10 und 2.1.16.

2.1.20 Proposition. *Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD, E eine streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ und $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = \left(\mathbb{R}^2, (\text{aff}_1\mathbb{R}^2)_\gamma^{\mathbb{D}}\right)$ das resultierende SMH-System. Falls eine Einbettung $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ existiert, so ist $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein Hilbertsches Liniensystem.*

Wir verwenden für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Realisierungen Hilbertscher Liniensysteme ausschließlich solche

CDs $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$, die sich vermöge einer stetigen injektiven Lineation $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ in die reelle affine Ebene einbetten lassen. Im Mittelpunkt unseres Interesses steht jeweils die Frage, ob ein mit einer gegebenen CD konstruiertes Hilbertsches Liniensystem die Desargues-Eigenschaft besitzt oder nicht. Die Antwort hierauf wird maßgeblich von der jeweils verwendeten „einklebenden“ Abbildung γ abhängen. Wählt man etwa $\gamma = \lambda$, so liefert die resultierende Ebene $\mathbb{A}_\lambda^{\mathbb{D}}$ eine Kopie von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ und ist somit offensichtlich desarguessch. Beispiele nicht desarguesscher Hilbertssysteme ergeben sich etwa aus der in Kapitel 4 ausführlich diskutierten Hilbertschen Konstruktion von 1899. Hier liefert die Inversionsabbildung ι eine Einbettung der CD in die reelle affine Ebene, während für die Einklebeabbildung $\gamma = \text{id}$ genommen wird, vgl. u.a. Proposition 4.1.6.

Die Konstruktion von SMH-Systemen kann iteriert werden, d.h. eine CD kann in eine durch Einkleben einer anderen CD erhaltene Ebene eingesetzt werden, usw. Diesen Aspekt wollen wir nicht weiter verfolgen, sondern lediglich auf die Untersuchungen von C. Ackermann in [1] hinweisen, der hierfür den Begriff „Mehrfacheinpassungen“ verwendet. Wir betrachten ausschließlich solche Liniensysteme, die durch Einkleben einer CD in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ (oder in eine Kopie von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ im Raum, vgl. Abschnitt 2.3) entstehen. Wir beschränken uns also insbesondere auf Konstruktionen, für welche das Komplement der eingeklebten CD (ebenso wie die CD selbst) lokal desarguessch ist.

2.1.21 Bemerkungen.

- Durch Einsetzen einer (lokal desarguesschen) CD in eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$, deren Geradensystem nicht notwendig gleich $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ ist, erhält man ein SMH-System $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$.
- Falls \mathbb{A} die Desargues-Eigenschaft besitzt, so ist dieses SMH-System $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ zu einem Hilbertschen Liniensystem isomorph.
- Falls \mathbb{A} die Desargues-Eigenschaft nicht besitzt, ist auch das SMH-System $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ nicht desarguessch.

- Falls das SMH-System $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ desarguessch ist, so gilt:
 - (i) Es existiert nach Satz 2.1.17 eine Einbettung λ von \mathbb{D} in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$;
 - (ii) \mathbb{D} ist ein desarguesscher linearer Raum und somit nach Lemma 2.1.10 lokal desarguessch;
 - (iii) Die affine Ebene $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ist isomorph zu einem Hilbertschen Liniensystem.

Zu Ende dieses Abschnitts gehen wir noch auf den zweiten von Mohrmann in [41] ausgezeichneten Typus von SMH-Systemen ein, den des Beltramischen Liniensystems. Wiederum folgen wir der von Stropfel in [55] vorgeschlagenen Präzisierung.

2.1.22 Definition. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD, E eine streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = \left(\mathbb{R}^2, (\text{aff}_1\mathbb{R}^2)_\gamma^{\mathbb{D}}\right)$ das resultierende SMH-System. Falls kein Punkt von D eine Umgebung in D besitzt, die ein desarguesscher partieller linearer Raum ist, so heißt $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein *Beltramisches Liniensystem*.

2.1.23 Bemerkung. Mit den Lemmata 2.1.18 und 2.1.10 folgt, dass Beltramische Liniensysteme nicht desarguessch sind.

Wir merken an dieser Stelle an, dass Mohrmann zwei extreme Situationen ausgezeichnet hat: zum einen Liniensysteme mit CDs, für die *jeder* Punkt eine desarguessche Umgebung besitzt, und zum anderen Liniensysteme mit CDs, für die *kein* Punkt eine desarguessche Umgebung besitzt. Selbstverständlich könnte man Mohrmanns Einteilung um Typen erweitern, die zwischen diesen beiden Extremen liegen und zum Beispiel Liniensysteme mit solchen CDs zusammenfassen, für die endlich viele Punkte eine desarguessche (bzw. eine nicht desarguessche) Umgebung besitzen. Mohrmann motiviert den Begriff *Beltramisches Liniensystem* in seiner Arbeit [41] anhand einer CD, die auf einer Fläche nicht-konstanter Gauß-Krümmung mit dem System der Geodätischen

auf dieser Fläche realisiert ist. Er führt das klassische Resultat von E. Beltrami [6] an, nach dem es Abbildungen, unter denen Geodäten auf Geraden der reellen affinen bzw. euklidischen Ebene übergehen, nur für Flächen konstanter Krümmung gibt. In diesem Zusammenhang weisen wir auf die folgende Vermutung⁷ hin:

2.1.24 Vermutung. *Es sei M eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (z.B. ein reguläres Flächenstück in \mathbb{R}^3), V eine offene Teilmenge von M , U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , und $\lambda: V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus, der parametrisierte Geodätische von $M \cap V$ auf parametrisierte Geradenstücke in U abbildet. Dann ist λ notwendig ein Diffeomorphismus.⁸*

Wir betrachten nun, Mohrmann folgend, eine Fläche M , eine kompakte Teilmenge D von M sowie das System \mathcal{D} der Teilmengen g von D , für die eine parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ existiert, die Geodätische von M ist und für die $\gamma(I) = g$ und $|g \cap \partial D| = 2$ gilt. Falls $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine CD und die Vermutung 2.1.24 richtig ist, so folgt mit dem oben erwähnten Beltramischen Resultat (vgl. Satz 1.3.51), dass sich \mathbb{D} nur dann in die reelle affine Ebene einbetten lässt, wenn die Gaußkrümmung der Riemannschen Mannigfaltigkeit (wenigstens für alle Punkte von D) konstant ist. Falls ferner die Umkehrung der in Lemma 2.1.16 gemachten Aussage zutrifft, so sind CDs, die auf einer Fläche nicht konstanter Gaußkrümmung realisiert werden, jedenfalls nicht de-sarguensch.

⁷ Unseres Wissens ist noch offen, ob diese Vermutung zutrifft. Es scheinen neben Mohrmann verschiedene Autoren wie etwa Klein, (vgl. [28], S. 135f.) oder Busemann, (vgl. [12], Abschnitt 15), von der Richtigkeit dieser Vermutung überzeugt gewesen zu sein, ohne aber Beweise anzugeben. Pogorelov beweist in [47] eine Verschärfung des Beltramischen Resultats für Mannigfaltigkeiten mit stetiger (nicht notwendig differenzierbarer) Riemannscher Metrik. Auch mit diesem Resultat konnten wir jedoch die Richtigkeit der in Vermutung 2.1.24 ausgesprochenen Aussage nicht entscheiden.

⁸ Für die uns bekannten Beweise des Beltramischen Satzes (vgl. Satz 1.3.51) ist darüber hinaus mindestens die Differentiationsklasse C^3 erforderlich.

Wir können die hier erwähnten Fragen zur Realisierung von „nirgends desarguesschen“ CDs im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgen, es sei lediglich noch auf die Möglichkeit hingewiesen, derartige CDs in Shift-Ebenen zu realisieren. Kein Punkt einer nicht-desarguesschen Shift-Ebene⁹ kann eine desarguessche Umgebung besitzen, andernfalls gälte dies wegen der Homogenität für alle Punkte der Ebene. Nach einem Resultat von Polley [48] wäre die Ebene dann aber insgesamt desarguessch, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir konzentrieren uns, wie erwähnt, auf Hilbertsche Liniensysteme, weil es in dieser Klasse, im Gegensatz zu der der Beltramischen Liniensysteme, sowohl desarguessche als auch nicht-desarguessche Ebenen gibt. Bei der Unterscheidung dieser beiden Fälle, die wir im folgenden Abschnitt diskutieren, werden die Einbettungen λ der von uns verwandten CDs in die reelle affine Ebene bzw. deren Punktabbildungen λ einerseits und die jeweiligen Einklebeabbildungen γ andererseits wesentliche Rollen spielen.

2.2 Desarguessche Hilbertsysteme

Wir geben in diesem für die gesamte Arbeit zentralen Abschnitt Kriterien an, mit deren Hilfe sich entscheiden lässt, ob ein gegebenes Hilbertsches Liniensystem $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ desarguessch ist oder nicht. Diese Kriterien betreffen die Randkurve der mit γ in die reelle affine Ebene eingeklebten CD. Genauer geht es um die Existenz einer projektiven Abbildung, welche auf der Randkurve der CD mit der Lineation λ übereinstimmt, vermöge derer sich die CD in die reelle affine Ebene einbetten lässt. Um projektive Abbildungen anwenden zu können, verwenden wir die injektive Lineation

$$\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \langle (x_1, x_2, 1) \rangle,$$

⁹ Vgl. etwa [50], Beispiele 31.2 (b) und 31.25 (c) sowie Abschnitt 36.

welche die Standardembedding π von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ induziert, vgl. Lemma 1.1.58.

2.2.1 Lemma. (a) Die Abbildung π ist stetig.

(b) Die Menge $\pi(\mathbb{R}^2)$ ist offen in $u_1\mathbb{R}^3$.

(c) Die Korrestriktion von π auf $\pi(\mathbb{R}^2)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Siehe [50], 14.1 und 14.3. □

Falls ein SMH-System $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ Desarguessch ist, so ist, da $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene ist, Satz 1.2.27 anwendbar, nach dem ein Isomorphismus topologischer Ebenen $\varphi: \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ existiert.

2.2.2 Satz. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD und $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus auf eine streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge E von \mathbb{R}^2 derart, dass die affine Ebene $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} = \left(\mathbb{R}^2, (\text{aff}_1\mathbb{R}^2)_\gamma^{\mathbb{D}}\right)$ die Desargues-Eigenschaft besitzt. Dann existiert zu jedem Isomorphismus topologischer Ebenen $\varphi: \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ (mit zugehöriger Punktabbildung φ) eine eindeutig bestimmte projektive Abbildung $\mu_\varphi \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\mu_\varphi \circ \pi)(x) = (\pi \circ \varphi)(x)$$

für alle $x \in \partial E$ gilt.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Punktmenge D der CD homöomorph zur Einheitskreisscheibe. Somit ist $E \subset \mathbb{R}^2$ als Bild einer kompakten Menge unter dem Homöomorphismus $\gamma: D \rightarrow E$ kompakt, also insbesondere abgeschlossen. Das Komplement E^c von E in \mathbb{R}^2 ist demnach offen in \mathbb{R}^2 . Der Rand ∂E von E ist homöomorph zu S^1 , E^0 ist das Innere der Jordankurve ∂E , das Äußere ist E^c , mithin gilt $E = E^0 \cup \partial E$ sowie $\overline{E^c} = E^c \cup \partial E$.

Da φ nach Voraussetzung ein Homöomorphismus ist, ist mit E^c auch $\varphi(E^c)$ offen in \mathbb{R}^2 . Aus Lemma 2.2.1 folgt, dass die Mengen $U := \pi(E^c)$ und $(\pi \circ \varphi)(E^c)$ offen in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ sind. Somit ist $\pi' := \pi|_{E^c}^U$

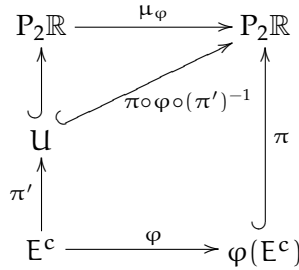


Abbildung 2.1: Diagramm zur Anwendung des Lokalen Fundamentalsatzes im Beweis von Satz 2.2.2.

ein Homöomorphismus, und $\pi \circ \varphi \circ (\pi')^{-1}: U \rightarrow P_2\mathbb{R}$ induziert eine Einbettung von $(U, \pi(\text{aff}_1\mathbb{R}^2 \cap E^c))$ in die reelle projektive Ebene. Nach dem lokalen Fundamentalsatz 1.2.17 existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mu_\varphi \in PGL_3\mathbb{R}$ mit $\pi \circ \varphi \circ (\pi')^{-1} = \mu_\varphi|_U$, wie in dem kommutierenden Diagramm in Abbildung 2.1 veranschaulicht. Es gilt also $\pi \circ \varphi = \mu_\varphi \circ \pi'$, d.h. $(\mu_\varphi \circ \pi)(x) = (\pi \circ \varphi)(x)$ für alle $x \in E^c$.

Die Menge $G := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\mu_\varphi \circ \pi)(x) = (\pi \circ \varphi)(x)\}$ ist nach Lemma 1.2.1 abgeschlossen in \mathbb{R}^2 . Mit $E^c \subseteq G$ folgt $\overline{E^c} \subseteq \overline{G} = G$, d.h. $E^c \cup \partial E \subseteq G$, insbesondere gilt damit

$$(\mu_\varphi \circ \pi)(x) = (\pi \circ \varphi)(x) \text{ für alle } x \in \partial E. \quad \square$$

Im Beweis von Satz 2.2.2 haben wir den lokalen Fundamentalsatz auf den „Außenraum“ der eingeklebten CD angewandt. Falls eine Einbettung λ der CD in die reelle affine Ebene existiert, können wir den Fundamentalsatz auch auf das Bild der CD unter λ anwenden. Nach Proposition 2.1.17 existiert zu einem desarguessches Hilbertsystem $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ eine solche Einbettung, die von einer stetigen injektiven Lineation induziert wird.

2.2.3 Satz. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD, $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus auf eine streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge E von \mathbb{R}^2 so, dass $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ desarguessch ist. Ferner sei $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart, dass

$$(\mu \circ \pi)(x) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) \quad \text{für alle } x \in \partial E \text{ gilt.}$$

Beweis. Nach den Sätzen 1.2.27 bzw. 2.2.2 existiert ein Isomorphismus $\varphi: \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ mit zugehöriger Punktabbildung φ und eine projektive Abbildung μ_φ mit

$$(\mu_\varphi \circ \pi)(x) = (\pi \circ \varphi)(x) \quad \text{für alle } x \in \partial E. \quad (\clubsuit)$$

Wir bemerken $(\lambda \circ \gamma^{-1})(E) = \lambda(D)$, setzen $U := (\pi \circ \lambda)(D^0)$, $V := (\pi \circ \varphi)(E^0)$, $\pi' := \pi|_{\lambda(D^0)}^U$ sowie $\pi'' := \pi|_{\varphi(E^0)}^V$, und stellen fest, dass die (injektive, stetige und offene) Abbildung

$$\pi'' \circ \varphi \circ \gamma \circ \left(\lambda|_{\lambda(D^0)} \right)^{-1} \circ (\pi')^{-1}: U \longrightarrow V$$

eine Lineation ist, welche die (in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$) offene Menge U auf die (in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$) offene Menge V abbildet, also eine Einbettung von U in die reelle projektive Ebene induziert. Nach dem lokalen Fundamentalsatz existiert eine projektive Abbildung $\tilde{\mu}$ mit

$$\tilde{\mu}(x) = \left(\pi'' \circ \varphi \circ \gamma \circ \left(\lambda|_{\lambda(D^0)} \right)^{-1} \circ (\pi')^{-1} \right)(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Es folgt

$$\tilde{\mu} \circ \pi' \circ \lambda \circ \gamma^{-1} = \pi'' \circ \varphi \quad \text{auf } E^0.$$

Nach Fortsetzung auf den Abschluss $E = E^0 \cap \partial E$ von E^0 analog zum vorstehenden Beweis von Satz 2.2.2 erhalten wir

$$(\tilde{\mu} \circ \pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) = (\pi \circ \varphi)(x) \quad \text{für alle } x \in \partial E.$$

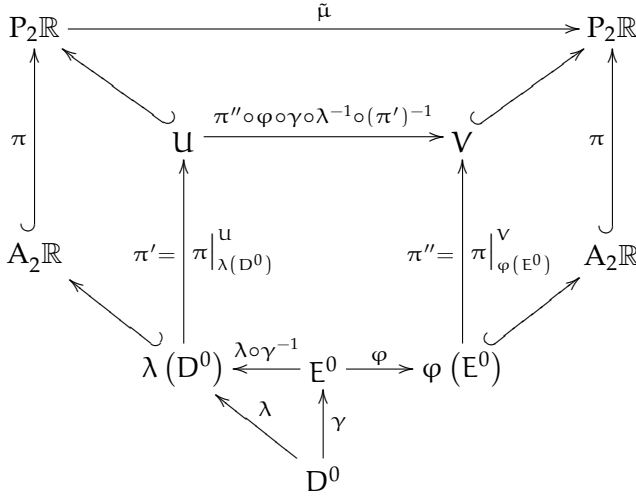


Abbildung 2.2: Diagramm zur Anwendung des Lokalen Fundamentalsatzes im Beweis von Satz 2.2.3.

Zusammen mit der Identität ♣ folgt

$$(\mu_\varphi \circ \pi) = (\tilde{\mu} \circ \pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1}) \quad \text{auf } \partial E.$$

Wir setzen $\mu := \tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_\varphi$ und erhalten

$$(\mu \circ \pi)(x) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) \quad \text{für alle } x \in \partial E. \quad \square$$

Das kommutierende Diagramm¹⁰ in Abbildung 2.2 veranschaulicht die Anwendung des lokalen Fundamentalsatzes im Beweis von Satz 2.2.3. Mit diesem Satz haben wir ein Kriterium zur Verfügung, anhand dessen wir entscheiden können, ob ein gegebenes Hilbertsches Liniensystem $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ *nicht* desarguessch ist. Wir geben nun eine hinreichende Bedingung für die Desargues-Eigenschaft von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ an.

¹⁰ Zur Betonung der geometrischen Zusammenhänge ist der Punktraum der reellen affinen Ebene in dem Diagramm mit $A_2\mathbb{R}$ anstatt mit \mathbb{R}^2 bezeichnet.

2.2.4 Satz. Es sei $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$ eine streng konvexe CD und $\gamma: D \rightarrow E$ ein Homöomorphismus auf eine streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvexe Teilmenge E von \mathbb{R}^2 . Ferner sei $\lambda: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ sowie $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart, dass

$$(\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) = (\mu \circ \pi)(x) \quad \text{für alle } x \in \partial E \text{ gilt.}$$

(a) Dann ist die Punktabbildung

$$\Lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) & \text{für } x \in E, \\ (\mu \circ \pi)(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus E^0 \end{cases}$$

eine injektive, stetige und offene Lineation von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ in die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$.

(b) Durch Λ wird eine offene Einbettung $\mathbf{\Lambda}: \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ induziert.

(c) Es existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\overline{\mathbf{\Lambda}}: \overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}} \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ von $\mathbf{\Lambda}$ auf den projektiven Abschluss $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}}$ von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$, d.h. es gilt $\overline{\mathbf{\Lambda}}|_{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}} = \mathbf{\Lambda}$.

(d) $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ist desarguessch.

Beweis. (a) Zum Nachweise der Stetigkeit von Λ bemerken wir zunächst, dass $\mu \circ \pi$ und $\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1}$ jeweils als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig sind. Da diese beiden Abbildungen auf der Schnittmenge ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, ist Λ nach Lemma 1.2.2 wohldefiniert und stetig.

Wir zeigen nun, dass Λ eine Lineation ist und unterscheiden hierzu zwei Fälle. Es sei $l \in \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$. Falls $|l \cap E| \leq 1$ gilt, so ist $l \in \text{aff}_1\mathbb{R}^2$ und $\Lambda(p) = (\mu \circ \pi)(p)$ für alle $p \in l$. Nach Lemma 2.2.1 erhält π Kollinearität, ferner ist μ ein Automorphismus von $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, somit werden die Punkte von l unter $\mu \circ \pi$ auf projektive Punkte abgebildet, welche mit ein und derselben projektiven Geraden aus $u_2\mathbb{R}^3$ inzident sind. Falls andererseits $|l \cap E| \geq 2$ gilt, so ist $|l \cap \partial E| = 2$, da E nach Voraussetzung streng konvex bzgl. $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ ist. Wir bezeichnen mit p, q die Punkte in $l \cap \partial E$. Es gibt eine eindeutig bestimmte Kurve $g \in \gamma(\mathcal{D})$ mit $p, q \in g$, und es gilt

$l = g \dot{\cup} (m \setminus E) = g \cup (m \setminus E^0)$, wobei $m \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ die eindeutig bestimmte Gerade ist, welche p und q verbindet. Es existiert eine Gerade $k \in \text{aff}_1 \mathbb{R}^2$ mit $(\lambda \circ \gamma^{-1})(g) \subset k$. Alle Punkte von k werden unter π auf projektive Punkte abgebildet, die mit ein und derselben projektiven Geraden l' inzident sind. Insbesondere sind $(\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(p)$ und $(\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(q)$ mit l' inzident. Andererseits sind die Bilder aller Punkte in $l \setminus E^0$ unter $\mu \circ \pi$, also insbesondere $(\mu \circ \pi)(p)$ und $(\mu \circ \pi)(q)$, mit einer projektiven Geraden l'' inzident. Wegen $(\mu \circ \pi)(p) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(p)$ und $(\mu \circ \pi)(q) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(q)$ und der Tatsache, dass $\mathbb{P}_2 \mathbb{R}$ ein linearer Raum ist, folgt $l' = l''$. Damit sind die Bilder aller Punkte von l unter Λ mit l' inzident. Es folgt, dass Λ eine Lineation ist.

Zum Nachweis der Injektivität von Λ stellen wir zunächst fest, dass die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}_2 \mathbb{R}$ eine stabile Ebene ist, vgl. die Definitionen 1.2.6 und 1.2.4 in Verbindung mit [50], 14.4 und 14.9. Die Abbildung Λ ist nicht kollabierend und nicht lokal konstant, weil nach dem Satz über offene Abbildungen (vgl. etwa [50], 51.19) die Einschränkung von Λ auf E^0 offen und $\Lambda(E^0)$ somit in keiner projektiven Geraden enthalten ist. Nach Lemma 1.2.11 ist Λ daher injektiv, und es folgt wiederum aus dem Satz über offene Abbildungen, dass Λ offen ist.

- (b) Nach Lemma 1.2.10 induziert die injektive Lineation Λ eine injektive Geradenabbildung β_Λ und nach Lemma 1.1.23 ist $\Lambda := (\Lambda, \beta_\Lambda) : \mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{P}_2 \mathbb{R}$ somit eine Einbettung.
- (c) Es sei $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}} = (\hat{P}, \hat{L})$ der projektive Abschluss von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$. Nach Theorem 32.2 von [50] ist $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}}$ mit den dort angegebenen Topologien PI und \hat{H} für \hat{P} bzw. \hat{L} eine (kompakte) topologische projektive Ebene, und PI induziert auf der Punktmenge \mathbb{R}^2 von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ deren natürliche Topologie. Die Menge \mathbb{R}^2 ist offen in \hat{P} , vgl. Abschnitt 1 im Beweis von [50], Theorem 32.2.

Wir zeigen, dass \mathbb{R}^2 dicht in \hat{P} liegt. Es bezeichne \mathcal{L} das Geradensystem von $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$. Falls $p \in \hat{P} \setminus \mathbb{R}^2$ gilt, so existieren $l \in \mathcal{L}$ und $\hat{l} \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $p = [l]_{\parallel}$ und $\hat{l} = l \cup \{p\}$. Nach Proposition 32.3 von [50] ist die Punktreihe $\mathcal{P}_{\hat{l}}$ homöomorph zum Einheitskreis in \mathbb{R}^2 . Da dieser keine isolierten Punkte besitzt, ist insbesondere p kein isolierter Punkt von $\mathcal{P}_{\hat{l}}$. Also existiert eine gegen p konvergente Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{P}_{\hat{l}} \setminus \{p\}$.

Die offene Abbildung Λ bildet die in \hat{P} offene Menge \mathbb{R}^2 auf die in $P_2\mathbb{R}$ offene Menge $\Lambda(\mathbb{R}^2)$ ab. Die Korestriktion $\Lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Lambda(\mathbb{R}^2)$ ist ein Homöomorphismus. Dieser hat als Einbettung nach Lemma 1.1.23 die Eigenschaft, dass drei Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ genau dann kollinear sind, wenn ihre Bilder $\Lambda(x), \Lambda(y), \Lambda(z)$ kollinear sind. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 1.2.16 bzw. Proposition 44.9 in [50] erfüllt, und es folgt, dass Λ eine eindeutige Fortsetzung $\overline{\Lambda}$ zu einem geometrischen und topologischen Isomorphismus von $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}}$ auf $P_2\mathbb{R}$ besitzt.

- (d) Da wir die Umkehrung von Satz 1.1.50 nicht zur Verfügung haben, genügt es nicht festzustellen, dass $\Lambda(\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}})$ (als Unterstruktur von $P_2\mathbb{R}$) und damit auch $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ desarguessche lineare Räume sind. Es ist jedoch $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}}$ nach (c) vermöge $\overline{\Lambda}$ isomorph zu $P_2\mathbb{R}$. Es sei l die Gerade von $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}}$ mit der Eigenschaft, dass die affine Ableitung von $\overline{\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}}$ bei l gleich $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ist. Dann ist $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ isomorph zur affinen Ableitung von $P_2\mathbb{R}$ bei $\overline{\Lambda}(l)$. Die Automorphismengruppe der reellen projektiven Ebene wirkt transitiv auf deren Geradenmenge, also existiert ein Automorphismus, welcher $\overline{\Lambda}(l)$ auf $\ker(0, 0, 1)$ abbildet. Die affine Ableitung von $P_2\mathbb{R}$ bei $\overline{\Lambda}(l)$ ist somit isomorph zur affinen Ableitung von $P_2\mathbb{R}$ bei $\ker(0, 0, 1)$, d.h. zu unserer Standardeinbettung von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ in die reelle projektive Ebene. Wir schließen hieraus, dass $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ als zu $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ isomorphe affine Ebene desarguessch ist. \square

2.3 Liniensysteme in \mathbb{R}^3

In Abschnitt 2.2 haben wir angegeben, wie sich *homöomorphe Bilder* beliebiger (abstrakt gegebener oder konkret realisierter) CDs in eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene einkleben lassen. Der Zielsetzung dieser Arbeit entsprechend wollen wir nun räumliche Realisierungen von CDs derart einführen, dass diese *unmittelbar* in eine in \mathbb{R}^3 realisierte affine \mathbb{R}^2 -Ebene eingeklebt werden können.

2.3.1 Definition (Räumlich mit ebenem Rand realisierte CD).

Es sei X ein zweidimensionaler affiner Unterraum von \mathbb{R}^3 mit einem Geradensystem \mathcal{X} derart, dass $\mathbb{X} = (X, \mathcal{X})$ eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene ist. Ferner sei $S \subsetneq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $D \subsetneq S$ ein einfach zusammenhängendes Kompaktum derart, dass gilt:

- (a) $\mathcal{C} := D \cap X$ ist eine einfach geschlossene Kurve und $\mathcal{C} = \partial D$,
- (b) die von \mathcal{C} in X berandete Teilmenge D' ist streng \mathcal{X} -konvex,
- (c) $\mathbb{D} := (D, \mathcal{D})$ ist eine streng konvexe CD, wobei die Elemente von \mathcal{D} diejenigen Teilmengen g von D seien, für die eine Geodätische $\gamma : I \rightarrow S$ mit $|\gamma(I) \cap \partial D| \geq 2$ und $\gamma(I) \cap D^0 \neq \emptyset$ sowie ein nichtleeres Teilintervall $J \subseteq I$ derart existieren, dass J eine Zusammenhangskomponente von $\gamma^{-1}(D)$ ist und $g = \gamma(J)$ gilt.

Dann nennen wir (\mathbb{D}, \mathbb{X}) eine (streng konvexe) *räumlich mit ebenem Rand realisierte CD*.

2.3.2 Definition. Es sei $(\mathbb{D}, \mathbb{X}) = ((D, \mathcal{D}), (X, \mathcal{X}))$ eine räumlich mit ebenem Rand realisierte CD. Zu jedem Geodätensegment $g \in \mathcal{D}$ bilden wir $\hat{g} = g \cup (l \setminus D')$, wobei $l \in \mathcal{X}$ die Gerade ist, welche die (auf $\partial D = \partial D'$ liegenden) Endpunkte von g verbindet. Mit der Punktmenge $X^{\mathbb{D}} := (X \setminus D') \cup D$ und der Geradenmenge $\mathcal{X}^{\mathbb{D}} = \{l \in \mathcal{X} \mid |l \cap D'| \leq 1\} \cup \{\hat{g} \mid g \in \mathcal{D}\}$ erhalten wir die Inzidenzstruktur $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}} = (X^{\mathbb{D}}, \mathcal{X}^{\mathbb{D}})$. Wir nennen $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ ein *im Raum realisiertes Stoppel-Mohrman-Hilbert-Liniensystem* oder kurz ein *räumliches SMH-System*.

2.3.3 Bemerkung. Bei der eben eingeführte Konstruktion haben wir unter anderem den Fall $\mathbb{X} = (X, \text{aff}_1 X)$ im Blick. Der allgemeinere Fall erweist sich wie bei ebenen CDs etwa für Iterationen der Konstruktion als erforderlich, wenn also mehrere CDs in eine affine Unterebene des \mathbb{R}^3 eingeklebt werden.

2.3.4 Satz. *Es sei (\mathbb{D}, \mathbb{X}) eine räumlich mit ebenem Rand realisierte CD. Dann ist die Inzidenzstruktur $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene.*

Beweis. Es existiert ein Homöomorphismus $\gamma: D \rightarrow D'$, denn D ist nach Voraussetzung homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, und für D' gilt dies nach dem Jordanschen Kurvensatz ebenfalls. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass jeder Punkt auf $\partial D = \partial D'$ Fixpunkt von γ ist, nötigenfalls machen wir mit einem geeigneten Homöomorphismus¹¹ auf D' die von γ auf ∂D induzierte Abbildung wieder rückgängig. Wir definieren nun eine Punktabbildung $\varphi: X^D \rightarrow X$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in X \setminus (D')^0, \\ \gamma(x) & \text{für } x \in D. \end{cases}$$

Die Abbildung φ ist stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung (siehe z.B. [59], Lemma 1.6) und induziert eine umkehrbare Geradenabbildung ϕ . Man verifiziert leicht, dass (φ, ϕ) und ihre Umkehrung alle Inzidenzen erhalten. Somit ist $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ isomorph zu $\mathbb{A}_{\gamma}^{\mathbb{D}}$ und nach Satz 2.1.12 demnach eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene. \square

Wir wollen nun auch unter räumlichen SMH-Systemen diejenigen auszeichnen, bei deren Konstruktion eine in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ einbettbare räumliche CD in eine zu $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ isomorphe Ebene eingeklebt wird.

2.3.5 Definition. Für $\mathbb{X} = (X, \text{aff}_1 X)$ sei (\mathbb{D}, \mathbb{X}) eine räumlich mit ebenem Rand realisierte CD mit einer Einbettung $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$. Dann nennen wir $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ ein *räumlich realisiertes Hilbertsches Liniensystem* oder kurz ein *räumliches Hilbertsystem*.

¹¹ Wenn wir auf dem Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe einen beliebigen Homöomorphismus definieren, so setzt sich dieser vermittelt Polarkoordinaten zu einem Homöomorphismus der ganzen Scheibe fort.

2.3.6 Bemerkung. Für ein räumlich realisiertes Hilbertsches Liniensystem liefert die Komposition $\lambda \circ \gamma^{-1}: D' \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ (mit den Bezeichnungen von Satz 2.3.4) eine Einbettung der ebenen CD $(D', \gamma(D'))$ in die reelle affine Ebene. Somit ist $\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$ ein (ebenes) Hilbertsches Liniensystem, das nach Satz 2.3.4 isomorph zu $\mathbb{A}_X^{\mathbb{D}}$ ist.

Um auch für räumliche Hilbertsysteme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Desargues-Eigenschaft formulieren zu können, verschaffen wir uns zunächst durch Verwendung von Koordinatenabbildungen für affine Ebenen in \mathbb{R}^3 die Möglichkeit der Einbettung in die reelle projektive Ebene. Für eine affine Ebene $\mathbb{X} = (X, \text{aff}_1 X)$ in \mathbb{R}^3 sei ein Koordinatenursprung o sowie eine Basis (b_1, b_2) des zugrundeliegenden Vektorraumes gegeben. Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Element $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $x = o + s_1 b_1 + s_2 b_2$. Wir nennen $(o; b_1, b_2)$ ein *Koordinatensystem* für X .

2.3.7 Definition. Es sei $\mathbb{X} = (X, \text{aff}_1 X)$ eine affine Ebene in \mathbb{R}^3 und $(o; b_1, b_2)$ sei ein Koordinatensystem für X . Dann ist $\beta: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch die Zuordnung $\beta(x) = (s_1, s_2)$ mit $x = o + s_1 b_1 + s_2 b_2$ definierte *Koordinatenabbildung*.

Wir sind nun in der Lage, den zu Satz 2.2.3 analogen Satz für den Fall räumlicher Hilbertsysteme zu formulieren.

2.3.8 Satz. Es sei $\mathbb{X} = (X, \text{aff}_1 X)$ eine affine Ebene in \mathbb{R}^3 und (\mathbb{D}, \mathbb{X}) eine räumlich mit ebenem Rand realisierte CD derart, dass $\mathbb{A}_X^{\mathbb{D}}$ desarguessch ist. Ferner sei $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2\mathbb{R}$ eine Einbettung der CD in die reelle affine Ebene, welche durch eine stetige injektive Lineation λ induziert wird, und $\beta: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Koordinatenabbildung für X . Dann existiert eine eindeutig bestimmte projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart, dass

$$(\mu \circ \pi \circ \beta)(x) = (\pi \circ \lambda)(x) \text{ für alle } x \in \partial\mathbb{D} \text{ gilt.}$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen der Definition 2.3.1 und des Beweises von Satz 2.3.4 bemerken wir, dass $(\beta \circ \gamma)(D) = \beta(D')$ gilt.

2 Hilbertsche Liniensysteme

Die Koordinatenabbildung β erhält alle (inzidenz-)geometrischen, topologischen und Konvexitätseigenschaften. Daher ist die Inzidenzstruktur $(\beta(D'), (\beta \circ \gamma)(\mathcal{D}))$ eine CD, und $\mathbb{A}_{\beta \circ \gamma}^{\mathbb{D}}$ ist als affine \mathbb{R}^2 -Ebene isomorph zu $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ und damit nach Voraussetzung desarguessch. Wir wenden Satz 2.2.3 auf $\mathbb{A}_{\beta \circ \gamma}^{\mathbb{D}}$ an und erhalten (nach Ersetzung von γ durch $\beta \circ \gamma$) die Beziehung

$$(\mu \circ \pi)(y) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1} \circ \beta^{-1})(y) \quad \text{für alle } y \in \partial \beta(D').$$

Zu jedem $y \in \partial \beta(D')$ existiert genau ein $x \in \partial D'$ mit $y = \beta(x)$, somit gilt

$$(\mu \circ \pi \circ \beta)(x) = (\pi \circ \lambda \circ \gamma^{-1})(x) \quad \text{für alle } x \in \partial D'.$$

Da $\partial D' = \partial D$ und $\gamma^{-1}(x) = x$ für $x \in \partial D'$ gilt, folgt

$$(\mu \circ \pi \circ \beta)(x) = (\pi \circ \lambda)(x) \quad \text{für alle } x \in \partial D. \quad \square$$

2.3.9 Satz. *Es sei $\mathbb{X} = (X, \text{aff}_1 X)$ und (\mathbb{D}, \mathbb{X}) eine räumlich mit ebenem Rand realisierte CD. Ferner sei $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}_2 \mathbb{R}$ eine Einbettung der CD in die reelle affine Ebene, welche durch eine stetige injektive Lineation λ induziert wird, $\beta: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Koordinatenabbildung für X und $\mu \in \text{PGL}_3 \mathbb{R}$ eine projektive Abbildung derart, dass*

$$(\pi \circ \lambda)(x) = (\mu \circ \pi \circ \beta)(x) \quad \text{für alle } x \in \partial D$$

gilt. Dann induziert die Punktabbildung

$$\Lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2 \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (\pi \circ \lambda)(x) & \text{für } x \in D, \\ (\mu \circ \pi \circ \beta)(x) & \text{für } x \in \overline{D^c} = \mathbb{X} \setminus D^0 \end{cases}$$

eine offene Einbettung von $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ in die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}_2 \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ ist desarguessch.

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 2.2.4 mit den gleichen Ersetzungen wie im Beweis von Satz 2.3.8. □

3 Werkzeuge der Projektiven Differentialgeometrie

In diesem Kapitel stellen wir Methoden bereit, mit deren Hilfe wir die in Kapitel 2 vorgestellten Kriterien auf konkrete Modelle Hilbertscher Liniensysteme anwenden können. Da sich die Ränder der eingeklebten CDs bei den von uns betrachteten Hilbertsystemen durch differenzierbare Parametrisierungen beschreiben lassen, können wir auf differentialgeometrische Techniken zurückgreifen, wie sie etwa in der Monographie von Gerrit Bol (vgl. [10], Abschnitt I, §1) skizziert sind.

Die von uns benötigten grundlegenden Sachverhalte der Projektiven Differentialgeometrie sind aber nicht direkt aus Bols Text zitierbar. So können wir anders als Bol (vgl. [10], S. 5) nicht voraussetzen, dass projektive Darstellungen ebener Kurven von vorneherein die sogenannte (spezielle) Grundgleichung (vgl. [10], S. 8 sowie Definition 3.2.10 der vorliegenden Arbeit) erfüllen, vielmehr müssen wir uns zu einer gegebenen parametrisierten ebenen Kurve zunächst eine derartige projektive Darstellung verschaffen.¹ Da wir ausführlichere Quellen zu den von uns benötigten Grundlagen, insbesondere zur Eindeutigkeit der speziellen Grundgleichung und zu dem in [10] lediglich angedeuteten Beweis der Invarianz der Koeffizientenfunktionen einer speziellen Grundgleichung unter projektiven Transformationen nicht auffindig machen konnten, haben wir uns entschlossen, die Theorie in dem von uns benötigten Umfang komplett selbst zu entfalten.

¹ Wir danken Herrn Prof. W. Degen für wertvolle Hinweise hierzu.

Dies geschieht in den Abschnitten 3.2 und 3.3; die hierzu benötigten Grundtatsachen zu ebenen Kurven sind im ersten Abschnitt des Kapitels zusammengestellt.

3.1 Ebene Kurven und Konvexität

3.1.1 Definition. Es sei I ein Intervall, n eine natürliche Zahl und $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine n -mal stetig differenzierbare Abbildung. Dann nennen wir x eine C^n -parametrisierte ebene Kurve. Diese heiÙe

- (a) *regulär*, falls $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt,
- (b) *geschlossen*, falls es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq I$ derart gibt, dass $x(a) = x(b)$ sowie $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b)$ für alle Ableitungen der Ordnungen $k \leq n$ gilt,
- (c) *einfach geschlossen*, falls es ein Intervall $[a, b] \subseteq I$ derart gibt, dass $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossen und die Einschränkung von x auf $[a, b]$ injektiv ist.

3.1.2 Bemerkung. Falls X ein zweidimensionaler affiner Unterraum von \mathbb{R}^3 ist, so soll die hier gegebene Definition in analoger Weise für Kurven $x: I \rightarrow X$ gelten, vgl. Abschnitt 5.2.

Zur Klärung von Konvexitätsfragen, wie wir sie in den Abschnitten 4.3 und 5.2 untersuchen werden, benötigen wir die (vorzeichenbehaftete) Krümmungsfunktion für regulär C^2 -parametrisierte ebene Kurven. Wir betrachten zunächst Kurven $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch die Bogenlänge parametrisiert sind, für die also $\|x'(s)\| = 1$ für alle $s \in I$ gilt. Wir setzen $e_1(s) := x'(s)$ und

$$\begin{aligned} e_2(s) &:= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} e_1(s) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(s) \\ x'_2(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x'_2(s) \\ x'_1(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung der Konstanz von $\|x'\|$ folgt

$$0 = \frac{d}{ds} \langle x'(s) | x'(s) \rangle = 2 \langle x''(s) | x'(s) \rangle,$$

das heißt, dass die Vektoren $x''(s)$ und $e_2(s)$ für alle $s \in I$ linear abhängig sind. Also existiert zu jedem $s \in I$ eine Zahl $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ mit $x''(s) = \kappa(s) e_2(s)$. Wegen $\langle e_2(s) | e_2(s) \rangle = 1$ folgt somit

$$\langle x''(s) | e_2(s) \rangle = \kappa(s) \langle e_2(s) | e_2(s) \rangle = \kappa(s).$$

3.1.3 Definition. Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär C^2 -parametrisierte ebene Kurve mit $\|x'(s)\| = 1$ für alle $s \in I$. Dann heißt

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(s) = x_1'(s) x_2''(s) - x_1''(s) x_2'(s)$$

die *Krümmungsfunktion* von x und $\kappa(s)$ die *Krümmung* der Kurve am Punkte $x(s)$.

3.1.4 Bemerkung. Ersichtlich gilt $|\kappa(s)| = \|x''(s)\|$ für alle $s \in I$.

Das nachfolgende Lemma liefert einen Ausdruck für die Krümmung von Kurven, die nicht notwendig durch die Bogenlänge parametrisiert sind.

3.1.5 Lemma. Für eine regulär C^2 -parametrisierte ebene Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Krümmung am Punkte $x(t)$ durch

$$\kappa(t) := \frac{x_1'(t) x_2''(t) - x_1''(t) x_2'(t)}{\left((x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben.

Beweis. Der rein rechnerische Beweis findet sich beispielsweise in [39], Proposition 6.7. \square

3.1.6 Lemma. Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve so, dass $x(I)$ Teilmenge einer Geraden von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ist. Dann gilt $\kappa(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Beweis. Da alle Punkte von $x(I)$ nach Voraussetzung auf einer Geraden der reellen affinen Ebene liegen, existieren reelle Zahlen a, b, c mit $(a, b) \neq (0, 0)$ derart, dass

$$a x_1(t) + b x_2(t) + c = 0 \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Für die ersten bzw. zweiten Ableitungen folgt

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Diese homogene Gleichung besitzt nach Voraussetzung eine nicht-triviale Lösung, somit hat die Koeffizientenmatrix nicht den vollen Rang, und ihre Determinante verschwindet. Mit Lemma 3.1.5 folgt $\kappa(t) = 0$ für alle $t \in I$. (Wegen der Regularität von x ist der Ausdruck $(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2$ im Nenner von Null verschieden). \square

3.1.7 Bemerkung. In Abschnitt 5.2 werden wir die Krümmung einer (durch die Bogenlänge parametrisierten) Kurve c untersuchen, deren Punkte in einer affinen Unterebene \mathbb{X} des \mathbb{R}^3 liegen. Wir orientieren die Ebene \mathbb{X} durch die Wahl eines Normalenvektors und ordnen jedem Kurvenpunkt analog zu dem zuvor beschriebenen Vorgehen ein Zweibein zu. Zu jedem Tangentenvektor $e_1(s) := c'(s)$ der Kurve wählen wir $e_2(s)$ durch Drehung von $e_1(s)$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne um die Normalenrichtung. Da die Menge $\{c''(s), e_2(s)\}$ linear abhängig ist, existiert zu jedem $s \in I$ eine Zahl $\kappa(s)$ mit

$$c''(s) = \kappa(s) e_2(s), \tag{3.1}$$

und es gilt wiederum $\kappa(s) = \langle x''(s) | e_2(s) \rangle$.

Mit Blick auf die in Abschnitt 3.2 behandelte projektive Theorie wollen wir Kurven auszeichnen, welche die Eigenschaft besitzen, dass an jeder Stelle der Tangenten- und der Beschleunigungsvektor linear unabhängig sind.

3.1.8 Definition. Eine C^2 -parametrisierte Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass $\{x'(t), x''(t)\}$ für jedes $t \in I$ linear unabhängig ist, nennen wir eine *zweifach regulär* parametrisierte Kurve.

3.1.9 Bemerkungen. (a) Aus der Klasse zweifach regulär parametrisierter Kurven sind Geraden(segmente) und Kurven mit Wendepunkten sowie solche Kurven ausgeschlossen, für die $t_c \in I$ mit $x'(t_c) = 0$ oder $x''(t_c) = 0$ existiert. Das bedeutet, dass zweifach regulär parametrisierte Kurven insbesondere *regulär* (parametrisiert) sind.

(b) Wir wollen den in Definition 3.1.8 eingeführte Begriff gegen den der *Frenet-Kurve* im \mathbb{R}^2 abgrenzen (vgl. etwa [33], Kapitel 2). Ersterer liefert für Kurven, die *nicht* notwendig durch die Bogenlänge parametrisiert sind, ein Kriterium für die Existenz eines Zweibeins an jedem Punkt. Andererseits ist jede bogenlängenparametrisierte ebene Kurve im \mathbb{R}^2 automatisch eine *Frenet-Kurve*, (vgl. die Vorbemerkungen zu Definition 3.1.3), jedoch nicht notwendig zweifach regulär, wie man am Beispiel bogenlängenparametrisierter Geraden sieht.

Wir richten unser Augenmerk nun auf geschlossene Kurven und die von diesen berandeten Mengen.

3.1.10 Satz (über differenzierbare Jordankurven).

Es sei $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene regulär parametrisierte ebene Kurve. Dann besitzt die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus x([a, b])$ genau zwei Zusammenhangskomponenten J_x und \mathcal{E}_x mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $x([a, b]) = \partial J_x = \partial \mathcal{E}_x$,
- (b) \mathcal{E}_x ist unbeschränkt,
- (c) J_x ist beschränkt.

Beweis. Der Satz wird z.B. in Abschnitt 5-7 von [15] bewiesen. \square

3.1.11 Bemerkung. Aus dem Satz von Schoenflies (vgl. etwa Theorem 5.D.9 in [13]) folgt, dass J_x einfach zusammenhängend ist.

Wir nennen \mathcal{E}_x das Äußere und \mathcal{J}_x das Innere der Kurve x . Das Innere werden wir auch als *das von $x([a, b])$ berandete Gebiet* bezeichnen.

3.1.12 Definition. Eine geschlossene regulär parametrisierte ebene Kurve $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für jedes $t \in [a, b]$ die Spur $x([a, b])$ der Kurve ganz in einer der abgeschlossenen Halbebenen liegt, welche durch die Tangente der Kurve am Punkt $x(t)$ bestimmt sind.

3.1.13 Satz (nach Do Carmo [15], Abschnitt 5-7, Proposition 1).

Eine einfach geschlossene regulär C^2 -parametrisierte ebene Kurve $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann konvex, wenn ihre Krümmungsfunktion $\kappa: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Vorzeichen nicht wechselt. \square

3.1.14 Satz. *Es sei $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene regulär C^2 -parametrisierte ebene Kurve, deren Krümmungsfunktion κ die Eigenschaft besitzt, dass $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist*

- (a) *die Kurve x konvex im Sinne von Definition 3.1.12,*
- (b) *das von $x([a, b])$ berandete (einfach zusammenhängende) Gebiet \mathcal{J}_x konvex,*
- (c) *die (abgeschlossene) Menge $\overline{\mathcal{J}_x} = \mathcal{J}_x \cup x([a, b])$ streng konvex.*

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass κ wegen $x \in C^2([a, b])$ stetig ist und daher das Vorzeichen nicht wechselt, andernfalls müsste κ im Widerspruch zur Voraussetzung eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzen. Also ist die Kurve x nach Satz 3.1.13 konvex.

Man macht sich leicht klar, dass jede Tangente an die Kurve eine Stützgerade von $\overline{\mathcal{J}_x}$ ist. Daraus folgt, dass die abgeschlossene Menge $\overline{\mathcal{J}_x}$ konvex ist (vgl. [35], Satz 3.3). Damit ist auch der offene Kern \mathcal{J}_x von $\overline{\mathcal{J}_x}$ konvex (vgl. [35], Satz 1.6).

Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{J}_x}$ streng konvex ist. Der Rand $x([a, b])$ von $\overline{\mathcal{J}_x}$ kann nach Lemma 3.1.6 kein Geradensegment enthalten, da die Krümmung der Randkurve nach Voraussetzung überall von Null verschieden ist. Mit Lemma 2.1.3 folgt nun die strenge Konvexität von $\overline{\mathcal{J}_x}$. \square

3.1.15 Bemerkung.

Die Aussagen von Satz 3.1.13 und Satz 3.1.14 gelten auch für jede zur Kreislinie homöomorphe C^2 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 , deren Krümmung nirgendwo verschwindet. Für eine solche Mannigfaltigkeit C existiert ein System $(x_j: I_j \rightarrow \mathbb{C}_j)_{j \in J}$ lokaler Parametrisierungen derart, dass alle Parameterwechsel C^2 -Abbildungen sind. Damit ist die für jede lokale Parametrisierung x_j nach Lemma 3.1.5 zu berechnende Krümmung κ für jeden Punkt von C definiert.

3.2 Projektive Darstellungen ebener Kurven

Vermöge der Abbildung π , welche die Standardeinbettung von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ in $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ induziert (vgl. Lemma 2.2.1), erhalten wir zu einer gegebenen parametrisierten Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung

$$(\pi \circ x): I \rightarrow \mathfrak{u}_1\mathbb{R}^3, t \mapsto \left\langle \left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

mit Werten im Punktraum $\mathbb{P}_2\mathbb{R} = \mathfrak{u}_1\mathbb{R}^3$ der reellen projektiven Ebene. Wir betrachten im Folgenden Kurven, die mindestens dreimal stetig differenzierbar sind.

3.2.1 Definition. Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^3 -parametrisierte Kurve. Wir nennen eine C^3 -Abbildung $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t)$ derart, dass

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{array} \right) \right\rangle = (\pi \circ x)(t) \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt,}$$

eine *projektive Darstellung* von x . Die durch

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t), 1)^T := \left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 1 \end{array} \right)$$

gegebene Abbildung nennen wir die *projektive Standarddarstellung* von x .

3.2.2 Lemma. *Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^3 -parametrisierte Kurve. Genau dann ist $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine (dreimal stetig differenzierbare) projektive Darstellung von x , wenn eine C^3 -Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ derart existiert, dass*

$$X(t) = \rho(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Beweis. Es sei $\rho \in C^3(I)$, und es gelte $X(t) = \rho(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T$ für alle $t \in I$. Dann ist $X \in C^3(I)$. Ferner gilt für jede Funktion $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ und alle $t \in I$ die Beziehung

$$\sigma(t) X(t) = \sigma(t) \rho(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T,$$

woraus $\sigma(t) X(t) \in (\pi \circ x)(t)$ und $\langle X(t) \rangle \subseteq (\pi \circ x)(t)$ für alle $t \in I$ folgt. Andererseits gilt für jede Funktion $\tilde{\sigma}: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ und alle $t \in I$ die Identität $\tilde{\sigma}(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T = \frac{\tilde{\sigma}(t)}{\rho(t)} X(t)$, somit ist $(\pi \circ x)(t) \subseteq \langle X(t) \rangle$ für alle $t \in I$.

Umgekehrt sei $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $C^3(I)$ mit $\langle X(t) \rangle = (\pi \circ x)(t)$ für alle $t \in I$. Dann existiert zu jeder Funktion $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ eine Funktion $\tilde{\sigma}: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ derart, dass $\sigma(t) X(t) = \tilde{\sigma}(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T$, insbesondere $\sigma(t) X_3(t) = \tilde{\sigma}(t) \cdot 1$ für alle $t \in I$ gilt. Wegen $X_3 \in C^3(I)$ ist auch $\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} \in C^3(I)$. Mit $\rho := \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}$ gilt also $\rho \in C^3(I)$ und $X(t) = \rho(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T$ für alle $t \in I$. \square

3.2.3 Bemerkung. Dass die dritte Komponente X_3 jeder wie oben definierten projektiven Darstellung X für alle $t \in I$ von Null verschieden ist, spiegelt unsere Wahl der Einbettung von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ in die reelle projektive Ebene und die Tatsache wider, dass kein Punkt der eingebetten Kurve die Ferngerade treffen kann.

3.2.4 Definition. Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^3 -parametrisierte Kurve. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(x)$ die Menge aller Parametrisierungen $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, für die eine C^3 -Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ derart existiert, dass $X(t) = \rho(t) (x_1(t), x_2(t), 1)^T$ für alle $t \in I$ gilt.

Nach Lemma 3.2.2 besteht die Menge $\mathcal{K}(x)$ genau aus den projektiven C^3 -Darstellungen von x .

3.2.5 Bemerkungen. (a) Bol bezeichnet in [10] die Multiplikation einer projektiven Darstellung mit einer nirgends verschwindenden skalaren Funktion als *Renormierung*.

(b) Auch wenn wir später ebene Kurven $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \in C^5(I)$ betrachten, fordern wir (aus gutem Grund) *nicht*, dass alle $X \in \mathcal{K}(x)$ der Klasse $C^5(I)$ angehören sollen. Denn wir werden Renormierungen mit Funktionen ρ durchzuführen haben (vgl. Lemma 3.2.16 und Bemerkung 3.2.18), für die lediglich die Zugehörigkeit zu $C^3(I)$ sichergestellt werden kann.

Im Folgenden notieren wir Eigenschaften der projektiven Darstellungen zweifach regulär parametrisierter Kurven.

3.2.6 Lemma. *Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär C^3 -parametrisierte ebene Kurve, $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), 1)^T$ deren projektive Standarddarstellung und $\hat{X} := \rho X$ eine Renormierung von X mit einer C^3 -Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$. Dann sind äquivalent:*

- (a) Für alle $t \in I$ gilt $\kappa(t) \neq 0$.
- (b) Für alle $t \in I$ sind $x'(t)$ und $x''(t)$ linear unabhängig.
- (c) Für alle $t \in I$ sind $X(t), X'(t), X''(t)$ linear unabhängig.
- (d) Für alle $t \in I$ sind $\hat{X}(t), \hat{X}'(t), \hat{X}''(t)$ linear unabhängig.
- (e) Für alle $t \in I$ ist die Determinante der (3×3) -Matrix mit den Spalten $\hat{X}(t), \hat{X}'(t)$ und $\hat{X}''(t)$ von Null verschieden.

Beweis. (a) \Leftrightarrow (b): Der Zähler des Ausdrucks für $\kappa(t)$, (vgl. Definition 3.1.3 bzw. Lemma 3.1.5) ist gleich der Determinante der (2×2) -Matrix mit Spalten $x'(t)$ und $x''(t)$. Diese Determinante ist genau dann gleich Null, wenn die Vektoren $x'(t)$ und $x''(t)$ linear abhängig sind.

(b) \Leftrightarrow (c): Diese Äquivalenz folgt direkt aus

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_1'(t) & x_1''(t) \\ x_2(t) & x_2'(t) & x_2''(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1'(t) & x_1''(t) \\ x_2'(t) & x_2''(t) \end{pmatrix}.$$

(c) \Leftrightarrow (d): Wir berechnen die Determinante der (3×3) -Matrix mit den Spalten $\hat{X}(t)$, $\hat{X}'(t)$ und $\hat{X}''(t)$ und verwenden die Eigenschaften der Determinante als alternierender Multilinearform. Es gilt

$$\det[\hat{X}(t), \hat{X}'(t), \hat{X}''(t)] = \det[\rho(t)X(t), (\rho X)'(t), (\rho X)''(t)].$$

Dieser Ausdruck ist wegen $(\rho X)' = \rho'X + \rho X'$ gleich

$$\begin{aligned} & \det[\rho(t)X(t), \rho'(t)X(t), (\rho X)''(t)] \\ & + \det[\rho(t)X(t), \rho(t)X'(t), (\rho X)''(t)] \\ & = 0 + \det[\rho(t)X(t), \rho(t)X'(t), (\rho X)''(t)] \end{aligned}$$

Mit $(\rho X)'' = \rho''X + 2\rho'X' + X''$ folgt weiter

$$\begin{aligned} & \det[\hat{X}(t), \hat{X}'(t), \hat{X}''(t)] \\ & = \det[\rho(t)X(t), \rho(t)X'(t), \rho''(t)X(t)] \\ & \quad + \det[\rho(t)X(t), \rho(t)X'(t), 2\rho'(t)X'(t)] \\ & \quad + \det[\rho(t)X(t), \rho(t)X'(t), \rho(t)X''(t)] \\ & = 0 + 0 + \det[\rho(t)X(t), \rho(t)X'(t), \rho(t)X''(t)]. \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit

$$\det[\hat{X}(t), \hat{X}'(t), \hat{X}''(t)] = \rho^3(t) \det[X(t), X'(t), X''(t)].$$

Da ρ nach Voraussetzung keine Nullstellen besitzt, verschwindet die Determinante links genau dann, wenn die Determinante auf der rechten Seite gleich Null ist. Mithin sind die Vektoren $\hat{X}(t)$, $\hat{X}'(t)$ und $\hat{X}''(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn dies für $X(t)$, $X'(t)$, und $X''(t)$ gilt.

(d) \Leftrightarrow (e): klar. □

3.2.7 Satz. Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene regulär C^3 -parametrisierte ebene Kurve, $X: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{1\}$, $X(t) := (x_1(t), x_2(t), 1)^T$ deren projektive Standarddarstellung und $\hat{X} := \rho X$ eine Renormierung von X mit einer nirgends verschwindenden C^3 -Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$. Falls für alle $t \in I$ die Determinante der (3×3) -Matrix mit den Spalten $\hat{X}(t)$, $\hat{X}'(t)$ und $\hat{X}''(t)$ von Null verschieden ist, so ist

- (a) die Kurve x konvex im Sinne von Definition 3.1.12,
- (b) das von x ($[a, b]$) berandete Gebiet J_x konvex,
- (c) die (abgeschlossene) Menge $\overline{J_x} = J_x \cup x(I)$ streng konvex.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3.2.6 in Verbindung mit Satz 3.1.14. □

3.2.8 Lemma. Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach regulär C^3 -parametrisierte ebene Kurve. Dann gilt für jede projektive Darstellung $X \in \mathcal{K}(x)$:

- (a) Die Menge $\{X_1, X_2, X_3\}$ der Komponentenfunktionen $X_1: I \rightarrow \mathbb{R}$, $X_2: I \rightarrow \mathbb{R}$, $X_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ von X ist linear unabhängig.
- (b) Für jedes $t \in I$ ist die Menge $\{X(t), X'(t), X''(t)\}$ linear unabhängig.

Beweis. (a) Es genügt zu zeigen, dass die Funktionen²

$$\begin{aligned} x_1: I &\rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto x_1(t), \\ x_2: I &\rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto x_2(t), \\ 1: I &\rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto 1 \end{aligned}$$

linear unabhängig sind. Denn nach Definition existiert zu jeder Darstellung $X \in \mathcal{K}(x)$ eine Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ derart, dass $X = (\rho x_1, \rho x_2, \rho 1)^T$ gilt. Und für alle $t \in I$ ist wegen $\rho(t) \neq 0$ die Gleichung $a x_1(t) + b x_2(t) + c = 0$ genau dann erfüllt, wenn $a \rho(t) x_1(t) + b \rho(t) x_2(t) + c \rho(t) = 0$ gilt. Also sind für jedes $X \in$

² Für Funktionen f , die einen konstanten Wert 0 oder 1 annehmen, verwenden wir die Bezeichnungen $f(t) \equiv 0$ bzw. $f(t) \equiv 1$ oder $f = 0$ bzw. $f = 1$.

$\mathcal{K}(x)$ die Funktionen X_1, X_2, X_3 genau dann linear unabhängig, wenn die Menge $\{x_1, x_2, 1\}$ linear unabhängig ist.

Falls die Funktionalgleichung $a x_1 + b x_2 + c 1 = 0$ erfüllt ist, so gilt $a x_1(t) + b x_2(t) + c = 0$ für alle $t \in I$. Durch Ableiten ergibt sich

$$a x_1'(t) + b x_2'(t) = 0$$

und

$$a x_1''(t) + b x_2''(t) = 0$$

für alle $t \in I$. Nach Voraussetzung sind die Zeilen der Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $t \in I$ linear unabhängig, also ist die Koeffizientenmatrix regulär, und das Gleichungssystem besitzt für jedes $t \in I$ nur die Lösung $a = b = 0$, woraus unmittelbar $c = 0$ folgt. Also ist die Menge $\{x_1, x_2, 1\}$ linear unabhängig, und mit der eingangs angestellten Überlegung folgt die lineare Unabhängigkeit von $\{X_1, X_2, X_3\}$.

(b) Es sei $X \in \mathcal{K}(x)$ eine projektive Darstellung von x . Dann existiert eine C^3 -Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ derart, dass $X = \rho \hat{X}$ mit $\hat{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), 1)^T$. Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $X(t), X'(t), X''(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn dies für $\hat{X}(t), \hat{X}'(t)$ und $\hat{X}''(t)$ gilt. Dies ergibt sich (bei Vertauschung der Rollen von X und \hat{X}) aus der im Beweis von Lemma 3.2.6 hergeleiteten Beziehung

$$\det[X(t), X'(t), X''(t)] = \rho^3(t) \det[\hat{X}(t), \hat{X}'(t), \hat{X}''(t)].$$

Es sei nun also $t \in I$ und $a \hat{X}(t) + b \hat{X}'(t) + c \hat{X}''(t) = 0$. Aus der Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_1'(t) & x_2''(t) \\ x_2(t) & x_2'(t) & x_2''(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist sofort ersichtlich, dass $a = 0$. Wie im Beweis von Teil (a) folgt, dass das verbleibende System

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2''(t) \\ x_2'(t) & x_2''(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für jedes t nur die Lösung $b = c = 0$ besitzt. Also sind die Vektoren $\hat{X}(t)$, $\hat{X}'(t)$ und $\hat{X}''(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig, und daraus folgt die behauptete lineare Unabhängigkeit der Menge $\{X(t), X'(t), X''(t)\}$. \square

3.2.9 Korollar. *Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach regulär C^3 -parametrisierte Kurve. Dann ist für alle $X \in \mathcal{K}(x)$ und alle $t \in I$ das Vektoren-Tripel $(X(t), X'(t), X''(t))$ eine Basis von \mathbb{R}^3 . Somit existieren eindeutig bestimmte Funktionen $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$, und $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $X'''(t) = \alpha(t)X(t) + \beta(t)X'(t) + \gamma(t)X''(t)$ für alle $t \in I$ gilt.*

Ab jetzt betrachten wir ebene Kurven aus der Differenzierbarkeitsklasse C^5 , vgl. die Bemerkungen 3.2.5, 3.2.11 sowie 3.2.18.

3.2.10 Definition. *Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach regulär C^5 -parametrisierte Kurve und $X \in \mathcal{K}(x)$. Dann nennen wir die Gleichung*

$$X'''(t) = \alpha(t)X(t) + \beta(t)X'(t) + \gamma(t)X''(t)$$

allgemeine Grundgleichung von X . Für den Fall $\gamma = 0$ sagen wir, dass die Darstellung X einer *speziellen Grundgleichung* genügt oder dass die Grundgleichung der Darstellung X *von spezieller Form* ist.

3.2.11 Bemerkung. *Für $x \in C^5(I)$ und $X := (x_1, x_2, 1)$ gilt $X''' \in C^2(I)$. Mit der Cramerschen Regel folgt, dass auch die Koeffizientenfunktionen α, β, γ in $C^2(I)$ liegen.*

Wir zeigen nun, dass es zu einer gegebenen ebenen Kurve x eine eindeutig bestimmte *spezielle* Grundgleichung gibt, deren Lösungen (projektive Darstellungen von x) bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.

3.2.12 Lemma. *Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach regulär C^5 -parametrisierte ebene Kurve, und es seien $X, \tilde{X} \in \mathcal{K}(x)$ projektive Darstellungen von x . Die Darstellung X genüge der speziellen Grundgleichung $X''' = \alpha X + \beta X'$.*

- (a) *Falls $\tau_0 \in \mathbb{R}^*$ existiert mit $\tilde{X}(t) = \tau_0 X(t)$ für alle $t \in I$, so gilt $\tilde{X}''' = \alpha \tilde{X} + \beta \tilde{X}'$.*
- (b) *Falls \tilde{X} einer speziellen Grundgleichung $\tilde{X}''' = \tilde{\alpha} \tilde{X} + \tilde{\beta} \tilde{X}'$ mit zunächst beliebigen Koeffizientenfunktionen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ genügt, so existiert $\tau_0 \in \mathbb{R}^*$ mit $\tilde{X}(t) = \tau_0 X(t)$ für alle $t \in I$, und es gilt $\alpha = \tilde{\alpha}$ und $\beta = \tilde{\beta}$.*

Beweis. (a) ist klar.

- (b) Da $X, \tilde{X} \in \mathcal{K}(x)$, existieren C^3 -Funktionen $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ und $\tilde{\rho}: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ mit

$$X = \rho (x_1, x_2, 1)^T \text{ und } \tilde{X} = \tilde{\rho} (x_1, x_2, 1)^T.$$

Wir setzen $\tau := \frac{\tilde{\rho}}{\rho}$ und erhalten $\tilde{X} = \tau X$. Es ist nun einerseits

$$\tilde{X}''' = \tau''' X + 3\tau'' X' + 3\tau' X'' + \tau X''',$$

woraus mit $X''' = \alpha X + \beta X'$ die Beziehung

$$\tilde{X}''' = (\tau''' + \tau\alpha) X + (3\tau'' + \tau\beta) X' + 3\tau' X''$$

folgt. Andererseits gilt wegen $\tilde{X}''' = \tilde{\alpha} \tilde{X} + \tilde{\beta} \tilde{X}'$, dass

$$\tilde{X}''' = (\tilde{\alpha}\tau + \tilde{\beta}\tau') X + \tilde{\beta}\tau X'.$$

Ingesamt ergibt sich die Gleichung

$$(\tau''' - \tilde{\beta}\tau' + \tau(\alpha - \tilde{\alpha})) X + (3\tau'' + \tau(\beta - \tilde{\beta})) X' + 3\tau' X'' = 0,$$

die an jeder Stelle $t \in I$ gilt. Unter Ausnutzung der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\{X(t), X'(t), X''(t)\}$ für alle $t \in I$ erhalten wir

$$3\tau'(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Da $\tau \in C^3(I)$, ist τ konstant, das heißt, es existiert $\tau_0 \in \mathbb{R}^*$ mit $\tilde{X} = \tau_0 X$. Damit gilt $\tau''' = \tau'' = \tau' = 0$, und wir erhalten die Gleichungen

$$\tau_0 (\alpha - \tilde{\alpha}) = 0 \quad \text{sowie} \quad \tau_0 (\beta - \tilde{\beta}) = 0.$$

Es folgt $\alpha = \tilde{\alpha}$ und $\beta = \tilde{\beta}$. □

Wir können nun konstatieren, dass zwei projektive Darstellungen einer ebenen Kurve auf dieselbe spezielle Grundgleichung führen, falls jeweils geeignete Renormierungen existieren.

3.2.13 Korollar. *Es sei $\chi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach regulär C^5 -parametrisierte ebene Kurve, und es seien $X, \tilde{X} \in \mathcal{K}(\chi)$ projektive Darstellungen von χ . Ferner seien Funktionen $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ und $\tilde{\rho}: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ mit der Eigenschaft gegeben, dass die Grundgleichungen für die jeweils renormierten Darstellungen $\hat{X} := \rho X$ bzw. $\hat{\tilde{X}} := \tilde{\rho} \tilde{X}$ in spezieller Form sind:*

$$\begin{aligned} \hat{X}''' &= \alpha \hat{X} + \beta \hat{X}', \\ \hat{\tilde{X}}''' &= \tilde{\alpha} \hat{\tilde{X}} + \tilde{\beta} \hat{\tilde{X}}'. \end{aligned}$$

Dann gilt $\alpha = \tilde{\alpha}$ und $\beta = \tilde{\beta}$.

3.2.14 Definition. Es sei $\chi \in C^5(I)$ eine zweifach regulär parametrisierte ebene Kurve. Die nach dem obigen Lemma eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichung bezeichnen wir mit α_χ bzw. β_χ . Ferner bezeichnen wir die Klasse aller C^3 -Funktionen $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$, für welche die Renormierungen $\hat{X} = \rho(x_1, x_2, 1)$ der projektiven Standarddarstellung von χ der speziellen Grundgleichung $\hat{X}''' = \alpha_\chi \hat{X} + \beta_\chi \hat{X}'$ genügen, mit $[\rho_\chi]$.

3.2.15 Bemerkung. Abweichend von der obigen Vereinbarung verwenden wir für die Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichung einer Kurve χ die Symbole $\hat{\alpha}_\chi$ bzw. $\hat{\beta}_\chi$, wenn, wie in Abschnitt 5.3, Koeffizientenfunktionen von allgemeinen und speziellen Grundgleichungen mehrerer Kurven nebeneinander verwaltet werden müssen.

Wir verfolgen nun das Ziel, zu einer gegebenen Kurve x mit (zunächst beliebiger) projektiver Darstellung $X \in \mathcal{K}(x) \cap C^5(I)$ eine Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ derart zu finden, dass die Grundgleichung der renormierten Darstellung $\hat{X} := \rho X$ von spezieller Form ist. Damit zeigen wir insbesondere, dass $[\rho_x]$ nicht leer ist (vgl. Bemerkung 3.2.18).

3.2.16 Lemma. *Es sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach regulär C^5 -parametrisierte Kurve und $X \in \mathcal{K}(x) \cap C^5(I)$ eine projektive Darstellung mit der allgemeinen Grundgleichung*

$$X'''(t) = \alpha(t)X(t) + \beta(t)X'(t) + \gamma(t)X''(t).$$

Ferner sei Γ eine Stammfunktion von γ , die Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ sei gegeben durch $\rho(t) := \exp(-\frac{1}{3}\Gamma(t))$, und es sei

$$\hat{X}'''(t) = \hat{\alpha}(t)\hat{X}(t) + \hat{\beta}(t)\hat{X}'(t) + \hat{\gamma}(t)\hat{X}''(t)$$

die Grundgleichung der Darstellung $\hat{X} := \rho X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \alpha + \frac{1}{3}\beta\gamma + \frac{2}{27}\gamma^3 - \frac{1}{3}\gamma'', \\ \hat{\beta} &= \beta + \frac{1}{3}\gamma^2 - \gamma', \\ \hat{\gamma} &= 0.\end{aligned}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Funktion γ nach Bemerkung 3.2.11 in $C^2(I)$ liegt, folglich gilt $\Gamma \in C^3(I)$ und $\rho \in C^3(I)$. Aus $\rho(t) = \exp(-\frac{1}{3}\Gamma(t))$ folgt

$$\rho'(t) = -\frac{1}{3}\exp\left(-\frac{1}{3}\Gamma(t)\right)\gamma(t) = -\frac{1}{3}\gamma(t)\rho(t). \quad (3.2)$$

Wir verzichten im Folgenden darauf, die Argumente mitzuführen.

$$\rho'' = -\frac{1}{3}(\gamma'\rho + \gamma\rho') = -\frac{1}{3}\rho\left(\gamma' - \frac{1}{3}\gamma^2\right). \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 \rho''' &= -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\rho \left(\gamma' - \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{3} \rho' \left(\gamma' - \frac{1}{3} \gamma^2 \right) - \frac{1}{3} \rho \left(\gamma'' - \frac{2}{3} \gamma \gamma' \right) \\
 &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \gamma \rho \right) \left(\gamma' - \frac{1}{3} \gamma^2 \right) - \frac{1}{3} \rho \left(\gamma'' - \frac{2}{3} \gamma \gamma' \right) \\
 &= -\frac{1}{3} \rho \left(-\frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{1}{9} \gamma^3 + \gamma'' - \frac{2}{3} \gamma \gamma' \right) \\
 &= -\frac{1}{3} \rho \left(\frac{1}{9} \gamma^3 - \gamma \gamma' + \gamma'' \right). \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Mit $\hat{X} = \rho X$ folgt sukzessive

$$\begin{aligned}
 \hat{X}' &= \rho' X + \rho X', \\
 \hat{X}'' &= \rho'' X + 2 \rho' X' + \rho X'', \\
 \hat{X}''' &= \rho''' X + 3 \rho'' X' + 3 \rho' X'' + \rho X'''.
 \end{aligned}$$

Um aus der letzten Gleichung die Form $\hat{X}''' = \hat{\alpha} \hat{X}(t) + \hat{\beta} \hat{X}' + \hat{\gamma} \hat{X}''$ zu erhalten, ersetzen wir die Funktionen X, X' und X'' durch die entsprechenden Ausdrücke in \hat{X} und verwenden die Grundgleichung

$$X''' = \alpha X + \beta X' + \gamma X''.$$

Wir benötigen hierzu

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{\rho} \hat{X}, \\
 X' &= -\frac{\rho'}{\rho^2} \hat{X} + \frac{1}{\rho} \hat{X}', \\
 X'' &= \frac{2\rho'^2 - \rho''\rho}{\rho^3} \hat{X} - \frac{\rho'}{\rho^2} \hat{X}' + \frac{1}{\rho} \hat{X}''.
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$\hat{X}''' = \rho''' X + 3 \rho'' X' + 3 \rho' X'' + \rho X'''$$

ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\hat{X}''' &= \frac{\rho'''}{\rho} \hat{X} + 3\rho'' \left(-\frac{\rho'}{\rho^2} \hat{X} + \frac{1}{\rho} \hat{X}' \right) \\ &+ 3\rho' \left(\frac{2\rho'^2 - \rho''\rho}{\rho^3} \hat{X} - \frac{\rho'}{\rho^2} \hat{X}' + \frac{1}{\rho} \hat{X}'' \right) \\ &+ \rho \left(\alpha X + \beta X' + \gamma X'' \right)\end{aligned}$$

Umformungen liefern

$$\begin{aligned}\hat{X}''' &= \frac{\rho'''}{\rho} \hat{X} + 3\rho'' \left(-\frac{\rho'}{\rho^2} \hat{X} + \frac{1}{\rho} \hat{X}' \right) \\ &+ 3\rho' \left(\frac{2\rho'^2 - \rho''\rho}{\rho^3} \hat{X} - \frac{\rho'}{\rho^2} \hat{X}' + \frac{1}{\rho} \hat{X}'' \right) \\ &+ \alpha \hat{X} + \beta \left(-\frac{\rho'}{\rho} \hat{X} + \hat{X}' \right) \\ &+ \gamma \left(\frac{2\rho'^2 - \rho''\rho}{\rho^2} \hat{X} - \frac{\rho'}{\rho} \hat{X}' + \hat{X}'' \right)\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}\hat{X}''' &= \left(\frac{\rho'''}{\rho} - 3\frac{\rho'\rho''}{\rho^2} + \left(3\frac{\rho'}{\rho} + \gamma \right) \frac{2\rho'^2 - \rho''\rho}{\rho^2} + \alpha - \beta\frac{\rho'}{\rho} \right) \hat{X} \\ &+ \left(3\frac{\rho''}{\rho} - 3\frac{\rho'^2}{\rho^2} + \beta - \gamma\frac{\rho'}{\rho} \right) \hat{X}' \\ &+ \left(3\frac{\rho'}{\rho} + \gamma \right) \hat{X}''.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Wir entnehmen der Gleichung 3.5 unmittelbar

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{\rho'''}{\rho} - 3\frac{\rho'\rho''}{\rho^2} + \left(3\frac{\rho'}{\rho} + \gamma \right) \frac{2\rho'^2 - \rho''\rho}{\rho^2} + \alpha - \beta\frac{\rho'}{\rho} \\ \hat{\beta} &= 3\frac{\rho''}{\rho} - 3\frac{\rho'^2}{\rho^2} + \beta - \gamma\frac{\rho'}{\rho} \\ \hat{\gamma} &= 3\frac{\rho'}{\rho} + \gamma.\end{aligned}$$

Aus Gleichung 3.2 folgt $3 \frac{\rho'}{\rho} + \gamma = 0$, also $\hat{\gamma} = 0$, wie behauptet. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{\rho'''}{\rho} + \gamma \frac{\rho''}{\rho} + \alpha + \frac{1}{3} \beta \gamma \quad \text{und} \\ \hat{\beta} &= 3 \frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{3} \gamma^2 + \beta + \frac{1}{3} \gamma^2 \\ &= 3 \frac{\rho''}{\rho} + \beta.\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen 3.3 und 3.4 folgt

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \gamma^3 - \gamma \gamma' + \gamma'' \right) - \frac{\gamma}{3} \left(\gamma' - \frac{1}{3} \gamma^2 \right) + \alpha + \frac{1}{3} \beta \gamma \\ &= \alpha + \frac{1}{3} \beta \gamma + \frac{2}{27} \gamma^3 - \frac{1}{3} \gamma''.\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \beta + 3 \frac{\rho''}{\rho} = \beta - \left(\gamma' - \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \\ &= \beta + \frac{1}{3} \gamma^2 - \gamma'. \quad \square\end{aligned}$$

Wir fassen die bislang erzielten Ergebnisse zusammen.

3.2.17 Korollar. *Wählt man zu einer zweifach regulär C^5 -parametrisierten ebenen Kurve $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine projektive Darstellung $X \in \mathcal{X}(\alpha) \cap C^5(I)$ mit allgemeiner Grundgleichung*

$$X'''(t) = \alpha(t) X(t) + \beta(t) X'(t) + \gamma(t) X''(t),$$

so gelten folgende Aussagen:

- (a) *Die Funktionen $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ aus Lemma 3.2.16 sind gerade die nach Lemma 3.2.12 eindeutig durch α bestimmten Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichung.*

3 Werkzeuge der Projektiven Differentialgeometrie

- (b) Man erhält eine Darstellung, welche die spezielle Grundgleichung erfüllt, durch Renormierung von X mit einer Funktion der Form

$$\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^*, \rho(t) = C \exp \left(-\frac{1}{3} \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \right),$$

wobei $t_0 \in I$ und $C \in \mathbb{R}^*$ beliebig gewählt werden können.

- (c) Da $\gamma \in C^2(I)$ gilt, liegt jede Stammfunktion von γ in $C^3(I)$. Damit ist jede Funktion ρ der in (b) beschriebenen Form von der Differenzierbarkeitsordnung C^3 .

Beweis. Es ist lediglich noch Teil (b) zu zeigen. Aus dem Beweis von Lemma 3.2.16 ist ersichtlich, dass ρX genau dann einer speziellen Grundgleichung genügt, wenn ρ Lösung der Differentialgleichung $3 \frac{\rho'}{\rho} + \gamma = 0$, d.h. $\rho' = -\frac{1}{3} \gamma \rho$ ist. Mit der bekannten durch *Variation der Konstanten* erhaltenen Formel ergibt sich als Lösung dieser Differentialgleichung mit beliebigem Anfangswert

$$\rho(t_0) \in \mathbb{R}^*: \rho(t) = \rho(t_0) \exp \left(-\frac{1}{3} \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \right). \quad \square$$

3.2.18 Bemerkungen.

- (a) Die in Lemma 3.2.16 bzw. Korollar 3.2.17 angegebene Renormierung ist jedenfalls auf die projektive Standarddarstellung $X := (x_1, x_2, 1)$ einer gegebenen ebenen C^5 -parametrisierten Kurve x anwendbar, weil in diesem Fall gewährleistet ist, dass $X \in C^5(I)$ und somit $X''' \in C^2(I)$ sowie $\gamma \in C^2(I)$ und $\rho \in C^3(I)$ gelten. Also ist $[\rho_x]$ nicht leer, und mit $\rho X \in C^3(I)$ folgt $\rho X \in \mathcal{K}(x)$.
- (b) Zur Bestimmung der speziellen Grundgleichung einer gegebenen ebenen C^5 -parametrisierten Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann man jede Renormierung $\hat{X} = \rho(X_1, X_2, 1) \in \mathcal{K}_x \cap C^5(I)$ der projektiven Standarddarstellung von x heranziehen. Nach Berechnung der Koeffizientenfunktionen der entsprechenden allgemeinen Grundgleichung ergeben sich aus den in

Lemma 3.2.16 angegebenen Formeln nach Lemma 3.2.12 stets dieselben Funktionen $\hat{\alpha}_x$ und $\hat{\beta}_x$.

- (c) Die Iteration des hier geschilderten Verfahrens liefert in folgendem Sinne nichts Neues: Jede Darstellung \hat{X} , die durch Renormierung einer gegebenen Darstellung auf die in Lemma 3.2.16 bzw. Korollar 3.2.17 angegebene Weise erhalten wurde (und somit einer speziellen Grundgleichung genügt), kann wieder renormiert werden. Wegen $\hat{\gamma} = 0$ ist dann jede Stammfunktion $\hat{\Gamma}$ von $\hat{\gamma}$ ebenso wie die Funktion $\hat{\rho} = \exp(-\frac{1}{3}\hat{\Gamma})$ konstant und somit beliebig oft differenzierbar. Damit ist auch die Darstellung $\hat{\rho}\hat{X}$ Element von $\mathcal{K}(x)$ und erfüllt nach Lemma 3.2.12 dieselbe Grundgleichung wie \hat{X} .
- (d) Da für projektive Darstellungen $X \in \mathcal{K}(x)$ lediglich die Differenzierbarkeitsklasse $C^3(I)$ gefordert wird, ist im Allgemeinen nur $X''' \in C^0(I)$ und mithin $\alpha, \beta, \gamma \in C^0(I)$ gewährleistet. Damit existiert zwar noch die Renormierung $\rho = \exp(-\frac{1}{3}\Gamma)$, aber die Koeffizientenfunktionen sind im Allgemeinen nicht durch die in Lemma 3.2.16 angegebenen Ausdrücke berechenbar. Da wir diese Möglichkeit der Berechnung insbesondere im Hinblick auf die in den Abschnitten 4.4 und 5.3 durchgeführten konkreten Rechnungen nicht entbehren wollen, verlangen wir von projektiven Darstellungen mindestens die Zugehörigkeit zu $C^5(I)$.

3.3 Projektive Äquivalenz ebener Kurven

Wir entwickeln in diesem Abschnitt ein Kriterium, das es ermöglicht zu entscheiden, ob zwei gegebene parametrisierte ebene Kurven $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit gleichem Parameterbereich I *projektiv äquivalent* sind. Dabei soll projektive Äquivalenz bedeuten, dass es eine Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart gibt, dass

$$(\pi \circ y)(t) = (\mu \circ \pi \circ x)(t)$$

für alle $t \in I$ gilt. Wo es sich aus Gründen der Klarheit anbietet,

werden wir in diesem Fall auch von *punktweiser* projektiver Äquivalenz³ der beiden Kurven sprechen. Das folgende Lemma bringt uns zu einem ersten Etappenziel.

3.3.1 Lemma. *Es seien $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zweifach regulär C^5 -parametrisierte Kurven und $X \in \mathcal{K}(x)$ bzw. $Y \in \mathcal{K}(y)$ zugehörige projektive Darstellungen, die jeweils speziellen Grundgleichungen genügen; d.h. es existieren auf I definierte reellwertige C^2 -Funktionen $\alpha_x, \beta_x, \alpha_y, \beta_y$ mit $X''' = \alpha_x X + \beta_x X'$ und $Y''' = \alpha_y Y + \beta_y Y'$. Genau dann existiert eine Matrix $A \in \text{GL}_3\mathbb{R}$ mit*

$$Y(t) = A X(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

wenn

$$\alpha_x(t) = \alpha_y(t) \quad \text{und} \quad \beta_x(t) = \beta_y(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass die genannte Bedingung hinreichend ist: Es gelte $\alpha_y = \alpha_x =: \alpha$ und $\beta_y = \beta_x =: \beta$. Wir betrachten zunächst die Gleichung $X''' = \alpha X + \beta X'$. Jede der Komponentenfunktionen X_i ist Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$u''' = \alpha u + \beta u'.$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset C^3(I)$ dieser Differentialgleichung ist ein dreidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum⁴. Wir wählen eine Basis (ein *Fundamentalsystem*) für \mathcal{L} , d.h. ein Tripel (f_1, f_2, f_3) linear unabhängiger $C^3(I)$ -Funktionen. Dann gibt es für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ reelle Zahlen m_{i1}, m_{i2}, m_{i3} mit $X_i = \sum_{j=1}^3 m_{ij} f_j$. Also ist

$$X = f_1 \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}.$$

³ Ein alternativer, die Punktmengetreffender Begriff projektiver Äquivalenz wäre etwa durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists \mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R} : \mu(\text{Im}(\pi \circ x)) = \text{Im}(\pi \circ y)$ gegeben.

⁴ Eine schöne Darstellung der Theorie linearer Differentialgleichungen findet sich z.B. in [17], Kapitel II, §3.

Es sei M die durch $(M)_{ij} := m_{ij}$ gegebene Matrix und f der Spaltenvektor mit den Einträgen f_i . Dann gilt $X = Mf$. Wir führen die Annahme, dass die Zeilen Z_i von M linear abhängig sind, zum Widerspruch: Angenommen, es gibt $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ derart, dass $Z := aZ_1 + bZ_2 + cZ_3 = (0, 0, 0)$. Dann gilt für alle $t \in I$, dass das Matrixprodukt $Z \cdot f(t)$, (welches wir zur Verdeutlichung vorübergehend mit einem Punkt kennzeichnen), der Zeile Z mit der Spalte $f(t)$ gleich $0 \in \mathbb{R}$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= Z \cdot f(t) = aZ_1 \cdot f(t) + bZ_2 \cdot f(t) + cZ_3 \cdot f(t) \\ &= aX_1(t) + bX_2(t) + cX_3(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$, d.h.

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \in C^3(I).$$

Dies steht aber im Widerspruch zu der in Lemma 3.2.8 konstatierten linearen Unabhängigkeit der Komponentenfunktion von X . Also sind die Zeilen von M linear unabhängig, und es gilt $M \in GL_3\mathbb{R}$. In analoger Weise folgt aus $Y''' = \alpha Y + \beta Y'$ die Existenz einer Matrix $L \in GL_3\mathbb{R}$ mit $Y = Lf$. Damit ist $Y = Lf = LM^{-1}X$, und für $A := LM^{-1}$ gilt $A \in GL_3\mathbb{R}$ und $Y = AX$.

Falls umgekehrt $A \in GL_3\mathbb{R}$ derart existiert, dass $Y(t) = AX(t)$ für alle $t \in I$ gilt, dann ist $Y'(t) = AX'(t)$, $Y''(t) = AX''(t)$ und $Y'''(t) = AX'''(t)$ für alle $t \in I$. Nach Voraussetzung ist $X'''(t) = \alpha_x(t)X(t) + \beta_x(t)X'(t)$ für alle $t \in I$, daher gilt

$$\begin{aligned} Y'''(t) &= A(\alpha_x(t)X(t) + \beta_x(t)X'(t)) \\ &= \alpha_x(t)AX(t) + \beta_x(t)AX'(t) \\ &= \alpha_x(t)Y(t) + \beta_x(t)Y'(t) \quad \text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Voraussetzung

$$Y'''(t) = \alpha_y(t)Y(t) + \beta_y(t)Y'(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

somit folgt

$$(\alpha_x(t) - \alpha_y(t))Y(t) + (\beta_x(t) - \beta_y(t))Y'(t) = 0.$$

Da $Y(t)$ und $Y'(t)$ nach Lemma 3.2.8 für alle $t \in I$ linear unabhängig sind, gilt $\alpha_x(t) = \alpha_y(t)$ und $\beta_x(t) = \beta_y(t)$ für alle $t \in I$. \square

3.3.2 Satz. *Es seien $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zweifach regulär C^5 -parametrisierte Kurven. Genau dann existiert eine projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ mit*

$$(\mu \circ \pi \circ x)(t) = (\pi \circ y)(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

wenn für die Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichungen $\alpha_x = \alpha_y$ und $\beta_x = \beta_y$ gilt.

Beweis. Es sei X die projektive Standarddarstellung von x und Y die projektive Standarddarstellung von y . Wir schreiben $\langle X(t) \rangle$ für $(\pi \circ x)(t)$ und $\langle Y(t) \rangle$ für $(\pi \circ y)(t)$ und zeigen zunächst, dass die angegebene Bedingung hinreichend ist. Es sei also $\alpha_x = \alpha_y := \alpha$ und $\beta_x = \beta_y := \beta$. Nach Lemma 3.2.16 und Korollar 3.2.17 existieren $\rho \in [\rho_x]$ und $\sigma \in [\rho_y]$ so, dass $\hat{X} := \rho X$ und $\hat{Y} := \sigma Y$ den speziellen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \hat{X}'''(t) &= \alpha(t) \hat{X}(t) + \beta(t) \hat{X}'(t) \quad \text{für alle } t \in I \\ \text{bzw. } \hat{Y}'''(t) &= \alpha(t) \hat{Y}(t) + \beta(t) \hat{Y}'(t) \quad \text{für alle } t \in I \end{aligned}$$

genügen. Nach Lemma 3.3.1 gibt es eine Abbildung $A \in \text{GL}_3\mathbb{R}$ mit $\hat{Y}(t) = A \hat{X}(t)$ für alle $t \in I$. Es gilt nun für jedes $t \in I$ erstens $\langle Y(t) \rangle = \langle \hat{Y}(t) \rangle$, zweitens $\langle \hat{Y}(t) \rangle = \langle A \hat{X}(t) \rangle$ und drittens $\langle A \hat{X}(t) \rangle = \langle A X(t) \rangle$, insgesamt also $\langle Y(t) \rangle = \langle A X(t) \rangle$. Gemäß Definition 1.1.72 setzen wir nun

$$\mu_A: P_2\mathbb{R} \longrightarrow P_2\mathbb{R}, \langle v \rangle \mapsto \langle A v \rangle$$

und erhalten $\langle Y(t) \rangle = \mu_A(\langle X(t) \rangle)$ für alle $t \in I$.

Falls umgekehrt eine projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart existiert, dass $\mu(\langle X(t) \rangle) = \langle Y(t) \rangle$ für alle $t \in I$ gilt, so gibt es

nach Definition 1.1.72 eine Matrix $A \in \text{GL}_3\mathbb{R}$ mit $\mu = \mu_A$, und es folgt

$$\forall t \in I: \langle AX(t) \rangle = \langle Y(t) \rangle.$$

Es seien $\rho \in [\rho_x]$ und $\sigma \in [\rho_y]$ Funktionen derart, dass die re-normierten Darstellungen $\hat{X} := \rho X$ bzw. $\hat{Y} := \sigma Y$ den speziellen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \hat{X}'''(t) &= \alpha_x(t) \hat{X}(t) + \beta_x(t) \hat{X}'(t) \quad \text{für alle } t \in I \\ \text{bzw. } \hat{Y}'''(t) &= \alpha_y(t) \hat{Y}(t) + \beta_y(t) \hat{Y}'(t) \quad \text{für alle } t \in I \end{aligned}$$

genügen. Dann gilt für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} \langle A \hat{X}(t) \rangle &= \langle A \rho(t) X(t) \rangle = \langle AX(t) \rangle \\ &= \langle Y(t) \rangle = \langle \sigma(t) Y(t) \rangle = \langle \hat{Y}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\langle A \hat{X}(t) \rangle \subseteq \langle \hat{Y}(t) \rangle$ für alle $t \in I$, also existiert eine Funktion $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ mit $A \hat{X} = \omega \hat{Y}$. Um nachzuweisen, dass $\omega \in C^3(I)$ gilt, erinnern wir zunächst daran, dass die dritte Komponente von \hat{Y} nach Bemerkung 3.2.3 für alle $t \in I$ von Null verschieden ist. Da \hat{X} und \hat{Y} nach Lemma 3.2.2 und Korollar 3.2.17 dreimal stetig differenzierbar sind, folgt aus

$$\omega(t) = \frac{(A \hat{X})_3(t)}{(\hat{Y})_3(t)} \quad \text{für alle } t \in I,$$

dass ω in $C^3(I)$ liegt. Wir haben uns also eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ mit der Eigenschaft verschafft, dass

$$A \hat{X}(t) = \omega(t) \hat{Y}(t) \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Wir zeigen nun, dass ω konstant ist. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass $A \hat{X}$ der speziellen Grundgleichung mit den Koeffizientenfunktionen α_x und β_x genügt. Denn

$$\begin{aligned} (A \hat{X})''' &= A \hat{X}''' = A(\alpha_x \hat{X} + \beta_x \hat{X}') = \alpha_x A \hat{X} + \beta_x A \hat{X}' \\ &= \alpha_x (A \hat{X}) + \beta_x (A \hat{X})'. \end{aligned}$$

Also genügt auch $\omega \hat{Y}$ dieser Grundgleichung, d.h.

$$(\omega \hat{Y})''' = \alpha_x (\omega \hat{Y}) + \beta_x (\omega \hat{Y})'.$$

Auswertung der Ableitungen liefert

$$\begin{aligned} & \omega''' \hat{Y} + 3 \omega'' \hat{Y}' + 3 \omega' \hat{Y}'' + \omega \hat{Y}''' \\ &= \alpha_x \omega \hat{Y} + \beta_x \omega' \hat{Y} + \beta_x \omega \hat{Y}', \end{aligned}$$

somit gilt

$$\hat{Y}''' = \left(\alpha_x + \beta_x \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega'''}{\omega} \right) \hat{Y} + \left(\beta_x - 3 \frac{\omega''}{\omega} \right) \hat{Y}' - 3 \frac{\omega'}{\omega} \hat{Y}''.$$

Nach Voraussetzung genügt \hat{Y} andererseits der speziellen Grundgleichung $\hat{Y}''' = \alpha_y \hat{Y} + \beta_y \hat{Y}'$, also gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left(\alpha_x + \beta_x \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega'''}{\omega} - \alpha_y \right) \hat{Y} \\ &+ \left(\beta_x - 3 \frac{\omega''}{\omega} - \beta_y \right) \hat{Y}' - 3 \frac{\omega'}{\omega} \hat{Y}''. \end{aligned}$$

Da $\{\hat{Y}, \hat{Y}', \hat{Y}''\}$ nach Lemma 3.2.8 linear unabhängig ist, folgt

$$\alpha_x + \beta_x \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega'''}{\omega} - \alpha_y = 0, \quad (3.6)$$

$$\beta_x - 3 \frac{\omega''}{\omega} - \beta_y = 0, \quad (3.7)$$

$$-3 \frac{\omega'}{\omega} = 0. \quad (3.8)$$

Die Identität 3.8 impliziert unmittelbar $\omega' = 0$. Wegen $\omega \in C^3(I)$ folgt, dass ω für alle $t \in I$ denselben Wert in \mathbb{R}^* annimmt, den wir mit ω_0 bezeichnen wollen. Es gilt also $\hat{Y}(t) = \frac{1}{\omega_0} A \hat{X}(t)$. Da die Ableitungen aller Ordnungen von ω verschwinden, folgt aus den Gleichungen 3.6 bzw. 3.7, dass $\alpha_x = \alpha_y$ und $\beta_x = \beta_y$ gilt. \square

4 Die Hilbert-Ebene von 1899

Wir untersuchen in diesem Kapitel die erste nicht desarguessche Ebene, die David Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* [23] veröffentlicht hat, und unmittelbar naheliegende Verallgemeinerungen mit den in den vorigen Kapiteln entwickelten Methoden.

4.1 Überblick

Hilbert verwendet zur Konstruktion seiner Ebene eine im Koordinatenursprung zentrierte achsenparallele Ellipse mit Halbachsen $A = 1$ und $B = \frac{1}{2}$ und modifiziert das Geradensystem der reellen affinen Ebene im Innern der Ellipse durch Kreisbögen, welche durch einen gemeinsamen Punkt, nämlich den im Abstand $\frac{3}{2}$ vom Mittelpunkt auf der langen Achse der Ellipse gelegenen Punkt, verlaufen. Geraden, welche die Ellipse nicht in zwei Punkten treffen, bleiben unverändert. Abbildung 4.1 veranschaulicht das auf diese Weise entstehende Liniensystem.

In Verallgemeinerung von Hilberts Konstruktion betrachten wir Ellipsen mit Mittelpunkten (x_0, y_0) und Halbachsen¹ $A \geq B > 0$ und wählen als gemeinsamen Punkt der Kreisbögen einen Punkt $(x_Z, y_Z) \in \mathbb{R}^2$. Diesen Punkt werden wir im Folgenden auch als Zentrum einer Inversionsabbildung ansehen. Bevor wir auf diesen Aspekt näher eingehen, legen wir einige Bezeichnungen fest.

¹ Die Voraussetzung $A \geq B > 0$ soll im gesamten Kapitel gelten, es bezeichnet A also stets die Länge der großen und B die Länge der kleinen Halbachse.

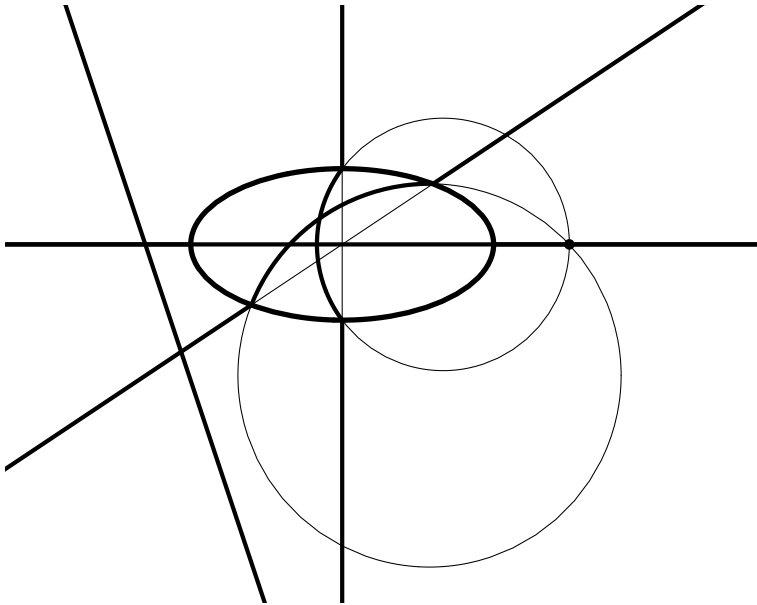


Abbildung 4.1: Darstellung einiger Repräsentanten des Geraden-systems der Hilbertschen Ebene von 1899. Die (im Innern der Ellipse durch Kreisbögen modifizierten) Geraden und die Ellipse sind durch Fettdruck hervorgehoben.

Für jede positive reelle Zahl R bezeichne $K_R(x_Z, y_Z) \subset \mathbb{R}^2$ den Kreis mit Mittelpunkt (x_Z, y_Z) und Radius R und $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ die Ellipse, deren Punkte (x, y) die Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{A^2} + \frac{(y - y_0)^2}{B^2} = 1 \quad \text{erfüllen.}$$

Somit besitzt die Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ den Mittelpunkt (x_0, y_0) , die große Halbachse der Länge A parallel zu x -Koordinatenachse und die kleine Halbachse der Länge B parallel zur y -Koordinatenachse.

4.1.1 Definition. Es sei $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ die Inzidenzstruktur mit Punktmenge D und Geradenmenge \mathcal{D} , die wie folgt erklärt sind:

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - x_0)^2}{A^2} + \frac{(y - y_0)^2}{B^2} \leq 1 \right\},$$

$$\mathcal{D} := \{ D \cap K_R(x_Z, y_Z) \mid R > 0 \text{ und } |K_R(x_Z, y_Z) \cap D| \geq 2 \}.$$

Für alles Weitere ist wesentlich, dass Kreise, die durch den Punkt (x_Z, y_Z) verlaufen, durch die Inversion an $K_R(x_Z, y_Z)$ auf Geraden abgebildet werden, welche das Inversionszentrum (x_Z, y_Z) nicht treffen, und umgekehrt, vgl. Abschnitt 4.2 dieses Kapitels. Abbildung 4.2 zeigt drei Geraden einer Hilbertsche Ebene zusammen mit den Inversionsbildern jener durch das Inversionszentrum verlaufenden Kreise, die für die Modifikation der Geraden im Innern der Ellipse gebraucht werden.

Hilbert stellt in seiner Konstruktion durch explizite Wahl der Lage der Ellipse in hinreichend großem Abstand vom Inversionszentrum sicher, dass die Ellipse von keinem durch das Inversionszentrum verlaufenden Kreis mehr als zweimal getroffen wird. Da derartige Kreise unter der Inversion auf Geraden abgebildet werden, ist diese Bedingung äquivalent zu der Forderung, dass das Inversionsbild der Ellipse konvex bezgl. des Systems der gewöhnlichen affinen Geraden ist, vgl. Proposition 4.1.3. In Abbildung 4.3

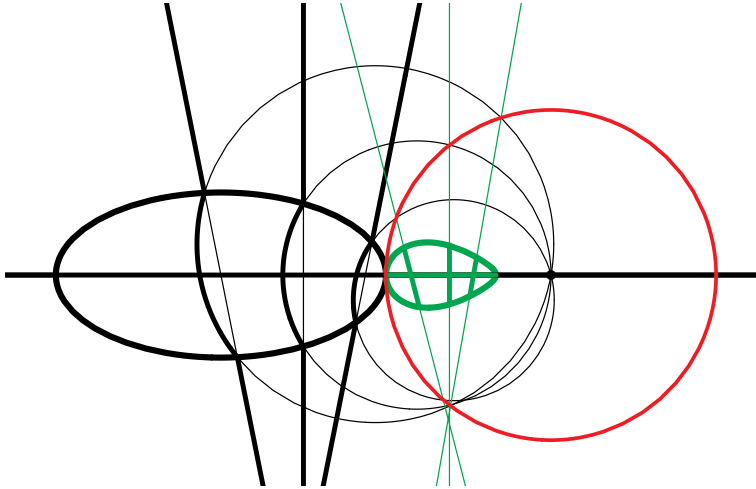


Abbildung 4.2: Ellipse \mathcal{E} mit Mittelpunkt $(-2, 0)$ und Halbachsen $A = 1$ und $B = 0.5$ sowie drei (modifizierte) Geraden der Hilbertebene (fett gedruckt); rot dargestellt: Inversionskreis mit Zentrum $(0, 0)$; grün dargestellt: Inversionsbild der Ellipse und der drei zur Modifizierung der Geraden verwandten Kreise; die im Innern von \mathcal{E} verlaufenden Teile der drei Kreisbögen und deren Inversionsbilder (Geradensegmente im Innern von $\iota(\mathcal{E})$) sind durch Fettdruck hervorgehoben.

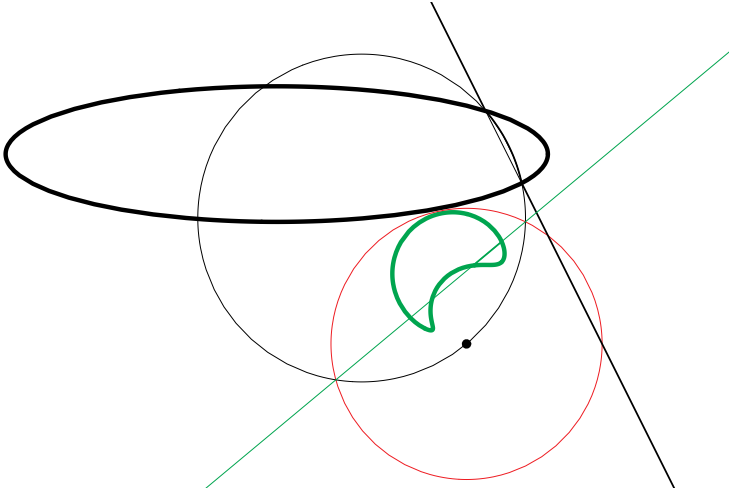


Abbildung 4.3: Ellipse \mathcal{E} mit Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (-1.4, 1.4)$ und Halbachsen $A = 2$, $B = 0.5$, Gerade mit Parametrisierung $t \mapsto (0.3, 1.4) + t(-1, 2)$; der durch das Inversionszentrum und die Schnittpunkte der Geraden mit \mathcal{E} bestimmte Kreis K schneidet \mathcal{E} in 4 Punkten; grün dargestellt: das Inversionsbild von K ist eine Gerade, die das (nicht konvexe) Inversionsbild $\iota(\mathcal{E})$ der Ellipse in vier Punkten trifft; rot dargestellt: Inversionskreis.

ist eine nichtkonvexe Situation dargestellt. Wir stellen den Zusammenhang zu den in Abschnitt 2.1 diskutierten CDs her. Aus den Definitionen 2.1.6 und 2.1.8 ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage.

4.1.2 Proposition. *Eine nach Definition 4.1.1 konstruierte Inzidenzstruktur $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ ist genau dann eine streng konvexe CD, wenn für alle $R > 0$ die Schnittmenge $K_R(x_Z, y_Z) \cap \mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ höchstens zweielementig ist.*

Aus dem bereits Gesagten ergibt sich, dass die Inzidenzstruktur $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ die in der vorstehenden Proposition genannte Eigenschaft jedenfalls dann besitzt, wenn die Parameter $(x_0, y_0), A, B$ und (x_Z, y_Z) so gewählt werden, dass das *Inversionsbild* der Ellipse streng konvex bezüglich des Systems der gewöhnlichen Geraden von $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ist.

4.1.3 Proposition. *Die Inzidenzstruktur $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ ist eine streng konvexe CD, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- (a) *Das Bild der Menge D unter der Inversionsabbildung $\iota_{(x_Z, y_Z)}$ ist streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvex.*
- (b) *Für jede reguläre C^2 -Parametrisierung ξ der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ sind alle Werte der Krümmungsfunktion κ von $\iota \circ \xi$ von Null verschieden.*
- (c) *Für die Standardparametrisierung*

$$\xi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)$$

der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ sind alle Werte der Krümmungsfunktion κ von $\iota \circ \xi$ von Null verschieden.

4.1.4 Bemerkung. Bedingung (c) ist äquivalent zu Bedingung (b), diese ist wiederum hinreichend für (a). Dagegen sind (c) oder (b) nicht notwendig für die strenge Konvexität der CD, denn auch in

denjenigen Fällen, in denen die Krümmungsfunktion von $\iota \circ \xi$ isolierte Nullstellen besitzt, ohne dort das Vorzeichen zu wechseln, berandet $\iota \circ \xi$ eine streng konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Wir werden in Abschnitt 4.3 hinreichende Bedingungen an die Parameter $A, B, (x_0, y_0)$ und (x_Z, y_Z) formulieren, welche die strenge Konvexität des Inversionsbildes der Menge \mathbb{D} gewährleisten.

4.1.5 Lemma. *Es seien eine Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ und ein Inversionszentrum (x_Z, y_Z) so gewählt, dass die in Definition 4.1.1 erklärte Inzidenzstruktur $\mathbb{D} := \mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ eine streng konvexe CD darstellt. Dann ist die Inversionsabbildung $\iota_{(x_Z, y_Z)}$ eine stetige, injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ und induziert eine Einbettung von \mathbb{D} in die reelle affine Ebene.*

Beweis. Aus den in Lemma 4.2.2 zusammengestellten Eigenschaften der Inversionsabbildung folgt, dass diese eine stetige, injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ist. Diese induziert nach Lemma 2.1.13 eine Einbettung. \square

Wir können unsere Verallgemeinerungen der Ebenen von Hilbertscher Bauart mithilfe der in Kapitel 2 getroffenen Definitionen präzise fassen.

4.1.6 Proposition. *Es seien eine Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ und ein Inversionszentrum (x_Z, y_Z) so gewählt, dass die Inzidenzstruktur $\mathbb{D} := \mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ eine streng konvexe CD darstellt. Dann ist das SMH-System² $\mathbb{A}_{\text{id}}^{\mathbb{D}} := \left(\mathbb{R}^2, (\text{aff}_1 \mathbb{R}^2)_{\text{id}}^{\mathbb{D}} \right)$ ein Hilbertsches Liniensystem.³*

² Die Konstruktion erfolgt gemäß Definition 2.1.11 mit der einklebenden Abbildung $\gamma = \text{id}$.

³ Vgl. Definition 2.1.19 und Proposition 2.1.20.

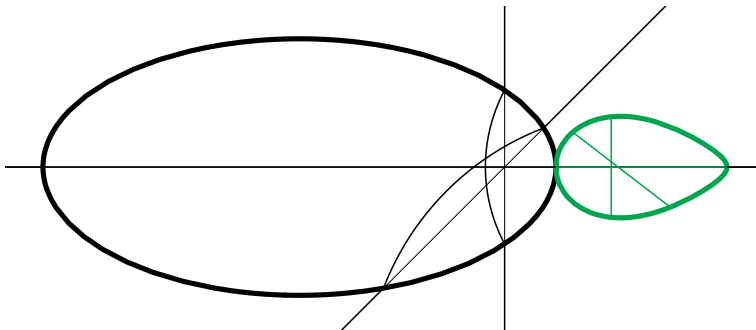


Abbildung 4.4: Drei in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ konfluente Geraden und die entsprechenden, sich durch die Hilbertsche Modifizierung ergebenden nicht konfluente Geraden; grün dargestellt: Inversionsbild der Ellipse und Inversionsbilder der drei zur Geradenmodifizierung verwandten Kreisbögen, letztere sind nicht konfluente Geradenstücke.

Hilbert zeigt in [23], dass die von ihm konstruierte affine Ebene nicht desarguessch ist, genauer, dass der affine Desarguesche Satz nicht erfüllt ist, indem er die Existenz zweier Dreiecke nachweist, deren Seiten paarweise parallel sind, die aber nicht zentral liegen, weil die drei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden Dreiecke nicht konfluent sind, vgl. hierzu Lemma 1.1.49. In Abbildung 4.4 ist eine analoge Situation dargestellt: Drei konfluente Geraden der reellen affinen Ebene sind nach der Verbiegung im Innern der Ellipse nicht mehr konfluent. Dementsprechend sind auch die Inversionsbilder der drei modifizierten Geraden nicht konfluent. Das Auseinanderfallen der Schnittpunkte dreier geeignet gewählter Geraden bzw. ihrer Inversionsbilder wird deutlicher, wenn die Ellipse näher am Inversionszentrum liegt, dann allerdings überlappen sich die Ellipse und ihr Inversionsbild, vgl. Abbildung 4.5.

Wir verwenden die in Abschnitt 2.2 bewiesenen Resultate über Hilbertsche Liniensysteme sowie die in Kapitel 3 erörterten Me-

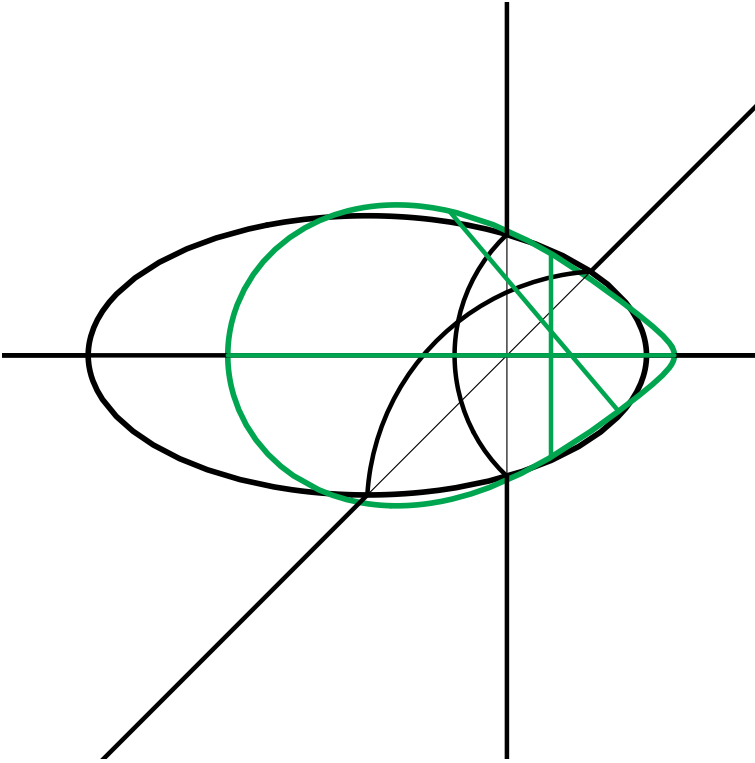


Abbildung 4.5: Die Ellipse \mathcal{E} mit Mittelpunkt $(-1.5, 0)$ überlappt mit ihrem (grün dargestellten) Inversionsbild. Drei in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ konfluente Geraden werden durch die Hilbertsche Modifizierung im Innern von \mathcal{E} zu nicht konfluente Geraden. Dementsprechend sind auch die Inversionsbilder der zur Modifizierung verwandten Kreisbögen nicht konfluente Geraden; deren im Innern von $\iota(\mathcal{E})$ verlaufenden Teile sind grün dargestellt.

thoden aus der Projektiven Differentialgeometrie um zu zeigen, dass Ebenen der Hilbertschen Bauart (mit Ellipsen in allgemeiner Lage) genau dann desarguessch sind, wenn die berandende Ellipse ein Kreis ist. Dieses Resultat als solches konnte bereits von Stroppel [55] bewiesen werden, es folgt auch aus den weitergehenden Ergebnissen, die in [53] mit Methoden der algebraischen Geometrie erzielt wurden (vgl. [53], Theorem 6.4). Die in der vorliegenden Arbeit eingesetzten Methoden haben jedoch den Vorzug, grundsätzlich auch auf nicht algebraische Kurven anwendbar und damit universeller einsetzbar zu sein. Am Ende des Kapitels geben wir für den desarguesschen Spezialfall projektive Abbildungen explizit an, welche nach Komposition mit der Standardeinbettung der affinen in die reelle projektive Ebene auf den Punkten des Kreises mit der Inversionsabbildung übereinstimmt.

Insgesamt werden im vorliegenden Kapitel alle Aspekte der ursprünglichen Hilbertschen Ebene und der von uns betrachteten Verallgemeinerungen diskutiert, die für ebene und räumliche Realisierungen Hilbertscher Liniensysteme, wie in Kapitel 2 ausgeführt, wesentlich sind:

- Gewinnung einer CD und Gewährleistung der strengen Konvexität dieser CD bezüglich des „inneren“ Liniensystems,
- strenge Konvexität der CD bezüglich des „äußeren“ Geradensystems der reellen affinen Ebene,
- explizite Angabe einer Lineation λ , welche die Elemente des inneren Liniensystems der CD auf Geradenstücke der reellen affinen Ebene abbildet,
- Diskussion der projektiven Äquivalenz der Randkurve und ihres Bildes unter λ ,
- Kriterien für die Desargues-Eigenschaft des Hilbertsystems, das durch Einklebung der CD in die reelle affine Ebene entsteht.

4.2 Inversion am Kreis

Die Inversion am Kreis spielt für das Verständnis der Ebenen Hilbertscher Bauart eine zentrale Rolle, denn das System von Kreisbögen im Innern einer (auf ihre Eignung für die Konstruktion zu prüfende Ellipse) liefert genau dann eine CD, wenn das *Inversionsbild der Ellipse* konvex bezüglich des Systems der gewöhnlichen affinen Geraden ist. Diese Tatsache ergibt sich unmittelbar aus den Abbildungseigenschaften der Inversionsabbildung, die in der Literatur zum Teil ausführlich beschrieben sind (siehe etwa [11]). Wir geben in diesem Abschnitt explizite Koordinatendarstellungen der Inversionsbilder von Geraden bzw. Kreisen an und können hieraus Invarianzobjekte der Inversion auf einfache Weise bestimmen (vgl. Korollar 4.2.3) sowie weitere, insbesondere für die Erörterungen in Abschnitt 4.5 relevante Eigenschaften ablesen.

4.2.1 Definition. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota_{(x_Z, y_Z)}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_Z, y_Z)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x - x_Z}{(x - x_Z)^2 + (y - y_Z)^2}, \frac{y - y_Z}{(x - x_Z)^2 + (y - y_Z)^2} \right) \end{aligned}$$

heißt *Inversion am Einheitskreis mit Zentrum* (x_Z, y_Z) .

Wir vereinbaren, dass die Inversion, deren Zentrum im Ursprung liegt, auch mit dem Symbol ι , also ohne explizite Angabe des Inversionszentrums bezeichnet werden kann. Im Folgenden untersuchen wir Eigenschaften von $\iota := \iota_{(0,0)}$, was keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt, da sich die Eigenschaften mutatis mutandis auf Inversionsabbildungen mit beliebig gelegenen Zentrum übertragen.

4.2.2 Lemma. Für die Inversion $\iota: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit Zentrum $(0, 0)$ gelten die folgenden Aussagen:

- (a) ι ist ein involutorischer Homöomorphismus und besitzt Ableitungen beliebig hoher Ordnung.

- (b) ι bildet jede im Ursprung punktierte Ursprungsgerade auf sich selbst ab.
- (c) ι bildet jede Gerade, die nicht durch den Ursprung verläuft, (surjektiv) auf einen im Ursprung punktierten Kreis ab; genauer wird die Gerade $g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ für den Fall $c \neq 0$ auf den Kreis mit Mittelpunkt $(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c})$ und Radius $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|c|}$ ohne den Ursprung abgebildet.
- (d) ι bildet jeden im Ursprung punktierten Kreis (surjektiv) auf eine Gerade ab, die nicht durch den Ursprung verläuft; genauer wird der Kreis $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$ für den Fall $x_0^2 + y_0^2 = R$ auf die Gerade mit der Gleichung $2x_0u + 2y_0v - 1 = 0$ abgebildet.
- (e) ι bildet jeden Kreis, der den Ursprung nicht enthält, (surjektiv) auf einen Kreis mit derselben Eigenschaft ab; genauer wird der Kreis $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$ für den Fall $x_0^2 + y_0^2 \neq R$ auf den Kreis mit Radius $\frac{R}{|R^2 - x_0^2 - y_0^2|}$ und Mittelpunkt $(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2})$ abgebildet.

Beweis. (a) ist klar.

[G] Wir untersuchen zunächst, wie Geraden unter ι abgebildet werden: Es sei $(a, b) \neq (0, 0)$, $g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ eine Gerade und $g' := g \setminus \{(0, 0)\}$ gegebenenfalls die im Ursprung punktierte Gerade. Wir zeigen, dass $\iota(g') = g'$, falls $c = 0$ und $\iota(g')$ ein im Ursprung punktierter Kreis, falls $c \neq 0$. Es sei $(u, v) \in \iota(g')$, dann existiert $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(u, v) = \iota(x, y)$ und $ax + by + c = 0$. Da ι Involution ist, gilt auch

$$\iota(u, v) = \iota^2(x, y) = (x, y).$$

Mithin folgt

$$a \frac{u}{u^2 + v^2} + b \frac{v}{u^2 + v^2} + c = 0,$$

das heißt

$$au + bv + c(u^2 + v^2) = 0.$$

Falls nun $c = 0$, so ist $(u, v) \in g'$, und es folgen $\iota(g') \subseteq g'$ sowie $g' = \iota^2(g') \subseteq \iota(g')$, also $\iota(g') = g'$. Damit ist (b) gezeigt. Falls $c \neq 0$, so folgt $\iota(g') \subseteq K'$, wobei $K' = K \setminus \{(0, 0)\}$ mit

$$\begin{aligned} K &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + \frac{a}{c} u + v^2 + \frac{b}{c} v = 0 \right\} \\ &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(u + \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(v + \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4c^2} \right\} \end{aligned}$$

Die Menge K ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c})$ und Radius $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|c|} > 0$, und es gilt $(0, 0) \in K$. Der für den Beweis von (c) noch fehlende Nachweis von $\iota(g') \supseteq K'$ wird sich aus dem folgenden Beweisteil [K] ergeben.

[K] Wir untersuchen nun, wie ι Kreise abbildet. Es sei also

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$$

mit $R > 0$ sowie $C' := C \setminus \{(0, 0)\}$. Falls $(u, v) \in \iota(C')$, so existiert $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(u, v) = \iota(x, y)$ und $(x, y) \in C$. Es folgt $(x, y) = \iota(u, v)$ und damit

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2 + v^2} - y_0\right)^2 = R^2.$$

Wir erhalten sukzessive durch Umformungen

$$(u - x_0 (u^2 + v^2))^2 + (v - y_0 (u^2 + v^2))^2 = R^2 (u^2 + v^2)^2,$$

$$\begin{aligned} u^2 - 2u x_0 (u^2 + v^2) + x_0^2 (u^2 + v^2)^2 \\ + v^2 - 2v y_0 (u^2 + v^2) + y_0^2 (u^2 + v^2)^2 = R^2 (u^2 + v^2)^2, \end{aligned}$$

$$(1 - 2x_0 - 2y_0) (u^2 + v^2) = (R^2 - x_0^2 - y_0^2) (u^2 + v^2)^2,$$

und schließlich

$$(1 - 2u x_0 - 2v y_0) = (R^2 - x_0^2 - y_0^2) (u^2 + v^2). \quad (4.1)$$

Falls nun $R^2 - x_0^2 - y_0^2 = 0$, d.h. $(0,0) \in C$, so gilt mit der Voraussetzung $R > 0$, dass $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, und es erfüllt (u, v) die Gleichung

$$1 - 2u x_0 - 2v y_0 = 0.$$

Hieraus folgt, dass $\iota(C') \subseteq h$, wobei

$$h := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_0 u + 2y_0 v - 1 = 0\}$$

eine nicht durch den Ursprung verlaufende Gerade ist. Mit [G] folgt $\iota(h) \subseteq K$, wobei K der Kreis mit Mittelpunkt

$$\left(-\frac{2x_0}{-2}, -\frac{2y_0}{-2}\right) = (x_0, y_0)$$

und Radius

$$\frac{\sqrt{(2x_0^2) + (2y_0^2)}}{2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = R$$

ist. Es ist somit $K = C$, und wegen $\iota(h) \subseteq K$ und $(0,0) \notin h$ folgt $h = \iota^2(h) \subseteq \iota(C')$. Insgesamt gilt daher $\iota(C') = h$, womit Behauptung (d) bewiesen ist.

Zur Vervollständigung des Beweises von (c) stellen wir fest, dass der im Ursprung punktierte Kreis K' mit Mittelpunkt $(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c})$ und Radius $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|c|} > 0$ auf die Gerade g abgebildet wird, die der Gleichung

$$-2\frac{a}{2c}u - 2\frac{b}{2c}v - 1 = 0 \Leftrightarrow au + bv + c = 0$$

genügt. Damit gilt $\iota(K') \subseteq g$, und es folgt $K' = \iota^2(K') \subseteq \iota(g)$ sowie $\iota(K) = g$.

Falls andererseits $x_0^2 + y_0^2 \neq R^2$, so ist $C' = C$, und es erfüllt jeder Punkt $(u, v) \in \iota(C)$ die zu Gleichung 4.1 äquivalente Gleichung

$$u^2 + \frac{2u x_0}{R^2 - x_0^2 - y_0^2} + v^2 + \frac{2v y_0}{R^2 - x_0^2 - y_0^2} = \frac{1}{R^2 - x_0^2 - y_0^2},$$

d.h.

$$\begin{aligned} & \left(u + \frac{x_0}{R^2 - x_0^2 - y_0^2} \right)^2 - \frac{x_0^2}{(R^2 - x_0^2 - y_0^2)^2} \\ & + \left(v + \frac{y_0}{R^2 - x_0^2 - y_0^2} \right)^2 - \frac{y_0^2}{(R^2 - x_0^2 - y_0^2)^2} \\ & = \frac{R^2 - x_0^2 - y_0^2}{(R^2 - x_0^2 - y_0^2)^2} \end{aligned}$$

und somit

$$\left(u + \frac{x_0}{R^2 - x_0^2 - y_0^2} \right)^2 + \left(v + \frac{y_0}{R^2 - x_0^2 - y_0^2} \right)^2 = \frac{R^2}{(R^2 - x_0^2 - y_0^2)^2}.$$

Es ist also $\iota(C)$ Teilmenge eines Kreises D mit Mittelpunkt

$$\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)$$

und Radius $\frac{R}{|R^2 - x_0^2 - y_0^2|}$. Der Kreis D enthält den Ursprung nicht, denn aus $x_0^2 + y_0^2 \neq R^2$ folgt

$$\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 \neq \left(\frac{R}{|R^2 - x_0^2 - y_0^2|} \right)^2.$$

Zum Abschluss des Beweises von (e) stellen wir zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} N & := \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 - \left(\frac{R}{|R^2 - x_0^2 - y_0^2|} \right)^2 \\ & = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 - R^2}. \end{aligned}$$

Der Kreis D wird durch ι in den Kreis mit Mittelpunkt

$$\left(\frac{\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2-R^2}}{N}, \frac{\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2-R^2}}{N} \right) = (x_0, y_0) \text{ und Radius } \frac{\frac{R}{|R^2-x_0^2-y_0^2|}}{|N|} = R$$

abgebildet, d.h. $\iota(D) \subseteq C$. Es folgt $D = \iota^2(D) \subseteq \iota(C)$ und insgesamt $\iota(C) = D$. \square

4.2.3 Korollar. Die Inversionsabbildung $\iota = \iota_{(0,0)}$ lässt genau den Inversionskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ sowie diejenigen Kreise mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius R invariant, die der Bedingung

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2 + 1$$

genügen.

4.2.4 Bemerkungen. (a) Die Fixpunktmenge der Inversionsabbildung $\iota = \iota_{(0,0)}$ ist genau der Einheitskreis. Denn jeder Fixpunkt $(x, y) \neq (0, 0)$ von ι erfüllt $\iota(x, y) = (x, y)$ und somit das Gleichungspaar $\frac{x}{x^2+y^2} = x$ und $\frac{y}{x^2+y^2} = y$, woraus unmittelbar $x^2 + y^2 = 1$ folgt. Also liegt jeder Fixpunkt von ι auf dem Einheitskreis. Umgekehrt ist jeder Punkt des Einheitskreises Fixpunkt von ι .

(b) Für den Fall $R^2 - x_0^2 - y_0^2 = 1$ ist die Bildmenge $\iota(C)$ gleich dem Spiegelbild von C an einer Achse, welche die Schnittpunkte des Inversionskreises und des Kreises C verbindet.

4.2.5 Proposition. Falls $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_Z, y_Z)\}$ eine stetige geschlossene Kurve ist, so ist auch $\iota_{(x_Z, y_Z)} \circ \alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ geschlossen.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Inversionsabbildung $\iota_{(x_Z, y_Z)}$ ein Homöomorphismus ist, vgl. Lemma 4.2.2. \square

4.2.6 Proposition. Es sei $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär C^1 -parametrisierte Kurve, für die ein Parameterwert $t_0 \in I$ derart existiert, dass $\alpha(t_0) = (0, 0)$ gilt.

(a) Mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ in \mathbb{R}^2 gelten die Beziehungen

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \langle (\iota \circ \alpha)(t) | \alpha'(t_0) \rangle = +\infty \quad \text{und}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \langle (\iota \circ \alpha)(t) | \alpha'(t_0) \rangle = -\infty.$$

(b) Zu jeder Zahl $N > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$ so, dass für zwei beliebige Punkte $t_+ \in]t_0, t_0 + \delta[$ und $t_- \in]t_0 - \delta, t_0[$ die Beziehung $\|(\iota \circ \alpha)(t_+) - (\iota \circ \alpha)(t_-)\| > N$ gilt.

Beweis. (a) Wir bemerken zunächst $(\iota \circ \alpha)(t) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|^2}$, setzen $v := \alpha'(t_0)$ und zeigen, dass zu jeder Zahl $M > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart existiert, dass $\frac{\langle \alpha(t) | v \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} > M$ für alle $t \in]t_0, t_0 + \delta[$ sowie $\frac{\langle \alpha(t) | v \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} < -M$ für alle $t \in]t_0 - \delta, t_0[$ gilt:

Es sei also $M > 0$. Da α an der Stelle t_0 differenzierbar ist, existiert zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\tilde{\delta} > 0$ derart, dass aus $|t - t_0| < \tilde{\delta}$ die Ungleichung $\left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} - \alpha'(t_0) \right\| < \varepsilon$, d.h. $\left\| \frac{\alpha(t)}{t - t_0} - v \right\| < \varepsilon$ folgt. Wir wählen (aus Gründen, die im weiteren Beweisgang einsichtig werden) ε so, dass $\varepsilon^2 < \|v\|^2$ gilt. Dann existiert $\tilde{\delta} > 0$ derart, dass

$$\frac{\|\alpha(t)\|^2}{(t - t_0)^2} + \|v\|^2 - 2 \frac{\langle \alpha(t) | v \rangle}{t - t_0} < \varepsilon^2$$

für alle $t \in]t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}[$ gilt.

Es sind nun Fälle zu unterscheiden. Falls t im Intervall $]t_0, t_0 + \tilde{\delta}[$ liegt, so folgt

$$2 \langle \alpha(t) | v \rangle > (\|v\|^2 - \varepsilon^2) (t - t_0) + \frac{\|\alpha(t)\|^2}{(t - t_0)}$$

und hieraus wegen $\varepsilon^2 < \|v\|^2$ und $t - t_0 > 0$ die Ungleichung

$$2 \langle \alpha(t) | v \rangle > \frac{\|\alpha(t)\|^2}{(t - t_0)}.$$

Wir setzen nun $\delta := \min \left\{ \tilde{\delta}, \frac{1}{2M} \right\}$ und bemerken, dass aus $0 < t - t_0 < \delta$ die Beziehungen $0 < t - t_0 < \tilde{\delta}$ und $\frac{1}{t-t_0} > \frac{1}{\delta} \geq 2M$ sowie

$$\frac{\langle \alpha(t) | v \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} > \frac{1}{2(t-t_0)} > \frac{1}{2} 2M = M$$

folgen. Auf analoge Weise sieht man ein, dass

$$\frac{\langle \alpha(t) | v \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} < -M$$

für alle $t \in]t_0 - \delta, t_0[$ gilt.

(b) Es sei $N > 0$. Wir setzen $M := \frac{N \|v\|}{2}$ und wählen einen Wert für δ wie im Beweis von Aussage (a). Dann gelten für alle Werte $t_+ \in]t_0, t_0 + \delta[$ und $t_- \in]t_0 - \delta, t_0[$ die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} & \|(\iota \circ \alpha)(t_+) - (\iota \circ \alpha)(t_-)\| \\ &= \left\| \frac{\alpha(t_+)}{\|\alpha(t_+)\|^2} - \frac{\alpha(t_-)}{\|\alpha(t_-)\|^2} \right\| \\ &\geq \frac{1}{\|v\|} \left\langle \frac{\alpha(t_+)}{\|\alpha(t_+)\|^2} - \frac{\alpha(t_-)}{\|\alpha(t_-)\|^2} \middle| v \right\rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \frac{1}{\|v\|} \left\langle \frac{\alpha(t_+)}{\|\alpha(t_+)\|^2} \middle| v \right\rangle - \frac{1}{\|v\|} \left\langle \frac{\alpha(t_-)}{\|\alpha(t_-)\|^2} \middle| v \right\rangle \\ &> \frac{M}{\|v\|} + \frac{M}{\|v\|} = 2 \frac{N \|v\|}{2 \|v\|} = N. \quad \square \end{aligned}$$

4.2.7 Korollar. (a) *Es sei $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär C^1 -parametrisierte Kurve $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, für die ein Parameterwert $t_0 \in I$ existiert, dass $\alpha(t_0) = (0,0)$ gilt. Dann ist die Kurve $\iota \circ \alpha: I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht geschlossen und lässt sich auch nicht zu einer geschlossenen Kurve fortsetzen.*

(b) *Das Inversionsbild einer regulär C^1 -parametrisierten Kurve, die durch das Inversionszentrum verläuft, ist nicht geschlossen und lässt sich auch nicht zu einer geschlossenen Kurve fortsetzen.*

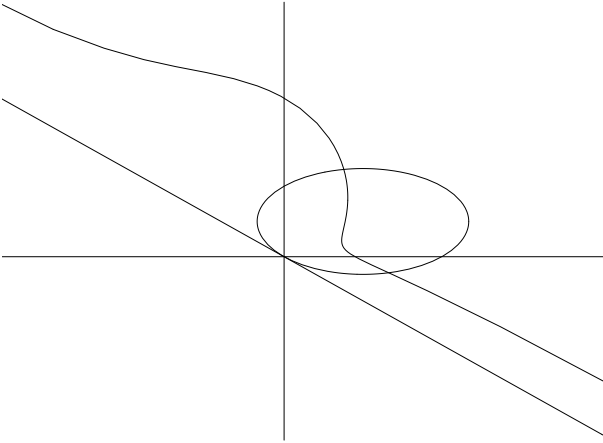


Abbildung 4.6: Beispiel einer Kurve (Ellipse), die den Ursprung enthält und deren Inversionsbild daher nicht geschlossen ist.

Abbildung 4.6 illustriert die Aussage des vorstehenden Korollars. Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Lemma, das uns bei der Untersuchung der Konvexität von Inversionsbildern von Ellipse von Nutzen sein wird.

4.2.8 Lemma. Für jede Kurve $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und alle $k > 0$ ist $\iota(k\alpha(t)) = \frac{1}{k} \iota(\alpha(t))$.

4.2.9 Bemerkung. Insbesondere gilt für die parametrisierte Ellipse $\xi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi(t) = (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)$ die Identität $\iota\left(\frac{1}{A} \xi(t)\right) = A \iota(\xi(t))$. Somit entsteht das Inversionsbild der „normierten“ Ellipse $\frac{1}{A} \xi$ mit großer Halbachse 1 aus dem Inversionsbild von ξ durch zentrische Streckung mit Streckfaktor A .

4.3 Inversionsbilder von Ellipsen

Nach Proposition 4.1.3 ist die von der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ berandete in Definition 4.1.1 erklärte Inzidenzstruktur jedenfalls dann eine (streng konvexe) CD, wenn das Inversionsbild der von $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ berandeten Menge (streng) konvex bezüglich des gewöhnlichen Geradensystems der reellen affinen Ebene ist. In diesem Abschnitt untersuchen wir daher Inversionsbilder der Ellipsen $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ und erarbeiten hinreichende Kriterien für die strenge Konvexität der von $\iota(\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0))$ berandeten Teilmengen.

4.3.1 Definition. Es sei $A \geq B > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen $\xi_{A,B,x_0,y_0}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi(t) = (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)$ als die Parametrisierung der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ und verwenden auch die Kurzbezeichnung ξ anstelle von ξ_{A,B,x_0,y_0} .

4.3.2 Proposition. Für das Bild der Ellipse $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ unter der Inversionsabbildung ergeben sich die folgenden Fälle:

- (a) Für $A \neq B$ und $(0, 0) \notin \mathcal{E}$ ist $\iota(\mathcal{E})$ eine Kurve⁴ vom Grad 4.
- (b) Für $A \neq B$ und $(0, 0) \in \mathcal{E}$ ist $\iota(\mathcal{E} \setminus \{(0, 0)\})$ eine Kurve⁵ vom Grad 3.
- (c) Falls $A = B$ und $(0, 0) \notin \mathcal{E}$ gilt, so ist $\iota(\mathcal{E})$ ein Kreis.
- (d) Für $A = B$ und $(0, 0) \in \mathcal{E}$ ist $\iota(\mathcal{E} \setminus \{(0, 0)\})$ eine Gerade.

Beweis. Der Beweis wird in [53] mit Methoden der algebraischen Geometrie geführt, vgl. Lemma 3.1 und Theorem 3.2. von [53]. \square

4.3.3 Definition. Es seien A und B reelle Zahlen mit $A \geq B > 0$.

- (a) $\mathcal{U}_{A,B}$ sei die Menge aller Punkte (x_0, y_0) , für welche das Bild $\iota(D)$ der von der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ im Innern berandeten Menge D unter der Inversionsabbildung $\iota = \iota_{(0,0)}$

⁴ Nach Proposition 4.2.5 ist $\iota \circ \xi$ in diesem Fall geschlossen.

⁵ Nach Korollar 4.2.7 ist (die den Ursprung vermeidende Einschränkung von) $\iota \circ \xi$ in diesem Fall nicht geschlossen und kann auch nicht zu einer geschlossenen Kurve fortgesetzt werden, vgl. Abbildung 4.6.

homöomorph zur Einheitskreisscheibe und streng konvex ist.

- (b) $\tilde{\Omega}_{A,B}$ sei die Menge aller Punkte (x_0, y_0) , für welche die Kurve $\iota \circ \xi_{A,B,x_0,y_0}$ geschlossen ist und alle Werte der Krümmungsfunktion κ der Kurve $\iota \circ \xi_{A,B,x_0,y_0}$ von Null verschieden sind.
- (c) $\Omega_{A,B,\text{ext}}$ sei die Menge aller Punkte (x_0, y_0) , für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$0 < B \leq A \quad \text{und}$$

$$B(x_0^2 + y_0^2) - 2 \frac{A^2 - B^2}{A} \cdot \sqrt{B^2 x_0^2 + A^2 y_0^2} > 2A^2 B - B^3.$$

- (d) $\Omega_{A,B,\text{int}}$ sei die Menge aller Punkte (x_0, y_0) , für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{A^2}{2} \leq B^2 \leq A^2 \quad \text{und}$$

$$B(x_0^2 + y_0^2) + 2 \frac{A^2 - B^2}{A} \cdot \sqrt{B^2 x_0^2 + A^2 y_0^2} < 2B^3 - A^2 B.$$

- (e) $\Omega_{A,B} := \Omega_{A,B,\text{ext}} \cup \Omega_{A,B,\text{int}}$

Die Mengen $\Omega_{A,B,\text{int}}$ und $\Omega_{A,B,\text{ext}}$ sind stets disjunkt, vgl. Ergebnis 4.3.12. Für $B^2 < \frac{A^2}{2}$ ist $\Omega_{A,B,\text{int}}$ leer. In den Fällen, in denen die Menge $\Omega_{A,B,\text{int}}$ nicht leer ist, enthält sie den Koordinatenursprung. Wir bezeichnen $\Omega_{A,B,\text{int}}$ als *Innenkomponente* von $\Omega_{A,B}$ oder kurz als *Innenbereich* und $\Omega_{A,B,\text{ext}}$ als *Außenkomponente* von $\Omega_{A,B}$ bzw. als *Außenbereich*. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass auch $\mathcal{U}_{A,B}$ in zwei (disjunkte) Zusammenhangskomponenten $\mathcal{U}_{A,B,\text{int}}$ und $\mathcal{U}_{A,B,\text{ext}}$ zerfällt, wobei die Inklusionen $\Omega_{A,B,\text{ext}} \subseteq \mathcal{U}_{A,B,\text{ext}}$ und $\Omega_{A,B,\text{int}} \subseteq \mathcal{U}_{A,B,\text{int}}$ gelten. Wir bezeichnen dementsprechend $\mathcal{U}_{A,B,\text{int}}$ als *Innenkomponente* von $\mathcal{U}_{A,B}$ und $\mathcal{U}_{A,B,\text{ext}}$ als *Außenkomponente* von $\mathcal{U}_{A,B}$ und erlauben uns, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, auch hier die Kurzbezeichnungen *Innenbereich* bzw. *Außenbereich*.

4.3.4 Proposition. Falls (x_0, y_0) in $\Omega_{A,B}$ liegt, so enthält die Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ den Koordinatenursprung nicht.

Beweis durch Kontraposition. Falls die Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ den Koordinatenursprung enthält, so gilt $\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{B^2} = 1$, also $x_0^2 = A^2 - \frac{A^2}{B^2} y_0^2$. Damit ergibt sich für die linke Seite L_{ext} der Ungleichung für $\Omega_{A,B,\text{ext}}$:

$$\begin{aligned} L_{\text{ext}} &= B \left(A^2 - \frac{A^2}{B^2} y_0^2 + y_0^2 \right) - 2 \frac{A^2 - B^2}{A} \cdot \sqrt{B^2 A^2} \\ &= -B A^2 - \frac{A^2}{B} y_0^2 + B y_0^2 + 2 B^3 \\ &= 2 B^3 - B A^2 + \left(B - \frac{A^2}{B} \right) y_0^2. \end{aligned}$$

Aus $B \leq A$ folgt $\left(B - \frac{A^2}{B} \right) \leq 0$, somit gilt $L_{\text{ext}} \leq 2 B^3 - B A^2$. Wegen $0 \geq 3 B (B^2 - A^2) = 3 B^3 - 3 B A^2$ ist $2 B^3 - B A^2 \leq 2 B A^2 - B^3$, also gilt insgesamt $L_{\text{ext}} \leq 2 A^2 B - B^3$, die Ungleichung für $\Omega_{A,B,\text{ext}}$ ist somit nicht erfüllt.

Andererseits gilt $y_0^2 = B^2 - \frac{B^2}{A^2} x_0^2$, falls der Koordinatenursprung auf der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ liegt. Die linke Seite L_{int} der Ungleichung für $\Omega_{A,B,\text{int}}$ nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} L_{\text{int}} &= B \left(x_0^2 + B^2 - \frac{B^2}{A^2} x_0^2 \right) + 2 \frac{A^2 - B^2}{A} \cdot \sqrt{A^2 B^2} \\ &= B x_0^2 - B^3 - \frac{B^3}{A^2} x_0^2 + 2 A^2 B \\ &= \left(1 - \frac{B^2}{A^2} \right) B x_0^2 - B^3 + 2 A^2 B \end{aligned}$$

Aus $B \leq A$ folgt $\left(1 - \frac{B^2}{A^2} \right) \geq 0$, somit gilt $L_{\text{int}} \geq -B^3 + 2 A^2 B$. Wegen $0 \leq 3 B (A^2 - B^2) = 3 B A^2 - 3 B^3$ ist $-B^3 + 2 A^2 B \geq 2 B^3 - A^2 B$, also gilt insgesamt $L_{\text{int}} \leq 2 B^3 - A^2 B$, die Ungleichung für $\Omega_{A,B,\text{int}}$ ist somit nicht erfüllt. \square

Zusammen mit Proposition 4.2.5 ergibt sich hieraus eine wichtige Folgerung.

4.3.5 Korollar. Für $(x_0, y_0) \in \Omega_{A,B}$

- (a) ist die Kurve $\iota_{0,0} \circ \xi_{A,B,x_0,y_0}$ eine geschlossene Jordankurve,
- (b) ist das Inversionsbild $\iota(\mathcal{E})$ der Ellipse $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ zur Kreislinie homöomorph,
- (c) berandet $\iota(\mathcal{E})$ im Innern eine zur Einheitskreisscheibe homöomorphe Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Wir kommen nun zur zentralen Aussage dieses Abschnitts, die wir mit den in Definition 4.3.3 eingeführten Bezeichnungen formulieren.

4.3.6 Proposition. Für alle $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \geq B > 0$ gelten die Inklusionen $\Omega_{A,B} \subseteq \tilde{\Omega}_{A,B} \subseteq \mathcal{U}_{A,B}$.

Beweis, erster Teil. Die Beziehung $\tilde{\Omega}_{A,B} \subseteq \mathcal{U}_{A,B}$ folgt direkt aus Satz 3.1.14. □

Zum Beweis der Inklusion $\Omega_{A,B} \subseteq \tilde{\Omega}_{A,B}$ benötigen wir einige Vorbereitungen.

4.3.7 Definition. Es sei \mathcal{S} eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 und $A > 0$ eine reelle Zahl. Dann bezeichne $A \cdot \mathcal{S} := \{(Ax, Ay) \mid (x, y) \in \mathcal{S}\}$ das Bild von \mathcal{S} unter der zentrischen Streckung mit Streckfaktor A .

4.3.8 Lemma. Es sei $0 < B \leq A$ und $0 < b \leq 1$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

- (a) $\tilde{\Omega}_{A,Ab} = A \cdot \tilde{\Omega}_{1,b}$,
- (b) $\Omega_{A,Ab,int} = A \cdot \Omega_{1,b,int}$,
- (c) $\Omega_{A,Ab,ext} = A \cdot \Omega_{1,b,ext}$,
- (d) $\Omega_{A,Ab} = A \cdot \Omega_{1,b}$,
- (e) $\tilde{\Omega}_{A,B} = A \cdot \tilde{\Omega}_{1,B/A}$,
- (f) $\Omega_{A,B} = A \cdot \Omega_{1,B/A}$.

Beweis. (a) Wir prüfen zunächst die Inklusion $\tilde{U}_{A,Ab} \subseteq A \cdot \tilde{U}_{1,b}$ nach. Es sei $(x_0, y_0) \in \tilde{U}_{A,Ab}$. Dann besitzt die Krümmungsfunktion κ der Kurve $\iota \circ \xi_{A,Ab,x_0,y_0}$ keine Nullstellen, gleiches gilt für die Kurve $A \cdot \iota \circ \xi_{A,Ab,x_0,y_0}$, denn die Krümmungswerte der mit A zentrisch gestreckten Kurve sind durch $\frac{\kappa(t)}{A}$ gegeben. Da nach Lemma 4.2.8 bzw. Bemerkung 4.2.9 die Identität

$$A \cdot \iota(x_0 + A \cos t, y_0 + A b \sin t) = \iota\left(\frac{x_0}{A} + \cos t, \frac{y_0}{A} + b \sin t\right)$$

gilt, folgen die Beziehungen $\left(\frac{x_0}{A}, \frac{y_0}{A}\right) \in \tilde{U}_{1,b}$ sowie $(x_0, y_0) \in A \cdot \tilde{U}_{1,b}$ und hieraus $\tilde{U}_{A,Ab} \subseteq A \cdot \tilde{U}_{1,b}$.

Es sei umgekehrt $(x_0, y_0) \in A \cdot \tilde{U}_{1,b}$, dann gilt $\left(\frac{x_0}{A}, \frac{y_0}{A}\right) \in \tilde{U}_{1,b}$. Also besitzt die Krümmung der parametrisierten Kurve

$$t \mapsto \iota\left(\frac{x_0}{A} + \cos t, \frac{y_0}{A} + b \sin t\right)$$

nirgendwo Nullstellen. Wegen der oben mit Bezug auf Lemma 4.2.8 angegebenen Identität gilt dies auch für die Kurve

$$t \mapsto A \cdot \iota(x_0 + A \cos t, y_0 + A b \sin t),$$

also liegt (x_0, y_0) in $\tilde{U}_{A,Ab}$, und es folgt $\tilde{U}_{1,b} \subseteq \tilde{U}_{A,Ab}$.

(b) Es sei $(x_0, y_0) \in \Omega_{A,Ab,int}$. Dann ist $\frac{A^2}{2} \leq A^2 b^2 \leq A^2$ und

$$A b (x_0^2 + y_0^2) + 2 \frac{A^2 - A^2 b^2}{A} \cdot \sqrt{A^2 b^2 x_0^2 + A^2 y_0^2} < 2 A^3 b^3 - A^3 b.$$

Nach Division der ersten Ungleichung durch A^2 und der zweiten durch A^3 folgt $\frac{1}{2} \leq b^2 \leq 1$ und

$$b \left(\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{A^2} \right) + 2 (1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{A^2}} < 2 b^3 - b.$$

Damit gilt $\left(\frac{x_0}{A}, \frac{y_0}{A}\right) \in \Omega_{1,b,int}$, woraus $(x_0, y_0) \in A \cdot \Omega_{1,b,int}$ und somit $\Omega_{A,Ab,int} \subseteq A \cdot \Omega_{1,b,int}$ folgt. Die Inklusion $A \cdot \Omega_{1,b,int} \subseteq$

$\Omega_{A,Ab,int}$ ergibt sich durch Umkehrung der eben vorgeführten Beweisschritte.

(c) Es sei $(x_0, y_0) \in \Omega_{A,Ab,ext}$. Dann ist $0 < Ab \leq A$ und

$$Ab(x_0^2 + y_0^2) - 2 \frac{A^2 - A^2 b^2}{A} \cdot \sqrt{A^2 b^2 x_0^2 + A^2 y_0^2} > 2A^3 b - A^3 b^3.$$

Nach Division der ersten Ungleichung durch A und der zweiten Ungleichung durch A^3 folgt $0 < Ab \leq A$ und

$$b \left(\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{A^2} \right) - 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{A^2}} > 2b - b^3$$

Damit gilt $\left(\frac{x_0}{A}, \frac{y_0}{A}\right) \in \Omega_{1,b,ext}$, woraus $(x_0, y_0) \in A \cdot \Omega_{1,b,ext}$ und schließlich $\Omega_{A,Ab,ext} \subseteq A \cdot \Omega_{1,b,ext}$ folgt. Der Nachweis der umgekehrten Inklusion ist nun wieder offensichtlich.

Nach Definition gilt $\Omega_{A,Ab} = \Omega_{A,Ab,ext} \cup \Omega_{A,Ab,int}$, damit folgt Behauptung (d) unmittelbar aus (b) und (c). Mit den Äquivalenzen (a) \Leftrightarrow (e) und (d) \Leftrightarrow (f) ergibt sich die Gültigkeit der übrigen Aussagen. \square

4.3.9 Bemerkungen. (a) Wir merken ohne Beweis an, dass auch die Beziehungen $\mathcal{U}_{A,Ab} = A \cdot \mathcal{U}_{1,b}$ und $\mathcal{U}_{A,B} = A \cdot \mathcal{U}_{1,B/A}$ gelten.

(b) Da $\Omega_{A,B} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}_{A,B}$ zu $\Omega_{1,B/A} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}_{1,B/A}$ äquivalent ist, genügt es, wenn wir zur Vervollständigung des Beweises der Proposition 4.3.6 zeigen, dass $\Omega_{1,b} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}_{1,b}$ für alle b mit $0 < b \leq 1$ gilt.

Es genügt somit, die Inversionsbilder „normierter“ Ellipsen zu betrachten, deren große Halbachsen Einheitslänge besitzen. Wenn eine solche Ellipse mit kleiner Halbachse b und Mittelpunkt (x, y) durch zentrische Streckung mit dem Faktor $1/A$ aus einer Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ hervorgeht, so gilt

$$x := \frac{x_0}{A}, \quad y := \frac{y_0}{A}, \quad b = \frac{B}{A}.$$

Wir formulieren nun die Aussage, die zu dem noch zu beweisenden Teil von Proposition 4.3.6 äquivalent ist:

4.3.10 Proposition. Für $0 < b \leq 1$ und $\xi(t) = (x + \cos t, y + b \sin t)$ besitzt die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jedenfalls dann keine Nullstellen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $0 < b \leq 1$ und

$$b(x^2 + y^2) - 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} > 2b - b^3 \quad (\text{E})$$

(b) $\frac{1}{2} \leq b^2 \leq 1$ und

$$b(x^2 + y^2) + 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < 2b^3 - b. \quad (\text{I})$$

Vor dem Beweis der Proposition 4.3.10 treffen wir noch einige Vereinbarungen: Für b mit $0 < b \leq 1$ bezeichne $\Omega_{b,\text{ext}}$ die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, welche die Ungleichung (E) in Proposition 4.3.10 erfüllen, und $\Omega_{b,\text{int}}$ die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, welche die Ungleichung (I) erfüllen. Ferner sei $\Omega_b := \Omega_{b,\text{ext}} \cup \Omega_{b,\text{int}}$. Wir nennen $\Omega_{b,\text{int}}$ wieder den *Innenbereich* und $\Omega_{b,\text{ext}}$ den *Außenbereich*. Schließlich wollen wir $\tilde{\Omega}_b$ anstelle von $\tilde{\Omega}_{1,b}$ und $\tilde{\Omega}_b$ anstelle von $\tilde{\Omega}_{1,b}$ schreiben.

Wir führen nun den Beweis der Proposition 4.3.10 in mehreren Schritten unter Verwendung von Lemma 3.2.6, welches den Zusammenhang zwischen der Krümmungsfunktion einer Kurve und deren projektiven Darstellungen herstellt. Im Folgenden gelte stets $0 < b \leq 1$ und es sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{1,b}(x, y)$ die Ellipse, die von der Parametrisierung $\xi := \xi_{1,b,x,y}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x + \cos t, y + b \sin t)$ überstrichen wird.

Wir betrachten zunächst projektive Darstellungen nicht normierter Ellipsen

$$\xi_{A,B,x_0,y_0}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t),$$

da wir diese auch im nächsten Abschnitt benötigen werden. Danach spezialisieren wir auf den Fall normierter Ellipsen. Wir re-normieren die projektive Standarddarstellung von

$$\theta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)$$

mit der Funktion

$$\rho: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : \rho(t) = (x_0 + A \cos t)^2 + (y_0 + B \sin t)^2$$

und erhalten

$$\Theta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \Theta(t) = \begin{pmatrix} x_0 + A \cos t \\ y_0 + B \sin t \\ (x_0 + A \cos t)^2 + (y_0 + B \sin t)^2 \end{pmatrix}.$$

Die ersten und zweiten Ableitungen von Θ ergeben sich zu

$$\Theta'(t) = \begin{pmatrix} -A \sin t \\ B \cos t \\ \Theta_3'(t) \end{pmatrix}$$

mit $\Theta_3'(t) = -2A(x_0 + A \cos t) \sin t + 2B \cos t (y_0 + B \sin t)$

und $\Theta''(t) = \begin{pmatrix} -A \cos t \\ -B \sin t \\ \Theta_3''(t) \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} \Theta_3''(t) &= 2B^2 \cos^2 t - 2A \cos t (x_0 + A \cos t) \\ &\quad + 2A^2 \sin^2 t - 2B \sin t (y_0 + B \sin t). \end{aligned}$$

Um für die hier anzustellende Konvexitätsuntersuchung das Lemma 3.2.6 anwenden zu können, berechnen wir die Determinante $D(t)$ der Matrix $[\Theta(t), \Theta'(t), \Theta''(t)]$. Es gilt

$$\begin{aligned} D(t) &= -A B x_0^2 \cos^2 t - A B y_0^2 \cos^2 t - 2A^2 B x_0 \cos^3 t \\ &\quad + 2B^3 x_0 \cos^3 t - A^3 B \cos^4 t + 2A B^3 \cos^4 t \\ &\quad - A B x_0^2 \sin^2 t - A B y_0^2 \sin^2 t + A^3 B \cos^2 t \sin^2 t \\ &\quad + A B^3 \cos^2 t \sin^2 t + 2A^3 y_0 \sin^3 t \\ &\quad - 2A B^2 y_0 \sin^3 t + 2A^3 B \sin^4 t - A B^3 \sin^4 t. \end{aligned}$$

Trigonometrische Umformungen liefern

$$\begin{aligned}
 D(t) &= \frac{1}{2} (A^3 B + A B^3 - 2 A B x_0^2 - 2 A B y_0^2 \\
 &\quad + 3 B (-A^2 + B^2) x_0 \cos t - 3 A B (A^2 - B^2) \cos(2 t) \\
 &\quad - A^2 B x_0 \cos(3 t) + B^3 x_0 \cos(3 t) + 3 A^3 y_0 \sin t \\
 &\quad - 3 A B^2 y_0 \sin t - A^3 y_0 \sin(3 t) + A B^2 y_0 \sin(3 t)) \\
 &= \frac{1}{2} (A^3 B + A B^3 - 2 A B (x_0^2 + y_0^2) \\
 &\quad + 3 B (-A^2 + B^2) x_0 \cos t - 3 A B (A^2 - B^2) \cos(2 t) \\
 &\quad + (-A^2 B x_0 + B^3 x_0) \cos(3 t) + (3 A^3 y_0 - 3 A B^2 y_0) \sin t \\
 &\quad + (-A^3 y_0 + A B^2 y_0) \sin(3 t)).
 \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $A = 1$, $B = b$, $x_0 = x$ und $y_0 = y$ bezeichnen wir den Ausdruck für die Determinante mit $d(t)$ und erhalten nach Division durch $1/2$ die Identität

$$\begin{aligned}
 2 d(t) &= b + b^3 - 2 b (x^2 + y^2) + 3 b (-1 + b^2) x \cos t \\
 &\quad + 3 b (-1 + b^2) \cos(2 t) + (-b x + b^3 x) \cos(3 t) \\
 &\quad + (3 y - 3 b^2 y) \sin t + (-y + b^2 y) \sin(3 t) \\
 &= b + b^3 - 2 b (x^2 + y^2) + 3 b (-1 + b^2) x \cos t \\
 &\quad + 3 b (-1 + b^2) \cos(2 t) + b x (-1 + b^2) \cos(3 t) \\
 &\quad - 3 y (-1 + b^2) \sin t + y (-1 + b^2) \sin(3 t).
 \end{aligned}$$

Um zu ersehen, für welche b, x, y die Funktion ($t \mapsto d(t)$) Nullstellen besitzen kann, formen wir weiter um:

$$\begin{aligned}
 2 d(t) &= b + b^3 - 2 b (x^2 + y^2) \\
 &\quad - (1 - b^2) \cdot (3 b x \cos t - 3 y \sin t + 3 b \cos(2 t)) \\
 &\quad - (1 - b^2) \cdot (b x \cos(3 t) + y \sin(3 t))
 \end{aligned}$$

Für den Fall $b = 1$ (Kreis), besitzt d genau dann keine Nullstellen, wenn $2 - 2(x^2 + y^2) \neq 0$, d.h., wenn $x^2 + y^2 \neq 1$ gilt. Damit ist der Unterfall $b = 1$ von Proposition 4.3.10 bereits bewiesen.

Für die Untersuchung des Falls $0 < b < 1$ setzen wir

$$2 d(t) = c - g(t)$$

mit

$$c := b + b^3 - 2b(x^2 + y^2)$$

und

$$g(t) := \sum_{k=1}^3 (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} a_1 &= 3bx(1-b^2), & b_1 &= -3y(1-b^2), \\ a_2 &= 3b(1-b^2), & b_2 &= 0, \\ a_3 &= bx(1-b^2), & b_3 &= y(1-b^2). \end{aligned}$$

gegeben sind.

Mit der sogenannten *Dreiecksungleichung nach unten* folgt

$$|2 d(t)| = |c - g(t)| \geq ||c| - |g(t)||.$$

Falls nun sichergestellt werden kann, dass $|g(t)| < |c|$ gilt, so folgen nacheinander

$$\begin{aligned} ||c| - |g(t)|| &> 0, \\ |2 d(t)| = |c - g(t)| &> 0 \end{aligned}$$

und mithin

$$2 d(t) = c - g(t) \neq 0.$$

Es ist also $d(t) \neq 0$, wenn $|g(t)| < |c|$. Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn

$$\sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < |c|,$$

denn es gilt die

4.3.11 Proposition (Abschätzung).

$$|g(t)| = \left| \sum_{k=1}^3 (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right| \leq \sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

für alle $a_k, b_k, t \in \mathbb{R}$.

Beweis der Abschätzung. Wir setzen $z_k(t) := a_k e^{ikt} - i b_k e^{ikt}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_k(t) &= a_k (\cos(kt) + i \sin(kt)) + b_k (\sin(kt) - i \cos(kt)) \\ &= a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) + i (a_k \sin(kt) - b_k \cos(kt)). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \Re(z_k(t)) &= a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \\ \Im(z_k(t)) &= a_k \sin(kt) - b_k \cos(kt) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |z_k(t)|^2 &= (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))^2 + (a_k \sin(kt) - b_k \cos(kt))^2 \\ &= a_k^2 + b_k^2. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left| \sum_{k=1}^3 (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right| \\ &= |\Re(z_1(t) + z_2(t) + z_3(t))| \leq |z_1(t) + z_2(t) + z_3(t)| \\ &\leq |z_1(t)| + |z_2(t)| + |z_3(t)| \\ &= \sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Wir werten nun die Bedingung $\sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < |c|$ aus. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} &= (1 - b^2) \cdot (\sqrt{9b^2x^2 + 9y^2} + 3b + \sqrt{b^2x^2 + y^2}) \\ &= (1 - b^2) \cdot (4\sqrt{b^2x^2 + y^2} + 3b). \end{aligned}$$

Die Bedingung $\sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < |c|$ ist also äquivalent zu

$$(1 - b^2) \cdot \left(4\sqrt{b^2 x^2 + y^2} + 3b\right) < |b + b^3 - 2b(x^2 + y^2)|$$

Für $c = 0$ kann die Bedingung nicht erfüllt werden, da die linke Seite positiv ist. Der Ausdruck für c ist genau dann positiv, wenn

$$b + b^3 > 2b(x^2 + y^2),$$

das heißt, wenn

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2}(1 + b^2) \quad \text{gilt.} \quad (4.2)$$

In diesem Fall ist die Ungleichung

$$(1 - b^2) \cdot \left(4\sqrt{b^2 x^2 + y^2} + 3b\right) < |b + b^3 - 2b(x^2 + y^2)|$$

äquivalent zu

$$(1 - b^2) \cdot \left(4\sqrt{b^2 x^2 + y^2} + 3b\right) < b + b^3 - 2b(x^2 + y^2).$$

Wir formen weiter um und erhalten nacheinander

$$(1 - b^2) \cdot \left(4\sqrt{b^2 x^2 + y^2}\right) < 4b^3 - 2b - 2b(x^2 + y^2),$$

$$(1 - b^2) \cdot \left(4\sqrt{b^2 x^2 + y^2}\right) < 2b(2b^2 - 1 - (x^2 + y^2)),$$

$$2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < b(2b^2 - 1 - (x^2 + y^2))$$

und

$$b(x^2 + y^2) + 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < b(2b^2 - 1).$$

Die Lösungsmenge \mathcal{L}_1 dieser letzten Ungleichung ist ersichtlich nur dann nicht leer, wenn

$$b^2 > \frac{1}{2},$$

denn andernfalls nimmt die rechte Seite nichtpositive Werte an, während die linke Seite nichtnegativ ist. Wir erwarten also Lösungen der Ungleichung $\sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < |c|$ in der Nähe des Ursprungs, falls die Ellipse nicht zu flach ist.

Wir zeigen nun, dass \mathcal{L}_1 in der Lösungsmenge \mathcal{L}_2 der Ungleichung 4.2 enthalten ist. Es sei $(x, y) \in \mathcal{L}_1$, dann gilt

$$b(x^2 + y^2) + 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < b(2b^2 - 1).$$

Umformungen liefern nacheinander

$$x^2 + y^2 < 2b^2 - 1 - \frac{2}{b}(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2}(1 + b^2) - \frac{3}{2}(1 - b^2) - \frac{2}{b}(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2}(1 + b^2) - (1 - b^2) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{b} \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} \right).$$

Wegen $-(1 - b^2) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{b} \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} \right) < 0$ folgt schließlich

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2}(1 + b^2), \text{ d.h. } (x, y) \in \mathcal{L}_2.$$

Damit gilt $\Omega_{b,\text{int}} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$.

Im Fall $c < 0$, d.h. $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2)$, wird die Bedingung $\sum_{k=1}^3 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < |c|$ zu

$$(1 - b^2) \cdot \left(4\sqrt{b^2 x^2 + y^2} + 3b \right) < 2b(x^2 + y^2) - b - b^3.$$

Umformungen liefern sukzessive

$$4(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < 2b(x^2 + y^2) - 4b + 2b^3,$$

$$2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < b(x^2 + y^2) - 2b + b^3,$$

$$b(x^2 + y^2) - 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} > 2b - b^3.$$

Wir zeigen, dass die Lösungsmenge \mathcal{L}_3 der letzten Ungleichung in der Lösungsmenge \mathcal{L}_4 der Ungleichung $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2)$ enthalten ist. Es sei also $(x, y) \in \mathcal{L}_3$, dann gilt

$$b(x^2 + y^2) - 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} > 2b - b^3.$$

Umformungen liefern nacheinander

$$x^2 + y^2 > 2 - b^2 + \frac{2}{b}(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2) + \frac{3}{2}(1 - b^2) + \frac{2}{b}(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2) + (1 - b^2) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{b} \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} \right).$$

Wegen $(1 - b^2) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{b} \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} \right) > 0$ folgt schließlich

$$x^2 + y^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2), \text{ d.h. } (x, y) \in \mathcal{L}_4.$$

Damit gilt $\Omega_{b,\text{ext}} = \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_3$. Wir fassen zusammen:

4.3.12 Ergebnis. (a) Falls die Bedingung

$$b(x^2 + y^2) + 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} < 2b^3 - b$$

erfüllt ist, was $\frac{1}{2} < b^2 \leq 1$ erfordert, so besitzt die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi_{x,y,1,b}$ nach Lemma 3.2.6 keine Nullstellen, und es gilt $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}(1 + b^2)$.

(b) Falls die Bedingung

$$b(x^2 + y^2) - 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} > 2b - b^3$$

erfüllt ist, was für alle $b \in (0, 1]$ möglich ist, so so besitzt die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi_{x,y,1,b}$ nach Lemma 3.2.6 keine Nullstellen, und es gilt $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2)$.

Hiermit ist der Beweis von Proposition 4.3.10 erbracht.

4.3.13 Korollar. Für alle b mit $0 < b \leq 1$ gilt $\Omega_{1,b} \subseteq \tilde{U}_{1,b}$.

Wir erinnern an die Bemerkung 4.3.9 und konstatieren, dass somit auch Proposition 4.3.6 bewiesen ist.

Zur qualitativen Analyse der Konvexität des Inversionsbilds ist die folgende alternative Sichtweise nützlich. Anstatt die Menge \tilde{U} derjenigen Ellipsenmittelpunkte (x_0, y_0) zu betrachten, für die das Bild von ξ_{A,B,x_0,y_0} unter der Inversion $\iota = \iota_{(0,0)}$ geschlossen und konvex ist, kann man die Menge \tilde{U}' derjenigen Inversionszentren (x_Z, y_Z) betrachten, für die das Bild der *im Ursprung* zentrierten Ellipse unter der Inversion $\iota_{(x_Z,y_Z)}$ diese Eigenschaft besitzt.

4.3.14 Definition. Es seien A und B reelle Zahlen mit $A \geq B > 0$. $\tilde{U}'_{A,B}$ sei die Menge derjenigen Punkte $(x_Z, y_Z) \in \mathbb{R}^2$, für welche die Kurve $\iota_{(x_Z,y_Z)} \circ \xi_{A,B,0,0}$ geschlossen und konvex ist.

4.3.15 Lemma. Mit den Bezeichnungen der Definitionen 4.3.3 und 4.3.14 gilt $\tilde{U}_{A,B} = \tilde{U}'_{A,B}$.

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $\tilde{U} := \tilde{U}_{A,B}$ und $\tilde{U}' := \tilde{U}'_{A,B}$. Falls (x_0, y_0) in \tilde{U} liegt, so ist

$$\iota_{(0,0)} \circ \xi_{A,B,x_0,y_0} : t \mapsto \frac{(x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)}{(x_0 + A \cos t)^2 + (y_0 + B \sin t)^2}$$

geschlossen und berandet ein streng konvexes Inneres. Dann gilt dies auch für die Kurve

$$\alpha : t \mapsto -\frac{(x_0 + A \cos(t + \pi), y_0 + B \sin(t + \pi))}{(x_0 + A \cos(t + \pi))^2 + (y_0 + B \sin(t + \pi))^2}$$

da α aus $\iota_{(0,0)} \circ \xi_{A,B,x_0,y_0}$ durch Parameterverschiebung und nachfolgende Punktspiegelung hervorgeht. Es gilt nun aber

$$\alpha(t) = \frac{(A \cos t - x_0, B \sin t - y_0)}{(\cos t - x_0)^2 + (B \sin t - y_0)^2} = (\iota_{x_0,y_0} \circ \xi_{A,B,0,0})(t).$$

Mithin ist die Kurve $\iota_{x_0, y_0} \circ \xi_{A, B, 0, 0}$ geschlossen und berandet ein streng konvexes Inneres, also liegt (x_0, y_0) in \mathcal{U}' , und es folgt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Indem man den Beweisgang rückwärts verfolgt, weist man die Inklusion $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ nach, insgesamt gilt also $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. \square

4.3.16 Korollar (zu Proposition 4.3.4). *Falls $(x_Z, y_Z) \in \Omega'_{A, B}$ gilt, so enthält die Ellipse $\mathcal{E}_{A, B}(0, 0)$ den Punkt (x_Z, y_Z) nicht.*

4.3.17 Bemerkungen. (a) Die in Proposition 4.3.10 bzw. in Definition 4.3.3 zur Bestimmung von $\Omega_{A, B}$ angegebenen Bedingungen sind hinreichend aber nicht in jedem Fall notwendig für die Konvexität des Inversionsbildes. Mit den hier eingesetzten Methoden sind scharfe Abschätzungen im Allgemeinen nicht zu haben. Typischerweise gilt somit $\Omega_b \subsetneq \mathcal{U}_b$ bzw. $\Omega_{A, B} \subsetneq \mathcal{U}_{A, B}$.

(b) Für $b = 1$ ist \mathcal{E} der Einheitskreis, und die in Proposition 4.3.10 angegebenen Ungleichungen (E) bzw. (I) vereinfachen sich zu $x^2 + y^2 > 1$ bzw. $x^2 + y^2 < 1$. Damit ist ausgeschlossen, dass das Inversionszentrum auf C liegt. Der Innenbereich ist die offene Einheitskreisscheibe, der Außenbereich das Äußere des Einheitskreises.

Für Ellipsen \mathcal{E} , deren Exzentrizität $e = \sqrt{1 - b^2}$ von Null verschieden ist, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Für $b^2 < \frac{1}{2}$ gilt, wie oben bemerkt, $\Omega_b = \Omega_{b, \text{ext}}$. Hierbei ist $\Omega_{b, \text{ext}}$ die Menge der Punkte, die außerhalb der geschlossenen Kurve (vierter Ordnung) liegen, die durch die Gleichung

$$b(x^2 + y^2) - 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} = 2b - b^3$$

beschrieben wird. Für Ellipsen mit $b^2 > \frac{1}{2}$ ist der Innenbereich nicht leer und es ist $\Omega_{b, \text{int}}$ das Gebiet im Inneren der geschlossenen Kurve (vierter Ordnung), die durch die Gleichung

$$b(x^2 + y^2) + 2(1 - b^2) \cdot \sqrt{b^2 x^2 + y^2} = 2b^3 - b$$

gegeben ist. In diesem Fall liegt $(0, 0) \in \Omega_b$.

- (c) Für alle $b \in (0, 1]$ gilt für die Menge

$$\mathcal{C} := \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid \exists t \in I : (x + \cos t, y + b \sin t) = (0, 0)\}$$

von Punkten, für welche die Kurve \mathcal{C} das Inversionszentrum enthält, die Beziehung $\mathcal{C} \not\subseteq \Omega$. Für $b = 1$ ist \mathcal{C} ein Kreis, der sowohl das Innengebiet $\Omega_{b,\text{int}}$ als auch das Außengebiet $\Omega_{b,\text{ext}}$ berandet. Im elliptischen Fall mit kleiner Exzentrizität liegt (die Ellipse) \mathcal{C} in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_b$ zwischen dem Innen- und dem Außenbereich. Für wachsende Exzentrizität schrumpft $\Omega_{b,\text{int}}$ bis hin zu der für $e^2 \geq 0.5$ bzw. $b^2 \leq 0.5$ eintretenden Situation⁶ $\Omega_{b,\text{int}} = \emptyset$.

- (d) Wir begründen qualitativ, warum es im Fall hinreichend flacher Ellipsen keinen Innenbereich \mathcal{U}_{int} geben kann und nehmen hierzu an, dass $\mathcal{U}'_{\text{int}}$ für eine flache, im Ursprung zentrierte Ellipse \mathcal{E} nicht leer ist. Dann enthält $\mathcal{U}'_{\text{int}}$ aus Symmetriegründen den Ellipsenmittelpunkt $(0, 0)$. Nun gibt es aber bei hinreichend flachen Ellipsen einen durch $(0, 0)$ verlaufenden Kreisbogen, welcher die Ellipse in vier verschiedenen Punkten trifft. Durch Anwenden der Inversion erhalten wir eine Gerade, welche das Inversionsbild der Ellipse in vier verschiedenen Punkten schneidet, ein Widerspruch zur angenommenen Konvexität des Inversionsbilds.
- (e) Für den Grenzfall $b^2 = 0.5$ gilt $\mathcal{U}_{\text{int}} = \{(0, 0)\}$. Denn die Krümmungsfunktion der durch $(t \mapsto (\cos t, b \sin t))$ parametrisierten Ellipse ist durch

$$\kappa(t) = \frac{b}{(\sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}$$

gegeben, mithin gilt $\kappa(0) = 1/b^2$. Das bedeutet, dass der Krümmungskreis am Punkt $(1, 0)$ der Ellipse den Radius

⁶ Das Gebiet $\Omega_{b,\text{int}}$ ist durch die Ungleichung (I) bestimmt und daher offen. Der Fall $\Omega_{b,\text{int}} = \{(0, 0)\}$ tritt somit nicht ein. (Für $e^2 = b^2 = 0.5$ hat die Ungleichung (I) keine Lösung). Wie später ausgeführt wird, gilt für $b^2 = 0.5$ jedoch $\mathcal{U}_b = \{(0, 0)\}$.

$b^2 = 0.5$ besitzt und damit durch den Ursprung verläuft. Durch Anwenden der Inversion ergibt sich eine Gerade, welche das Inversionsbild $\iota(\mathcal{E})$ der Ellipse im Punkt $(1,0)$ berührt. Da es sich um eine Berührung von zweiter Ordnung handelt, verschwindet die Krümmung von $\iota \circ \xi$ an diesem Punkt, (wir erinnern uns, dass $(0,0) \notin \Omega$ gilt). Es ist jedoch das von $\iota(\mathcal{E})$ berandete Innere streng konvex, da es sich um einen isolierte Nullstelle der Krümmung handelt in dessen Umgebung das Vorzeichen der Krümmung nicht wechselt. Damit ist gezeigt, dass $(0,0)$ in \mathcal{U}' und somit nach Lemma 4.3.15 auch in \mathcal{U} liegt.

Jeder Kreis, dessen Radius r der Bedingung $0.5 < r < 1$ genügt und der die Ellipse im Punkte $(1,0)$ berührt, trifft die Ellipse in drei verschiedenen Punkten. Andererseits existiert zu jedem Punkt im Innern der Ellipse ein Radius r derart, dass der Kreis durch $(1,0)$ bzw. $(-1,0)$ mit Radius r diesen Punkt trifft. Folglich existiert innerhalb der Ellipse kein weiterer Punkt in \mathcal{U} , und es folgt die Behauptung.

Zur Veranschaulichung unserer Ergebnisse stellen wir einige konkrete Beispiele graphisch dar. Wir nehmen hier die Sichtweise ein, die zur Definition 4.3.14 führte und stellen jeweils die im Ursprung zentrierte Menge Ω'_b dar. Je nachdem, ob das Inversionszentrums (x_Z, y_Z) in Ω'_b liegt oder nicht ist, die vom Inversionsbild der Ellipse berandete Menge konvex oder nicht. In den Abbildungen 4.7 bis 4.14 wird jeweils die Lage des Inversionszentrums relativ zur Ellipse und zu Ω'_b , das Bild der Ellipse unter der Inversionsabbildung sowie der Graph der Funktion d dargestellt. Nach Lemma 3.2.6 gibt d das Verhalten der Krümmungsfunktion von $\iota \circ \xi$ bezüglich Nullstellen und Vorzeichenwechsel wieder. In allen Bildunterschriften verwenden wir vereinfachte Bezeichnungen und schreiben ι anstelle von $\iota_{(x_Z, y_Z)}$, ξ für $\xi_{1,b,x,y}$, Ω' für $\Omega'_{1,b}$, Ω'_{int} anstelle von $\Omega'_{1,b,\text{int}}$, Ω'_{ext} für $\Omega'_{1,b,\text{ext}}$ und \mathcal{U}' anstelle von $\mathcal{U}'_{1,b}$.

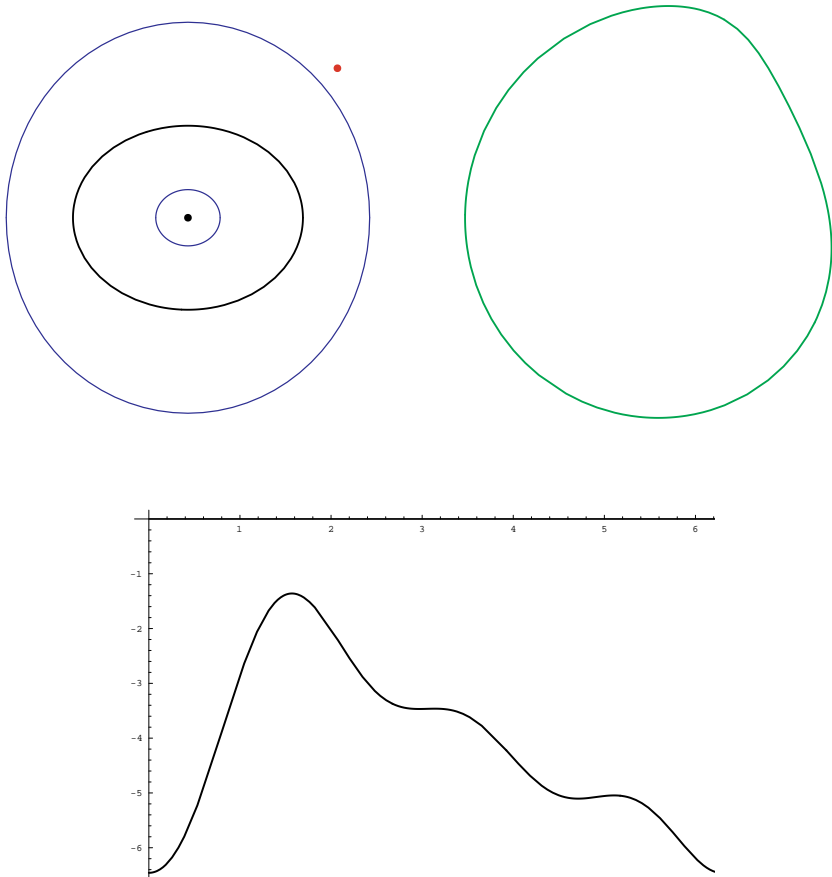


Abbildung 4.7: Für die Ellipse mit $b = \frac{4}{5}$ gilt $b^2 = \frac{16}{25} > \frac{1}{2}$, es gibt also neben einem Außenbereich Ω'_{ext} auch einen Innenbereich Ω'_{int} . Die Ränder von Ω'_{ext} und Ω'_{int} sind blau dargestellt. Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $(1.3, 1.3)$ liegt in Ω'_{ext} , das (grün dargestellte) Inversionsbild der Ellipse ist konvex. Die Funktion d nimmt ausschließlich negative Werte an, d.h. die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen nicht.

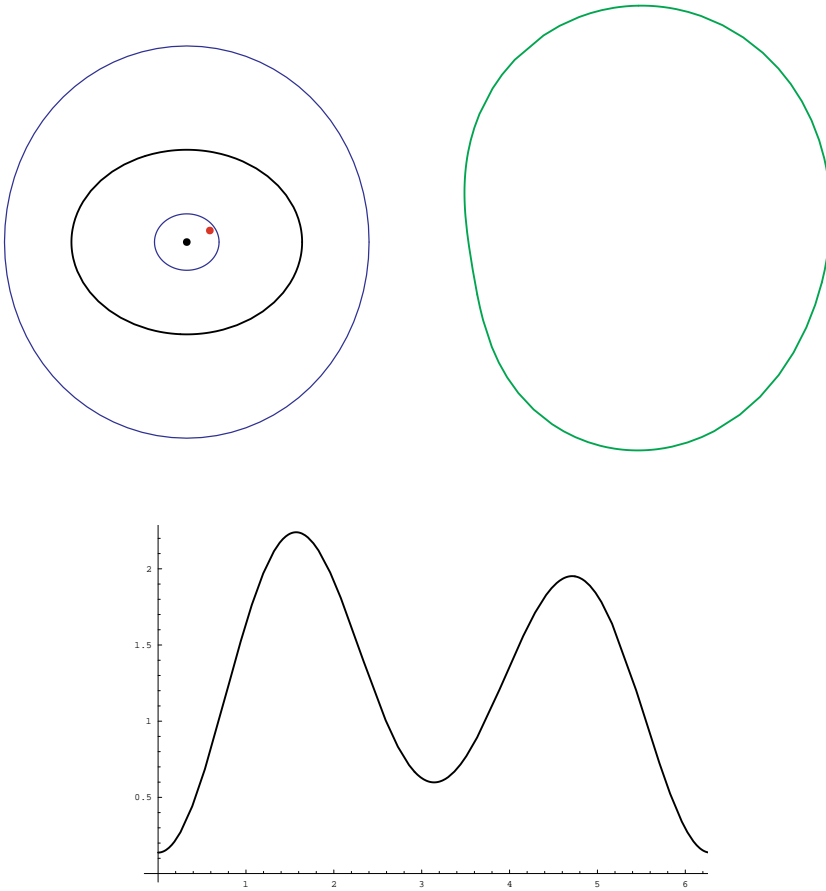


Abbildung 4.8: Ellipse mit $b = \frac{4}{5}$. Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $(0.2, 0.1)$ liegt im Innenbereich Ω'_{int} , dessen Rand durch die innerhalb der Ellipse liegende blau dargestellte Kurve gegeben ist; das Inversionsbild (grün) der Ellipse ist konvex, die Funktion d nimmt ausschließlich positive Werte an, die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen nicht.

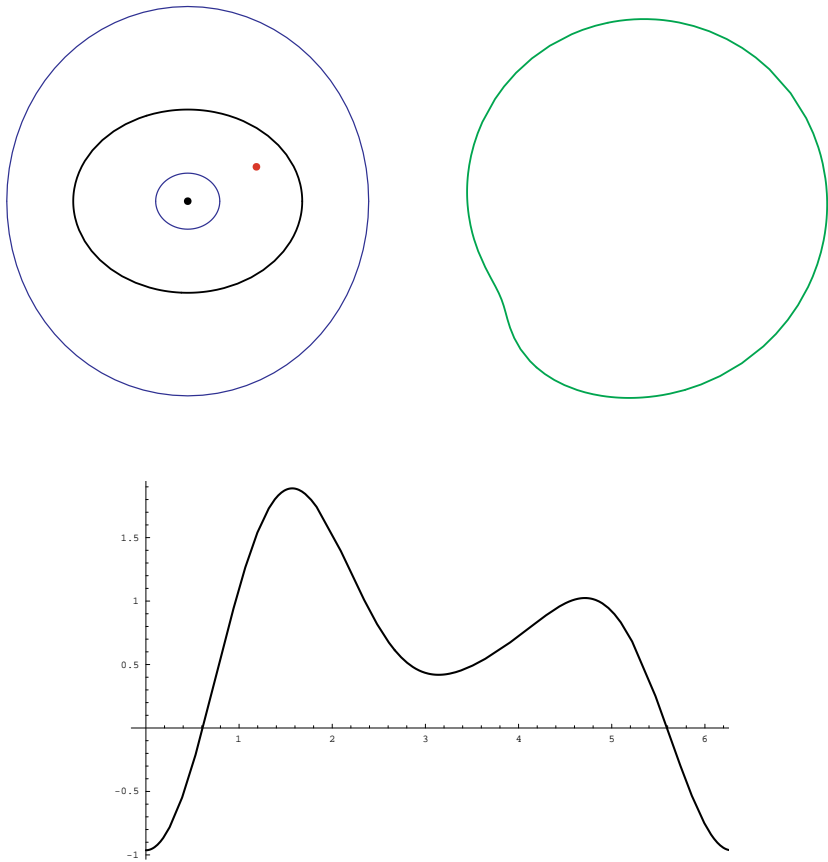


Abbildung 4.9: Ellipse mit $b = \frac{4}{5}$. Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $(0.6, 0.3)$ liegt zwischen den beiden blau dargestellten Kurven und damit weder im Innenbereich Ω'_{int} noch im Außenbereich Ω'_{ext} ; das Inversionsbild (grün) der Ellipse ist nicht konvex, die Funktion d und damit auch die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen.

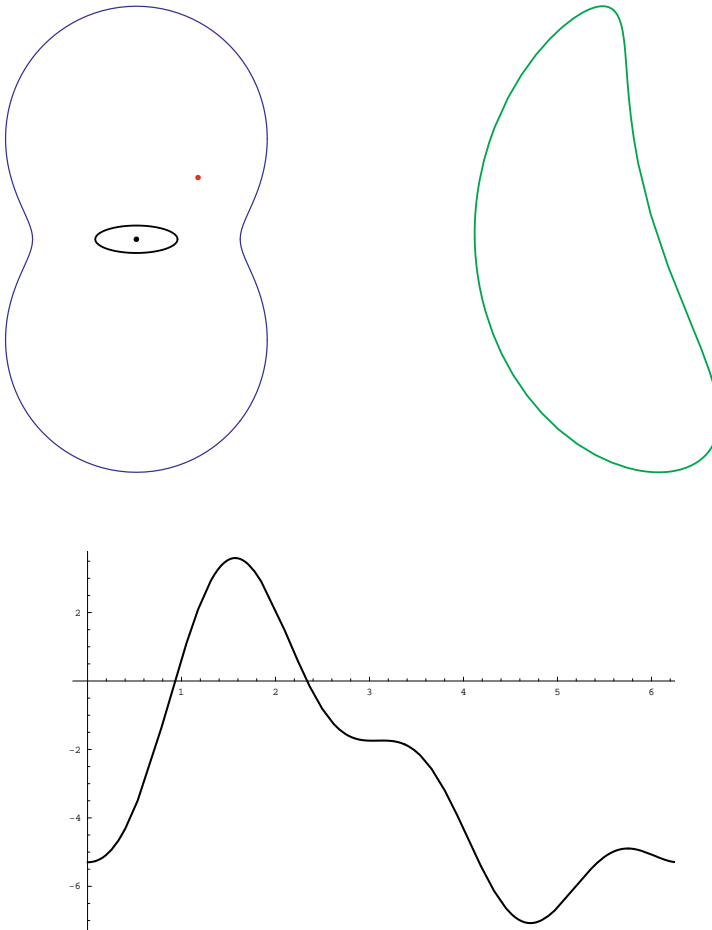


Abbildung 4.10: Ellipse mit $b = \frac{1}{3}$. Da $b^2 = \frac{1}{9} < \frac{1}{2}$ gilt, gibt es nur den (außerhalb der blau dargestellten Kurve liegenden) Außenbereich Ω'_{ext} . Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $(1.5, 1.5)$ liegt nicht in Ω'_{ext} , das Inversionsbild der Ellipse ist nicht konvex, die Funktion d und damit auch die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen.

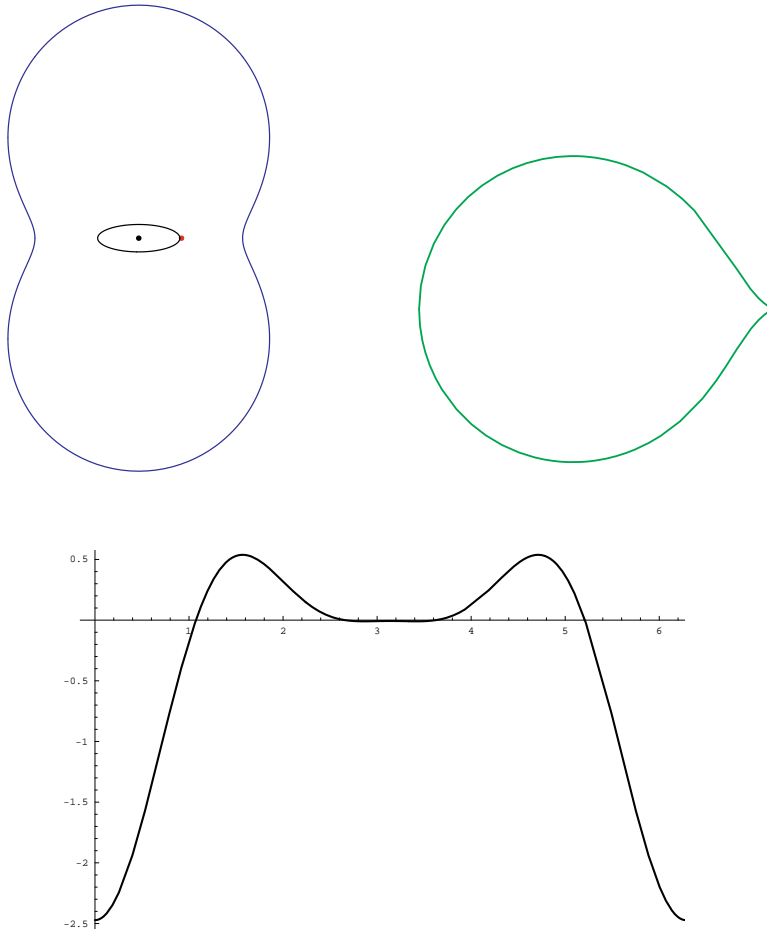


Abbildung 4.11: Ellipse mit $b = \frac{1}{3}$. Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $(1.04, 0)$ liegt nicht in dem (außerhalb der blau dargestellten Kurve liegenden) Außenbereich Ω'_{ext} , das Inversionsbild (grün) der Ellipse ist nicht konvex, die Funktion d und damit auch die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen. Der Ellipsenmittelpunkt liegt hier knapp außerhalb des Inversionskreises.

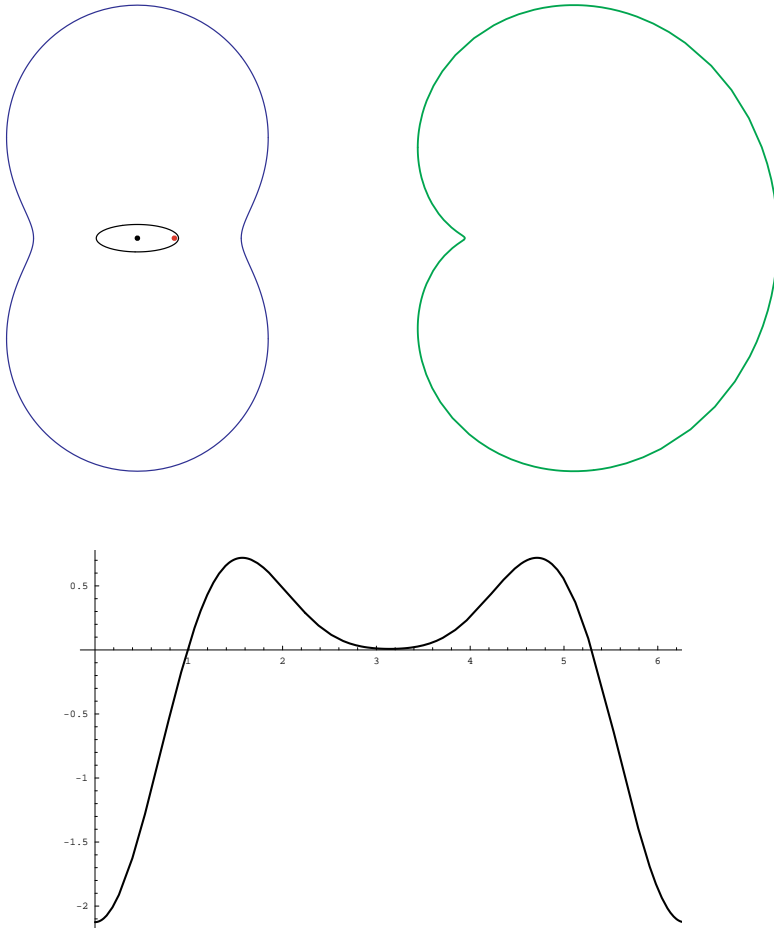


Abbildung 4.12: Ellipse mit $b = \frac{1}{3}$. Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $(0.9, 0)$ liegt nicht in dem (außerhalb der blau dargestellten Kurve liegenden) Außenbereich Ω'_{ext} , das Inversionsbild (grün) der Ellipse ist nicht konvex, die Funktion d und damit auch die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen. Der Ellipsenmittelpunkt liegt hier innerhalb des Inversionskreises.

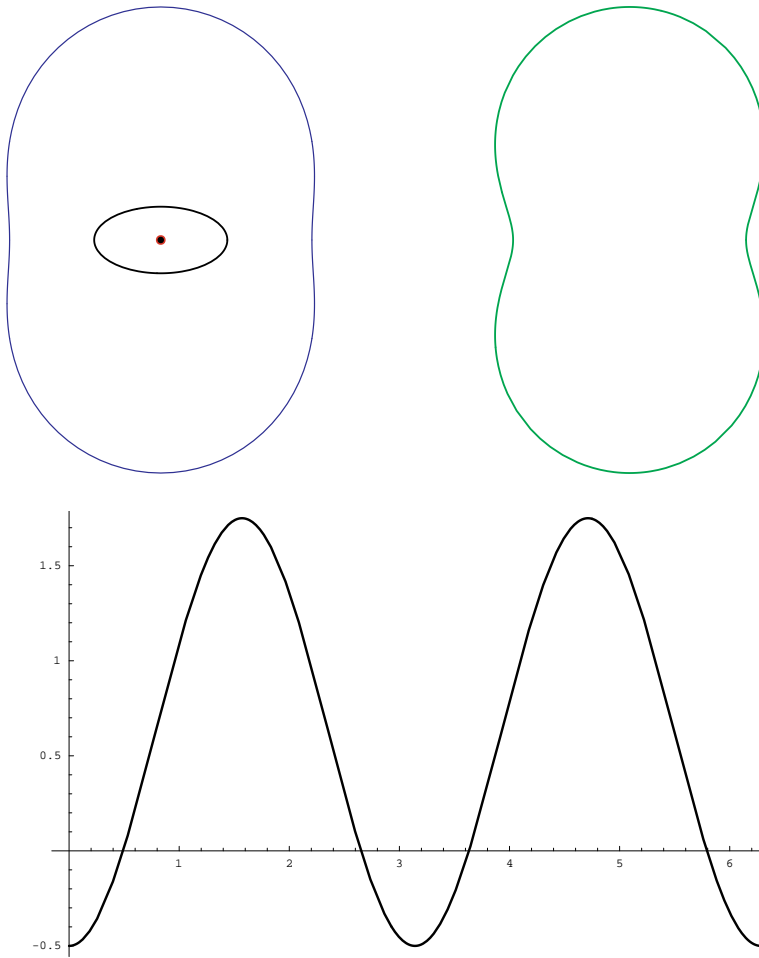


Abbildung 4.13: Ellipse mit $b = \frac{1}{2}$. Das Inversionszentrum $(0,0)$ liegt im Mittelpunkt der Ellipse, das (grün dargestellte) Inversionsbild der Ellipse ist nicht konvex, die Funktion d und damit auch die Krümmungsfunktion der Kurve $\iota \circ \xi$ wechselt ihr Vorzeichen.

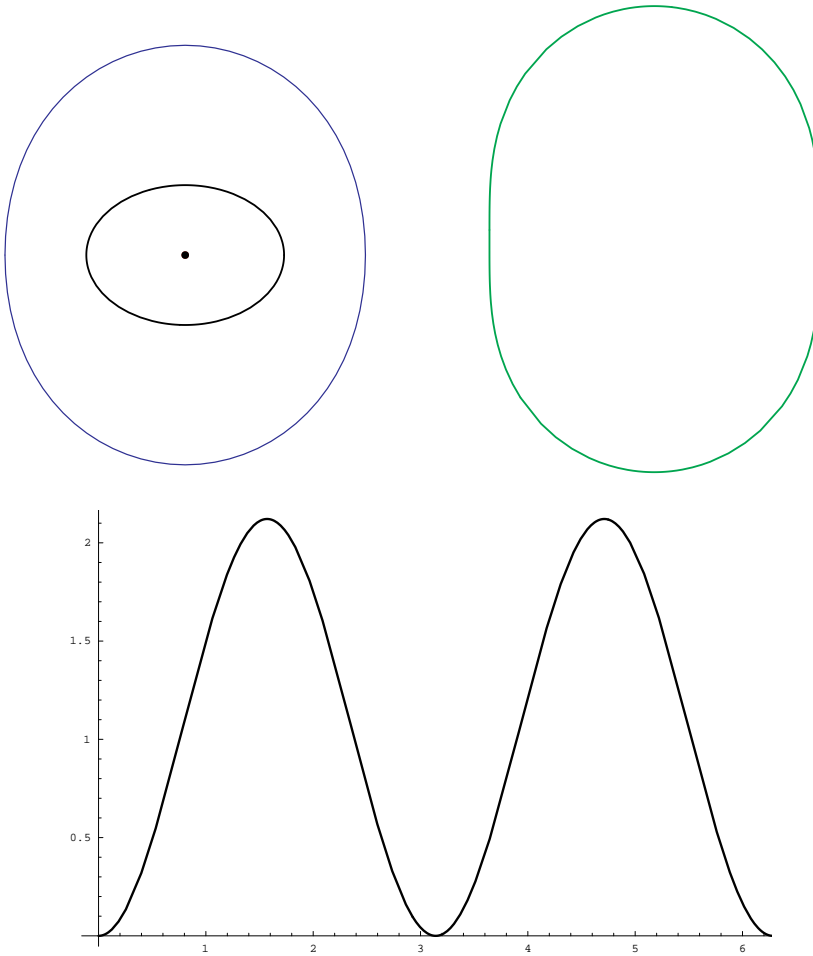


Abbildung 4.14: Ellipse mit $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d.h. $b^2 = \frac{1}{2}$. Das Inversionszentrum liegt auf dem Mittelpunkt der Ellipse. In diesem Grenzfall besitzt die Krümmungsfunktion Nullstellen, ohne ihr Vorzeichen zu wechseln, das (grün dargestellte) Inversionsbild der Ellipse ist konvex. Der tatsächliche Konvexitätsbereich \mathcal{U}' ist eine echte Obermenge von Ω' , vgl. die Bemerkung 4.3.17 e).

4.3.18 Bemerkung. Wie bereits in Bemerkung 4.3.17 (a) erwähnt, sind die in Proposition 4.3.10 angegebenen Bedingungen nicht in allen Fällen scharf. Zum Beispiel existieren Werte für b und Punkte auf der x -Achse, die *innerhalb* des Außengebietes $\Omega_{b,\text{ext}}$ liegen und für die das Inversionsbild der Ellipse (dennoch) konvex ist. Wir werden uns für den Fall $y = 0$ eine scharfe Beschreibung des Außengebietes verschaffen (vgl. Proposition 4.3.22). Dagegen ist für $y = 0$ und alle b mit $\frac{1}{2} \leq b^2 < 1$ die sich aus Proposition 4.3.10 (b) ergebende Bedingung für das Innengebiet $\Omega_{b,\text{int}}$ scharf, d.h. es gilt $\Omega_{b,\text{int}} \cup \mathbb{R} \times \{0\} = \mathcal{U}_{1,b,\text{int}} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$, wie in Proposition 4.3.21 ausgeführt wird.

4.3.19 Proposition. Für $(x, y) = (0, 0)$, d.h. für den Fall, dass der Ellipsenmittelpunkt und das Inversionszentrum zusammenfallen, ist das Inversionsbild der Ellipse dann konvex, wenn $b^2 \geq \frac{1}{2}$ gilt.

Beweis. Für $x = y = 0$ gilt

$$a_2 = 3b(1 - b^2), \quad a_1 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

und die Bedingung $2d(t) \neq 0$ ist äquivalent zu

$$b + b^3 - 3b(1 - b^2) \cos(2t) \neq 0,$$

$$\frac{1 + b^2}{3(1 - b^2)} \neq \cos(2t),$$

$$\frac{1 + b^2}{3(1 - b^2)} > 1,$$

d.h. für den Fall, dass der Ellipsenmittelpunkt im Inversionszentrum liegt, gilt $d(t) \neq 0$ genau dann, wenn $b^2 > \frac{1}{2}$. Dass das Inversionsbild der Ellipse auch im Grenzfall $b^2 = \frac{1}{2}$ konvex ist, wurde in Bemerkung 4.3.17 (e) diskutiert und in Abbildung 4.14 illustriert. \square

Wir stellen einige Fakten bereit, die in der Folge zur Untersuchung von $d(t)$ für den Fall $y = 0$ benötigt werden, vgl. Proposition 4.3.22.

4.3.20 Lemma. (a) Falls die Funktion

$$f_x: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(t) = 3x \cos t + 3 \cos(2t) + x \cos(3t)$$

ein lokales Extremum an der Stelle t annimmt, so gilt

$$t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\} \cup T$$

mit $T = \{t_s, 2\pi - t_s\}$, $t_s = \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$, falls $|x| \geq 1$, und $T = \emptyset$ sonst.

(b) Es ist $f_x(0) = 4x + 3$, $f_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$, $f_x(\pi) = -4x + 3$, $f_x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$, $f_x(t_s) = f(2\pi - t_s) = -3 + \frac{2}{x^2}$.

(c) Für $|x| < \frac{3}{2}$ gilt

$$\min \{f_x(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = -3,$$

und für $\frac{3}{2} < |x|$ ist

$$\min \{f_x(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = -4|x| + 3.$$

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max \{f_x(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = 4|x| + 3.$$

Beweis. (a) Notwendige Bedingung, dafür, dass die Funktion f_x an der Stelle t ein Extremum annimmt, ist

$$0 = f'_x(t) = -3(x \sin t + 2 \sin(2t) + x \sin(3t)).$$

Division durch -3 und trigonometrische Umformungen ergeben sukzessive

$$\begin{aligned} 0 &= x \sin t + 2(2 \sin t \cos t) + x(\sin(2t) \cos t + \cos(2t) \sin t), \\ &= \sin t(x + 4 \cos t) + x(2 \sin t \cos^2 t + \cos^2 t \sin t - \sin^3 t) \\ &= \sin t(x + 4 \cos t + x(3 \cos^2 t - \sin^2 t)) \\ &= \sin t(x + 4 \cos t + x(3 \cos^2 t - (1 - \cos^2 t))) \\ &= \sin t(x + 4 \cos t + x(4 \cos^2 t - 1)) \\ &= 4 \sin t \cos t(1 + x \cos t) \end{aligned}$$

Die Nullstellenmenge von f'_x umfasst also $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ und die Nullstellen von $1 + x \cos t$; letztere gibt es aber nur für den Fall, dass $|x| \geq 1$.

- (b) Es sei $|x| \geq 1$. Wir setzen $t_s := \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$. Zur Berechnung von $f_x(t_s)$ sind wiederum trigonometrische Umformungen nötig:

$$\begin{aligned} f_x(t) &= 3x \cos t + 3 \cos(2t) + x \cos(3t) \\ &= 3x \cos t + 3 \cos^2 t - 3 \sin^2 t \\ &\quad + x \cos(2t) \cos t - x \sin(2t) \sin t \\ &= 3x \cos t + 3 (\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &\quad + x \cos^3 t - x \sin^2 t \cos t - 2x \sin^2 t \cos t \\ &= 3x \cos t + 6 \cos^2 t - 3 \\ &\quad + x \cos^3 t - 3x \sin^2 t \cos t \\ &= 3x \cos t (1 - \sin^2 t) + 6 \cos^2 t - 3 + x \cos^3 t \\ &= 4x \cos^3 t + 6 \cos^2 t - 3 \end{aligned}$$

Damit ist

$$f_x(t_s) = 4x \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + 6 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 - 3 = \frac{2}{x^2} - 3$$

und wegen $\cos(2\pi - t_s) = -\frac{1}{x}$ folgt

$$f_x(2\pi - t_s) = f_x(t_s).$$

- (c) Das Minimum wird an einer der kritischen Stellen angenommen. Es gilt $-3 < \frac{2}{x^2} - 3$ für alle x , also scheidet $\frac{2}{x^2} - 3$ als Kandidat für das Minimum aus. Für $|x| < \frac{3}{2}$ ist

$$-3 < 4x + 3 < 9 \quad \text{sowie} \quad 9 > -4x + 3 > -3.$$

Daher ist für $|x| < \frac{3}{2}$ das Minimum von f_x gleich -3 .

Falls $|x| > \frac{3}{2}$, so ist $x > \frac{3}{2}$ oder $x < -\frac{3}{2}$. Im ersten Fall folgt

$$-4x + 3 < -3,$$

im zweiten Fall folgt

$$4x + 3 < -3.$$

In beiden Fällen gilt also

$$-4|x| + 3 < -3,$$

und das Minimum von f_x ist $-4|x| + 3$.

- (d) Der Wert -3 scheidet als Kandidat für ein Maximum von f_x aus. Wir untersuchen die Ausdrücke $4x + 3$ und $\frac{2}{x^2} - 3$ und beachten hierbei, dass der Ausdruck $\frac{2}{x^2} - 3$ nur für $|x| \geq 1$ als Extremalstelle in Frage kommt:

Falls $x > \frac{1}{2}$, so gilt $(x - \frac{1}{2}) > 0$, mithin

$$4 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 1)^2 > 0.$$

Sukzessive Umformungen ergeben

$$4 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 + 2x + 1) > 0$$

$$4x^3 + 6x^2 > 2,$$

$$4x + 6 > \frac{2}{x^2},$$

$$4x + 3 > \frac{2}{x^2} - 3,$$

$$4|x| + 3 > \frac{2}{x^2} - 3.$$

Falls $x < -\frac{1}{2}$, so gilt $(x + \frac{1}{2}) < 0$, damit

$$4 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 1)^2 < 0.$$

Damit folgen nacheinander

$$\begin{aligned} -4x^3 + 6x^2 &> 2, \\ -4x + 6 &> \frac{2}{x^2}, \\ 4|x| + 3 &> \frac{2}{x^2} - 3. \end{aligned}$$

Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ tritt t_s nach Teil (a) nicht als Extremalstelle auf, also ist das Maximum von f_x für alle x gleich $4x + 3$. \square

Wir kommen nun auf die am Ende von Bemerkung 4.3.18 getroffene Feststellung zurück.

4.3.21 Proposition. Für $y = 0$ ist die sich aus Proposition 4.3.10 (b) ergebende Bedingung

$$2b^3 - b > bx^2 + 2(1 - b^2)\sqrt{b^2x^2}$$

für das Innengebiet $\Omega_{b,\text{int}}$ scharf.

Beweis. Für $y = 0$ gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 3bx(1 - b^2), \quad a_2 = 3b(1 - b^2), \quad a_3 = bx(1 - b^2), \\ b_1 &= b_2 = b_3 = 0, \end{aligned}$$

d.h. $g(t) = b(1 - b^2)f_x(t)$ mit

$$f_x(t) = 3x \cos t + 3 \cos(2t) + x \cos(3t).$$

Aus $\max \{f_x(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = 4|x| + 3$ folgt, dass für alle x gilt

$$\begin{aligned} b + b^3 - 2bx^2 - b(1 - b^2)(3x \cos t + 3 \cos(2t) + x \cos(3t)) \\ \geq b + b^3 - 2bx^2 - b(1 - b^2)(4|x| + 3), \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck für $2d(t)$ in der oberen Zeile die in der unteren Zeile gegebene untere Schranke tatsächlich annimmt. Das bedeutet aber, dass $2d(t) > 0$ genau dann gilt, wenn $b + b^3 - 2bx^2 > 0$ und

$$b + b^3 - 2bx^2 - b(1 - b^2)(4|x| + 3) > 0.$$

Umformungen liefern sukzessive

$$\begin{aligned} -2b + 4b^3 &> 2bx^2 + 4|x|b(1 - b^2), \\ 2b^3 - b &> bx^2 + 2(1 - b^2)|x|, \\ 2b^3 - b &> bx^2 + 2(1 - b^2)\sqrt{b^2x^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Zur Behandlung des von Hilbert betrachteten Falles $b = \frac{1}{2}$, für den Hilbert die Konvexitätsfrage mit rein geometrischen Überlegungen erledigen konnte, benötigen wir die folgenden, das Außengebiet betreffenden Abschätzungen (vgl. Bemerkung 4.3.23).

4.3.22 Proposition. Für $y = 0$, $0 < b < 1$ und $|x| > \sqrt{2 - b^2}$ gilt mit der in Lemma 4.3.20 eingeführten Funktion f_x

- (a) $x^2 > \frac{1}{2}(1 + b^2)$ und daher $c = b + b^3 - 2bx^2 < 0$, wir befinden uns also im Außenbereich,
- (b) $2d(t) = b + b^3 - 2bx^2 - b(1 - b^2)f_x(t) < 0$.

Beweis. (a) Für $0 < b < 1$ ist $\frac{1}{2}(1 + b^2) < 1 < \sqrt{2 - b^2} < \sqrt{2}$. Also folgt aus $|x| > \sqrt{2 - b^2}$, dass $x^2 > 1 > \frac{1}{2}(1 + b^2)$ gilt.

- (b) Wir verwenden im Folgenden die in Lemma 4.3.20 zusammengestellten Abschätzungen. Für den Fall $\sqrt{2 - b^2} < x \leq \frac{3}{2}$ bemerken wir, dass diese Ungleichung wegen $\sqrt{2 - b^2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ eine nichtleere Lösungsmenge besitzt. Falls also x der Bedingung $\sqrt{2 - b^2} < x \leq \frac{3}{2}$ genügt, so ist

$$\min \{f_x(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = -3$$

und damit

$$\begin{aligned} 2d(t) &\leq b + b^3 - 2bx^2 + 3b(1 - b^2) \\ &= 2b(2 - b^2 - x^2) \\ &< 0, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $2 - b^2 - x^2 < 0$ gilt.

Wir zeigen nun, dass $2 d(t) < 0$ auch für den Fall $\frac{3}{2} < x$ gilt. In diesem Fall ist

$$\min \{f_x(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = -4x + 3 < -3.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \max(2 d(t)) &= b + b^3 - 2 b x^2 - b(1 - b^2)(-4x + 3) \\ &= -2 b x^2 + 4 x b(1 - b^2) + 4 b^3 - 2 b. \end{aligned}$$

Für $x > \frac{3}{2}$ ist $2 d(t) < 0$ also genau dann, wenn

$$x^2 - 2(1 - b^2)x + 1 - 2b^2 > 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$x > (1 - b^2) + \sqrt{(1 - b^2)^2 - 1 + 2b^2} = 1$$

oder

$$x < (1 - b^2) - \sqrt{(1 - b^2)^2 - 1 + 2b^2} = 1 - 2b^2,$$

d.h. wenn $x > 1$ oder $x < 1 - 2b^2$. Diese Bedingung ist wegen der Voraussetzung $x > \frac{3}{2}$ in jedem Fall erfüllt. Der Nachweis für $x < -\sqrt{2 - b^2}$ verläuft völlig analog. \square

4.3.23 Bemerkung. Durch Anwendung von Proposition 4.3.22 auf den Fall $b = \frac{1}{2}$ erhalten wir die in der Originalarbeit von Hilbert angegebene untere Schranke für den Abstand des auf der positiven x -Achse gelegenen Inversionszentrums vom Ursprung. Das Inversionsbild der Ellipse $t \mapsto (\cos t, \frac{1}{2} \sin t)$ ist in diesem Fall genau dann konvex, wenn für die Koordinaten (x_Z, y_Z) des Inversionszentrums die Bedingung

$$x \geq \sqrt{2 - b^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

erfüllt ist. Im Grenzfall $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ besitzt die Funktion d zwei isolierte Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel, das Inversionsbild der Ellipse ist daher auch in diesem Fall konvex. Abbildung 4.15 veranschaulicht diesen Fall.

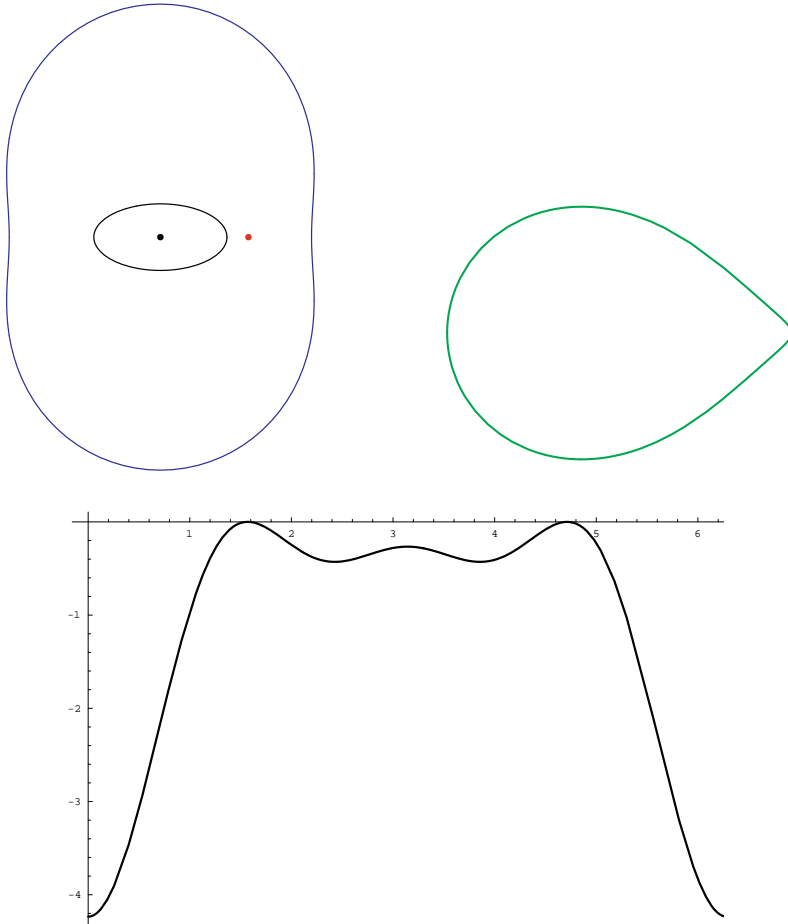


Abbildung 4.15: Ellipse mit $b = \frac{1}{2}$. Das (rot dargestellte) Inversionszentrum $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$ liegt innerhalb der blau dargestellten, den Außenbereich $\Omega'_{b,\text{ext}}$ berandenden Kurve und somit *nicht* in $\Omega'_b = \Omega'_{b,\text{ext}}$, das Inversionsbild der Ellipse ist jedoch konvex. Wie in der scharfen Abschätzung für den Fall $b = 0.5$ und $y = 0$ gezeigt, berandet der Punkt $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$ die Menge $\mathcal{U}_b \cap \mathbb{R}^+ \times \{0\}$.

4.3.24 Bemerkung. Wir haben die Konvexität der Inversionsbilder von Ellipsen bzw. der von diesen im Innern berandeten Menge bislang anhand der folgenden Spezialfälle diskutiert:

- Das Zentrum der Inversion liegt im Koordinatenursprung, für die Lage des Mittelpunktes der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ gibt es (hinreichende) Bedingungen, welche die Konvexität des Inversionsbildes gewährleisten.⁷
- Der Mittelpunkt der Ellipse liegt im Koordinatenursprung, die Bedingungen zur Gewährleistung der Konvexität des Inversionbildes schränken die möglichen Lagen des Inversionszentrums (x_Z, y_Z) ein.

Bei Betrachtung der definierenden Ungleichungen für $\Omega_{A,B}$ (vgl. Definition 4.3.3) wird jedoch klar, dass es bei gegebenen Werten für A und B lediglich auf die Abstände $|x_0 - x_Z|$ und $|y_0 - y_Z|$ ankommt.

Unter Berücksichtigung der vorstehenden Bemerkung fassen wir die bislang erzielten Ergebnisse zusammen.

4.3.25 Zusammenfassung. (a) Die in Definition 4.1.1 erklärte Inzidenzstruktur $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ ist genau dann ein linearer Raum und eine streng konvexe CD, wenn das Bild von D unter der Inversionsabbildung $\iota_{(x_Z, y_Z)}$ streng $\text{aff}_1\mathbb{R}^2$ -konvex ist.

(b) Dies gilt jedenfalls dann, wenn die Parameter (x_0, y_0) , A, B, und (x_Z, y_Z) eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
 & 0 < B \leq A \quad \text{und} \\
 & B \left((x_0 - x_Z)^2 + (y_0 - y_Z)^2 \right) \\
 & \quad - 2 \frac{A^2 - B^2}{A} \cdot \sqrt{B^2 (x_0 - x_Z)^2 + A^2 (y_0 - y_Z)^2} \\
 & > 2 A^2 B - B^3
 \end{aligned}$$

⁷ Vgl. Definition 4.3.3 und Proposition 4.3.6.

oder

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{2} &\leq B^2 \leq A^2 \quad \text{und} \\ B &((x_0 - x_Z)^2 + (y_0 - y_Z)^2) \\ &+ 2 \frac{A^2 - B^2}{A} \cdot \sqrt{B^2 (x_0 - x_Z)^2 + A^2 (y_0 - y_Z)^2} \\ &< 2B^3 - A^2 B. \end{aligned}$$

- (c) Dann kann die CD $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (x_Z, y_Z)]$ zur Konstruktion eines Hilbertschen Liniensystems (vgl. Definition 2.1.19) verwendet werden. Die resultierenden Inzidenzstrukturen sind nach Satz 2.1.12 affine \mathbb{R}^2 -Ebenen.

4.4 Kriterien für die Desargues-Eigenschaft

In diesem Abschnitt untersuchen wir, in welchen Fällen die affinen Ebenen Hilbertscher Bauart die Desargues-Eigenschaft besitzen. Wir wenden hierzu die in Kapitel 2 vorgestellten Kriterien für Desarguessche Hilbertsche Liniensysteme und die in Kapitel 3 bereitgestellten Werkzeuge aus der Projektiven Differentialgeometrie auf die Hilbert-Ebene an.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (vgl. Bemerkung 4.3.24) betrachten wir solche Ebenen von Hilbertscher Bauart, die durch Einkleben von CDs⁸ der Form $\mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (0, 0)]$ vermöge der Identität in die reelle affine Ebene entstehen. Hierbei induziert, wie gesehen, die Inversionsabbildung $\iota = \iota_{(0,0)}$ eine Einbettung der CD in die reelle affine Ebene. Mit Bezug auf die Bezeichnungen von Satz 2.2.3 und Abschnitt 4.2 gilt $\gamma = \text{id}$ und $\lambda = \iota$. Falls eine solche Hilbert-Ebene desarguessch ist, so existiert nach Satz 2.2.3 eine projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart, dass

$$(\mu \circ \pi)(p) = (\pi \circ \iota)(p) \quad \text{für alle } p \in \mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0) \text{ gilt.}$$

⁸ Vgl. Definition 4.1.1.

Wir betrachten im Folgenden stets die Parametrisierung

$$\xi := \xi_{A,B,x_0,y_0} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)$$

von $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ und die entsprechenden Parametrisierungen $\iota \circ \xi$ des Inversionsbildes und untersuchen, wann es eine projektive Abbildung μ derart gibt, dass

$$(\mu \circ \pi \circ \xi)(t) = (\pi \circ \iota \circ \xi)(t) \text{ für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Für die praktische Durchführung dieser Untersuchungen werden wir Satz 3.3.2 heranziehen. Indem wir die Parameter von $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ so wählen, dass die die Werte der Krümmungsfunktion von $\iota \circ \xi$ und damit die Werte der in Abschnitt 4.3 eingeführten Determinanten $D(t)$ für alle $t \in I$ von Null verschieden sind, stellen wir die strenge Konvexität der CD sicher.⁹ Wir stellen der weiteren Darstellung der Untersuchungen das Ergebnis voran.

4.4.1 Proposition. *Die Parameter der Ellipse $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ seien so gewählt, dass (x_0, y_0) in $\tilde{\mathcal{U}}_{A,B}$ liegt¹⁰ und die von $\mathcal{E}_{A,B}(x_0, y_0)$ berandete Inzidenzstruktur $\mathbb{D} := \mathbb{D}[(x_0, y_0), A, B, (0, 0)]$ somit eine streng konvexe CD ist. Das Hilbertsche Liniensystem $\mathbb{A}_{\text{id}}^{\mathbb{D}} := (\mathbb{R}^2, (\text{aff}_1 \mathbb{R}^2)_{\text{id}}^{\mathbb{D}})$ ist genau dann eine desarguessche affine Ebene, wenn $A = B$ gilt.*

Wir führen nun den längeren Beweis der Proposition durch.

Der Standardrepräsentant von $\mathcal{K}(\xi)$ ist

$$\Xi : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \Xi(t) = (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t, 1)^T$$

mit den Ableitungen

$$\Xi'(t) = (-A \sin t, B \cos t, 0)^T$$

$$\Xi''(t) = (-A \cos t, -B \sin t, 0)^T$$

$$\Xi'''(t) = (A \sin t, -B \cos t, 0)^T.$$

⁹ Vgl. Satz 3.1.14, Proposition 4.3.6 und Zusammenfassung 4.3.25.

¹⁰ Vgl. Definition 4.3.3.

Offensichtlich ist die Menge $\{\Xi(t), \Xi'(t), \Xi''(t)\}$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Die allgemeine (und zugleich spezielle) Grundgleichung ergibt sich zu

$$\Xi'''(t) = 0 \cdot \Xi(t) - 1 \cdot \Xi'(t) + 0 \cdot \Xi''(t),$$

mit der in Definition 3.2.14 eingeführten Notation gilt somit

$$\alpha_\xi = 0 \quad \text{und} \quad \beta_\xi = -1.$$

Zur Bestimmung der entsprechenden Koeffizientenfunktionen für die Parametrisierung $\theta := \iota \circ \xi$, des Inversionsbildes der Ellipse betrachten wir die Darstellung

$$\Theta: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \Theta(t) = \begin{pmatrix} x_0 + A \cos t \\ y_0 + B \sin t \\ (x_0 + A \cos t)^2 + (y_0 + B \sin t)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Koeffizientenfunktionen δ, η, ζ in der allgemeinen Grundgleichung

$$\Theta'''(t) = \delta(t)\Theta(t) + \eta(t)\Theta'(t) + \zeta(t)\Theta''(t)$$

durch Anwendung der Cramerschen Regel mit der Determinante

$$\begin{aligned} D(t) = & -A B x_0^2 \cos^2 t - A B y_0^2 \cos^2 t - 2 A^2 B x_0 \cos^3 t \\ & + 2 B^3 x_0 \cos^3 t - A^3 B \cos^4 t + 2 A B^3 \cos^4 t \\ & - A B x_0^2 \sin^2 t - A B y_0^2 \sin^2 t + A^3 B \cos^2 t \sin^2 t \\ & + A B^3 \cos^2 t \sin^2 t + 2 A^3 y_0 \sin^3 t \\ & - 2 A B^2 y_0 \sin^3 t + 2 A^3 B \sin^4 t - A B^3 \sin^4 t : \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} D(t) \cdot \delta(t) = & 6 A^3 B \cos^3 t \sin t - 6 A B^3 \cos^3 t \sin t \\ & + 6 A^3 B \cos t \sin^3 t - 6 A B^3 \cos t \sin^3 t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(t) \cdot \eta(t) = & A B x_0^2 \cos^2 t + A B y_0^2 \cos^2 t + 2 A^2 B x_0 \cos^3 t \\
 & - 2 B^3 x_0 \cos^3 t + A^3 B \cos^4 t - 2 A B^3 \cos^4 t \\
 & - 6 A^3 y_0 \cos^2 t \sin t + 6 A B^2 y_0 \cos^2 t \sin t \\
 & + A B x_0^2 \sin^2 t + A B y_0^2 \sin^2 t \\
 & + 6 A^2 B x_0 \cos t \sin^2 t - 6 B^3 x_0 \cos t \sin^2 t \\
 & - A^3 B \cos^2 t \sin^2 t - A B^3 \cos^2 t \sin^2 t \\
 & - 2 A^3 y_0 \sin^3 t + 2 A B^2 y_0 \sin^3 t \\
 & - 2 A^3 B \sin^4 t + A B^3 \sin^4 t
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 D(t) \cdot \zeta(t) = & 6 A^2 B x_0 \cos^2 t \sin t - 6 B^3 x_0 \cos^2 t \sin t \\
 & + 6 A^3 B \cos^3 t \sin t - 6 A B^3 \cos^3 t \sin t \\
 & + 6 A^3 y_0 \cos t \sin^2 t - 6 A B^2 y_0 \cos t \sin^2 t \\
 & + 6 A^3 B \cos t \sin^3 t - 6 A B^3 \cos t \sin^3 t.
 \end{aligned}$$

Mit $\rho(t) := \exp\left(-\frac{1}{3} \int_0^t \zeta(\tau) d\tau\right)$ und der Renormierung

$$\hat{\Theta}(t) := \rho(t) \Theta(t)$$

ergibt sich nach Lemma 3.2.16 die spezielle Grundgleichung.

$$\hat{\Theta}'''(t) = \hat{\delta}(t) \hat{\Theta}(t) + \hat{\eta}(t) \hat{\Theta}'(t) + \hat{\zeta}(t) \hat{\Theta}''(t) \quad \text{mit}$$

$$\hat{\delta}(t) = \frac{1}{27} (27 \delta(t) + 9 \eta(t) \zeta(t) + 2 \zeta^3(t) - 9 \zeta''(t)),$$

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{3} (3 \eta(t) + \zeta^2(t) - 3 \zeta'(t)),$$

$$\hat{\zeta}(t) \equiv 0.$$

Wir schreiben im Folgenden kurz c_0 für $c_0(A, B, x_0, y_0, t)$, a_i für $a_i(A, B, x_0, y_0)$, b_i für $b_i(A, B, x_0, y_0)$, \bar{a}_i für $\bar{a}_i(A, B, x_0, y_0)$ und \bar{b}_i für $\bar{b}_i(A, B, x_0, y_0)$. Ferner setzen wir $\alpha_\theta := \hat{\delta}$ sowie $\beta_\theta := \hat{\eta}$ im Anschluss an die in Definition 3.2.14 verwendete Notation.

4.4.2 Proposition. Für die spezielle Grundgleichung

$$\hat{\Theta}'''(t) = \alpha_{\theta}(t) \hat{\Theta}(t) + \beta_{\theta}(t) \hat{\Theta}'(t)$$

der ebenen Kurve $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta(t) = (\iota \circ \xi)(t)$ gilt

$$\alpha_{\theta}(t) = \frac{A^2 - B^2}{f(t)} \left(c_0 + \sum_{n=1}^7 (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right),$$

$$\beta_{\theta}(t) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \left(\bar{c}_0 + \sum_{n=1}^6 (\bar{a}_n \cos(nt) + \bar{b}_n \sin(nt)) \right)$$

mit folgenden Funktionen:

$$f(t) = (-2D(t))^3 = -8D^3(t),$$

$$c_0 = 336 A^2 B^2 (A^2 - B^2)^2 x_0 y_0,$$

$$\alpha_1 = 0 \text{ für } y_0 = 0 \text{ sowie}$$

$$\frac{\alpha_1}{3A(A^2 - B^2)y_0}$$

$$= -61B^4x_0^2 + 5A^4(11B^2 + y_0^2)$$

$$+ A^2B^2(-95B^2 + 101x_0^2 + 35y_0^2) \text{ für } y_0 \neq 0,$$

$$\alpha_2 = -72A^2B^2(A^2 - B^2)(A^2 + B^2 - 2(x_0^2 + y_0^2))x_0y_0,$$

$$\alpha_3 = -139A^7B^2y_0 + 322A^5B^4y_0 - 151A^3B^6y_0$$

$$- 51A^5B^2x_0^2y_0 - 6A^3B^4x_0^2y_0 - 7A^6B^6x_0^2y_0$$

$$+ 32A^3B^2x_0^4y_0 - 27A^7y_0^3 + 10A^5B^2y_0^3$$

$$- 47A^3B^4y_0^3 + 64A^3B^2x_0^2y_0^3 + 32A^3B^2y_0^5,$$

$$\alpha_4 = 144(-A^6B^2x_0y_0 + 2A^4B^4x_0y_0 - A^2B^6x_0y_0)$$

$$= 144(-A^6B^2 + 2A^4B^4 - A^2B^6)x_0y_0.$$

Ferner

$$\begin{aligned} \alpha_5 = & 3 A^7 B^2 y_0 + 6 A^5 B^4 y_0 - 9 A^3 B^6 y_0 \\ & - 57 A^5 B^2 x_0^2 y_0 + 102 A^3 B^4 x_0^2 y_0 - 45 A B^6 x_0^2 y_0 \\ & + 15 A^7 y_0^3 - 42 A^5 B^2 y_0^3 + 27 A^3 B^4 y_0^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 = & 8 A^6 B^2 x_0 y_0 - 8 A^2 B^6 x_0 y_0 - 16 A^4 B^2 x_0^3 y_0 \\ & + 16 A^2 B^4 x_0^3 y_0 - 16 A^4 B^2 x_0 y_0^3 + 16 A^2 B^4 x_0 y_0^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_7 = & 3 A^7 B^2 y_0 - 6 A^5 B^4 y_0 + 3 A^3 B^6 y_0 \\ & - 3 A^5 B^2 x_0^2 y_0 + 6 A^3 B^4 x_0^2 y_0 - 3 A B^6 x_0^2 y_0 \\ & - 3 A^7 y_0^3 + 6 A^5 B^2 y_0^3 - 3 A^3 B^4 y_0^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 = & 285 A^6 B^3 x_0 - 450 A^4 B^5 x_0 + 165 A^2 B^7 x_0 \\ & - 105 A^4 B^3 x_0^3 + 90 A^2 B^5 x_0^3 + 15 B^7 x_0^3 \\ & + 183 A^6 B x_0 y_0^2 - 486 A^4 B^3 x_0 y_0^2 + 303 A^2 B^5 x_0 y_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 = & 111 A^7 B^3 - 270 A^5 B^5 + 111 A^3 B^7 + 219 A^5 B^3 x_0^2 \\ & - 246 A^3 B^5 x_0^2 + 123 A B^7 x_0^2 - 96 A^3 B^3 x_0^4 \\ & + 48 A B^5 x_0^4 + 123 A^7 B y_0^2 - 246 A^5 B^3 y_0^2 \\ & + 219 A^3 B^5 y_0^2 + 48 A^5 B x_0^2 y_0^2 - 192 A^3 B^3 x_0^2 y_0^2 \\ & + 48 A B^5 x_0^2 y_0^2 + 48 A^5 B y_0^4 - 96 A^3 B^3 y_0^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 = & 151 A^6 B^3 x_0 - 322 A^4 B^5 x_0 + 139 A^2 B^7 x_0 \\ & + 47 A^4 B^3 x_0^3 - 10 A^2 B^5 x_0^3 + 27 B^7 x_0^3 \\ & - 32 A^2 B^3 x_0^5 + 7 A^6 B x_0 y_0^2 + 6 A^4 B^3 x_0 y_0^2 \\ & + 51 A^2 B^5 x_0 y_0^2 - 64 A^2 B^3 x_0^3 y_0^2 - 32 A^2 B^3 x_0 y_0^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 = & 84 A^5 B^3 x_0^2 - 156 A^3 B^5 x_0^2 + 72 A B^7 x_0^2 - 12 A^3 B^3 x_0^4 \\ & + 12 A B^5 x_0^4 - 72 A^7 B y_0^2 + 156 A^5 B^3 y_0^2 - 84 A^3 B^5 y_0^2 \\ & - 12 A^5 B x_0^2 y_0^2 + 12 A B^5 x_0^2 y_0^2 - 12 A^5 B y_0^4 + 12 A^3 B^3 y_0^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5 = & -9 A^6 B^3 x_0 + 6 A^4 B^5 x_0 + 3 A^2 B^7 x_0 \\ & + 27 A^4 B^3 x_0^3 - 42 A^2 B^5 x_0^3 + 15 B^7 x_0^3 \\ & - 45 A^6 B x_0 y_0^2 + 102 A^4 B^3 x_0 y_0^2 - 57 A^2 B^5 x_0 y_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_6 &= -5 A^7 B^3 + 10 A^5 B^5 - 5 A^3 B^7 - A^5 B^3 x_0^2 \\
 &\quad - 6 A^3 B^5 x_0^2 + 7 A B^7 x_0^2 + 8 A^3 B^3 x_0^4 - 8 A B^5 x_0^4 \\
 &\quad + 7 A^7 B y_0^2 - 6 A^5 B^3 y_0^2 - A^3 B^5 y_0^2 - 8 A^5 B x_0^2 y_0^2 \\
 &\quad + 16 A^3 B^3 x_0^2 y_0^2 - 8 A B^5 x_0^2 y_0^2 - 8 A^5 B y_0^4 + 8 A^3 B^3 y_0^4, \\
 b_7 &= -3 A^6 B^3 x_0 + 6 A^4 B^5 x_0 - 3 A^2 B^7 x_0 \\
 &\quad + 3 A^4 B^3 x_0^3 - 6 A^2 B^5 x_0^3 + 3 B^7 x_0^3 \\
 &\quad + 3 A^6 B x_0 y_0^2 - 6 A^4 B^3 x_0 y_0^2 + 3 A^2 B^5 x_0 y_0^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(t) &= 8 D^2(t) \\
 &= 2 (A^3 B + A B^3 - 2 A B x_0^2 - 2 A B y_0^2 \\
 &\quad + 3 B (-A^2 + B^2) x_0 \cos(t) - 3 A B (A^2 - B^2) \cos(2t) \\
 &\quad - A^2 B x_0 \cos(3t) + B^3 x_0 \cos(3t) + 3 A^3 y_0 \sin(t) \\
 &\quad - 3 A B^2 y_0 \sin(t) - A^3 y_0 \sin(3t) + A B^2 y_0 \sin(3t))^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_0 &= 73 A^6 B^2 - 154 A^4 B^4 + 73 A^2 B^6 + 34 A^4 B^2 x_0^2 - 44 A^2 B^4 x_0^2 \\
 &\quad + 26 B^6 x_0^2 - 8 A^2 B^2 x_0^4 + 26 A^6 y_0^2 - 44 A^4 B^2 y_0^2 \\
 &\quad + 34 A^2 B^4 y_0^2 - 16 A^2 B^2 x_0^2 y_0^2 - 8 A^2 B^2 y_0^4;
 \end{aligned}$$

$$\bar{a}_1 = 24 A B^2 (A^2 - B^2) x_0 \cdot (7 A^2 - 6 B^2 - x_0^2 - y_0^2),$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_2 &= 3 (A^2 - B^2) \\
 &\quad \cdot [11 B^4 x_0^2 + A^4 (4 B^2 + 11 y_0^2) + A^2 B^2 (4 B^2 - 19 (x_0^2 + y_0^2))],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_3 &= -50 A^5 B^2 x_0 + 60 A^3 B^4 x_0 - 10 A B^6 x_0 \\
 &\quad + 40 A^3 B^2 x_0^3 - 40 A B^4 x_0^3 \\
 &\quad + 40 A^3 B^2 x_0 y_0^2 - 40 A B^4 x_0 y_0^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_4 &= -21 A^6 B^2 + 42 A^4 B^4 - 21 A^2 B^6 + 6 A^4 B^2 x_0^2 \\
 &\quad - 12 A^2 B^4 x_0^2 + 6 B^6 x_0^2 + 6 A^6 y_0^2 - 12 A^4 B^2 y_0^2 + 6 A^2 B^4 y_0^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_5 &= -6 A^5 B^2 x_0 + 12 A^3 B^4 x_0 - 6 A B^6 x_0 \\
 &= -6 A B^2 (A^2 - B^2)^2 x_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_6 &= -A^4 B^2 x_0^2 + 2A^2 B^4 x_0^2 - B^6 x_0^2 + A^6 y_0^2 \\ &\quad - 2A^4 B^2 y_0^2 + A^2 B^4 y_0^2 = (A^2 - B^2)^2 (A^2 y_0^2 - B^2 x_0^2); \\ \bar{b}_1 &= 144 A^6 B y_0 - 312 A^4 B^3 y_0 + 168 A^2 B^5 y_0 + 24 A^4 B x_0^2 y_0 \\ &\quad - 24 A^2 B^3 x_0^2 y_0 + 24 A^4 B y_0^3 - 24 A^2 B^3 y_0^3, \\ \bar{b}_2 &= 150 A^5 B x_0 y_0 - 300 A^3 B^3 x_0 y_0 + 150 A B^5 x_0 y_0, \\ \bar{b}_3 &= 10 A^6 B y_0 - 60 A^4 B^3 y_0 + 50 A^2 B^5 y_0 + 40 A^4 B x_0^2 y_0 \\ &\quad - 40 A^2 B^3 x_0^2 y_0 + 40 A^4 B y_0^3 - 40 A^2 B^3 y_0^3, \\ \bar{b}_4 &= 0, \\ \bar{b}_5 &= -6 A^6 B y_0 + 12 A^4 B^3 y_0 - 6 A^2 B^5 y_0 \\ &\quad = -6 A^2 B (A^2 - B^2)^2 y_0, \\ \bar{b}_6 &= -2 A^5 B x_0 y_0 + 4 A^3 B^3 x_0 y_0 - 2 A B^5 x_0 y_0 \\ &\quad = -2 A B (A^2 - B^2)^2 x_0 y_0. \end{aligned}$$

Beweis. Der rein rechnerische Beweis erfordert es, Ausdrücke von erheblichem Umfang zu bearbeiten und umzuformen. Wir haben zu diesem Zweck die Computeralgebra-Software *Mathematica* [62] verwendet. \square

Für spätere Zwecke stellen wir fest, dass sich $-\bar{f}$ als abbrechende Fourierreihe darstellen lässt:

$$-\bar{f}(t) = c'_0 + \sum_{n=1}^6 (a'_n \cos(n t) + b'_n \sin(n t)).$$

Die Fourierkoeffizienten berechnen¹¹ sich mittels

$$\begin{aligned} a'_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cos(n t) dt, \quad b'_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \sin(n t) dt \text{ sowie} \\ c'_0 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) dt: \end{aligned}$$

¹¹ Auch diese Routineberechnungen wurden mit Hilfe von *Mathematica* ausgeführt.

$$c'_0 = -11 A^6 B^2 + 14 A^4 B^4 - 11 A^2 B^6 - 2 A^4 B^2 x_0^2 + 28 A^2 B^4 x_0^2 \\ - 10 B^6 x_0^2 - 8 A^2 B^2 x_0^4 - 10 A^6 y_0^2 + 28 A^4 B^2 y_0^2 \\ - 2 A^2 B^4 y_0^2 - 16 A^2 B^2 x_0^2 y_0^2 - 8 A^2 B^2 y_0^4;$$

$$a'_1 = -12 A B^2 (A^2 - B^2) x_0 (A^2 - 3 B^2 + 2 (x_0^2 + y_0^2)),$$

$$a'_2 = 3 (A^2 - B^2)$$

$$\cdot [5 B^4 x_0^2 + A^4 (4 B^2 + 5 y_0^2) + A^2 B^2 (4 B^2 - 13 (x_0^2 + y_0^2))],$$

$$a'_3 = -2 A B^2 (A^2 - B^2) x_0 (7 A^2 - 11 B^2 + 4 (x_0^2 + y_0^2)),$$

$$a'_4 = -3 (A^2 - B^2)^2 (2 B^2 x_0^2 + A^2 (3 B^2 + 2 y_0^2)),$$

$$a'_5 = -6 A B^2 (A^2 - B^2)^2 x_0 = \bar{a}_5,$$

$$a'_6 = (A^2 - B^2)^2 (A^2 y_0^2 - B^2 x_0^2) = \bar{a}_6;$$

$$b'_1 = -12 A^2 B (A^2 - B^2) y_0 (3 A^2 - B^2 - 2 (x_0^2 + y_0^2)),$$

$$b'_2 = 6 A B (A^2 - B^2)^2 x_0 y_0,$$

$$b'_3 = 2 A^2 B (A^2 - B^2) y_0 (11 A^2 - 7 B^2 - 4 (x_0^2 + y_0^2)),$$

$$b'_4 = 0,$$

$$b'_5 = -6 A^2 B (A^2 - B^2)^2 y_0 = \bar{b}_5,$$

$$b'_6 = -2 A B (A^2 - B^2)^2 x_0 y_0 = \bar{b}_6.$$

4.4.3 Proposition. *Es sei $A \geq B > 0$ und es sei $(x_0, y_0) \in \tilde{U}_{A,B}$. Dann gelten mit den Bezeichnungen von Proposition 4.4.2 die folgenden Aussagen:*

- (a) *Für alle $t \in I$ gilt $D(t) \neq 0$ und somit $f(t) \neq 0$ sowie $\bar{f}(t) \neq 0$.*
- (b) *Für $A = B$ gilt $\alpha_\theta = 0$ und $\beta_\theta = -1$.*
- (c) *Für $A > B > 0$ gilt $\alpha_\theta \neq 0$ jedenfalls dann, wenn die Ungleichungen $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$ erfüllt sind.*
- (d) *Für $A > B$ gilt $\beta_\theta \neq -1$ jedenfalls dann, wenn entweder $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ oder $(x_0, y_0) = (0, 0)$ erfüllt ist.*

Beweis. (a) folgt direkt aus Proposition 4.4.2.

(b) Im Falle $A = B$ folgt wegen des Faktors $(A^2 - B^2)$ im Ausdruck für $\alpha_\theta(t)$ sofort, dass $\alpha_\theta(t) \equiv 0$ gilt. Um zu zeigen, dass β_θ im Falle $A = B$ den konstanten Wert -1 annimmt, berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_0 &= 73 A^8 - 154 A^8 + 73 A^8 + 34 A^6 x_0^2 - 44 A^6 x_0^2 \\
 &\quad + 26 A^6 x_0^2 - 8 A^4 x_0^4 + 26 A^6 y_0^2 - 44 A^6 y_0^2 \\
 &\quad + 34 A^6 y_0^2 - 16 A^4 x_0^2 y_0^2 - 8 A^4 y_0^4 \\
 &= -8 A^8 + 16 A^6 x_0^2 - 8 A^4 x_0^4 + 16 A^6 y_0^2 - 16 A^4 x_0^2 y_0^2 - 8 A^4 y_0^4 \\
 &= 8 A^4 (-A^4 + 2A^2 x_0^2 - x_0^4 + 2A^2 y_0^2 - 2x_0^2 y_0^2 - y_0^4) \\
 &= 8 A^4 \left(-(A^2 - x_0^2)^2 + 2A^2 y_0^2 - 2x_0^2 y_0^2 - y_0^4 \right) \\
 &= 8 A^4 \left(-(A^2 - x_0^2)^2 + 2(A^2 - x_0^2) y_0^2 - y_0^4 \right) \\
 &= -8 A^4 \left((A^2 - x_0^2)^2 - 2(A^2 - x_0^2) y_0^2 + y_0^4 \right) \\
 &= -8 A^4 \left((A^2 - x_0^2) - y_0^2 \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(t) &= 2 (A^4 + A^4 - 2A^2 x_0^2 - 2A^2 y_0^2 \\
 &\quad + 3A (-A^2 + A^2) x_0 \cos(t) - 3A^2 (A^2 - A^2) \cos(2t) \\
 &\quad - A^3 x_0 \cos(3t) + A^3 x_0 \cos(3t) + 3A^3 y_0 \sin(t) \\
 &\quad - 3A^3 y_0 \sin(t) - A^3 y_0 \sin(3t) + A^3 y_0 \sin(3t))^2 \\
 &= 2 (2A^2 (A^2 - x_0^2 - y_0^2))^2 \\
 &= 8 A^4 (A^2 - x_0^2 - y_0^2)^2
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_1 &= \bar{a}_2 = \bar{a}_3 = \bar{a}_4 = \bar{a}_5 = \bar{a}_6 = 0, \\
 \bar{b}_1 &= \bar{b}_2 = \bar{b}_3 = \bar{b}_4 = \bar{b}_5 = \bar{b}_6 = 0.
 \end{aligned}$$

Aus Proposition 4.4.2 folgt nun die Identität $\beta_\theta = -1$.

(c) Es seien A, B mit $A > B > 0$ gegeben. Angenommen, es gilt

$$\alpha_\theta(t) = c_0 + \sum_1^7 (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \equiv 0.$$

Dann folgen aus der linearen Unabhängigkeit der Menge

$$\{1, \cos t, \cos(2t), \dots, \cos(7t), \sin t, \sin(2t), \dots, \sin(7t)\},$$

die Identitäten $a_n = b_n = 0$ für alle n mit $1 \leq n \leq 7$ sowie

$$c_0 = 336 A^2 B^2 (A^2 - B^2)^2 x_0 y_0 = 0.$$

Falls nun $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$ gilt, so folgt $A = B$, im Widerspruch zur Voraussetzung $A > B$. Also kann $\alpha_\theta = 0$ im Falle $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$ nicht gelten.

(d) Es seien A, B mit $A > B > 0$ gegeben. Angenommen, es sei

$$\beta_\theta(t) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \left(\bar{c}_0 + \sum_1^6 (\bar{a}_n \cos(nt) + \bar{b}_n \sin(nt)) \right) \equiv -1,$$

$$\text{d.h. } \bar{c}_0 + \sum_1^6 (\bar{a}_n \cos(nt) + \bar{b}_n \sin(nt)) \equiv -\bar{f}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{und somit } \bar{c}_0 + \sum_1^6 (\bar{a}_n \cos(nt) + \bar{b}_n \sin(nt)) \\ \equiv c'_0 + \sum_1^6 (a'_n \cos(nt) + b'_n \sin(nt)). \end{aligned}$$

Dann folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen

$$\{1, \cos t, \cos(2t), \dots, \cos(6t), \sin t, \sin(2t), \dots, \sin(6t)\},$$

dass $\bar{a}_n = a'_n$ und $\bar{b}_n = b'_n$ für alle n mit $1 \leq n \leq 6$ sowie $\bar{c}_0 = c'_0$ gilt. Wir unterscheiden drei Fälle:

Im Falle $x_0 = y_0 = 0$ folgt aus $\bar{c}_0 = c'_0$ die Identität

$$\begin{aligned} & 73 A^6 B^2 - 154 A^4 B^4 + 73 A^2 B^6 \\ &= -11 A^6 B^2 + 14 A^4 B^4 - 11 A^2 B^6, \end{aligned}$$

bzw.

$$84 A^6 B^2 - 168 A^4 B^4 + 84 A^2 B^6 = 0.$$

Nach Division durch $84 A^2 B^2$ ergibt sich $(A^2 - B^2)^2 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $A > B > 0$.

Für $x_0 = 0, y \neq 0$ folgt aus $\bar{a}_2 = a'_2$, dass

$$\begin{aligned} & A^4 (4 B^2 + 11 y_0^2) + A^2 B^2 (4 B^2 - 19 y_0^2) \\ &= A^4 (4 B^2 + 5 y_0^2) + A^2 B^2 (4 B^2 - 13 y_0^2) \end{aligned}$$

und aus $\bar{a}_4 = a'_4$, dass

$$\begin{aligned} & -21 A^6 B^2 + 42 A^4 B^4 - 21 A^2 B^6 \\ &+ 6 A^6 y_0^2 - 12 A^4 B^2 y_0^2 + 6 A^2 B^4 y_0^2 \\ &= -3 (A^2 - B^2)^2 (A^2 (3 B^2 + 2 y_0^2)) \end{aligned}$$

gilt. Nach Subtraktion der beiden Gleichungen und kurzer Rechnung ergibt sich

$$A^2 (A^2 - B^2)^2 (y_0^2 - B^2) = 0.$$

Wegen $A > B > 0$ folgt daraus $|y_0| = B$. Damit und wegen der Voraussetzung $x_0 = 0$ verläuft die Ellipse durch den Ursprung, im Widerspruch zur Voraussetzung $(x_0, y_0) \in \text{m}\ddot{h}\text{o}_{A,B}$, vgl.

Schließlich folgt für $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ aus $\bar{a}_1 = a'_1$, dass

$$2 (7 A^2 - 6 B^2 - x_0^2) = - (A^2 - 3 B^2 + 2 x_0^2),$$

d.h. $15 A^2 - 15 B^2 = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $A > B > 0$.

Damit ist gezeigt, dass in den genannten Fällen $\beta_\theta \neq -1$ gilt. □

Wir merken an, dass das eben erhaltene Resultat, das auf der linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit bestimmter Mengen reellwertiger Funktionen basiert, nicht nur für diejenigen Fälle gilt, in denen die Krümmungsfunktion von $\iota \circ \xi$ ausschließlich von Null verschiedene Werte annimmt, sondern auch für diejenigen Lagen der Ellipse relativ zum Inversionszentrum, in denen die Krümmung isolierte Nullstellen (mit oder ohne Vorzeichenwechsel) besitzt.

4.4.4 Korollar. (a) Für die Koeffizientenfunktionen α_ξ , α_θ , β_ξ und β_θ der speziellen Grundgleichungen von

$$\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \xi(t) = (x_0 + A \cos t, y_0 + B \sin t)$$

und $\theta = \iota \circ \xi$ gilt genau dann

$$\alpha_\xi = \alpha_\theta \quad \text{und} \quad \beta_\xi = \beta_\theta,$$

wenn $A = B$ und $x_0^2 + y_0^2 \neq A^2$ ist.

(b) Nach Satz 3.3.2 existiert genau für diesen Fall eine projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ derart, dass

$$(\mu \circ \pi \circ \xi)(t) = (\pi \circ \iota \circ \xi)(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

(c) Mit den Sätzen 2.2.3 und 2.2.4 folgt, dass die Hilbertsche Ebene genau dann desarguessch ist, wenn $A = B$ ist, d.h. wenn der Rand der CD ein Kreis ist.

4.5 Der desarguessche Spezialfall

Wir betrachten nun den Fall, in dem die berandende Ellipse ein Kreis K mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius $R \neq \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ist. In diesem Fall bildet die Inversion den Kreis K nach Lemma 4.2.2 auf den Kreis $C = \iota(K)$ mit Mittelpunkt $\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2}\right)$ und

Radius $\rho = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2}}$ ab, die Kreisbögen des Liniensystems innerhalb des berandenden Kreises werden auf Geradensegmente innerhalb C abgebildet. In diesem Fall existiert eine projektive Abbildung, die auf K mit ι (punktweise) übereinstimmt. Zur präzisen Formulierung verwenden wir die die Standardeinbettung π der reellen affinen in die reelle projektive Ebene induzierende Abbildung¹²

$$\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{u}_1\mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \langle (x, y, 1) \rangle$$

sowie die Abkürzung $\rho_0 := \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

4.5.1 Satz. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0) , und es gelte $\rho_0 \neq R$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte projektive Abbildung $\mu \in \text{PGL}_3\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$(\mu \circ \pi)(p) = (\pi \circ \iota)(p) \text{ für alle } p \in K.$$

Die Matrixdarstellungen von μ bezüglich der Standardbasis sind genau die Elemente von $\{rM \mid r \in \mathbb{R}^\}$ mit*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & R^2 - \rho_0^2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Bedingung

$$(\mu \circ \pi)(p) = (\pi \circ \iota)(p)$$

für alle $p \in K$ erfüllt ist. Hierzu betrachten wir eine Parametrisierung von K :

$$\xi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \xi(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t).$$

¹² Vgl. Lemma 1.1.58.

Wir bezeichnen den Standarderzeuger (die projektive Standarddarstellung) von $(\pi \circ \xi)(t)$ mit $\Xi(t)$, d.h.

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cos t \\ y_0 + R \sin t \\ 1 \end{pmatrix},$$

und den Standarderzeuger von $(\pi \circ \iota \circ \xi)(t)$ mit $\Theta(t)$, d.h.

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} \frac{x_0 + R \cos t}{(x_0 + R \cos t)^2 + (y_0 + R \cos t)^2} \\ \frac{y_0 + R \sin t}{(x_0 + R \cos t)^2 + (y_0 + R \cos t)^2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es genügt zu zeigen, dass zu jedem $t \in [0, 2\pi]$ eine Zahl $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ derart existiert, dass $M\Xi(t) = \lambda(t)\Theta(t)$ gilt, denn dann folgt $\langle M\Xi(t) \rangle = \langle \Theta(t) \rangle$ und damit $(\mu \circ \pi \circ \xi)(t) = (\pi \circ \iota \circ \xi)(t)$.

Mit

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 2x_0(x_0 + R \cos t) + 2y_0(y_0 + R \sin t) + R^2 - \rho_0^2 \\ &= (x_0 + R \cos t)^2 + (y_0 + R \sin t)^2 \end{aligned}$$

gilt in der Tat

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & R^2 - \rho_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + R \cos t \\ y_0 + R \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(t) \begin{pmatrix} \frac{x_0 + R \cos t}{(x_0 + R \cos t)^2 + (y_0 + R \cos t)^2} \\ \frac{y_0 + R \sin t}{(x_0 + R \cos t)^2 + (y_0 + R \cos t)^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

4.5.2 Bemerkung. Wird bei der Konstruktion einer Hilbert-Ebene als Berandung der CD ein Kreis K mit Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0) derart gewählt, dass $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq R$ gilt, so ist das resultierende Hilbertsche Liniensystem $\mathbb{A}_{\text{id}}^{\mathbb{D}}$ nach Definition 4.3.3, Proposition 4.3.6, Proposition 4.4.1 und Satz 2.2.4 isomorph zur reellen affinen Ebene und besitzt somit die Desargues-Eigenschaft.

Der Isomorphismus wird auf die in Satz 2.2.4 dargestellte Weise vermittelt. Wir beschreiben diesen Isomorphismus aus anschaulichem (affinem) Blickwinkel: Für jede (gewöhnliche) Gerade g , die mit K zwei Schnittpunkte p und q gemein hat, ist ein Kreisbogen im Innern von K festgelegt. Durch die Inversionsabbildung wird dieser Kreisbogen auf ein Geradensegment abgebildet. Die Inversionsbilder $p' := \iota(p)$ und $q' := \iota(q)$ dieser Schnittpunkte liegen nun einerseits auf dem Geradensegment $p'q'$ im Innern des Bildkreises $\iota(K)$, andererseits gilt $\iota(p) = \mu'(p)$ und $\iota(q) = \mu'(q)$, wobei μ' die affine Einschränkung der oben angegebenen projektiven Abbildung μ bezeichnen soll. Damit liegen $\iota(p)$ und $\iota(q)$ auch auf der affinen Geraden $\mu'(g)$, und es gilt $p'q' \subset \mu'(g)$. Es folgt, dass das gesamte Geradensystem von $\mathbb{A}_{\text{id}}^{\mathbb{D}}$ bijektiv auf das Geradensystem der reellen affinen Ebene abgebildet wird.

Wir wollen den Gedankengang zur Auffindung von μ kurz skizzieren. Eine projektive Abbildung μ mit der Eigenschaft

$$(\mu \circ \pi)(p) = (\pi \circ \iota)(p) \text{ für alle } p \in K$$

besitzt ein Zentrum $\pi(0,0)$, wie man durch Betrachtung dreier durch K verlaufender Geraden zeigen kann, und folglich nach Satz 1.1.62 auch eine Achse, d.h. eine Fixpunktgerade. Diese Fixpunktgerade lässt sich (außer im Fall $\rho_0 = 0$, vgl. die Bemerkungen 4.5.3) aus den (im Allgemeinen komplexen) Schnittpunkten des Inversionskreises mit K berechnen, denn diese Punkte sind Fixpunkte der Inversion und damit Fixpunkte der Komposition mit (der komplexen Fortsetzung von) π , nach Voraussetzung sind sie daher auch Fixpunkte der Kollineation μ . Der Schnitt \mathcal{A} der (komplexen) Verbindungsgerade dieser Schnittpunkte mit der reellen Ebene ist demnach Fixgerade. Die affine Geradengleichung ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{4.3}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{4.4}$$

zu

$$2x_0x + 2y_0y + R^2 - \rho_0^2 - 1 = 0.$$

In den Fällen, in denen sich der Inversionskreis und der Kreis K berühren, ist die Fixgerade die gemeinsame Tangente der beiden Kreise am Berührungspunkt. In Bemerkung 4.5.3 (b) wird explizit ausgeführt, dass diese Fixgerade stets Fixpunktgerade und damit die Achse \mathcal{A} von μ ist. Eine Zentralkollineation ist durch das Zentrum, die Achse sowie ein weiteres Punkt-Bildpunkt-Paar eindeutig bestimmt. Zur Bestimmung der Abbildung μ wählt man etwa das Paar $(\pi(p), (\pi \circ \iota)(p))$ mit $p = \left(1 + \frac{R}{\rho}\right)(x_0, y_0)$. In den folgenden Bemerkungen interpretieren wir die Abbildung μ für eine Reihe von Spezialfällen.

4.5.3 Bemerkungen. (a) Für $\rho_0 = 0$, d.h. $x_0 = y_0 = 0$ ist μ eine zentrische Streckung, deren Achse die Ferngerade $\text{Ker}(0, 0, 1)$ ist.

(b) Für $\rho_0 \neq 0$ ist die Gerade $\mathcal{A} := \text{Ker}(2x_0, 2y_0, R^2 - \rho_0^2 - 1)$ die Achse der Zentralkollineation. Es ist leicht zu sehen, dass die Linearform $(2x_0, 2y_0, R^2 - \rho_0^2 - 1)$ invariant unter der durch $\mu^*: \lambda \mapsto \lambda M$ gegebenen Abbildung ist. Also ist \mathcal{A} Fixgerade. Für die Fälle, in denen \mathcal{A} das Zentrum nicht trifft, ist hierdurch bereits klar, dass \mathcal{A} Fixpunktgerade und damit Achse von μ ist. Wir wollen dies durch explizite Rechnung (auch für die Fälle mit $R^2 - \rho_0^2 - 1 = 0$) nachweisen und setzen hierzu $\gamma := R^2 - \rho_0^2 - 1$. Die Punkte P von \mathcal{A} sind Vielfache von Vektoren der Form

$$v_P = s \begin{pmatrix} -2y_0 \\ 2x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 2x_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$2x_0(-2sy_0 - t\gamma) + 2y_0(2sx_0) + (R^2 - \rho_0^2)2tx_0 = 2tx_0.$$

gilt

$$M v_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & R^2 - \rho_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2s y_0 - t\gamma \\ 2s x_0 \\ 2t x_0 \end{pmatrix} = v_P.$$

Daher ist $\mu(P) = P$ für alle Punkte der Achse.

- (c) Für $\rho_0 \neq 0$ und $R^2 - \rho_0^2 - 1 = 0$ hat die Matrix M die Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Achse von μ verläuft in diesem Fall durch das Zentrum $\pi(0,0)$. Obwohl die Menge $\iota(K)$ in diesem Fall gleich dem Spiegelbild von K ist (vgl. Bemerkung 4.2.4 (b)), stellt μ keine Spiegelung an der Achse dar.

- (d) Falls $\rho_0 + R = 1$, so berühren sich K , der Inversionskreis sowie $\iota(K)$ in einem Punkt B , und die Achse ist Tangente an jeden dieser Kreise im Berührungspunkt B . Zur Sicherheit sei an dieser Stelle wiederholt, dass generell $R > 0$ und $\rho_0 \neq R$ gilt.
- (e) Für $\rho_0^2 = R^2 + 1$ ist der Kreis K invariant unter ι (vgl. Korollar 4.2.3), und $\pi(K)$ ist invariant unter μ . In diesem Fall nimmt die Matrix M die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & -1 \end{pmatrix}$$

an.

5 Räumliche Realisierungen nichtklassischer Ebenen

In diesem Kapitel ziehen wir eine Klasse von Flächen konstanter positiver Gauß-Krümmung, die sogenannten Spindelflächen, mit ihren Geodäten zur Realisierung Hilbertscher Liniensysteme heran, die wir *Spindelflächenebenen* nennen wollen. Nach einer Darstellung der differentialgeometrischen Daten von Spindelflächen beschreiben wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels das lokale und globale Verhalten ihrer Geodätischen. Geeignete ebene Abschnitte dieser Flächen liefern räumlich mit ebenem Rand realisierte CDs, vgl. Definition 2.3.1. In Abschnitt 5.2 wenden wir die in Kapitel 3 bereitgestellten Werkzeuge aus der projektiven Differentialgeometrie auf ein Beispiel einer solchen CD an und konstatieren, dass die Randkurve dieser CD *nicht* projektiv äquivalent zu ihrem Bild unter der entsprechenden lokalen geodätischen Abbildung in die reelle euklidische Ebene ist. Zur Überprüfung der Konsistenz der hierzu durchgeführten computeralgebraischen Rechnungen überzeugen wir uns, dass im sphärischen Grenzfall projektive Äquivalenz vorliegt. Im letzten Abschnitt stellen wir ein explizites Beispiel einer nicht desargueschen Spindelflächenebene vor.

5.1 Die Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,a}$

5.1.1 Differentialgeometrische Grunddaten

Spindelflächen sind Drehflächen (vgl. Definition 1.3.32) mit konstanter positiver Gauß-Krümmung K . Sie sind nach Wahl der Drehachse durch die Konstante K und den Äquatorialradius $a > 0$ mit $0 < a^2 K < 1$ bestimmt.¹ Für eine allgemeine Erörterung von Drehflächen konstanter (positiver) Krümmung einschließlich der sogenannten *Wulstflächen* verweisen wir auf [33]. Wir wählen die e_3 -Achse als Drehachse und die Profilkurve

$$\mu: J_u \rightarrow \mathbb{R}^2, u \mapsto (r(u), z(u)) := (a \cos(\sqrt{K} u), \mathfrak{E}(u))$$

mit $J_u := J_u(K) := \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right)$ und dem elliptischen Integral

$$\mathfrak{E}(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} x)} dx.$$

Es ist

$$r'(u) = -a \sqrt{K} \sin(\sqrt{K} u) \quad \text{sowie} \quad (5.1)$$

$$z'(u) = \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} u)}. \quad (5.2)$$

Damit gilt $(r'(u))^2 + (z'(u))^2 = 1$ für alle $u \in J_u$, also ist die Profilkurve μ durch die Bogenlänge parametrisiert.

Das durch

$$\tilde{f}: J_u \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \tilde{f}(u, v) = \begin{pmatrix} a \cos(\sqrt{K} u) \cos v \\ a \cos(\sqrt{K} u) \sin v \\ \mathfrak{E}(u) \end{pmatrix}$$

¹ Die Bedingungen $K > 0$, $a > 0$, $0 < a^2 K < 1$ seien in diesem Kapitel stets erfüllt, auch wenn dies nicht explizit wiederholt wird.

parametrisierte Flächenstück bezeichnen wir als *Spindelfläche* (vom Typ) $\mathcal{S}_{K,a}$, die Parametrisierung \tilde{f} ist die Standardüberlagerung von $\mathcal{S}_{K,a}$, vgl. Definition 1.3.32.

Für alle $v_0 \in \mathbb{R}$ nennen wir

$$\mu_{v_0}: J_u \rightarrow \mathcal{S}_{K,a}, \quad t \mapsto \tilde{f}(t, v_0)$$

ebenso wie die Bildmenge von μ_{v_0} einen *Meridian* oder eine *Meridianlinie* der Spindelfläche, vgl. Bemerkung 1.3.34.

Wir geben nun die wichtigsten differentialgeometrische Daten der Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,a}$ an, zunächst die zu \tilde{f} assoziierten Basisvektoren der Tangentialebenen $T_{(u,v)}\tilde{f}$:

$$\begin{aligned} \partial_u \tilde{f}(u, v) &= \begin{pmatrix} -a \sqrt{K} \sin(\sqrt{K} u) \cos v \\ -a \sqrt{K} \sin(\sqrt{K} u) \sin v \\ \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} u)} \end{pmatrix}, \\ \partial_v \tilde{f}(u, v) &= \begin{pmatrix} -a \cos(\sqrt{K} u) \sin v \\ a \cos(\sqrt{K} u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

die Komponenten der ersten Fundamentalform:

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = a^2 \cos^2(\sqrt{K} u); \quad (5.3)$$

den (nicht normierten) Normalenvektor:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\tilde{f}}(u, v) &= \partial_u \tilde{f}(u, v) \times \partial_v \tilde{f}(u, v) \\ &= \begin{pmatrix} -a \cos(\sqrt{K} u) \cos v \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} u)} \\ -a \cos(\sqrt{K} u) \sin v \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} u)} \\ -a^2 \sqrt{K} \sin(\sqrt{K} u) \cos(\sqrt{K} u) \end{pmatrix}; \quad (5.4) \end{aligned}$$

die Komponenten der kovarianten Ableitung:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 0, \\ \Gamma_{11}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 0, \\ \Gamma_{12}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 0, \\ \Gamma_{12}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\sqrt{K} \tan(\sqrt{K} u), \\ \Gamma_{22}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \alpha^2 \sqrt{K} \cos(\sqrt{K} u) \sin(\sqrt{K} u), \\ \Gamma_{22}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 0.\end{aligned}$$

Eine parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow J_{\mathbf{u}}(\mathbb{K}) \times \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (\mathbf{u}(t), v(t))$ ist demnach Lösung der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} , wenn

$$\begin{aligned}& \left(u''(t) + \alpha^2 \sqrt{K} \cos(\sqrt{K} u(t)) \sin(\sqrt{K} u(t)) (v'(t))^2 \right) v'(t) \\ &= \left(v''(t) - 2 \sqrt{K} \tan(\sqrt{K} u(t)) u'(t) v'(t) \right) u'(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in I$ gilt, vgl. die Gleichungen 1.4 bzw. 1.6 aus Abschnitt 1.3.2. Nach Umsortierung ergibt sich die Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} wie folgt:

$$\begin{aligned}& 2 \sqrt{K} \tan(\sqrt{K} u(t)) (u'(t))^2 v'(t) \\ &+ \alpha^2 \sqrt{K} \cos(\sqrt{K} u(t)) \sin(\sqrt{K} u(t)) (v'(t))^3 \\ &+ v'(t) u''(t) - u'(t) v''(t) = 0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

5.1.2 Geodätische Abbildungen von $S_{K,\alpha}$ auf $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$

Wir verwenden die Bezeichnung $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ sowohl für die reelle affine Ebene als auch für die (mit dem Standardskalarprodukt versehene) reelle euklidische Ebene. Als Zielbereich geodätischer Abbildungen im Sinne der Definition 1.3.40 müssten wir eigentlich die

reelle euklidische Ebene zugrundelegen, weil wir zur Beschreibung von Geodätischen eine Metrik bzw. zumindest eine kovariante Ableitung benötigen. Dennoch verzichten wir darauf, in der Bezeichnungsweise zwischen den beiden genannten Strukturen zu unterscheiden.

Durch geeignete Einschränkungen von \tilde{f} lassen sich *lokale Parametrisierungen* von $\mathcal{S}_{K,\alpha}$, d.h. injektive Parametrisierungen von Teilmengen von $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ gewinnen. Wir zeichnen unter diesen die Parametrisierungen mit maximalen Definitionsbereichen aus und kennzeichnen in der Notation den Mittelpunkt des v -Bereichs wie folgt: Für $v_0 \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$f_{v_0} := \tilde{f}|_{J_u \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)} \quad \text{und insbesondere}$$

$$f := f_0 := \tilde{f}|_{J_u \times (-\pi, \pi)}. \quad (5.6)$$

Wir weisen in diesem Abschnitt nach, dass es zu jeder lokalen Parametrisierung f_{v_0} der Spindelfläche eine *lokale* geodätische Abbildung in die reelle euklidische Ebene im Sinne von Definition 1.3.41 gibt. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass es keine *globale* geodätische Abbildung der Spindelfläche auf die reelle euklidische Ebene oder eine offene Teilmenge derselben geben kann, da die Spindelfläche mit dem System ihrer Geodäten keinen linearen Raum darstellt, im Gegensatz zur reellen euklidischen Ebene.

Wir stellen zunächst eine heuristische Überlegung zur Konstruktion einer Abbildung an, die lokal Geodätische der Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ auf Geraden(segmente) der Ebene abbildet. In einem ersten Schritt bilden wir Punkte der Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ vermittelt einer lokalen Isometrie ι auf die Sphäre gleicher Gaußscher Krümmung K , d.h. mit Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$ ab, in einem zweiten Schritt verwenden wir die Zentralprojektion ζ aus dem Ursprung jener Sphäre auf eine Ebene, welche den Mittelpunkt der Späre nicht enthält, etwa eine Tangentialebene. Die Geodäten der Sphäre sind Großkreise, diese werden lokal durch die Zentralprojektion ζ auf Geraden in der

Tangentialebene abgebildet. Da ι als lokale Isometrie ebenfalls eine lokale geodätische Abbildung ist, wie man mit Lemma 1.3.8 einsieht, erwarten wir, dass $\zeta \circ \iota$ Punkte, die auf Geodäten der Spindelfläche liegen, auf Punkte der Ebene abbildet, die in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ kollinear sind.

Es sei also ι die Abbildung, welche jeden (im Bild der Parametrisierung f liegenden) Punkt

$$\begin{pmatrix} a \cos(\sqrt{K} u) \cos v \\ a \cos(\sqrt{K} u) \sin v \\ \mathfrak{E}(u) \end{pmatrix}$$

von $\mathcal{S}_{K,a}$ auf den Punkt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{K}} \cos(\sqrt{K} u) \cos(a\sqrt{K} v) \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \cos(\sqrt{K} u) \sin(a\sqrt{K} v) \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} u) \end{pmatrix}$$

der im Ursprung zentrierten Sphäre mit Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$ abbildet. Um einzusehen, dass ι eine lokale Isometrie ist, berechnen wir die Komponenten der ersten Fundamentalform von $\iota \circ f$. Es ist

$$\partial_u(\iota \circ f)(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{K} u) \cos(a\sqrt{K} v) \\ -\sin(\sqrt{K} u) \sin(a\sqrt{K} v) \\ \cos(\sqrt{K} u) \end{pmatrix},$$

$$\partial_v(\iota \circ f)(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cos(\sqrt{K} u) \sin(a\sqrt{K} v) \\ a \cos(\sqrt{K} u) \cos(a\sqrt{K} v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten der ersten Fundamentalform

$$\begin{aligned}\langle \partial_u(\iota \circ f)(u, v), \partial_u(\iota \circ f)(u, v) \rangle &= 1, \\ \langle \partial_u(\iota \circ f)(u, v), \partial_v(\iota \circ f)(u, v) \rangle &= 0, \\ \langle \partial_v(\iota \circ f)(u, v), \partial_v(\iota \circ f)(u, v) \rangle &= a^2 \cos^2(\sqrt{K} u)\end{aligned}$$

sind somit identisch zu den in den Gleichungen 5.3 angegebenen Komponenten der zu \tilde{f} gehörigen Metrik, folglich ist ι eine lokale Isometrie.²

Die Zentralprojektion ζ von der im Ursprung zentrierten offenen Halkugel mit Radius $1/\sqrt{K}$ und $x > 0$ auf die durch $x = 1/\sqrt{K}$ bestimmte Ebene ist für $(\theta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gegeben durch

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \theta \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{K}} \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \tan \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\tan \theta}{\cos \varphi} \end{array} \right).$$

Die Abbildung $\zeta \circ \iota$ bildet somit jeden Punkt

$$\left(\begin{array}{c} a \cos(\sqrt{K} u) \cos v \\ a \cos(\sqrt{K} u) \sin v \\ \mathfrak{E}(u) \end{array} \right) \in \text{Im } f$$

auf den Punkt

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{K}} \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \tan(a \sqrt{K} v) \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\tan(\sqrt{K} u)}{\cos(a \sqrt{K} v)} \end{array} \right)$$

der Ebene $\left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \right\} \times \mathbb{R}^2$ ab.

² Vgl. hierzu etwa [15], Abschnitt 4.2, Proposition 1.

Geleitet von den hier angestellten geometrisch-heuristischen Überlegungen könnten wir die Abbildung

$$\bar{\lambda}: D \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \tan(\alpha \sqrt{K} v) \\ \frac{\tan(\sqrt{K} u)}{\cos(\alpha \sqrt{K} v)} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

mit einem noch zu spezifizierenden Definitionsbereich D und eine Parametrisierung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \right\} \times \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{K}} (1, x, y)$ der Bildebene einführen und so $\zeta \circ \iota = \varphi \circ \bar{\lambda} \circ (f|_D)^{-1}$ erreichen. Wir wollen uns jedoch einerseits dieser speziellen Wahl der Bildebene entledigen und Punkte der Spindelfläche direkt auf Punkte von \mathbb{R}^2 abbilden, andererseits wollen wir einen bezüglich der Wahl des „Mittelmeridians“ allgemeineren Ansatz verfolgen. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir im Folgenden die Funktion \sec mit $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

5.1.1 Definition. Für jeden Wert $v_0 \in \mathbb{R}$ seien die Definitionsbereiche der Abbildungen

$$f_{v_0}: D_{f_{v_0}} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \tilde{f}(u, v) \quad \text{und}$$

$$\bar{\lambda}_{v_0}: D_{\bar{\lambda}_{v_0}} \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \tan(\alpha \sqrt{K} (v - v_0)) \\ \tan(\sqrt{K} u) \sec(\alpha \sqrt{K} (v - v_0)) \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$D_{f_{v_0}} := D_{f_{v_0}}(K, \alpha) := J_u(K) \times (-\pi + v_0, \pi + v_0) \quad \text{bzw.}$$

$$D_{\bar{\lambda}_{v_0}} := D_{\bar{\lambda}_{v_0}}(K, \alpha) := J_u(K) \times \left(-\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{K}} + v_0, \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{K}} + v_0 \right).$$

Wir setzen ferner $S_{v_0} := f(D_{f_{v_0}})$ sowie $D_{v_0} := D_{f_{v_0}} \cap D_{\bar{\lambda}_{v_0}}$.

Für $v_0 = 0$ behalten wir die Bezeichnungen f anstelle von f_0 sowie $\bar{\lambda}$ anstelle von $\bar{\lambda}_0$ bei.

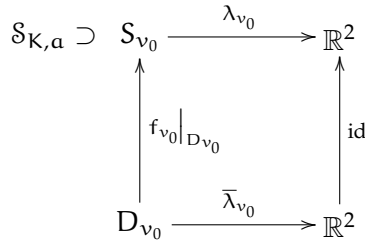


Abbildung 5.1: (Lokale) geodätische Abbildung von S_{v_0} nach \mathbb{R}^2 .

5.1.2 Bemerkungen. (a) Die Menge S_{v_0} besteht aus den Punkten der Spindelfläche, die nicht auf der durch $\tilde{f}(0, \pi + v_0)$ verlaufenden Meridianlinie liegen.

(b) Es ist f_{v_0} eine injektive Parametrisierung von S_{v_0} .

(c) Die Abbildung $\bar{\lambda}_{v_0}$ ist bijektiv.

(d) Die durch Einschränkung erhaltenen Abbildungen $f_{v_0}|_{D_{v_0}}$ und $\bar{\lambda}_{v_0}|_{D_{v_0}}$ sind jeweils injektiv.

Das Diagramm in Abbildung 5.1 veranschaulicht die Situation. Zur Untersuchung der Wertemengen von $f_{v_0}(D_{v_0})$ bzw. $\bar{\lambda}_{v_0}(D_{v_0})$ unterscheiden wir drei Fälle, die sich anschaulich durch die jeweiligen Formen der Spindelflächen charakterisieren lassen: Im Fall (b) der folgenden Proposition 5.1.3 liegen gestauchte, im Fall (c) langgestreckte Spindeln vor, Fall (a) stellt den trennenden Mittel-fall dar.³

5.1.3 Proposition. *Es sei $v_0 \in \mathbb{R}$.*

(a) Für $\alpha\sqrt{K} = \frac{1}{2}$ ist $D_{v_0} = J_u(K) \times (-\pi + v_0, \pi + v_0)$ und $\bar{\lambda}_{v_0}(D_{v_0}) = \mathbb{R}^2$, d.h. $f_{v_0}|_{D_{v_0}}$ und $\bar{\lambda}_{v_0}|_{D_{v_0}}$ sind bijektiv.

³ Vgl. hierzu die Abbildungen 5.4 bis 5.7.

- (b) Falls $\frac{1}{2} < \alpha \sqrt{K} < 1$ gilt, so ist D_{v_0} eine echte Teilmenge von $(-\pi + v_0, \pi + v_0)$, es gilt wiederum $\bar{\lambda}(D_{v_0}) = \mathbb{R}^2$, jedoch ist $f_{v_0}(D_{v_0})$ eine echte Teilmenge von S_{v_0} , die durch Rotation der Profilkurve um einen Winkel erzeugt wird, der echt zwischen π und 2π liegt.
- (c) Im Falle $0 < \alpha \sqrt{K} < \frac{1}{2}$ ist $D_{v_0} = J_u(K) \times (-\pi, \pi)$, und es ist $\bar{\lambda}(D_{v_0})$ eine echte Teilmenge von \mathbb{R}^2 . \square

5.1.4 Bemerkungen. (a) Für alle zulässigen α und K ist die Menge $J_u \times [-\frac{\pi}{2} + v_0, \frac{\pi}{2} + v_0]$ in D_{v_0} enthalten, d.h. $f(D_{v_0})$ umfasst die Halbspindel mit Mittelmeridian μ_{v_0} .

- (b) Im Falle $0 < \alpha \sqrt{K} < \frac{1}{2}$ wird die Menge $f_{v_0}(D_{\bar{\lambda}_{v_0}})$ durch eine Rotation der Profilkurve um einen Winkel erzeugt, der größer als 2π ist.

Wir weisen nun nach, dass $\bar{\lambda}_{v_0}$ eine (lokale) geodätische Parametertransformation ist. Da die Komponenten der kovarianten Ableitung für die Parametrisierung $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der reellen euklidischen Ebene identisch verschwinden, ist eine parametrisierte Kurve $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ genau dann Lösung der entsprechenden Geodätendifferentialgleichung 1.4, wenn

$$\delta_1''(t) \delta_2'(t) - \delta_2''(t) \delta_1'(t) = 0 \quad (5.8)$$

für alle $t \in I$ gilt.

5.1.5 Proposition. Es sei $v_0 \in \mathbb{R}$, und es sei $\gamma: I \rightarrow D_{v_0}$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung 5.5 von f_{v_0} . Dann erfüllt $\delta := \bar{\lambda}_{v_0} \circ \gamma$ die Geodätendifferentialgleichung 5.8 der reellen euklidischen Ebene, das heißt $\bar{\lambda}_{v_0}$ ist eine geodätische Parametertransformation im Sinne von Definition 1.3.42.

Beweis. Es sei $\gamma: I \rightarrow D_{v_0}$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung 5.5 von f_{v_0} , dann ist $\delta := \bar{\lambda}_{v_0} \circ \gamma$

durch

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} \tan\left(\alpha\sqrt{K}(v(t) - v_0)\right) \\ \tan\left(\sqrt{K}u(t)\right) \sec\left(\alpha\sqrt{K}(v(t) - v_0)\right) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

gegeben. Zur Abkürzung der Ausdrücke in den folgenden Rechnungen setzen wir

$$\Upsilon(t) := \sqrt{K}u(t), \quad \Phi(t) := \alpha\sqrt{K}(v(t) - v_0).$$

Wir benötigen die ersten und zweiten Ableitungen der Komponenten von δ :

$$\delta'_1(t) = \alpha\sqrt{K} \sec^2(\Phi(t)) v'(t),$$

$$\delta''_1(t) = \alpha\sqrt{K} \sec^2(\Phi(t)) \left(2\alpha\sqrt{K} \tan(\Phi(t)) v'(t)^2 + v''(t)\right),$$

$$\begin{aligned} \delta'_2(t) &= \sqrt{K} \sec(\Phi(t)) \sec^2(\Upsilon(t)) u'(t) \\ &\quad + \alpha\sqrt{K} \sec(\Phi(t)) \tan(\Phi(t)) \tan(\Upsilon(t)) v'(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta''_2(t) &= 2K \sec^2(\Upsilon(t)) \tan(\Upsilon(t)) \sec(\Phi(t)) (u'(t))^2 \\ &\quad + 2\alpha K \sec^2(\Upsilon(t)) \sec(\Phi(t)) \tan(\Phi(t)) u'(t) v'(t) \\ &\quad + \alpha^2 K \tan(\Upsilon(t)) (1 + \sin^2(\Phi(t))) \sec^3(\Phi(t)) (v'(t))^2 \\ &\quad + \sqrt{K} \sec^2(\Upsilon(t)) \sec(\Phi(t)) u''(t) \\ &\quad + \alpha\sqrt{K} \tan(\Upsilon(t)) \sec(\Phi(t)) \tan(\Phi(t)) v''(t). \end{aligned}$$

Wir werten die Gleichung 5.8 für die gegebene Parametrisierung δ aus und erhalten nach einigen Rechenschritten und Umsortierung:

$$\begin{aligned} 0 &= -2\alpha\sqrt{K} \sec^2(\Upsilon(t)) \sec^3(\Phi(t)) \tan(\Upsilon(t)) (u'(t))^2 v'(t) \\ &\quad + \alpha^3 \sqrt{K} \tan(\Upsilon(t)) \sec^3(\Phi(t)) \tan^2(\Phi(t)) (v'(t))^3 \\ &\quad - \alpha^3 \sqrt{K} \tan(\Upsilon(t)) \sec^5(\Phi(t)) (v'(t))^3 \\ &\quad - \alpha \sec^2(\Upsilon(t)) \sec^3(\Phi(t)) v'(t) u''(t) \\ &\quad + \alpha \sec^2(\Upsilon(t)) \sec^3(\Phi(t)) u'(t) v''(t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wir betrachten die Koeffizientenfunktion von $(v'(t))^3$:

$$\alpha^3 \sqrt{K} \sec^3(\Phi(t)) \tan(\Upsilon(t)) [\tan^2(\Phi(t)) - \sec^2(\Phi(t))]$$

Vermöge $\tan^2(\Phi(t)) - \sec^2(\Phi(t)) = -1$ sowie

$$\tan(\Upsilon(t)) = \cos(\Upsilon(t)) \sin(\Upsilon(t)) \sec^2(\Upsilon(t))$$

ergibt sich diese zu

$$-\alpha^3 \sqrt{K} \sec^2(\Upsilon(t)) \sec^3(\Phi(t)) \cos(\Upsilon(t)) \sin(\Upsilon(t)).$$

Ingesamt sind die Gleichungen 5.8 und 5.10 also äquivalent zu

$$-\alpha \sec^2(\Upsilon(t)) \sec^3(\Phi(t)) \cdot F(t) = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } F(t) &= 2 \sqrt{K} \tan(\Upsilon(t)) (u'(t))^2 v'(t) \\ &\quad + \alpha^2 \sqrt{K} \cos(\Upsilon(t)) \sin(\Upsilon(t)) (v'(t))^3 \\ &\quad + v'(t) u''(t) - u'(t) v''(t). \end{aligned}$$

Falls $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ für jedes $t \in I$ die Gleichung 5.5 erfüllt, so ist $F(t) = 0$ für alle $t \in I$, und es ist $\delta = \bar{\lambda}_{v_0} \circ \gamma$ eine Lösung der Gleichungen 5.11 bzw. 5.8. \square

5.1.6 Proposition. Für $\frac{1}{2} \leq \alpha \sqrt{K} < 1$ ist $\bar{\lambda}_{v_0}$ eine geodätische Parameterabbildung von D_{v_0} nach \mathbb{R}^2 . Für $0 < \alpha \sqrt{K} \leq \frac{1}{2}$ ist $\bar{\lambda}_{v_0}$ eine lokale geodätische Parameterabbildung bei $(0, v_0)$ im Sinne von Definition 1.3.43.

Wegen der Injektivität von f_{v_0} ist durch $\bar{\lambda}_{v_0}$ eine Abbildung $\lambda_{v_0}: S_{v_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bestimmt, vgl. Korollar 1.3.46, Diagramm 1.5 sowie Diagramm 5.1.

5.1.7 Korollar. Für alle $v_0 \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\lambda_{v_0} := \text{id} \circ \bar{\lambda}_{v_0} \circ \left(f_{v_0} \big|_{D_{v_0}} \right)^{-1} : S_{v_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

eine geodätische Abbildung von S_{v_0} nach \mathbb{R}^2 .

Die Umkehrabbildung von $\bar{\lambda}_{v_0}$ wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

5.1.8 Proposition. Für $v_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$(\bar{\lambda}_{v_0})^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow D_{\bar{\lambda}_{v_0}}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{1+x_1^2}} \right) \\ v_0 + \frac{1}{\alpha \sqrt{K}} \arctan x_1 \end{pmatrix}$$

die Umkehrabbildung von $\bar{\lambda}_{v_0}$. Für jedes parametrisierte Geradenstück $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist $\gamma := (\bar{\lambda}_{v_0})^{-1} \circ x$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichungen von \tilde{f} .

Beweis. Nach Satz 1.3.47 ist die Inverse einer geodätischen Parametertransformation ebenfalls eine geodätische Parametertransformation. \square

5.1.3 Geodäten auf der Spindelfläche

In diesem Abschnitt behandeln wir das lokale und globale Verhalten der Geodätischen auf der Spindelfläche. Unter anderem stellen wir dar, für welche Kombinationen von α und K die Geodätischen von $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ (außer den Meridianen) *periodisch* sind, vgl. Definition 5.1.21. Aus der Vielzahl der Untersuchungen zu Flächen mit periodischen Geodätischen wollen wir die Arbeiten von Zoll [63], Weinstein [61] und Michel [40] sowie die Monographie von Besse [8] nennen, die den uns interessierenden Fall der Spindelfläche mehr oder weniger explizit enthalten; ein Überblick über die Entwicklung der Forschung in diesem Bereich findet sich in Kapitel 10 von Berger [7].

Unsere Studie der Geodätischen auf der Spindelfläche erhebt somit keinen Anspruch auf Originalität, ergänzt vielmehr die in den genannten Quellen enthaltenen qualitativen Beschreibungen durch die Angabe *expliziter Parametrisierungen der Geodätischen*

und die Ableitung des globalen Verhaltens aus denselben. Hierbei erweisen sich die im vorigen Abschnitt behandelten lokalen geodätischen Abbildungen in Verbindung mit dem Clairautschen Satz als nützliche Werkzeuge.

5.1.9 Proposition. *Es sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} . Dann ist für jede Zahl $v_0 \in \mathbb{R}$ auch $\gamma_{v_0}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_{v_0}(t) = (u(t), v(t) + v_0)$ eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} .*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Geodätendifferentialgleichung 5.5 und beruht auf der Tatsache, dass die Christoffelsymbole von \tilde{f} nicht von dem Parameter v abhängen. \square

Für jedes parametrisierte Geradenstück $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die parametrisierte Kurve $\gamma := (\bar{\lambda}_{v_0})^{-1} \circ x$ nach Proposition 5.1.8 eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} . Wir wählen $v_0 = 0$, schreiben wieder $\bar{\lambda}$ für $\bar{\lambda}_0$ (vgl. Definition 5.1.1) und betrachten spezielle Parametrisierungen von Geradenstücken, die mit Steigungskonstante $m \in \mathbb{R}$ durch den Ursprung verlaufen. Als Definitionsbereich wählen wir zunächst $J_0 := \left(-\frac{\pi}{2a\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2a\sqrt{K}}\right)$:

$$x: J_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, x(t) = \tan\left(a\sqrt{K}t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Für $\gamma: J_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t)) := (\bar{\lambda}^{-1} \circ x)(t)$ folgen mit Proposition 5.1.8 die Identitäten

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(m \tan\left(a\sqrt{K}t\right) \cdot \left|\cos\left(a\sqrt{K}t\right)\right|\right) \quad (5.12)$$

sowie $v(t) = t$. Für $t \in J_0$ ist $\cos\left(a\sqrt{K}t\right) > 0$, also gilt

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(m \sin\left(a\sqrt{K}t\right)\right).$$

Es ist ferner $u'(t) = \frac{a m \cos(a \sqrt{K} t)}{1 + m^2 \sin^2(a \sqrt{K} t)}$ und $v'(t) = 1$.

Zur Berechnung der Neigungskonstanten c werten wir die Gleichung 1.7

$$c = \frac{r(u(t))^2 v'(t)}{\sqrt{(u'(t))^2 + r(u(t))^2 (v'(t))^2}}$$

an der Stelle $t = 0$ aus. Mit $u(0) = 0$, $u'(0) = a m$, $v'(0) = 1$ sowie $r(u(0)) = a$ (vgl. Abschnitt 5.1.1) folgt

$$c = \frac{a^2}{\sqrt{(a m)^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{und} \quad (5.13)$$

$$|m| = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}. \quad (5.14)$$

5.1.10 Bemerkungen.

- Aus Gleichung 5.13 wird deutlich, dass $c > 0$ gilt und dass die Steigungskonstanten m und $-m$ auf dieselbe Neigungskonstante c führen.
- Für $m = 0$ gilt $c = a$, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die Bildpunkte von $\tilde{f} \circ \gamma$ für $x_2(t) \equiv 0$ auf dem Äquator der Spindelfläche liegen.

Für $t \in J_0$ und $m \geq 0$ ist also

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \sin(a \sqrt{K} t) \right),$$

im Falle $m < 0$ gilt

$$u(t) = -\frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \sin(a \sqrt{K} t) \right),$$

wobei jeweils c durch $\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$ gegeben ist. Die hier abgeleiteten Ausdrücke für $u(t)$ sind selbstverständlich für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Wir nehmen nun eine Unterteilung der Zahlengeraden vor, die an die in der Parametrisierung x verwandte Tangensfunktion angepasst ist. Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ sei das Intervall J_z definiert durch

$$J_z := \left((z - 1/2) \frac{\pi}{a \sqrt{K}}, (z + 1/2) \frac{\pi}{a \sqrt{K}} \right).$$

Falls z gerade ist, so gilt $\cos(a \sqrt{K} t) > 0$ für alle $t \in J_z$, bei ungeraden z gilt $\cos(a \sqrt{K} t) < 0$ für alle $t \in J_z$. Aus Gleichung 5.12 ergibt sich somit

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(m \sin(a \sqrt{K} t) \right)$$

für alle $t \in \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} J_z \subset \mathbb{R}$, wenn

$$x: J_z \rightarrow \mathbb{R}^2, x(t) = \tan(a \sqrt{K} t) \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

für gerade z und

$$x: J_z \rightarrow \mathbb{R}^2, x(t) = \tan(a \sqrt{K} t) \begin{pmatrix} 1 \\ -m \end{pmatrix}$$

für ungerade z gewählt wird. Wir setzen

$$\Lambda: J_u \times \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} J_z \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \tan(a \sqrt{K} v) \\ \tan(\sqrt{K} u) \sec(a \sqrt{K} v) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\tilde{x}: J_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(m \sin(a \sqrt{K} t) \right) \\ t \end{pmatrix}$$

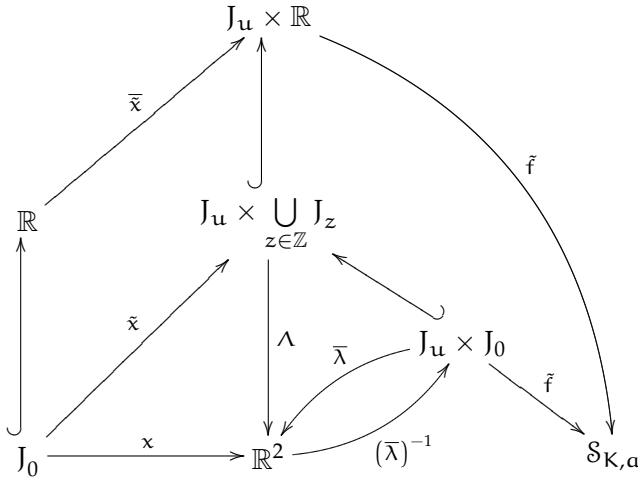


Abbildung 5.2: Diagramm zur Illustration der Hochhebung \tilde{x} der parametrisierten Geraden x unter \wedge sowie der Fortsetzung $\bar{\tilde{x}}$ von \tilde{x} auf \mathbb{R} . Die Kurve $\tilde{f} \circ \bar{\tilde{x}}$ ist eine maximale parametrisierte Geodätische auf $\mathcal{S}_{K,\alpha}$.

eine Hochhebung von x unter \wedge , d.h. es gilt $\wedge \circ \tilde{x} = x$. Die Fortsetzung $\bar{\tilde{x}}$ von \tilde{x} auf (ganz) \mathbb{R} liefert nach Komposition mit der Überlagerung \tilde{f} von $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ die Parametrisierung einer maximalen⁴ Geodätischen auf $\mathcal{S}_{K,\alpha}$. Nach Korollar 1.3.26 ist $\tilde{f} \circ \bar{\tilde{x}}$ eine parametrisierte Geodätische auf $\mathcal{S}_{K,\alpha}$. Diese verläuft für $t = 0$ durch den auf dem Äquator und dem Nullmeridian liegenden Punkt. Das Diagramm in Abbildung 5.2 veranschaulicht den Sachverhalt.

Mit Proposition 5.1.9 ergeben sich Parametrisierungen von Geodätischen, die für $t = 0$ den Äquator in einem Punkt mit Azimutwinkel v_0 schneiden. Durch Ersetzen von t durch $-t$ erhält man Parametrisierungen von Geodätischen, die negative Neigungskonstante besitzen. Wir fassen die bislang erzielten Ergebnisse zusammen:

⁴ Vgl. Bemerkung 5.1.18.

5.1.11 Proposition. Es sei $v_0 \in \mathbb{R}$ und es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c| \leq a$. Dann ist jede der folgenden auf \mathbb{R} definierten parametrisierten Kurven in $J_u \times \mathbb{R}$ eine Lösung der zu \tilde{f} gehörigen Geodätendifferentialgleichung:

$$\begin{aligned} \gamma_{c,v_0,++}(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{|c|} \sin(a\sqrt{K}t) \right), v_0 + t \right), \\ \gamma_{c,v_0,+-}(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{|c|} \sin(a\sqrt{K}t) \right), v_0 + t \right), \\ \gamma_{c,v_0,-+}(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{|c|} \sin(a\sqrt{K}t) \right), v_0 - t \right), \\ \gamma_{c,v_0,--}(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{|c|} \sin(a\sqrt{K}t) \right), v_0 - t \right). \end{aligned}$$

5.1.12 Bemerkungen. (a) Die Parametrisierungen $\gamma_{c,v_0,++}$ und $\gamma_{c,v_0,+-}$ liefern Geodätische mit *positiver* Neigungskonstante c , die (für wachsende Werte von t) im *Gegenuhreigersinn* um die Spindelfläche (bzw. um die e_3 -Achse) umlaufen.

(b) Die Parametrisierungen $\gamma_{c,v_0,-+}$ und $\gamma_{c,v_0,--}$ liefern Geodätische mit *negativer* Neigungskonstante c , die (für wachsende Werte von t) im *Uhrzeigersinn* um die Spindelfläche umlaufen.

(c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \gamma_{c,v_0,++}(-t) = \gamma_{c,v_0,--}(t), \\ \text{(ii)} \quad & \gamma_{c,v_0,+-}(-t) = \gamma_{c,v_0,-+}(t), \\ \text{(iii)} \quad & \gamma_{c,v_0,++} \left(t + \frac{\pi}{a\sqrt{K}} \right) = \gamma_{c,v_0 + \frac{\pi}{a\sqrt{K}},-+}(t), \\ \text{(iv)} \quad & \gamma_{c,v_0,-+} \left(t + \frac{\pi}{a\sqrt{K}} \right) = \gamma_{c,v_0 - \frac{\pi}{a\sqrt{K}},--}(t). \end{aligned}$$

Es genügt also, die Typen $\gamma_{c,v_0,++}$ für die positiv drehenden Parametrisierungen und die Typen $\gamma_{c,v_0,--}$ für die negativ drehenden Parametrisierungen zu betrachten.

5.1.13 Definition. Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c| \leq a$ und alle $v_0 \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\gamma_{c,v_0} := \begin{cases} \gamma_{c,v_0,++} & \text{für } c \geq 0 \\ \gamma_{c,v_0,--} & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

Aus Proposition 5.1.11 folgt mit Korollar 1.3.26 unmittelbar die folgende Aussage.

5.1.14 Proposition. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c| \leq a$ und für jedes $v_0 \in \mathbb{R}$ ist $\gamma_{c,v_0} := \tilde{f} \circ \gamma_{c,v_0}$ eine parametrisierte Geodätische auf $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ mit der Neigungskonstanten c .

Im Folgenden bezeichnen r und z wieder die Komponenten der in Abschnitt 5.1.1 eingeführten Profil- bzw. Meridankurve der Spindelfläche.

5.1.15 Proposition. Es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c| \leq a$ und $v_0 \in \mathbb{R}$, und es sei $\gamma_{c,v_0}: \mathbb{R} \rightarrow J_u \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (u(t), v(t))$. Die Funktionen $u: \mathbb{R} \rightarrow J_u$ und $z \circ u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathfrak{E}(u(t))$ besitzen lokale Maxima an den (kritischen) Stellen

$$t_{\max} \in \mathcal{C}_+ := \left\{ \frac{1}{a\sqrt{K}} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi z \right) \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$$

und lokale Minima an den (kritischen) Stellen

$$t_{\min} \in \mathcal{C}_- := \left\{ \frac{1}{a\sqrt{K}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi z \right) \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Für jede kritische Stelle t_m gilt $r(u(t_m)) = a \cos(\sqrt{K} u(t_m)) = |c|$.

Beweis. Wir beginnen mit der letztgenannten Behauptung. Für alle $t_m \in \mathcal{C} := \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$ gilt

$$\begin{aligned} r(u(t_m)) &= a \cos\left(\sqrt{K} u(t_m)\right) = a \cos\left(\arctan \pm \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{|c|}\right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - c^2}{|c|^2}}} = |c|. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung u' von u ist gegeben durch

$$u'(t) = \frac{a \cos(a \sqrt{K} t)}{1 + \frac{a^2 - c^2}{|c|^2} \sin^2(a \sqrt{K} t)}.$$

Ferner gilt

$$\frac{d}{dt} z(u(t)) = u'(t) \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K} u(t))}.$$

Mit der Generalvoraussetzung $0 < a^2 K < 1$ folgt, dass der Radikand positiv ist. Also also gilt $u'(t_m) = 0$ und $(z \circ u)'(t_m) = 0$ für alle $t_m \in \mathcal{C}$.

Wir bestimmen nun $u''(t_m)$ und halten hierzu fest, dass aus der Voraussetzung $|c| > 0$ zusammen mit Gleichung 1.7 die Aussage $v'(t_m) \neq 0$ folgt. Damit lesen wir aus der Geodätendifferentialgleichung 5.5 unmittelbar die folgende Beziehung ab:

$$u''(t_m) = -a^2 \sqrt{K} \cos(\sqrt{K} u(t_m)) \sin(\sqrt{K} u(t_m)) (v'(t_m))^2.$$

Für $t_m \in \mathcal{C}_+$ ist der Wert von $\sin(\sqrt{K} u(t_m))$ positiv, und es gilt $u''(t_m) < 0$. In diesem Fall besitzt u an der Stelle t_m ein lokales Maximum. Für $t_m \in \mathcal{C}_-$ liegt ein lokales Minimum von u vor. Eine kurze Rechnung liefert die Identität

$$\frac{d^2}{dt^2} z(u(t)) \Big|_{t=t_m} = u''(t_m) \sqrt{1 - K (a^2 - c^2)},$$

somit nimmt $z \circ u$ an denselben Stellen wie u lokale Minima bzw. Maxima an. \square

5.1.16 Bemerkungen. Es seien v_0 und c in \mathbb{R} mit $0 < |c| \leq a$, und es sei $\gamma_{c,v_0}: \mathbb{R} \rightarrow J_u \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ wie in Definition 5.1.13 angegeben.

- (a) Die Werte der Maxima bzw. Minima von u sind gegeben durch $u_{\pm} := u_{\pm}(K, \alpha, c) := \pm \frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \frac{|c|}{\alpha}$.⁵
- (b) Die Funktion u besitzt die Periode $\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{K}}$.
- (c) Für alle Schnittpunkte $(0, v)$ von γ_{c,v_0} mit der u -Achse gilt $\alpha\sqrt{K}(v - v_0) \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.
- (d) Ist $\varphi(v_0)$ der Schnittwinkel von γ mit der u -Achse im Punkt $(0, v_0)$, so gilt für den Schnittwinkel an den übrigen Schnittpunkten

$$\varphi\left(v_0 + z \frac{\pi}{\alpha\sqrt{K}}\right) = \begin{cases} \varphi(v_0) & \text{für alle } z \in 2\mathbb{Z}, \\ \pi - \varphi(v_0) & \text{für alle } z \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

An dieser Stelle treffen wir die Vereinbarung, dass wir die durch $v \mapsto \tilde{f}(u_+(K, \alpha, c), v)$ bzw. $v \mapsto \tilde{f}(u_-(K, \alpha, c), v)$ parametrisierten Breitenkreise von $\mathcal{S}_{K,\alpha}$, zwischen denen alle Geodätischen mit Neigungskonstanten $c \neq 0$ oszillieren, in Anlehnung an die Geographie *Wendekreise* für diese Geodätischen nennen, vgl. Bemerkung 5.1.26 am Ende dieses Abschnitts.

Wir betrachten nun diejenigen Lösungen der Geodätendifferentialgleichung, die unter \tilde{f} auf Meridiane von $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ abgebildet werden.

5.1.17 Proposition. *Für jedes $v_0 \in \mathbb{R}$ ist*

$$\mu_{v_0}: J_u \rightarrow \mathbb{R}, \mu_{v_0}(t) := (u(t), v(t)) := (t, v_0)$$

eine Lösung der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} , und die parametrisierte Geodätische $\mu_{v_0} := \tilde{f} \circ \mu_{v_0}$ besitzt die Neigungskonstante $c = 0$.

Beweis. Da $v'(t) \equiv 0$ gilt, ist Gleichung 5.5 erfüllt, und aus Gleichung 1.7 folgt unmittelbar $c = 0$. \square

⁵ Es bezeichne \arccos stets die Umkehrfunktion von $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

5.1.18 Bemerkung. Auf der Grundlage von Satz 1.3.27 zusammen mit Lemma 1.3.28 und Satz 1.3.30 kann man sich überlegen, dass zu jeder Lösung $\delta: I \rightarrow J_u \times \mathbb{R}$ der Geodätendifferentialgleichung von \tilde{f} eine Zahl v_0 , eine Neigungskonstante c mit $0 \leq |c| \leq a$ sowie eine Umparametrisierung $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ derart existiert, dass entweder $\delta = \gamma_{c,v_0} \circ \Phi$ oder $\delta = \mu_{v_0} \circ \Phi$ gilt. Jede der Abbildungen γ_{c,v_0} und μ_{v_0} besitzt somit eine Bildmenge, die *maximal* ist unter (den Bildmengen der) Lösungen der Geodätendifferentialgleichung 5.5.

Nachdem wir uns Klarheit über die Gesamtheit der Lösungen von Gleichung 5.5 verschafft haben, wenden wir uns deren Bildern unter \tilde{f} , mithin den parametrisierten Geodätischen auf $S_{K,a}$ zu.

5.1.19 Proposition. *Es sei $v_0 \in \mathbb{R}$.*

(a) *Die Länge der Meridianlinie*

$$\mu_{v_0}: \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \right) \rightarrow S_{K,a},$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos \left(\sqrt{K} t \right) \cos v_0 \\ a \cos \left(\sqrt{K} t \right) \sin v_0 \\ \mathfrak{E}(t) \end{pmatrix}$$

ist durch $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ nach oben beschränkt.

(b) *Falls sich v_0 und v'_0 um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, so stimmen die parametrisierten Geodätischen⁶ μ_{v_0} und $\mu_{v'_0}$ überein.*

Beweis. Behauptung (a) folgt aus der Tatsache, dass μ_{v_0} durch die Bogenlänge parametrisiert ist und (b) ist klar. \square

Aus Bemerkung 5.1.18, der vorstehenden Proposition sowie dem Satz von Hopf-Rhinow (vgl. etwa [39], Theorem 11.15) ergibt sich, dass die Spindelfläche keine vollständige Fläche ist.

⁶ Vgl. Proposition 5.1.17.

Die Abbildung 5.3 zeigt eine Auswahl von Geodätensegmenten auf der Spindelfläche mit $K = 1$ und $\alpha = 0.4$, die alle durch den Punkt $\tilde{f}(0,0)$ verlaufen. Wir werden $\mathcal{S}_{1,0.4}$ im Abschnitt 5.4 zur Konstruktion eines nicht desarguesschen Hilbertsystems heranziehen.

5.1.20 Proposition. *Es sei $v_0 \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c| \leq \alpha$, und es sei $\gamma_{c,v_0}: \mathbb{R} \rightarrow J_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (\mathbf{u}(t), v(t))$ wie in Definition 5.1.13 angegeben. Falls sich v_0 und v'_0 um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{K}}$ unterscheiden, so stimmen $\tilde{f} \circ \gamma_{c,v_0}$ und $\tilde{f} \circ \gamma_{c,v'_0}$ überein.*

Beweis. Diese Aussage folgt unmittelbar aus der $\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{K}}$ -Periodizität der Funktion \mathbf{u} , vgl. die Bemerkungen 5.1.16. \square

Wir wollen nun das Verhalten der (maximalen) parametrisierten Geodätischen auf $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ mit von Null verschiedener Neigungskonstante weiter untersuchen und interessieren uns insbesondere, wie zu Beginn des Abschnitts angekündigt, für *periodische* Geodätische auf der Spindelfläche.

5.1.21 Definition. Eine parametrisierte Geodätische $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_{K,\alpha}$ heißt *periodisch*, wenn eine positive reelle Zahl τ derart existiert, dass $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. In diesem Fall nennen wir die kleinste⁷ Zahl τ mit dieser Eigenschaft die *Periode* von γ .

5.1.22 Bemerkung. Für eine C^2 -parametrisierte periodische Geodätische mit Periode τ sind die Gleichungen $\gamma'(t + \tau) = \gamma'(t)$ und $\gamma''(t + \tau) = \gamma''(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

5.1.23 Satz. *Es sei $v_0 \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c| \leq \alpha$, und es sei $\gamma_{c,v_0}: \mathbb{R} \rightarrow J_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (\mathbf{u}(t), v(t))$ wie in Definition 5.1.13 angegeben.*

⁷ Eine solche existiert im periodischen Fall, denn gäbe es beliebig kleine positive τ mit $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$, so gälte $\gamma'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+\tau) - \gamma(t)}{\tau} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, nach der γ regulär parametrisiert ist.

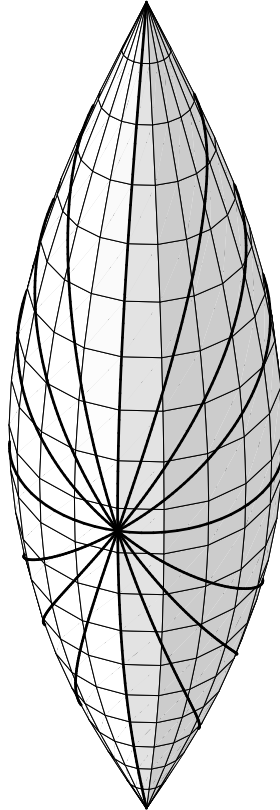


Abbildung 5.3: Spindelfläche mit $K = 1$, $\alpha = 0.4$ und eine Auswahl von Geodätensegmenten, die durch den Punkt $\tilde{f}(0,0)$ verlaufen.

- (a) Die parametrisierte Geodätische $\gamma_{c,v_0} := \tilde{f} \circ \gamma_{c,v_0}$ ist genau dann periodisch, wenn $\alpha \sqrt{K}$ eine rationale Zahl ist.
- (b) Falls $\alpha \sqrt{K}$ rational ist, so seien p und q die teilerfremden natürlichen Zahlen⁸ mit $0 < p < q$ sowie $\alpha \sqrt{K} = \frac{p}{q}$. Die Geodätische γ_{c,v_0} besitzt die Periode $\tau := p \cdot \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{K}} = q \cdot 2\pi$.

Beweis. (a) Falls $\gamma := \gamma_{c,v_0}$ periodisch ist, so existiert nach Definition 5.1.21 eine positive reelle Zahl τ mit $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $\gamma(\tau) = \gamma(0)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \alpha \cos(u(\tau)) \cos(v_0 + \tau) \\ \alpha \cos(u(\tau)) \sin(v_0 + \tau) \\ \mathfrak{E}(u(\tau)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(u(0)) \cos v_0 \\ \alpha \cos(u(0)) \sin v_0 \\ \mathfrak{E}(u(0)) \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichheit der dritten Komponenten folgt $u(\tau) = 0$, denn es gilt $u(0) = 0$, und die Funktion \mathfrak{E} besitzt wegen des positiven Integranden in dem elliptischen Integral nur die eine Nullstelle bei $u = 0$. Mit $u(\tau) = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos(v_0 + \tau) \\ \sin(v_0 + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \end{pmatrix},$$

welche genau für $\tau \in 2\pi\mathbb{Z}$ erfüllt ist. Andererseits besitzt die Funktion u nach Bemerkung 5.1.16 die Periode $\frac{2\pi}{\alpha \sqrt{K}}$, d.h. aus $u(\tau) = 0$ folgt notwendig $\tau \in \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{K}} \mathbb{Z}$. Es existieren also ganze Zahlen z und z' mit $\tau = 2\pi z = \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{K}} z'$. Da τ nach Voraussetzung positiv ist, gilt $z > 0$ und $z' > 0$ sowie $\alpha \sqrt{K} = \frac{z'}{z}$, d.h. es gilt $\alpha \sqrt{K} \in \mathbb{Q}$.

Es sei nun umgekehrt $\alpha \sqrt{K} \in \mathbb{Q}$, dann existieren teilerfremde natürliche Zahlen p und q mit $0 < p < q$ und $\alpha \sqrt{K} = \frac{p}{q}$.

Wir setzen $T := \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{K}}$ für die Periode der Funktion u und

⁸ Wir erinnern daran, dass (nach Generalvoraussetzung) $0 < \alpha \sqrt{K} < 1$ gilt.

erhalten $pT = q2\pi$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $u(t + pT) = u(t)$ und damit

$$\begin{aligned} \gamma(t + pT) &= \begin{pmatrix} a \cos(u(t + pT)) \cos(v_0 + t + q2\pi) \\ a \cos(u(t + pT)) \sin(v_0 + t + q2\pi) \\ \mathfrak{E}(u(t + pT)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(u(t)) \cos(v_0 + t) \\ a \cos(u(t)) \sin(v_0 + t) \\ \mathfrak{E}(u(t)) \end{pmatrix} = \gamma(t). \end{aligned}$$

Also ist γ in der Tat periodisch.

- (b) Wir zeigen, dass pT die kleinste positive Zahl τ derart ist, dass $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Mit der Absicht, einen Widerspruch herbeizuführen, nehmen wir an, es gibt eine positive Zahl $\tau < pT$, die diese Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wie im Beweis von (a) ausgeführt, existieren dann positive ganze Zahlen l, m derart, dass $\tau = l2\pi = mT$ gilt. Es folgt $a\sqrt{K}l = m$, d.h. $\frac{p}{q}l = m$ und schließlich $lp = mq$. Weiterhin impliziert die Widerspruchsannahme $\tau < pT$, dass $m < p$ gilt. Da p und q nach Voraussetzung teilerfremd sind, folgt aus $lp = mq$, dass m von p geteilt wird, d.h. es existiert eine ganze Zahl x mit $m = xp$. Da m und p positiv sind, folgt zunächst $x > 0$ und daraus $x \geq 1$. Somit gilt $m \geq p$, im Widerspruch zur eben abgeleiteten Ungleichung $m < p$. \square

5.1.24 Korollar. Die Geodätische γ_{c,v_0} durchschneidet den Äquator zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkte $\tilde{f}(0, v_0)$ und durchläuft diesen Punkt nach q vollen Umläufen um die Spindelfläche zum ersten Mal wieder mit derselben Steigung.

5.1.25 Proposition. Es gelte $0 < |c| < a$ sowie $a\sqrt{K} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q .

- (a) Falls q ungerade ist, so besitzt die Geodätische γ_{c,v_0} genau $2p$ Schnittpunkte mit dem Äquator, und der Azimutwinkelabstand benachbarter Schnittpunkte beträgt $\Delta v = \frac{\pi}{p}$.

- (b) Falls q gerade ist, so besitzt die Geodätische γ_{c,v_0} genau p Schnittpunkte mit dem Äquator, und der Azimutwinkelabstand benachbarter Schnittpunkte beträgt $\Delta v = \frac{2\pi}{p}$.

Beweis. Die Geodätische γ_{c,v_0} durchschneidet zu jedem Zeitpunkt, der ein Vielfaches von $T = \frac{q2\pi}{p}$ ist, den Äquator mit derselben Steigung wie zum Zeitpunkt $t = 0$. Ferner durchschneidet die Geodätische den Äquator zu den Zeitpunkten $(n + \frac{1}{2})T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt somit $2p$ Kandidaten für Schnittpunkte der Geodätischen mit dem Äquator. Wir setzen $z := e^{i\frac{2\pi}{p}}$, dann ist z eine Lösung der Gleichung $z^p = 1$ und erzeugt die zyklische Gruppe $C_p := \{z^k \mid 1 \leq k \leq p\}$. Da q und p nach Voraussetzung teilerfremd sind, ist auch z^q ein Erzeuger von C_p (eine primitive p -te Einheitswurzel). Folglich sind alle Punkte in $\{(z^q)^k \mid 1 \leq k \leq p\}$ voneinander verschieden. Der Polarwinkel jedes dieser Punkt ist ein Vielfaches von $\frac{q2\pi}{p}$ modulo 2π . Wir bezeichnen die zyklische Gruppe, die von der Zahl $w := e^{i\frac{\pi}{p}}$ erzeugt, wird mit C_{2p} .

- (a) Falls q ungerade ist, so sind q und $2p$ teilerfremd, somit ist auch mit w auch w^q ein Erzeuger von C_{2p} . Also sind alle $2p$ Schnittpunkte der Geodätischen γ_{c,v_0} mit dem Äquator voneinander verschieden. Der Winkelabstand benachbarter Schnittpunkte beträgt $\frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}$.
- (b) Falls q gerade ist, so gilt $q = 2d$ mit einer natürlichen Zahl $d > 0$, die zu p teilerfremd ist. Wir betrachten die Abbildung $Q: C_{2p} \rightarrow C_{2p}, x \mapsto x^q$. Deren Kern ist gleich $\{1, w^p\}$, denn aus $w^{kq} = 1$ folgt, dass $2p$ ein Teiler von $kq = 2kd$ und somit p ein Teiler von kd ist. Damit wird k von p geteilt, und es folgt $k = 0$ oder $k = p$. Mit dem Isomorphiesatz ergibt sich, dass die Bildmenge von Q eine Untergruppe von C_{2p} der Ordnung p und somit gleich C_p ist. Damit besitzt die Geodätische γ_{c,v_0} für gerade Werte von q genau p Schnittpunkte mit dem Äquator, wobei der Winkelabstand benachbarter Schnittpunkte $\frac{2\pi}{p}$ beträgt. \square

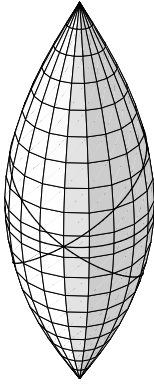
Die Abbildungen 5.4a bis 5.4d zeigen die Spindelfläche mit $K = 1$ und $a = 1/2$ sowie die durch den Punkt $\tilde{f}(0,0)$ verlaufende Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.4$. Da für die gegebene Kombination von K und a (mit den Bezeichnungen von Satz 5.1.23 und Proposition 5.1.25) $p = 1$ und $q = 2$ gilt, existiert *ein* Schnittpunkt der Geodätischen mit dem Äquator, und die Geodätische benötigt *zwei* volle Umläufe um die Spindelfläche, bis sie zum ersten Mal wieder mit derselben Steigung durch den Punkt $\tilde{f}(0,0)$ läuft.

Die Abbildungen 5.5a bis 5.5d zeigen die Spindelfläche $\mathcal{S}_{1,1/3}$ und die durch den Punkt $\tilde{f}(0,0)$ verlaufende Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.2$. Wegen $p = 1$ und $q = 3$ existieren nach Proposition 5.1.25 *zwei* Schnittpunkt der Geodätischen mit dem Äquator, und die Geodätische benötigt *drei* volle Umläufe um die Spindelfläche bis zur glatten Rückkehr zum Punkt $\tilde{f}(0,0)$.

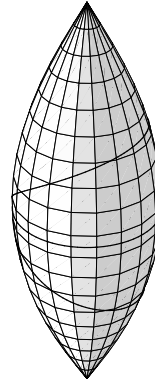
Die Abbildungen 5.6a bis 5.6d zeigen die Spindelfläche $\mathcal{S}_{1,2/3}$ und die durch den Punkt $\tilde{f}(0,0)$ verlaufende Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.5$. Wegen $p = 2$ und $q = 3$ existieren *vier* Schnittpunkt der Geodätischen mit dem Äquator, und die Geodätische benötigt *drei* volle Umläufe um die Spindelfläche bis zur glatten Rückkehr zum Punkt $\tilde{f}(0,0)$.

5.1.26 Bemerkung. Die Geodätischen auf $\mathcal{S}_{K,a}$ verhalten sich für den Fall, dass $a\sqrt{K}$ eine *irrationale* Zahl ist, gänzlich anders als im rationalen Fall. Für $a\sqrt{K} \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ liegt das Bild jeder parametrischen Geodätischen γ_{c,v_0} mit $0 < |c| < a$ *dicht* in der Teilmenge der Spindelfläche, die durch die beiden Wendekreise der Geodätischen berandet wird, vgl. etwa [7], Kapitel 10.

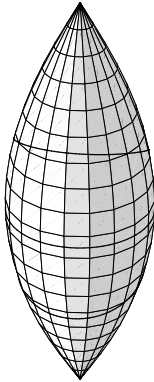
Die Abbildungen 5.7a bis 5.7d zeigen die Spindelfläche mit $K = 1$ und $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sowie Teilen der am Punkt $\tilde{f}(0,0)$ „startenden“ Geodätischen mit Neigungskonstante $c = 0.6$. Ein *Zyklus* entspricht einem Parameterintervall der Länge $\frac{2\pi}{a\sqrt{K}} = 2\sqrt{2}\pi$. Für



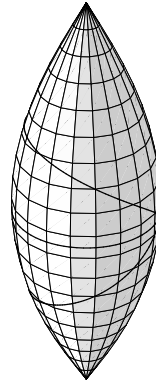
(a) Ansicht von vorne



(b) Ansicht aus 90 Grad



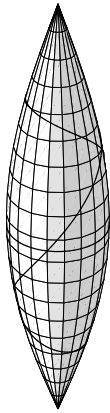
(c) Ansicht aus 180 Grad



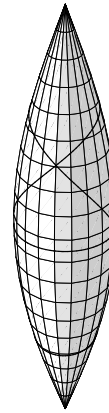
(d) Ansicht aus 270 Grad

Abbildung 5.4: Spindelfläche mit $K = 1$, $\alpha = 1/2$ und Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.4$ durch $\tilde{f}(0,0)$.

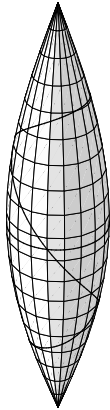
5 Räumliche Realisierungen nichtklassischer Ebenen



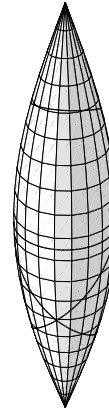
(a) Ansicht von vorne



(b) Ansicht aus 90 Grad

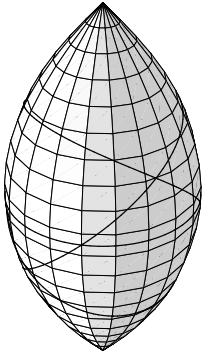


(c) Ansicht aus 180 Grad

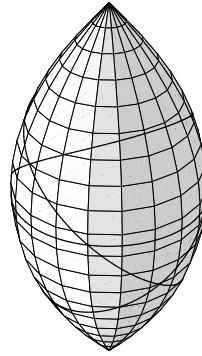


(d) Ansicht aus 270 Grad

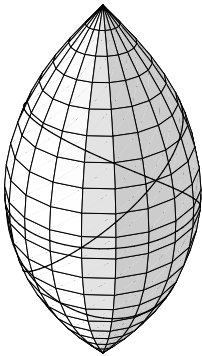
Abbildung 5.5: Spindelfläche mit $K = 1$, $a = 1/3$ und Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.2$ durch $\tilde{f}(0,0)$.



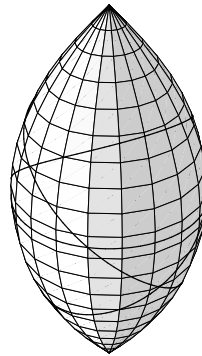
(a) Ansicht von vorne



(b) Ansicht aus 90 Grad

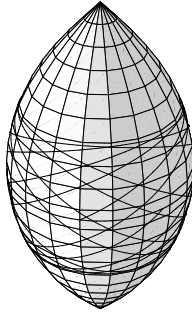


(c) Ansicht aus 180 Grad

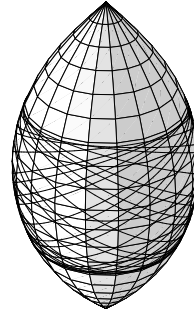


(d) Ansicht aus 270 Grad

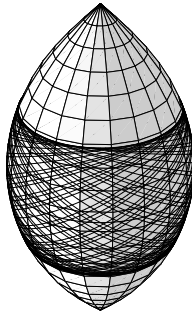
Abbildung 5.6: Spindelfläche mit $K = 1$, $\alpha = 2/3$ und Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.5$ durch $\tilde{f}(0,0)$.



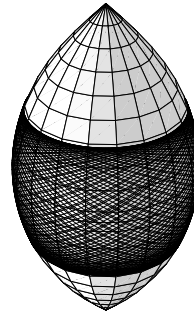
(a) 10 Zyklen



(b) 20 Zyklen



(c) 50 Zyklen



(d) 100 Zyklen

Abbildung 5.7: Spindelfläche mit $K = 1$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$ und Geodätische mit Neigungskonstante $c = 0.6$.

wachsende Zyklusanzahl wird der Gürtel zwischen den beiden Wendekreisen der Geodätischen zunehmend ausgefüllt.

In Vorbereitung des folgenden Abschnitts führen wir Bezeichnungen für die Systeme (maximaler) geodätischer Punktmengen der Spindelfläche ein, vgl. Definition 1.3.49 sowie Bemerkung 5.1.18. Es bezeichne

$$\mathcal{M} := \{g \subset \mathcal{S}_{a,K} \mid \exists v_0 \in \mathbb{R}: g = \text{Im } \mu_{v_0}\}$$

das System der Meridiane,

$$\mathcal{N} := \{g \subset \mathcal{S}_{a,K} \mid \exists v_0, c \in \mathbb{R}: 0 < |c| \leq a \text{ und } g = \text{Im } \gamma_{c,v_0}\}$$

das System aller maximalen geodätischen Punktmengen, welche von parametrisierten Geodätischen mit von Null verschiedener Neigungskonstante c herkommen und $\mathcal{G} := \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ das System *aller* geodätischen Punktmengen der Spindelfläche.

5.2 Ebene Abschnitte von $\mathcal{S}_{K,a}$ als CDs

In Abschnitt 2.3 haben wir räumliche Realisierungen von CDs eingeführt und gezeigt, wie durch Einkleben derselben in affine Ebenen räumliche SMH-Systeme konstruiert werden können. Wir konkretisieren diese Konstruktion nun mit Hilfe ebener Abschnitte der Spindelfläche. Diese werden wir stets so wählen, dass sie in der Teilmenge

$$\mathcal{S}_+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_{a,K} \mid x_1 > 0\}$$

von $\mathcal{S}_{a,K}$ liegen. Wir spezifizieren das Liniensystem, das auf \mathcal{S}_+ vom System der Geodätischen der Spindelfläche induziert wird: Hierzu bezeichne $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_+}$ die Menge der in \mathcal{S}_+ verlaufenden Meridiane. Das System $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_+}$ bestehe aus denjenigen Teilmengen $g \subset \mathcal{S}_+$, für die eine parametrisierte Geodätische γ_{c,v_0} und ein Teilintervall $I \subseteq \mathbb{R}$ derart existieren, dass I eine Zusammenhangskomponente des Urbildes von \mathcal{S}_+ unter γ_{c,v_0} ist und $g = \gamma_{c,v_0}(I)$ gilt. Schließlich sei $\mathcal{G}_{\mathcal{S}_+} := \mathcal{M}_{\mathcal{S}_+} \cup \mathcal{N}_{\mathcal{S}_+}$.

5.2.1 Lemma. Für alle α, K mit $0 < \alpha \sqrt{K} < 1$ ist die Inzidenzstruktur mit der Punktmenge \mathcal{S}_+ und dem Geradensystem $\mathcal{G}_{\mathcal{S}_+}$ ein linearer Raum.

Beweis. Zum Beweis verwenden wir eine der in Abschnitt 5.1.2 eingeführten geodätischen Abbildungen (siehe Definition 5.1.1) und die übrigen dort eingeführten Bezeichnungen. Wir betrachten das Bild von \mathcal{S}_+ unter der geodätischen Abbildung $\lambda := \lambda_0$, vgl. Korollar 5.1.7. Mit $\bar{\lambda} = \bar{\lambda} \circ f^{-1}$ und

$$\bar{\lambda}: D \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \tan(\alpha \sqrt{K} v) \\ \tan(\sqrt{K} u) \sec(\alpha \sqrt{K} v) \end{pmatrix}$$

sowie Proposition 5.1.3 folgt

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{S}_+) &= \bar{\lambda} \left(J_u \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \left(-\tan\left(\alpha \sqrt{K} \frac{\pi}{2}\right), \tan\left(\alpha \sqrt{K} \frac{\pi}{2}\right) \right) \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die λ -Bilder der durch $v = -\frac{\pi}{2}$ bzw. $v = \frac{\pi}{2}$ gegebenen Meridiane sind jeweils vertikale Geraden, die den offenen Parallelstreifen $\lambda(\mathcal{S}_+)$ seitlich begrenzen. Dieser Parallelstreifen ist konvex bezüglich $\text{aff}_1 \mathbb{R}^2$, also ist $\lambda(\mathcal{S}_+)$ mit dem System $\text{aff}_1 \mathbb{R}^2 \cap \lambda(\mathcal{S}_+)$ ein linearer Raum. Diese inzidenzgeometrische Eigenschaft wird durch den von λ^{-1} induzierten Isomorphismus von Inzidenzstrukturen auf \mathcal{S}_+ mit dem System $\mathcal{G}_{\mathcal{S}_+}$ übertragen. \square

5.2.2 Bemerkung. Im Falle $\alpha \sqrt{K} = \frac{1}{2}$ ist $\lambda(\mathcal{S}_+)$ gleich dem Parallelstreifen $(-1, 1) \times \mathbb{R}$. Für $\frac{1}{2} < \alpha \sqrt{K} < 1$ ist der Parallelstreifen breiter, für $0 < \alpha \sqrt{K} < \frac{1}{2}$ schmaler.

Zur Begrenzung unserer Spindelflächenabschnitte betrachten wir Kurven, die durch Schnitt der Spindelfläche mit Ebenen entstehen, die zur Drehachse parallel sind, diese jedoch nicht enthalten. Der Abschnitt soll dann diejenige Teilmenge der Spindelfläche

sein, die in demjenigen von der Ebene abgetrennten Halbraum liegt, welcher die Drehachse nicht enthält. Wegen der Rotations-symmetrie von $S_{K,a}$ können wir uns auf Ebenen mit *einer* festen, zur Drehachse senkrechten Normalenrichtung beschränken. Wir wählen hierfür die x_1 -Richtung und setzen für $0 < x_0 < a$

$$X := X_{x_0} := \{(x_0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \quad \text{sowie} \\ \mathcal{C} := \mathcal{C}_{x_0} := X \cap S_{a,K}.$$

5.2.3 Proposition. *Die Menge \mathcal{C} ist eine zur Kreislinie homöomorphe C^2 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Mit $J_u = \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right)$ ist $f := \tilde{f}|_{J_u \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$ eine bijektive Parametrisierung von S_+ . Für $0 < x_0 < a$ und

$$\bar{\mathcal{C}} = \left\{ (u, v) \in J_u \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mid a \cos(\sqrt{K}u) \cos v = x_0 \right\}$$

ergibt sich $\mathcal{C} = f(\bar{\mathcal{C}})$. Für alle $(u, v) \in \bar{\mathcal{C}}$ ist wegen $\cos(\sqrt{K}u) \leq 1$ die Beziehung $\cos v \geq \frac{x_0}{a} > 0$, d.h. $|v| \leq \arccos \frac{x_0}{a} < \frac{\pi}{2}$ erfüllt. Ferner gilt für alle $(u, v) \in \bar{\mathcal{C}}$, dass

$$\left| \sqrt{K}u \right| = \arccos \left(\frac{x_0}{a \cos v} \right).$$

Wir setzen nun $v_m := \arccos \frac{x_0}{a}$ und führen Funktionen g_1 und g_2 derart ein, dass $\bar{\mathcal{C}}$ die Vereinigung der Graphen von g_1 und g_2 ist:

$$g_1: [-v_m, v_m] \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto +\frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \left(\frac{x_0}{a \cos v} \right), \\ g_2: [-v_m, v_m] \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto -\frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \left(\frac{x_0}{a \cos v} \right).$$

Eine Parametrisierung von $\bar{\mathcal{C}}$ ist durch

$$\bar{c}: [-v_m, 3v_m] \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \bar{c}(t) = \begin{cases} (g_1(-t), -t), & -v_m \leq t \leq v_m, \\ (g_2(t - 2v_m), t - 2v_m), & v_m \leq t \leq 3v_m \end{cases}$$

gegeben. Es gilt $g_1(-v_m) = 0 = g_2(-v_m)$, also ist \bar{c} auch an der Stelle $t = v_m$ wohldefiniert und nach Lemma 1.2.2 ist \bar{c} stetig. Es gilt $\bar{c}(-v_m) = \bar{c}(3v_m)$, und die Einschränkung von \bar{c} auf $[-v_m, 3v_m)$ ist injektiv. Nach Definition 3.1.1 ist \bar{c} somit eine C^0 -parametrisierte einfach geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 , und \bar{C} ist als Bildmenge von \bar{c} homöomorph zur Kreislinie. Das Bild $f(\bar{C}) = \mathcal{C}$ von \bar{C} unter dem Homöomorphismus f ist somit ebenfalls eine geschlossene Jordankurve. Aus dem Satz vom regulären Wert (vgl. etwa Theorem 9.3. in [2]) folgt, dass \bar{C} eine eindimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 und somit \mathcal{C} eine eindimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit von X ist. Die Parametrisierung $c := f \circ \bar{c}$ von \mathcal{C} ist außer an den Stellen $t = -v_m$ bzw. $t = 3v_m$ sowie $t = v_m$ beliebig oft differenzierbar. Man kann aber auch in den Umgebungen der Punkte $c(\pm v_m)$ lokale differenzierbare Parametrisierungen von \mathcal{C} erhalten, indem man die Gleichung

$$a \cos(\sqrt{K} u) \cos v = x_0$$

nach v auflöst und sich analog zum obigen Verfahren Funktionen h_1 und h_2 in der unabhängigen Variablen u verschafft, vgl. Abschnitt 5.3. \square

5.2.4 Bemerkung. Zu jedem Punkt p von \mathcal{C} existiert eine (modulo 2π eindeutige) Polardarstellung $(x_0, \rho(\phi) \cos \phi, \rho(\phi) \sin \phi)$ bezüglich des Zentrums $(x_0, 0, 0)$, und man kann sich überlegen, dass durch

$$\phi \mapsto (x_0, \rho(\phi) \cos \phi, \rho(\phi) \sin \phi)$$

eine globale C^2 -Parametrisierung von \mathcal{C} definiert ist. Durch Umparametrisieren kann hieraus eine Bogenlängenparametrisierung $c: I \rightarrow \mathcal{C}$ gewonnen werden.⁹

Wir führen nun die Bezeichnungen D für die von \mathcal{C} auf S_+ berandete Menge und D' für die von \mathcal{C} auf der Ebene X berandete

⁹ Vgl. etwa Abschnitt 1-5 von [15].

Menge ein:

$$\begin{aligned} D &:= D_{x_0} := \{x \in \mathcal{S}_+ \mid x_1 \geq x_0\}, \\ D' &:= \{(x_0, x_2, x_3) \in X \mid x \in D\}. \end{aligned}$$

5.2.5 Lemma. *Die Parallelprojektion $\Pi := \Pi_X: \mathbb{R}^3 \rightarrow X$, die jedem Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ den Punkt $(x_0, x_2, x_3) \in X$ zuordnet, lässt \mathcal{C} punktweise fest und realisiert nach Einschränkung auf D einen Homöomorphismus von D nach D' .*

Mit Proposition 5.2.3 und den eben getroffenen Feststellungen sind wir nun in der Lage, Satz 3.1.14 anzuwenden.

5.2.6 Korollar. *Die Menge D ist eine kompakte und einfach zusammenhängende Teilmenge von \mathcal{S}_+ . Als homöomorphes Bild von D ist D' eine kompakte und einfach zusammenhängende Teilmenge von X .*

Wir haben somit bereits einige der Zutaten zu einer räumlich mit ebenem Rand realisierten CD und zeigen im Folgenden, dass D mit dem System

$$\mathcal{D} := \{g \cap D \mid g \in \mathcal{G}_{\mathcal{S}_+}, |g \cap D| \geq 2\}$$

eine CD in Sinne von Definition 2.1.6 ist. Aus Korollar 5.2.6 folgt, dass D homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskreisscheibe ist. Da (D, \mathcal{D}) vermöge der geodätischen Abbildung λ_0 als Inzidenzstruktur isomorph zu einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ ist, sind die Anforderungen an einen linearen Raum erfüllt. Es bleibt noch nachzuweisen, dass das dritte Axiom von Definition 2.1.6 erfüllt ist. Wir erledigen dies, indem wir zeigen, dass jede Geodäte in \mathcal{S}_+ den Rand \mathcal{C} von D in höchstens zwei Punkten trifft. Damit ist (D, \mathcal{D}) sogar eine streng konvexe CD.

Als Werkzeuge verwenden wir einige Resultate der klassischen Kurventheorie und verweisen hierfür auf [33]. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, orientieren wir die Ebene X durch die Wahl von $\hat{x}_1 = (1, 0, 0)$ als Normalenvektor und wählen eine Bogenlängenparametrisierung $c: I \rightarrow \mathcal{C}$ derart, dass die Punkte $c(s)$ für wachsendes

s in dem bezüglich der gewählten Orientierung positiven Sinne um die x_1 -Achse umlaufen, vgl. Bemerkung 5.2.4. Zu jedem Tangentenvektor $e_1(s) := c'(s)$ der Kurve c wählen wir $e_2(s)$ durch Drehung von $e_1(s)$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne um die Normalenrichtung. Die Krümmungsfunktion $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ der Kurve ist dann durch Gleichung 3.1 gegeben, an die wir hier erinnern: $c''(s) = \kappa(s) e_2(s)$ bzw. $\kappa(s) = \langle c''(s) | e_2(s) \rangle$.

Wir betrachten das sogenannte Darboux-Dreibein (E_1, E_2, E_3) . Hierzu machen wir uns die Tatsache zunutze, dass S_+ im Bild der (bei $v = 0$ zentrierten) Parametrisierung¹⁰ f liegt, verwenden den normierten Flächennormalenvektor $N := N_f$ mit

$$N(u, v) := \frac{\partial_u f(u, v) \times \partial_v f(u, v)}{\|\partial_u f(u, v) \times \partial_v f(u, v)\|}$$

und setzen

$$\begin{aligned} E_1(s) &:= c'(s), \\ E_3(s) &:= (N \circ x^{-1} \circ c)(s), \\ E_2(s) &:= E_3(s) \times E_1(s). \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$c''(s) = \kappa_g(s) E_2(s) + \kappa_N(s) E_3(s) \tag{5.15}$$

mit $\kappa_g(s) = \langle c''(s) | E_2(s) \rangle$ sowie $\kappa_N(s) = \text{II}(c'(s), c'(s))$, wobei II für die zweite Fundamentalform steht, vgl. etwa [33], Kapitel 3. Die Funktion κ_g heißt *geodätische Krümmung*, κ_N wird *Normalkrümmung* genannt.

5.2.7 Lemma. *Es sei S ein Flächenstück mit Gauß-Krümmung $K > 0$ und $c: I \rightarrow S$ eine durch die Bogenlänge parametrisierte Kurve auf S . Dann gilt $\kappa_N(s) \neq 0$ für alle $s \in I$.*

¹⁰ Vgl. die definierende Gleichung 5.6.

Beweis. Es sei k_1 der maximale und k_2 der minimale Eigenwert der Weingartenabbildung, X_1 und X_2 seien die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Ohne Einschränkung¹¹ können wir annehmen, dass X_1 und X_2 senkrecht aufeinander stehen und stellen c' als Linearkombination $c' = l_1 X_1 + l_2 X_2$ dar. Es ist dann

$$\kappa_N = \Pi(c', c') = l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2$$

Es gilt $k_1 k_2 = K$ (vgl. etwa [33], Definition 3.13), damit folgt aus der Voraussetzung $K > 0$, dass die beiden Eigenwerte entweder beide positiv oder beide negativ sind, also gilt $\kappa_N \neq 0$. \square

Wir kehren zurück zum konkreten Fall der Schnittkurve \mathcal{C} und kombinieren die Gleichungen 3.1 und 5.15:

$$\kappa e_2 = \kappa_g E_2 + \kappa_N E_3. \quad (5.16)$$

5.2.8 Proposition. *Es sei $\kappa_N(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann gilt $0 \notin \kappa(I)$, und für $s \in I$ ist $\kappa_g(s) \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn die Menge $\{e_2(s), E_3(s)\}$ linear abhängig ist.*

Beweis. Es sei $\kappa_N(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann gilt $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Denn gäbe es $s \in I$ mit $\kappa(s) = 0$, so wären $E_2(s)$ und $E_3(s)$ linear abhängig, im Widerspruch zu deren Orthogonalität, vgl. die Bemerkung hierzu im Beweis von Lemma 5.2.7). Wenn nun $\kappa_g(s) = 0$ für ein $s \in I$ gilt, so folgt $\kappa(s) e_2(s) = \kappa_N(s) E_3(s) \neq 0$. Da nach Voraussetzung $\kappa_N(s) \neq 0$ gilt, ist $\{e_2(s), E_3(s)\}$ linear abhängig. Falls umgekehrt die beiden Vektoren $e_2(s)$ und $E_3(s)$ für ein $s \in I$ linear abhängig sind, so existiert, da keiner der beiden der Nullvektor ist, ein Skalar $l \neq 0$ mit $e_2(s) = l E_3(s)$, und es gilt

$$\kappa_g(s) E_2(s) = (\kappa(s) l - \kappa_N(s)) E_3(s).$$

Wegen $E_2(s) \perp E_3(s)$ gilt notwendig $\kappa_g(s) = 0$ (und $\kappa(s) l = \kappa_N(s)$). \square

¹¹ Für $k_1 \neq k_2$ folgt aus der Selbstadjungiertheit der Weingartenabbildung, dass $X_1 \perp X_2$ gilt. Für $k_1 = k_2$ lässt sich eine Orthonormalbasis des zweidimensionalen Eigenraums wählen.

5.2.9 Proposition. Für jede Bogenlängenparametrisierung $c: I \rightarrow \mathcal{C}$ von \mathcal{C} gilt $\kappa_g(s) \neq 0$ für alle $s \in I$.

Beweis. Da die Spindel­fläche $\mathcal{S}_{K,\alpha}$ positive Gauß-Krümmung K besitzt, gilt $\kappa_N(s) \neq 0$ für alle $s \in I$ nach Proposition 5.2.7 und $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$ nach Proposition 5.2.8. Da c in einer zur x_1 -Achse senkrechten Ebene verläuft, ist die Komponente von $e_2(s)$ in x_1 -Richtung gleich Null. Der Flächennormalenvektor $N(u, v)$ dagegen hat für $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine von Null verschiedene x_1 -Komponente (vgl. den Ausdruck 5.4). Also sind $e_2(s)$ und $E_3(s)$ für kein $s \in I$ linear abhängig. Nach Proposition 5.2.8 gilt damit $\kappa_g(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. \square

5.2.10 Proposition. Die von \mathcal{C} berandete Teilmenge D' von X ist streng $\text{aff}_1 X$ -konvex.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Proposition 5.2.8 in Verbindung mit Satz 3.1.13 und Satz 3.1.14 \square

5.2.11 Proposition. Das von der Kurve \mathcal{C} auf \mathcal{S}_+ berandete Gebiet D ist konvex bezüglich des Systems $\mathcal{G}_{\mathcal{S}_+}$.

Beweis. Durch Kombination von [9] mit einem Resultat von Bangert (vgl. [5], Satz 2.8 und die nachfolgenden Bemerkung) folgt¹² aus Proposition 5.2.9, dass zu je zwei Punkten $p, q \in D$ eine Geodätische $\gamma_{p,q}: J \rightarrow D$ von p nach q existiert, die ganz in D verläuft. \square

Durch die Untersuchungen der Geodäten auf der Spindel­fläche im vorigen Abschnitt wissen wir, dass jede Geodäte in D im Bild einer parametrisierten Geodätischen $\gamma: \bar{J} \rightarrow \mathcal{S}_+$ liegt, die den Rand \mathcal{C} von D in mindestens zwei Punkten schneidet. Wir zeigen nun, dass keine Geodäte auf \mathcal{S}_+ mehr als zwei Punkte mit der Randkurve \mathcal{C} gemein hat.

¹² Wir danken Herrn Prof. R. Walter aus Dortmund für den Hinweis auf diese Literaturstellen.

Es sei also g eine Geodäte, die \mathcal{C} in den Punkten p und q schneidet. Es kann zwischen p und q keinen Punkt $z \in S_+ \setminus D$ auf g geben. Denn sonst existierten von p und q verschiedene Punkte $p', q' \in \mathcal{C} \cap g$, und g wäre eine Verbindungsgeodäte von p' und q' . Da nach der obigen Proposition andererseits eine in D gelegene Geodäte existiert, die p' und q' verbindet, ergibt sich ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Verbindungsgeodäten. Weiterhin ist ausgeschlossen, dass ein Intervall $J' \subseteq \bar{J}$ derart existiert, dass $\gamma(J') \subset \mathcal{C}$ gilt, denn sonst wäre die geodätische Krümmung auf $\gamma(J') \cap \mathcal{C}$ gleich Null, im Widerspruch zu Proposition 5.2.9.

Wir haben nun noch den Fall auszuschließen, dass zwischen p und q ein Punkt $z \in g$ existiert, an dem die Tangenten von g und \mathcal{C} übereinstimmen. Widrigenfalls gäbe es p' echt zwischen p und z und q' echt zwischen z und q . Die in D gelegene Verbindungsgeodäte $\gamma_{p',q'}$ kann g nicht in zwei Punkten schneiden, weil ansonsten ein Zweieck entstünde. Also verläuft die eindeutig bestimmte Verbindung von p' und q' durch den Punkt z , und ihre Tangente stimmt dort mit der Tangente von g überein; durch einen Punkt und die Steigung in diesem Punkt ist aber eine geodätische Punktmenge eindeutig bestimmt (vgl. Satz 1.3.30 zusammen mit Bemerkung 5.1.18), also muss $p = p'$ und $q = q'$ gelten, im Widerspruch zur Annahme. Mit Blick auf Definition 2.1.6 fassen wir zusammen:

5.2.12 Proposition. (a) Für jede Geodäte $g \in \mathcal{G}_{S_+}$ gilt $|g \cap \mathcal{C}| \leq 2$.

(b) Es ist $\mathcal{D} = \{g \cap D \mid |g \cap \mathcal{C}| = 2\}$.

(c) Jede Geodäte $g \in \mathcal{D}$ ist homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall. Ferner ist für jede Geodäte g die Menge $g \setminus \mathcal{C}$ zusammenhängend, und es gilt $g \cap \mathcal{C} = \partial g$.

5.2.13 Korollar.

(a) Die Inzidenzstruktur $\mathbb{D} := (D, \mathcal{D})$ ist eine streng konvexe CD.

(b) Mit $\mathbb{X} := (X, \text{aff}_1 X)$ ist (\mathbb{D}, \mathbb{X}) eine räumlich mit ebenem Rand realisierte CD im Sinne von Definition 2.3.1.

5.2.14 Bemerkung. Die Einschränkung der Parallelprojektion

$$\Pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow X, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_0, x_2, x_3)$$

auf D induziert einen Isomorphismus der Inzidenzstrukturen (D, \mathcal{D}) und $(D', \Pi(\mathcal{D}))$, siehe auch Satz 2.3.4 und Lemma 5.2.5.

5.3 Prüfung projektiver Äquivalenz

Es sei $0 < x_0 < a$. Wir verschaffen uns lokale Parametrisierungen der Kurve \mathcal{C} , die sich als Schnittmenge der Ebene X_{x_0} und der Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,a}$ ergibt (vgl. den Beweis von Proposition 5.2.3 und die dort eingeführten Bezeichnungen). Wir betrachten zunächst eine Umgebung des (von einem hinreichend weit vom Ursprung entfernten Punkt auf der positiven x -Achse aus gesehen) „rechten“ Scheitels $f(0, \arccos \frac{x_0}{a})$ der Kurve \mathcal{C} . Dort lässt sich die Gleichung

$$a \cos(\sqrt{K} u) \cos v = x_0$$

nach v auflösen, und erhalten wir $v = h(u)$ mit

$$h: \left(-\frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \frac{x_0}{a}, \frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \frac{x_0}{a} \right) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(t) = \arccos \left(\frac{x_0}{a \cos(\sqrt{K} t)} \right).$$

Die Parametrisierung ξ der Schnittkurve in der Umgebung des rechten Scheitels ergibt sich durch Einsetzen von $h(t)$ in die (bei $v_0 = 0$ zentrierte) Parametrisierung f der Spindelfläche: $\xi(t) = f(t, h(t))$. Mit der Wahl $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ und der Identität $\sin(\arccos s) = \sqrt{1 - s^2}$ erhalten wir

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{a^2 \cos^2(\sqrt{K} t) - x_0^2} \\ \mathfrak{E}(t) \end{pmatrix}.$$

Vermöge der Koordinatenabbildung (vgl. Definition 2.3.7)

$$\beta: X \longrightarrow \mathbb{R}^2, \beta(x_0, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$$

verschaffen wir uns eine parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^2 :

$$(\beta \circ \xi)(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 \cos^2(\sqrt{K}t) - x_0^2} \\ \mathfrak{E}(t) \end{pmatrix}.$$

Die projektive Standarddarstellung Ξ von $\beta \circ \xi$ ist gegeben durch

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 \cos^2(\sqrt{K}t) - x_0^2} \\ \mathfrak{E}(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben die spezielle Grundgleichung von $\mathcal{K}(\beta \circ \xi)$ zu vergleichen mit der speziellen Grundgleichung von $\mathcal{K}(\theta)$, wobei $\theta := \lambda \circ \xi$ die Parametrisierung der Bildkurve unter der geodätischen Abbildung λ ist. Mit $\lambda = \bar{\lambda} \circ f^{-1}$ (vgl. Korollar 5.1.7) erhalten wir

$$\theta(t) = (\bar{\lambda} \circ f^{-1} \circ \xi)(t) = \bar{\lambda}(t, h(t)).$$

Zusammen mit Definition 5.1.1 folgt somit, dass die projektive Standarddarstellung $\bar{\Theta}$ von $\mathcal{K}(\theta)$ durch

$$\bar{\Theta}(t) = \begin{pmatrix} \tan(a\sqrt{K}h(t)) \\ \tan(\sqrt{K}t) \sec(a\sqrt{K}h(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Nach Bemerkung 3.2.18 können wir zur Berechnung der Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichung von $\mathcal{K}(\theta)$ auch eine renormierte Darstellung $\rho\bar{\Theta}$ von $\bar{\Theta}$ verwenden (siehe auch Lemma 3.2.12 sowie Korollar 3.2.13). Zur Vereinfachung der Differentiationen ist es im vorliegenden Fall von Vorteil, den Ausdruck $\bar{\Theta}(t)$ mit $\cos(a\sqrt{K}h(t))$ zu multiplizieren

und so die Darstellung

$$\Theta: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(a\sqrt{K}h(t)) \\ \tan(\sqrt{K}t) \\ \cos(a\sqrt{K}h(t)) \end{pmatrix} \text{ zu erhalten.}$$

Nach Ausführung der ersten bis dritten Ableitungen von Ξ und Θ lassen sich die Koeffizientenfunktionen¹³ der allgemeinen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \Xi'''(t) &= \alpha_\xi(t)\Xi(t) + \beta_\xi(t)\Xi'(t) + \gamma_\xi(t)\Xi''(t) \\ \text{bzw. } \Theta'''(t) &= \alpha_\theta(t)\Theta(t) + \beta_\theta(t)\Theta'(t) + \gamma_\theta(t)\Theta''(t) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel berechnen.

Wir erhalten eine lokale Parametrisierung von \mathcal{C} in der Umgebung des *linken* Scheitels $f(0, -\arccos\frac{x_0}{a})$ sowie projektive Darstellungen der entsprechenden Kurven, indem wir in den obigen Ausdrücken $h(t)$ durch $-h(t)$ ersetzen.

Wir verfahren analog mit der lokalen Parametrisierung von \mathcal{C} in der Umgebung des oberen Scheitels $f(\frac{1}{\sqrt{K}}\arccos(\frac{x_0}{a}), 0)$. Dort lässt sich die Gleichung $a \cos(\sqrt{K}u) \cos v = x_0$ nach u auflösen und wir erhalten, wie im Beweis von Proposition 5.2.3) ausgeführt wurde, die Beziehung $u = g_1(v)$ mit

$$\begin{aligned} g_1: \left(-\arccos\frac{x_0}{a}, \arccos\frac{x_0}{a}\right) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ g_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{K}} \arccos\left(\frac{x_0}{a \cos(t)}\right). \end{aligned}$$

¹³ In diesem Abschnitt bezeichnen wir die Koeffizientenfunktionen in *allgemeinen* Grundgleichungen mit den Symbolen $\alpha_\xi, \beta_\xi, \gamma_\xi$, usw. und verwenden für die *speziellen* Grundgleichungen die Bezeichnungen $\widehat{\alpha}_\xi, \widehat{\beta}_\xi, \widehat{\gamma}_\xi$, etc.. Der Kürze halber verwenden wir den Index ξ anstelle von $\beta \circ \xi$ und v anstelle von $\beta \circ v$.

Wir setzen $v: t \mapsto f(g_1(t), t)$ und erhalten nach Komposition mit der Koordinatenabbildung β die Parametrisierung

$$(\beta \circ v)(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\sqrt{K} g_1(t)) \sin t \\ \mathfrak{E}(g_1(t)) \end{pmatrix}$$

sowie deren projektive Darstellung

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\sqrt{K} g_1(t)) \sin t \\ \mathfrak{E}(g_1(t)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine (bereits renormierte) projektive Darstellung der Parametrisierung $\omega := \lambda \circ v$ ist gegeben durch

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \sin(a \sqrt{K} t) \\ \tan(\sqrt{K} g_1(t)) \\ \cos(a \sqrt{K} t) \end{pmatrix}.$$

Nach Ausführung der ersten bis dritten Ableitungen von Υ und Ω lassen sich die Koeffizientenfunktionen der allgemeinen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \Upsilon'''(t) &= \alpha_v(t) \Upsilon(t) + \beta_v(t) \Upsilon'(t) + \gamma_v(t) \Upsilon''(t) \\ \text{bzw.} \quad \Omega'''(t) &= \alpha_\omega(t) \Omega(t) + \beta_\omega(t) \Omega'(t) + \gamma_\omega(t) \Omega''(t) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel berechnen.

Wir erhalten eine lokale Parametrisierung von \mathcal{C} in der Umgebung des *unteren* Scheitels $f\left(-\frac{1}{K} \arccos \frac{x_0}{a}, 0\right)$ sowie projektive Darstellungen der entsprechenden Kurven, indem wir in den Ausdrücken für $(\beta \circ v)(t)$, $\Upsilon(t)$ und $\Omega(t)$ den Funktionsausdruck $g_1(t)$ durch $g_2(t)$ ersetzen.

Mit Lemma 3.2.16 erhalten wir für $\mathcal{K}(\beta \circ \xi)$ und $\mathcal{K}(\theta)$ sowie für $\mathcal{K}(\beta \circ \nu)$ und $\mathcal{K}(\omega)$ die Koeffizientenfunktionen der jeweiligen speziellen Grundgleichungen:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{3} \beta(t) + \frac{2}{27} \gamma(t)^3 - \frac{1}{9} \gamma''(t), \\ \hat{\beta}(t) &= \beta(t) + \frac{1}{3} \gamma(t)^2 - \gamma'(t), \\ \hat{\gamma}(t) &= 0.\end{aligned}$$

5.3.1 Bemerkung. Die praktische Durchführung dieser Rechnungen ist wegen der eskalierenden Komplexität der vorkommenden Ausdrücke (Ableitungen bis zur dritten Ordnung, Quotienten von Determinanten und Ableitungen derselben) manuell kaum zu bewältigen. Aus diesem Grund haben wir die Computeralgebra-Software *Mathematica* [62] für diese Rechnungen herangezogen und von deren Fähigkeit Gebrauch gemacht, symbolische (algebraische und differentialalgebraische) Operationen durchzuführen und die entsprechenden Resultat (so weit wie möglich und sinnvoll) algebraisch auszuwerten. Der Programmcode ist in Anhang A.1 abgedruckt.

Für Kombinationen von K und a mit $a^2 K = 1$, dem *sphärischen Grenzfall*, geht die Teilmenge \mathcal{S}_+ der Spindelfläche in die Hemisphäre mit Radius a über, die von uns betrachtete Schnittkurve \mathcal{C} wird ein Kleinkreis auf dieser Hemisphäre. In diesem Fall ist die geodätische Abbildung λ durch die Zentralprojektion auf eine zur Kurve \mathcal{C} parallele Ebene gegeben, vgl. Abschnitt 5.1.2. Daher ist $\lambda(\mathcal{C})$ ebenfalls ein Kreis und somit projektiv äquivalent zu \mathcal{C} , also stimmen für jede Parametrisierung c von \mathcal{C} die entsprechenden Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichungen von c und $\lambda \circ c$ nach Satz 3.3.2 überein. Im Einklang hiermit stehen die Resultate der von uns durchgeführten computeralgebraischen Rechnungen (vgl. Anhang A.1) für den sphärischen Grenzfall, die wir im Folgenden aufführen.

5.3.2 Ergebnis. Für die Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichungen der parametrisierten Kurven ξ (bzw. $\beta \circ \xi$), θ , ν (bzw. $\beta \circ \nu$) und ω gelten im Falle $a^2 K = 1$ die folgenden Aussagen:

(a) Es ist $\widehat{\alpha}_\xi = \widehat{\alpha}_\theta$, und für den Funktionsausdruck $\widehat{\alpha}_\xi(t)$ gilt¹⁴

$$\begin{aligned} & \frac{4 \left(a^3 - 2 a x_0^2 + a^3 \cos \left(\frac{2t}{a} \right) \right)^3}{3 x_0^2 \sec^2 \left(\frac{t}{a} \right) \tan \left(\frac{t}{a} \right)} \widehat{\alpha}_\xi(t) \\ &= -38 a^4 + 60 a^2 x_0^2 - 32 x_0^4 + (-49 a^4 + 64 a^2 x_0^2) \cos \left(\frac{2t}{a} \right) \\ & \quad + (-10 a^4 + 4 a^2 x_0^2) \cos \left(\frac{4t}{a} \right) + a^4 \cos \left(\frac{6t}{a} \right). \end{aligned}$$

(b) Es ist $\widehat{\beta}_\xi = \widehat{\beta}_\theta$, und für den Funktionsausdruck $\widehat{\beta}_\xi(t)$ gilt

$$\begin{aligned} & - \frac{8 \left(a^3 - 2 a x_0^2 + a^3 \cos \left(\frac{2t}{a} \right) \right)^2}{\sec^2 \left(\frac{t}{a} \right)} \widehat{\beta}_\xi(t) \\ &= 10 a^4 + 36 a^2 x_0^2 - 80 x_0^4 \\ & \quad + (15 a^4 + 16 a^2 x_0^2 + 16 x_0^4) \cos \left(\frac{2t}{a} \right) \\ & \quad + (6 a^4 - 20 a^2 x_0^2) \cos \left(\frac{4t}{a} \right) + a^4 \cos \left(\frac{6t}{a} \right). \end{aligned}$$

(c) Es ist $\widehat{\alpha}_v = \widehat{\alpha}_\omega$, und es gilt

$$\widehat{\alpha}_v(t) = - \frac{24 a^2 x_0^2 (a^2 - x_0^2) \sin(2t)}{(a^2 - 2 x_0^2 + a^2 \cos(2t))^3}.$$

(d) Es ist $\widehat{\beta}_v = \widehat{\beta}_\omega$, und für den Funktionsausdruck $\widehat{\beta}_v(t)$ gilt

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} (a^2 - 2 x_0^2 + a^2 \cos(2t))^2 \widehat{\beta}_v(t) = \\ & 3 a^4 - 2 a^2 x_0^2 + 2 x_0^4 + 4 a^2 (a^2 - 2 x_0^2) \cos(2t) + a^4 \cos(4t). \end{aligned}$$

¹⁴ Wo der Funktionsausdruck aus Platzgründen nicht auf einer Gleichungsseite isoliert werden konnte, dient der Fettdruck der typographischen Hervorhebung.

5.3.3 Korollar. Nach Satz 3.3.2 sind die Kurven $\beta \circ \xi$ und $\lambda \circ \xi$ im Falle $a^2 K = 1$ punktweise projektiv äquivalent (in dem zu Beginn von Abschnitt 3.3 spezifizierten Sinne), ebenso sind $\beta \circ \nu$ und $\lambda \circ \nu$ punktweise projektiv äquivalent.

5.3.4 Bemerkung. Die lokalen Parametrisierungen um den linken bzw. unteren Scheitelpunkt von \mathcal{C} sind ebenfalls punktweise projektiv äquivalent zu den jeweiligen Bildkurven unter der geodätischen Abbildung λ . Es lässt sich also eine stückweise definierte globale Parametrisierung der ganzen Schnittkurve \mathcal{C} angeben, die projektiv äquivalent zu ihrem Bild unter λ ist.

Wegen der Komplexität der Ausdrücke, die sich für $\widehat{\alpha}_\xi(t, K, a, x_0)$, $\widehat{\alpha}_\theta(t, K, a, x_0)$ usw. ergeben, haben wir auf den Versuch verzichtet, mit algebraischen oder funktionalanalytischen Methoden¹⁵ nachzuweisen, dass punktweise projektive Äquivalenz der Kurven \mathcal{C} und $\lambda(\mathcal{C})$ genau für den Fall $a^2 K = 1$ vorliegt. Jedoch lassen sich die Werte der Differenzfunktionen $\widehat{\alpha}_\xi - \widehat{\alpha}_\theta$ und $\widehat{\beta}_\xi - \widehat{\beta}_\theta$ bzw. $\widehat{\alpha}_\nu - \widehat{\alpha}_\omega$ und $\widehat{\beta}_\nu - \widehat{\beta}_\omega$ für jede gewünschte Kombination von a , K und x_0 , die den Bedingungen $0 < a^2 K < 1$ sowie $0 < x_0 < a$ genügt, etwa mit Hilfe von *Mathematica* numerisch berechnen und graphisch darstellen. Das hierfür erstellte Programm-Modul haben wir in Anhang A.2 wiedergegeben. In den Schaubildern 5.8 bis 5.11 sind die genannten Differenzfunktionen für die Wahl $K = 1$, $a = 0.4$ und $x_0 = 0.1$ dargestellt. Evident ist keine der Funktionen gleich der Nullfunktion.

5.3.5 Bemerkung. Die mit *Mathematica* erzeugten Funktionsgraphen basieren auf Berechnungen, die mit der Maschinengenauigkeit von 16 Stellen durchgeführt wurden. Es ist nun nicht von vorneherein auszuschließen, wenn auch höchst unwahrscheinlich, dass die hier gezeigten Graphen nur aufgrund von (durch viele Rechenschritte propagierten) Abbruch- bzw. Rundungsfehlern von dem Graphen der Nullfunktion abweichen. Laut Handbuch

¹⁵ In Abschnitt 4.4 konnte die entsprechende Fragestellung bei der Hilbert-Ebene durch die Untersuchung abbrechender Fourierreihen behandelt werden.

[62] bietet *Mathematica* einen Rechenmodus, in dem die Ergebnisse numerischer Berechnungen mit beliebig hoher, vom Benutzer einstellbarer Genauigkeit ausgegeben werden. Um also *numerisch streng* nachzuweisen, dass eine der hier betrachteten Differenzfunktionen nicht verschwindet, wäre unter Ausnutzung dieses Modus ein $\varepsilon > 0$ und t derart aufzufinden, dass der Wert der Differenzfunktion für dieses t außerhalb der ε -Umgebung der Null liegt.

5.3.6 Ergebnis. *Es bezeichne I den Definitionsbereich von ξ und I' den Definitionsbereich von ν . Nach Satz 3.3.2 existiert (jedenfalls im Falle $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$) keine projektive Abbildung μ mit der Eigenschaft, dass $(\mu \circ \pi \circ \beta \circ \xi)(t) = (\pi \circ \lambda \circ \xi)(t)$ für alle $t \in I$ gilt. Ebenso wenig existiert eine projektive Abbildung μ' derart, dass $(\mu' \circ \pi \circ \beta \circ \nu)(t) = (\pi \circ \lambda \circ \nu)(t)$ für alle $t \in I$ erfüllt ist.*

5.3.7 Ergebnis. *Die Kurven \mathcal{C} und $\lambda(\mathcal{C})$ sind (jedenfalls im Falle $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$) nicht punktweise projektiv äquivalent, unabhängig von der Parametrisierung für \mathcal{C} .*

Beweis. Es sei $c: J \rightarrow \mathcal{C}$ eine Parametrisierung von \mathcal{C} und es sei $\xi: I \rightarrow \mathcal{C}$ die zuvor verwandte lokale Parametrisierung. Dann existiert ein Teilintervall $J' \subset J$ und eine Umparametrisierung $\Phi: I \rightarrow J'$ mit $c(\Phi(t)) = \xi(t)$ für alle $t \in I$. Angenommen, es gibt eine projektive Abbildung μ derart, dass

$$(\mu \circ \pi \circ \beta \circ c)(s) = (\pi \circ \lambda \circ c)(s) \quad \text{für alle } s \in J \quad \text{gilt.}$$

Dann ist insbesondere

$$(\mu \circ \pi \circ \beta \circ c)(\Phi(t)) = (\pi \circ \lambda \circ c)(\Phi(t)) \quad \text{für alle } t \in I,$$

und somit

$$(\mu \circ \pi \circ \beta \circ \xi)(t) = (\pi \circ \lambda \circ \xi)(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

im Widerspruch zu Ergebnis 5.3.6. □

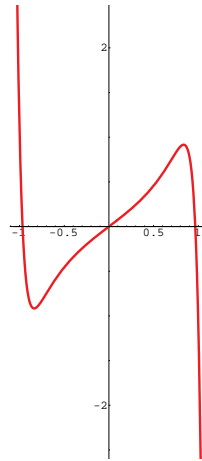


Abbildung 5.8: Graph der Differenzfunktion $\widehat{\alpha}_\xi - \widehat{\alpha}_\theta$
für $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$

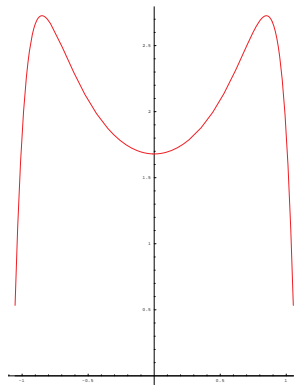


Abbildung 5.9: Graph der Differenzfunktion $\widehat{\beta}_\xi - \widehat{\beta}_\theta$
für $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$

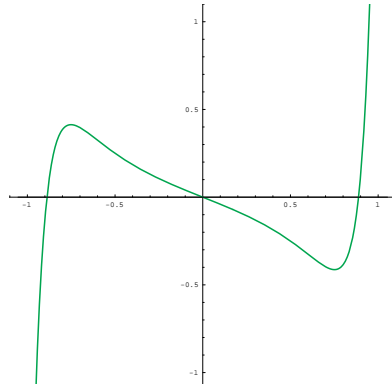


Abbildung 5.10: Graph der Differenzfunktion $\widehat{\alpha}_v - \widehat{\alpha}_\omega$
für $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$

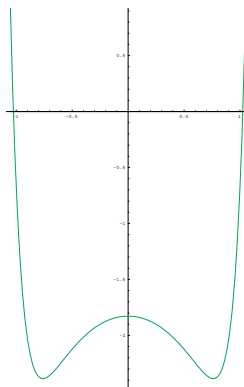


Abbildung 5.11: Graph der Differenzfunktion $\widehat{\beta}_v - \widehat{\beta}_\omega$
für $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$

5.4 Eine Spindelflächenebene

Wir verwenden die im vorigen Abschnitt näher untersuchte Spindelfläche $S_{1,0.4}$ für die explizite Konstruktion eines nicht desarguesschen Hilbertsystems im Raum. Hierzu betrachten wir die Ebene $X := \{(0.1, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ mit dem System $\text{aff}_1 X$, ferner die durch $\mathcal{C} := S_+ \cap X$ berandete räumlich mit ebenem Rand realisierte CD (\mathbb{X}, \mathbb{D}) (vgl. Proposition 5.2.12 und Korollar 5.2.13) sowie das zugehörige SMH-System $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ (vgl. Definition 2.3.2). Letzteres ist nach Satz 2.3.4 eine affine \mathbb{R}^2 -Ebene.

5.4.1 Proposition. *Die geodätische Abbildung $\lambda := \lambda_0$ ist eine stetige, injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ und induziert eine Einbettung von \mathbb{D} in die reelle affine Ebene.*

Beweis. Nach Korollar 5.1.7 ist λ geodätische Abbildung (vgl. Definition 1.3.40) und somit eine stetige, injektive Lineation von \mathbb{D} nach $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$. Aus Lemma 2.1.13 folgt unmittelbar, dass λ eine Einbettung von \mathbb{D} in $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ induziert. \square

5.4.2 Korollar. *Die affine \mathbb{R}^2 -Ebene $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ ist ein räumliches Hilbertsystem im Sinne von Definition 2.3.5.*

5.4.3 Ergebnis. *Das räumliche Hilbertsystem $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ ist eine nicht desarguessche affine Ebene.*

Beweis. Auf der Grundlage der Ergebnisse 5.3.6 und 5.3.7 folgt die Behauptung aus Satz 2.3.8. \square

Als Ergänzung zu dem eben formulierten Ergebnis veranschaulichen wir anhand einer konkreten Konfiguration, dass $\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$ die affine Desargues-Eigenschaft nicht besitzt (vgl. Definition 1.1.46 und Lemma 1.1.49). Wir wählen drei Geraden in \mathbb{X} , die in einem Punkt Z konfluent sind. Die Abbildung 5.12 zeigt eine Situation mit der konkreten Wahl $Z = (0.1, 0, 0.7)$. Da der affine Satz von Desargues für den zweidimensionalen affinen Unterraum \mathbb{X} von \mathbb{R}^3 gültig ist,

können wir uns im Außengebiet von \mathcal{C} zwei bezüglich des Punktes Z zentral gelegene Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten denken, vgl. Definition 1.1.46.

Wir betrachten nun die modifizierten Geraden aus $\mathcal{X}^{\mathbb{D}}$ (vgl. Definition 2.3.5), die durch Ersetzen derjenigen Teile der Geraden, die im Inneren von \mathcal{C} verlaufen, durch passende Geodätensegmente auf der Spindelfläche konstruiert werden. Wie aus Abbildung 5.13 ersichtlich ist, sind diese modifizierten Geraden *nicht* (in einem Punkt) konfluent. Damit liegen die Dreiecke *nicht zentral* in $\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^{\mathbb{D}}$, und nach Lemma 1.1.49 folgt, dass $\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^{\mathbb{D}}$ die Desargues-Eigenschaft nicht besitzt. Ergänzend hierzu zeigt die Abbildung 5.14 die Bilder von \mathcal{C} und der drei Geodätensegmente unter der geodätischen Abbildung λ . Die Bilder der Geodätensegmente sind (nicht konfluente) Geradenstücke.

5.4.4 Bemerkung. Aufgrund von Ergebnis 5.3.2 ist klar, dass die Spindelflächenebene für Werte von α und K , die die Beziehung $\alpha^2 K = 1$ erfüllen, also in den Fällen, die wir als „sphärischen Grenzfall“ bezeichnet haben, in eine desarguessche Ebene übergeht. Wir vermuten, dass alle anderen zulässigen Kombinationen von K , α und x_0 in Spindelflächenebenen resultieren, welche die Desargues-Eigenschaft *nicht* besitzen. Aus den gegen Ende von Abschnitt 5.3 geschilderten Gründen ist ein Beweis dieser Vermutung, sofern sie denn zutrifft, mit den hier vorgestellten Methoden schwer zu erbringen. Jedoch kann für jede interessierende Kombination von K , α und x_0 eine numerische Überprüfung bzw. ein Vergleich der entsprechenden Koeffizientenfunktionen durchgeführt werden, wie in Abschnitt 5.3 für den Spezialfall $K = 1$, $\alpha = 0.4$, $x_0 = 0.1$ dargelegt wurde. Wir haben so ein Verfahren entwickelt, das es erlaubt, Kombinationen von K , α und x_0 zu identifizieren, die zu einer nicht desarguesschen Spindelflächenebene führen.

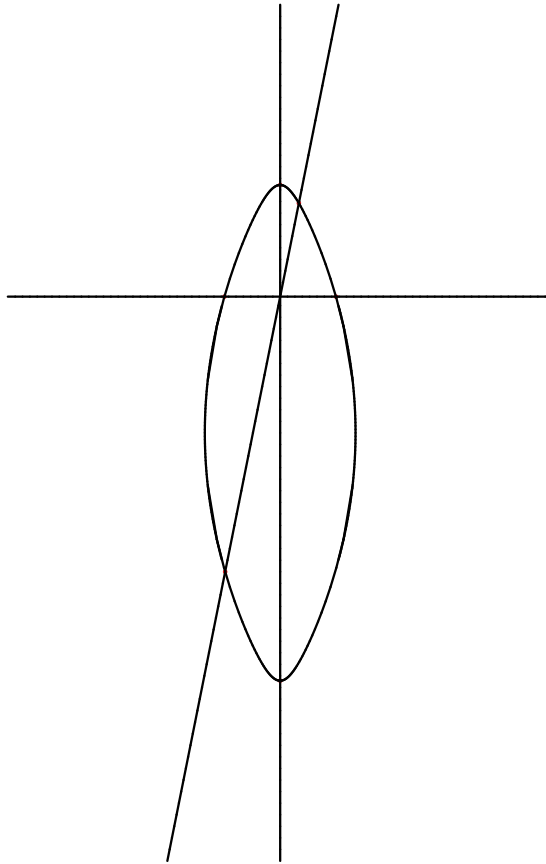


Abbildung 5.12: Darstellung der Kurve \mathcal{C} , die sich als Schnittmenge der Spindelfläche $\mathcal{S}_{1,0.4}$ und der Ebene $X_{x_0}=0.1$ ergibt, sowie dreier konfluenter Geraden aus $\text{aff}_1 X_{x_0}=0.1$.

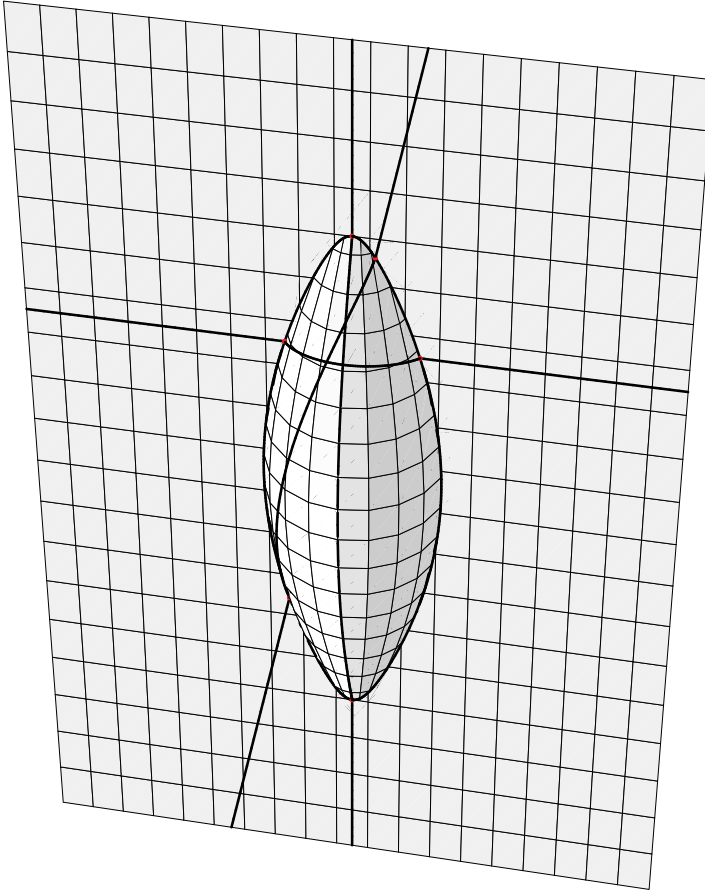


Abbildung 5.13: Spindelflächenebene mit den Scharparameterwerten $K = 1$, $a = 0.4$ und $x_0 = 0.1$ und drei (modifizierte) Geraden, die durch Fortsetzung der (gewöhnlichen) Geraden der Ebene durch Geodätensegmente auf der Spindelfläche entstehen. Ersichtlich sind die drei modifizierten Geraden nicht konfluent.

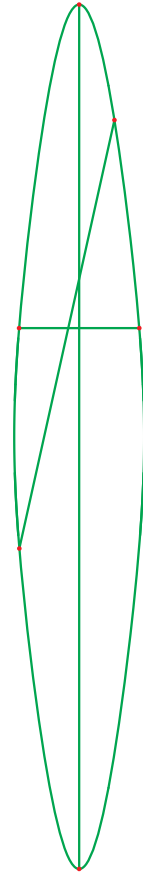


Abbildung 5.14: Bilder der Schnittkurve \mathcal{C} und der in Abbildung 5.13 dargestellten Geodätensegmente auf $\mathbb{S}_{1,0,4}$ unter der geodätischen Abbildung λ . Die drei Geodätensegmente werden unter λ auf drei (nicht konfluente) Geradenstücke abgebildet.

6 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir ebene und räumliche Realisierungen Hilbertscher Liniensysteme betrachtet, Kriterien dafür angegeben, wann solche Ebenen klassisch sind und diese Kriterien insbesondere auf eine konkrete Drehfläche konstanter positiver Gauß-Krümmung angewandt. Wir wollen nun noch einen Ausblick auf weiterführende Ideen und auf offene Fragen im Umkreis dieser Arbeit geben.

Für die Untersuchung geometrischer Strukturen sind in vielen Fällen Informationen über die jeweiligen Automorphismengruppen hilfreich, manche Autoren betrachten die Automorphismengruppe neben der Inzidenzstruktur als konstituierend für eine *Geometrie*, vgl. etwa [57]. Die von uns betrachteten Ebenen lassen im Allgemeinen nur wenige Kollineationen zu. So enthält die Automorphismengruppe der Hilbertschen Ebene von 1899 außer der Identität nur für spezielle Lagen des Inversionszentrums ein weiteres Element, vgl. [4] und [53]. Für die in der vorliegenden Arbeit diskutierte Spindelflächenebene besteht die Vermutung, dass die Automorphismengruppe isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist. Es ist jedoch noch offen, ob und ggf. wie sich die in [53] verwandten Methoden aus der algebraischen Geometrie für den Beweis dieser Vermutung verallgemeinern bzw. ersetzen lassen.

Die von uns mithilfe der Spindelfläche realisierte Ebene stellt kein singuläres Beispiel dar, vielmehr sind alle Flächen konstanter positiver¹ Gauß-Krümmung K Kandidaten für räumliche Realisie-

¹ Auch Flächen konstanter negativer Gauß-Krümmung lassen lokal geodätische Abbildungen auf die Ebene zu, sie besitzen aber nicht die zur Konstruktion räumlicher CDs notwendigen lokalen Konvexitätseigenschaften.

rungen von desarguesschen CDs bzw. von Hilbertschen Linien-systemen: Jede derartige Fläche ist ja nach dem Satz von Minding lokal isometrisch zur Sphäre mit Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$, wobei die lokale Iso-metrie durch Transformation auf geodätische Polarkoordinaten (vgl. z.B. [15], Abschnitt 4.6) oder Gaußsche (geodätische) Paral-lelkoordinaten (vgl. etwa [29], 3.3.10 oder [33], Abschnitt 4E) ver-mittelt wird. Die Komposition einer solchen lokalen Isometrie mit der Zentralprojektion von der Sphäre liefert eine lokale geodäti-sche Abbildung der Fläche auf die euklidische Ebene.

Ausgehend von unseren in Kapitel 5 angestellten Untersuchun-gen liegt die Betrachtung von *Wulstflächen* nahe, also von Dreh-flächen mit konstanter positiver Gauß-Krümmung K und Äqua-torialradius a mit $a^2 K > 1$ (vgl. etwa [29], 2.5.5 oder [33], Ab-schnitt 3C). Es ist zu erwarten, dass die mit Wulstflächen kon-struierten Hilbertsysteme analog zur Spindelflächenebene nur im sphärischen Grenzfall mit $a^2 K = 1$ desarguessch sind. Weiterhin ergibt sich ein ganzes Reservoir potentieller Beispiele aus den Un-tersuchungen von Flächen konstanter mittlerer Krümmung, wie sie unter anderem von U. Pinkall und I. Sterling ([46]) un-ternommen wurden (vgl. auch [16] und die dort enthaltenen Lite-raturhinweise): Bekanntlich besitzt für ein Flächenstück (f, N) mit konstanter mittlerer Krümmung $H_0 \neq 0$ und Normalenfeld N die Parallelfäche $(f + \frac{1}{2H_0}, N)$ konstante Gauß-Krümmung $4H_0^2$, wo-bei durch geeignete Zusatzannahmen ausgeartete Fälle vermie-den werden müssen, vgl. etwa [43], Abschnitt 5.3.

Bei der Betrachtung der hier genannten Flächen S stellt sich in unserem Kontext zunächst die Frage, ob sich jeweils räumliche CDs mit ebenem Rand realisieren lassen. Zwar existiert wegen der positiven Gauß-Krümmung zu jedem² Punkt eine Ebene $X \subseteq \mathbb{R}^3$ derart, dass die Schnittkurve $C := S \cap X$ einfach geschlossen und bezüglich $\text{aff}_1 X$ konvex ist. Allerdings ist nicht garantiert, dass der von C auf S berandete Bereich konvex bezüglich des Systems

² Gegebenenfalls muss man sich auf Punkte beschränken, die abseits von Selbst-durchdringungen der Fläche liegen.

der Geodätischen auf S ist. Umgekehrt ist zwar für jeden Punkt auf S die Existenz einer bezüglich des Geodätensystems von S konvexen Umgebung U_p gesichert, (vgl. etwa [15], Abschnitt 4.7, Proposition 4), es ist aber a priori nicht klar, ob Punkte $p \in S$, Umgebungen U_p und Ebenen X derart existieren, dass der ebene Schnitt $U_p \cap X$ eine bezüglich des Geodätensystems von S konvexe Teilmenge von S berandet.

Die übergeordnete Frage ist, ob es in der Klasse der Flächen, auf denen sich desarguessche CDs abgrenzen lassen, außer der Sphäre weitere Beispiele gibt, die desarguessche Hilbertsysteme liefern, für welche also die jeweilige geodätische Abbildung auf der Randkurve der für die Konstruktion gewählten CD mit einer projektiven Abbildung übereinstimmt. Als reizvolles analoges Problem hierzu wäre für den Fall der Hilbertschen Ebene zu klären, ob der Kreis die einzige Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft ist, dass C und das Bild $\iota(C)$ unter der Inversionsabbildung projektiv äquivalent sind.

Man kann sich auf den Standpunkt stellen, dass Flächen im \mathbb{R}^3 lediglich Vehikel zur Generierung interessanter Liniensysteme darstellen. Wenn man dieser Sichtweise folgt, so legt die Tatsache, dass für eine Flächenparametrisierung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch das kanonische Skalarprodukt des \mathbb{R}^3 eine Riemannsche Metrik auf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ induziert wird, das folgende Konstruktionsprinzip nahe: Die Punktmenge \mathbb{R}^2 wird mit der üblichen differenzierbaren Struktur sowie mit einer Riemannschen Metrik g_1 versehen. Der Riemannschen Mannigfaltigkeit (\mathbb{R}^2, g_1) ist eine eindeutig bestimmte kovariante Ableitung ∇_1 , der sogenannte Levi-Civita-Zusammenhang, zugeordnet (vgl. etwa [33], Satz 5.16). Um sicherzustellen, dass \mathbb{R}^2 mit dem System \mathcal{G}_1 der Geodäten bzgl. ∇_1 eine desarguessche Ebene ergibt, wird g_1 so gewählt, dass die zugehörige innere Krümmung K_1 konstant ist. Innerhalb einer kompakten Teilmenge D mit nichtleerem offenen Kern, die streng konvex bezüglich des Geodätensystems \mathcal{G}_1 von (\mathbb{R}^2, ∇_1) ist, wird eine andere Metrik g_2 gewählt und zwar so, dass D mit dem System der Geodätischen bezüglich g_2 eine desarguessche CD ist. Insbe-

sondere soll auch g_2 die Eigenschaft besitzen, dass die zugehörige innere Krümmung K_2 konstant ist.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass sich die Hilbertsche Ebene von 1899 auf genau diese Weise interpretieren lässt. Der Außenraum der berandenden Ellipse trägt die Standard-Metrik δ_{ij} , der Innenraum der Ellipse mit Zentrum $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ die Metrik g mit den Komponenten

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \delta_{ij}. \quad (6.1)$$

Setzt man $U := B := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und fasst man die die Inversionsabbildung $\iota: U \rightarrow B$ als Parametrisierung der im Ursprung gelochten euklidischen Ebene (B, δ_{ij}) auf, so wird vermöge ι auf U die Metrik induziert, deren Komponenten wir in Gleichung 6.1 angegeben haben.

In ähnlicher Weise induziert jeder Diffeomorphismus φ zwischen offenen Teilmengen U und B von \mathbb{R}^2 eine Metrik g_φ mit Krümmung $K = 0$ auf U , sofern B die euklidische Standardmetrik δ_{ij} trägt. Die Abbildung φ ist in dieser Situation trivialerweise isometrisch, und somit ist für jedes (parametrisierte) Geodätensegment l in (B, δ_{ij}) die Menge $\varphi^{-1}(l)$ (bzw. die Abbildung $\varphi^{-1} \circ l$) eine (parametrisierte) Geodätische von (U, g_φ) . Das Hilbertsche Beispiel zeigt, dass auch dann inzidenzgeometrisch interessante Strukturen (Hilbertsysteme) entstehen, wenn der Innenraum und der Außenraum der CD lokal isometrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind.

Eine andere Stoßrichtung ergibt sich, wie in Abschnitt 2.1 angedeutet, aus der Iteration der von uns beschriebenen Methode zur Konstruktion klassischer und nicht klassischer Ebenen: Liniensysteme, die durch Einkleben *endlich vieler* CDs in die reelle affine Ebene entstehen, können jedenfalls dann, wenn sich die CDs nicht überlappen, im Wesentlichen gleich behandelt werden wie

diejenigen Hilbertssysteme, die sich durch Einkleben einer einzigen CD ergeben. Auch das Einsetzen *abzählbar vieler* nicht überlappender CDs sollte keine Schwierigkeiten bereiten. Man könnte so beispielsweise zweidimensionale desarguessche Strukturen mit periodisch oder auch quasiperiodisch angeordneten lokalen Störungen der Metrik konstruieren. Existierende Untersuchungen der Desargues-Eigenschaft in physikalischen Kontexten wie etwa [21] und [44] geben Anlass zur Reflexion über mögliche physikalische Anwendungen bzw. Analoga solcher Strukturen.

Für alle hier erörterten Konstruktionen stellt sich das (vermutlich sehr schwierige) Isomorphieproblem, also die Frage nach Kriterien, anhand derer sich für zwei vorgelegte (insbesondere nicht desarguessche) Hilbertsche Liniensysteme entscheiden lässt, ob sie als affine \mathbb{R}^2 -Ebenen isomorph sind oder nicht.

Wir wollen mit einer uns wichtig erscheinenden Frage schließen, die wir in Kapitel 2 bereits erwähnt hatten: Nach dem Satz von Beltrami aus [6] (vgl. Satz 1.3.51 und Korollar 1.3.52) besitzt eine (zusammenhängende) reguläre Fläche S , die in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte einen Diffeomorphismus auf ein offenes Gebiet von \mathbb{R}^2 zulässt, der (parametrisierte) Geodätische von S auf (parametrisierte) Geradenstücke abbildet, notwendig konstante Gauß-Krümmung. Wir wissen andererseits aus der Topologischen Geometrie, dass jede desarguessche affine \mathbb{R}^2 -Ebene *als topologische Ebene* isomorph zu $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ist, vgl. Satz 1.2.27. Um auf der Grundlage dieses Resultats beweisen zu können, dass nur diejenigen regulären Flächen desarguessche Geodätensysteme zulassen, die konstante Gauß-Krümmung besitzen, ist die Klärung der Vermutung 2.1.24 notwendig, die wir an dieser Stelle noch einmal wiedergeben:

Vermutung. *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, V eine offene Teilmenge von S und $\phi: V \rightarrow E$ ein Homöomorphismus von V auf ein offenes Gebiet E in \mathbb{R}^2 , der (parametrisierte) Geodätische in $S \cap V$ auf (parametrisierte) Geraden(stücke) in E abbildet. Dann ist ϕ ein Diffeomorphismus.*

Beim Versuch, diese Vermutung zu beweisen, falls sie denn zutrifft, könnten Methoden von Nutzen sein, die Pogorelov in [47] auf ein verwandtes Problem angewandt hat, nämlich eine Variante des Beltramischen Satzes für Mannigfaltigkeiten mit einer positiv definiten Metrik, von der im Gegensatz zu Riemannschen Mannigfaltigkeiten lediglich stetige, nicht aber notwendigerweise differenzierbare Abhängigkeit von den Punkten der Mannigfaltigkeit gefordert wird.

A Anhang

A.1 Programm für computeralgebraische Berechnungen

```
(* *****  
ProjektiveAequivalenz.m  
Mathematica-Programm zur Ueberpruefung der punktweisen projektiven  
Aequivalenz einer xo-Niveaukurve auf der Spindelflaeche und ihres  
Bildes unter der geodaetischen Abbildung auf die reelle affine Ebene  
  
Autor: Thomas Schneider                               Version vom 29.03.2008  
***** *)  
  
Off[General::spell];  
Off[General::spell1];  
Off[ParametricPlot::ppcom];  
  
(* Fuer den Aequatorialradius a und die Gauss-Kruemmung K der  
Spindelflaeche gilt  $0 < a^2 K < 1$  *)  
  
(* Elliptisches Integral *)  
Ell[u_, a_, K_] :=  
Integrate[ Sqrt[ 1 - a^2 * K * ( Sin[ Sqrt[K] * x ] )^2 ], {x, 0, u}];  
  
(* Parametrisierung der Spindelfl"ache *)  
f[u_, v_, a_, K_] :=  
{ a * Cos[ Sqrt[K]*u ] * Cos[v],  
  a * Cos[ Sqrt[K]*u ] * Sin[v],  
  Ell[u, a, K] };  
  
(* Fuer  $0 < x_0 < a$  liefert der Schnitt der Spindelflaeche mit  
der Ebene  $x = x_0$  eine Kurve, deren Punkte der Gleichung  
 $a * Cos[ Sqrt[K]*u ] * Cos[v] = x_0$  genuegen *)  
  
(* In der Umgebung des (auf dem Aequator liegenden) rechten  
Scheitelpunktes erhalten wir  $v = g(u)$  mit der Funktion: *)
```

A Anhang

```
g[u_, a_, K_, xo_] := ArcCos[xo/(a* Cos[Sqrt[K]* u] )];

(* Obere Schranke und untere Schranke fuer die Argumente der
Funktion g(u) in der Umgebung des rechten Scheitels *)
obReS[ a_, K_, xo_ ] := (1/Sqrt[K]) * ArcCos[xo/a];
unReS[ a_, K_, xo_ ] := -(1/Sqrt[K]) * ArcCos[xo/a];

(* In der Umgebung des oberen Scheitelpunktes erhalten wir
u = h(v) mit der Funktion *)
h[ v_, a_, K_, xo_ ] := (1/Sqrt[K]) * ArcCos[ xo / ( a * Cos[v] ) ];

(* Obere Schranke und untere Schranke fuer die Argumente der
Funktion h(v) in der Umgebung des oberen Scheitels *)
obObS[ a_, K_, xo_ ] := ArcCos[ xo/a ];
unObS[ a_, K_, xo_ ] := -ArcCos[ xo/a ];

(* Notiz: Mathematica verwendet fuer den ArcCos die Funktion
Cos: [0,Pi] -> [ -1, 1], d.h. ArcCos liefert stets positive Winkel. *)

(* Parametrisierung der Schnittkurve in der Umgebung des rechten
Scheitels *)
xiBar[ t_, a_, K_, xo_ ] := f[ t, g[t, a, K, xo], a, K];

(* Parametrisierung der Schnittkurve in der Umgebung
des oberen Scheitels *)
upsilonBar[ s_, a_, K_, xo_ ] := f[ h[s, a, K, xo], s, a, K];

(* Projektion von xiBar auf die y-z-Ebene und Abbildung nach R^2 *)
xi[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
{ xiBar[t, a, K, xo][[2]], xiBar[t, a, K, xo][[3]] };

(* Projektion von upsilonBar auf die y-z-Ebene
und Abbildung nach R^2 *)
upsilon[ s_, a_, K_, xo_ ] :=
{ upsilonBar[s, a, K, xo][[2]], upsilonBar[s, a, K, xo][[3]] };

(* Projektive Standarddarstellung von xi: *)
Xi[t_, a_, K_, xo_] :=
{ xi[t, a, K, xo][[1]], xi[t, a, K, xo][[2]], 1 };

(* Ableitungen: *)
XiPrime[ t_, a_, K_, xo_] :=
D[ Xi[ s, a, K, xo], s ] /. {s -> t};
```

A.1 Programm für computeralgebraische Berechnungen

```

XiTwoPrime[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
D[ XiPrime[s, a, K, xo ], s ] /. {s -> t };

XiThreePrime[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
D[ XiTwoPrime[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t };

(* Wir verwenden die Cramersche Regel, um die Funktionen alphaXi,
betaXi und gammaXi der allg. Grundgleichung von Xi zu berechnen *)

XiMatrix[ t_, a_, K_, xo_ ] := Transpose[ { Xi[t, a, K, xo],
XiPrime[t, a, K, xo], XiTwoPrime[t, a, K, xo] } ];

alphaXi[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { XiThreePrime[t, a, K, xo],
XiPrime[t, a, K, xo], XiTwoPrime[t, a, K, xo] } ] /
Det[ XiMatrix[t, a, K, xo ] ];

betaXi[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Xi[t, a, K, xo],
XiThreePrime[t, a, K, xo], XiTwoPrime[t, a, K, xo] } ] /
Det[ XiMatrix[t, a, K, xo ] ];

gammaXi[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Xi[t, a, K, xo],
XiPrime[t, a, K, xo], XiThreePrime[t, a, K, xo] } ] /
Det[XiMatrix[t, a, K, xo ] ];

(* Es werden nun die Koeffizientenfunktionen der
speziellen Grundgleichung von xi berechnet *)

alphaXiHat[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
(1/27) * ( 27 * alphaXi[t, a, K, xo]
+ 9 * betaXi[t, a, K, xo] * gammaXi[t, a, K, xo]
+ 2 * ( gammaXi[t, a, K, xo] )^3
- 9 * ( D[ gammaXi[s, a, K, xo], {s, 2}] /. {s -> t } ));

betaXiHat[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
(1/3) * ( 3 * betaXi[t, a, K, xo] + ( gammaXi[t, a, K, xo] )^2
- 3 * ( D[gammaXi[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t } ));

gammaXiHat[ t_, a_, K_, xo_ ] :=0;

(* Projektive Standarddarstellung von upsilon: *)
Upsilon[ s_, a_, K_, xo_ ] :=
{ upsilon[s, a, K, xo][[1]], upsilon[s, a, K, xo][[2]], 1};

```

A Anhang

(* Ableitungen: *)

```
UpsilonPrime[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
D[ Upsilon[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t};
```

```
UpsilonTwoprime[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
D[ UpsilonPrime[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t};
```

```
UpsilonThreeprime[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
D[UpsilonTwoprime[s, a, K, xo], s] /. {s -> t};
```

(* Wir verwenden die Cramersche Regel, um die Funktionen
alphaUpsilon, betaUpsilon und gammaUpsilon der allg. Grundgleichung
von Upsilon zu berechnen *)

```
UpsilonMatrix[ t_, a_, K_, xo_ ] := Transpose[{Upsilon[t, a, K, xo],  
UpsilonPrime[t, a, K, xo], UpsilonTwoprime[t, a, K, xo]}];
```

```
alphaUpsilon[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
Det[ { UpsilonThreeprime[t, a, K, xo], UpsilonPrime[t, a, K, xo],  
UpsilonTwoprime[t, a, K, xo] } ] / Det[ UpsilonMatrix[t, a, K, xo] ];
```

```
betaUpsilon[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Upsilon[t, a, K, xo],  
UpsilonThreeprime[t, a, K, xo], UpsilonTwoprime[t, a, K, xo] } ] /  
Det[ UpsilonMatrix[t, a, K, xo] ];
```

```
gammaUpsilon[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Upsilon[t, a, K, xo],  
UpsilonPrime[t, a, K, xo], UpsilonThreeprime[t, a, K, xo] } ] /  
Det[ UpsilonMatrix[t, a, K, xo] ];
```

(* Es werden nun die Koeffizientenfunktionen der speziellen
Grundgleichung von upsilon berechnet *)

```
alphaUpsilonHat[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
(1/27) * ( 27 * alphaUpsilon[t, a, K, xo]  
+ 9 * betaUpsilon[t, a, K, xo] * gammaUpsilon[t, a, K, xo]  
+ 2 * (gammaUpsilon[t, a, K, xo] )^3  
- 9 * ( D[ gammaUpsilon[s, a, K, xo], {s, 2}] /. {s -> t} ) );
```

```
betaUpsilonHat[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
(1/3) * ( 3 *betaUpsilon[t, a, K, xo] + ( gammaUpsilon[t, a, K, xo] )^2  
- 3 * ( D[ gammaUpsilon[s, a, K, xo], s] /. {s -> t} ) );
```

```
gammaUpsilonHat[ t_, a_, K_, xo_ ] := 0;
```

A.1 Programm für computeralgebraische Berechnungen

```
(* Wir betrachten das Bild thetaBar der Kurve xiBar unter der
lokalen geodaetischen Abbildung lambda und renormieren die projektive
Standarddarstellung ThetaBar von thetaBar durch Multiplikation mit
Cos[ a * Sqrt[K]* g[t, a, K, xo] ] *)
```

```
Theta[t_, a_, K_, xo_] :=
{ Sin[ a * Sqrt[K]* g[t, a, K, xo] ],
  Tan[ Sqrt[K] * t],
  Cos[ a * Sqrt[K]* g[t, a, K, xo] ]};
```

```
theta[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
{ Sin[a*Sqrt[K]* g[t, a, K, xo] ], Tan[Sqrt[K]*t] };
```

```
(* Ableitungen: *)
ThetaPrime[ t_, a_, K_, xo_] :=
D[ Theta[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t };
```

```
ThetaTwoPrime[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
D[ ThetaPrime[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t };
```

```
ThetaThreePrime[t_, a_,K_, xo_] :=
D[ThetaTwoPrime[s, a, K, xo], s] /. {s -> t };
```

```
(* Wir verwenden die Cramersche Regel, um die Funktionen
alphaTheta, betaTheta, und gammaTheta der allg. Grundgleichung
von theta zu berechnen *)
```

```
ThetaMatrix[ t_, a_, K_, xo_ ] := Transpose[ {Theta[t, a, K, xo],
ThetaPrime[t, a, K, xo], ThetaTwoPrime[t, a, K, xo]} ];
```

```
alphaTheta[t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { ThetaThreePrime[t, a, K, xo],
ThetaPrime[t, a, K, xo], ThetaTwoPrime[t, a, K, xo]} ] /
Det[ ThetaMatrix[t, a, K, xo] ];
```

```
betaTheta[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Theta[t, a, K, xo],
ThetaThreePrime[t, a, K, xo], ThetaTwoPrime[t, a, K, xo]} ] /
Det[ ThetaMatrix[t, a, K, xo] ] ;
```

```
gammaTheta[t_, a_, K_, xo_] := Det[ { Theta[t, a, K, xo],
ThetaPrime[t, a, K, xo], ThetaThreePrime[t, a, K, xo]} ] /
Det[ ThetaMatrix[t, a, K, xo] ];
```

A Anhang

(* Berechnung der Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichung von theta *)

```
alphaThetaHat[ t_, a_, K_, xo_] :=  
(1/27) * ( 27 * alphaTheta[t, a, K, xo]  
+ 9 * betaTheta[t, a, K, xo]* gammaTheta[t, a, K, xo]  
+ 2 * ( gammaTheta[t, a, K, xo] )^3  
- 9 * ( D[ gammaTheta[s, a, K, xo], {s, 2}] /. {s -> t } ) );
```

```
betaThetaHat[ t_, a_, K_, xo_] :=  
(1/ 3) * ( 3 * betaTheta[t, a, K, xo] +  
( gammaTheta[t, a, K, xo] )^2  
- 3 * ( D[ gammaTheta[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t } ) );
```

```
gammaThetaHat[ t_, a_, K_, xo_ ] := 0;
```

(* Projektive Darstellung der mit lambda abgebildeten Kurve
upsilonBar, renormiert mit dem Faktor Cos[a*Sqrt[K]* t] *)

```
Omega[ t_, a_, K_, xo_ ] :=  
{ Sin[ a*Sqrt[K]* t ],  
  Tan[ Sqrt[K] * h[t, a, K, xo] ],  
  Cos[ a*Sqrt[K]* t ]};
```

(* Ableitungen: *)

```
OmegaPrime[ t_, a_, K_, xo_] :=  
D[ Omega[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t};
```

```
OmegaTwoPrime[ t_, a_, K_, xo_] :=  
D[ OmegaPrime[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t};
```

```
OmegaThreePrime[ t_, a_, K_, xo_] :=  
D[ OmegaTwoPrime[s, a, K, xo], s ] /. {s -> t};
```

(* Wir verwenden die Cramersche Regel, um die Koeffizientenfunktionen
alphaOmega, betaOmega und gammaOmega der allg. Grundgleichung
von Omega zu berechnen *)

```
OmegaMatrix[ t_, a_, K_, xo_ ] := Transpose[ {Omega[t, a, K, xo],  
OmegaPrime[t, a, K, xo], OmegaTwoPrime[t, a, K, xo] }];
```

```
alphaOmega[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { OmegaThreePrime[t, a, K, xo],
```


A.1 Programm für computeralgebraische Berechnungen

```

OmegaPrime[t, a, K, xo], OmegaTwoprime[t, a, K, xo] ] /
Det[ OmegaMatrix[t, a, K, xo] ];

betaOmega[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Omega[t, a, K, xo],
OmegaThreeprime[t, a, K, xo], OmegaTwoprime[t, a, K, xo] } ] /
Det[ OmegaMatrix[t, a, K, xo] ];

gammaOmega[ t_, a_, K_, xo_ ] := Det[ { Omega[t, a, K, xo],
OmegaPrime[t, a, K, xo], OmegaThreeprime[t, a, K, xo] } ] /
Det[ OmegaMatrix[t, a, K, xo] ];

(* Berechnung der Koeffizientenfunktionen der speziellen
Grundgleichung von omega *)

alphaOmegaHat[ t_, a_, K_, xo_ ] :=
(1/27) * ( 27 * alphaOmega[t, a, K, xo]
+ 9* betaOmega[t, a, K, xo] * gammaOmega[t, a, K, xo]
+ 2 * ( gammaOmega[t, a, K, xo])^3
- 9 * ( D[gammaOmega[s, a, K, xo], {s, 2}] /. {s -> t } ) );

betaOmegaHat[ t_, a_, K_, xo_ ] := (1/3) * ( 3 * betaOmega[t, a, K, xo]
+ (gammaOmega[t, a, K, xo] )^2
- 3 * ( D[ gammaOmega[s, a, K, xo], s] /. {s -> t } ) );

gammaOmegaHat[ t_, a_, K_, xo_ ] := 0;

SphaerischerGrenzFall :=
Module[{},

Print["Fuer den Fall K = 1/(a^2) werden nun diejenigen
Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichungen
von xi und theta direkt nacheinander ausgegeben,
die jeweils miteinander verglichen werden sollen." ];

Print["Die Berechnungen koennen einige Zeit in Anspruch nehmen."];

Print["alphaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
Simplify[alphaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
TimeConstraint -> 900] ];

Print["alphaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
Simplify[ alphaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
TimeConstraint -> 900] ];

```

A Anhang

```
Print["betaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
  Simplify[ betaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
  TimeConstraint -> 900 ]];

Print["betaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
  Simplify[ betaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
  TimeConstraint -> 900 ]];

Print["Fuer den Fall K=1/(a^2) werden nun diejenigen
Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichungen von
epsilon und omega direkt nacheinander ausgegeben,
die jeweils miteinander verglichen werden sollen."];

Print["Die Berechnungen koennen einige Zeit in Anspruch nehmen."];

Print["alphaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
  Simplify[ alphaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
  TimeConstraint -> 900 ]];

Print["alphaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
  Simplify[ alphaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
  TimeConstraint -> 900 ]];

Print["betaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
  Simplify[ betaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
  TimeConstraint -> 900 ]];

Print[ "betaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo] = ",
  Simplify[ betaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0,
  TimeConstraint -> 900 ]];

Print[ "Mathematica prueft, ob sich die berechneten Ausdruecke der
speziellen Grundgleichungen von xi und theta im Falle K = 1/(a^2)
mit den ueblichen algebraischen und trigonometrischen Rechenregeln
ineinander ueberfuehren lassen." ];

Print[ "Die Berechnungen koennen einige Zeit in Anspruch nehmen." ];

Print[ "Simplify[ alphaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==
alphaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo ]]: ",
  Simplify[ alphaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==
alphaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0, TimeConstraint -> 900 ] ]];
```

A.1 Programm für computeralgebraische Berechnungen

```
Print[ "Simplify[ betaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==  
betaThetaHat[t, a, 1/(a^2), xo] ]: ",  
Simplify[ betaXiHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==  
betaThetaHat[t, a, 1/(a^2) , xo], a > 0, TimeConstraint -> 900 ] ];  
  
Print[ "Mathematica prueft, ob sich die berechneten Ausdruecke der  
speziellen Grundgleichungen von upsilon und omega im Falle K = 1/(a^2)  
mit den ueblichen algebraischen und trigonometrischen Rechenregeln  
ineinander ueberfuehren lassen." ];  
  
Print[ "Die Berechnungen koennen einige Zeit in Anspruch nehmen." ];  
  
Print[ "Simplify[ alphaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==  
alphaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo] ]: ",  
Simplify[ alphaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==  
alphaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0, TimeConstraint -> 900 ] ];  
  
Print[ "Simplify[ betaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==  
betaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo] ]: ",  
Simplify[ betaUpsilonHat[t, a, 1/(a^2), xo] ==  
betaOmegaHat[t, a, 1/(a^2), xo], a > 0, TimeConstraint -> 900 ] ];  
  
]; (* Ende Modul SphaerischerGrenzFall *)  
  
SpezielleGrundGleichungen :=  
Module[{},  
  
Print["Es werden nun die Koeffizientenfunktionen der  
speziellen Grundgleichung von xi angegeben." ];  
  
Print["alphaXiHat[t,a,K,xo] = ", alphaXiHat[t, a, K, xo] ];  
Print["betaXiHat[t,a,K,xo] = ", betaXiHat[t, a, K, xo] ];  
Print["gammaXiHat[t,a,K,xo] = ", gammaXiHat[t, a, K, xo] ];  
  
Print["Es werden nun die Koeffizientenfunktionen der speziellen  
Grundgleichung von theta (Bild von xiBar unter lambda) angegeben:"];  
  
Print["alphaThetaHat[t,a,K,xo] = ", alphaThetaHat[t,a, K, xo] ];  
Print["betaThetaHat[t,a,K,xo] = ", betaThetaHat[t, a, K, xo] ];  
Print["gammaThetaHat[t,a,K,xo] = ", gammaThetaHat[t, a, K, xo] ]];
```

A Anhang

```
Print["Es werden nun die Koeffizientenfunktionen der  
speziellen Grundgleichung von upsilon angegeben." ];  
  
Print["alphaUpsilonHat[t,a,K,xo] = ", alphaUpsilonHat[t, a, K, xo]];  
Print["betaUpsilonHat[t,a,K,xo] = ", betaUpsilonHat[t, a, K, xo] ];  
Print["gammaUpsilonHat[t,a,K,xo] = ", gammaUpsilonHat[t, a, K, xo]];  
  
Print["Es werden nun die Koeffizientenfunktionen der speziellen  
Grundgleichung von omega (Bild von upsilonBar unter lambda)  
angegeben:"];  
  
Print["alphaOmegaHat[t,a,K,xo] = ", alphaOmegaHat[t, a, K, xo] ];  
Print["betaOmegaHat[t,a,K,xo] = ", betaOmegaHat[t, a, K, xo] ];  
Print["gammaOmegaHat[t,a,K,xo] = ", gammaOmegaHat[t, a, K, xo] ];  
  
];(* Ende Modul SpezielleGrundgleichungen *)
```

Bemerkung. Das Programm *ProjektiveAequivalenz.m* wurde unter der *Mathematica*-Version 4.1 erstellt und ausgeführt. Bei der Erstellung des Programms in der hier dokumentierten Form lag der Schwerpunkt auf einer durchsichtigen und leicht nachvollziehbaren Struktur, Aspekte der Programmlaufzeit spielten (ersichtlich) eine gänzlich untergeordnete Rolle. Zum Programm gehört ein weiteres Modul, das der numerischen bzw. graphischen Auswertung der Differenzen der Koeffizientenfunktionen dient, dieses Modul ist in Abschnitt A.2 wiedergegeben.

A.2 Programm-Modul zur numerischen Auswertung

```
(* *****  
Mathematica-Modul zur numerischen Auswertung und graphischen  
Darstellung von Differenzen der Koeffizientenfunktionen, die im  
Programm ProjektiveAequivalenz.m berechnet werden.
```

Autor: Thomas Schneider

Version vom 29.03.2008

```
***** *)
```

```
DifferenzFunktionen := Module[ {a, K, xo},
```

```
(* Benutzer-Dialog *)
```

```
Print[ "Eingabe der Parameter a und K der Flaechе." ];  
Print[ "Beachten Sie, dass  $0 < a^2 K < 1$  gelten muss" ];  
Print[ "Bitte geben Sie den Aequatorialradius a der Spindelflaechе ein." ];  
Print[ "Beachten Sie, dass dieser groesser als 0 sein muss." ];  
Print[ "Der voreingestellte Wert ist a = ", 0.5];  
aStringVar = InputString[ "a= "];  
If[ aStringVar == "", a = 0.5, a = ToExpression[aStringVar] ];  
Print[ "Der gewaehlte Wert von a ist: ", a];  
  
Print[ "Bitte geben Sie die Gauss-Kruemmung K der Spindelflaechе ein." ];  
Print[ "Denken Sie daran, dass  $0 < a^2 K < 1$  gelten muss." ];  
Print[ "Der voreingestellte Wert ist K = ", 1];  
KStringVar = InputString[ "K=" ];  
If[ KStringVar == "", K = 1, K = ToExpression[KStringVar] ];  
Print[ "Der gewaehlte Wert von K ist: ", K];  
  
Print[ "Bitte geben Sie den Parameter xo der Ebene ein."];  
Print[ "Beachten Sie, dass  $0 < xo < ", a, "$  gelten muss."];  
Print[ "Der voreingestellte Wert ist xo = ", a/2 ];  
xoStringVar = InputString["xo= "];  
If[ xoStringVar == "", xo = a/2, xo = ToExpression[xoStringVar] ];  
Print[ "Der gewaehlte Wert von xo ist: ", xo];  
  
Print[ "Bitte waehlen Sie den Anzeigeparameter fuer den Definitionsbereich der anzuzeigenden Funktionen an. Geben Sie hierzu eine Zahl zwischen 0 und 1 ein." ];  
Print[ "Der voreingestellte Wert ist AP = ", 0.5];  
APStringVar = InputString["AP= "];  
If[ APStringVar == "", AP = 0.5, AP = ToExpression[APStringVar] ];  
Print[ "Der gewaehlte Wert von AP ist: ", AP ];
```

A Anhang

```
UnPwReS = AP*unReS[ a, K, xo ] + 0.001;
ObPwReS = AP*obReS[ a, K, xo ] - 0.001;
UnPwObS = AP*unObS[ a, K, xo ] + 0.001;
ObPwObS = AP*obObS[ a, K, xo ] - 0.001;

Print[ "Vergleich der Koeffizientenfunktionen von xi und theta:" ];
Print[ "alphaXiHat - alphaThetaHat: " ];
Show[
  Plot[ alphaXiHat[t, a, K, xo] -
    alphaThetaHat[t, a, K, xo], {t, UnPwReS, ObPwReS},
    PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[1, 0, 0]},
    DisplayFunction -> Identity ],
  Plot[ 0, {x, UnPwReS, ObPwReS}, DisplayFunction -> Identity ],
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction ];

Print[ "betaXiHat - betaThetaHat: " ];
Show[
  Plot[ betaXiHat[t, a, K, xo] -
    betaThetaHat[t, a, K, xo], {t, UnPwReS, ObPwReS},
    PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[1, 0, 0]},
    DisplayFunction -> Identity ],
  Plot[ 0, {x, UnPwReS, ObPwReS}, DisplayFunction -> Identity ],
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction ];

Print[ "Vergleich der Koeffizientenfunktionen von upsilon und omega" ];
Print[ "alphaUpsilonHat - alphaOmegaHat: " ];
Show[
  Plot[ alphaUpsilonHat[t, a, K, xo] -
    alphaOmegaHat[t, a, K, xo], {t, UnPwObS, ObPwObS},
    PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[0, 1, 0]},
    DisplayFunction -> Identity ],
  Plot[ 0, {x, UnPwObS, ObPwObS}, DisplayFunction -> Identity ],
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction ];

Print[ "betaUpsilonHat - betaOmegaHat: " ];
Show[
  Plot[ betaUpsilonHat[t, a, K, xo] -
    betaOmegaHat[t, a, K, xo], {t, UnPwObS, ObPwObS},
    PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[0, 1, 0]},
    DisplayFunction -> Identity ],
  Plot[ 0, {x, UnPwObS, ObPwObS}, DisplayFunction -> Identity ],
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction ];

]; (* Ende Modul Differenzfunktionen *)
```

Literaturverzeichnis

- [1] C. Ackermannn, \mathbb{R}^2 -Ebenen mit zu Ornamentgruppen isomorphen Automorphismengruppen, Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1996.
- [2] H. Amann, J. Escher, *Analysis II*, 2. Auflage, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [3] J. André, Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe, *Mathematische Zeitschrift* 60 (1954), 156–186.
- [4] S.S. Anisov, *The collineation group of Hilbert's example of a projective plane*, *Russian Math. Surveys* 47 (1992), no. 3 (285), 163–164.
- [5] V. Bangert, *Konvexe Mengen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Zeitschrift* 162 (1978), 263–286.
- [6] E. Beltrami, *Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*, *Annali di matematica pura ed applicata* 7 (1865), 185–204.
- [7] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 2003.
- [8] A.L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, Berlin, 1978.
- [9] R.L. Bishop, *Infinitesimal convexity implies local convexity*, *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1974/75), 169–172.

- [10] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie*, I. Teil, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1950.
- [11] D.A. Brannan, M.F. Esplen, J.J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, 1999.
- [12] H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, 1955.
- [13] C.O. Christenson, W.L. Voxman, *Aspects of Topology*, Dekker, New York, 1977.
- [14] W. Degen, L. Profke, *Grundlagen der affinen und euklidischen Geometrie*, Teubner, Stuttgart, 1976.
- [15] M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [16] J. Dorfmeister, G. Haak, *On constant mean curvature surfaces with periodic metric*, Pacific. J. Math, 182 (1998), no. 2, 229–287.
- [17] H. Fischer, H. Kaul, *Mathematik für Physiker*, Bd. 2, Teubner, Stuttgart, 1998.
- [18] R. Frank, *Ein lokaler Fundamentalsatz für Projektionen*, Geom. Dedicata 44 (1992), no. 1, 53–66.
- [19] G. Gerlich, *Darstellung zweidimensionaler stabiler Ebenen durch affine Zusammenhänge und Riemannsche Metriken*, Dissertation, Braunschweig, 2000.
- [20] H. Hähl, *Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokal-kompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen*, Mathematische Zeitschrift 159 (1978), 259–294.
- [21] U. Heilig, H. Pfister, *Characterization of free fall paths by a global or local Desargues property*, J. Geom. Phys. 7 (1990), no. 3, 419–446.

- [22] D. Hilbert, *Elemente der Euklidischen Geometrie*, Cod. Ms. D. Hilbert, Bd. 552, Vorlesungsmanuskript (ausgearbeitet von H. v. Schaper), Göttingen, 1998/99.
- [23] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Leipzig, 1899.
- [24] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 6. Auflage, B. G. Teubner, Leipzig/Berlin, 1923.
- [25] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Auflage, B. G. Teubner, Leipzig, 1930.
- [26] D.R. Hughes, F.C. Piper, *Projective Planes*, Springer, Berlin, 1973.
- [27] K. Jänich, *Topologie*, 3. Auflage, Springer, Berlin, 1990.
- [28] F. Klein, *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann. 6 (1873), no. 2, 112–145.
- [29] W.P.A. Klingenberg, *Klassische Differentialgeometrie*, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2004.
- [30] N. Knarr, *Translation Planes*, Springer, Berlin, 1995.
- [31] H. Knörrer, *Geometrie*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1996.
- [32] H.-J. Kowalsky, G.O. Michler, *Lineare Algebra*, 12. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 2003.
- [33] W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1999.
- [34] D. Laugwitz, *Differentialgeometrie*, 3. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1977.
- [35] K. Leichtweiß, *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin, 1980.
- [36] R. Lingenberg, *Grundlagen der Geometrie*, 3. Auflage, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1978.

- [37] R. Löwen, *A local "fundamental theorem" for classical topological projective spaces*, Arch. Math. (Basel), 38 (1982), no. 3, 286–288.
- [38] H. Lüneburg, *Translation Planes*, Springer, Berlin, 1980.
- [39] J. McCleary, *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [40] R. Michel, *Sur quelques problèmes de Géométrie Globale des Géodésiques*, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. 9, 2 (1978), 19–38.
- [41] H. Mohrmann, *Hilbertsche und Beltramische Liniensysteme*, Math. Ann. 85 (1922), no. 1, 177–183.
- [42] F.R. Moulton, *A simple non-desarguesian plane geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1902), no. 2, 192–195.
- [43] B. O'Neill, *Elementary differential geometry*, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1997.
- [44] H. Pfister, *Newton's first law revisited*, Found. Phys. Lett. 17 (2004), no. 1, 49–64.
- [45] G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin, 1955.
- [46] U. Pinkall, I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 2, 407–451.
- [47] A.V. Pogorelov, *On a Theorem of Beltrami*, Soviet Math. Dokl. 43 (1991), no. 1, 83–85.
- [48] C. Polley, *Lokal desarguessche Salzmann-Ebenen*, Arch. Math. (Basel) 19 (1968), 553–557.
- [49] B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 3. Auflage, Springer, Berlin, 2001.
- [50] H. Salzmann, D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, M. Stroppel, *Compact projective planes*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.
- [51] H. Salzmann, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, *The classical fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

- [52] H. Salzmann, *Topological Planes*, Adv. in Math. 2 (1967), 1–60.
- [53] T. Schneider, M. Stroppel, *Automorphisms of Hilbert's non-Desarguesian affine plane and its projective closure*, Adv. Geom. 7 (2007), no. 4, 541–552.
- [54] M. Stroppel, *Bemerkungen zur ersten nicht Desarguesschen ebenen Geometrie bei Hilbert*, J. Geom., 63 (1998), 183–195.
- [55] M. Stroppel, *A note on Hilbert and Beltrami systems*, Results Math. 24 (1993), no. 3-4, 342–347.
- [56] M. Stroppel, *Endomorphisms of stable planes*, Sem. Sophus Lie 2 (1992), no. 1, 75–81.
- [57] M. Stroppel, *Inzidenz-Strukturen*, Vorlesung an der Universität Stuttgart, Wintersemester 2000/2001.
- [58] M. Stroppel, *Topologische Geometrie*, Vorlesung an der Universität Stuttgart, Wintersemester 2001/2002.
- [59] M. Stroppel, *Locally compact groups*, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006.
- [60] M.-M. Toepell, *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie*, Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Bd. 2, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.
- [61] A. Weinstein, *Sur la non-densité des géodésiques fermées*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 271 (1970), A504.
- [62] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 4th ed., Wolfram Media / Cambridge University Press, 1999.
- [63] O. Zoll, *Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linienn*, Math. Ann. 57 (1903), no. 1, 108–133.

Literaturverzeichnis

Symbolverzeichnis

\mathbb{A}	affine Ebene	16
$\overline{\mathbb{A}}$	projektiver Abschluss von \mathbb{A}	17
$\mathbb{A}_2\mathbb{R}$	reelle affine Ebene	35
$\mathbb{A}_\gamma^{\mathbb{D}}$	SMH-System	82
$\mathbb{A}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{D}}$	räumlich realisiertes SMH-System	99
α, β, γ	Koeffizientenfunktionen der allgemeinen Grundgleichung einer projektiven Kurvendarstellung	115
α_x, β_x	Koeffizientenfunktionen der speziellen Grundgleichung der ebenen Kurve x	117
$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{x_0}$	Schnittkurve von \mathcal{S}_+ mit der Ebene X_{x_0}	235
\mathbb{D}	CD mit Punktmenge D und Geradenmenge \mathcal{D}	79
(\mathbb{D}, \mathbb{X})	räumlich mit ebenem Rand realisierte CD	99
diag_P	Diagonale der Menge P^2	38
\tilde{f}	Standardüberlagerung der Spindelfläche $\mathcal{S}_{K,a}$	203
\mathcal{G}	System der Geodaten auf $\mathcal{S}_{a,K}$	233
$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{u})$	Christoffelsymbole	50
γ	parametrisierte Kurve auf einem Flächenstück	51
γ	Urbildkurve von γ	51
γ_{c,v_0}	Lösung der Geodätendgl. von $\mathcal{S}_{K,a}$ bzw. von \tilde{f}	218
γ_{c,v_0}	Geodätische auf $\mathcal{S}_{K,a}$ mit Neigungskonstante c	219
$g(\mathbf{u})$	Gram-Matrix der ersten Fundamentalform	49
$\iota_{(x_Z, y_Z)}$	Inversion am Einheitskreis mit Zentrum (x_Z, y_Z)	139
J_u	Definitionsintervall der Profilkurve von $\mathcal{S}_{K,a}$	202
K	Gauß-Krümmung	202

Symbolverzeichnis

$\mathcal{K}(x)$	Menge aller projektiven C^3 -Darstellungen einer ebenen Kurve x	110
κ	Krümmungsfunktion einer ebenen Kurve	105
κ_g	geodätische Krümmung einer Flächenkurve	238
κ_N	Normalkrümmung einer Flächenkurve	238
\mathcal{L}_p	Büschel des Punktes p	2
$\bar{\lambda}_{v_0}$	(lokale) geodätische Parametertransformation	208
λ_{v_0}	(lokale) geodätische Abbildung von S_{v_0} nach \mathbb{R}^2	212
μ_{v_0}	parametrisierter Meridian auf einer Drehfläche	64
$\bar{U}_{A,B}$		148
$\tilde{U}_{A,B}$		149
$\Omega_{A,B}$		149
π	Einbettung von $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ in $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$	30
π	Punktabbildung von π	30
\mathcal{P}_l	Punktreihe der Geraden (bzw. des Blocks) l	2
$\mathfrak{P}(D)$	Potenzmenge von D	12
\mathbb{P}	projektive Ebene	16
\mathbb{P}^w	affine Ableitung von \mathbb{P} an der Geraden w	17
$\mathbb{P}_2(\mathbb{V})$	projektive Ebene über dem Vektorraum \mathbb{V}	26
$\mathbb{P}_2\mathbb{K}$	$= \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$	30
$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$	reelle projektive Ebene	34
\mathfrak{S}	Definitionsbereich der Schneide-Abbildung \wedge	38
\wedge	Schneide-Abbildung	38
$\mathfrak{S}_{K,a}$	Spindelfläche mit Gauß-Krümmung K und Äquatorialradius a	203
\mathfrak{S}_+	$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{S}_{a,K} \mid x_1 > 0\}$	233
\vee	Verbinde-Abbildung	38
\mathbb{X}	zweidimensionaler affiner Unterraum von \mathbb{R}^3	98
X	projektive Darstellung einer ebenen Kurve	109
$\hat{X} = \rho X$	Renormierung (mit ρ) der Darstellung X	113
$X := X_{x_0}$	die durch $x = x_0$ gegebene Ebene in \mathbb{R}^3	235

Sachverzeichnis

- Abbildung
 - , geodätische 69
 - , lokale geodätische 69
 - , projektive 36
- Achse
 - einer Desargues-Figur 20
 - einer Kollineation 32
- affine Ableitung 17
- affine Ebene 16
 - , desarguessche 21
 - , topologische 39
- Automorphismus 3

- Beltrami*
 - , Satz von 74
 - -sches Liniensystem 89
- Büschel 2

- CD 79
 - , desarguessche 81
 - , räumlich realisierte 99
 - , streng konvexe 81
- Christoffel-Symbole 50
- Clairaut*
 - , Satz von 64
 - -Parametrisierung 66
- Compact Disk* 79

- Desargues-Eigenschaft
 - , kleine affine 21
 - affiner Ebenen 22
- Desargues-Figur 20
- Desargues-Konfiguration 18
- Drehfläche 63

- Einbettung 4
 - von $\mathbb{A}_2\mathbb{K}$ in $\mathbb{P}_2\mathbb{K}$ 30
- Elation 33

- Ferngerade 17
- Flächenstück 47
 - , injektives 47
 - , parametrisiertes 47
- Fundamentalform
 - , erste 49
 - , zweite 50

- Geodätendifferentialgleichung 57
- Geodätische
 - , parametrisierte 55
 - als Punktmenge 74
- Grundgleichung
 - , allgemeine 115
 - , spezielle 115

- Hilbert*
 - -Ebene von 1899 129
 - -sches Liniensystem 87
 - –, räumlich realisiertes 100
 - -system 87
 - –, räumliches 100
- homogene Koordinaten 34

- Inversion 139
- Inversionsbilder
 - von Ellipsen 148
- Inzidenzstruktur 1
- Isomorphismus 3

- kollinear 2
- Kollineation 11
- konfluent 2
- Konvexität 78
 - , strenge 78
- Kurve
 - , einfach geschlossene 104
 - , parametrisierte
 - –, regulär 51
 - –, zweifach regulär 107

- linearer Raum 2
 - , desarguesscher 19
- Lineation 5
- Lokaler Fundamentalsatz 43

- Meridian
 - , parametrisierter 64
 - -linie 64
- Monomorphismus 3
- Morphismus
 - stabiler Ebenen 40
 - von Inzidenzstrukturen 3

- Neigungskonstante
 - einer Drehfläche 66

- parallele Geraden 16
- Parametertransformation
 - , geodätische 70
 - , lokale geodätische 70

- partieller linearer Raum 2
 - , desarguesscher 18
- projektive Darstellung 109
- projektive Ebene 16
 - , reelle 34
 - , topologische 38
 - über einem Vektorraum 26
- projektive Hülle 17
- projektive Äquivalenz 124
- projektiver Abschluss 17
- Projektivität 36
- Punktreihe 2

- \mathbb{R}^2 -Ebene 45
- Renormierung 111

- slant* 66
- SMH-System 82
 - , räumlich realisiertes 99
- Spindelfläche 203
 - , Geodätische auf der 219
 - –, periodische 223
- Spindelflächenebene 253
- stabile Ebene 39
- Standardüberlagerung
 - der Spindelfläche 203
 - einer Drehfläche 63

- Tangentialebene 47
- Tangentialraum 47
- Translation 33
- Translationsebene 33

- Zentralkollineation 33
- Zentrum
 - einer Desargues-Figur 20
 - einer Kollineation 32