

Elastische Kapseln im hydrodynamischen Fluss

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Steffen Keßler

aus Backnang

Hauptberichter: Prof. Dr. Udo Seifert
Mitberichter: Prof. Dr. Siegfried Dietrich

Tag der Einreichung: 20. Mai 2010
Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juli 2010

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Stuttgart
2010

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Symbolverzeichnis	7
Zusammenfassung	13
Summary	21
1 Einleitung	27
2 Grundlagen	33
2.1 Kontinuumsmechanik im Euklidischen Raum	33
2.1.1 Parametrisierung	34
2.1.2 Tangentialabbildung und Verzerrungstensoren	35
2.1.3 Kräfte und Spannungstensoren	36
2.1.4 Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen	37
2.2 Hydrodynamik	37
2.2.1 Grundlagen, Dynamik, Bewegungsgleichungen	37
2.3 Differentialgeometrie	41
2.3.1 Parametrisierung der Membran	41
2.3.2 Tensoren	41
2.3.3 Innere Geometrie	43
2.3.4 Assoziierte Tensoren	44
2.3.5 Kovariante Ableitungen	44
2.3.6 Äußere Geometrie	45
2.3.7 Spezielle lineare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten	46
2.4 Elastizitätstheorie für Membranen	47
2.4.1 Verzerrungstensoren	47
2.4.2 Elastische Kräfte und elastische Energie	50
2.4.3 Konstitutivgesetze	53
2.5 Elastische Kapsel im Fluss	56
2.5.1 Membran und Flüsse	57
2.5.2 Randbedingungen und Bewegungsgleichungen	58
3 Reduziertes Kapselmodell	61
3.1 Keller–Skalak Modell	61
3.1.1 Bewegungsgleichungen	62
3.2 Reduziertes Modell	64
3.2.1 Formgedächtnis und Bewegungsgleichungen	64
3.2.2 Taumelrate und Phasenverhalten bei konstantem Scherfluss	66
3.2.3 Quasisphärische Bewegungsgleichungen	67

3.3	Analytische Ergebnisse im zeitunabhängigen Scherfluss	70
3.3.1	Entwicklung in nullter Ordnung	71
3.3.2	Entwicklung in erster Ordnung fern des Phasenüberganges	73
3.3.3	Entwicklung in erster Ordnung am Phasenübergang	73
3.4	Analytische Ergebnisse im zeitabhängigen Scherfluss	78
3.4.1	Qualitative Erklärung	80
3.4.2	Analytische Lösung im Weichengebiet	82
3.4.3	Harmonische Oszillationen	83
3.4.4	Dynamisches Phasendiagramm	86
3.4.5	Allgemeine Oszillationen	88
3.5	Zusammenfassung	89
4	Spektralmethode zur numerischen Lösung der Kapseldynamik	91
4.1	Allgemeines Modell einer Kapsel im Scherfluss	91
4.2	Spektralmethode	91
4.2.1	Modenentwicklung	92
4.2.2	Parametrisierung und Diskretisierung	96
4.2.3	Membrankräfte	97
4.2.4	Flussgeschwindigkeit	98
4.2.5	Advektion und Iteration	99
4.3	Modell einer ellipsoidalen Kapsel im Scherfluss	99
4.3.1	Spezifisches Konstitutivmodell	99
4.3.2	Skalen und Parameter	100
4.3.3	Relevante Freiheitsgrade	101
4.3.4	Quasisphärischer Testfall einer sphärischen Kapsel	101
4.4	Resultate	102
4.4.1	Trajektorien	102
4.4.2	Poincaré–Abbildungen	104
4.4.3	Phasendiagramm	105
4.5	Zusammenfassung	107
5	Quasisphärische ellipsoidale Kapseln	109
5.1	Modell einer Kapsel mit flächeninkompressibler Membran im Scherfluss	109
5.2	Quasisphärische Bewegungsgleichungen	110
5.2.1	Parametrisierungen	110
5.2.2	Spektraldarstellung	112
5.2.3	Fläche und Volumen	113
5.2.4	Elastische Energie und elastische Kräfte	114
5.2.5	Hydrodynamik	116
5.2.6	Flächenerhaltung und Bewegungsgleichungen	118
5.2.7	Reduzierte Bewegungsgleichungen	123
5.3	Phasendiagramm	126
5.3.1	Numerische Ergebnisse	126
5.3.2	Analytische Ergebnisse	127
5.4	Zusammenfassung	131
6	Zusammenfassung und Ausblick	137

Literaturverzeichnis	141
Lebenslauf	147
Danksagung	149

Symbolverzeichnis

$[\cdot]$	Gaußklammer, Abrundungsfunktion, Seite 86
$\lceil \cdot \rceil$	Gaußklammer, Aufrundungsfunktion, Seite 86
$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$	mittlere normierte Taumelrate, Seite 67
a_i	Länge der Halbachse einer ellipsoidalen Kapsel bzw. eines zugeordneten Ellipsoides, $i = 1, 2, 3$, Seite 61
A	Fläche der Referenzmembran, Seite 50
a	Fläche der Membran, Seite 43
\hat{a}_i	Längen der Halbachsen einer ellipsoidalen Referenzmembran, $i = 1, 2, 3$, Seite 99
α	Exzentrizitätsparameter im reduzierten Modell, Seite 65
\mathbf{B}_α	Basisvektor auf der Referenzmembran, Seite 46
\mathbf{b}_α	Basisvektor auf der Membran, Seite 42
b	Bandbreite in der Spektralmethode, Seite 97
\mathbf{B}	linker Cauchy–Greensche Verzerrungstensor, Seite 36
β	Formparameter der Membran im quasisphärischen Modell, Seite 123
$\hat{\beta}$	Formparameter der Referenzmembran im quasisphärischen Modell, Seite 123
\mathbf{C}	rechter Cauchy–Greensche Verzerrungstensor, Seite 36
C_0	spontane Krümmung im Helfrich–Modell, Seite 54
\hat{C}_0	dimensionslose spontane Krümmung der Helfrich–Energie in der Spektralmethode, Seite 100
χ	dimensionslose Scherrate in der Spektralmethode, Kapillarzah, Seite 100
$\tilde{\chi}$	skalierte dimensionslose Scherrate im reduzierten Modell, skalierte Kapillarzah, Seite 65
D	Taylorscher Deformationsparameter, Seite 101
D	substantielles Differential, Seite 38
d	Differential, Seite 35
\mathbf{D}_Φ	Drehoperator der Drehung Φ , Seite 112
\mathbf{D}	Schertensor, Seite 36
$D_{mm'}^l$	Komponenten der Wignerschen Drehmatrizen, Seite 113
da	Flächenelement der Membran, Seite 39
Δ	verschobener Differenzwinkel von Phasen– und Anstellwinkel, Seite 69
Δ	Exzessfläche einer Kapsel, Seite 46
Δ	Laplace–Operator, Seite 39
Δ^S	Laplace–Beltrami–Operator auf einer Mannigfaltigkeit, Seite 44
$\delta\mathcal{H}$	Variation der elastischen Gesamtenergie einer Membran, Seite 52
δH	Variation der elastischen Energiedichte der Referenzmembran, Seite 52
δh	Variation der elastischen Energiedichte der Membran, Seite 52
Δp	Druckdifferenz zwischen den konstanten Druckanteilen innerhalb und außerhalb der Membran, Seite 99
$d\omega$	Flächenelement auf der Sphäre S^2 , Seite 94

e_α	sphärische Basisvektoren mit $\alpha = r, \vartheta, \varphi$, Seite 93
e_i	kartesische Basisvektoren mit $i = 1, 2, 3 = x, y, z$, Seite 34
E_α	Eigenwerte des Green–Lagrangeschen Verzerrungstensors, $\alpha = 1, 2$, Seite 49
$E_{\alpha\beta}$	kovariante Komponenten des Green–Lagrangeschen Verzerrungstensors, Seite 49
\mathbf{E}	Green–Lagrangescher Verzerrungstensor, Seite 49
E_0	elastische Energieskala während der Panzerkettenbewegung im reduzierten Modell, Seite 64
ϵ	formaler Entwicklungsparameter, Seite 68
erf	Gaußsche Fehlerfunktion, Seite 76
erfi	imaginäre Gaußsche Fehlerfunktion, Seite 78
η	Viskosität, Seite 39
η^i	Viskosität des inneren Flusses, Seite 40
η^o	Viskosität des äußeren Flusses, Seite 40
λ	skaliertes und verschobenes Viskositätskontrast im reduzierten Modell, Seite 65
\mathbf{F}	Deformationsgradient, Seite 35
$\mathbf{f}_{\partial\nu_0}$	Cauchy–Spannungsvektor, Seite 37
$\mathbf{f}_{\partial\nu}$	Oberflächenkraftdichte, die auf den Rand eines Gebietes wirkt, Seite 38
\mathbf{f}_{eff}	effektive elastische Flächenkraftdichte durch Einbeziehung des ungestörten äußeren angelegten Flusses, Seite 59
\mathbf{f}_{el}	elastische Flächenkraftdichte eines Membranelementes, Seite 51
\mathbf{f}_{ex}	äußere Flächenkraftdichte auf ein Membranelement, Seite 52
\mathbf{f}_{hyd}	gesamte Flächenkraftdichte des inneren und äußeren Flusses auf ein Membranelement, Seite 40
$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^i$	hydrodynamische Flächenkraftdichte des inneren Flusses auf ein Membranelement, Seite 40
$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^{\text{ind}}$	gesamte Flächenkraftdichte des induzierten inneren und induzierten äußeren Flusses auf ein Membranelement, Seite 59
$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^o$	hydrodynamische Flächenkraftdichte des äußeren Flusses auf ein Membranelement, Seite 40
$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^\infty$	gesamte Flächenkraftdichte des angelegten Flusses auf ein Membranelement, Seite 59
\mathbf{f}_L	Linienkraftdichte auf ein Bogenelement der Membran, Seite 50
\mathbf{f}_{ν_0}	Laplace–Beltrami–Operator, Seite 37
\mathbf{f}_ν	Volumenkraftdichte auf ein Körperelement, Seite 38
\mathcal{G}	Gebiet der Lagrangeschen Koordinaten X^α der Membran, Seite 35
g	Determinante der Metrik \mathbf{g} , Seite 43
$g^{\alpha\beta}$	kontravariante Komponenten des inversen metrischen Tensors \mathbf{g}^{-1} , Seite 43
$g_{\alpha\beta}$	kovariante Komponenten des metrischen Tensors \mathbf{g} , Seite 43
G	Schermodul, Seite 55
\mathbf{g}^{-1}	inverser metrischer Tensor, Seite 43
\mathbf{G}	metrischer Tensor auf der Referenzmembran, Seite 48
\mathbf{g}	metrischer Tensor auf der Membran, Seite 43
$\dot{\gamma}_0$	mittlere Scherrate eines oszillierenden Scherflusses, Seite 79
$\dot{\gamma}$	Scherrate des linearen Scherflusses, Seite 58
\mathcal{H}	elastische Gesamtenergie, Seite 51

H	elastische Energiedichte der Referenzmembran, Seite 51
h	elastische Energiedichte der Membran, Seite 51
H	mittlere äußere Krümmung, Seite 45
$\mathcal{H}_{\text{diss}}$	in der inneren Flüssigkeit dissipierte Energie im Keller–Skalak Modell, Seite 63
\mathcal{H}_{el}	elastische Energie während der Panzerkettenbewegung im reduzierten Modell, Seite 64
h^{ES}	Energiedichte der Referenzmembran für das Modell von Evans und Skalak, Seite 56
H_{G}	Gaußsche Krümmung, Seite 45
h^{κ}	Helfrich–Energiedichte auf der Membran, Seite 54
h^{MH}	Energiedichte der Referenzmembran für das modifizierte Hookesche Gesetz, Seite 55
h^{MR}	Energiedichte der Referenzmembran für das Moonley–Rivlin Gesetz, Seite 55
H^{num}	in der Spektralmethode verwendete Energiedichte (modifiziertes Hookesches Gesetz und Helfrich–Energie), Seite 91
h^{SK}	Energiedichte der Referenzmembran für das Modell von Skalak, Seite 56
\mathcal{H}_{W}	vom äußeren Fluss an der Kapsel geleistete Arbeit im Keller–Skalak Modell, Seite 63
I_{α}	skalare Invarianten der Membrandeformation, $\alpha = 1, 2$, Seite 50
J	Verhältnis der Fläche eines Membranelementes zur Fläche des entsprechenden Elementes auf der Referenzmembran, Seite 50
\mathcal{K}_{Ref}	Referenzkörper, Seite 34
\mathcal{K}	Körper, Seite 35
K	Kompressionsmodul, Seite 56
k_{α}	Hauptkrümmungen mit $\alpha = 1, 2$, Seite 45
$k_{\alpha\beta}$	kovariante Komponenten des äußeren Krümmungstensors \mathbf{k} , Seite 45
\mathbf{K}	äußerer Krümmungstensor auf der Referenzmembran, Seite 52
\mathbf{K}_l	Steifigkeitsmatrix der Biegeenergie im quasisphärischen Modell, Seite 115
\mathbf{K}_l	Steifigkeitsmatrix der homogenen Oberflächenspannung im quasisphärischen Modell, Seite 116
\mathbf{K}_l	Steifigkeitsmatrix des Hookeschen Gesetzes im quasisphärischen Modell, Seite 115
\mathbf{k}	äußerer Krümmungstensor auf der Membran, Seite 45
κ	Biegesteifigkeit im Helfrich–Modell, Seite 54
κ_{G}	Gaußsche Biegesteifigkeit im Helfrich–Modell, Seite 54
$\tilde{\kappa}$	dimensionslose Biegesteifigkeit der Helfrich–Energie in der Spektralmethode, Seite 100
λ	Viskositätskontrast, Seite 57
λ_{L}	erste 2d–Lamé–Konstante im modifizierten Hookeschen Gesetz, Seite 55
Λ	Stärke des Rotationsanteils im linearen Fluss bzw. skaliertes Viskositätskontrast im Scherfluss, Seite 124
λ_{α}	Streckfaktoren entlang der Hauptachsen eines Membranelementes, $\alpha = 1, 2$, Seite 49
\mathcal{M}_{Ref}	Referenzmembran, Seite 41
\mathcal{M}	Membran, Seite 41
\mathbf{m}	intrinsischer mit der Krümmung assoziierter Spannungstensor, Seite 53

μ_L	zweite 2d–Lamé–Konstante im modifizierten Hookeschen Gesetz, Schermodul, Seite 55
\mathbf{n}	Drehachse im quasisphärischen Modell, Seite 111
\mathbf{n}	Einheitsnormalenvektor auf der Membran, Seite 38
$\nabla \cdot$	Divergenz eines Vektorfeldes, Seite 37
∇^S	Gradient auf der Kugel S^2 , Seite 94
n_D	Anzahl der Diskretisierungsstellen in der Spektralmethode, Seite 97
ν	zweidimensionale Poissonzahl, Seite 55
\mathcal{O}	Koordinatenursprung, Seite 34
ω^α	dualer Basisvektor auf der Membran, Seite 42
ω	Frequenz der oszillierenden Scherrate $\dot{\gamma}$, Seite 79
ω	Rotationswinkelgeschwindigkeit des linearen Flusses, Seite 58
$\tilde{\omega}$	dimensionslose Frequenz der oszillierenden Scherrate, Seite 79
p	hydrodynamischer Druck, Seite 38
$P_{lm}(x)$	zugeordnetes Legendre–Polynom, Seite 94
\mathbf{P}_l	Projektor, der für lokale Flächenerhaltung auf der Membran sorgt, Seite 119
p_0	konstanter Druck im linearen Fluss, Seite 40
Φ	Drehwinkel im quasisphärischen Modell, Seite 111
Φ	zweite Lagrangesche Koordinate des Paares (Θ, Φ) , Seite 96
φ	Azimutwinkel der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) , Seite 93
ϕ	Phasenwinkel, d.h. mittlerer Winkel zwischen aktueller und undeformierter Lage eines materiellen Membranpunktes (gemessen innerhalb der Membran), Seite 62
Φ	Phasenwinkel eines Membranpunktes bzgl. der Scherflussrichtung, Seite 62
Φ	Drehvektor im quasisphärischen Modell, Seite 111
$\Phi_{lm}(\vartheta, \varphi)$	tangentiale Vektorkugelflächenfunktion ($s = 3$), Schermode, Seite 95
φ_0	Anfangsphase der oszillierenden Scherrate, Seite 82
φ_k	Folge der Phasen im Weichengebiet bei oszillierender Scherrate, Seite 84
p^i	Druck im inneren Fluss, Seite 40
p^{ind}	Druck des induzierten Flusses, Seite 59
p_k	Dichte zur Mittelung in der k -ten Weiche, Seite 83
p^o	Druck im äußeren Fluss, Seite 40
$\Psi_{lm}(\vartheta, \varphi)$	tangentiale Vektorkugelflächenfunktion ($s = 2$), Streckmode, Seite 95
$\mathbf{P}^{\bar{\sigma}}$	Projektor, der für globale Flächenerhaltung auf der Membran sorgt, Seite 121
p^∞	Druck des angelegten Flusses, Seite 59
p_1^∞	Druck im angelegten Fluss innerhalb der Membran, Seite 59
p_0^∞	Druck im angelegten Fluss außerhalb der Membran, Seite 59
\mathcal{Q}_l	Sprung des hydrodynamischen Spannungstensors des äußeren Flusses auf der Kugel im quasisphärischen Modell, Seite 117
\mathcal{Q}_l	Sprung des hydrodynamischen Spannungstensors des induzierten Flusses auf der Kugel im quasisphärischen Modell, Seite 117
r	Radius der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) , Seite 93
R_0	Längenskala der Kapsel, Seite 33
\mathbf{R}	Drehungsanteil der Tangentialabbildung, Seite 35
$\mathbf{R}(\xi)$	Parametrisierung der Referenzmembran, Seite 47
$\mathbf{r}(\xi)$	Parametrisierung der Membran, Seite 35

ρ	Massendichte, Seite 35
ρ	Steigungsparameter im Phasendiagramm des reduzierten Modells, Seite 74
$\bar{\rho}$	im Weichengebiet gemittelter Steigungsparameter, Seite 82
r_{typ}	typische Längenskala des Flusses, Seite 39
S	Stärke des Elongationsanteils im linearen Fluss bzw. skalierte Scherrate im Scherfluss, Seite 124
s	Scherstärke des linearen Flusses, Seite 58
S^2	Einheitssphäre, Seite 57
σ	Oberflächenspannung einer Membran, Seite 55
Σ	verschobener Summenwinkel von Phasen- und Anstellwinkel, Seite 69
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensors, Seite 37
$\boldsymbol{\Sigma}$	hydrodynamischer Spannungstensor im Raum, Seite 38
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor auf der Membran, Seite 51
$\bar{\sigma}$	homogener Anteil der Oberflächenspannung, Seite 115
T	Periodendauer der oszillierenden Scherrate $\dot{\gamma}$, Seite 78
\boldsymbol{T}	reduzierter hydrodynamischer Spannungstensor, Seite 38
\mathbb{T}	Torus, Seite 62
τ	dimensionslose Zeit im reduzierten Modell, Seite 65
$\boldsymbol{\tau}$	intrinsischer mit der Metrik assoziierter Spannungstensor, Seite 53
$\tau_{\alpha}^{\text{ES}}$	Spannungstensor des Modells von Evans und Skalak, Seite 56
τ_{α}^{H}	Spannungstensor des Hookeschen Gesetzes, Seite 55
$\tau_{\alpha}^{\text{MR}}$	Spannungstensor des Moonley-Rivlin Gesetzes, Seite 55
$\tau_{\alpha}^{\text{SK}}$	Spannungstensor des Modells von Skalak, Seite 56
$\hat{\tau}$	dimensionslose Zeit im quasisphärischen Modell, Seite 124
Θ	Heaviside-Stufenfunktion, Seite 83
Ψ	Anstellwinkel, d.h. Winkel zwischen langer Halbachse und Scherflussrichtung, Seite 61
Θ	erste Lagrangesche Koordinate des Paares (Θ, Φ) , Seite 96
ϑ	Polarwinkel der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) , Seite 93
$(\Theta_{\text{R}}, \Phi_{\text{R}})$	Kugelkoordinaten auf der Referenzkugel, Seite 111
t_{typ}	typische Zeitskala des Flusses, Seite 39
\boldsymbol{U}	Rechts-Streck-Tensor, Seite 35
\boldsymbol{U}	Deformationsfeld der Referenzmembran im quasisphärischen Modell, Seite 112
\boldsymbol{u}	Deformationsfeld der Membran im quasisphärischen Modell, Seite 112
$\boldsymbol{V}_{lm}^{\chi}(\vartheta, \varphi)$	Winkelanteile der Lamb-Moden mit $s = 2$, Seite 95
$\boldsymbol{V}_{lm}^{\phi}(\vartheta, \varphi)$	Winkelanteile der Lamb-Moden mit $s = 1$, Seite 95
$\boldsymbol{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi)$	Winkelanteile der Lamb-Moden mit $s = 0$, Seite 95
$\boldsymbol{V}_{slm}(\vartheta, \varphi)$	Winkelanteile der Lamb-Moden, Seite 95
\boldsymbol{V}	Links-Streck-Tensor, Seite 35
\boldsymbol{V}_{α}	Hauptachsen des Verzerrungstensors, $\alpha = 1, 2$, Seite 49
\boldsymbol{V}	Advektionsgeschwindigkeit der Membran, Seite 58
\boldsymbol{v}	Flussgeschwindigkeit, Seite 35
V_0	Volumen der Kapsel, Seite 33
\boldsymbol{v}^i	Geschwindigkeit des inneren Flusses, Seite 40
$\boldsymbol{v}^{\text{ind}}$	Geschwindigkeit des induzierten Flusses, Seite 59
$\boldsymbol{v}_{\text{ind}}^i$	Geschwindigkeit des inneren induzierten Flusses, Seite 59

$\mathbf{v}_{\text{ind}}^{\circ}$	Geschwindigkeit des äußeren induzierten Flusses, Seite 59
\mathbf{v}°	Geschwindigkeit des äußeren Flusses, Seite 40
v_{typ}	typische Geschwindigkeit des Flusses, Seite 39
\mathbf{v}^{∞}	Geschwindigkeit des äußeren angelegten Flusses, Seite 57
\mathbf{v}_i^{∞}	Geschwindigkeit des angelegten Flusses innerhalb der Membran, Seite 59
\mathbf{v}_o^{∞}	Geschwindigkeit des angelegten Flusses außerhalb der Membran, Seite 59
X^i	Lagrangesche Koordinaten im Raum mit $i = 1, 2, 3$, Seite 35
\mathbf{x}	Ortsvektor eines beliebigen Punktes, Seite 34
\mathbf{X}	Vektor der Lagrangeschen Koordinaten X^i , Seite 35
ξ^{α}	Lagrangesche Koordinaten der Membran mit $\alpha = 1, 2$, Seite 41
$\boldsymbol{\xi}$	Vektor der Lagrangeschen Koordinaten ξ^{α} , Seite 48
$y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	skalare Kugelflächenfunktion, Seite 94
$\mathbf{Y}_{slm}(\vartheta, \varphi)$	Vektorkugelflächenfunktionen, Seite 95
$\mathbf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$	radiale Vektorkugelflächenfunktion ($s = 1$), Biegemode, Seite 95

Zusammenfassung

Elastische Kapseln stellen eine wichtige Klasse weicher Objekte dar. Neben der Vielzahl interessanter Fragestellungen, die sich aus einer rein wissenschaftlichen Perspektive ergeben, sind elastische Kapseln auch Ausgangspunkt für vielversprechende Anwendungsmöglichkeiten. Innerhalb der Pharmazie beispielsweise können Kapseln zur Einkapselung von Medikamenten verwendet werden, die im Körper transportiert werden, um die Medikamente gezielt an der erforderlichen Körperstelle abzugeben. Die Dynamik elastischer Kapseln im Fluss ist eine offene Fragestellung im Bereich der Mikrofluidik, der in jüngerer Zeit sehr stark an Bedeutung gewonnen hat. Diese und ähnliche Aspekte werden im erfolgreichen DFG-Schwerpunktprogramm *Mikro- und Nanofluidik 1164* behandelt.

Eine elastische Kapsel besteht aus einer dünnen geschlossenen Membran, die eine Flüssigkeit umschließt. Zusätzlich zum Widerstand gegen Biegungen und Flächenänderungen besitzt die Membran einer Kapsel im wesentlichen Unterschied zu fluiden Vesikeln eine endliche Scherelastizität. Die elastischen Eigenschaften der Membran sind entscheidend für die Dynamik nicht-sphärischer Kapseln. Eine deformierte Kapsel, auf die keine äußeren Kräfte einwirken, wird aus energetischen Gründen — getrieben durch Rückstellkräfte und gebremst durch Dissipation — stets in ihren undeformierten Zustand zurückkehren. Dieses Formgedächtnis existiert nicht bei fluiden Membranen und kann insbesondere im hydrodynamischen Fluss zu qualitativ anderem Verhalten führen.

Die Elastizität der Kapselmembran gegen Scherungen wird entweder durch eine chemische oder physikalische Vernetzung der Membranzmoleküle oder durch Anbringen eines Polymernetzwerkes an eine fluide Membran vermittelt. Ein natürliches Beispiel findet sich bei roten Blutkörperchen, bei denen das mit der fluiden Membran verbundene Zytoskelett für den Scherwiderstand sorgt. Neben den polymerisierten Kapseln werden daher auch rote Blutkörperchen den elastischen Kapseln zugeordnet.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Verhalten einer einzelnen elastischen Kapsel in linearen hydrodynamischen Flüssen theoretisch zu untersuchen. Die Kapsel besitzt dabei stets eine nicht-sphärische Referenzform, die typischerweise ellipsoidal gewählt wird. Ihre Membran kann prinzipiell durch beliebige Konstitutivgesetze beschrieben werden, wobei im Grenzfall geringer Deformationen für eine allgemeine Beschreibung ein zweidimensionales Hookesches Gesetz zusammen mit der Helfrichschen Biegeenergie genügt.

Die Kapsel wird in einen äußeren viskosen Fluss eingebettet, der sich über den ganzen Raum erstreckt, so dass Wandeffekte keinen Einfluss auf die Dynamik nehmen. Die Viskosität der äußeren Flüssigkeit kann sich von der Viskosität der inneren Flüssigkeit unterscheiden. Ihr Verhältnis definiert den Viskositätskontrast, eine wichtige Kenngröße für das Verhalten der Kapsel.

In allen Experimenten sind die Längenskalen derart klein, dass die Dissipation über die Trägheit dominiert, wodurch die Reynolds-Zahl als Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskräften klein wird und die Flüsse innerhalb und außerhalb der Membran durch die Stokes-Gleichungen beschrieben werden. Die Dynamik wird jedoch erst durch Randbedingungen eindeutig: Weil die Trägheit der Membran vernachlässigbar ist, müssen sich die auf die Membran wirkenden elastischen und hydrodynamischen Kräfte balancieren. Zusätzlich wird

gefordert, dass die Membran ohne Schlupf mit dem Fluss advektiert wird (*no-slip* Randbedingung), was zur Folge hat, dass die Flussgeschwindigkeit auf der Membran stetig ist und mit der Advektionsgeschwindigkeit übereinstimmt.

Ändert sich der angelegte äußere Fluss auf im Vergleich zur Kapsel großen Längenskalen, kann er durch einen linearen Fluss genähert werden. Einen linearen Scherfluss erhält man experimentell direkt in einer Couette-Apparatur, in der zwei konzentrische, unterschiedlich breite Zylinder gegensätzlich rotieren, wobei die Stärke des Scherflusses durch die Scherrate angegeben wird. Die beiden Anteile des Scherflusses bestehen aus einem Rotations- und einem Elongationsfluss, deren Stärken in der Couette-Apparatur in einem festen Verhältnis stehen. In einer speziellen experimentellen Anordnung hingegen lassen sich die beiden Stärken unabhängig voneinander einstellen. Es handelt sich hierbei um eine Vier-Walzen-Anordnung (*four-mill device*), bei der vier parallele, quadratisch angeordnete Zylinder rotieren, wobei benachbarte Zylinder mit jeweils unterschiedlichem Drehsinn rotieren.

Bei einer Kapsel im Fluss handelt es sich aus theoretischer Sicht um ein herausforderndes nicht-lineares Problem, weil Position und Deformation der Membran nicht *a priori* bekannt sind, sondern sich aus einem Wechselspiel zwischen hydrodynamischen Kräften und elastischen Membrankräften ergeben. Deshalb erfordert das Lösen der vollständigen Bewegungsgleichungen numerische Methoden, während eine analytische Behandlung nur in Grenzfällen möglich ist. Im Fall geringer Deformationen von einer Kugel ist eine quasisphärische Entwicklung um die Kugel durchführbar, auf die später eingegangen wird. Alternativ lässt sich das vollständige Problem vereinfachen, indem die Dynamik der Kapsel auf einige wenige relevante Freiheitsgrade eingeschränkt wird.

Das Paradebeispiel einer solchen Reduktion findet sich im Keller-Skalak Modell, in dem ein ellipsoidales rotes Blutkörperchen im Scherfluss durch zwei Freiheitsgrade beschrieben werden soll. Weil dieses Modell jedoch das Formgedächtnis nicht berücksichtigt, liefert es nur für fluide Membranen realistische Ergebnisse. Da das Keller-Skalak Modell als Grundlage für ein reduziertes Kapselmodell mit Formgedächtnis dient, werden an dieser Stelle seine wesentlichen Aspekte vorgestellt. Die Membranform wird ellipsoidal vorausgesetzt, wobei sich zwei Halbachsen in der Scherebene und eine Halbachse senkrecht dazu befinden. Eine wesentliche Näherung des Keller-Skalak Modells ist, dass die ellipsoide Form unter der Dynamik erhalten bleibt. Die Orientierung der Kapsel ist durch den Anstellwinkel gegeben, der den Winkel zwischen langer Halbachse und Scherflussrichtung misst. Als zweiter Freiheitsgrad dient ein Phasenwinkel, der die Panzerkettenbewegung der Membran beschreibt. Hier wird angenommen, dass sich die Membran in gleichförmiger Weise um das Ellipsoid bewegen kann. Aus der Forderung von Energie- und Drehimpulserhaltung folgen schließlich die beiden Bewegungsgleichungen für den Anstell- und den Phasenwinkel, deren Lösungen in Abhängigkeit des Viskositätskontrasts zwei verschiedene Bewegungsformen zulassen. Für geringen Viskositätskontrast stellt sich die Orientierung der Kapsel stationär ein, wobei die lange Halbachse im Scherfluss durch den Elongationsfluss ausgerichtet wird. Gleichzeitig vollführt die Membran aufgrund des Rotationsflusses eine Panzerkettenbewegung um die stationäre Form. Oberhalb eines kritischen Viskositätskontrasts, der von den Längen der Halbachsen abhängt, wird die Panzerkettenbewegung instabil. Die Kapsel übt hier eine stabile Taumelbewegung aus, bei der sie ähnlich einem starren Körper rotiert.

Um das Formgedächtnis zu berücksichtigen, wurde das Keller-Skalak Modell erweitert. Weil die Membran hier während einer Panzerkettenbewegung aufgrund der Verspannung elastische Energie aufnimmt, erhält das System einen elastischen Energiespeicher, der in die Energieerhaltung mit einbezogen werden muss. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen innerhalb dieses reduzierten Kapselmodells erfolgt dann in völliger Analogie zum Keller-Skalak Modell,

bei dem außer in Grenzfällen Lösungen nur noch numerisch möglich sind.

Das Phasendiagramm des reduzierten Modells zeigt drei verschiedene Bereiche, in denen die Kapsel entweder taumelt, schwingt oder eine intermittierende Bewegung ausübt. Unmittelbar einleuchtend ist, dass bei schwachen Scherflüssen eine Panzerkettenbewegung der Kapselmembran nicht möglich ist. Hier ist die Kraft des äußeren Flusses zu gering, um die Membran über die elastische Energiebarriere zu bewegen, die für eine volle Panzerkettenbewegung überwunden werden muss. Der Kapsel bleibt wegen des Rotationsflusses nur eine Taumelbewegung. Erst bei einer Erhöhung der Scherrate wird eine vollständige Panzerkettenbewegung möglich. Bei hohen Scherraten und für nicht zu großen Viskositätskontrast findet die eigentliche Panzerkettenbewegung statt. Der Anstellwinkel oszilliert dabei aufgrund des Formgedächtnisses um einen mittleren positiven Wert, weshalb die Bewegung als Schwingen bezeichnet wird. Für größeren Viskositätskontrast und im Zwischenbereich zwischen Taumeln und Schwingen bei beliebigem Viskositätskontrast sagt das reduzierte Modell eine intermittierende Bewegung voraus, die aus einer Mischung von Taumel- und Schwingbewegungen besteht. Nahe des Taumelbereichs sind die Taumelbewegungen durch einzelne Schwingbewegungen unterbrochen, während es in der Nähe des Schwingbereichs neben den Schwingbewegungen zu einzelnen Taumelbewegungen kommt.

Diese Vorhersagen lassen sich mit experimentellen Beobachtungen vergleichen. Polymerisierte Kapseln sind zwar nie perfekt sphärisch, jedoch weichen sie meist nur sehr wenig von einer Kugelform ab. Daher ist die elastische Energiebarriere der Panzerkettenbewegung sehr klein, weshalb die in den Experimenten verwendeten Scherraten für polymerisierte Kapseln stets zu groß waren, um Taumelbewegungen beobachten zu können. Jedoch konnten in Übereinstimmung mit dem reduzierten Modell die Oszillationen der Orientierung während der Panzerketten- bzw. Schwingbewegung beobachtet werden.

Für die experimentelle Beobachtung von Taumelbewegungen sind rote Blutkörperchen besser geeignet, weil deren diskozyte Form für eine hohe Energiebarriere sorgt. Schon bei experimentell leicht zugänglichen Scherraten ist ein Taumeln möglich. Experimente, in denen die Bewegungen einzelner roter Blutkörperchen für einen großen Bereich der Scherrate und verschiedene Werte des Viskositätskontrasts untersucht wurden, zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen des reduzierten Modells. Neben den Schwingbewegungen, charakterisiert durch Oszillationen der Orientierung, kommt es bei kleinen Scherraten, wie erwartet, zu Taumelbewegungen. Interessanterweise zeigt sich im Experiment ein Hysterese-Effekt: Der Übergang zwischen Taumeln und Schwingen findet bei unterschiedlichen Werten der Scherrate statt, je nachdem, ob die Scherrate erhöht oder erniedrigt wird. Eine mögliche Erklärung liefert das reduzierte Kapselmodell. Der Scherratenbereich der Hysterese könnte dem Intermittenzbereich des reduzierten Modells entsprechen. Aufgrund der kurzen Beobachtungsdauer ist dieser Schluss aber nicht zwingend, weil auch eine transiente Bewegung denkbar ist. Die Auflösung dieser Diskrepanz, die mit der Gültigkeit des reduzierten Modells zusammenhängt, ist ebenfalls ein Ziel dieser Arbeit. Zunächst sollen jedoch weitere in dieser Arbeit gewonnenen Resultate des reduzierten Modells vorgestellt werden.

Im quasisphärischen Grenzfall ist eine vollständige analytische Lösung der Bewegungsgleichungen des reduzierten Modells möglich. In niedrigster Ordnung in der Abweichung von der Kugelform folgen unmittelbar die Trajektorien der Taumel- und Schwingbewegungen. In der Nähe des Phasenübergangs zwischen Schwingen und Taumeln lassen sich durch Ausnutzen einer Zeitskalenseparation die Trajektorien und die Phasengrenze in erster Ordnung erhalten. Hierzu werden die Bewegungsgleichungen in verschiedenen Gebieten des Phasenraums, in denen jeweils bestimmte Terme dominieren, einzeln gelöst und anschließend zusammengefügt, um eine stabile Trajektorie zu erhalten. Ein Vergleich mit den Ergebnissen, die durch numerische

Integration der Bewegungsgleichungen gewonnen werden, liefert eine exzellente Übereinstimmung mit der Analytik. Weiter zeigt sich, dass in erster Ordnung in der Abweichung von einer Kugel der intermittierende Zwischenbereich nicht existiert.

In der Nähe des Phasenübergangs ergibt sich im quasisphärischen Grenzfall ein einfaches Weichenbild, welches auch auf zeitabhängige Scherflüsse übertragbar ist. Unabhängig vom genauen Wert der Scherrate verspannt sich die Membran durch eine beginnende Panzerkettenbewegung, während sich die Kapsel — bezogen auf die Scherflussrichtung — aufzustellen beginnt. Die Kapsel hat nun zwei Möglichkeiten, sich aus diesem Verspannungszustand wieder zu entspannen, wobei der Wert der Scherrate entscheidet, welcher Weg gewählt wird. Bei hohen Scherraten wird die Membran über die Energiebarriere hinweg bewegt, und es kommt zu einer vollständigen Panzerkettenbewegung, bei der der Anstellwinkel wieder ein Stück zurück relaxiert, bevor sich ein neuer Verspannungszustand aufbaut. Die Kapsel vollführt dann stabile Schwingbewegungen. Bei niedrigen Scherraten hingegen reicht die Flusskraft nicht aus, die Membran über die Barriere zu bewegen, so dass eine vollständige Panzerkettenbewegung nicht möglich ist. Während dabei der Anstellwinkel wegen des Rotationsflusses weiter anwächst, kann die Membran in Richtung ihres undeformierten Zustandes zurück relaxieren. Die Kapsel führt also stabile Taumelbewegungen aus. Das Gebiet im Phasenraum um den speziellen Verspannungszustand kann als Weiche vorgestellt werden, weil sich hier entscheidet, ob sich die Membran über eine einzelne Taumel- oder über eine einzelne Schwingbewegung der Kapsel entspannt. Gesteuert wird die Weiche durch die Scherrate, während außerhalb des Verspannungszustands der genaue Wert der Scherrate keinen qualitativen Einfluss auf die Art der Bewegung nimmt.

Diese analytische Methode lässt sich auf den Fall einer zeitabhängigen Scherrate übertragen, bei der das Bild der Weiche erhalten bleibt. Allerdings wird die Weiche nun durch eine über das Weichengebiet gemittelte Scherrate gesteuert. Oszilliert die Scherrate derart, dass sie zeitweise im Taumel- und zeitweise im Schwingbereich liegt, kann bei jedem Besuch der Weiche — je nach Wert der gemittelten Scherrate — jeweils entweder eine einzelne Taumel- oder eine einzelne Schwingbewegung erzwungen werden. Mit Hilfe des Weichenbildes lässt sich die kontinuierliche Bewegung daher auf ein diskretes Modell abbilden, wodurch ein analytischer Ausdruck für die mittlere Taumelrate gefunden werden kann, die den Anteil der Taumelbewegungen misst. In der Nähe des Phasenübergangs ergibt sich folglich in Abhängigkeit von der treibenden Frequenz ein reichhaltiges Resonanzverhalten, welches auch phänomenologisch durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen bestätigt werden kann. Durch Wahl einer geeigneten Frequenz können Taumelbewegungen innerhalb des Schwingbereichs nahe am Übergang induziert werden, die ohne Modulation nicht möglich wären. Für Frequenzen oberhalb einer Grenzfrequenz ist kein Taumeln mehr möglich, weil sich hier die Oszillationen innerhalb des Weichengebietes wegmitteln. Neben dieser Grenzfrequenz können auch für die Frequenzbreite der Resonanzspitzen bei endlicher Laufzeit analytische Ausdrücke mit sehr guter Übereinstimmung mit numerischen Ergebnissen gefunden werden.

Um die Gültigkeit des reduzierten Modells zu überprüfen, werden in dieser Arbeit zunächst die vollständigen Bewegungsgleichungen numerisch integriert. Der Großteil älterer Arbeiten verwendet für die Hydrodynamik eine Oberflächen-Integral-Methode mit triangulierter Membran. Weil diese Methode von numerischen Instabilitäten betroffen ist, wird speziell eine Spektralmethode entwickelt, in der Kapselform, Druck und Geschwindigkeit des Flusses in geeignete Basisfunktionen entwickelt werden. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber anderen Methoden besteht in der raschen Konvergenz, weshalb für eine ausreichende Beschreibung oft schon wenige Moden genügen. Darüber hinaus ist die Membranform automatisch glatt, und sowohl Differentiationen als auch Integrationen auf der Membran lassen sich im Spektralraum analytisch

ausführen. Verschiedene Konstitutivgesetze der Membran und beliebige äußere Flüsse sind einfach zu implementieren. Die Methode ist jedoch wenig flexibel, was Membranformen fern der Kugelform betrifft. Sie ist bei beliebigen Kapselgeometrien schlecht und bei Anwesenheit von Wänden nicht mehr praktikabel anwendbar, sowie für die Betrachtung von mehr als einer Kapsel kaum geeignet.

Innerhalb dieser Arbeit wird die Spektralmethode speziell auf eine im Gleichgewicht ellipsoidale Kapsel im linearen Scherfluss angewendet. Als Konstitutivgesetz der Membran werden das Hookesche Gesetz für Scherungen und Flächenänderungen und die Helfrich–Energie für Biegungen gewählt, weil diese Wahl im Falle kleiner Deformationen keine Einschränkung bedeutet. Wie im Experiment startet die Dynamik mit einer undeformierten ellipsoidalen Kapsel. Die Spektralmethode gestattet nun eine stabile Berechnung der Dynamik über einige Taumel- und Schwingbewegungen hinweg, bevor erste numerische Instabilitäten auftreten. Ein Phasendiagramm konnte damit für einen großen Bereich der Scherrate und des Viskositätskontrasts bestimmt werden. Weil die lokalen Deformationen durchweg gering sind, sind die Resultate unabhängig vom gewählten Konstitutivgesetz. Qualitativ und was die Größenordnung angeht auch quantitativ bestätigen sich die Ergebnisse des reduzierten Modells innerhalb des Schwing- und des Taumelbereichs. Ein anderes Verhalten ergibt sich jedoch im Intermittenzbereich. Hier zeigt sich innerhalb der Spektralmethode ein transientes Verhalten, bei dem die Kapsel von einer anfänglichen Taumelbewegung in eine stabile Schwingbewegung relaxiert. Sowohl die Trajektorien im Phasenraum als auch die daraus abgeleitete Poincaré–Abbildungen liefern hierfür starke Indizien. Das intermittierende Verhalten könnte ein Artefakt des reduzierten Modells sein, weil nicht berücksichtigte Formänderungen insbesondere im intermittierenden Bereich wichtig werden könnten. Daher ist eine systematische Untersuchung der Kapseldynamik notwendig, um das Intermittenzproblem zu lösen und um die Frage abschließend zu beantworten, wie relevant Formänderungen tatsächlich sind.

In dieser Arbeit wird hierzu ein systematischer störungstheoretischer Zugang gewählt. Für eine quasisphärische Referenzmembran wird der Grenzfall kleiner Deformationen betrachtet, bei dem eine Entwicklung um eine Kugel möglich wird. Aufgrund der hohen Symmetrie der Kugel dienen Vektorkugelflächenfunktionen als Basisfunktionen der Membranform, während Druckfelder und Geschwindigkeitsfelder auf der Kugel in skalare Kugelflächenfunktionen und Lamb–Moden entwickelt werden. Frühere Arbeiten haben sich im quasisphärischen Grenzfall stets auf den einfacheren Fall einer sphärischen Referenzform konzentriert. Weil im nicht-sphärischen Fall verschiedene Membranpunkte nicht mehr äquivalent zueinander sind, müssen über Lagrange–Parameter die materiellen Membranelemente während der Dynamik verfolgt werden, um Verformungen und elastische Kräfte berechnen zu können.

Als Konstitutivgesetz genügt im Fall kleiner Deformationen eine elastische Energie, die sich aus dem Hookeschen Gesetz und der Helfrichschen Biegeenergie zusammensetzt. Die Membran wird darüber hinaus als flächeninkompressibel vorausgesetzt, weil dadurch schon in niedrigster Ordnung entscheidende nicht-lineare Kopplungen zwischen den Moden auftreten. Dies wird anschaulich durch die Tatsache klar, dass das lineare Geschwindigkeitsfeld im Modenraum durch die Bedingung der konstanten Fläche auf eine Hyperkugel projiziert wird. Gleichzeitig wird durch die Flächenerhaltung die Membran eines roten Blutkörperchens modelliert. Eine von der Zeit und den Membranpunkten abhängige Oberflächenspannung sorgt als Lagrange–Parameter für die lokale und globale Erhaltung der Fläche. Ohne die Forderung der Flächeninkompressibilität müssten höhere Ordnungen betrachtet werden, um nicht-lineare Kopplungen zu erhalten.

Nach Herleitung der Bewegungsgleichungen für die Deformationsmoden in niedrigster Ordnung werden sie auf den Fall spezialisiert, dass die Kapsel eine ellipsoidale Referenzform besitzt

und sich in einem linearen Rotations- und Elongationsfluss befindet. Unter der Annahme, dass Referenzform und Anfangsform axisymmetrisch gewählt sind und die Kapsel ihre Bewegung symmetrisch zur Scherebene startet, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf drei: Es handelt sich hierbei um die bereits bekannten beiden Winkel, Anstellwinkel und Phasenwinkel, sowie um einen Formparameter, der angibt, wie sehr die Kapsel innerhalb der Scherebene bzw. senkrecht dazu gestreckt ist. Wird die Dynamik dieses Formparameters künstlich festgehalten, stimmen die beiden Bewegungsgleichungen für die Winkel mit den quasisphärischen Bewegungsgleichungen des reduzierten Kapselmodells überein.

Numerische Integration der approximativen Bewegungsgleichungen, bei der die Kapsel aus ihrer Referenzform startet, liefert im Schwing- und Taumelbereich ein analoges Phasendiagramm wie beim reduzierten Modell. Im Intermittenzbereich jedoch ergibt sich, wie schon bei der Spektralmethode, ein eindeutig transientes Verhalten. Nach einer Relaxation der Form werden die anfänglichen Taumelbewegungen durch stabile Schwingbewegungen abgelöst. Die relaxierte Form ist dabei senkrecht zur Scherebene stark gestreckt, während ihr Schnitt mit der Scherebene nahezu kreisförmig wird.

Die numerische Phänomenologie kann im Grenzfall starker Flüsse durch analytische Ergebnisse untermauert werden, wobei auf beide Übergänge getrennt eingegangen wird. Der kontinuierliche Übergang zwischen Schwingbewegung und transienter Bewegung findet bei starkem Scherfluss und geringem Viskositätskontrast statt und entspricht einem Phasenübergang zweiter Ordnung. Die analytisch erhaltenen Werte des mittleren Anstellwinkels, des mittleren Formparameters und deren Oszillationen stimmen exzellent mit den numerischen Ergebnissen der quasisphärischen Näherung überein. Für geringen Viskositätskontrast schwingt die Kapsel mit positivem Anstellwinkel, wobei die Kapsel in der Scherebene nahezu maximal gestreckt ist und die Form nur schwach oszilliert. Bei einer Erhöhung des Viskositätskontrasts sinkt der mittlere Anstellwinkel ab, und es kommt zum Übergang in eine transiente Schwingbewegung, sobald sich die lange Halbachse knapp oberhalb der Scherflussrichtung befindet. Im transienten Bereich schwingt die Kapsel nach der Relaxation mit ausgeprägten Formänderungen, die für steigenden Viskositätskontrast abnehmen. Die mittlere Form ist hier im Unterschied zum Schwingbereich nicht innerhalb sondern senkrecht zur Scherebene stark gestreckt.

Entlang der Phasengrenze des Übergangs zwischen Taumeln und transientem Schwingen stehen Scherrate und Viskositätskontrast für starken Scherfluss in einer linearen Beziehung. Der Übergang ist durch einen Sprung des mittleren Formparameters gekennzeichnet, entspricht also einem Phasenübergang erster Ordnung. Für die analytische Behandlung ist eine Zeitskalenseparation hilfreich, bei der die schnellen Oszillationen von Form, Anstellwinkel und Phasenwinkel von den langsamen Bewegungen ihrer mittleren Werte getrennt werden können. Startet die Kapsel in der Referenzform, wird sie unterhalb eines kritischen Viskositätskontrasts in transientes Schwingen relaxieren. Für größeren Viskositätskontrast jedoch führt sie eine stabile Taumelbewegung aus, bei der sich die Form nur wenig von der Referenzform unterscheidet. Während unterhalb des kritischen Viskositätskontrasts keine Taumelbewegung möglich ist, bleibt oberhalb die transiente Schwingbewegung linear stabil gegen Störungen. Das analytische Ergebnis des stabilen Taumel- und Schwingzweiges zeigt die Koexistenz beider Bewegungsformen oberhalb des kritischen Viskositätskontrasts, die sich auch numerisch durch geeignete Wahl der Anfangsform bestätigen lässt. Welche Bewegung langfristig ausgewählt wird, hängt also von den Anfangsbedingungen ab. Die Schwingbewegung wird nur für Anfangsformen erreicht, die senkrecht zur Scherebene stark gestreckt sind. Für alle anderen Startformen, insbesondere für die Referenzform, ergibt sich stets eine Taumelbewegung.

Mit Hilfe der Störungsentwicklung um die quasisphärische ellipsoidale Referenzform im Grenzfall kleiner Deformationen kann also das Intermittenzrätsel zu Gunsten einer transi-

enten Schwingbewegung und unter einer ausgeprägten Formänderung gelöst werden. Hierbei können neben den Trajektorien in den verschiedenen Gebieten im Phasendiagramm zusätzlich analytische Ausdrücke der Phasengrenzen im Grenzfall starker Flüsse bestimmt werden.

Die Dynamik einer ellipsoidalen Kapsel im linearen Fluss konnte durch numerische und analytische Betrachtungen innerhalb dieser Arbeit vollständig bestimmt und verstanden werden. Die entscheidenden Freiheitsgrade, die sich aus Form und Orientierung der Kapsel sowie der Panzerkettenbewegung ihrer Membran zusammensetzen, konnten samt ihrer gegenseitigen Einflussnahme identifiziert werden, wodurch sich die Kapseldynamik auf die wesentlichen Aspekte und Zusammenhänge reduzieren und beschreiben lässt.

Summary

Elastic capsules constitute an important class of soft objects. Beyond numerous purely scientific questions, elastic capsules are a starting point for promising industrial applications. In pharmaceutical applications capsules can be used for encapsulation, transport and controlled release of drugs. In a micro-fluidic context, one of the most relevant issues is the behaviour of elastic capsules in externally applied flow. The recent priority programm of the German science foundation 1164 *micro- and nano-fluidics* states a prominent and successful example of the actuality and importance within this area of research.

Elastic capsules consist of a thin closed membrane surrounding an inner fluid. Additional to its resistance against bending and stretching and in contrast to fluid vesicles, the membrane of a capsule exhibits finite shear elasticity leading to an important reaction of non-spherical capsules upon deformation. Due to restoring forces and dissipation, a deformed capsule eventually returns to its undeformed state. This shape memory effect distinguishes capsules from vesicles and can lead to qualitatively different behaviour in hydrodynamic flow.

The structural feature of shear elasticity is achieved either by chemically or physically crosslinking the molecules forming the membrane or by attaching a polymeric network to a fluid membrane. Red blood cells (RBCs) constitute a natural example because the cytoskeleton attached to their fluid membrane leads to a finite shear elasticity. Hence, RBCs are subsumed under this class of elastic capsules as well.

The main objective of this thesis is to investigate the dynamics of a single elastic capsule in linear flow, where the undeformed shape typically is ellipsoidal. While its membrane can be described by an arbitrary constitutive model, all these models reduce to the contributions of Hooke's law and Helfrich's bending energy in the limit of small deformations. The capsule is embedded in an infinite external flow in the absence of walls. The viscosity of the outer fluid can differ from the viscosity of the inner fluid, thereby defining the viscosity contrast as an important quantity.

In typical experiments, the length scales are small enough for dissipation to be dominant over inertial effects. Thus, the Reynolds number, defined as ratio of inertial over viscous forces, is small, and the inner and outer flow can be described by the linear Stokes equations. Boundary conditions have to be specified to uniquely determine the dynamics of the capsule. Since the inertia of the membrane is negligible, interfacial forces have to balance with fluid stresses on the membrane. Additionally, a no-slip boundary condition is assumed at the membrane leading to both a continuous velocity field and the advection of the membrane.

If the length scale of the externally applied flow is large compared to the size of the capsule the flow can be linearized. In experiments, a linear shear flow, whose strength is measured by the shear rate, can be easily obtained with a Couette device where two concentric cylinders of different radius spin with different directions of rotation. Two components of the shear flow can be identified, namely rotational and elongational flow. Their strength can be independently controlled with a four-roll device, where four parallel cylinders arranged in a square rotate with different speeds to induce the desired flow field.

The dynamics of a capsule in shear flow is challenging from a theoretical perspective since the shape of the capsule is not given *a priori* but determined from a balance of hydrodynamic

and elastic forces. Hence, its deformation will depend on its material properties and the type of external flow. Since analytical solutions are only possible in certain limit cases numerical methods have to be used to solve the full equations of motion. In the case of small deformations from the sphere, a quasi-spherical expansion can be performed. Alternatively, the full problem can be simplified by reduction to just a few relevant degrees of freedom.

The Keller–Skalak model follows the second strategy. Here, a RBC in a linear shear flow is artificially fixed to an ellipsoidal shape and the degrees of freedom are reduced to two angles. Two semi-axes of the ellipsoidal shape lie within the shear plane while the third axis is perpendicular. Then, the orientation of the capsule is given by the inclination angle which measures the angle between the direction of the long axis and the direction of the shear flow. The second angle, called phase angle, describes the tank-treading motion of the membrane. Here, Keller and Skalak assume a uniform motion of the membrane around the fixed ellipsoidal shape. Finally, the conservation of both energy and torque leads to the equations of motion for inclination and phase angle. Their solutions can be categorized into two different types of motion: For low viscosity contrast the orientation is stationary with the long axis pointing close to the direction of the largest elongation of the flow. Around this fixed shape, the membrane is performing full tank-treading motions. Above a critical viscosity ratio which depends on the lengths of the semi-axes the tank-treading motion turns unstable and the capsule begins to tumble just as a rigid body.

However, since the model lacks the shape memory effect, it should only be used to describe fluid vesicles. Still, it can serve as a starting point for a reduced model of elastic capsules. To incorporate the shape memory effect into the Keller–Skalak model, the energy stored in the elastic deformations have to be accounted for in the energy balance. An analogous derivation to the approach within the Keller–Skalak model leads to the equations of motion for the inclination angle and the phase angle. Except for limit cases and in contrast to the Keller–Skalak model, their solutions can only be obtained numerically.

The phase diagram of the reduced model shows three different regimes where the capsule either tumbles, swings or performs an intermittent motion. A general and direct consequence of the shape memory effect is that capsules perform tumbling motions for low shear rates. Here, the hydrodynamic forces are not sufficient to overcome the elastic barrier which is present for a hypothetical tank-treading motion. Only for higher shear rates can the elastic barrier be overcome and a tank-treading motion becomes possible. For high shear rates and low to moderate viscosity contrast, a permanent tank-treading motion is stable, where the inclination angle oscillates around a positive finite value. This type of motion is called swinging. For larger viscosity ratio and in between swinging and tumbling regime, the capsule behaves in an intermittent manner consisting of mixed tumbling and swinging periods. Within this intermittent regime, the tumbling motions are interrupted by individual swinging motions close to the tumbling regime and *vice versa* close to the swinging regime.

The predictions of the reduced model can be compared with experimental results. Although polymerized capsules are never perfectly spherical, their reference shape usually deviates only slightly from a sphere. Thus, their elastic tank-treading barrier is too small to induce tumbling motions for the shear rates used in experiments so far. However, oscillations of the inclination angle during the swinging motions were observed for polymerized, nearly spherical capsules in agreement with the predictions of the reduced model.

In order to observe tumbling motions for experimentally accessible shear rates, capsules with a large deviation from the spherical shape have to be used. RBCs with their discocyte equilibrium shape are an ideal and convenient choice. Experiments with single RBCs show qualitative agreement with results of the reduced model for a large range of both shear rate

and viscosity contrast. As expected, tumbling motions occur for low shear rates, while swinging motions are stable for higher shear rates. Interestingly, a hysteresis effect at the transition between tumbling and swinging occurs when alternately increasing and decreasing the shear rate. In the transition regime, a single tumbling motion seems to mix with multiple swinging motions suggesting an identification with the intermittent regime of the reduced model. Due to the limited period of observation the motion could also be transient rather than intermittent. The resolution of this problem is one goal of this thesis. However, further implications of the reduced model are presented, as derived in this work.

A complete analytical solution can be obtained within the quasi-spherical limit. To lowest order in the deformation from a sphere, trajectories for swinging and tumbling motions can be easily derived. Close to the transition, trajectories can be obtained to first order by the method of matched asymptotic expansion. Here, the equations of motion are solved in different regions of the phase space, where in each case different terms dominate. Asymptotic matching of these solutions leads to the stable trajectories. The results can be compared with numerically obtained trajectories in the reduced model, with excellent agreement. An analytical expression for the transition line between tumbling and swinging follows from the asymptotic expansion. As a side note should be mentioned that the intermittent regime between the swinging and tumbling regime does not exist to first order in the deformation from a sphere.

Close to the phase transition a simple picture of a junction shows the essential feature in the quasi-spherical limit. This picture can also be transferred to the case of time-dependent flow. Starting from a capsule with an undeformed membrane and with its long axis orientated close to the direction of the shear flow, the hydrodynamic forces lead to an initial rotation of the long axis and to a tank-treading motion of the membrane, independent of the shear rate. There are two possibilities for the membrane to relax back to an undeformed state. Which one is chosen depends on the value of the shear rate. For high shear rates, the membrane is moved over the energy barrier, while the inclination angle relaxes back, before a new deformation of the membrane begins. This sequence eventually leads to full tank-treading motions and oscillations of the inclination angle. The capsule therefore performs swinging motions. For low shear rates, the fluid forces are too low to push the membrane over the energy barrier. Thus, tank-treading motions are suppressed and the capsule can only relax by performing half a tumbling motion. Meanwhile, the membrane releases energy by moving back towards its undeformed position.

Summarizing these findings, whether a capsule relaxes via a single swinging motion or a single tumbling motion is decided by the instantaneous value of the shear rate in a localized region in phase space corresponding to a particular deformation state and inclination angle. Hence, this region is called junction region, controlled by the shear rate. Outside this region, the value of the shear rate does not influence the behaviour of the capsule qualitatively.

The method of matched asymptotic expansion can also be applied to the case of a time-dependent shear rate. The only difference to the time-constant case is that the junction is now controlled by an averaged shear rate, where the average is taken over the junction region (with a Gaussian weight). Since the junction region is visited over and over again, the averaged value of an oscillating shear rate can lead either to a single swinging or a single tumbling motion for each visit. Using the junction picture the continuous motion can be mapped onto a discrete model with an analytic expression for the mean tumbling rate. Close to the phase transition, a rich resonance behaviour follows, which can be confirmed by numerical integration of the equations of motion. Choosing, for instance, an appropriate modulation frequency with a mean shear rate in the swinging and close to the tumbling regime, single tumbling motions can be induced which would not show up without the modulation. For frequencies beyond a certain

cut-off frequency, the tumbling rate vanishes because the oscillations are fast enough to be averaged out. Analytical expressions can be deduced with excellent agreement to numerically obtained results for the cut-off frequency and the width of the resonance peaks in finite runs.

To check the validity of the reduced model, the full equations of motion are numerically integrated. Since the standard boundary-integral method with a triangulated membrane is plagued by numerical instabilities, a spectral method is developed and used in this thesis where all fields are expanded into certain basis functions. Spectral methods are advantageous because they quickly converge. Additionally, the membrane shape is automatically smooth and both differentiating and integrating on the membrane can be done analytically in spectral space. Different constitutive laws and arbitrary external flows can be implemented easily. A drawback of the spectral method is the geometrical inflexibility: More than a single capsule, different geometries of the capsule shape and the presence of walls cannot be implemented easily.

In this thesis, the spectral method is used to solve for the dynamics of an ellipsoidal capsule in linear shear flow whose membrane is described by Hooke's law and Helfrich's bending energy. For low deformation, this choice is no loss of generality. Analogous to experiments, the capsule starts its motion out of its undeformed ellipsoidal state. The dynamics calculated using the spectral approach is stable enough to show several tumbling or swinging motions. Since deformations turned out to be small, the results should not qualitatively change when using different constitutive laws. For a large range of viscosity contrasts and shear rates, a phase diagram could be obtained showing three different dynamical regimes. Comparing with the results of the reduced model, qualitative agreement in the swinging and tumbling regime is observed. However, in the intermittent regime the spectral method clearly shows a transient motion of the capsule. Here, stable swinging motions replace the initial tumbling motions as is corroborated by trajectories and Poincaré plots. Thus, the intermittency is presumably an artefact of the reduced model. Since shape changes are likely to be important a systematic study of the capsule dynamics is necessary to clarify the influence of an artificially fixed shape.

For this purpose, a perturbative access is chosen within this thesis. The limit of small deformations from a sphere is examined for a capsule with an ellipsoidal reference shape. Existing quasi-spherical expansions of elastic forces are expanded to include the shape memory effect. Since membrane patches are no longer equivalent for non-spherical reference shapes, material points of the membrane have to be tracked in order to be able to calculate the deformation and the elastic forces.

The material properties of the membrane in the limit of small deformations are generally composed of Hooke's law and Helfrich's energy. To enforce non-linear coupling of the modes in lowest order of the deformation, the membrane is assumed to be area incompressible. The material properties of the membrane then correspond to the membrane of a RBC including the effect of the cytoskeleton. The conservation of the global membrane area effectively projects the linear velocity field in spectral space onto a hyper sphere. To ensure local and global area conservation, a time- and position-dependent surface tension is included as a Lagrangian parameter.

After deducing the quasi-spherical equations of motion for this model system to lowest order, they are specialized to the case of an ellipsoidal capsule in linear flow, consisting of a rotational and an elongational flow. For an axisymmetric reference shape, starting with a capsule symmetrical to the shear plane, the number of degrees of freedom reduces to three: the two angles of the reduced model, and a shape parameter indicating how much the capsule is stretched in and perpendicular to the shear plane. Holding the shape artificially fixed leads to the same equations of motion for the two angles as in the quasi-spherical limit of the reduced

model.

Starting with a capsule in its undeformed state, numerical integration of the equations of motion leads to a phase diagram which is qualitatively consistent with the phase diagram obtained in the reduced model. Again, as in the case of the spectral method, the capsule behaves transient in the intermittent regime. After a relaxation of the shape, initial tumbling motions are replaced by stable swinging motions. Here, the relaxed shape is strongly stretched perpendicular to the shear plane while the cut of the membrane with the shear plane is close to circular.

These numerical results can be confirmed by analytical computations in the limit of strong flows where different phase transitions are examined separately. A continuous transition takes place between swinging and transient motion for strong shear flow and finite viscosity contrast, corresponding to a second order phase transition. Analytically obtained values of the mean inclination angle, the mean shape parameter and their oscillations excellently agree with numerical results. For low viscosity ratio, the capsule swings with a finite positive inclination angle and weak oscillations of the shape. Here, the shape is strongly stretched in the shear plane (and close to the direction of the elongational flow). Increasing the viscosity ratio leads to a decreasing mean inclination angle. The transition to the transient swinging motion takes place for a mean inclination angle close to zero. For higher viscosity contrast, in the transient regime, the capsule swings with strong oscillations of the shape where the amplitude decreases for increasing viscosity ratio. Contrary to the swinging motion, the shape for transient swinging is strongly stretched perpendicular to the shear plane.

Along the transition line between transient and tumbling motion, shear rate and viscosity ratio are in a linear relationship for strong flows. Here, the transition is characterized by a jump of the mean shape parameter, indicating a first order phase transition. An analytical treatment demands the separation of time scales. Fast oscillations of the three degrees of freedom are separated from the slow motions of their mean values. A capsule starting out of its reference shape relaxes to a swinging motion, after a transient motion, below a critical viscosity contrast. Here, the shape is strongly extended perpendicular to the shear plane. For higher viscosity ratio, the capsule performs stable tumbling motions where the capsule shape remains close to the reference shape. While below the critical viscosity ratio no tumbling solutions are possible, the transient swinging solution remains linear stable upon perturbations even above the critical viscosity ratio. The coexistence of both a tumbling and a transient swinging motion can be confirmed by numerical results. Which type of motion is stable depends on the initial shape of the capsule. The transient swinging motion is only possible for initial shapes which are strongly extended perpendicular to the shear plane, otherwise (and in particular for starting with the reference shape) tumbling motions are stable in the long time limit.

Using the perturbation expansion around a quasi-spherical ellipsoidal reference capsule in the limit of small deformations, the intermittency puzzle can be solved. In between swinging and tumbling regimes, a transient motion takes place, characterized by strong shape changes. Here, trajectories in different regions of the phase space and analytical expression of the transition lines could be obtained in the limit of strong flows.

Within this work, the dynamics of an ellipsoidal capsule in linear flow could be completely solved by numerical and analytical treatments. The relevant degrees of freedom have been identified, namely the shape and the orientation of the capsule and the tank-treading motion of the membrane. By clarifying their mutual influence, the dynamics could be reduced to its important aspects and connections.

1 Einleitung

Innerhalb des Themengebietes weicher Materie bilden elastische Kapseln aus grundlegenden Gesichtspunkten und für Anwendungen eine wichtige Klasse [1, 2, 3, 4, 5]. Vielversprechende Anwendungen von Mikrokapseln ergeben sich vor allem in der Pharmazie. Hier können sie beispielsweise dazu eingesetzt werden, eingekapselte Medikamente im menschlichen Körper zu transportieren und gezielt abzugeben [6, 7]. Auch im Bereich der Mikrofluidik bietet das Verhalten elastischer Kapseln in einem von außen angelegten Fluss seit geraumer Zeit sowohl in der Theorie als auch im Experiment interessante Fragestellungen. Aus theoretischer Sicht handelt es sich hierbei insbesondere deshalb um eine Herausforderung, weil die Form der Kapsel nicht von vornherein gegeben ist, sondern sich dynamisch durch ein Gleichgewicht zwischen elastischen Kräften und hydrodynamischen Kräften einstellt. Daher hängen die Bewegung der Kapsel und die Verformung ihrer Membran sowohl von den konstitutiven Membraneigenschaften als auch vom Typ des angelegten äußeren Flusses ab.

Eine Kapsel besteht aus einer geschlossenen elastischen Membran, die eine Flüssigkeit umschließt und deren Dicke im Nanometerbereich liegt. Die Größe der gesamten Kapsel befindet sich im Mikrometerbereich, so dass sich ihre Membran als zweidimensionale Fläche idealisieren lässt. Die Membran selbst weist gegen Deformationen einen elastischen Widerstand auf, also gegen Scherungen, Flächenänderungen und Biegungen. Im Gegensatz zu fluiden Vesikeln mit ihrer flächeninkompressiblen Doppellipidmembran [8] können Kapseln dauerhaft Scherspannungen aufrecht erhalten. Diese Eigenschaft wird entweder durch die physikalische oder chemische Vernetzung der membranbildenden Moleküle erreicht [9] oder durch Anbringen eines Polymernetzwerkes an eine bereits vorhandene fluide Membran, wie man es auch bei einem roten Blutkörperchen mit seiner diskozyten Form vorfinden kann [10]. Hier erhält die Membran durch das Zytoskelett eine endliche Scherelastizität, so dass das rote Blutkörperchen im Unterschied zum fluiden Vesikel im Rahmen dieser Arbeit den elastischen Kapseln zugeordnet werden kann.

Eine Folge der Scherelastizität der Membran polymerisierter Kapseln und roter Blutkörperchen ist der Effekt des Formgedächtnisses (*shape memory effect*) [11, 12]. Bei einer Kapsel, deren undeformierte Form keine Kugel ist, sind die einzelnen Membranelemente nicht äquivalent zueinander. Bewegt sich hier die Membran in Form einer Panzerkettenbewegung, ohne dass sich die Form der Kapsel ändert, wird die Membran verspannt, weil sich jedes Membranelement verformt. Diese Verspannung kostet elastische Energie und führt zu einer Rückstellkraft in Richtung des undeformierten Ausgangszustandes.

Bevor auf den aktuellen Stand der Dynamik von Kapseln im externen Fluss eingegangen wird, soll zunächst die in dieser Arbeit betrachtete Problemstellung erläutert werden. Es wird, wie in Abbildung 1.1 verdeutlicht, stets eine einzelne Kapsel betrachtet, deren Membran eine viskose Flüssigkeit umschließt und die von einem äußeren viskosen Fluss umgeben ist, dessen Viskosität sich von der Viskosität der inneren Flüssigkeit unterscheiden kann.

Das Verhältnis beider Viskositäten ist ein für die Dynamik wichtiger Parameter, der als Viskositätskontrast bezeichnet wird. Bei allen Experimenten, auf die sich diese Arbeit bezieht, sind die Längenskalen derart klein, dass das System stark überdämpft ist und Trägheitseffekte vernachlässigt werden können. Das Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskräften

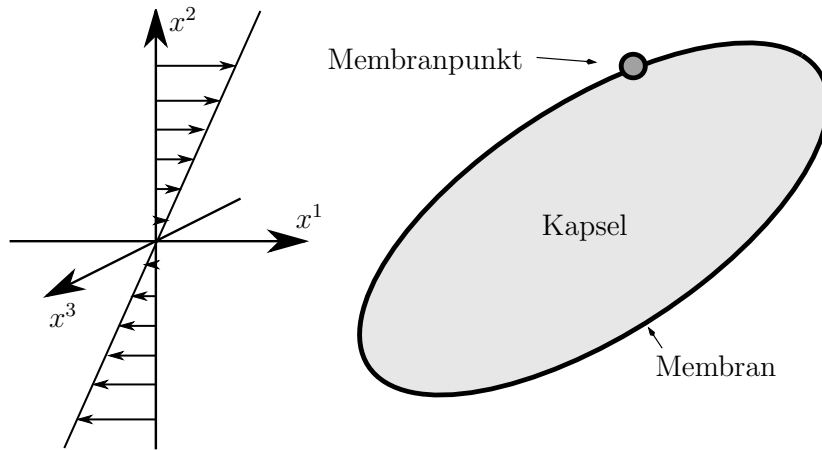


Abbildung 1.1: Zweidimensionaler Schnitt einer elastischen Kapsel im externen Fluss. Die Membran umschließt eine innere Flüssigkeit und ist von einem äußeren Fluss umgeben. Auf der linken Seite ist beispielhaft ein lineares Scherflussprofil in einem kartesischen Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3) dargestellt.

wird durch die Reynolds-Zahl ausgedrückt, deren Werte typischerweise in der Größenordnung $10^{-2} - 10^{-3}$ liegen. Weil weiterhin in den Experimenten die Kompressibilitäten der Flüssigkeiten vernachlässigbar sind, können die beiden Flüsse innerhalb und außerhalb der Membran durch die linearen Stokes-Gleichungen beschrieben werden, bei der sich die Geschwindigkeitsprofile instantan aus ihren Werten auf den Wänden und auf der Membran ergeben. Als Randbedingung wird zum einen an der Membran die Stetigkeit der Geschwindigkeit gefordert, zum anderen herrscht eine Kräftebalance zwischen hydrodynamischen und elastischen Kräften.

Der von außen vorgegebene Fluss entspricht oft einem linearen Scherfluss, dessen Stärke durch die Scherrate gegeben ist und der als Summe eines Rotations- und Elongationsanteils betrachtet werden kann. Ein solcher Fluss lässt sich leicht in einer Couette-Apparatur erzeugen, bei der zwei konzentrische, unterschiedlich breite Zylinder gegensätzlich rotieren. In einer weiteren experimentellen Anordnung [13], in der vier Zylinder rotieren (*four-roll mill device*), lassen sich die Stärken des Rotations- und des Elongationsflusses unabhängig voneinander einstellen [14].

Bringt man nun eine Kapsel in einen solchen Scherfluss, verhält sie sich aufgrund der Scherelastizität anders als Vesikel, deren Dynamik in [15] zusammengefasst ist. Eine Folge der Scherelastizität der Membran lässt sich direkt beobachten. Im Unterschied zu Vesikeln zeigt sich bei Kapseln unter gewissen Voraussetzungen eine Falteninstabilität [16], die in Abbildung 1.2 dargestellt ist und analytisch erklärt werden kann [17]. Dabei zeigt sich, dass kurze Wellenlängen innerhalb der Membran durch ein Wechselspiel zwischen lokaler Kompression und Biegesteifigkeit ausgewählt werden. Daher lassen sich durch Vergleich der kritischen Wellenlänge und der kritischen Scherrate elastische Eigenschaften der Membran prinzipiell experimentell bestimmen, insbesondere die ansonsten schwer zugängliche Biegesteifigkeit.

Die wohl bekannteste Bewegungsform einer Kapsel im Scherfluss ist jedoch die Panzerkettenbewegung der Membran, die in ersten Experimenten ab den 1990er Jahren beobachtet werden konnte [18, 19, 20, 16, 9]. Auch Vesikel zeigen im Scherfluss eine solche Bewegung, wie in Abbildung 1.3 dargestellt ist. In theoretischen Arbeiten konnte im quasisphärischen Grenzfall, d.h. für Kapseln, deren Form nur wenig von einer Kugelform abweicht, bereits früh gezeigt werden, dass die Membran einer ursprünglich sphärischen Kapsel im Scherfluss eine

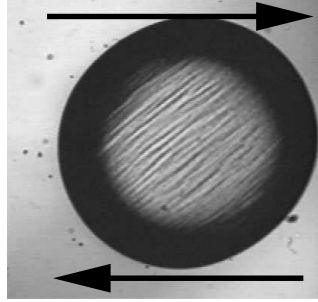


Abbildung 1.2: Falteninstabilität einer Kapsel im Scherfluss (Pfeile), aus [16].

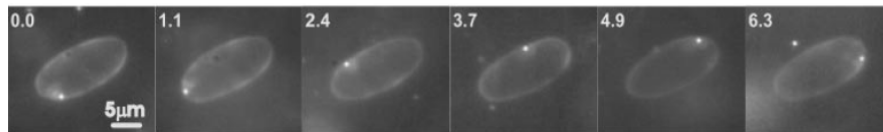


Abbildung 1.3: Panzerkettenbewegung eines Vesikels im Scherfluss, aus [21].

Panzerkettenbewegung um eine stationäre Kapselform durchführt [22]. Die Kapsel deformiert sich dabei in eine näherungsweise ellipsoidale Form, wobei die lange Achse sich unter einem Winkel von 45 Grad zur Scherflussrichtung anstellt. Aus der Dynamik einer sphärischen Kapsel im Scherfluss konnte die Relaxation in den stationären Zustand im quasisphärischen Grenzfall berechnet werden [23].

In den erwähnten Experimenten konnten die quasisphärischen Vorhersagen für nicht zu große Scherraten zwar in wesentlichen Zügen bestätigt werden, aber im Unterschied zur theoretischen Vorhersage einer reinen Panzerkettenbewegung sphärischer Kapseln mit stationärer Kapselform und Orientierung zeigten die Kapseln in den Experimenten überlagerte Schwingungen [19, 16]. Die Schwingungen rühren daher, dass eine elastische Kapsel nie perfekt sphärisch konstruiert werden kann, und daher die geringen Abweichungen der Ruheform von der Kugel über das Formgedächtnis letztlich zu den beobachtbaren Schwingungen führen. Während einer Panzerkettenbewegung führt die periodische Verspannung der Membran nun direkt zu den beobachteten Schwingungen der Form (des Deformationsparameters) und der Orientierung (des Anstellwinkels). Deshalb wird die Panzerkettenbewegung mit ihrer überlagerten Oszillation im Weiteren stets als Schwingbewegung oder Schwingen bezeichnet.

Eine weitere Konsequenz des Formgedächtnisses ist, dass eine nicht-sphärische Kapsel bei geringen Scherraten keine Panzerkettenbewegung ausüben kann, weil die hydrodynamischen Kräfte zu gering sind, um die elastische Barriere zu überwinden, die bei einer hypothetischen Panzerkettenbewegung durch die Verspannung vorhanden ist. Aufgrund des Rotationsanteils des Scherflusses kann die Kapsel daher nur Taumelbewegungen ausführen, bei der die Kapsel ähnlich wie ein starrer Körper im Wesentlichen als Ganzes und mit geringen Formänderungen rotiert. Diese Taumelbewegungen konnten in den bisherigen Experimenten bei polymerisierten Kapseln jedoch nicht entdeckt werden, weil die Abweichungen der undeformierten Membran von der Kugelform nur sehr gering waren, und die elastische Barriere im Vergleich zu den experimentell verwendeten Scherraten zu gering war.

Um solche Taumelbewegungen auch für zugängliche Scherraten zu realisieren, wird eine stärkere Abweichung der undeformierten Referenzform von der Kugel benötigt. Hier sind rote Blutkörperchen aufgrund ihrer diskozyten Ruheform gut geeignet (Abb. 1.4). In frühen Experimenten wurden Taumelbewegungen roter Blutkörperchen allerdings nur in dichter Suspension



Abbildung 1.4: Aufnahme roter Blutkörperchen mit einem Elektronenmikroskop, aus [24]. Deutlich zu erkennen ist die bikonkave Form. Die Breite der Aufnahme beträgt etwa $50\ \mu\text{m}$.

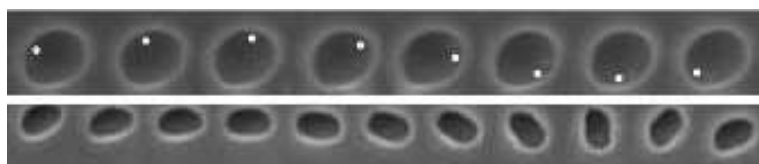


Abbildung 1.5: Panzerketten- und Taumelbewegung eines roten Blutkörperchens im Scherfluss, aus [29].

im Blutplasma beobachtet, während bei allen Experimenten mit einzelnen roten Blutkörperchen die Scherrate stets zu groß gewählt war, um Taumelbewegungen beobachten zu können [25, 26, 27, 28]. Erst durch die Anwendung genügend kleiner Scherraten konnten Taumelbewegungen einzelner roter Blutkörperchen experimentell realisiert werden [29], die in Abbildung 1.5 gezeigt werden. Hier wurden die roten Blutkörperchen nicht nur in Abhängigkeit von der Scherrate untersucht, sondern auch in einem großen Bereich des Viskositätskontrasts. Dabei wurde im Gebiet der Schwingbewegungen beobachtet, dass die Schwingungsfrequenzen der Form und Orientierung genau doppelt so groß waren wie die Frequenz der entsprechenden Panzerkettenbewegung, was im Einklang mit ersten numerischen Ergebnissen [30] zu Kapseloszillationen aus dem Jahr 1998 war. Somit konnte numerisch und experimentell ein direkter Zusammenhang zwischen den Oszillationen und der Membranbewegung nachgewiesen werden, der direkt aus dem Formgedächtnis folgt. Überraschenderweise zeigte sich in den Experimenten [29] eine Hysterese zwischen Taumeln und Schwingen bei abwechselnder Erhöhung und Verringerung der Scherrate.

Die wesentlichen experimentellen Beobachtungen innerhalb dieses Experimentes können in einem reduzierten Kapselmodell reproduziert werden [29, 31], bei dem nur einige wenige relevante Freiheitsgrade berücksichtigt werden, während alle anderen Freiheitsgrade künstlich festgehalten werden. Weil das reduzierte Kapselmodell auf das Keller-Skalak Modell aufbaut, wird zunächst das Keller-Skalak Modell samt seinen Vorhersagen vorgestellt. Es beschreibt ein fluides Vesikel mit fester ellipsoidaler Form in einem linearen Scherfluss. Als Freiheitsgrade bleiben die Bewegung der Membran innerhalb der festen Form und die Orientierung der Kapsel innerhalb des festen Laborsystems. Die Orientierung wird durch den Anstellwinkel beschrieben, während die Panzerkettenbewegung als gleichförmig angenommen wird und durch einen globalen Phasenwinkel gegeben ist. Durch Energie- und Drehimpulsbilanzen folgen die Bewegungsgleichungen dieser beiden Winkelfreiheitsgrade. Ihre Lösungen ergeben entweder

eine Panzerkettenbewegung oder eine Taumelbewegung, wobei ihr Übergang hier nur vom Viskositätskontrast und den Halbachsen des Ellipsoides abhängt.

Für polymerisierte Kapseln wie auch für rote Blutkörperchen fehlt diesem Modell jedoch der Effekt des Formgedächtnisses. Die Membran einer Kapsel wirkt durch die Verspannung während der Panzerkettenbewegung als Energiespeicher. Durch Berücksichtigung dieses Effektes im Keller–Skalak Modell ergibt sich das reduzierte Kapselmodell [29, 31], innerhalb dessen sich im Phasendiagramm zwischen den beiden Bereichen, in denen die Kapsel reine Schwing- bzw. Taumelbewegungen vollführt, ein intermittierender Bereich zeigt, bei dem sich Taumel- und Schwingbewegungen abwechseln. Der Hysteresebereich der roten Blutkörperchen aus dem Experiment wurde zwar mit diesem Intermittenzbereich identifiziert [29], aus den experimentellen Beobachtungen folgt jedoch nicht zwingend ein intermittierendes Verhalten des roten Blutkörperchens.

Während alle bisherigen Arbeiten [29, 31, 32, 33] die Bewegungsgleichungen des reduzierten Modells numerisch lösten, konnte innerhalb dieser Arbeit die Dynamik im quasisphärischen Grenzfall vollständig analytisch bestimmt werden [34]. Die entsprechende analytische Methode, die einer Zeitskalenseparation entspricht, kann auch auf den Fall einer sich zeitlich ändernden Scherrate erfolgreich angewendet werden, woraus sich ein umfassendes Bild ergibt, welches interessante Resonanzphänomene beschreiben und erklären kann.

Um die Gültigkeit des reduzierten Modells zu testen, bedarf es numerischer Methoden, die die Dynamik der Kapsel im Scherfluss ohne Eingrenzung auf wenige Freiheitsgrade berechnen. Die numerische Implementierung stellt ein nicht-triviales Problem dar, wobei alle Methoden mit numerischen Instabilitäten zu kämpfen haben. Erste numerische Simulationen zu Kapseln wurden in der Gruppe von Barthès–Biesel durchgeführt, wobei hier stets von einer axisymmetrischen Geometrie ausgegangen wurde [35, 36, 37]. Die Schwingungen der Form und Orientierung nicht-sphärischer Kapseln wurden zuerst von Ramanujan *et al* [30] beobachtet, die eine Oberflächen-Integral Methode (*boundary integral method*) benutzten und verbesserten [38, 39, 30]. Für hohe und geringe Deformationen kam es jedoch zu numerischen Instabilitäten. Verbesserungen der Methode gelangen nur durch starkes numerisches Glätten der Membranfläche [40], wodurch Schwingen und Taumeln stabil gehalten werden konnten. Jüngere Zugänge — die sogenannten spektralen Element-Methoden (*spectral boundary methods, spectral element methods*) — verwenden dagegen auf der triangulierten Membran Basisfunktionen höherer Ordnung [41, 42, 43], um den Instabilitäten zu begegnen. Die Fluidodynamik selbst wird unter anderem auch durch Gitter-Boltzmann Methoden (*lattice Boltzmann method*) behandelt [44, 45, 46]. Neuerdings wurden Front-Tracking Methoden (*front-tracking methods*) verwendet, um die Bewegungen zweidimensionaler [47] bzw. dreidimensionaler Kapseln [48] zu simulieren. Nicht unerwähnt bleiben sollen mesoskopische Teilchen-Methoden, die als SRD (*stochastic rotation dynamics*) [49, 50] bzw. MPCD (*multi particle collision dynamics*) [51, 52] bekannt sind, und mit denen rote Blutkörperchen und Vesikel simuliert werden [53, 54, 55, 56].

Ein erstes systematisches Phasendiagramm für einen großen Bereich der Scherrate und des Viskositätskontrasts wurde im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe einer Spektralmethode gewonnen [57]. Hier werden globale Basisfunktionen verwendet, um die Membran sowie die Flüsse zu parametrisieren. Vollständige Taumelbewegungen von Kapseln, die nur eine geringe Abweichung von der Kugelform besitzen, können numerisch bestimmt werden. Gleichzeitig zeigt sich im Intermittenzbereich des reduzierten Modells ein transientes Verhalten, bei dem die Kapsel nach einigen Taumelbewegungen in ein stabiles Schwingen übergeht. Weitere unabhängige numerische Studien bestätigen innerhalb der simulierten Zeitdauer das transiente Verhalten hin zu einer stabilen Schwingbewegung [58, 48]. Weil in all diesen Arbeiten innerhalb des transienten Bereichs Formänderungen ausgeprägt waren, ist die Einschränkung des reduzier-

ten Modells auf eine feste Form eine zu starke Vereinfachung. Es ist daher naheliegend, das reduzierte Modell dahingehend zu erweitern, dass sich die Kapselform ändern kann.

Bei einer heuristischen Erweiterung des reduzierten Modells [33] wurden verschiedene Ansätze gemischt. Die elastische Energie wird an einer diskozyten Form numerisch bestimmt, während sich die Bewegungsgleichungen für die beiden Winkelfreiheitsgrade aus einer ellipsoidalen Form durch eine Keller–Skalak Herleitung ergeben. Die Bewegungsgleichung des zusätzlichen Formparameters folgt aber aus einer quasisphärischen Betrachtung, angelehnt an eine ähnliche Erweiterung für Vesikel [56].

In dieser Arbeit wird hingegen ein systematischer Zugang gewählt, um ein Modell zu erhalten, mit dem das Intermittenzproblem gelöst werden kann. Im quasisphärischen Grenzfall werden zunächst auf konsistente Weise vollständige Bewegungsgleichungen der verschiedenen Moden abgeleitet. Im Falle einer zur Scherebene symmetrischen Kapsel im Scherfluss werden in niedrigster Ordnung nur wenige Moden angeregt, so dass sich schließlich Bewegungsgleichungen für nur drei Freiheitsgrade ergeben, die sich aus den schon genannten Winkelvariablen sowie einem Formparameter zusammensetzen, wobei im Grenzfall einer künstlich festgehaltenen Form die Bewegungsgleichungen den quasisphärischen Bewegungsgleichungen des reduzierten Modells entsprechen. Anhand dieses systematisch abgeleiteten Modells kann gezeigt werden, dass innerhalb des Intermittenzbereichs tatsächlich ein transientes Verhalten vorliegt, dass also das intermittierende Verhalten ein Artefakt des reduzierten Modells ist. Das Wesen des transienten Verhaltens ist konsistent mit den Ergebnissen aus der Spektralmethode, weil es sich auch hier um einen Übergang von einer anfänglichen Taumel– hin zu einer stabilen Schwingbewegung handelt. Darüber hinaus lassen sich im Grenzfall starker Flüsse die Bewegungsgleichungen mit Hilfe einer Zeitskalenseparation analytisch lösen, woraus zudem die analytischen Ausdrücke für die Phasengrenzen folgen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Dem Einleitungskapitel folgen in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen, die zur Behandlung einer Kapsel im Fluss benötigt werden. Hierzu zählt im Wesentlichen die Kontinuumsmechanik. Einerseits werden für die Beschreibung der Flüsse Grundlagen der Hydrodynamik benötigt, andererseits verlangt die elastische Reaktion der Membran auf die hydrodynamischen Kräfte eine Elastizitätstheorie auf der gekrümmten Membranfläche, was eine differentialgeometrische Behandlung erforderlich macht. Zum Abschluss wird die Problemstellung einer Kapsel im linearen Fluss präzise formuliert und mathematisch wohldefiniert, indem alle Bewegungsgleichungen und Randbedingungen genannt werden.

Im Kapitel 3 wird nach dem Keller–Skalak Modell [59] das reduzierte Modell [29, 31] eingeführt, welches neben Taumel– und Schwingbewegungen ein intermittierendes Verhalten vorher sagt. Neben den bereits bekannten numerischen Ergebnissen werden analytische Ableitungen und Ergebnisse innerhalb des reduzierten Modells für einen zeitlich konstanten Scherfluss im quasisphärischen Grenzfall präsentiert, die sich auf eine sich zeitlich ändernde Scherrate übertragen lassen. Zur Überprüfung der Gültigkeit des reduzierten Modells wird in Kapitel 4 eine Spektralmethode entwickelt, die die vollen Bewegungsgleichungen lösen kann. Ein Vergleich zeigt, dass im intermittierenden Bereich des reduzierten Modells eine transiente Bewegung vorliegt. Um die Diskrepanz zwischen den Ergebnissen zu untersuchen, werden in Kapitel 5 mit Hilfe einer systematischen quasisphärischen Entwicklung Bewegungsgleichungen bestimmt, die als eine Erweiterung des reduzierten Modells aufgefasst werden können. Die numerische und analytische Untersuchung der Bewegungsgleichungen löst schließlich das Intermittenzproblem zugunsten der Ergebnisse der Spektralmethode.

Die Arbeit schließt im Kapitel 6 mit einer kurzen Zusammenfassung über die erzielten Resultate und gibt einen Ausblick auf weitergehende Forschungsaspekte innerhalb der hier bearbeiteten Problemstellung.

2 Grundlagen

Die von ihrer Membran umschlossene Kapsel besitzt ein Volumen V_0 , welches mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, die im weiteren Verlauf stets als innere Flüssigkeit bezeichnet wird. Über das entsprechende Volumen einer Kugel

$$V_0 \equiv \frac{4}{3}\pi R_0^3 \quad (2.1)$$

lässt sich eine Längenskala R_0 der Kapsel definieren. In dieser Arbeit liegt die typische Kapselgröße R_0 im Mikrometerbereich, wobei die Topologie der Kapseln dabei stets der einer Kugel entspricht. Die Kapsel ist zudem in eine flüssige Umgebung, der äußeren Flüssigkeit, eingebettet. Beide Flüssigkeiten werden als inkompressibel und viskos angenommen und im Rahmen der Hydrodynamik als kontinuierlich beschrieben.

Weil die Hydrodynamik Teil der Kontinuumsmechanik ist, werden im folgenden Unterkapitel zunächst deren Grundlagen wiederholt, bevor sie speziell auf die beiden Gebiete der Elastizitätstheorie von Membranen und der Hydrodynamik viskoser Flüssigkeiten angewendet wird. Da die Membran sehr dünn im Vergleich zur Ausdehnung der gesamten Kapsel ist und in der theoretischen Behandlung meist durch eine zweidimensionale Fläche idealisiert wird, erfordert deren Beschreibung die Differentialgeometrie.

Charakterisiert werden können Kapseln nach den elastischen Eigenschaften ihrer Membran. Die idealisierte Membran als zweidimensionale Fläche gestattet drei unabhängige Arten der Verformung, auf die die Membran elastisch reagieren kann. Es handelt sich hierbei um Krümmungen, Scherungen und Streckungen bzw. Stauchungen. Eine typische elastische Kapsel besitzt daher im Allgemeinen drei endliche elastische Module, die Biegesteifigkeit, das Schermodul und die Flächenkompressibilität. Zusätzlich kann eine Kapsel viskose elastische Eigenschaften wie beispielsweise eine Scherviskosität tragen.

In den folgenden Unterkapiteln werden kurz die Grundlagen der Elastizität (Unterkapitel 2.4) und Hydrodynamik (Unterkapitel 2.2) im Rahmen der Kontinuumsmechanik (Unterkapitel 2.1) gelegt, wobei aufgrund der zweidimensionalen eingebetteten Membran auch kurz elementares Wissen der Differentialgeometrie (Unterkapitel 2.3) wiederholt und bei der Behandlung der Elastizität von Membranen (Unterkapitel 2.4) wieder aufgegriffen wird. Im letzten Unterkapitel 2.5 wird das in dieser Arbeit behandelte Grundmodell dargestellt, für das neben den Bewegungsgleichungen die verwendeten Randbedingungen beschrieben werden.

2.1 Kontinuumsmechanik im Euklidischen Raum

In der klassischen Kontinuumsmechanik werden die zu betrachtenden Körper — seien es Festkörper, Flüssigkeiten oder Gase — als Kontinuum angesehen. Jedem materiellen Punkt werden dabei Lagrangesche Koordinaten zur Markierung zugeordnet. Ein zweites Koordinatensystem bleibt fest und dient der Beschreibung der Lage der materiellen Punkte. Ein materielles Element ist zudem charakterisiert durch Angabe der Dichte, der aktuellen Geschwindigkeit und gegebenenfalls weiteren Größen wie Ladung oder Temperatur. Diese Felder werden bei der Lagrangeschen Beschreibung als Funktion der materiellen Lagrangeschen Koordinaten, bei der

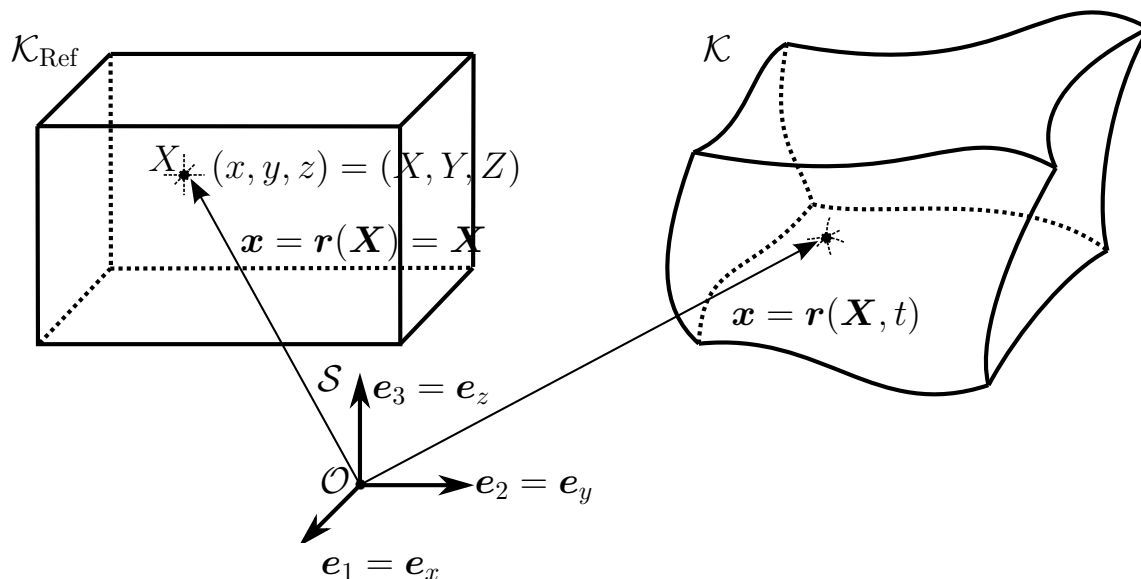


Abbildung 2.1: Körper \mathcal{K} zur Zeit t und Referenzkörper \mathcal{K}_{Ref} mit Lagrangeschen Koordinaten $(X, Y, Z) = (X_1, X_2, X_3)$ im festen Koordinatensystem \mathcal{S} .

Eulerschen Beschreibung hingegen als Funktion der ortsfesten Koordinaten angegeben. Neben den Argumenten von Vektor- oder Tensorfeldern hat man auch bei ihrer Entwicklung in Komponenten die Wahl zwischen den Basisvektoren oder -tensoren des Lagrangeschen oder des ortsfesten Koordinatensystems.

Für eine physikalische Beschreibung auf der Ebene der klassischen Mechanik wird der Zustand des Körpers durch die Lage der materiellen Punkte angegeben. Die Deformation aus einem vorgegebenen undeformierten Referenzkörper ist durch Verzerrungstensoren gegeben, bei denen die reinen Starrkörperbewegungen abgetrennt sind.

Bewegungsgleichungen für den Körper ergeben sich aus Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Drehimpuls. Die Massenerhaltung führt unmittelbar auf eine Kontinuitätsgleichung. Um die Impulserhaltung anwenden zu können, werden Spannungstensoren benötigt, die über konstitutive Modelle des betrachteten Materials aus den Verzerrungstensoren folgen.

Das Konzept der Parametrisierung durch Lagrangesche und ortsfeste Koordinaten, der Verzerrungs- und Spannungstensoren sowie der Bewegungsgleichungen wird in den folgenden Abschnitten am Beispiel des Euklidischen Raumes mit kartesischen Koordinaten illustriert.

2.1.1 Parametrisierung

Zunächst wird ein kartesisches Koordinatensystem \mathcal{S} als ortsfestes Standardkoordinatensystem im dreidimensionalen euklidischen Raum eingeführt, siehe Abbildung 2.1. Ein beliebiger Punkt des Raumes werde als Ursprung \mathcal{O} gewählt. Drei orthonormierte Vektoren \mathbf{e}_i mit $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ geben die Richtungen der kartesischen Koordinatenachsen an. Der Ortsvektor \mathbf{x} eines beliebigen Punktes X definiert über die Entwicklung in der kartesischen Basis \mathbf{e}_i

$$\mathbf{x} \equiv x^i \mathbf{e}_i \tag{2.2}$$

die kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$ des Punktes X . In einer beliebigen Konfiguration des zu betrachtenden Körpers können jedem materiellen Punkt Lagrangesche Koordinaten zugewiesen werden. Der Einfachheit halber wird hier die Konfiguration des undeformierten Körpers verwendet, der Referenzkörper \mathcal{K}_{Ref} genannt wird. Über die kartesische

Parametrisierung

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

auf einem Gebiet $\mathbf{X} \in \mathcal{G}$ des \mathbb{R}^3 sind jedem materiellen Punkt eindeutig Lagrangesche Koordinaten X^i mit $i = 1, 2, 3$ zugeordnet. Die Konfiguration des Körpers \mathcal{K} zur Zeit t ist dann durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

auf dem Gebiet \mathcal{G} gegeben, die damit die funktionale Beziehung zwischen den ortsfesten Koordinaten x^i und den Lagrangeschen Koordinaten X^i liefert. Geschwindigkeits- \mathbf{v} und Massendichtefeld ρ zur Zeit t können nun sowohl durch die ortsfesten Koordinaten

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \text{ und } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

als auch durch die Lagrangeschen Koordinaten

$$\rho = \tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) \text{ und } \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.6)$$

angegeben werden.

2.1.2 Tangentialabbildung und Verzerrungstensoren

Die Abbildung materieller Punkte des Referenzkörpers \mathcal{K}_{Ref} auf den Körper \mathcal{K} zur Zeit t wird in der Umgebung des Punktes mit Lagrangeschen Koordinaten \mathbf{X} lokal durch den Deformationsgradienten \mathbf{F} beschrieben, der auch Tangentialabbildung genannt wird und damit alle Informationen über die Deformation beinhaltet. Er bildet materielle Linienelemente $d\mathbf{X}$ des Referenzkörpers linear auf die entsprechenden materiellen Linienelemente $d\mathbf{x}$ des aktuellen Körpers ab. Der materielle Punkt mit Lagrangeschen Koordinaten $\mathbf{X} + \epsilon \mathbf{Y}$ und $\epsilon \ll 1$ befindet sich zur Zeit t also in erster Ordnung in ϵ am Ort

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{X} + \epsilon \mathbf{Y}, t) \simeq \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) + \epsilon \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t). \quad (2.7)$$

In der Basis \mathbf{e}_i ist die Tangentialabbildung

$$\mathbf{F}(\cdot) = \mathbf{e}_i F^i_j \mathbf{e}_j \cdot (\cdot) \quad (2.8)$$

(mit Standardskalarprodukt \cdot) durch die Jacobi-Matrix mit Komponenten

$$F^i_j \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}(\mathbf{e}_j) \quad (2.9)$$

gegeben.

Weil im Deformationsgradienten \mathbf{F} lokale Starrkörperbewegungen enthalten sind, werden sie mit Hilfe der polaren Zerlegung abgespalten. Die Tangentialabbildung \mathbf{F} wird hierzu durch eine Verkettung einer orthogonalen Drehung \mathbf{R} und einer reinen Streckung (je nach Reihenfolge \mathbf{U} oder \mathbf{V}) eindeutig in den Formen

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.10)$$

dargestellt, wobei die Streckungen \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} symmetrisch und positiv definit sind. Symmetrische Abbildungen besitzen ein System orthogonaler Eigenvektoren, entlang derer der Körper

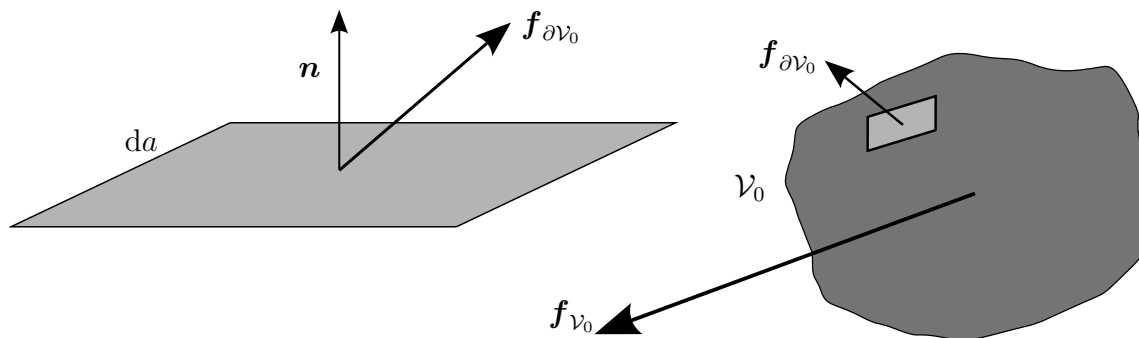


Abbildung 2.2: Cauchy-Spannungsvektor $\mathbf{f}_{\partial \mathcal{V}_0}$ und Volumenkraftdichte $\mathbf{f}_{\mathcal{V}_0}$.

gestreckt wird. Die Streckfaktoren sind dabei durch die positiven Eigenwerte gegeben. Linker \mathbf{B} und rechter Cauchy-Greensche Verzerrungstensor \mathbf{C}

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (2.11)$$

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (2.12)$$

sind frei von Starrkörperbewegungen und können mit Hilfe des Deformationsgradienten direkt berechnet werden¹. Der linke Cauchy-Greensche Verzerrungstensor \mathbf{B} streckt hierbei materielle Linienelemente auf dem aktuellen Körper \mathcal{K} , die zuvor durch \mathbf{R} vom Referenzkörper \mathcal{K}_{Ref} auf den aktuellen Körper \mathcal{K} gedreht wurden. Der rechte Cauchy-Greensche Verzerrungstensor \mathbf{B} streckt die materiellen Linienelemente auf dem Referenzkörper \mathcal{K}_{Ref} , bevor sie durch \mathbf{R} auf den aktuellen Körper \mathcal{K} gedreht werden. Die Verzerrungstensoren beschreiben den Verzerrungszustand des Körpers zur Zeit t . Daher beinhalten konstitutive Gesetze, die elastische Reaktionen des Körpers auf Verzerrungen beschreiben, als Funktionsargumente einen dieser Verzerrungstensoren.

Um auch viskoelastische und viskose Konstitutivgesetze beschreiben zu können, muss die zeitliche Änderung der Verzerrung betrachtet werden, was durch die zeitliche Ableitung des Deformationsgradienten oder durch die zeitliche Ableitung der Cauchy-Greenschen Verzerrungstensoren geschehen kann. Der Schertensor sei im Weiteren durch

$$\mathbf{D} \equiv \partial_t \mathbf{U} \quad (2.13)$$

gegeben. Hierbei wird die zeitliche Ableitung definiert, indem im zeitlichen Verlauf die materiellen Lagrangesche Koordinaten \mathbf{X} konstant gehalten werden, die Koordinaten sich also mit dem materiellen Punkt mitbewegen.

2.1.3 Kräfte und Spannungstensoren

In der kontinuumsmechanischen Beschreibung werden die zwischenmolekularen Kräfte innerhalb des Kontinuums als so kurzreichweitig vorausgesetzt, dass sie idealisiert als Oberflächenkräfte wirken. Ein Teilvolumen \mathcal{V}_0 eines Körpers spürt dann über die Oberfläche $\partial \mathcal{V}_0$ Kräfte, die das Äußere auf den Körper ausübt, siehe Abbildung 2.2. Die Flächenkraftdichte auf der Oberfläche heißt Cauchy-Spannungsvektor $\mathbf{f}_{\partial \mathcal{V}_0}$. Er ist linear zum nach außen zeigenden Normalenvektor \mathbf{n} der Randfläche [60]. Der lineare Zusammenhang wird durch den symmetrischen

¹Die transponierte Abbildung \mathbf{F}^T bildet dabei Linienelemente des aktuellen Körpers \mathcal{K} auf Linienelemente des Referenzkörpers \mathcal{K}_{Ref} ab. Sie ist dabei so definiert, dass die Matrix der Abbildung \mathbf{F} in der kartesischen Basis transponiert wird, d.h. $(\mathbf{F}^T)^i_j = F^j_i$.

Cauchy–Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ vermittelt

$$\mathbf{f}_{\partial V_0} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}). \quad (2.14)$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß zeigt man leicht, dass die Volumenkraftdichte \mathbf{f}_{V_0} , die ein Volumenelement aufgrund seiner Umgebung spürt, durch die Divergenz des Cauchy–Spannungstensors

$$\mathbf{f}_{V_0} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15)$$

gegeben ist. Bezieht man den Kraftdichtevektor auf die Fläche des Referenzkörpers, so bezeichnet man ihn als Piola–Kirchhoff–Spannungsvektor. Der lineare Zusammenhang zum Normalenvektor des Referenzkörpers wird durch den Piola–Kirchhoff–Spannungstensor vermittelt, bei dem es zwei Arten gibt, je nachdem, ob der Piola–Kirchhoff–Spannungsvektor auf den Referenzkörper gezogen wird oder nicht. Konstitutivgesetze leisten schließlich die Verbindung zwischen Verzerrungs– und Spannungstensen, siehe [60].

2.1.4 Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen

In der Kontinuumsmechanik folgen aus verschiedenen Erhaltungssätzen Bewegungsgleichungen physikalischer Größen. Aus der Massenerhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung. Weitere Beispiele von Erhaltungsgrößen sind Impuls, Drehimpuls und Energie. Beispielsweise führt die Impulserhaltung in der Hydrodynamik, deren Grundlagen im nächsten Unterkapitel 2.2 wiederholt werden, unter gewissen Annahmen bezüglich der Flüssigkeit auf die Navier–Stokes–Gleichung.

2.2 Hydrodynamik

2.2.1 Grundlagen, Dynamik, Bewegungsgleichungen

In dieser Arbeit werden ausschließlich homogene viskose Flüssigkeiten bei konstanter Temperatur im Kontinuumsimes betrachtet, wobei thermische Fluktuationen vernachlässigt werden. In der Folge werden die Bewegungsgleichungen angegeben, die als Navier–Stokes–Gleichungen bezeichnet werden und aus der Massen– und Impulserhaltung folgen. Der für diese Arbeit relevante Grenzfall starker Dämpfung führt auf die linearen Stokes–Gleichungen.

In der Kontinuumsbeschreibung ist der Zustand einer Flüssigkeit zur Zeit t durch die beiden Felder der Massendichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ gegeben, wobei \mathbf{x} den Ort eines Volumenelementes angibt. Für eine eindeutige Beschreibung des Flusses müssen für beide Felder Bewegungsgleichungen und Randbedingungen angegeben werden, deren Lösung die Dynamik der Flüssigkeit bestimmt.

Kontinuitätsgleichung

Aus der Massenerhaltung folgt direkt die Kontinuitätsgleichung. Hierzu wird ein beliebiges ortsfestes Gebiet betrachtet. Die Rate, mit der Masse durch die Flüssigkeit aus dem Gebiet hinaus fließt, muss der Rate entsprechen, mit der Masse durch die Flüssigkeit in das Gebiet strömt. Anwendung des Gaußschen Satzes und die Forderung nach Gültigkeit für beliebige Gebiete führen von der integralen auf die differentielle Form

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

die als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird. Hier gilt $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ und ∇ steht für den gewöhnlichen Nabla-Operator im dreidimensionalen Raum, der in der kartesischen Basis durch

$$\nabla \equiv e_i \partial_i \quad (2.17)$$

mit $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ dargestellt wird. Im Falle homogener inkompressibler Flüssigkeiten ist die Dichte $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_0$ räumlich und zeitlich konstant, und die Kontinuitätsgleichung reduziert sich auf die Beziehung

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.18)$$

Navier–Stokes–Gleichung

Aus der Impulserhaltung folgt mit Hilfe des Newtonschen Gesetzes eine weitere Bewegungsgleichung. Hierzu wird erneut ein beliebiges ortsfestes Gebiet \mathcal{V} betrachtet. Die Rate, mit der sich der Gesamtimpuls innerhalb des Gebietes ändert, wird durch mehrere Faktoren bestimmt. Zum einen fließt durch Konvektion Impuls in das Gebiet oder aus dem Gebiet hinaus. Zum anderen sorgen auf das Gebiet wirkende Kräfte für eine Änderung des Gesamtimpulses. Hierzu zählen erstens Volumenkräfte $\mathbf{f}_{\mathcal{V}}$, die auf die Volumenelemente im Inneren des Gebietes \mathcal{V} wirken, und zweitens Oberflächenkräfte $\mathbf{f}_{\partial\mathcal{V}}$, die durch die umgebende Flüssigkeit am Rande des Gebietes $\partial\mathcal{V}$ angreifen. Die Oberflächenkräfte werden dabei durch den Spannungstensor Σ linear mit dem aus dem Gebiet zeigenden Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} gemäß

$$\mathbf{f}_{\partial\mathcal{V}} \equiv \Sigma \cdot \mathbf{n} \quad (2.19)$$

verbunden. Die Einträge des Spannungstensors sind dabei durch ein Konstitutivgesetz festgelegt. Die Gültigkeit der Impulserhaltung in dieser Form für jedes Gebiet führt nun mit Hilfe des Gaußschen Satzes direkt auf die differentielle Form

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \Sigma + \mathbf{f}_{\mathcal{V}}. \quad (2.20)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung erhält man daraus eine kompakte Darstellung mit der substantiellen Ableitung

$$\rho D_t \mathbf{v} \equiv \rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \nabla \cdot \Sigma + \mathbf{f}_{\mathcal{V}}. \quad (2.21)$$

Der (symmetrische) Spannungstensor

$$\Sigma \equiv -p\mathbf{1} + \mathbf{T} \quad \text{mit} \quad \text{Sp} \mathbf{T} = 0 \quad (2.22)$$

lässt sich eindeutig additiv aufteilen in eine isotrope (Normal-)Spannung $-p\mathbf{1}$, durch die der hydrostatische Druck p definiert wird, und einen reduzierten Spannungstensor \mathbf{T} , der gewöhnlich viskose Effekte beinhaltet.

Um auf die Navier–Stokes–Gleichung zu kommen, sind weitere Annahmen zum reduzierten Spannungstensor notwendig. Die reduzierte Spannung soll linear zu den Scherraten sein, d.h. der Schertensor \mathbf{D} (2.13) geht linear in den reduzierten Spannungstensor \mathbf{T} ein. Weiterhin werden nur isotrope Flüssigkeiten betrachtet und die durch den reduzierten Spannungstensor erzeugte hydrodynamische Kraft $\nabla \cdot \mathbf{T}$ soll für eine ruhende Flüssigkeit verschwinden, damit alleine hydrostatische Kräfte wirken. Es folgt, dass der reduzierte Spannungstensor \mathbf{T} dann als Linearkombination der beiden Terme $(\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T)/2$ und $(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{1}$ mit Viskositätskonstanten als Vorfaktoren geschrieben werden kann. Die dadurch entstehende Gleichung für den Impuls heißt dann Navier–Stokes–Gleichung.

Für kompressible Flüssigkeiten muss zur eindeutigen Beschreibung neben der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung noch eine weitere Bewegungsgleichung aus der Energieerhaltung abgeleitet werden und zusätzlich eine thermodynamische Zustandsgleichung angegeben werden.

Für inkompressible Flüssigkeiten hingegen genügen die Kontinuitäts- und die Impulsgleichung, die sich beide noch vereinfachen. Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.23)$$

folgt, dass der Term $(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{1}$ im reduzierten Spannungstensor verschwindet und lediglich die sogenannte (dynamische) (Scher-)Viskosität η benötigt wird

$$\mathbf{T} \equiv \eta (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T). \quad (2.24)$$

Die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen für die Geschwindigkeit und den Druck lauten also

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.25)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_V. \quad (2.26)$$

Stokes–Fluss und Stokes–Gleichungen

Für kleine Reynolds–Zahlen

$$\text{Re} \equiv \left(\frac{\rho v_{\text{typ}}}{t_{\text{typ}}} \right) \left(\frac{\eta v_{\text{typ}}}{r_{\text{typ}}^2} \right)^{-1} = \frac{\rho r_{\text{typ}}^2}{\eta t_{\text{typ}}}, \quad (2.27)$$

die als Verhältnis der linken und rechten Seite der Navier–Stokes–Gleichung mit für das System typischen Geschwindigkeits-, Längen und Zeitskalen v_{typ} , r_{typ} und t_{typ} gebildet wird, kann die linke Seite bestehend aus Trägheits- und Advektionsterm vernachlässigt werden, und es folgen die Stokes–Gleichungen des Stokes Flusses

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \Sigma + \mathbf{f}_V = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Für typische Experimente mit Mikrokapseln lauten die Skalen $r_{\text{typ}} \sim 1 \mu\text{m}$, $\rho \sim 10^3 \text{ kg/m}^3$ und $\eta \sim 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, womit die Reynolds–Zahl in der Größenordnung $\text{Re} \sim 10^{-3}$ liegt und die Stokes–Gleichungen eine sehr gute Näherung darstellen.

Weil die Stokes–Gleichungen keine zeitlichen Ableitungen enthalten, stellt sich in diesem Grenzfall der Navier–Stokes–Gleichungen das Geschwindigkeitsprofil instantan auf die gegebenen Randbedingungen für die Geschwindigkeit und den Druck ein. Aufgrund der Linearität in Geschwindigkeit und Druck lassen sich die Lösungen linear kombinieren.

Hydrodynamische Kräfte

Die auf ein Gebiet \mathcal{G} im hydrodynamischen Fluss wirkende Kraft durch den umgebenden Fluss ist durch den Spannungstensor Σ° gegeben. Sei \mathbf{n} der nach außen zeigende Einheitsnormalenvektor auf einem Flächenelement da des Randes $\partial\mathcal{G}$, dann ist

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^\circ da \equiv \Sigma^\circ(\mathbf{n}) da \quad (2.30)$$

die Kraft des umgebenden Flusses auf das Flächenelement da . Gleichzeitig wirkt eine hydrodynamische Kraft von innen durch den Spannungstensor Σ^i auf das umgebende Gebiet durch das Flächenelement da , die aufgrund der Kräftebilanz am Flächenelement

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^i da \equiv -\Sigma^i(\mathbf{n}) da \quad (2.31)$$

lauten muss. Mit der hydrodynamischen Kraft lassen sich die Kräfte auf Wände und Grenzschichten berechnen. Es wird eine Grenzschicht betrachtet, die zwei verschiedene Flüsse \mathbf{v}^o und \mathbf{v}^i mit Spannungstensen Σ^o und Σ^i , Drücken p^o und p^i sowie Viskositäten η^o und η^i trennt. Zeigt der Normalenvektor \mathbf{n} in das Gebiet des Flusses mit Spannungstensor Σ^o , dann lautet die resultierende hydrodynamische Flächenkraftdichte \mathbf{f}_{hyd} auf ein Grenzschichtelement da

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{hyd}} &\equiv \Sigma^o(\mathbf{n}) - \Sigma^i(\mathbf{n}) \\ &= -(p^o - p^i)\mathbf{n} + \eta^o(\nabla \otimes \mathbf{v}^o + (\nabla \otimes \mathbf{v}^o)^T)(\mathbf{n}) \\ &\quad - \eta^i(\nabla \otimes \mathbf{v}^i + (\nabla \otimes \mathbf{v}^i)^T)(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Lineares Flussprofil

Sind die charakteristischen Längen des von außen angelegten Geschwindigkeitsprofils des Flusses groß im Vergleich zum im Fluss eingebrachten Objekt, so lässt sich die Geschwindigkeit in der Umgebung des Objektes linearisieren. In einem mitbewegten Koordinatensystem erhält man dann ein rein lineares Geschwindigkeitsprofil

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \quad (\text{mit } \text{Sp } \mathbf{L} = 0) \quad (2.33)$$

mit linearem Operator \mathbf{L} , der wegen der Kontinuitätsgleichung $0 = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{Sp } \mathbf{L}$ spurfrei sein muss. Aus der Stokes-Gleichung $0 = -\nabla p + \nabla \mathbf{v} = -\nabla p$ folgt weiter ein konstanter Druck $p = p_0$ im linearen Profil.

Der lineare Operator \mathbf{L} lässt sich in einen symmetrischen $\mathbf{S} \equiv (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$ und antisymmetrischen Anteil $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2$ aufspalten

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} + \mathbf{S} \quad \text{mit } \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}, \mathbf{S}^T = \mathbf{S}, \text{Sp } \mathbf{S} = 0, \quad (2.34)$$

wobei sich der antisymmetrische Anteil (Rotationsfluss) mit Hilfe des Kreuzproduktes

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (2.35)$$

und der symmetrische Anteil (Elongationsfluss, Potentialfluss) als Gradient einer quadratischen Form

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x})) \quad (2.36)$$

schreiben lässt. Speziell für Flüsse senkrecht zur z -Achse, die unabhängig von z sind, erhält man allgemein einen linearen Fluss der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega(x^1 \mathbf{e}_2 - x^2 \mathbf{e}_1) + s(x^1 \mathbf{e}_2 + x^2 \mathbf{e}_1) = \omega(x \mathbf{e}_y - y \mathbf{e}_x) + s(x \mathbf{e}_y + y \mathbf{e}_x). \quad (2.37)$$

Hierbei gibt ω die Stärke des Rotationsflusses (um die z -Achse) wieder, während s die Stärke des Elongationsflusses angibt.

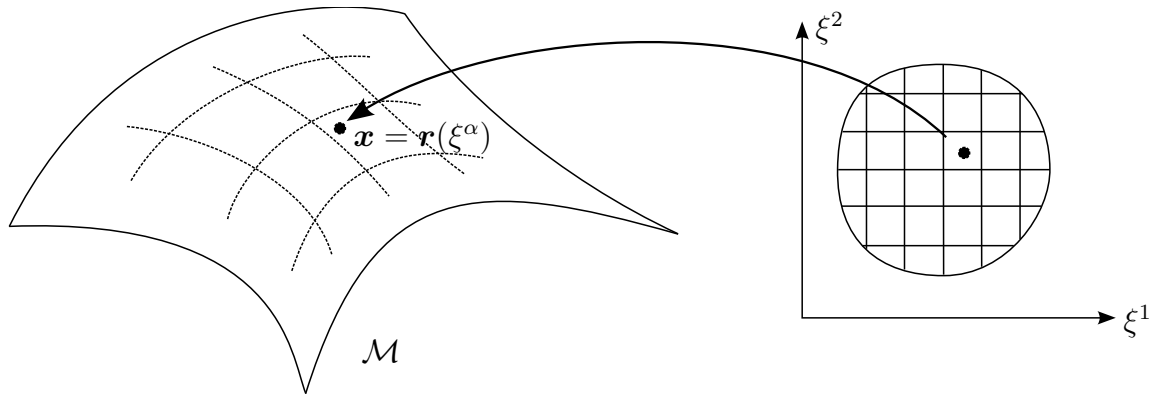


Abbildung 2.3: Parametrisierung der Membran durch die Lagrangeschen Koordinaten ξ^α .

2.3 Differentialgeometrie

Bevor näher auf die Grundlagen der Elastizitätstheorie einer Membran eingegangen wird, werden die Grundbegriffe der Differentialgeometrie von Flächen definiert. Um eine Verformung quantifizieren zu können, wird auch kurz auf Abbildungen zwischen zwei Membranen eingegangen. Zur Vertiefung sei auf die beiden Bücher [61] und [62] verwiesen.

2.3.1 Parametrisierung der Membran

Zur Beschreibung der Form und Position einer geschlossenen zweidimensionalen Membranfläche \mathcal{M} wird der Membran ein Koordinatennetz mit Koordinaten ξ^1, ξ^2 übergezogen, siehe Abbildung 2.3. Nach Festlegung eines Koordinatenursprungs \mathcal{O} wird jedem Membranpunkt über seine Koordinaten ξ^α sein Ortsvektor zugeordnet

$$\mathbf{r} : (\xi^1, \xi^2) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2). \quad (2.38)$$

Analog lässt sich eine Referenzmembran \mathcal{M}_{Ref} parametrisieren

$$\mathbf{R} : (\xi^1, \xi^2) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{R}(\xi^1, \xi^2), \quad (2.39)$$

wobei hier die gleichen Koordinaten zur Kennzeichnung der Membranpunkte gewählt werden. Im Folgenden werden die Argumente (ξ^1, ξ^2) weggelassen.

Eine Fläche kann bis auf Translation und Rotation durch zwei Tensoren eindeutig beschrieben werden. Der metrische Tensor liefert dabei alle Informationen über die innere Geometrie und ermöglicht Längen-, Winkel- und Flächenberechnung innerhalb der Membran. Über den Krümmungstensor wird die Fläche dann bis auf affine Abbildungen eindeutig in den dreidimensionalen Raum eingebettet und es lassen sich Größen der äußeren Geometrie wie Krümmung und Volumen berechnen.

Die wichtigsten differentialgeometrischen Größen werden in den nächsten Abschnitten anhand der Membran \mathcal{M} definiert. Analoge Größen existieren für die Referenzmembran und werden soweit nötig mit entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet.

2.3.2 Tensoren

Die Basisvektoren

$$\mathbf{b}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r} \quad (2.40)$$

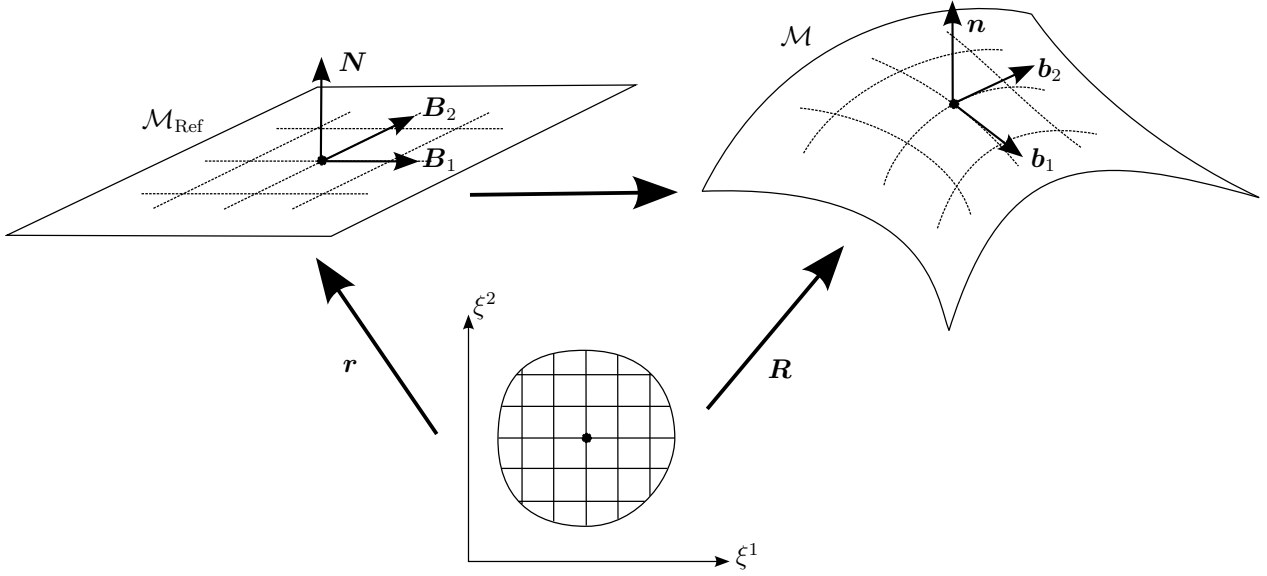


Abbildung 2.4: Referenzmembran und Membran samt Basis- und Normalenvektoren.

mit $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\xi^\alpha$ spannen die Tangentialebene oder allgemeiner den Tangentialraum $T\mathcal{M}$ auf, siehe Abbildung 2.4. Die Menge aller linearen Abbildungen oder 1-Formen $T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ von Tangentialvektoren auf die reellen Zahlen wird als Dualraum oder Kotangentialraum $T^*\mathcal{M}$ bezeichnet. Die zur Basis des Tangentialraumes \mathbf{b}_α gehörende duale Basis der 1-Formen $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ ist durch die Projektionseigenschaft

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{b}_\beta) \equiv \delta^\alpha_\beta \quad (2.41)$$

definiert, die die Komponente $v^\alpha = \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{v})$ eines Vektors $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{b}_\alpha$ ausliest. Der Dualraum des Kotangentialraumes besteht aus allen linearen Abbildungen $T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ des Dualraums auf die reellen Zahlen, kann jedoch mit dem Tangentialraum über die Beziehung

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}) \equiv \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) \quad (2.42)$$

identifiziert werden. Ein Tensor \mathbf{A} ist nun definiert als multilineare Abbildung $(T\mathcal{M})^s \times (T^*\mathcal{M})^r \rightarrow \mathbb{R}$ von s Vektoren und r 1-Formen auf die reellen Zahlen. Man nennt ihn s -fach kovariant und r -fach kontravariant. Durch das äußere Tensorprodukt

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}, \dots) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{b}, \dots) \mathbf{C}(\mathbf{c}, \dots), \quad (2.43)$$

welches Tensoren verknüpft, lässt sich der Tensor \mathbf{A} in der Basis \mathbf{b}_α und der dualen Basis $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ in der Form

$$\mathbf{A} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_s}{}^{\beta_1 \dots \beta_r} \boldsymbol{\omega}^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{\alpha_s} \otimes \mathbf{b}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{\alpha_r} \quad (2.44)$$

schreiben, wobei hier wie im Weiteren die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird. Die Komponenten $A_{\alpha_1 \dots \alpha_s}{}^{\beta_1 \dots \beta_r}$ tragen s tief-gestellte kovariante Indizes und r hoch-gestellte kontravariante Indizes. Ein jeder solcher Tensor definiert weitere lineare Abbildungen zwischen Tangential- und Dualraum. So kann beispielsweise der Tensor

$$A \equiv A_\alpha{}^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{b}_\beta \quad (2.45)$$

einen Vektor \mathbf{v} und eine 1-Form $\boldsymbol{\varphi}$ auf eine reelle Zahl gemäß

$$A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) = A_\alpha{}^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{b}_\beta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) = A_\alpha{}^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{v}) \mathbf{b}_\beta(\boldsymbol{\varphi}) \quad (2.46)$$

abbilden. Ebenso dient der Tensor aber durch Freilassen des hinteren Argumentes als lineare Abbildung $T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ zwischen Vektoren. Er bildet den Vektor \mathbf{v} gemäß

$$A(\mathbf{v}, \cdot) = A_\alpha^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{b}_\beta(\mathbf{v}, \cdot) = A_\alpha^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{v}) \mathbf{b}_\beta(\cdot) \equiv (A_\alpha^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{v})) \mathbf{b}_\beta \equiv \mathbf{w} \quad (2.47)$$

auf den Vektor $\mathbf{w} = w^\beta \mathbf{b}_\beta$ mit Komponenten $w^\beta = A_\alpha^\beta \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{v})$ ab. Entsprechend können bei gegebener Basis die Komponenten $A_{\alpha \cdot \beta \dots}$ eines Tensors durch Freilassen von Argumenten eine Vielzahl an linearen Abbildungen erzeugt werden.

2.3.3 Innere Geometrie

Die Basisvektoren \mathbf{b}_α spannen die Tangentialebene auf, auf der Winkel und Abstände durch die Metrik bestimmt sind. Die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors \mathbf{g} mit $(T\mathcal{M})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind hierbei über das Standardskalarprodukt im dreidimensionalen euklidischen Raum

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta \quad (2.48)$$

definiert. Damit kann das Skalarprodukt zweier Tangentialvektoren $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{b}_\alpha$ und $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{b}_\alpha$ durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (2.49)$$

berechnet werden. Die Komponenten der inversen Metrik \mathbf{g}^{-1} sind durch die Beziehung

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad (2.50)$$

definiert, wobei δ^α_γ das übliche Kroneckersymbol mit

$$\delta^\alpha_\gamma \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \gamma \end{cases} \quad (2.51)$$

darstellt. Mit Hilfe der Determinante der Metrik

$$g \equiv \det \mathbf{g} = \det (g_{\alpha\beta}) \quad (2.52)$$

lässt sich das Flächenelement

$$da \equiv \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.53)$$

und die Fläche

$$a \equiv \int_{\mathcal{M}} da \quad (2.54)$$

berechnen.

2.3.4 Assoziierte Tensoren

Metrik \mathbf{g} und inverse Metrik \mathbf{g}^{-1} werden verwendet, um aus Tensoren weitere sogenannte assoziierte Tensoren zu definieren. Beispielsweise erhält man aus der Metrik \mathbf{g} durch Freilassen eines Argumentes und einem festen (kontravarianten) Vektor $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{b}_\alpha$ den dazu assoziierten (kovarianten) Vektor \mathbf{v} im Dualraum²

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot) = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta(\mathbf{v}, \cdot) = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{v}) \boldsymbol{\omega}^\beta(\cdot) = g_{\alpha\beta} v^\alpha \boldsymbol{\omega}^\beta(\cdot) \equiv v_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta(\cdot)$$

mit Komponenten $v_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha$. Entsprechend erhält man mit der inversen Metrik aus den Komponenten des kovarianten Vektors die des kontravarianten Vektors $v^\beta = g^{\alpha\beta} v_\alpha$. Die durch die Metrik definierte Zuordnung von Vektoren und 1-Formen ist dadurch im Unterschied zur Basis und dualen Basis koordinatenunabhängig und alleine durch die Metrik bestimmt. Eine Verallgemeinerung des Konzeptes führt auf das Hoch- und Herunterziehen von Indizes bei beliebigen Tensoren

$$A_{\dots}^{\alpha\dots} \equiv g^{\alpha\beta} A_{\dots\beta\dots}, \quad (2.55)$$

$$A_{\dots\alpha\dots} \equiv g_{\alpha\beta} A_{\dots}^{\beta\dots}. \quad (2.56)$$

2.3.5 Kovariante Ableitungen

Die Christoffelsymbole messen, wie sich die Basisvektoren ändern, wenn man sich entlang der Membran bewegt. Dazu werden die partiellen Ableitungen eines Basisvektors $\partial_\alpha \mathbf{b}_\beta$ auf den Tangentialraum projiziert. Den entstehenden Vektor nennt man kovariante Ableitung des Basisvektors und schreibt

$$\nabla_\alpha \mathbf{b}_\beta \equiv \gamma^\delta_{\alpha\beta} \mathbf{b}_\delta \quad (2.57)$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\gamma^\delta_{\alpha\beta} \equiv \boldsymbol{\omega}^\delta(\partial_\alpha \mathbf{b}_\beta). \quad (2.58)$$

Für Tensorfelder lässt sich über eine entsprechende Projektion der partiellen Ableitung eine kovariante Ableitung definieren. Für ein Vektorfeld $\mathbf{a} \equiv a^\alpha \mathbf{b}_\alpha$ und eine 1-Form $\phi \equiv \phi_\alpha \boldsymbol{\omega}^\alpha$ erhält man so die kovarianten Ableitungen

$$\nabla_\alpha \mathbf{a} \equiv (\partial_\alpha a^\beta + \gamma^\beta_{\alpha\delta} a^\delta) \mathbf{b}_\beta, \quad (2.59)$$

$$\nabla_\alpha \phi \equiv (\partial_\alpha \phi_\beta - \gamma^\delta_{\alpha\beta} \phi_\delta) \boldsymbol{\omega}^\beta. \quad (2.60)$$

Für ein allgemeines Tensorfeld $\mathbf{A} \equiv A_{\alpha\dots\beta\dots} \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_\beta \otimes \dots$ ergibt sich die kovariante Ableitung zu

$$\nabla_\delta \mathbf{A} \equiv (\partial_\delta A_{\alpha\dots\beta\dots} - \gamma^\eta_{\delta\alpha} A_{\eta\dots\beta\dots} - \dots + \gamma^\beta_{\delta\eta} A_{\alpha\dots\eta\dots} + \dots) \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_\beta \otimes \dots. \quad (2.61)$$

Gradient ∇^S und Laplace–Beltrami–Operator Δ^S auf skalaren Funktionen f auf der Membran sind über

$$\nabla^S f \equiv \mathbf{b}^\alpha \nabla_\alpha f = g^{\alpha\beta} \mathbf{b}_\beta \nabla_\beta f, \quad (2.62)$$

$$\Delta^S f \equiv \nabla^S \cdot \nabla^S f \equiv \nabla^\alpha \nabla_\alpha f = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f \quad (2.63)$$

definiert.

²Ko- und kontravarianter Vektor werden wie hier sehr oft mit demselben Symbol bezeichnet.

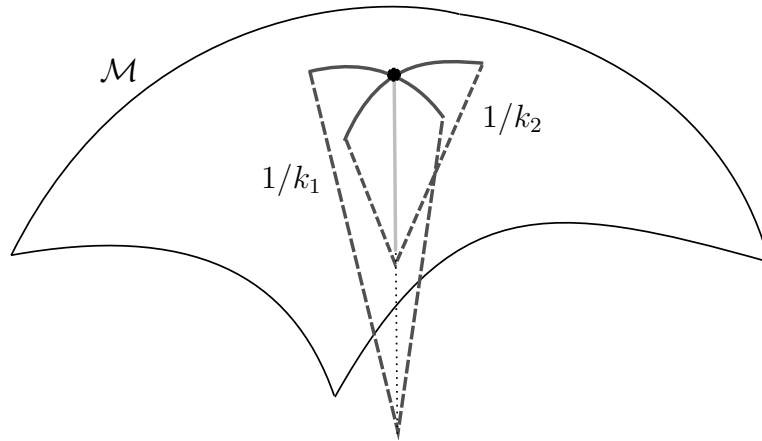


Abbildung 2.5: Hauptkrümmungen k_i bzw. Krümmungsradien $1/k_i$ an einem Membranpunkt.

2.3.6 Äußere Geometrie

Der Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} ist bis auf seine Orientierung durch die Forderungen

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.65)$$

eindeutig festgelegt. Die äußere Krümmung misst nun, wie sich der Einheitsnormalenvektor ändert, wenn man sich entlang der Membran bewegt. Die kovarianten Komponenten des äußeren Krümmungstensors \mathbf{k} sind definiert über

$$k_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{b}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{n}. \quad (2.66)$$

Wichtige Größen sind die Spur und die Determinante des Krümmungstensors \mathbf{k} mit gemischten Indizes

$$k^\alpha{}_\beta \equiv g^{\alpha\gamma} k_{\gamma\beta}. \quad (2.67)$$

Die mittlere Krümmung wird über die Spur des Krümmungstensors definiert

$$2H \equiv \text{Sp } \mathbf{k} \equiv k^\alpha{}_\alpha, \quad (2.68)$$

die Gaußsche Krümmung dagegen durch seine Determinante

$$H_G \equiv \det \mathbf{k} \equiv \det k^\alpha{}_\beta. \quad (2.69)$$

Veranschaulicht werden können beide Invarianten des Krümmungstensors \mathbf{k} durch seine Eigenwerte: die Hauptkrümmungen $k_{1,2}$, wie in Abbildung 2.5 ersichtlich. Für die mittlere Krümmung und die Gaußsche Krümmung gilt dann

$$2H = k_1 + k_2, \quad H_G = k_1 k_2. \quad (2.70)$$

Eine geschlossene Membran \mathcal{M} umschließt einen Körper \mathcal{K} , dessen Volumen V_0 mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Integral über die Membranfläche umgeformt werden kann. Hierzu genügt ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{v} mit der Eigenschaft $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1$, also beispielsweise $\mathbf{v} = \mathbf{x}/2$. Für das Volumen gilt dann

$$V_0 \equiv \int_{\mathcal{M}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.71)$$

Die Membranfläche a ist durch die Kugelform mit Volumen V_0 nach unten begrenzt. Es ist üblich, die darüber hinausgehende Fläche als Exzessfläche zu bezeichnen und wie folgt zu definieren

$$a \equiv (4\pi + \Delta)R_0^2. \quad (2.72)$$

Für eine kugelförmige Kapsel gilt $\Delta = 0$. In allen anderen Fällen ist die Exzessfläche positiv $\Delta > 0$.

2.3.7 Spezielle lineare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Es sei $\mathbf{A}: T\mathcal{M}_{\text{Ref}} \rightarrow T\mathcal{M}$ eine lineare Abbildung von der Tangentialebene der Referenzmembran $T\mathcal{M}$ auf die Tangentialebene der Membran $T\mathcal{M}_{\text{Ref}}$, d.h.

$$\mathbf{A}(\cdot) = A^\beta{}_\alpha \Omega^\alpha(\cdot) \mathbf{b}_\beta. \quad (2.73)$$

Der zweite Index in $A^\beta{}_\alpha$ bezieht sich dabei stets auf die duale Basis der Referenzmembran Ω^α , der erste hingegen auf die Basis der Membran \mathbf{b}_β . In Komponentenform wird der Vektor $\mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{B}_\alpha$ auf den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{V}) = v^\alpha \mathbf{b}_\alpha$ gemäß $v^\beta = V^\alpha A^\beta{}_\alpha$ abgebildet. Spezielle Abbildungen beinhalten die symmetrischen und orthogonalen Abbildungen, die im folgenden definiert werden. Siehe auch Abbildung 2.4 zur Veranschaulichung.

Transponierte Abbildung

Die Abbildung \mathbf{A} bildet einen beliebigen Vektor \mathbf{V} der Referenzmembran auf den Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ der Membran ab. Die transponierte Abbildung \mathbf{A}^T mit

$$\mathbf{A}^T(\cdot) = (A^T)^\beta{}_\alpha \omega^\alpha(\cdot) \mathbf{B}_\beta \quad (2.74)$$

bildet nun jeden Vektor \mathbf{w} der Membran auf einen Vektor $\mathbf{A}^T(\mathbf{w})$ der Referenzmembran ab, wobei für alle Paare \mathbf{V} und \mathbf{w} die Eigenschaft

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{w}) \quad (2.75)$$

gelten muss. Hieraus folgt unmittelbar die Beziehung

$$g_{\gamma\beta} A^\beta{}_\alpha = G_{\alpha\beta} (A^T)^\beta{}_\gamma, \quad (2.76)$$

welche in kovarianter Form kompakt geschrieben werden kann

$$A_{\beta\alpha} = (A^T)_{\alpha\beta}. \quad (2.77)$$

Werden zwei Abbildungen \mathbf{B} und \mathbf{C} verkettet, so folgt für die Transponierte der Verkettung in kovarianten Komponenten

$$((CB)^T)_{\alpha\beta} = (B^T)_{\alpha\gamma} (C^T)^\gamma{}_\beta = (B^T)_\alpha{}^\gamma (C^T)_{\gamma\beta}. \quad (2.78)$$

Symmetrische Abbildung

Eine symmetrische Abbildung \mathbf{A} ist definiert durch $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, was impliziert, dass beide Mannigfaltigkeiten — Membran und Referenzmembran — identisch sein müssen. Für die Komponenten $A_\beta{}^\alpha$ in der Basis \mathbf{B}_α der Referenzmembran gilt also für symmetrische Matrizen

$$G_{\alpha\gamma} A^\gamma{}_\beta = G_{\beta\gamma} A^\gamma{}_\alpha, \quad (2.79)$$

oder kompakt

$$A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta}. \quad (2.80)$$

Symmetrische Abbildungen besitzen eine vollständige Eigenvektorbasis mit reellen Eigenwerten und orthogonalen Eigenvektoren.

Orthogonale Abbildung

Eine orthogonale Abbildung \mathbf{A} lässt das Skalarprodukt und somit Längen und Winkel unverändert, beschreibt also eine Bewegung. Damit gilt für beliebige Paare von Vektoren $\mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{B}_\alpha$ und $\mathbf{W} = W^\alpha \mathbf{B}_\alpha$ auf der Referenzmembran und den abgebildeten Vektoren $\mathbf{v} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{V})$ und $\mathbf{w} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{W})$ auf der Membran die Beziehung

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \quad (2.81)$$

aus der

$$G_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta} A^\gamma_\alpha A^\delta_\beta \quad (2.82)$$

folgt, was kompakt als

$$(A^T)_{\alpha\gamma} A^{\gamma\delta} = \delta_\alpha^\beta \quad (2.83)$$

geschrieben werden kann.

2.4 Elastizitätstheorie für Membranen

Wird eine Membran aus ihrem spannungsfreien Zustand, der Referenzmembran, verzerrt, entstehen zwischenmolekulare, kurzreichweitige Kräfte, die idealisiert als Linienkräfte betrachtet werden können und in der Membran eine Spannung aufbauen. Konstitutivgesetze beschreiben dabei das Materialverhalten der Membran und bestimmen den Zusammenhang zwischen den Deformationen der Membran und der dadurch entstehenden Spannung. Bevor auf spezielle Konstitutivgesetze eingegangen wird, widmen sich die beiden folgenden Abschnitte der Beschreibung der Deformation von Flächen und der elastischen Kräfte.

2.4.1 Verzerrungstensoren

Im Folgenden werden Deformationen innerhalb der Membran (Scherungen und Streckungen) und äußere Deformationen (Krümmungen) unterschieden. Im ersten Fall bei den Tangentialdeformationen wird die Tangentialabbildung zwischen Membran und Referenzmembran benötigt, wobei die Verzerrung alleine durch die Metrik der Membran und Referenzmembran gegeben ist. Im zweiten Fall genügt hingegen die äußeren Krümmungstensoren der Membran sowie der Referenzmembran.

Tangentialdeformationen

Bei den Tangentialdeformationen handelt es sich um innere Deformationen der Fläche, d.h. um Deformationen der inneren Geometrie. Hierzu zählen Scherungen und Verzerrungen, nicht aber Krümmungen.

Betrachtet man eine Umgebung eines materiellen Membranpunktes P auf der Referenzmembran, so genügt zur Beschreibung der reinen Deformation die Tangentialabbildung \mathbf{F} , die auch Deformationsgradient genannt wird. Zunächst werden dem materiellen Punkt P Lagrangesche Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ zugeordnet, die den materiellen Punkt sowohl auf der Referenzmembran als auch auf der Membran kennzeichnen. Der materielle Punkt befindet sich dann auf der Referenzmembran am Ort $\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi})$ und auf der Membran am Ort $\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})$. Ein zweiter benachbarter materieller Punkt Q mit Lagrangeschen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} + \epsilon \boldsymbol{\eta}$ und $\epsilon \ll 1$ befindet sich dann

auf der Referenzmembran am Ort $\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi} + \epsilon\boldsymbol{\eta})$ und auf der Membran am Ort $\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi} + \epsilon\boldsymbol{\eta})$. Die Verbindungsvektoren $\epsilon\mathbf{V}$ auf der Referenzmembran und $\epsilon\mathbf{v}$ auf der Membran sind dann in erster Ordnung gegeben durch

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi} + \epsilon\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi})) \simeq \mathbf{B}_\alpha(\boldsymbol{\xi})\eta^\alpha \quad (2.84)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi} + \epsilon\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})) \simeq \mathbf{b}_\alpha(\boldsymbol{\xi})\eta^\alpha. \quad (2.85)$$

Die Tangentialabbildung \mathbf{F} am Punkt P ist nun so definiert, dass sie jeden Tangentialvektor \mathbf{V} auf der Referenzmembran auf einen Tangentialvektor \mathbf{v} auf der Membran gemäß $F(\mathbf{V}) = \mathbf{v}$ abbildet. Weil hier auf beiden Membranen die gleichen Lagrangeschen Koordinaten verwendet werden, ist in der Basis \mathbf{B}_α und \mathbf{b}_α die Tangentialabbildung auf Koordinatenebene offensichtlich durch die Identität gegeben. Alleine die Abbildung der Basissysteme

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}_\alpha) = \mathbf{b}_\alpha \quad (2.86)$$

gibt Auskunft über die Deformation.

Um eine reine Deformation \mathbf{U} zu erhalten kann der Rotationsanteil \mathbf{R} der Tangentialabbildung \mathbf{F} abgespaltet werden, siehe (2.10). Eine reine Deformation \mathbf{U} innerhalb der Tangentialebene der Referenzmembran ist dadurch gekennzeichnet, dass es zwei orthogonale Richtungen gibt, entlang derer die Membran jeweils um einen positiven Faktor gestreckt wird. Die Abbildung \mathbf{D} ist dann symmetrisch und positiv-definit. Die Aufspaltung der Tangentialabbildung $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ in eine Verkettung aus einer reinen Deformation \mathbf{U} mit anschließender orthogonaler Abbildung, d.h. Rotation \mathbf{R} geschieht nach dem Prinzip der polaren Zerlegung und ist eindeutig. Die Deformationsabbildung \mathbf{U} wird auch als materieller Rechts-Streck-Tensor bezeichnet.

Anschaulich wird zunächst die Tangentialebene der Referenzmembran durch \mathbf{U} so entlang zweier orthogonaler Achsen gestreckt, dass eine Drehung auf die Tangentialebene der Membran die volle Tangentialabbildung \mathbf{F} vollendet. Die reine Deformation \mathbf{U} agiert auf der Referenzmembran

$$\mathbf{U}(\cdot) = U^\beta_\alpha \boldsymbol{\Omega}^\alpha(\cdot) \mathbf{B}_\beta. \quad (2.87)$$

und bildet die Basisvektoren \mathbf{B}_α auf neue Basisvektoren

$$\tilde{\mathbf{b}}_\alpha \equiv \mathbf{U}(\mathbf{B}_\alpha) = \mathbf{B}_\beta U^\beta_\alpha \quad (2.88)$$

ab, die sich von den Basisvektoren \mathbf{b}_α auf der Membran nur noch durch eine Drehung unterscheiden $\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{b}}_\alpha)$, weshalb die Gleichheit der Metriken

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} \equiv \tilde{\mathbf{b}}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{b}}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (2.89)$$

gilt. Zur Beschreibung der Deformation genügt nun die Abbildung \mathbf{U} der reinen Deformation, die sich durch die beiden Metriken \mathbf{G} und \mathbf{g} darstellen lässt. Die Metrik in der Membran folgt aus der Metrik der Referenzmembran und der reinen Deformation

$$g_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{b}}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{b}}_\beta = \mathbf{B}_\gamma U^\gamma_\alpha \cdot \mathbf{B}_\delta U^\delta_\beta = G_{\delta\gamma} U^\gamma_\alpha U^\delta_\beta = D_{\delta\alpha} U^\delta_\beta \quad (2.90)$$

Die Symmetrie von \mathbf{U} hilft, die Gleichung zu vereinfachen

$$g_{\alpha\beta} = D_{\alpha\delta} U^\delta_\beta = (U^2)_{\alpha\beta} = G_{\alpha\gamma} (U^2)^\gamma_\beta \quad (2.91)$$

und nach \mathbf{U}^2 aufzulösen

$$(\mathbf{U}^2)^{\alpha}_{\beta} = G^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta}. \quad (2.92)$$

Weil die Abbildung \mathbf{U} symmetrisch und positiv-definit ist, erhält man aus \mathbf{U}^2 genau eine symmetrische und positiv-definite Wurzel, nämlich \mathbf{U} . Die beiden reellen Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ der reinen Deformationsabbildung \mathbf{U} geben die Streckungen entlang der zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{V}_{1,2}$ an, die in Richtung der Hauptachsen zeigen. Die Abbildung $\mathbf{C} \equiv \mathbf{U}^2$ wird als rechter Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor bezeichnet. Sie kann direkt durch die Tangentialabbildung ausgedrückt, aber auch alleine durch die Metriken dargestellt werden

$$\mathbf{C}(\cdot) = \mathbf{F}^T \mathbf{F}(\cdot) = C^{\beta}_{\alpha} \mathbf{\Omega}^{\alpha}(\cdot) \mathbf{B}_{\beta} \quad \text{mit} \quad C^{\beta}_{\alpha} = G^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}. \quad (2.93)$$

Seine Eigenvektoren stimmen mit denen der reinen Deformationsabbildung \mathbf{D} überein. Lediglich die Eigenwerte sind quadriert $\lambda_{1,2}^2$. Um ein Maß für die Deformation zu erhalten, wird die Identität abgezogen und man erhält bis auf einen Faktor $1/2$ den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.94)$$

mit Eigenwerten

$$E_{1,2} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_{1,2}^2 - 1) \quad (2.95)$$

bezüglich der Hauptachsen $\mathbf{V}_{1,2}$. Für kleine Streckungen $\lambda_{1,2} \equiv 1 + \epsilon_{1,2}$ mit $\epsilon_{1,2} \ll 1$ gilt in erster Ordnung $(\lambda_{1,2}^2 - 1)/2 \simeq \epsilon_{1,2}$. Der Lagrangesche Verzerrungstensor verschwindet bei reinen Starrkörperbewegungen, bei denen keine Deformation stattfindet. Seine Komponenten bzgl. der Basis auf der Referenzmembran lauten

$$E^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{2}(G^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} - \delta^{\beta}_{\alpha}) \quad (2.96)$$

und in kovarianter Form

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}). \quad (2.97)$$

Die Eigenwerte $E_{1,2}$ bzw. $\lambda_{1,2}$ sind durch die Spur

$$\text{Sp}(\mathbf{E}) \equiv E^{\alpha}_{\alpha} = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \mathbf{C} - 1 = \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} - 1 \quad (2.98)$$

und die Determinante

$$\det(\mathbf{E}) \equiv \det(E^{\alpha}_{\beta}) = E_1 E_2 = \frac{1}{4} (\det \mathbf{C} - \text{Sp} \mathbf{C} + 1) \quad (2.99)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{g}{G} - G^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} + 1 \right) \quad (2.100)$$

des Lagrangeschen Verzerrungstensors festgelegt

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{1 + \text{Sp} \mathbf{E} \pm \sqrt{\text{Sp}^2 \mathbf{E} - 4 \det \mathbf{E}}}. \quad (2.101)$$

Wie eine kurze Rechnung zeigt, lässt sich mit Hilfe des Lagrangeschen Verzerrungstensors die Änderung des Abstandsquadrates eines verformten Linienelementes $d\mathbf{x}$ auf der Membran bzgl. des Linienelementes $d\mathbf{X}$ auf der Referenzmembran angeben

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = 2\mathbf{E}(d\mathbf{X}, d\mathbf{X}). \quad (2.102)$$

Statt der skalaren Invarianten $\lambda_{1,2}$ bzw. $E_{1,2}$ des Lagrangeschen Verzerrungstensors werden in der Literatur häufig die Spur und die Abweichung des Quadrats der Flächenverzerrung

$$J \equiv \frac{da}{dA} = \sqrt{\frac{g}{G}} = \lambda_1 \lambda_2 = \sqrt{(2E_1 + 1)(2E_2 + 1)} \quad (2.103)$$

von 1 definiert

$$I_1 \equiv 2 \operatorname{Sp} \mathbf{E} = 2(E_1 + E_2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 = G^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}, \quad (2.104)$$

$$I_2 \equiv J^2 - 1 = 4 \det \mathbf{E} + 2 \operatorname{Sp} E = 4E_1 E_2 + 2(E_1 + E_2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1 \quad (2.105)$$

$$= \frac{g}{G} - 1. \quad (2.106)$$

Krümmungsdeformationen

Für die Beschreibung der Änderung der äußeren Krümmung muss der äußere Krümmungstensor \mathbf{k} am materiellen Membranpunkt P mit der entsprechenden undeformierten Referenzkrümmung \mathbf{K} verglichen werden. Falls eine konstante isotrope Referenzkrümmung vorliegt, genügen für die äußere Deformation die Eigenwerte des äußeren Krümmungstensors \mathbf{k} bzw. die Hauptkrümmungen oder alternativ die beiden Invarianten mittlere Krümmung H (2.68) und Gaußsche Krümmung H_G (2.69).

2.4.2 Elastische Kräfte und elastische Energie

Elastische Kraft und Spannungstensor

Auf ein Gebiet \mathcal{S} der Membran \mathcal{M} mit positiv durchlaufener Randkurve $\partial\mathcal{S}^3$ wirken aufgrund der Verzerrung von der umgebenden Membran Kräfte, die als Linienkräfte idealisiert werden. Die Linienkraftdichte

$$\mathbf{f}_L \equiv \frac{d\mathbf{f}_L}{ds} \quad (2.107)$$

gibt dabei die Kraft $d\mathbf{f}_L$ pro Linienelement ds an. Der Liniennormalenvektor

$$\mathbf{l} \equiv l^\alpha \mathbf{b}_\alpha \quad (2.108)$$

des Gebietes sei definiert als derjenige normierte Vektor in der Tangentialebene, der senkrecht auf dem Tangentialvektor der Randkurve steht und außerhalb des Gebietes \mathcal{S} zeigt. Die lineare Beziehung

$$\mathbf{f}_L \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{l}) \equiv \sigma_\alpha l^\alpha \quad (2.109)$$

³Eine Randkurve eines Gebietes wird als *positiv durchlaufen* bezeichnet, wenn das Vektorprodukt aus Normalenvektor der Membran und Tangentialvektor der Kurve in das Innere des Gebietes zeigt.

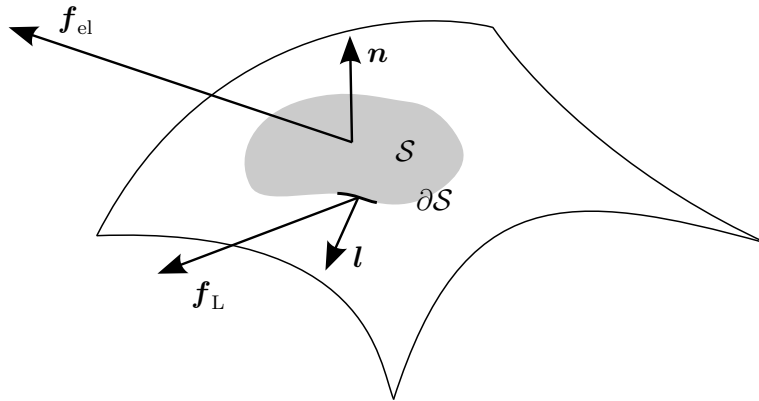


Abbildung 2.6: Gebiet S der Membran \mathcal{M} mit Randkurve ∂S , auf die die Linienkraft \mathbf{f}_L wirkt. Der Liniennormalenvektor \mathbf{l} befindet sich in der Tangentialebene der Membran und steht senkrecht auf der Randkurve. Die Flächenkraftdichte \mathbf{f}_{el} gibt die elastische Kraft pro Flächenelement da an.

zwischen Liniennormalenvektor \mathbf{l} und Linienkraftdichte \mathbf{f}_L wird dabei durch den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ vermittelt. Hierbei ist $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ ein räumlicher Vektor mit tangentialen und normalen Anteilen

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha \equiv \sigma_\alpha^\beta \mathbf{b}_\beta + \sigma_\alpha \mathbf{n}. \quad (2.110)$$

Integriert man die Linienkraftdichte über die gesamte Randkurve, verwendet den Gaußschen Satz auf der Membran, um das Integral als Flächenintegral über das Gebiet zu schreiben, und lässt anschließend die Fläche gegen Null gehen, folgt die Flächenkraftdichte \mathbf{f}_{el} als Divergenz des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ auf der Membran

$$\mathbf{f}_{el} = \nabla^S \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv \nabla_\alpha \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} \boldsymbol{\sigma}_\beta). \quad (2.111)$$

Die Flächenkraftdichte gibt dabei die Kraft pro Membranfläche an, die durch die deformierte Membran auf das Membranelement wirkt. Sie ist dabei auf der Membran und nicht auf der Referenzmembran definiert.

Elastische Energie und Spannungstensor

Durch eine Verformung aus der Referenzmembran speichert eine Membran elastische Energie \mathcal{H} . Die Energiedichte h bezogen auf die Membran \mathcal{M} gibt die Energie pro Membranelement da an. Entsprechend erhält man die Energiedichte h bezogen auf die Referenzmembran \mathcal{M}_{Ref} als Energie pro Membranelement dA . Aus $J = da/dA$ folgt die Beziehung zwischen den Energiedichten

$$H = Jh. \quad (2.112)$$

Die Gesamtenergie gewinnt man durch Integration über die Energiedichte

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{M}} da h = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} h = \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA H = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{G} H. \quad (2.113)$$

Die Energie \mathcal{H} einer verformten elastischen Membran hängt vom betrachteten Konstitutivmodell ab. Weil die Form der Referenzmembran und der Membran alleine jeweils eindeutig durch die Metrik und den äußeren Krümmungstensor gegeben ist, lassen sich die lokale Energiedichte und die Gesamtenergie stets als Funktionale der metrischen Felder und Krümmungsfelder

und als Funktionen der elastischen Parameter schreiben. Diese Felder sind wiederum eindeutig durch die Parametrisierungen \mathbf{r} und \mathbf{R} von Membran und Referenzmembran gegeben. Präziser formuliert: Sind die Verzerrungen alleine durch den Lagrangeschen Verzerrungstensor \mathbf{E} und die äußeren Krümmungstensoren \mathbf{k} und \mathbf{K} gegeben, können Energiedichten und Gesamtenergie in der Form

$$h = h[\mathbf{E}, \mathbf{k}, \mathbf{K}], \quad H = H[\mathbf{E}, \mathbf{k}, \mathbf{K}], \quad (2.114)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\mathbf{E}, \mathbf{k}, \mathbf{K}] = \int_{\mathcal{M}} da h[\mathbf{E}, \mathbf{k}, \mathbf{K}] = \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA H[\mathbf{E}, \mathbf{k}, \mathbf{K}]. \quad (2.115)$$

dargestellt werden. Hieraus lässt sich, wie im Folgenden gezeigt, über eine Funktionalableitung die elastische Kraftdichte und der Spannungstensor berechnen.

Elastische Kraftdichte

Befindet sich die Membran nicht im undeformierten Zustand, so gibt es eine nicht verschwindende Flächenkraftdichte \mathbf{f}_{el} , die direkt aus der Variation der Energie folgt. Hierzu bringt man eine äußere Kraftdichte \mathbf{f}_{ex} gemäß

$$\mathbf{f}_{\text{el}} + \mathbf{f}_{\text{ex}} \equiv \mathbf{0} \quad (2.116)$$

an, die die elastische Kraft der Membran kompensiert und die Membran im deformierten Zustand lässt. Durch ein infinitesimales virtuelles Verrückungsfeld $\delta\mathbf{r}$ erhöht sich die elastische Gesamtenergie um

$$\delta\mathcal{H} \equiv \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA \frac{\delta H}{\delta \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{\mathcal{M}} \frac{da}{J} \frac{\delta(Jh)}{\delta \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{\mathcal{M}} \frac{da}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}h)}{\delta \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (2.117)$$

wobei beachtet werden muss, dass das Flächenelement $da = JdA = \sqrt{g}d\xi^1 d\xi^2$ auf der Membran \mathcal{M} ebenfalls variiert werden muss. Aus Gründen der Energieerhaltung entspricht diese Energieänderung der Arbeit, die die äußere Kraft zur Verrückung leistet

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{M}} da \mathbf{f}_{\text{ex}} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{\mathcal{M}} da \mathbf{f}_{\text{el}} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA J \mathbf{f}_{\text{el}} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (2.118)$$

Es folgt

$$0 = \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA \left(\frac{\delta H}{\delta \mathbf{r}} + J \mathbf{f}_{\text{el}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{\mathcal{M}} da \left(\frac{1}{J} \frac{\delta(Jh)}{\delta \mathbf{r}} + \mathbf{f}_{\text{el}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} \quad (2.119)$$

$$= \int_{\mathcal{M}} da \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}h)}{\delta \mathbf{r}} + \mathbf{f}_{\text{el}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} \quad (2.120)$$

für jede beliebige Variation $\delta\mathbf{r}$, weshalb die Terme in den Klammern verschwinden müssen. Damit lässt sich die elastische Kraftdichte über die Funktionalableitung der Energiedichte H bzw. h schreiben

$$\mathbf{f}_{\text{el}} = - \frac{1}{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{r}} = - \frac{1}{J} \frac{\delta(Jh)}{\delta \mathbf{r}} = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}h)}{\delta \mathbf{r}}. \quad (2.121)$$

Spannungstensor

Schreibt man die Energiedichte als Funktional der Metriken und äußeren Krümmungen, folgt die Variation der Gesamtenergie zu

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{M}} \frac{da}{2} (\tau^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + 2m^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta}). \quad (2.122)$$

Dabei sind die kontravarianten Tensoren $\boldsymbol{\tau}$ und \boldsymbol{m} über ihre Komponenten

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}h)}{\partial g_{\alpha\beta}}, \quad (2.123)$$

$$m^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial h}{\partial k_{\alpha\beta}} \quad (2.124)$$

definiert und werden als intrinsische mit der Metrik bzw. Krümmung assoziierten Spannungstensoren bezeichnet. Die Variation der Gesamtenergie lässt sich explizit berechnen [63]. Als Ergebnis erhält man

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{M}} da \mathbf{f}_{\text{el}} \cdot \delta\mathbf{r} = \int_{\mathcal{M}} da (\nabla^S \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{r} = \int_{\mathcal{M}} da (\nabla_\alpha \sigma^\alpha) \cdot \delta\mathbf{r} \quad (2.125)$$

mit kontravarianten Komponenten

$$\sigma^\alpha = (\tau^{\alpha\beta} - m^{\alpha\gamma} k^\alpha_\gamma) \mathbf{b}_\beta - (\nabla_\beta m^{\alpha\beta}) \mathbf{n} \quad (2.126)$$

des Spannungstensors.

Beschränkt man sich auf isotrope Konstitutivgesetze und auf Spannungen, die nur durch den Verzerrungstensor \mathbf{E} , nicht aber die äußeren Krümmungen verursacht werden, so hängt die Energiedichte alleine von den skalaren Invarianten des Lagrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{E} ab. Verwendet man hier die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ des reinen Deformationstensors als Invarianten und die zugehörigen Eigenvektoren als Basis, werden Metrik und Spannung diagonal. Die diagonalen Komponenten des Spannungstensors lauten dann [1]

$$\tau_{1,2} \equiv \frac{\lambda_{1,2}}{J} \frac{\partial(Jh(\lambda_1, \lambda_2))}{\partial \lambda_{1,2}} = \frac{\lambda_{1,2}}{J} \frac{\partial H(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_{1,2}}. \quad (2.127)$$

Entsprechend lassen sich auch die Eigenwerte $E_{1,2}$ des Lagrangeschen Verzerrungstensors verwenden

$$\tau_{1,2} \equiv \frac{2E_{1,2} + 1}{J} \frac{\partial(Jh(E_1, E_2))}{\partial E_{1,2}} = \frac{2E_{1,2} + 1}{J} \frac{\partial H(E_1, E_2)}{\partial E_{1,2}}. \quad (2.128)$$

Analog erhält man bei Beschränkung auf isotrope Konstitutivgesetze und reine Spannungen, die nur durch den Krümmungstensor \mathbf{E} abhängen, die Energiedichte alleine aus den skalaren Invarianten des äußeren Krümmungstensors \mathbf{k} . Verwendet man hier die Hauptkrümmungen $k_{1,2}$ als Invarianten und die zugehörigen Eigenvektoren als Basis, werden Krümmungstensor und Spannung diagonal. Die diagonalen Komponenten des Spannungstensors lauten dann

$$\tau_{1,2} \equiv \frac{k_{1,2}}{J} \frac{\partial(Jh(k_1, k_2))}{\partial k_{1,2}} = \frac{k_{1,2}}{J} \frac{\partial H(k_1, k_2)}{\partial k_{1,2}}. \quad (2.129)$$

2.4.3 Konstitutivgesetze

Es gibt im Wesentlichen zwei Arten der Herleitung konstitutiver Modelle einer dünnen oder zweidimensionalen Membran [64]. Die erste Art der Herleitung startet stets von einem dreidimensionalen Konstitutivgesetz einer Membran endlicher Dicke. Entweder lässt man die Membrandicke gegen Null gehen, wobei jedoch Näherungen durchgeführt werden müssen und der Grenzübergang zu mathematischen Inkonsistenzen führen kann [65], oder man lässt die Membrandicke endlich und muss gewisse Zwangsbedingungen fordern. In dieser Arbeit wird daher

direkt eine zweite Art der Herleitung verwendet, bei der direkt von einer zweidimensionalen Membran ausgegangen wird. Das Konstitutivgesetz lässt sich hier durch die Angabe der Spannung als funktionale Abhängigkeit von Verzerrung und Krümmung angeben. Im Allgemeinen erhält man eine äquivalente Beschreibung durch Angabe der elastischen Energie. Hier muss jedoch beachtet werden, dass nicht jede Spannung *a priori* integrierbar und die Angabe einer Energie möglich ist. Im Weiteren werden nur isotrope Konstitutivgesetze betrachtet, bei denen sich die Spannungen bzw. elastischen Energien der Verzerrung und der Krümmung additiv verhalten. Es folgen einige häufig in der Praxis verwendeten konstitutive Modelle, wobei mit der Krümmung begonnen wird, bei der ein einzelnes Konstitutivgesetz genügt. Bei den Materialmodellen zur Verzerrung, die im Anschluss folgen, gibt es eine größere Vielfalt.

Krümmung

- **Helfrich–Energie als Konstitutivgesetz der Krümmung**

Entwickelt man eine allgemeine Krümmungsenergiedichte auf der Membran für kleine Krümmungen bis in zweiter Ordnung erhält man die Helfrich–Energie [66]

$$h^\kappa \equiv \frac{\kappa}{2}(\text{Sp } \mathbf{k} - C_0)^2 + \kappa_G \det \mathbf{k} = \frac{\kappa}{2}(2H - C_0)^2 + \kappa_G H_G, \quad (2.130)$$

wobei C_0 die spannungsfreie Krümmung angibt und als Spontankrümmung bezeichnet wird. Die elastischen Module κ und κ_G werden als Biegesteifigkeit und Gaußsche Biegesteifigkeit bezeichnet. Sie tragen beide die Dimension einer Energie. Da die Krümmungsradien meist sehr viel größer als die Membrandicke sind, ist die Näherung auch für große Deformationen sehr gut geeignet. Deshalb genügt in den meisten Fällen die Helfrich–Energie für eine Beschreibung.

- **Helfrich–Energie bei konstanter Topologie**

Nach dem Gauß–Bonnet–Theorem hängt für eine geschlossene Membran das Integral über die Gaußsche Krümmung ausschließlich von der Topologie ab. Sei g das Geschlecht der Membranfläche, so gilt

$$\int_{\mathcal{M}} da H_G = 4\pi(1 - g). \quad (2.131)$$

Bei fester Topologie der Membranfläche kann daher der Gaußsche Krümmungsterm als additive Konstante in der Gesamtenergie weggelassen werden

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\kappa &\equiv \int_{\mathcal{M}} da h^\kappa = \int_{\mathcal{M}} da \frac{\kappa}{2}(\text{Sp } \mathbf{k} - C_0)^2 + 4\pi\kappa_G(1 - g) \\ &= \int_{\mathcal{M}} da \frac{\kappa}{2}(2H - C_0)^2 + 4\pi\kappa_G(1 - g). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Verzerrung

Es folgt eine kurze Übersicht über die wichtigsten Konstitutivgesetze, die die elastische Reaktion von Membranen auf innere Deformationen beschreiben [1].

- **(Isotrope) Oberflächenspannung**

Als typisches Beispiel kann hier ein Flüssigkeitstropfen betrachtet werden, der in einer zweiten Flüssigkeit emulgiert ist. Die elastische Energie steigt hierbei linear mit wachsender Oberfläche an, so dass die Energiedichte bzgl. der aktuellen Membran konstant ist und bzgl. der Referenzmembran von der Flächenverzerrung J abhängt

$$h^O \equiv \sigma, \quad H^O \equiv J\sigma. \quad (2.133)$$

Die Materialkonstante σ wird als Oberflächenspannung bezeichnet. Für flächeninkompressible Membranen stellt sich die Oberflächenspannung lokal so ein, dass lokal die Fläche erhalten bleibt. Sie kann in völliger Analogie zum Druck bei inkompressiblen Flüssigkeiten als Lagrange-Parameter des Energiefunktionals betrachtet werden.

- **Hookesches Gesetz**

Linearisiert man die vom Verzerrungstensor abhängige Spannung, erhält man analog zum Hookeschen Gesetz der klassischen Elastizitätstheorie ein Hookesches Gesetz für Membranen

$$\tau_1^H \equiv \frac{2G}{1-\nu}(E_1 + \nu E_2) \quad (2.134)$$

mit der zweidimensionalen Poissonzahl ν und dem Schermodul G . Es gibt hier jedoch keine Energie, aus der die lineare Spannung folgen würde.

- **Modifiziertes Hookesches Gesetz**

Im Dreidimensionalen sind eine lineare Spannung und eine quadratische Energie äquivalent. Auf einer Membran stimmt diese Äquivalenz nicht, weil schon die lineare Spannung keine Energie besitzt. Entwickelt man die Energie bis in zweiter Ordnung in den Verzerrungen, so erhält man mit den zweidimensionalen Lamé-Koeffizienten μ_L und λ_L ein modifiziertes Hookesches Gesetz [61]

$$H^{MH} \equiv \frac{\lambda_L + 2\mu_L}{2}(\text{Sp } \mathbf{E})^2 - 2\mu_L \det \mathbf{E} = \frac{\lambda_L}{2}(E_1 + E_2)^2 + \mu_L(E_1^2 + E_2^2), \quad (2.135)$$

welches nicht auf eine lineare Spannung führt. Erst für kleine Verzerrungen $|E_i| \ll 1$ erhält man die Identifizierung $G = \mu_L$ und $\nu = \lambda_L/(\lambda_L + 2\mu_L)$.

- **Moonley–Rivlin Gesetz, Gummielastizität**

Das dreidimensionale Modell der Gummielastizität beschreibt die Membran als ein dünnes inkompressibles Elastomer, wobei die Energiedichte durch das Moonley–Rivlin Gesetz

$$H^{MR} \equiv \frac{G}{2} \left\{ \psi \left(I_1 + 2 + \frac{1}{I_2 + 1} \right) + (1 - \Psi) \left(I_2 + 1 + \frac{I_1 + 2}{I_2 + 1} \right) \right\} \quad (2.136)$$

beschrieben wird und $0 \leq \Psi \leq 1$ ein Materialparameter ist. Die Eigenwerte des Spannungstensors sind dann durch

$$\tau_1^{MR} \equiv \frac{G}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) (\Psi + \lambda_2^2(1 - \lambda_2)) \quad (2.137)$$

gegeben.

- **Modell von Skalak**

Im Modell von Skalak *et al.* kosten Scherungen und Flächenänderungen Energie mit zugehörigem Schermodul G und Kompressionsmodul K . Energie und Spannung folgen hier zu

$$H^{\text{SK}} \equiv \frac{G}{4} \left(I_1^2 + 2I_1 - 2I_2 + \frac{K}{G} I_1^2 \right), \quad (2.138)$$

$$\tau_1^{\text{SK}} \equiv \frac{G\lambda_1}{\lambda_2} \left(\lambda_1^2 - 1 + \frac{K}{G} \lambda_2^2 I_2 \right). \quad (2.139)$$

- **Modell von Evans und Skalak**

Um flächenerhaltende Scherungen von reinen Flächenänderungen zu trennen, haben Evans und Skalak ein leicht verändertes Modell mit einem die reinen Flächenänderungen bestrafenden Materialparameter A präsentiert

$$H^{\text{ES}} \equiv \frac{G}{2} \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_1 \lambda_2} + A(J - 1)^2 \right), \quad (2.140)$$

$$\tau_1^{\text{ES}} \equiv \frac{G}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} + 2A(J - 1) \right). \quad (2.141)$$

Der Grenzfall $A \rightarrow \infty$ führt daher auf eine lokal flächeninkompressible Membran.

Im Grenzfall kleiner Deformationen $|E_i| \ll 1$ folgt in jeweils niedrigster Ordnung

$$H^{\text{ES}} \approx \frac{G}{2} \left((E_1 - E_2)^2 + A(E_1 + E_2)^2 \right), \quad (2.142)$$

$$\tau_1^{\text{ES}} \approx \frac{G}{2} \left((E_1 - E_2) + A(E_1 + E_2) \right). \quad (2.143)$$

Durch Vergleich mit dem Hookeschen Gesetz (2.134) und dem modifizierten Hookeschen Gesetz (2.135) folgen die Identifizierungen $\nu = (A - 3)/(A + 1)$, $\mu_L = G$ und $\lambda_L = G(A - 1)/2$.

Vergleich der Konstitutivgesetze

Für einen Vergleich der Konstitutivgesetze sei auf die Zusammenfassung von D. Barthès–Biesel im ersten Kapitel von [1] verwiesen, bei der die elastischen Reaktionen der einzelnen Modelle unter verschiedenen speziellen Verzerrungen verglichen werden. Hierzu zählen beispielsweise eine isotrope Streckung oder eine einachsige Streckung, bei der die orthogonale Richtung spannungsfrei bleibt.

2.5 Elastische Kapsel im Fluss

Im folgenden Abschnitt wird das in dieser Arbeit untersuchte Modell physikalisch genau beschrieben und eingegrenzt. Mögliche Erweiterungen und Alternativen werden im übernächsten Abschnitt bedacht.

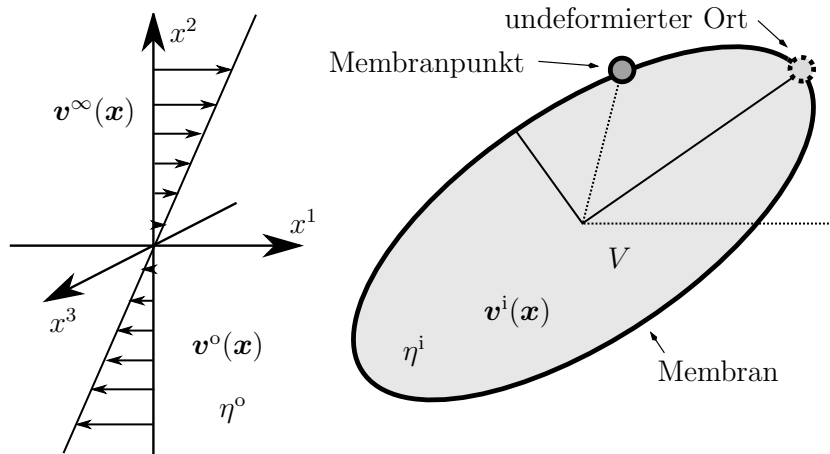


Abbildung 2.7: Zweidimensionaler Schnitt einer elastischen Kapsel im Fluss. Die Kapsel umschließt die innere Flüssigkeit mit Volumen V_0 , Viskosität η^i und Geschwindigkeit \mathbf{v}^i und ist umgeben von der äußeren Flüssigkeit mit Viskosität η^o und Geschwindigkeit \mathbf{v}^o . Linker Hand ist beispielhaft für den äußeren angelegten Fluss \mathbf{v}^∞ ein lineares Scherflussprofil dargestellt.

2.5.1 Membran und Flüsse

Eine einzelne elastische Kapsel befindet sich, wie in Abbildung 2.7 dargestellt, im freien hydrodynamischen inkompressiblen Fluss. Die Membran ist dabei eine zweidimensionale geschlossene Fläche mit elastischen Eigenschaften und mit der Topologie einer Sphäre S^2 . Auf die im Einzelnen verwendeten Konstitutivgesetze/elastischen Eigenschaften der Membran und die Form der Referenzmembran wird an entsprechender Stelle eingegangen. Wird die Membran aus ihrem undeformierten Zustand heraus verformt, so übt sie eine elastische Flächenkraftdichte (2.121)

$$\mathbf{f}_{\text{el}} = -\frac{1}{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{r}} = -\frac{1}{J} \frac{\delta(Jh)}{\delta \mathbf{r}} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}h)}{\delta \mathbf{r}} \quad (2.144)$$

auf sich selbst aus.

Das durch die Membran eingeschlossene Volumen definiert durch Vergleich mit einer volumengleichen Kugel eine Längenskala. Jegliche Trägheitseffekte seien vernachlässigbar, so dass die Flüsse innerhalb und außerhalb durch die Stokes-Gleichungen beschrieben werden. Die Viskositäten der inneren und äußeren Flüssigkeiten seien mit η^i und η^o bezeichnet und dürfen verschieden voneinander sein. Ihr Verhältnis definiert den Viskositätskontrast

$$\lambda \equiv \frac{\eta^i}{\eta^o}. \quad (2.145)$$

Es wird ein äußerer Fluss \mathbf{v}^∞ angelegt, so dass der dadurch gegebene gesamte innere und äußere Fluss die hydrodynamische Flächenkraftdichte (2.32)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{hyd}} &= \boldsymbol{\Sigma}^o(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\Sigma}^i(\mathbf{n}) \\ &= -(p^o - p^i)\mathbf{n} + \eta^o(\nabla \otimes \mathbf{v}^o + (\nabla \otimes \mathbf{v}^o)^T)(\mathbf{n}) \\ &\quad - \eta^i(\nabla \otimes \mathbf{v}^i + (\nabla \otimes \mathbf{v}^i)^T)(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (2.146)$$

auf ein Membranelement da ausübt und die Membran verformt. Weil hier Trägheitseffekte der Membran vernachlässigbar sind, müssen sich hydrodynamische und elastische Kraftdichte an

jeder Membranstelle kompensieren

$$\mathbf{f}_{\text{el}} + \mathbf{f}_{\text{hyd}} = \mathbf{0}. \quad (2.147)$$

In dieser Arbeit seien die typischen Längenskalen des angelegten äußeren Flusses groß im Vergleich zur Kapsel, so dass der äußere Fluss ohne Anwesenheit der Kapsel als linear betrachtet werden kann. Der Fluss sei stets linear, symmetrisch und parallel zur x^1x^2 -Ebene (bzw. xy -Ebene)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) &= \omega(x^1\mathbf{e}_2 - x^2\mathbf{e}_1) + s(x^1\mathbf{e}_2 + x^2\mathbf{e}_1) \\ &= \omega(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) + s(x\mathbf{e}_y + y\mathbf{e}_x). \end{aligned} \quad (2.148)$$

Ein reiner Scherfluss

$$\mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) = \dot{\gamma}x^2\mathbf{e}_1 = \dot{\gamma}y\mathbf{e}_x \quad (2.149)$$

entsteht für

$$s = -\omega = \dot{\gamma}/2. \quad (2.150)$$

2.5.2 Randbedingungen und Bewegungsgleichungen

Um eindeutige Bewegungsgleichungen für die Membran und die Flüssigkeiten zu erhalten, müssen neben den Stokes-Gleichungen

$$-\nabla p^i(\mathbf{x}, t) + \eta^i \Delta \mathbf{v}^i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^i(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.151)$$

$$-\nabla p^o(\mathbf{x}, t) + \eta^o \Delta \mathbf{v}^o(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^o(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.152)$$

im Inneren und Äußeren noch Randbedingungen auf der Membran und im Unendlichen vorgegeben werden. Im Unendlichen muss der äußere Fluss $\mathbf{v}^o(\mathbf{x}, t)$ dem angelegten Fluss $\mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}, t)$ entsprechen

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (\mathbf{v}^o(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0}. \quad (2.153)$$

Auf der Membran wird neben der Kräftebilanz

$$\mathbf{f}_{\text{el}}(\boldsymbol{\xi}, t) + \mathbf{f}_{\text{hyd}}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) = \mathbf{0} \quad (2.154)$$

die Stetigkeit der Geschwindigkeiten (*no-slip* Randbedingung) angenommen

$$\mathbf{v}^i(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) = \mathbf{v}^o(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \equiv \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (2.155)$$

welche dafür sorgt, dass einerseits die Geschwindigkeit der Flüssigkeiten an der Membran stetig ist und dass andererseits die Membran mit dem Fluss advektiert wird

$$\partial_t \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (2.156)$$

Für eine zur Zeit t vorgegebene Membranform $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$ folgt aus der Referenzmembran und den Konstitutivgesetzen die elastische Kraftdichte $\mathbf{f}_{\text{el}}(\boldsymbol{\xi}, t)$. Mit den Stokes-Gleichungen (2.151), (2.152) und den Randbedingungen (2.153), (2.154), (2.155) folgen hieraus eindeutig die Geschwindigkeiten der Flüsse innerhalb und außerhalb der Membran und Mit Gleichung (2.156) schließlich auch die Advektionsgeschwindigkeit \mathbf{V} der Membran. Für einen gegebenen angelegten äußeren Fluss $\mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}, t)$ folgt damit die Membrandynamik $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$ eindeutig aus der Anfangskonfiguration $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, 0)$.

Es ist oft günstig, das Geschwindigkeitsprofil

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} \mathbf{v}^i(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \text{ innerhalb der Membran} \\ \mathbf{v}^o(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \text{ außerhalb der Membran} \end{cases} \quad (2.157)$$

und den Druck

$$p(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} p^i(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \text{ innerhalb der Membran} \\ p^o(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \text{ außerhalb der Membran} \end{cases} \quad (2.158)$$

in den angelegten äußeren Teil \mathbf{v}^∞ bzw. p^∞ und einen induzierten Teil \mathbf{v}^{ind} bzw. p^{ind} aufzuspalten

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^\infty + \mathbf{v}^{\text{ind}}, \quad (2.159)$$

$$p \equiv p^\infty + p^{\text{ind}}. \quad (2.160)$$

Aufgrund der Linearität erfüllt der induzierte Fluss \mathbf{v}^{ind} , p^{ind} auch die Stokes-Gleichungen. Die Randbedingung im Unendlichen wird dadurch einfacher und ist durch das Verschwinden des induzierten Flusses gegeben

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.161)$$

Die Stetigkeit der Geschwindigkeiten (*no-slip* Randbedingung)

$$\mathbf{v}_{\text{ind}}^i(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) = \mathbf{v}_{\text{ind}}^o(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \quad (2.162)$$

bleibt wegen der Stetigkeit von \mathbf{v}^∞ erhalten, während sich die Kräftebilanz als

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^{\text{ind}}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) = -\mathbf{f}_{\text{eff}}(\boldsymbol{\xi}, t) \quad (2.163)$$

mit der effektiven elastischen Kraft

$$\mathbf{f}_{\text{eff}}(\boldsymbol{\xi}, t) \equiv \mathbf{f}_{\text{el}}(\boldsymbol{\xi}, t) + \mathbf{f}_{\text{hyd}}^\infty(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \quad (2.164)$$

und den hydrodynamischen Kräften des angelegten und induzierten Flusses

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{hyd}}^\infty &= -(p_o^\infty - p_i^\infty)\mathbf{n} + \eta^o(\nabla \otimes \mathbf{v}_o^\infty + (\nabla \otimes \mathbf{v}_o^\infty)^T)(\mathbf{n}) \\ &\quad - \eta^i(\nabla \otimes \mathbf{v}_i^\infty + (\nabla \otimes \mathbf{v}_i^\infty)^T)(\mathbf{n}), \\ \mathbf{f}_{\text{hyd}}^{\text{ind}} &= -(p_o^{\text{ind}} - p_i^{\text{ind}})\mathbf{n} + \eta^o(\nabla \otimes \mathbf{v}_o^{\text{ind}} + (\nabla \otimes \mathbf{v}_o^{\text{ind}})^T)(\mathbf{n}) \\ &\quad - \eta^i(\nabla \otimes \mathbf{v}_i^{\text{ind}} + (\nabla \otimes \mathbf{v}_i^{\text{ind}})^T)(\mathbf{n}) \end{aligned}$$

schreiben lässt. Die Advektionsgleichung lautet schließlich

$$\partial_t \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{v}^\infty(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) + \mathbf{v}^{\text{ind}}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t). \quad (2.165)$$

3 Reduziertes Kapselmodell

Da sich die Dynamik einer Kapsel im Scherfluss im Allgemeinen nicht analytisch bestimmen lässt, soll in diesem Kapitel ein reduziertes Modell vorgestellt werden, bei dem die Zahl der Freiheitsgrade bei fester Form der Kapsel auf die zwei wesentlichen Winkel, Anstellwinkel Ψ und Phasenwinkel ϕ , beschränkt ist. In einer Erweiterung des Modells von Keller und Skalak [59] (Unterkapitel 3.1) folgt durch Hinzunahme des Formgedächtnisses (Abschnitt 3.2.1) das reduzierte Kapselmodell [29, 31] (Unterkapitel 3.2). Die Annahme einer festen ellipsoidalen Kapselform und die Beschreibung der Kapsel alleine durch den Anstell- und den Phasenwinkel aus dem Keller–Skalak Modell bleiben dabei erhalten. Weil eine vollständige analytische Lösung nicht möglich ist, liefert eine numerische Integration der beiden Bewegungsgleichungen das Phasenverhalten der Kapsel (Abschnitt 3.2.2) [31, 34, 33]. Als Funktion der Scherrate $\dot{\gamma}$ und des Viskositätskontrasts $\lambda = \eta^i/\eta^o$ konnten drei Bereiche unterschieden werden, in denen die Kapsel entweder eine Taumel-, eine Schwing- oder eine intermittierende Bewegung ausübt. Analytisch vollständig untersucht werden anschließend die quasisphärischen Bewegungsgleichungen (Abschnitt 3.2.3) sowohl für den Fall einer konstanten Scherrate (Unterkapitel 3.3) also auch im Fall eines zeitlich sich ändernden Scherflusses (Unterkapitel 3.4). In beiden Fällen ist eine Abbildung auf ein diskretes System möglich, aus dem das Phasenverhalten folgt. Insbesondere kann in einem sich periodisch mit der Zeit ändernden Scherfluss das reichhaltige Resonanzverhalten erklärt werden, welches sich nahe des Übergangs zwischen Taumeln und Schwingen ergibt.

3.1 Keller–Skalak Modell

Schränkt man die Freiheitsgrade einer ellipsoidalen Kapsel im linearen Scherfluss

$$\mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) = \dot{\gamma} x^2 \mathbf{e}_1 = \dot{\gamma} y \mathbf{e}_x \tag{3.1}$$

so ein, dass die Form unveränderlich bleiben soll, sind nur noch Bewegungsmöglichkeiten innerhalb der festen Membranform möglich. Erlaubt man ferner eine nur gleichförmige Panzerkettenbewegung, erhält man im Wesentlichen den Ausgangspunkt des reduzierten Modells von Keller und Skalak [59], welches rote Blutkörperchen idealisiert beschreiben soll. Weil dieses Modell die Grundlage für das reduzierte Kapselmodell aus Unterkapitel 3.2 ist, wird es hier kurz vorgestellt.

Die drei Halbachsen der formfesten ellipsoidalen Membran heißen a_i mit $i = 1, 2, 3$, wobei die beiden Halbachsen a_1 und a_2 (mit $a_1 > a_2$) stets innerhalb der Scherebene (x^1x^2 -Ebene) liegen und die Halbachse a_3 senkrecht dazu steht, wie in Abbildung 3.1 zu sehen ist.

Die Orientierung der festen Form wird über den Anstellwinkel Ψ festgelegt, der den Winkel zwischen der Scherflussrichtung (x^1 -Achse) und der Richtung der langen Halbachse a_1 misst. Die Membran soll nun eine Panzerkettenbewegung ausführen [59], bei der Membranpunkte, die sich zu einem beliebigen Zeitpunkt in einer Ebene senkrecht zur Scherebene (x^1x^2 -Ebene) befinden, im weiteren Verlauf stets in einer Ebene senkrecht zur Scherebene bleiben. Offensichtlich ist eine solche Bewegung dann nicht lokal flächenerhaltend, wie es bei Vesikeln und roten

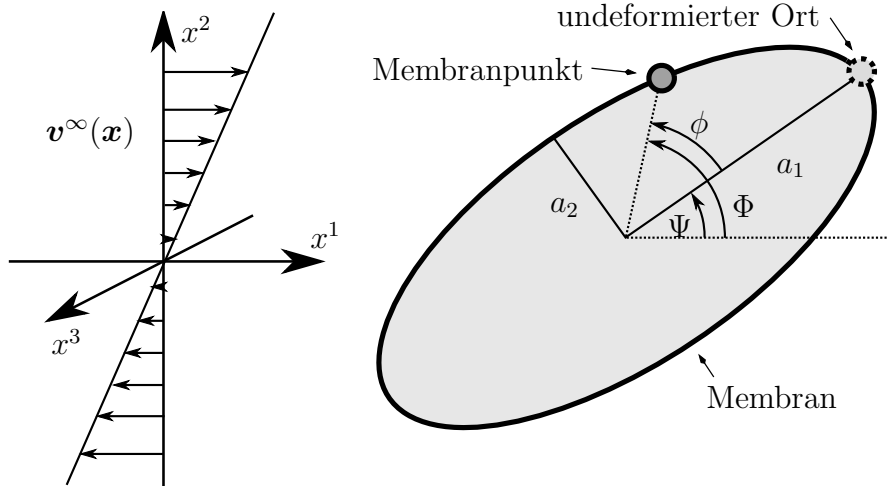


Abbildung 3.1: Zweidimensionaler Schnitt einer elastischen ellipsoidalen Kapsel im linearen Scherfluss $\mathbf{v}^\infty = \dot{\gamma}x^2\mathbf{e}_1$ (3.1). Neben langer a_1 und kurzer Halbachse a_2 des Ellipsoides in der Scherflussebene sind der Anstellwinkel Ψ und die Phasenwinkel ϕ (bzgl. der langen Halbachse des Ellipsoides) bzw. Φ (bzgl. der Scherflussrichtung) dargestellt.

Blutkörperchen sein müsste. Dennoch liefert diese vereinfachte Darstellung die wesentlichen Resultate, die sich qualitativ mit den experimentellen Beobachtungen decken. Die Panzerkettenbewegung der Membran wird dabei durch den Phasenwinkel ϕ gemessen, der angibt, wie weit sich ein Membranelement bzgl. der festen ellipsoidalen Form von seiner ursprünglichen Position entfernt hat. Der Phasenwinkel Φ bzgl. des ortsfesten Koordinatensystems ist gegeben durch den Winkel zwischen der Scherflussrichtung (x^1 -Achse) und der Position desjenigen Membranpunktes, welcher sich ursprünglich auf der langen Halbachse a_1 befunden hat. Es gilt daher der Zusammenhang

$$\Phi = \Psi + \phi. \quad (3.2)$$

Der Zustand der Membran ist nun eindeutig durch die beiden Freiheitsgrade, Anstellwinkel Ψ und Phasenwinkel ϕ , gegeben. Aufgrund der Spiegelsymmetrie zum Ursprung sind beide Winkel π -periodisch. Der Phasenraum entspricht damit einem Torus $\mathbb{T} \equiv S^1 \times S^1$ mit π -periodischem S^1 .

3.1.1 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen der beiden Freiheitsgrade folgen durch Drehimpuls- und Energiebetrachtungen. Hierzu wird zunächst das auf der Membran gegebene Geschwindigkeitsprofil auf den äußeren und inneren Fluss mittels den Stokes-Gleichungen fortgesetzt, siehe hierzu auch [67, 68].

Im Folgenden werden die von den Halbachsen abgeleitete geometrische Größen

$$\alpha_i \equiv a_i(a_1a_2a_3)^{-1/3}, \quad \Delta(s) \equiv \sqrt{(\alpha_1^2 + s)(\alpha_2^2 + s)(\alpha_3^2 + s)}, \quad (3.3)$$

$$g_i \equiv \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_i^2 + s)\Delta(s)}, \quad g'_i \equiv \int_0^\infty \frac{(\alpha_i^2 + s) ds}{\Delta(s)^3}, \quad g''_i \equiv \int_0^\infty \frac{(\alpha_i^2 + s)s ds}{\Delta(s)^3}, \quad (3.4)$$

$$z_1 \equiv \frac{1}{2}(a_1/a_2 - a_2/a_1), \quad z_2 \equiv g'_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \quad (3.5)$$

$$f_1 \equiv 2z_1^2, \quad f_2 \equiv 2f_1(1 - 2/z_2), \quad f_3 \equiv -4z_1/z_2 \quad (3.6)$$

benötigt [59]. Weil die innere Flüssigkeit und die Membran im Kräftegleichgewicht sind, müssen alle durch den Fluss von außen auf die Kapsel einwirkende Kräfte und Drehmomente verschwinden. Es können insgesamt drei additive Anteile zum Drehmoment $M = M_1 + M_2 + M_3$ um die x^3 -Achse identifiziert werden

$$M_1 \equiv -\frac{1}{2} \frac{4\eta^\circ V_0}{a_1^2 g_1 + a_2^2 g_2} [a_1^2(1 - \cos(2\Psi(t))) + a_2^2(1 + \cos(2\Psi(t)))] , \quad (3.7)$$

$$M_2 \equiv -\frac{4\eta^\circ V_0}{a_1^2 g_1 + a_2^2 g_2} (a_1^2 + a_2^2) \partial_t \Psi(t) , \quad (3.8)$$

$$M_3 \equiv -\frac{4\eta^\circ V_0}{a_1^2 g_1 + a_2^2 g_2} 2a_1 a_2 \partial_t \phi(t) . \quad (3.9)$$

Der Term M_1 entspricht dem Drehmoment eines Scherflusses auf ein stationäres starres Ellipsoid mit konstantem Anstellwinkel Ψ , d.h. $\partial_t \Psi(t) = \partial_t \phi(t) = 0$. Der Term M_2 ist das Drehmoment auf ein starres Ellipsoid, welches um die x^3 -Achse mit der Geschwindigkeit $\partial_t \Psi(t)$ bei verschwindendem äußeren Fluss rotiert. Der Term M_3 gibt das Drehmoment auf ein stationäres Ellipsoid an, das im verschwindendem äußeren Fluss eine Panzerkettenbewegung durchführt. Die Drehimpulsbilanz $M = 0$ führt dann auf die Bewegungsgleichung

$$\partial_t \Psi(t) = \tilde{A}(t) + \tilde{B} \cos(2\Psi(t)) \quad (3.10)$$

mit

$$\tilde{A}(t) \equiv -\left(\frac{1}{2} \dot{\gamma} + \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \partial_t \phi(t) \right) , \quad (3.11)$$

$$\tilde{B} \equiv \frac{a_1^2 - a_2^2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \dot{\gamma} . \quad (3.12)$$

Die gesamte in der inneren Flüssigkeit dissipierte Energie pro Zeit lässt sich als

$$\partial_t \mathcal{H}_{\text{diss}} = V_0 \eta^i f_1 (\partial_t \phi(t))^2 \quad (3.13)$$

schreiben [59]. Weil eine zusätzliche Dissipation innerhalb der Membran nur die innere Viskosität η^i ändert, wird die Membrandissipation in der Herleitung [59] vernachlässigt. Die im Inneren verbrauchte Energie muss durch den äußeren Fluss geliefert werden. Mit Hilfe der Arbeitsrate des äußeren Flusses

$$\partial_t \mathcal{H}_W = V_0 \eta^\circ [f_2 (\partial_t \phi(t))^2 + f_3 \dot{\gamma} \partial_t \phi(t) \cos(2\Psi(t))] \quad (3.14)$$

folgt schließlich aus $\partial_t \mathcal{H}_{\text{diss}} = \partial_t \mathcal{H}_W$ die zweite Bewegungsgleichung

$$\partial_t \phi(t) = \tilde{C} \cos(2\Psi(t)) \quad (3.15)$$

mit von Viskositätskontrast η^i/η° , Scherrate $\dot{\gamma}$ und geometrischen Größen f_i abhängiger Konstante

$$\tilde{C} \equiv -\frac{f_3}{f_2 - f_1 \eta^i/\eta^\circ} \dot{\gamma} . \quad (3.16)$$

Durch Zusammenfassen und Vereinfachen folgen schließlich die beiden Bewegungsgleichungen des Keller–Skalak Modells

$$\frac{1}{\dot{\gamma}} \partial_t \Psi(t) = A + B \cos(2\Psi(t)) , \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{\dot{\gamma}} \partial_t \phi(t) = C \cos(2\Psi(t)) \quad (3.18)$$

mit den Konstanten

$$A \equiv -\frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

$$B \equiv \frac{a_1 a_2 f_3 + (f_2 - f_1 \eta^i / \eta^o)(a_1^2 - a_2^2)}{2(a_1^2 + a_2^2)(f_2 - f_1 \eta^i / \eta^o)}, \quad (3.20)$$

$$C \equiv -\frac{f_3}{f_2 - f_1 \eta^i / \eta^o}. \quad (3.21)$$

Phasenverhalten

Die Bewegungsgleichung des Anstellwinkels Ψ ist unabhängig vom Phasenwinkel ϕ und kann einfach integriert werden. Für $|B| > |A|$ gibt es eine stabile Lösung, bei der der Anstellwinkel Ψ stationär ist und der Phasenwinkel mit konstanter Geschwindigkeit anwächst. Die zugehörige Bewegung beschreibt eine Panzerkettenbewegung mit konstantem Anstellwinkel. Für $|B| < |A|$ hingegen ist die Geschwindigkeit $\partial_t \Psi(t) < 0$ stets negativ, d.h. der Anstellwinkel fällt monoton unbeschränkt. Diese Bewegung entspricht einer Taumelbewegung. Das Phasenverhalten ändert sich also an der kritischen Stelle $|B| = |A|$. Weil in dieser Beziehung neben den geometrischen Größen nur der Viskositätskontrast $\lambda = \eta^i / \eta^o$, nicht aber die Scherrate $\dot{\gamma}$ enthalten ist, ist für eine gegebene Kapsel der Übergang der Panzerketten- in die Taumelbewegung im Keller-Skalak Modell alleine durch den Viskositätskontrast η^i / η^o gegeben.

3.2 Reduziertes Modell

3.2.1 Formgedächtnis und Bewegungsgleichungen

Formgedächtnis

Das Keller-Skalak Modell aus Unterkapitel 3.1 [59] ist zur Beschreibung von elastischen, nicht-sphärischen Kapseln wie roten Blutkörperchen ein zu stark vereinfachtes Modell. Als wesentlicher Punkt fehlt hier, dass während einer Panzerkettenbewegung die elastische Membran verspannt wird. Es existiert also eine Energiebarriere, die für eine vollständige Panzerkettenbewegung überwunden werden muss. Weiterhin dient die elastische Energie während der Panzerkettenbewegung als Energiespeicher und führt zu Rückstellkräften, die die Kapsel unter dem Einfluss von Dissipation in ihren undeformierten Zustand bringen. Dieses Formgedächtnis (*shape memory effect*) wurde auch bei roten Blutkörperchen beobachtet [11].

Bewegungsgleichungen

Beschränkt man sich wie im Keller-Skalak Modell [59] auf die beiden Freiheitsgrade, Anstellwinkel Ψ und Phasenwinkel ϕ , wird während einer Panzerkettenbewegung Energie in der Membran gespeichert, wodurch die Energiebilanz einen weiteren Term erhält. In [31, 29] wurde als elastisches Modell eine π -periodische harmonische Änderung

$$\mathcal{H}_{\text{el}} \equiv E_0 \sin^2 \phi \quad (3.22)$$

der elastischen Energie mit Phasenwinkel ϕ angenommen. Das hierdurch erweiterte und auf Kapseln anwendbare Keller-Skalak Modell [59] wird in dieser Arbeit als reduziertes Kapselmodell bezeichnet. Im Gegensatz hierzu werden im vollen Modell alle Freiheitsgrade berücksichtigt. Aus einer zur Keller-Skalak Ableitung analogen Betrachtung folgen schließlich die

Bewegungsgleichungen des reduzierten Modells [29, 31]

$$\partial_t \Psi(t) = \tilde{A}(t) + \tilde{B} \cos(2\Psi(t)), \quad (3.23)$$

$$\partial_t \phi(t) = \tilde{C} \left(\cos(2\Psi(t)) - \frac{E_0}{V_0 \eta^\circ f_3 \dot{\gamma}} \sin(2\phi(t)) \right), \quad (3.24)$$

die zunächst vollständig auf dimensionslose Größen transformiert werden.

Skalen und dimensionslose Bewegungsgleichungen

Zu den sieben unabhängigen Parametern zählen die drei geometrischen Parameter $a_{1,2,3}$, die die Längen der Halbachsen angeben, der elastische Energieparameter E_0 und die drei hydrodynamischen Parameter, bestehend aus der Scherrate $\dot{\gamma}$ und den beiden Viskositäten η^i sowie η° . Drei dieser Größen können verwendet werden, um unabhängige Skalen zu definieren. Das Volumen V_0 definiert die Längenskala R_0 gemäß (2.1), die inverse Scherrate $\dot{\gamma}^{-1}$ eine Zeitskala und die maximale elastische Energie E_0 während der Panzerkettenbewegung eine Energieskala. Damit bleiben vier unabhängige dimensionslose Parameter übrig: das Viskositätsverhältnis $\lambda = \eta^i/\eta^\circ$, das Verhältnis zwischen hydrodynamischer und elastischer Energie $(\eta^\circ V_0 \dot{\gamma})/E_0$ und die Achsenverhältnisse a_2/a_1 in der Scherebene und senkrecht zur Scherebene a_3/a_1 . Die ersten drei definieren drei äquivalente dimensionslose Parameter: den durch die Geometrie verschobenen und skalierten Viskositätskontrast

$$\tilde{\lambda} \equiv \frac{f_1}{-2f_3} \frac{\eta^i}{\eta^\circ} + \frac{-f_2}{-2f_3} = \frac{f_1}{-2f_3} \lambda + \frac{-f_2}{-2f_3}, \quad (3.25)$$

die dimensionslose Scherrate oder skalierte Kapillarzahl

$$\tilde{\chi} \equiv \frac{V_0 \eta^\circ (-f_3)}{E_0} \dot{\gamma} \quad (3.26)$$

und einen Exzentrizitätsparameter

$$\alpha \equiv \arctan \frac{a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}, \quad (3.27)$$

der Werte im Intervall $\alpha \in [0, \pi/2]$ annehmen kann. Der Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ ergibt identische Achsen $a_2 \rightarrow a_1$, d.h. der Schnitt der Kapsel mit der Scherebene ist hier kreisförmig. Im Fall $\alpha \rightarrow \pi/2$ verschwindet das Achsenverhältnis $a_2/a_1 \rightarrow 0$, d.h. der Schnitt der Kapsel mit der Scherebene ist in Richtung der Achse a_1 maximal gestreckt.

Eine dimensionslose Zeit wird im Wesentlichen durch die Zeitskala $\dot{\gamma}^{-1}$ definiert. Es wird hierzu die differentielle Form

$$d\tau \equiv \frac{2\dot{\gamma}}{\tilde{\lambda}} dt \quad (3.28)$$

verwendet, um auch bei zeitabhängiger positiver Scherrate $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t) > 0$ die Zeit skalieren zu können. Insgesamt lassen sich mit Hilfe von (3.25) bis (3.27) die Bewegungsgleichungen (3.23) und (3.24) in einfacher Form

$$\partial_\tau \Psi(\tau) = -\cos \alpha \partial_\tau \phi(\tau) - \tilde{\lambda}(1 - \sin \alpha \cos 2\Psi(\tau)), \quad (3.29)$$

$$\partial_\tau \phi(\tau) = -(\tilde{\chi}^{-1}(\tau) \sin 2\phi(\tau) + \cos 2\Psi(\tau)) \quad (3.30)$$

darstellen, wobei der vierte Parameter a_3/a_1 die Dynamik nicht beeinflusst.

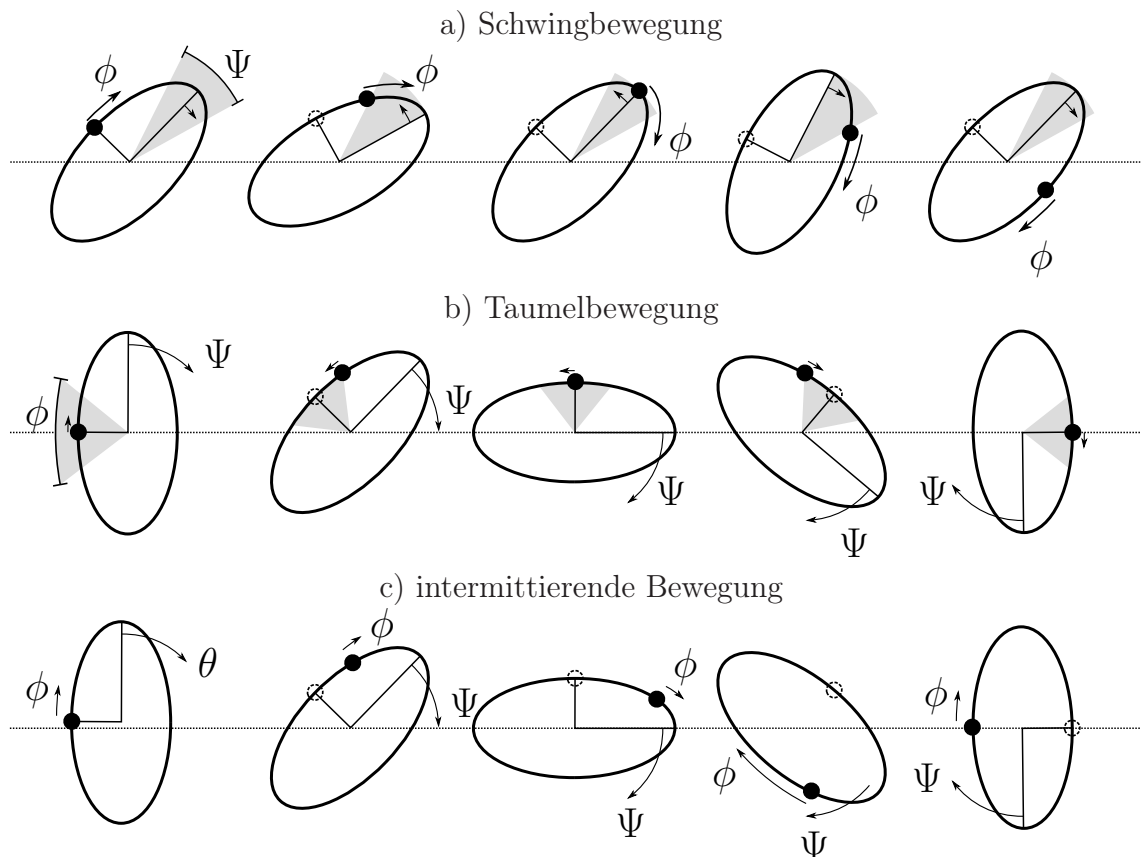


Abbildung 3.2: Darstellungen von Schwing-, Taumel- und intermittierender Bewegung einer Kapsel in Form von Momentaufnahmen. Während einer Schwingbewegung a) wächst der Phasenwinkel ϕ monoton, während der Anstellwinkel Ψ oszilliert. Während einer Taumelbewegung b) wächst der Anstellwinkel Ψ monoton, während der Phasenwinkel ϕ oszilliert. Während einer intermittierenden Bewegung wachsen beide Winkel unbeschränkt an.

3.2.2 Taumelrate und Phasenverhalten bei konstantem Scherfluss

Die Bewegungsgleichungen des reduzierten Modells (3.29) und (3.30) lassen sich leicht numerisch lösen. Aus den gewonnenen Trajektorien für zeitlich konstante Scherrate $\tilde{\chi}$ lassen sich drei verschiedene Bewegungsformen unterscheiden:

- **Schwingen:** Für große Scherraten $\tilde{\chi}$ und nicht zu großen Viskositätskontrast $\tilde{\lambda}$ vollführt die Kapsel eine Panzerkettenbewegung, die dadurch gekennzeichnet ist, dass der Phasenwinkel ϕ unbeschränkt anwächst und der Anstellwinkel Ψ um einen stationären positiven Wert oszilliert, siehe Abbildung 3.2 a. Aufgrund dieser oszillierenden Bewegung wird diese Bewegungsform Schwingen genannt.
- **Taumeln:** Eine Taumelbewegung hingegen ist für kleine Scherraten stabil, weil die hydrodynamischen Kräfte nicht ausreichen, die elastische Barriere der Membran bei einer Panzerkettenbewegung zu überwinden. Der Anstellwinkel Ψ wächst dabei unbeschränkt, während der Phasenwinkel ϕ oszilliert, siehe Abbildung 3.2 b.
- **Intermittierende Bewegung:** Zwischen beiden Phasen befindet sich ein Regime, in dem beide Winkel unbegrenzt anwachsen und das intermittierend genannt wird [31], siehe Abbildung 3.2 c. Die Bewegung der Kapsel im intermittierenden Bereich und na-

he am Taumelbereich ist durch Taumelbewegungen gegeben, die immer wieder durch einzelne Schwingbewegungen unterbrochen sind. Entsprechend bewegt sich die Kapsel in der Nähe des Schwingbereichs mit Schwingbewegungen, die immer wieder durch einzelne Taumelbewegungen unterbrochen sind. Möglich wird eine solche Bewegung dadurch, dass der Phasenraum einem Torus entspricht. Dadurch kann hier auch nicht das Poincaré–Bendixson–Theorem angewendet werden, welches besagt, dass eine beschränkte Trajektorie in einem planaren System stets auf oder gegen einen stabilen Grenzzyklus läuft.

Die normierte mittlere Taumelrate

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n \equiv \frac{\langle \partial_\tau \Psi \rangle}{\langle \partial_\tau \Psi \rangle + \langle \partial_\tau \phi \rangle} = \frac{1}{1 + \langle \partial_\tau \phi \rangle / \langle \partial_\tau \Psi \rangle} = \frac{\langle \partial_\tau \Psi \rangle / \langle \partial_\tau \phi \rangle}{1 + \langle \partial_\tau \Psi \rangle / \langle \partial_\tau \phi \rangle} \quad (3.31)$$

dient als Ordnungsparameter, um die drei verschiedenen Bewegungsformen quantitativ unterscheidbar zu machen. Die mittleren Raten des Anstell- und Phasenwinkels sind dabei durch

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \partial_\tau \Psi(\tau), \quad (3.32)$$

$$\langle \partial_\tau \phi \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \partial_\tau \phi(\tau) \quad (3.33)$$

definiert. Die Phasendiagramme, in denen die drei verschiedenen Bewegungsformen zu erkennen sind [31, 34, 33], sind in den Abbildungen 3.3 und 3.4 für verschiedene Werte der Exzentrizität α dargestellt. Die mittlere normierte Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ ist hier als Grauwert in Abhängigkeit von inverser Scherrate $\tilde{\chi}^{-1}$ und Viskositätskontrast $\tilde{\lambda}$ angegeben. Sie wurde bestimmt, indem die Dynamik einer Kapsel über einen langen Zeitraum numerisch berechnet wurde. Während einer stabilen Taumelbewegung wächst der Anstellwinkel Ψ unbegrenzt, wohingegen der Phasenwinkel um einen festen Wert oszilliert. Damit folgt $\langle \partial_\tau \phi \rangle / \langle \partial_\tau \Psi \rangle = 0$ und eine mittlere Taumelrate vom Wert $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$, der durch den hellsten Grauton symbolisiert ist. Während einer Schwingbewegung wächst der Phasenwinkel ϕ unbegrenzt und der Anstellwinkel oszilliert. Hier folgt $\langle \partial_\tau \Psi \rangle / \langle \partial_\tau \phi \rangle = 0$ und eine verschwindende mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$, dargestellt durch den dunkelsten Grauwert. Alle Grauwerte dazwischen kennzeichnen den intermittierenden Bereich $0 < \langle \partial_\tau \Psi \rangle_n < 1$. Man erkennt im Phasendiagramm, dass die Kapsel für geringe Scherraten taumelt, und dass bei einer Erhöhung der Scherrate ein Übergang in eine intermittierende Bewegung und anschließend bei nicht zu großem Viskositätskontrast ein Übergang in eine Schwingbewegung stattfindet.

Taumel- und Schwingbereich sind unter anderem dadurch charakterisiert, dass es in diesen Bereichen stabile Grenzzyklen gibt, die stabilen Fixpunkten einer Poincaré–Abbildung auf dem Torus entsprechen [31]. Jedoch gibt es auch innerhalb des intermittierenden Bereichs Gebiete stabiler Grenzzyklen [33], in denen beide Winkel Ψ und ϕ synchron in einem gebrochen–rationalen Verhältnis laufen. Innerhalb dieser Gebiete ist daher die mittlere normierte Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ konstant und nimmt rationale Werte an (siehe Abbildungen 3.5 und 3.4). In den Gebieten innerhalb des intermittierenden Bereichs, in denen keine Grenzzyklen existieren, füllt die Trajektorie den ganzen Torus aus.

3.2.3 Quasisphärische Bewegungsgleichungen

Weil die Phasendiagramme aus den Abbildungen 3.3 und 3.4 für alle kleinen Werte des Exzentrizitätsparameters α qualitativ ähnlich sind, genügt es den quasisphärischen Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$

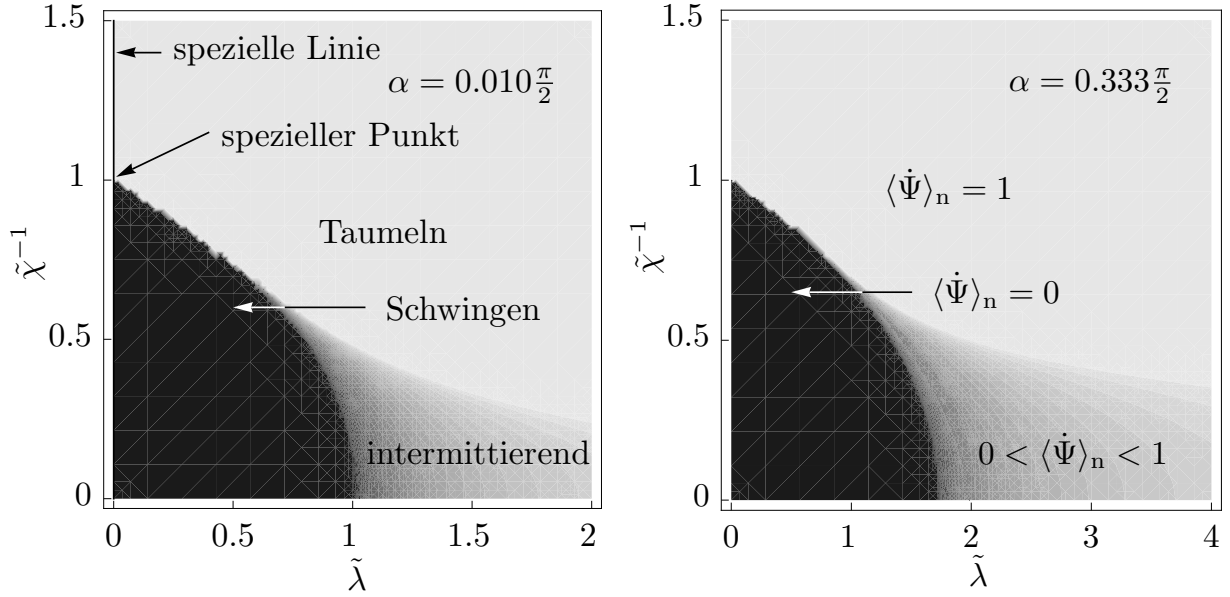


Abbildung 3.3: Phasendiagramme des reduzierten Modells für verschiedene Werte des Exzentrizitätsparameters α . Als Ordnungsparameter dient dabei die mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$, die in Grautönen dargestellt ist, wobei helle Töne dem Wert 1 und dunkle Töne dem Wert 0 entsprechen. Im linken Diagramm sind zudem die spezielle Linie $\tilde{\lambda} = 0$ und der spezielle Punkt ($\tilde{\lambda} = 0, \tilde{\chi}^{-1} = 1$) dargestellt, die in der analytischen Betrachtung wichtig werden (Unterkapitel 3.3). Die Exzentrizität $\alpha = 0,01\pi/2$ im linken Diagramm ist so klein gewählt, dass der quasisphärische Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ eine gute Näherung ist.

zu betrachten, bei dem analytischer Fortschritt möglich wird (Unterkapitel 3.3 und 3.4) [34]. Hierzu werden die beiden Achsen in der Scherflussebene gemäß

$$a_2 = (1 - \epsilon)a_1 \quad (3.34)$$

mit kleinem $\epsilon \ll 1$ gewählt. Die Abweichung der dritten Achse a_3 von a_1 soll dabei maximal von der Größenordnung ϵ sein. Die drei dimensionslosen Parameter, die die Kapseldynamik festlegen, lauten dann in erster Ordnung in ϵ

$$\alpha \approx \epsilon, \quad (3.35)$$

$$\tilde{\lambda} \approx \frac{3 + 2\eta^i/\eta^o}{5}\epsilon, \quad (3.36)$$

$$\tilde{\chi} \approx \frac{5V_0\eta^o}{E_0}\dot{\gamma}\epsilon. \quad (3.37)$$

Im quasisphärischen Fall kann die elastische Energie explizit berechnet werden. Im Bereich geringer Deformationen skaliert die elastische Energie quadratisch mit der Verformung

$$E_0 = e_0\epsilon^2 \quad (3.38)$$

mit einem vom Konstitutivgesetz abhängigen Parameter $e_0 \sim \epsilon^0 = 1$. Damit lautet die dimensionslose Scherrate in niedrigster Ordnung

$$\tilde{\chi} \approx \frac{5V_0\eta^o}{e_0}\dot{\gamma}\epsilon^{-1}. \quad (3.39)$$

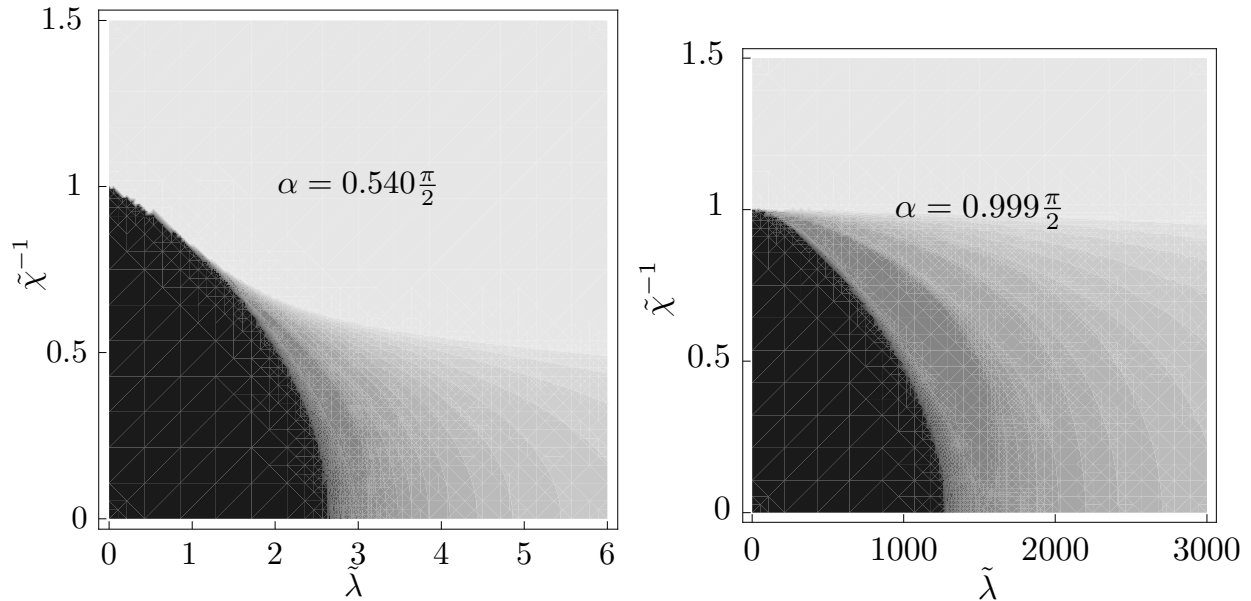


Abbildung 3.4: Weitere Phasendiagramme des reduzierten Modells für höhere Werte des Exzentrizitätsparameters α . Qualitativ ähneln sich alle vier Phasendiagramme. Nur für Werte nahe der oberen Grenze $\alpha = 1$ wird der intermittierende Bereich auch für kleinen Viskositätskontrast $\tilde{\lambda}$ ausgeprägt.

Für vorgegebene Werte von η^i , η^o , V_0 und e_0 sind alle Vorfaktoren in den Entwicklungen (3.35), (3.36) und (3.39) von der Größenordnung $\epsilon^0 = 1$ im quasisphärischen Fall $\epsilon \rightarrow 0$. Die Kapseldynamik ist daher auf den linken Streifen des Phasendiagramms $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ begrenzt, wo die umstrittene Intermittenz keinen Einfluss auf die Dynamik der Kapsel hat und vernachlässigt werden kann.

Weil der Übergang zwischen Taumeln und Schwingen bei einer dimensionslosen Scherrate von $\tilde{\chi} \sim 1$ stattfindet, wird später festgelegt, dass die Scherrate $\dot{\gamma} \sim \epsilon$ in der Größenordnung des kleinen Parameters ϵ liegt. Zunächst genügt jedoch, dass die inverse dimensionslose Scherrate $\tilde{\chi}^{-1}$ nicht stärker als $\epsilon^1 = \epsilon$ skaliert.

Bevor die exakten Bewegungsgleichungen (3.43) und (3.44) des reduzierten Modells entwickelt werden, wird ein geeignetes skaliertes, gedrehtes und verschobenes Koordinatensystem in der $\Psi\phi$ -Ebene durch die Definition

$$\Sigma = -\left(\phi + \Psi + \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\Phi + \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.40)$$

$$\Delta = \phi - \Psi + \frac{\pi}{4} \quad (3.41)$$

eingeführt, wobei Σ den Winkel eines Membranpunktes bezüglich der Scherflussrichtung bis auf eine additive Konstante angibt. In diesen Koordinaten lautet die normierte mittlere Taumelrate

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = \frac{\langle \partial_\tau \Delta \rangle + \langle \partial_\tau \Sigma \rangle}{2\langle \partial_\tau \Sigma \rangle} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\langle \partial_\tau \Delta \rangle}{\langle \partial_\tau \Sigma \rangle} \right). \quad (3.42)$$

Die Entwicklung von (3.29) und (3.30) bis in erster Ordnung in ϵ mit $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ und $\alpha \approx \epsilon$ ergibt schließlich die quasisphärischen Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten

$$\partial_\tau \Sigma(\tau) = \tilde{\lambda}, \quad (3.43)$$

$$\partial_\tau \Delta(\tau) = 4 \sin \Sigma(\tau) \sin \Delta(\tau) + \tilde{\lambda} + 2(\tilde{\chi}^{-1} - 1) \cos(\Sigma(\tau) - \Delta(\tau)). \quad (3.44)$$

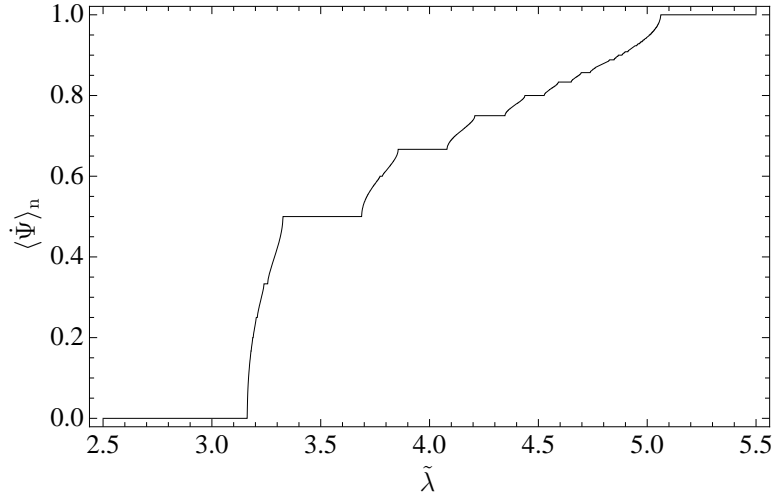


Abbildung 3.5: Die mittlere normierte Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ auf der Schnittgeraden $\tilde{\chi}^{-1} = 0,129\tilde{\lambda}$ im Phasendiagramm mit $\alpha = 0,667\pi/2$ zeigt die konstanten Bereiche mit rationalen Funktionswerten, in denen stabile Grenzzyklen existieren und bei denen die beiden Winkel Ψ und ϕ synchron laufen.

Aus der Anfangsbedingung $\Sigma(0) = \Sigma_0$ folgt direkt die Lösung der ersten Gleichung

$$\Sigma(\tau) = \Sigma_0 + \tau\tilde{\lambda}, \quad (3.45)$$

d.h. ein materieller Membranpunkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bezogen auf die dimensionslose Zeit τ .

Unter der Annahme, dass die Scherrate ihr Vorzeichen nicht ändert, kann Σ als neue Zeitvariable angesehen werden. Die beiden Bewegungsgleichungen lassen sich dann in einer einzigen autonomen Differentialgleichung auf dem Torus schreiben

$$\tilde{\lambda} \frac{d\Sigma}{d\Delta} = 4 \sin \Sigma \sin \Delta + \tilde{\lambda} + 2(\tilde{\chi}^{-1} - 1) \cos(\Sigma - \Delta), \quad (3.46)$$

wobei nun die dimensionslose Scherrate $\tilde{\chi}$ eine Funktion des Winkels Σ ist. In dieser Gleichung sollen die beiden Winkel Σ und Δ nicht auf das Intervall $[0, \pi)$ beschränkt sein, sondern alle reellen Werte annehmen können. Dadurch lassen sich in jede Richtung die Anzahl der Umläufe auf dem Torus zählen.

3.3 Analytische Ergebnisse im zeitunabhängigen Scherfluss

Bevor im Detail auf die analytische Methode eingegangen wird, soll hier ein grober qualitativer Überblick über die Ergebnisse gegeben werden [34]. Es wird zunächst für eine feste und zeitlich konstante dimensionslose Scherrate $\tilde{\chi}$ die Dynamik in der Nähe der speziellen Linie $\tilde{\lambda} = 0$ untersucht, die dem sphärischen Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ entspricht, siehe Abb. 3.3. Auf der speziellen Linie sind die beiden Phasen, Taumeln und Schwingen, am speziellen Punkt bei $\tilde{\chi}^{-1} = 1$ getrennt, siehe Abbildung 3.3, links. Eine intermittierende Bewegung tritt hier nicht auf. Die systematische Entwicklung im dimensionslosen Viskositätskontrast $\tilde{\lambda}$ beginnt mit der nullten Ordnung in ϵ auf der speziellen Linie $\tilde{\lambda}$, auf der zusammenhängende Kurven stabiler, instabiler bzw. neutraler Fixpunkte existieren, siehe Abb. 3.6. Für $\tilde{\chi}^{-1} \neq 1$, also überall auf der speziellen Linie fern des speziellen Punktes, findet man auf dem Torus stets zwei aus stabilen oder

instabilen Fixpunkten bestehende geschlossene Kurven. Durch eine Störung von $\tilde{\lambda}$ in erster Ordnung fern des Überganges bei $\tilde{\chi}^{-1} = 1$ ändern sich diese Kurven in stabile bzw. instabile Grenzyklen, weil die Störung aus topologischen Gründen die Stabilität nicht ändern kann. Dabei gehören die Grenzyklen für $\tilde{\chi}^{-1} > 1$ zum Taumeln und für $\tilde{\chi}^{-1} < 1$ zum Schwingen.

Am speziellen Punkt, also bei $\tilde{\lambda} = 0$ und $\tilde{\chi}^{-1} = 1$, kreuzen sich die aus Fixpunkten bestehenden Kurven und werden geradlinig, wodurch in der $\Sigma\Delta$ -Ebene ein Schachbrettmuster aus Fixpunkt-Kurven entsteht. Die vertikalen Linien bestehen ausschließlich aus neutralen Fixpunkten, während sich auf den horizontalen Linien Segmente abwechseln, die entweder nur aus stabilen oder nur aus instabilen Fixpunkten bestehen. Eine Störung in $\tilde{\lambda}$ kann daraus stabile Grenzyklen erzeugen, die entweder zum Taumeln oder zum Schwingen gehören. Deshalb muss in der Nähe des speziellen Punktes, d.h. des Phasenüberganges, die Dynamik genauer untersucht werden. Die entsprechenden Grenzyklen können analytisch bestimmt werden, indem man Trajektorien betrachtet, die nahe der stabilen und neutralen Segmenten des speziellen Punktes verlaufen. Deren Teilstücke können analytisch bestimmt und asymptotisch verbunden werden (*method of matched asymptotic expansion*, [69]). Es zeigt sich, dass es auf dem Torus ein lokales Gebiet gibt, durch das alle Grenzyklen laufen und in dem entschieden wird, ob die Kapsel eine Taumel- oder eine Schwingbewegung vollführt. Das Gebiet wirkt also wie eine Weiche, die die Trajektorie in Richtung einer Taumel- oder Schwingbewegung führt, wobei die Weiche durch die dimensionslose Scherrate $\tilde{\chi}$ gestellt wird.

Das für einen zeitlich konstanten Scherfluss hilfreiche Bild der Weiche in der Nähe des speziellen Punktes ist hilfreich, weil es sich auch auf einen zeitabhängigen Scherfluss übertragen lässt. Hier wird die Weiche durch eine über das Weichengebiet gemittelte Scherrate gesteuert, so dass es je nach Wert dieser mittleren Scherrate zu einer einzelnen Taumel- oder einer einzelnen Schwingbewegung kommt.

3.3.1 Entwicklung in nullter Ordnung

Die Untersuchung beginnt auf der speziellen Linie $\tilde{\lambda} = 0$, wo sich die quasisphärischen Bewegungsgleichungen (3.43) und (3.44) zu

$$\partial_\tau \Sigma(\tau) = 0, \quad (3.47)$$

$$\partial_\tau \Delta(\tau) = 4 \sin \Sigma(\tau) \sin \Delta(\tau) + 2(\tilde{\chi}^{-1} - 1) \cos(\Sigma(\tau) - \Delta(\tau)) \quad (3.48)$$

vereinfachen und auf einen zeitlich konstanten Summenwinkel $\Sigma(\tau) = \Sigma(0) = \Sigma_0$ führen. In der $\Sigma\Delta$ -Ebene ist die Kapsel also auf vertikale Bewegungen eingeschränkt. Für alle Werte von $\tilde{\chi}^{-1} \neq 1$ entstehen zwei getrennte, aber jeweils zusammenhängende Kurven aus Fixpunkten, die bei einer Störung von $\tilde{\lambda}$ in Grenzyklen bifurkieren. Lage und Stabilität der Fixpunkte, aus denen diese Kurven bestehen, hängen vom Wert der inversen dimensionslosen Scherrate $\tilde{\chi}^{-1}$ ab, sind aber analytisch sehr einfach aus (3.48) zu bestimmen. Getrennt werden die beiden Bereiche, die zu Taumel- und Schwingbewegungen führen, durch den speziellen Punkt $\tilde{\chi}^{-1} = 1$ auf der speziellen Linie $\tilde{\lambda} = 0$. Es wird daher zunächst auf Lage und Stabilität der Fixpunkte am speziellen Punkt eingegangen, bevor beide Regime $\tilde{\chi}^{-1} > 1$ und $\tilde{\chi}^{-1} < 1$ betrachtet werden.

Am speziellen Punkt gilt für die Fixpunkte

$$\partial_\tau \Sigma(\tau) = 0 \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.49)$$

$$\partial_\tau \Delta(\tau) = 4 \sin \Sigma(\tau) \sin \Delta(\tau) \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.50)$$

was auf geradlinige Kurven zusammenhängender Fixpunkte entspricht, die sich an zwei Punkten auf dem Torus treffen. In der $\Sigma\Delta$ -Ebene sind diese Fixpunktgeraden durch $\Sigma = k\pi$ und

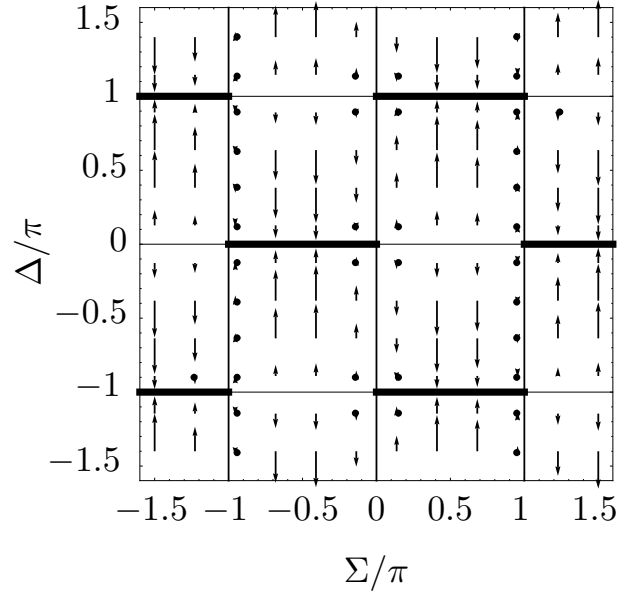


Abbildung 3.6: Vektorfeld und Fixpunktcurven auf dem Torus am speziellen Punkt $\tilde{\lambda} = 0$, $\tilde{\chi}^{-1} = 1$ des Phasendiagramms im quasisphärischen Grenzfall $\alpha \sim \epsilon \rightarrow 0$. Deutlich erkennbar ist das Schachbrettmuster der Fixpunkte bestehend aus stabilen (dick), instabilen (dünn) und neutralen (normal) Segmenten.

$\Delta = k\pi$ mit beliebigem ganzzahligen k gegeben. Sie bilden ein Schachbrettmuster, welches in Abbildung 3.6 illustriert ist. Linearisiert man die Dynamik um die Fixpunkte, erhält man für jeden Fixpunkt zwei Eigenwerte. Weil die Fixpunkte zusammenhängen, liegt ein Eigenvektor mit Eigenwert 0 in Richtung der benachbarten Fixpunkte. Die Stabilität des Fixpunktes ist dann durch das Vorzeichen des zweiten Eigenwertes gegeben. Ein positiver Eigenwert charakterisiert einen instabilen Fixpunkt, ein negativer Eigenwert hingegen einen stabilen Fixpunkt. Ein Fixpunkt wird neutral genannt, wenn auch der zweite Eigenwert verschwindet. Weil der Summenwinkel Σ konstant bleibt, sind alle Fixpunkte auf den vertikalen Kurven $\Sigma = k\pi$ neutral, während sich auf den horizontalen Kurven Segmente mit stabilen und instabilen Fixpunkten abwechseln, wobei die Segmente durch die neutralen Kurven getrennt sind. Damit besteht jedes Quadrat aus einer stabilen, einer instabilen und zwei neutralen Seiten.

Für jeden anderen Wert der inversen dimensionslosen Scherrate $\tilde{\chi}^{-1} \neq 1$ erhält man durch Lösen der Gleichungen

$$\partial_\tau \Sigma(\tau) = 0 \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.51)$$

$$\partial_\tau \Delta(\tau) = 4 \sin \Sigma(\tau) \sin \Delta(\tau) + 2(\tilde{\chi}^{-1} - 1) \cos(\Sigma(\tau) - \Delta(\tau)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.52)$$

zwei getrennte Kurven, die entweder aus stabilen oder instabilen Fixpunkten bestehen, siehe Abb. 3.7. In der Nähe des speziellen Punktes liegen diese Kurven vom Schachbrettmuster des speziellen Punktes in der Größenordnung $|\tilde{\chi}^{-1} - 1|^{1/2}$ entfernt, wie sich einfach mit (3.52) zeigen lässt.

Eine Kapsel samt Membran im Scherfluss kann physikalisch keinen stationären Zustand einnehmen, weil der Rotationsanteil des Scherflusses dafür sorgt, dass ein Membranpunkt im Laborsystem ständig rotiert wird. Weil der Grenzfall $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ mit einer divergierenden Zeitskalierung $d\tau \rightarrow \infty$ einhergeht, sind die in diesem Abschnitt beschriebenen Fixpunkte nur in der skalierten Zeit stationäre Punkte, weil aus Sicht der Zeit t die Zeit τ still steht.

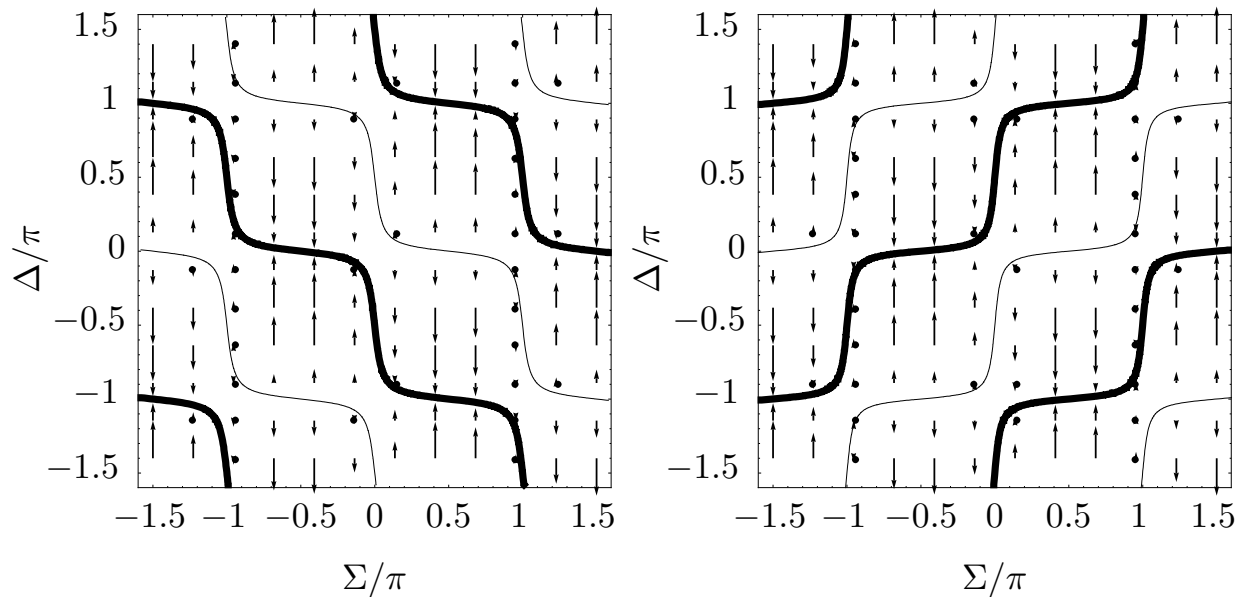


Abbildung 3.7: Vektorfeld und Fixpunktkurven auf dem Torus auf der speziellen Linie $\tilde{\lambda} = 0$ des Phasendiagramms im quasisphärischen Grenzfall $\alpha \sim \epsilon \rightarrow 0$ für $\tilde{\chi}^{-1} = 0,8 < 1$ (links, Schwingbereich) und $\tilde{\chi}^{-1} = 1,2 > 1$ (rechts, Taumelbereich). Stabile Fixpunkte liegen auf den dicken, instabile Fixpunkte auf den dünnen Kurven.

Eine echte Dynamik ohne Fixpunkte, welche in den beiden folgenden Anschnitten genauer betrachtet wird, erhält man in der skalierten Zeit τ bereits in erster Ordnung in ϵ .

3.3.2 Entwicklung in erster Ordnung fern des Phasenüberganges

Weil sich für eine endliche Störung $\tilde{\lambda}$ das System mit konstanter Geschwindigkeit $\partial_t \Sigma = \tilde{\lambda}$ entlang der Σ -Richtung bewegt, existieren Fixpunkte nur auf der speziellen Linie $\tilde{\lambda} = 0$. Aus den Kurven zusammenhängender Fixpunkte werden bei kleiner endlicher Störung $\tilde{\lambda} > 0$ Grenzzyklen. Fern des Phasenüberganges, also für Werte außerhalb $\tilde{\chi}^{-1} - 1 \sim \tilde{\lambda}$, ist die Störung $\tilde{\lambda}$ zu gering, um die Stabilität qualitativ zu ändern. Daher übertragen sich sowohl Stabilität als auch Topologie der Fixpunktkurven auf die entstehenden Grenzzyklen.

Der stabile Grenzzyklus für kleine $\tilde{\lambda} > 0$ und $\tilde{\chi}^{-1} < 1$ führt zu einem fallenden Winkel Δ , während Σ gleichmäßig anwächst. Für große Zeiten haben die Winkeländerungen betragsmäßig die gleiche Größe, d.h. $\langle \partial_\tau \Delta \rangle = -\langle \partial_\tau \Sigma \rangle$, so dass eine verschwindende Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$ folgt, die eine Schwingbewegung kennzeichnet. Für Werte $\tilde{\chi}^{-1} > 1$ steigt der Winkel Δ an, so dass $\langle \partial_\tau \Delta \rangle = \langle \partial_\tau \Sigma \rangle$ und $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$ folgen und die Kapsel taumelt. Damit erhält man konsistente Ergebnisse mit den numerisch bestimmten Phasendiagrammen aus Abbildung 3.3.

3.3.3 Entwicklung in erster Ordnung am Phasenübergang

In der Nähe $\tilde{\chi}^{-1} - 1 \sim \epsilon$ des speziellen Punktes muss die Kapseldynamik für endlichen, aber kleinen, skalierten Viskositätskontrast $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ genauer betrachtet werden. Hierbei helfen Geraden

$$\tilde{\chi} \equiv 1 + \frac{\rho - 1}{2} \tilde{\lambda}, \quad (3.53)$$

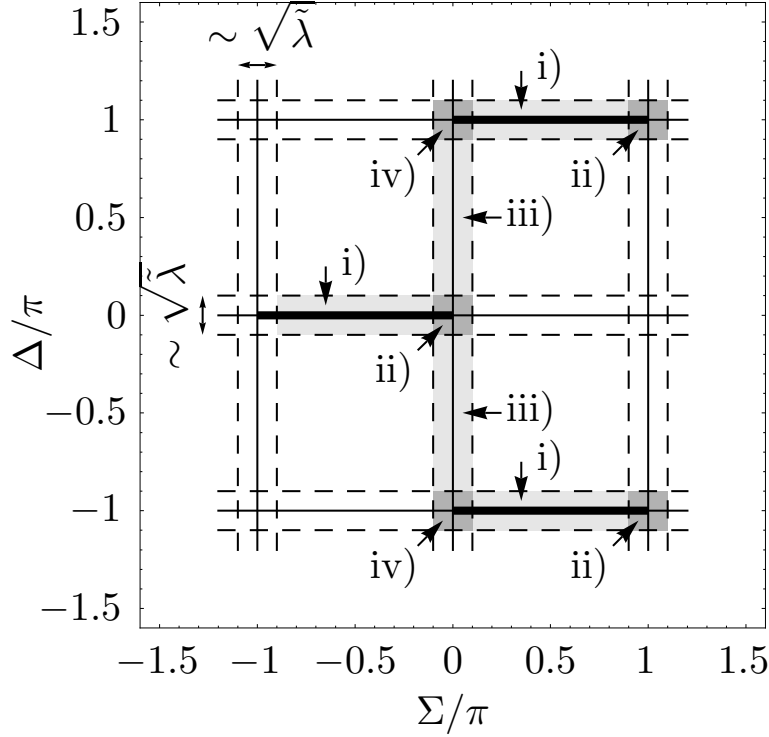


Abbildung 3.8: Schachbrettmuster am speziellen Punkt samt den vier Gebieten i) bis iv), auf denen die Grenzzyklen laufen, wenn sich das System in der Nähe des speziellen Punktes befindet, und auf denen asymptotisch exakte Lösungen möglich sind. Entscheidend für die Dynamik der Kapsel ist die Region ii), die auch Weichengebiet genannt wird.

die am speziellen Punkt beginnen und deren Richtung den Steigungsparameter $\rho \sim \epsilon^0 = 1$ definiert. Die autonome Gleichung (3.46) lautet dann

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{4}{\tilde{\lambda}} \sin \Sigma \sin \Delta + \rho + (\rho - 1)(\cos(\Sigma - \Delta) - 1) \quad (3.54)$$

und kann asymptotisch gelöst werden. Weil die Fixpunktcurven in der Größenordnung $|\tilde{\chi}^{-1} - 1|^{1/2} \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$ vom Schachbrettmuster entfernt liegen, sollte der stabile Grenzzyklus innerhalb des Streifens der Breite $\sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$ um die stabilen und neutralen Segmente des speziellen Punktes liegen, siehe Abb. 3.8. In jeder der vier Gebiete i) bis iv) wird die Differentialgleichung (3.54) in niedrigster Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ entwickelt und analytisch gelöst, wobei beachtet werden muss, dass jeweils unterschiedliche Terme auf der rechten Seite von Gleichung (3.54) dominieren. Asymptotisches Verknüpfen der Teillösungen [69] liefert schrittweise die Werte der Integrationskonstanten, und es folgt eine eindeutige geschlossene Trajektorie, die dem stabilen Grenzzyklus entspricht. Dabei wird wie folgt vorgegangen: An die allgemeine Lösung des Gebietes i) wird die Lösung des Gebietes ii) angepasst. Entsprechend werden schrittweise die Lösungen des Gebietes iii) bzw. iv) an die angepassten Lösungen des Gebietes ii) bzw. iii) angepasst. Schließlich wird die Lösung des Gebietes iv) an die Lösung des Gebietes i) angepasst, um eine geschlossene Trajektorie zu erhalten.

Während der folgenden Beschreibung der Lösung sollte der Leser parallel die Abbildungen 3.9, 3.10 und 3.11 im Auge haben:

- i) Im Gebiet i), gegeben durch $\Sigma \sim 1$ und $\Delta \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$, liefert eine Entwicklung von (3.54) in

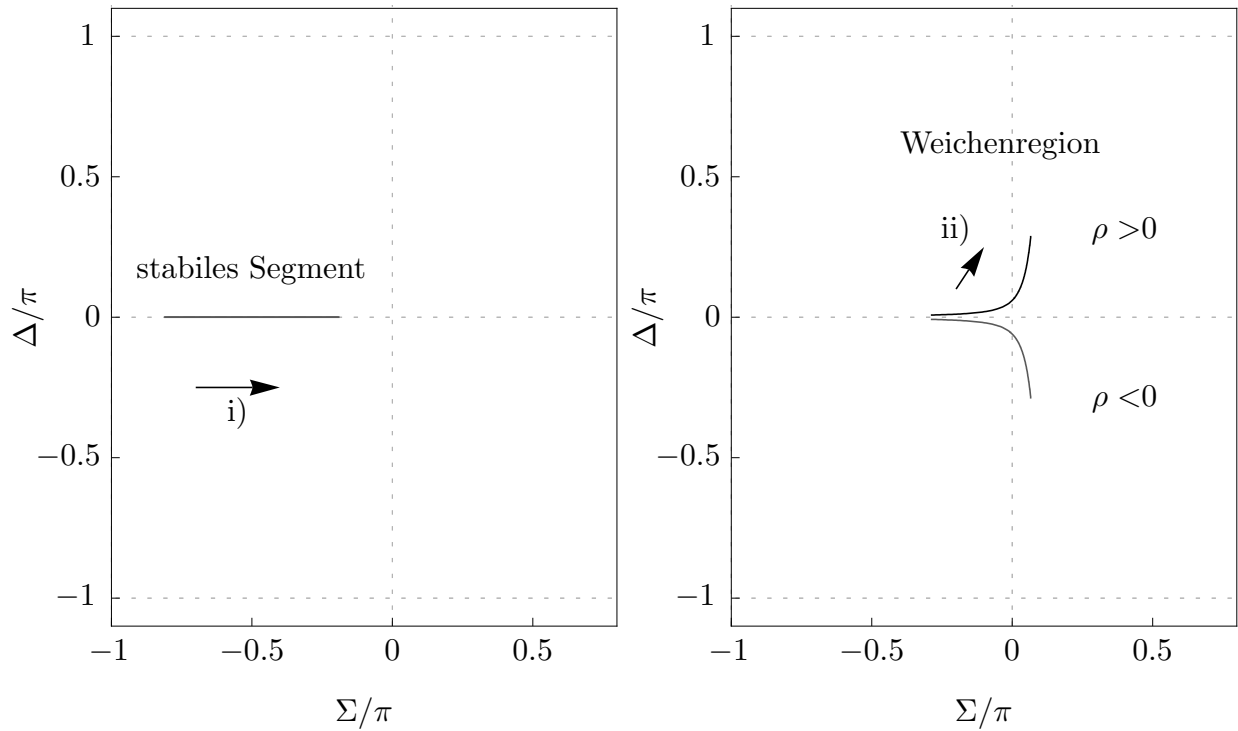


Abbildung 3.9: Asymptotische Lösungen in den Gebieten i) und ii) für $\alpha = 0,001\pi$, $\tilde{\lambda} = 0,3$ und $\rho = 1$ bzw. $\rho = -1$. Im linken Bild läuft das System entlang des stabilen Segmentes im Gebiet i), bis es die Weichenregion erreicht. Im rechten Bild läuft das System innerhalb des Weichengebietes, wobei das Vorzeichen der Scherrate die Weiche steuert und das System in eines der beiden Gebiete iii) der neutralen Segmente führt. Der weitere Verlauf ist in Abb. 3.10 gezeigt.

niedrigster Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ die von ρ unabhängige Differentialgleichung

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{4}{\tilde{\lambda}} \Delta \sin \Sigma \quad (3.55)$$

mit Lösung

$$\Delta(\Sigma) = \Delta_1 \exp\left(-\frac{4}{\tilde{\lambda}}(\cos \Sigma - \cos \Sigma_1)\right), \quad (3.56)$$

wobei (Σ_1, Δ_1) ein beliebiger Punkt auf der Trajektorie ist. Wie im Punkt iv) zu sehen sein wird, ist nach Schließen der Trajektorie die Lösung eindeutig durch

$$\Delta(\Sigma) = 0 \quad (3.57)$$

gegeben, siehe Abb. 3.9, links. In führender Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ läuft das System also auf das stabile Segment $\Delta(\Sigma) = 0$ mit $-\pi < \Sigma < 0$. Auch wenn das System ursprünglich nicht auf dem stabilen Grenzzyklus beginnt, führt der stabile Charakter von $\Delta(\Sigma) = 0$ mit $-\pi < \Sigma < 0$ zu einer schnellen Relaxation auf das stabile Segment, während sich der Winkel Σ wegen $\tilde{\lambda} \ll 1$ nur langsam ändert. Daher wird das Anpassen der Lösung des Gebietes ii) nicht vom ursprünglichen Startpunkt (Σ_1, Δ_1) abhängen. Sowohl die asymptotische Differentialgleichung als auch die allgemeine sowie die spezielle Lösung hängen nicht von der Scherrate $\tilde{\chi}$ bzw. vom Steigungsparameter ρ ab.

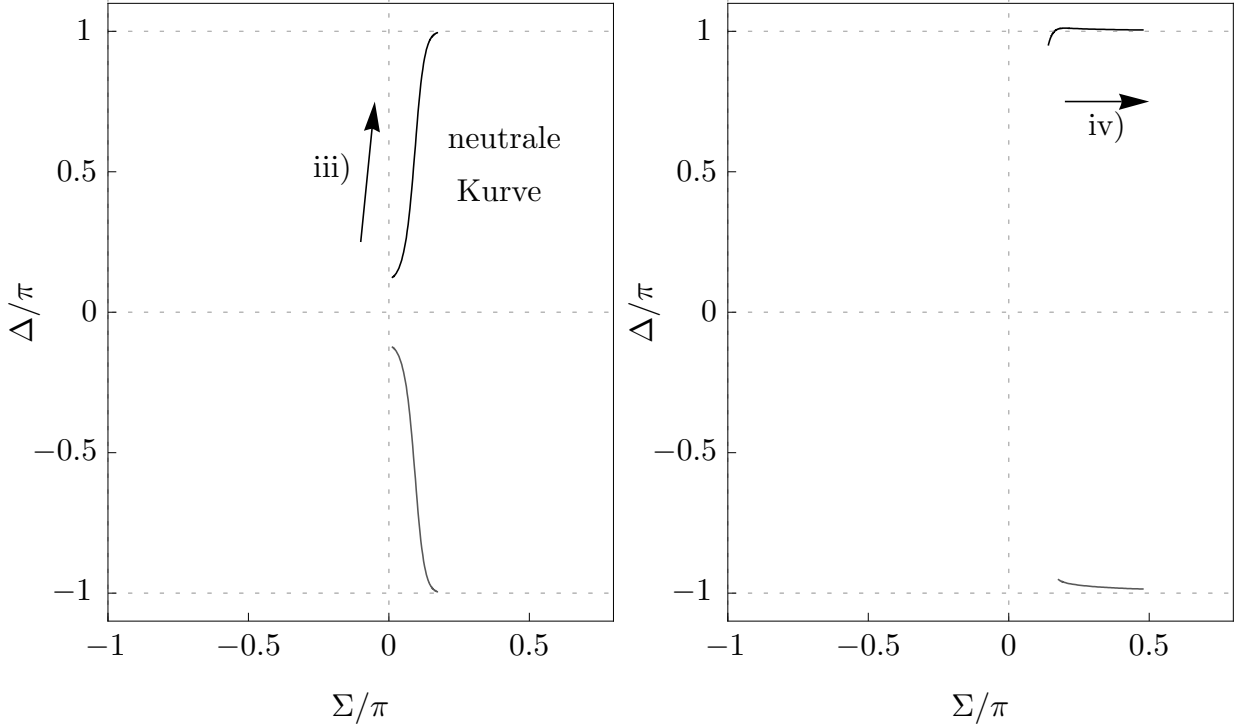


Abbildung 3.10: Asymptotische Lösungen in den Gebieten iii) und iv) für Parameter wie in Abb. 3.9. Die Dynamik in den Gebieten iii) und iv) beschreibt die Relaxation auf das benachbarte stabile Segment, das durch die Weiche in Gebiet ii) ausgewählt wurde, siehe hierzu Abb. 3.9.

- ii) Im Gebiet ii), gegeben durch $\Sigma \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$ und $\Delta \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$, liefert eine Entwicklung von (3.54) in niedrigster Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ die von ρ abhängige Differentialgleichung

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{4}{\tilde{\lambda}} \Delta \Sigma + \rho. \quad (3.58)$$

Hier ist das zu $\tilde{\lambda} = 0$ gehörende Vektorfeld klein genug, damit die kleine Störung $\tilde{\lambda} > 0$ einen wesentlichen Einfluss auf das Vektorfeld und die Bewegung der Kapsel ausübt. Wie man anhand der an die Lösung des Gebietes i) angepassten Lösung

$$\Delta(\Sigma) = \sqrt{\frac{\pi \tilde{\lambda}}{8}} \rho \left(1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}}} \Sigma \right) \right) \exp \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} \Sigma^2 \right) \quad (3.59)$$

erkennt, ist hier der Wert der Scherrate $\tilde{\chi}$ bzw. des Steigungsparameters ρ wichtig, siehe Abb. 3.9, rechts. Hier bezeichnet

$$\operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x ds \exp(-s^2) \quad (3.60)$$

die Gaußsche Fehlerfunktion. Das Vorzeichen der Lösung $\Delta(\Sigma)$ ist durch das Vorzeichen des Steigungsparameters ρ gegeben. Für negative Steigungen $\rho < 0$ wird das neutrale Segment fallendem Winkel Δ ausgesucht. Die Kapsel vollführt hier eine Schwingbewegung. Für positive Steigungen $\rho > 0$ hingegen, wird das neutrale Segment mit ansteigendem Winkel Δ gewählt und die Kapsel taumelt. Damit wirkt das Gebiet ii) als Weiche, die vom Vorzeichen des Steigungsparameter d.h. vom Wert der Scherrate gesteuert wird.

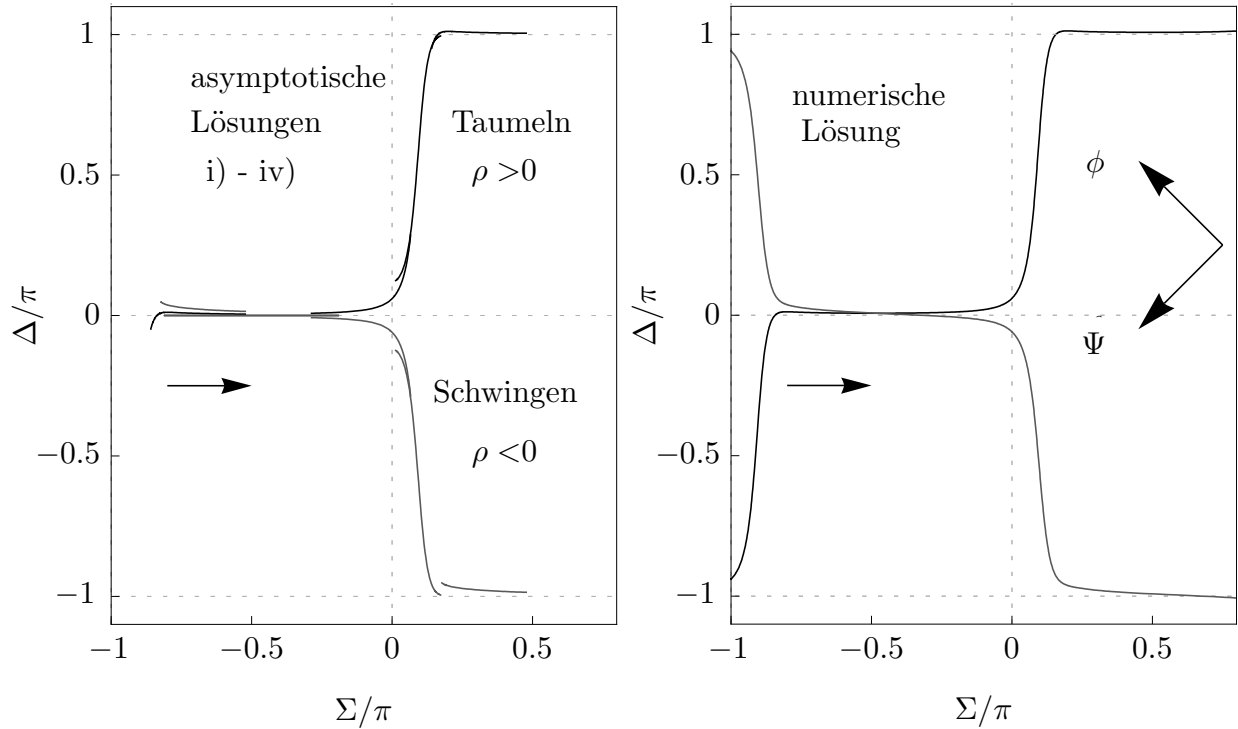


Abbildung 3.11: Asymptotisch angepasste Lösungen in allen vier Gebieten auf einen Blick, siehe auch Abb. 3.9 und Abb. 3.10, und Vergleich mit numerisch bestimmter Trajektorie. Parameterwerte wie in Abb. 3.9. Im rechten Bild ist zusätzlich das Koordinatensystem der ursprünglichen Winkel, Anstellwinkel Ψ und Phasenwinkel ϕ , eingezeichnet.

- iii) Im Gebiet iii), gegeben durch $\Sigma \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$ und $\Delta \sim 1$, liefert eine Entwicklung von (3.54) in niedrigster Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ die von ρ unabhängige Differentialgleichung

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{4}{\tilde{\lambda}} \Sigma \sin \Delta \quad (3.61)$$

mit an ii) asymptotisch angepasster Lösung

$$\Delta(\Sigma) = 2 \arctan \left(\tan \left(\sqrt{\frac{\pi \tilde{\lambda}}{8}} \rho \right) \exp \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} \Sigma^2 \right) \right), \quad (3.62)$$

welche durch die Anpassung an ii) zwar von der Scherrate bzw. dem Steigungsparameter abhängt, aber qualitativ lediglich eine Relaxation zurück auf das stabile Segment beschreibt, siehe Abb. 3.10, links.

- iv) Im Gebiet iv), gegeben durch $\Sigma \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$ und $\Delta \pm \pi \sim \sqrt{\tilde{\lambda}}$, liefert eine Entwicklung von (3.54) in niedrigster Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ die von ρ abhängige Differentialgleichung

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = -\frac{4}{\tilde{\lambda}} (\Sigma \pm \pi) \Delta + 2 - \rho \quad (3.63)$$

mit an iii) asymptotisch angepasster Lösung

$$\Delta(\Sigma) = \mp\pi + 2 \exp\left(-\frac{2}{\tilde{\lambda}}\Sigma^2\right) \times \left(\pm\pi - \cot\left(\sqrt{\frac{\pi\tilde{\lambda}}{8}}\rho\right) + \frac{\sqrt{2\pi\tilde{\lambda}}}{8}(2-\rho) \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}}}\Sigma\right) \right), \quad (3.64)$$

wobei

$$\operatorname{erfi} x \equiv -i \operatorname{erf}(ix) \quad (3.65)$$

die imaginäre Gaußsche Fehlerfunktion bezeichnet, siehe Abb. 3.10, rechts. Die oberen bzw. unteren Zeichen bei \pm bzw. \mp hängen davon ab, welches neutrale Segment in Gebiet ii) ausgewählt wurde. Auch wenn Differentialgleichung und Lösung explizit von ρ abhängen, beschreibt die Trajektorie lediglich die Endphase der Relaxation auf das stabile Segment. Die Lösung wird nun mit der allgemeinen Lösung des Gebietes i) asymptotisch angepasst, um die gesamte Trajektorie zu schließen. Die dadurch in i) ausgewählte Lösung $\Delta(\Sigma) = 0$ bzw. $\Delta(\Sigma) = \mp\pi$ wurde bereits in i) angegeben.

In Abbildung 3.11 sind links alle asymptotisch angepassten Lösungen dargestellt, rechts hingegen sind zum Vergleich die numerisch ermittelten Grenzyklen abgebildet, wobei schon mit bloßem Auge eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen ist.

Die Kapseldynamik kann in der Nähe des speziellen Punktes wie folgt zusammengefasst werden: Das System läuft auf dem stabilen horizontalen Segment $\Delta = 0$, an dessen Ende $\Sigma \simeq 0$ es das Weichengebiet (Gebiet ii) erreicht. Abhängig vom Vorzeichen des Steigungsparameters ρ wird eine Seite gewählt, d.h. das System läuft nach oben oder unten in der Nähe des neutralen Segmentes, um schließlich wieder auf das benachbarte stabile Segment zu relaxieren. Die Grenze zwischen Taumeln und Schwingen im Phasendiagramm in erster Ordnung in $\tilde{\lambda} \sim \epsilon$ lassen sich durch die analytischen Ergebnisse analytisch exakt durch die Gerade mit $\rho = \rho_c \equiv 0$, also

$$\tilde{\chi}^{-1} = \tilde{\chi}_c^{-1} \equiv 1 - \frac{1}{2}\tilde{\lambda}, \quad (3.66)$$

darstellen, in exzellenter Übereinstimmung mit dem quasisphärischen Phasendiagramm aus Abbildung 3.3, links. In physikalischen Einheiten lautet die Phasengrenze in erster Ordnung in ϵ

$$\dot{\gamma} \approx \dot{\gamma}_c \equiv \frac{V\eta^o\epsilon}{2E_0} \left[10 - \epsilon \left(3 + 2\frac{\eta^i}{\eta^o} \right) \right]. \quad (3.67)$$

3.4 Analytische Ergebnisse im zeitabhängigen Scherfluss

Nun wird das Verhalten der Kapsel in einem zeitlich modulierten Scherfluss betrachtet, wobei der Scherfluss auf positive und periodische Scherraten $\dot{\gamma}(t)$ mit beliebiger Periodendauer T beschränkt ist [34]. Die Kreisfrequenz ist durch

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \quad (3.68)$$

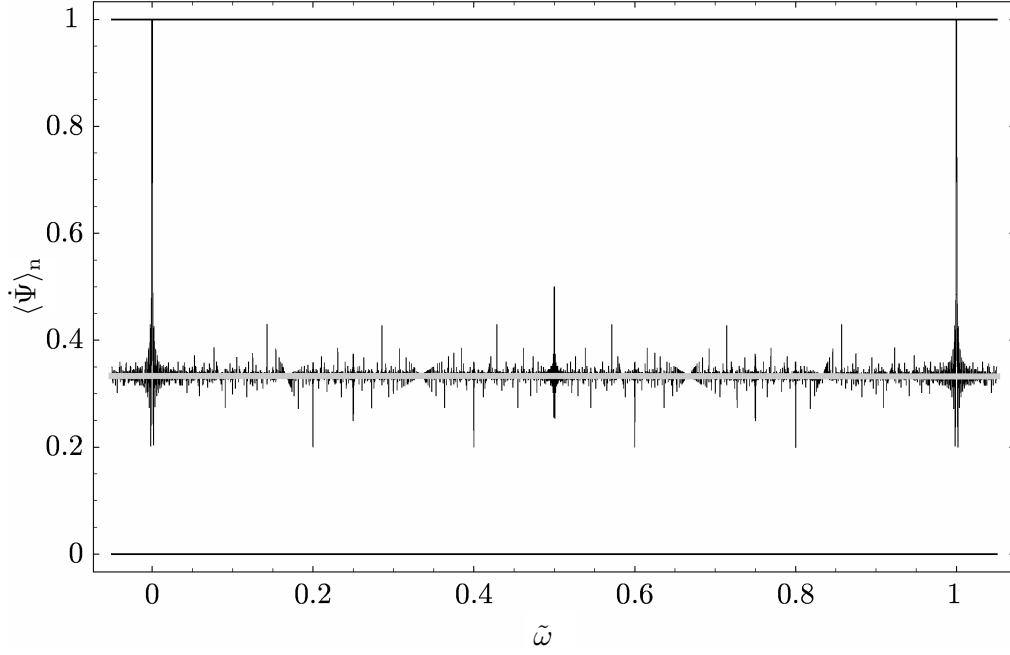


Abbildung 3.12: Typische numerisch bestimmte Werte der mittleren Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ als Funktion der treibenden Frequenz $\tilde{\omega}$ in endlichen Simulationsläufen für geringe Frequenzen. Zu sehen sind zahlreiche Resonanzspitzen verschiedener Höhe, die einem konstanten Hintergrund überlagert sind. Die Breite der Spitzen hängt dabei von der Oszillationsamplitude und von der Simulationsdauer ab. Die graue Gerade entspricht dem analytischen Ergebnis (3.87). Parameter: $\alpha = 0,001\pi$, $\tilde{\lambda} = 0,01$, $\rho_0 = -1$, $\rho_1 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $\Sigma_f = 500\pi$.

und die mittlere Scherrate durch

$$\dot{\gamma}_0 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{\gamma}(t) \quad (3.69)$$

gegeben. Es lässt sich zeigen, dass der Steigungsparameter, definiert über (3.26), (3.28) und (3.53), periodisch ist und in der Form

$$\rho(\Sigma) = \rho_0 + \rho_1 b(\Sigma) \quad (3.70)$$

geschrieben werden kann. Die oszillierende Funktion $b(\Sigma)$ habe hier einen verschwindenden Mittelwert

$$\int_0^{\pi/\tilde{\omega}} d\Sigma b(\Sigma) = 0, \quad (3.71)$$

sei betragsmäßig auf einen Maximalwert $\max_\Sigma |b(\Sigma)| = 1$ normiert und periodisch $b(\Sigma) = b(\Sigma + \pi/\tilde{\omega})$ mit dimensionsloser Frequenz

$$\tilde{\omega} \equiv \frac{\omega}{4\dot{\gamma}_0}. \quad (3.72)$$

Eine Frequenz von $\tilde{\omega} = 1$ entspricht dann einer vollen Umdrehung des Winkels Σ auf dem Torus.

Zuerst werden Ergebnisse der mittleren Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ als Funktion der treibenden Frequenz $\tilde{\omega}$ gezeigt, die numerisch erhalten wurden, indem die Bewegungsgleichungen (3.29) und

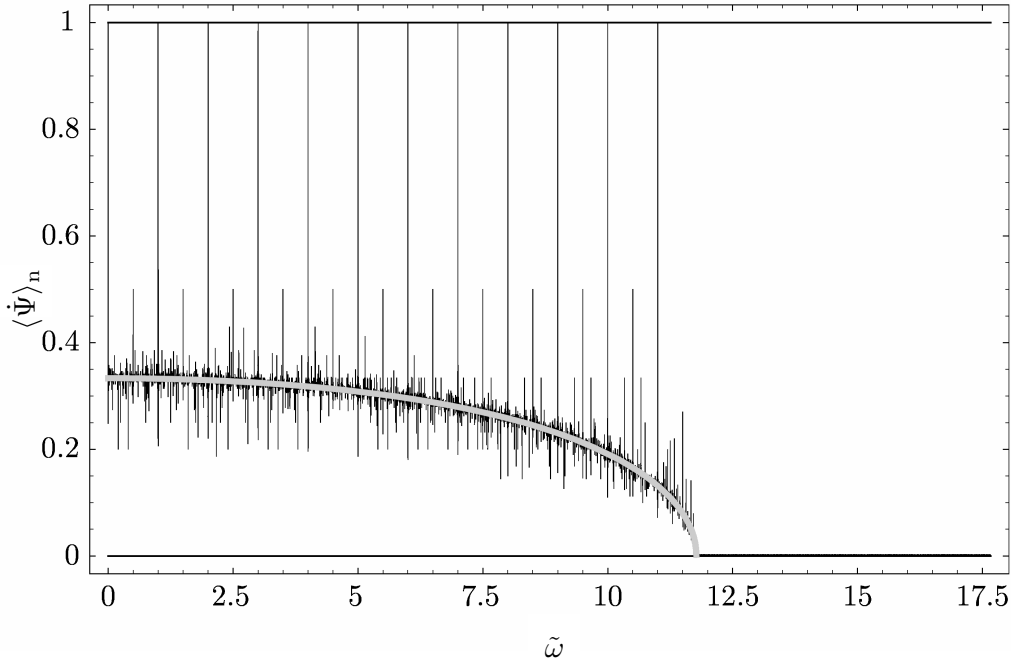


Abbildung 3.13: Typische numerisch bestimmte Werte der mittleren Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ als Funktion der treibenden Frequenz $\tilde{\omega}$ in endlichen Simulationsläufen für das ganze Frequenzspektrum. Zu sehen sind zahlreiche Resonanzspitzen verschiedener Höhe, die einem glatten Hintergrund überlagert sind. Die Taumelrate verschwindet ab einer Grenzfrequenz $\tilde{\omega}_c$, die durch (3.84) gegeben ist. Die graue Kurve entspricht dem analytischen Ergebnis (3.86). Parameter wie in Abb. 3.12.

(3.30) für kleine Werte von α integriert wurden. Die Abbildungen 3.12 und 3.13 zeigen die charakteristische Abhängigkeit der Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ von der Frequenz für eine harmonisch oszillierende inverse dimensionslose Scherrate $\tilde{\chi}^{-1}(\tau)$. Ein glatter Hintergrund, der für kleine Frequenzen konstant ist und bei einer Grenzfrequenz verschwindet, wird von einer großen Anzahl an regulär angeordneten Resonanzspitzen überlagert. Bevor auf die Details des analytischen Vorgehens eingegangen wird, soll eine qualitative Erklärung dieses Verhalten erläutern.

3.4.1 Qualitative Erklärung

Begonnen wird mit einigen einleitenden Betrachtungen, die anschließend analytisch nachgewiesen werden. In Unterkapitel 3.3 wurde für eine konstante Scherrate gezeigt, dass sich in der Nähe des speziellen Punktes das System nahe der stabilen und neutralen Segmente des Schachbrettmusters bewegt und dass die Bewegungen entlang der stabilen Linie und die Relaxation zurück auf die stabile Linie zumindest qualitativ unabhängig von der Scherrate sind. Lediglich im Weichengebiet ist der Wert der dimensionslosen Scherrate $\tilde{\chi}$ bzw. des Steigungsparameters ρ entscheidend. Diese Ergebnisse bleiben im Wesentlichen unverändert, wenn die Scherrate bzw. der Steigungsparameters ρ zeitabhängig wird. Wie in den Abbildungen 3.9 und 3.14 gezeigt, läuft das System weiterhin mit konstant anwachsendem Winkel Σ entlang des Torus. Es bewegt sich dabei nahe des stabilen Segmentes bis es das Weichengebiet erreicht. Hier biegt das System, je nach Wert von ρ , in eines der beiden neutralen Segmente ab, um auf ein benachbartes stabiles Segment zu relaxieren. Im Laufe der Zeit wird das Weichengebiet in regelmäßigen Zeitabständen immer wieder besucht, wie in Abbildung 3.14 illustriert wird. Entsprechend lassen sich die besuchten Weichengebiete in der $\Sigma\Delta$ -Ebene durch die Winkel

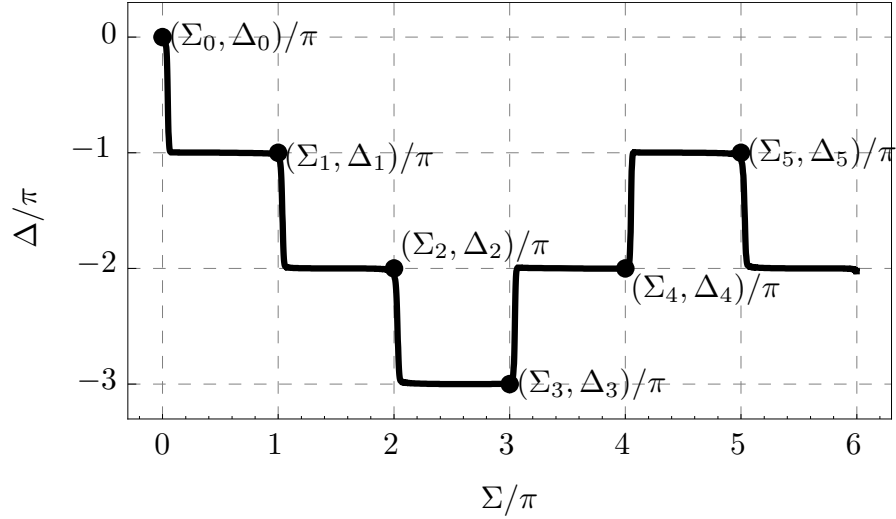


Abbildung 3.14: Abfolge der besuchten Weichenregionen, die durch (Σ_k, Δ_k) bezeichnet sind, für eine spezielle skizzierte Trajektorie.

(Σ_k, Δ_k) kennzeichnen, wobei Σ_k durch

$$\Sigma_k \equiv k\pi \quad (3.73)$$

mit ganzen Zahlen $k = 0, 1, 2, \dots$ gegeben ist. Δ_k ist ein Vielfaches von π und zählt die Differenz der Anzahlen von Taumel- zu Schwingbewegungen. Beginnt die Bewegung bei $k = 0$, werden nacheinander die Weichen mit Winkeln $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ besucht.

Der einzige Unterschied zum stationären Scherfluss findet sich in der Weichenregion, wo das System das stabile Segment verlässt und sich eines der beiden neutralen Segmente aussucht. Dabei hatte der Wert der Scherrate innerhalb der Weichenregion die Stellung der Weiche bestimmt. Weil nun aber die Scherrate zeitabhängig ist, kann der Steigungsparameter ρ bei jedem Besuch der Weiche unterschiedliche Vorzeichen haben. Der Steigungsparameter kann sogar während eines einzelnen Besuches der Weichenregion einmal oder mehrmals das Vorzeichen wechseln.

Zunächst wird daher abgeschätzt, bei welchen Frequenzen der Steigungsparameter ρ in der Weichenregion näherungsweise konstant bleibt und bei welchen Frequenzen ρ innerhalb der Weichenregion stark oszilliert. In der dimensionslosen Zeit τ ist $\tilde{\lambda}$ die Geschwindigkeit des Winkels Σ , so dass die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Besuchen der Weiche durch die Ordnung $1/\tilde{\lambda}$ gegeben ist. Weil die lineare Ausdehnung der Weiche in der Ordnung $\sqrt{\tilde{\lambda}}$ liegt, ist die dimensionslose Zeit, in der das System sich innerhalb der Weiche befindet, größenordnungsmäßig durch $\sqrt{\tilde{\lambda}}/\tilde{\lambda} = 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ gegeben. Daher ist der relative Anteil der Zeit, in der sich das System innerhalb des Weichengebietes befindet von der Ordnung $(1/\sqrt{\tilde{\lambda}})/(1/\tilde{\lambda}) = \sqrt{\tilde{\lambda}}$, und die entsprechende Frequenz lautet $1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$.

Für große Frequenzen $\tilde{\omega} \gg 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ sind die Oszillationen der Scherrate für das System zu schnell, um darauf reagieren zu können. Die Scherrate verhält sich daher effektiv wie eine zeitlich konstante Scherrate mit mittlerem Steigungsparameter ρ_0 . Für negativen mittleren Steigungsparameter $\rho_0 < 0$ vollführt die Kapsel reine Schwingbewegungen mit verschwindender mittlerer Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$. Für positiven mittleren Steigungsparameter $\rho_0 > 0$ hingegen taumelt die Kapsel ausschließlich und die mittlere Taumelrate lautet $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$.

Im Grenzfall kleiner Frequenzen $\tilde{\omega} \ll 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ kann die Scherrate innerhalb der Weichenregion als konstant betrachtet werden. Die Weichenregion ist also effektiv nur durch einen Punkt bei Σ_k gegeben. Jedes mal, wenn die Weiche (Σ_k, Δ_k) besucht wird, entscheidet das Vorzeichen des Steigungsparameters ρ zur Zeit $\Sigma = \Sigma_k$, ob die Kapsel eine Taumel- oder eine Schwingbewegung vollführt. Das Vorzeichen von $\rho(\Sigma_k) = \rho(k\pi)$ hängt dabei von der Anfangsphase φ_0 , der Frequenz $\tilde{\omega}$ und dem Zählindex k ab. Um die mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ zu berechnen, müssen die Anzahlen der positiven und negativen Werte von $\rho(\Sigma_0), \rho(\Sigma_1), \rho(\Sigma_2), \dots$ gezählt werden. Das System kann also im Niederfrequenzfall auf ein diskretes Modell abgebildet werden, welches zum einen den glatten Hintergrund und zum anderen die überlagerte Resonanzstruktur aus den Abbildungen 3.12 und 3.13 erklärt.

Für mittlere Frequenzen $\tilde{\omega} \sim 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ zeigt sich, dass ein über das Weichengebiet gemittelter Steigungsparameter $\bar{\rho}$ die Bewegung der Kapsel bestimmt. Diese Erwartung wird im nächsten Abschnitt bestätigt und im Detail erläutert.

3.4.2 Analytische Lösung im Weichengebiet

Die hier präsentierte vollständige analytische Betrachtung untermauert die Argumente des vorigen Abschnittes. Während der Viskositätskontrast konstant bleibt, seien Scherrate $\dot{\gamma}(t)$ bzw. Steigungsparameter $\rho(\Sigma)$ nun beliebig zeitabhängig, aber mit Werten nahe am speziellen Punkt ($\tilde{\lambda} = 0, \tilde{\chi}^{-1} = 1$). Analog zum zeitlich konstanten Fall (Unterkapitel 3.3) werden die vier Gebiete auf dem Torus betrachtet, innerhalb derer sich die stabile Trajektorie befindet. Die Bewegungsgleichungen in niedrigster Ordnung in $\tilde{\lambda}$ bleiben bis auf die Tatsache unverändert, dass der Steigungsparameter nun abhängig vom Winkel Σ wird ($\rho = \rho(\Sigma)$). Weil die Geschwindigkeit in Σ -Richtung durch $\tilde{\lambda}$ gegeben ist, besucht das System die durch (Σ_k, Δ_k) gekennzeichnete Weiche zur Zeit $\tau = \pi k/\tilde{\lambda}$.

Wie im zeitlich konstanten Fall hängen die allgemeinen noch nicht asymptotisch angepassten Lösungen in den Gebieten i) und iii) nicht vom Steigungsparameter ρ ab. Bei der allgemeinen Lösung im Gebiet iv), die lediglich die Relaxation auf ein stabiles Segment beschreibt, spielt die Scherrate qualitativ keine Rolle. Deshalb bewegt sich das System nach Verlassen der Weichenregion schnell auf das durch die Weiche gewählte, benachbarte stabile Segment zu und läuft langsam auf ihm, bis es an seinem Ende die nächste Weiche erreicht. Erneut wählt das Weichengebiet aus, auf welches der beiden benachbarten stabilen Segmente das System relaxiert, d.h. ob die Kapsel eine einzelne Taumel- oder eine einzelne Schwingbewegung ausübt. Die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{4}{\tilde{\lambda}} \Delta \Sigma + \rho(\Sigma) \quad (3.74)$$

im Weichengebiet (mit $k = 0$) kann einfach für einen beliebigen zeitabhängigen Steigungsparameter $\rho(\Sigma)$ gelöst werden. Passt man die allgemeine Lösung an die Lösung des Gebietes i) an, erhält man die Lösung

$$\Delta(\Sigma) = \exp\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}}\Sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\Sigma} d\Sigma' \rho(\Sigma') \exp\left(-\frac{2}{\tilde{\lambda}}\Sigma'^2\right), \quad (3.75)$$

welche für einen harmonisch oszillierenden $\rho(\Sigma)$ integriert und mit Hilfe von Gaußschen Fehlerfunktionen geschrieben werden kann. Betrachtet man den Langzeitlimit $\tau \gg 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ aus Sicht der Weiche (Σ_k, Δ_k) , ergibt sich die asymptotische Lösung

$$\Delta(\Sigma) - \Delta_k \approx \sqrt{\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2}} \exp\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}}(\Sigma - \Sigma_k)^2\right) \bar{\rho}_k \quad (3.76)$$

im Weichengebiet (Σ_k, Δ_k) mit mittlerem Steigungsparameter der k -ten Weiche

$$\bar{\rho}_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma \rho(\Sigma) p_k(\Sigma) \quad (3.77)$$

als entscheidende Größe. Das Mittelungsintegral ist eine Faltung des zeitabhängigen Steigungsparameters $\rho(\Sigma)$ mit einem Gauß-förmigen Integralkern

$$p_k(\Sigma) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{\lambda}}} \exp\left(-\frac{2}{\tilde{\lambda}}(\Sigma - \Sigma_k)^2\right) \quad (3.78)$$

der Breite $\sqrt{\tilde{\lambda}}$, der an der Weiche bei $\Sigma = \Sigma_k$ zentriert ist. Der mittlere Steigungsparameter $\bar{\rho}_k$ entspricht also der mittleren Steigung an der k -ten Weiche, wobei über die Gauß-förmige Dichte $p_k(\Sigma)$ gemittelt wird. Für niedrige Frequenzen $\tilde{\omega} \ll 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ wird die Dichte $p_k(\Sigma)$ zur Diracschen δ -Funktion, während für hohe Frequenzen $\tilde{\omega} \gg 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ die Dichte die schnellen Oszillationen von $\rho(\Sigma)$ glättet.

Das Vorzeichen des mittleren Steigungsparameters $\bar{\rho}_k$ bestimmt nun, ob die Kapsel eine Taumel- oder eine Schwingbewegung durchführt, wie aus der Lösung (3.76) ersichtlich wird. Für negativen mittleren Steigungsparameter $\bar{\rho}_k < 0$ und $\Sigma > \Sigma_k$ ist $\Delta(\Sigma) - \Delta_k < 0$, so dass das neutrale Segment mit fallendem Δ gewählt wird. Dies führt zu einer Schwingbewegung. Für positiven mittleren Steigungsparameter $\bar{\rho}_k > 0$ und $\Sigma > \Sigma_k$ ist $\Delta(\Sigma) - \Delta_k > 0$, so dass das neutrale Segment mit steigendem Δ gewählt wird. Dies führt zu einer Taumelbewegung. Die asymptotische Anpassung an die Gebiete iii) und iv) geschieht völlig analog zum zeitlich konstanten Fall.

Für jede beliebige zeitabhängige Scherrate $\dot{\gamma}(t)$ bzw. äquivalent für beliebiges $\rho(\Sigma)$ kann die Folge der mittleren Steigungsparameter $\bar{\rho}_k$ der Weichen ($\Sigma = \Sigma_k$) über (3.77) und (3.78) berechnet werden. Die mittlere Taumelrate für Scherraten in der Nähe des speziellen Punktes im Phasendiagramm ist dann durch

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Theta(\bar{\rho}_k) \quad (3.79)$$

gegeben, wobei Θ die Heaviside-Stufenfunktion bezeichnet, die die Werte $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ liefert. Dieses Resultat (3.79) wird im folgenden Abschnitt für eine spezielle Wahl von $\rho(\Sigma)$ ausgewertet.

3.4.3 Harmonische Oszillationen

Weil der Steigungsparameter $\rho(\Sigma)$ periodisch gewählt ist, lässt er sich als Fourier-Reihe schreiben, die aus Schwingungen mit der Grundfrequenz $2\tilde{\omega}$ und entsprechenden Oberfrequenzen besteht. Der Einfachheit halber werden die Oszillationen zunächst auf rein harmonische Schwingungen beschränkt. Die Ergebnisse können jedoch leicht auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Ein rein harmonisch modulierter Steigungsparameter

$$\rho(\Sigma) \equiv \rho_0 + \rho_1 \cos(2(\tilde{\omega}\Sigma + \varphi_0)) \quad (3.80)$$

mit mittlerem Wert ρ_0 , Amplitude ρ_1 , Frequenz $\tilde{\omega}$ und Anfangsphase φ_0 führt durch Integration von (3.77) mit Mittelungsdichte (3.78) auf die Folge

$$\bar{\rho}_k = \rho_0 + \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{2}\tilde{\omega}^2\right) \cos(2\varphi_k)\rho_1 \quad (3.81)$$

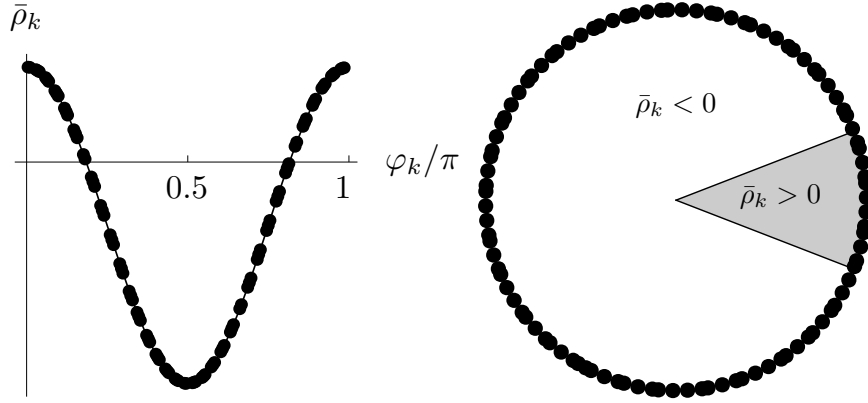


Abbildung 3.15: Links: Mittlerer Steigungsparameter $\bar{\rho}_k$ als Funktion der Phase φ_k für $\rho_0 < 0$ und irrationaler Frequenz $\tilde{\omega}$. Rechts: Entsprechende Abfolge der Phasen φ_k , dargestellt als Punkte, die dicht auf S^1 liegen und auf denen $\bar{\rho}_k(\varphi_k)$ positiv bzw. negativ ist. Positive Werte $\bar{\rho}_k > 0$ gehören zum Taumelbogen, negative Werte $\bar{\rho}_k < 0$ zum Schwingbogen.

der mittleren Steigungsparameter, wobei

$$\varphi_k \equiv \varphi_0 + k\pi\tilde{\omega} \quad (3.82)$$

die Folge der äquidistanten Phasen bezeichnet. Aus (3.79) folgt die mittlere Taumelrate

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Theta \left(\rho_0 + \exp(-\tilde{\lambda}\tilde{\omega}^2/2) \cos(2\varphi_k) \rho_1 \right), \quad (3.83)$$

die im Weiteren als Funktion der Parameter ρ_0 , ρ_1 , $\tilde{\omega}$ und φ_0 diskutiert wird.

Für kleine Amplituden $\rho_1 < |\rho_0| \exp(\tilde{\lambda}\tilde{\omega}^2/2)$ entspricht das Vorzeichen von $\bar{\rho}_k$ an jeder Weiche dem Vorzeichen des unmodellierten Steigungsparameters ρ_0 . Unabhängig von der Frequenz ist dies für $\rho_1 < |\rho_0|$ stets erfüllt. Für größere Amplituden $\rho_1 \geq |\rho_0|$ folgt hierfür eine Grenzfrequenz

$$\tilde{\omega}_c \equiv \tilde{\lambda}^{-1/2} \sqrt{2 \ln(\rho_1/|\rho_0|)}, \quad (3.84)$$

ab welcher ($\tilde{\omega} \geq \tilde{\omega}_c$) die Taumelrate alleine durch das Vorzeichen von ρ_0 gegeben ist. In diesem Fall taumelt die Kapsel mit $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$ für $\rho_0 > 0$ und führt eine Schwingbewegung mit $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$ für $\rho_0 < 0$ aus.

Für größere Amplituden $\rho_1 > |\rho_0| \exp(\tilde{\lambda}\tilde{\omega}^2/2)$ hängt das Vorzeichen von $\bar{\rho}_k$ vom Wert der Phase φ_k (modulo π) ab. Für Phasen φ_k im Gebiet $|\varphi_k| \leq \Delta\varphi/2$ mit

$$\Delta\varphi \equiv \arccos \left(-\frac{\rho_0}{\rho_1} \exp \left(\frac{\tilde{\lambda}}{2} \tilde{\omega}^2 \right) \right) \quad (3.85)$$

sind die mittleren Steigungsparameter $\bar{\rho}_k$ positiv und die Kapsel taumelt an der entsprechenden Weiche, während eine Schwingbewegung an allen anderen Weichen auftritt. Dieses Verhalten ist in den Abbildungen 3.15 und 3.16 dargestellt, in denen die äquidistanten Phasen φ_k als Punkte $\exp(2i\varphi_k)$ auf dem Kreis S^1 (modulo π) interpretiert werden. Der Kreis S^1 besteht also aus einem Bogen mit Länge $\Delta\varphi$, der den Taumelbewegungen zugeordnet ist, und einem komplementären Bogen der Länge $\pi - \Delta\varphi$, der den Schwingbewegungen entspricht. Eine Phase φ_k der Weiche (Σ_k, Δ_k) gehört entweder zum Taumel- oder zum Schwingbogen. Zählt man den Anteil der Phasen innerhalb beider Bögen, erhält man explizit die mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$. Hierzu werden irrationale und rationale Frequenzen unterschieden.

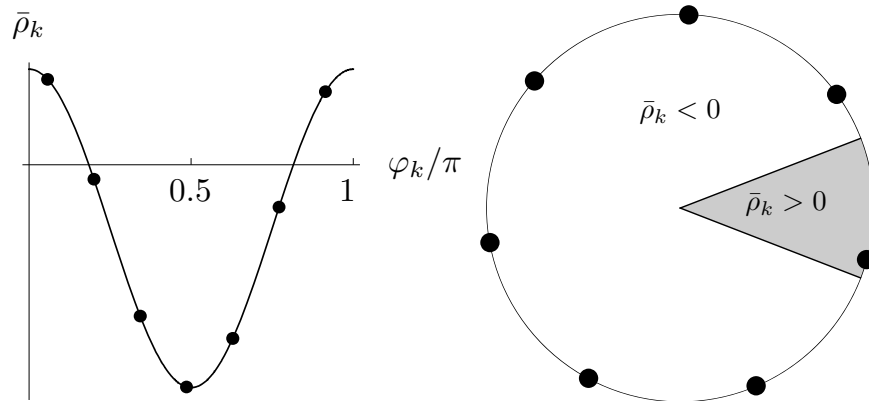


Abbildung 3.16: Links: Mittlerer Steigungsparameter $\bar{\rho}_k$ als Funktion der Phase φ_k für $\rho_0 < 0$ und rationaler Frequenz $\tilde{\omega}$. Rechts: Entsprechende Abfolge der Phasen φ_k dargestellt als Punkte, auf denen $\bar{\rho}_k(\varphi_k)$ positiv bzw. negativ ist. Positive Werte $\bar{\rho}_k > 0$ gehören zum Täumelbogen, negative Werte $\bar{\rho}_k < 0$ zum Schwingbogen.

- Für irrationale Frequenzen $\tilde{\omega}$ liegen die Punkte der Phasen $\varphi_k = \varphi_0 + k\pi\tilde{\omega}$ dicht auf dem Kreis S^1 , siehe Abb. 3.15, oben. Das Verhältnis der Anzahl an Täumelbewegungen zur Anzahl an Schwingbewegungen im Langzeitlimes ist durch das Verhältnis der Bogenlängen $\Delta\varphi$ und $\pi - \Delta\varphi$ gegeben, was zur mittleren Täumelrate

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = \frac{\Delta}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \left(-\frac{\rho_0}{\rho_1} \exp \left(\frac{\tilde{\lambda}}{2} \tilde{\omega}^2 \right) \right) \quad (3.86)$$

führt. Im Grenzfall niedriger Frequenzen $\tilde{\omega} \ll 1/\sqrt{\tilde{\lambda}}$ wird die Täumelrate konstant

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n \approx \arccos(-\rho_0/\rho_1)/\pi. \quad (3.87)$$

- Für rationale Frequenzen $\tilde{\omega} = p/q$ mit ganzzahligen und teilerfremden Zahlen p und q liegen die Punkte der Phasen $\varphi_k = \varphi_0 + k\pi\tilde{\omega} = \varphi_0 + kp\pi/q$ auf den q äquidistanten Punkten der Phasen $\varphi_0 + j\pi/q$ mit $j = 0, 1, \dots, q-1$, siehe Abb. 3.15, unten. Im Langzeitlimes werden alle q Punkte gleich oft besucht, so dass das Verhältnis von Täumel- zu Schwingbewegungen durch das Verhältnis der Anzahl der Punkte, die im Täumelbogen liegen, zur Anzahl der Punkte, die im Schwingbogen liegen, gegeben ist.

Für große Nenner q liegen näherungsweise $q\Delta\varphi/\pi$ Punkte im Täumelbogen und $q(\pi - \Delta\varphi)/\pi$ im Schwingbogen. Dann ist die mittlere Täumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ näherungsweise durch den Wert des irrationalen Falles (3.86) gegeben.

Für kleine Nenner q hängt die Anzahl der Punkte, die in den beiden Kreisbögen liegen von der Anfangsphase ab. Beispielsweise liefert eine ganzzahlige Frequenz $\tilde{\omega} = p$ in Abhängigkeit von der Anfangsphase φ_0 eine Täumelrate von entweder $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$ oder $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$. Zählt man für beliebige rationale Frequenz die Phasen $\varphi_k \leq |\Delta\varphi|/2$ im Täumelbogen, erhält man die Täumelrate

$$\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = \frac{1}{q} \left[\frac{q}{\pi} \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \varphi_0 \right) \right] + \frac{1}{q} \left[\frac{q}{\pi} \left(\frac{\Delta\varphi}{2} + \varphi_0 \right) \right], \quad (3.88)$$

wobei $\Delta\varphi$ durch (3.85) gegeben ist. Die Gauß-Klammer $[x]$ ergibt die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, während die Gauß-Klammer $\lceil x \rceil$ als Ergebnis die kleinste ganze Zahl liefert, die nicht kleiner als x ist.

In den Abbildungen 3.12 und 3.13 sind dem glatten Hintergrund der Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$, der zu den irrationalen Frequenzen gehört, Resonanzspitzen überlagert, die aus den rationalen Frequenzen folgen. Die Amplituden der Spitzen hängen vom Nenner q und von der Anfangsphase φ_0 ab. Für ganzzahlige Frequenzen gehen die Spitzen entweder ganz auf 0 oder ganz zu 1.

Aus dem diskreten Modell folgt, dass im Langzeitlimes die Spitzen bei rationalen Frequenzen unendlich dünn werden. Weil aber Experimente und numerische Methoden nur eine endliche Zeit laufen, werden die Breiten der Spitzen endlich. Die Breite der größten Spitzen bei den ganzzahligen Frequenzen kann dabei wie folgt abgeschätzt werden. Sei

$$\tilde{\omega} \equiv p + \delta\tilde{\omega} \quad (3.89)$$

eine Frequenz nahe der Spitze bei $\tilde{\omega} = p$. Bei einer Anfangsphase $\varphi_0 = 0$ taumelt ($\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$) die Kapsel für $\tilde{\omega} = 1$ bzw. $\delta\tilde{\omega} = 0$, weil die Phasen konstant bleiben ($\varphi_k = 0$). In allen anderen Fällen $\delta\tilde{\omega} \neq 0$ lautet die k -te Phase $\varphi_k = k\pi\delta\tilde{\omega} = \Sigma_k\delta\tilde{\omega}$ modulo π . Ändert sich diese Phase während der experimentellen oder numerischen Laufzeit Σ_f um nicht mehr als die Breite des Taumelbogens $\Delta\varphi$, verlässt das System den Taumelbereich nicht. Daher lässt sich die Breite der ganzzahligen Spitzen durch den Ausdruck

$$\Delta\tilde{\omega} \simeq \frac{\Delta\varphi}{\Sigma_f} = \frac{1}{\Sigma_f} \arccos \left(-\frac{\rho_0}{\rho_1} \exp \left(\frac{\tilde{\lambda}}{2} \tilde{\omega}^2 \right) \right) \quad (3.90)$$

abschätzen. Dieses Ergebnis wird in Abbildung 3.17 bestätigt, in welcher die numerisch bestimmte Breite mit dem analytischen Resultat (3.90) für verschiedene Amplituden ρ_1 verglichen werden. Für die numerischen Werte wird die Breite $\Delta\tilde{\omega}$ der Spitze durch das Intervall definiert, in dem die Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ größer als 0,999 ist. Die Übereinstimmung ist exzellent.

3.4.4 Dynamisches Phasendiagramm

Die Ergebnisse werden in einem dynamischen Phasendiagramm zusammengefasst. Auch wenn die spezielle Form des Phasendiagramms von der funktionalen Zeitabhängigkeit der Scherrate abhängt, zeigen sich stets die gleichen Hauptmerkmale für jede beliebige oszillierende inverse Scherrate

$$\tilde{\chi}^{-1}(\tau) \equiv \tilde{\chi}_0^{-1} + \tilde{\chi}_1^{-1} b(\tilde{\lambda}\tau) \quad (3.91)$$

(beachte (3.70) mit $\Sigma = \tilde{\lambda}\tau$) mit mittlerer dimensionsloser Scherrate

$$\tilde{\chi}_0^{-1} \equiv 1 + \frac{\rho_0 - 1}{2} \tilde{\lambda} \quad (3.92)$$

und Amplitude

$$\tilde{\chi}_1^{-1} \equiv \frac{\rho_1}{2} \tilde{\lambda}. \quad (3.93)$$

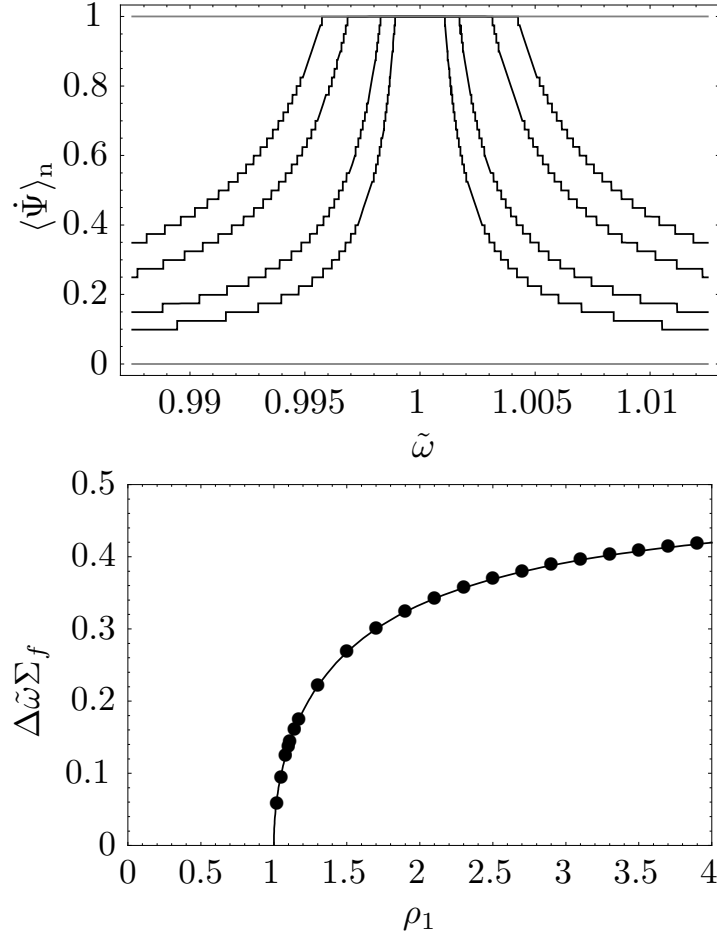


Abbildung 3.17: Oben: Mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ an der Resonanzspitze $\tilde{\omega} = 1$ für verschiedene Amplituden des Steigungsparameters $\rho_1 = 2,0; 1,4; 1,1; 1,04$. Je größer die Amplitude, desto geringer die Breite $\Delta\tilde{\omega}$. Parameterwerte: $\alpha = 0,001\pi$, $\tilde{\lambda} = 0,01$, $\rho_0 = -1$, $\Sigma_f = 40\pi$, $\varphi_0 = 0$. Unten: Aus $\tilde{\omega} > 0,999$ numerisch bestimmte Breiten $\Delta\tilde{\omega}$ (Punkte) der Resonanzspitzen $\tilde{\omega} = 1$ für verschiedene Amplituden und analytisch bestimmte Breite aus Gleichung (3.90). Übrige Parameter wie oben.

Aus der Untersuchung zur zeitlich konstanten Scherrate ist die Lage der Phasengrenze (3.66) bekannt

$$\tilde{\chi}_c^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\tilde{\lambda}. \quad (3.94)$$

In Abbildung 3.18 wird die mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ als Grauskala in Abhängigkeit von Frequenz $\tilde{\omega} = \omega/(4\dot{\gamma}_0)$ (gemessen in Einheiten der Scherrate) und Amplitude $\tilde{\chi}_1^{-1}$ gezeigt, wobei die Amplitude auf die Abweichung der mittleren inversen Scherrate von der Phasengrenze $|\tilde{\chi}_0^{-1} - \tilde{\chi}_c^{-1}|$ normiert wird. Der Grauton gibt die Taumelrate für endliche Simulationszeiten an, wobei der Grauton für steigende Taumelrate heller wird. In Abbildung 3.18 liegt die mittlere Scherrate im Schwingbereich ($\tilde{\chi}_0^{-1} < \tilde{\chi}_c^{-1}$). Man erkennt direkt, dass im Bereich $\tilde{\chi}_1^{-1} < \tilde{\chi}_c^{-1} - \tilde{\chi}_0^{-1}$ die Kapsel nie taumelt (schwarzer Bereich). Die instantane Scherrate muss mindestens die Phasengrenze (weiße Kurve) übertreten, um eine Taumelbewegung induzieren zu können. Für größere Frequenzen wächst die Grenze auf

$$\tilde{\chi}_{1,c}^{-1} \equiv |\tilde{\chi}_0^{-1} - \tilde{\chi}_c^{-1}| \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}\omega^2}{32\dot{\gamma}_0^2}\right) \quad (3.95)$$

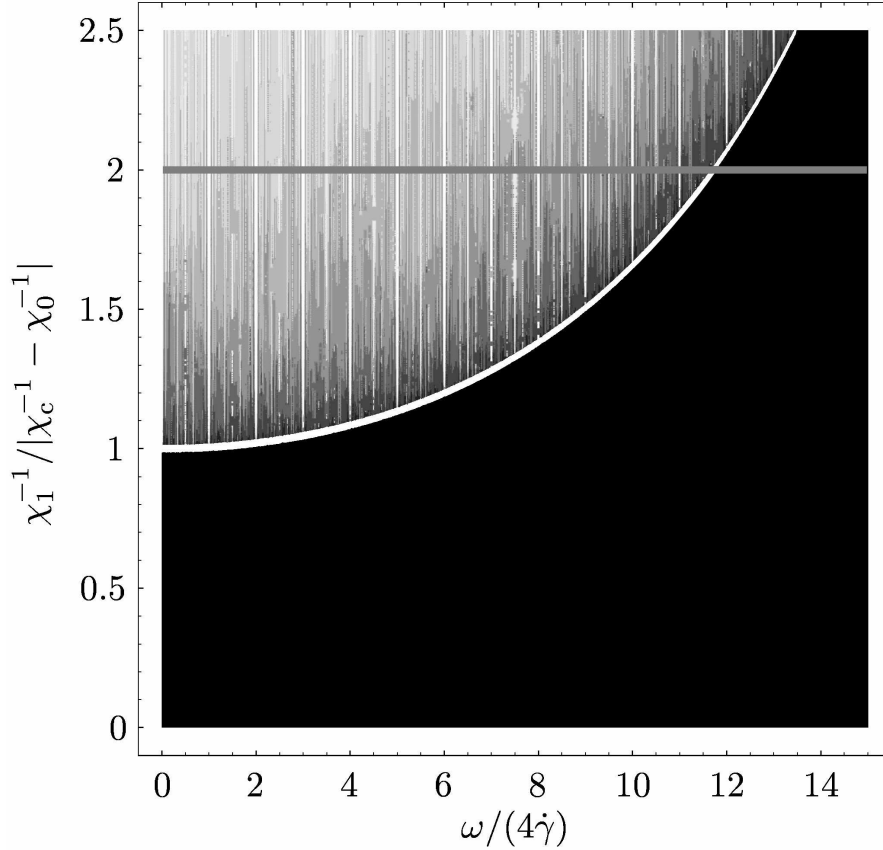


Abbildung 3.18: Dynamisches Phasendiagramm als Funktion der Frequenz $\tilde{\omega} = \omega/(4\dot{\gamma}_0)$ (gemessen in Einheiten der Scherrate) und als Funktion der Oszillationsamplitude χ^{-1} (bezogen auf den Abstand $|\tilde{\chi}_0^{-1} - \tilde{\chi}_c^{-1}|$ zur Phasengrenze). Die Taumelrate ist durch Grautöne dargestellt und dient als Ordnungsparameter, wobei schwarz Taumeln und weiß Schwingen kennzeichnet. Taumeln ist erst oberhalb der Grenze möglich, die durch die über (3.95) bestimmte weiße Kurve visualisiert ist.

an. Oberhalb dieser Grenze wächst die Taumelrate im irrationalen Frequenzhintergrund stetig mit wachsender Amplitude an. Die Taumelrate an den Resonanzfrequenzen erreicht die durch (3.88) gegebenen Werte.

3.4.5 Allgemeine Oszillationen

Zur Vollständigkeit sei noch erwähnt, wie für einen beliebigen periodischen Steigungsparameter (3.70)

$$\rho(\Sigma) = \rho_0 + \rho_1 b(\Sigma) \tag{3.96}$$

vorgegangen wird. Der oszillierende Anteil $b(\Sigma)$ kann eindeutig in eine Fourier-Reihe

$$b(\Sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cos(2(j\tilde{\omega}\Sigma + \nu_j)) \tag{3.97}$$

zerlegt werden. In diesem Fall ist die Folge der über die Weichen gemittelten Phasen ebenfalls analytisch berechenbar, jedoch durch eine Reihe

$$\bar{\rho}_k = \rho_0 + \rho_1 \sum_{j=1}^{\infty} b_j \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{2} j^2 \tilde{\omega}^2\right) \cos(2(j\tilde{\omega}k\Sigma + \nu_j)) \tag{3.98}$$

gegeben, aus der man erkennen kann, dass die Fourier-Koeffizienten exponentiell mit steigender Modenzahl j durch den Faktor $\exp(-\tilde{\lambda}j^2\tilde{\omega}^2/2)$ gedämpft sind.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden im quasisphärischen Grenzfall die Bewegungsgleichungen der Kapsel im reduzierten Modell für konstanten Viskositätskontrast analytisch untersucht. In niedrigster Ordnung der Exzentrizität wurden stabile und instabile Fixpunkte bestimmt, die in erster Ordnung zu Grenzyklen führen, die abhängig vom Wert der Scherrate entweder zu einer Taumel- oder einer Schwingbewegung gehören. Nahe der Phasengrenze wurden die Bewegungsgleichung bis in erster Ordnung der Exzentrizität entwickelt. Durch jeweiliges Lösen dieser Gleichungen in verschiedenen Gebieten des Phasenraumes konnten die Trajektorien analytisch bestimmt werden. Zu den Gebieten gehören ein Gebiet um die stabilen Fixpunkte, in dem die Dynamik langsam läuft, und ein Gebiet um die neutralen Fixpunkte, innerhalb dessen die Kapsel schnell relaxiert. Zwischen beiden Gebieten befindet sich die Weichenregion, die von der Scherrate gesteuert wird und die die Kapsel entweder über eine Schwing- oder eine Taumelbewegung relaxieren lässt. Die Einzellösungen innerhalb der Gebiete konnten asymptotisch angepasst werden, woraus analytische Lösungen der Taumel- und Schwingtrajektorien erhalten wurden. Als zentrales Resultat innerhalb einer zeitlich konstanten Scherrate konnte das Phasenverhalten einer quasisphärischen Kapsel innerhalb des reduzierten Modells vollständig verstanden werden, wobei auch die Phasengrenze zwischen Taumeln und Schwingen in erster Ordnung in der Exzentrizität berechnet wurden.

Anschließend wurden die Ergebnisse auf den Fall einer zeitlich sich ändernden Scherrate übertragen. Auch hier konnten die Bewegungsgleichungen analytisch in den einzelnen Gebieten bestimmt und asymptotisch angepasst werden. Erneut steuert die Weichenregion, ob die Kapsel eine einzelne Taumel- oder eine einzelne Schwingbewegung ausübt. Diesmal wird die Weiche jedoch von einer zeitlich gemittelten Scherrate gestellt, wobei die Mittelung über die Weichenregion mit einer Gauß-förmigen Dichte erfolgt. Daher konnte die kontinuierliche Dynamik auf ein diskretes Modell abgebildet werden, das für alle zeitabhängigen Flüsse gültig ist. Das allgemeine Ergebnis wurde daraufhin auf eine harmonisch modulierte inverse Scherrate mit positivem mittleren Wert angewendet und ein dynamisches Phasendiagramm in Abhängigkeit von Frequenz und Amplitude explizit konstruiert. Weil die Dynamik nur von den Werten der gemittelten Scherraten zu bestimmten diskreten Zeiten abhängt, zeigt das System ein ausgeprägtes Resonanzverhalten. Durch Wahl geeigneter Modulationsfrequenzen können Taumelbewegungen bei Kapseln induziert werden, die ohne Modulationen ausschließlich Schwingbewegungen ausüben würden. Für die Breite der Resonanzspitzen konnte für endliche Laufzeiten ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden. Ebenso konnte für die mittlere Taumelrate bei nicht resonanten Frequenzen ein analytischer Ausdruck gefunden werden, der über einer Grenzfrequenz verschwindet. Durchweg konnte zwischen den analytischen Ergebnissen und den aus den Bewegungsgleichungen numerisch bestimmten Ergebnissen eine sehr gute Übereinstimmung gefunden werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass im Rahmen des reduzierten Modells die Bewegung quasisphärischer Kapseln im zeitlich sich ändernden Scherfluss analytisch vollständig verstanden ist. Dabei konnten im quasisphärischen Grenzfall die Bewegungsgleichungen im zeitlich konstanten Scherfluss analytisch gelöst werden, für die es zuvor nur numerische Lösungen gab.

4 Spektralmethode zur numerischen Lösung der Kapseldynamik

4.1 Allgemeines Modell einer Kapsel im Scherfluss

Um sowohl quantitative Ergebnisse über asymptotische Grenzfälle hinaus zu erhalten als auch die Gültigkeit des reduzierten Modells aus Kapitel 3 zu überprüfen, müssen numerische Methoden verwendet werden. Deshalb wird in diesem Unterkapitel eine Spektralmethode entwickelt, die die volle Dynamik einer elastischen Kapsel mit beliebiger Referenzmembran und beliebigem Konstitutivgesetz durch Angabe der Energie H^{num} in einem beliebigen äußeren Fluss \mathbf{v}^∞ numerisch bestimmen kann. Wie in dieser Arbeit üblich und in Abbildung 4.1 dargestellt, bezeichnen \mathbf{v}^i und \mathbf{v}^o die Geschwindigkeiten und η^i und η^o die Viskositäten der inneren und äußeren Flüssigkeiten.

Der Vorteil einer Spektralmethode gegenüber anderen Methoden liegt darin, dass die Ableitungen analytisch bekannt sind und die entwickelten Funktionen glatt sind sowie mit steigender Modenzahl rasch konvergieren [70]. Im Vergleich hierzu treten insbesondere bei Oberflächenintegral-Methoden, bei denen die Membran trianguliert wird, schnell Instabilitäten auf [71, 30]. Die Spektralmethode unterliegt jedoch folgenden Begrenzungen. Sie ist im Vergleich zu anderen Verfahren in ihrer Flexibilität insofern eingeschränkt, als dass es methodisch schwierig ist, mehrere Kapseln gleichzeitig zu untersuchen oder beliebige Kapselgeometrien und Wände zu implementieren, weil die Zahl der Moden nicht sinnvoll beschränkt werden kann. Für die in dieser Arbeit untersuchte Problemstellung einer ellipsoidalen Kapsel im unbeschränkten Fluss genügen wenige Moden, so dass die Spektralmethode ideal geeignet ist.

Im folgenden Unterkapitel 4.2 wird zunächst die entwickelte Spektralmethode vorgestellt, die anschließend auf die spezifische Problemstellung einer ellipsoidalen Kapsel im Scherfluss angewendet wird (Unterkapitel 4.3). Die Ergebnisse werden in Unterkapitel 4.4 zusammengefasst, wobei es hier zu einer Diskrepanz zum reduzierten Modell kommt, die in der Zusammenfassung (Unterkapitel 4.5) diskutiert wird.

4.2 Spektralmethode

Bevor in den weiteren Abschnitten auf technische Details der Methode eingegangen wird, folgt an dieser Stelle eine Übersicht über die Methode und die genaue Vorgehensweise. In der hier vorgestellten Spektralmethode [72, 57] werden sowohl die Formen von Membran und Referenzmembran als auch die Geschwindigkeits- und Druckfelder der beiden Flüsse jeweils in einer geeigneten Basis entwickelt, wobei die Anzahl der Basisfunktionen (bzw. Moden) bei der numerischen Implementierung endlich gehalten werden muss. Als Basisfunktionen für die kartesischen Koordinaten der Membranform dienen die skalaren Kugelflächenfunktionen, die im nächsten Abschnitt 4.2.1 definiert werden. Das Druckfeld wird ebenso in skalare Kugelflächenfunktionen, das Geschwindigkeitsfeld hingegen in Lamb-Moden entwickelt, deren Winkelanteile durch entsprechende Kombinationen von Vektorkugelflächenfunktionen gegeben sind.

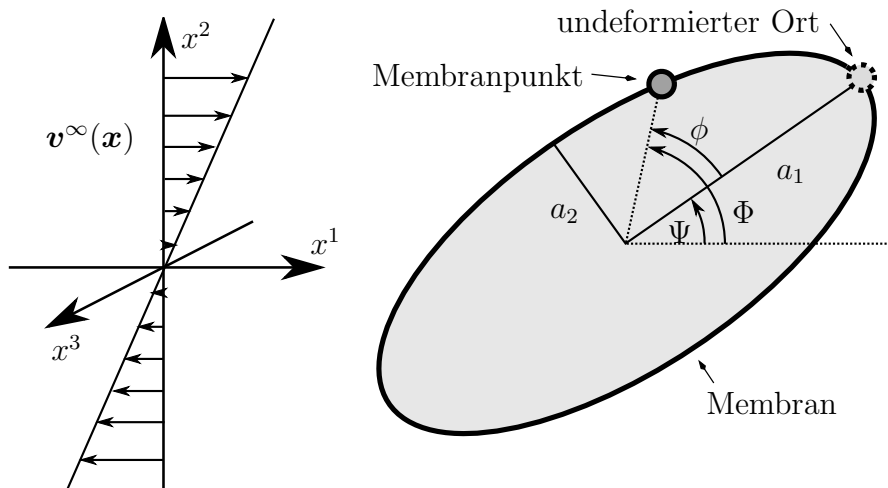


Abbildung 4.1: Schnitt einer elastischen ellipsoidalen Kapsel (rechts) mit der Scherebene eines Scherflusses (links). Neben Anstellwinkel Ψ sind die Achsen $a_{1,2}$ eingezeichnet. Der Ort des Membranpunktes, dessen undeformierte Position auf der langen Halbachse a_1 liegt, definiert die beiden Phasenwinkel ϕ und Φ .

Die Lamb-Moden und die Vektorkugelflächenfunktionen werden ebenfalls im folgenden Abschnitt 4.2.1 definiert.

Aus der aktuellen Membranform zur Zeit t , gegeben durch die Positionen diskreter Membranpunkte (Abschnitt 4.2.2), werden mit Hilfe der Referenzmembran und des Konstitutivgesetzes die elastischen Kräfte berechnet (siehe Abbildung 4.2, Abschnitt 4.2.3). Hierbei erfolgt das Differenzieren der kartesischen Formkomponenten im Spektralraum mit sehr hoher Genauigkeit. Alle weiteren geometrischen und differentialgeometrischen Größen werden im Ortsraum an den Diskretisierungsstellen bestimmt. Im hydrodynamischen Abschnitt 4.2.4 werden Geschwindigkeit und Druck der inneren und der äußeren Flüssigkeit in Lamb-Moden bzw. in skalare Kugelflächenfunktionen mit zunächst noch unbekanntem Koeffizienten bis zur vorgegebenen Bandbreite entwickelt. Der gesamte Fluss wird dabei in den angelegten äußeren Fluss und einen durch die Anwesenheit der Kapsel induzierten Fluss aufgespalten. Da die Lamb-Moden automatisch die Stokes-Gleichungen erfüllen, folgen die Moden direkt aus den Randbedingungen. Das Verschwinden des induzierten Flusses im Unendlichen wird direkt durch eine spezielle Auswahl der Lamb-Moden erreicht. Die übrigen Randbedingungen, also Kräftebilanz aus elastischer und hydrodynamischer Kraft und die Stetigkeit der Geschwindigkeit an den Diskretisierungsstellen auf der Membran, ergeben ein lineares Gleichungssystem für die noch unbekanntem Entwicklungskoeffizienten. Die Lösung dieses Systems ausgewertet auf der Membran liefert schließlich die Advektionsgeschwindigkeit der Membran. Über einen expliziten Eulerschritt erhält man die Membranform zum nächsten diskreten Zeitpunkt (Abschnitt 4.2.5). Eine Iteration dieser Schritte liefert schließlich die diskrete zeitliche Dynamik der Membran.

4.2.1 Modenentwicklung

Der Vollständigkeit halber werden zunächst die verwendeten Basisfunktionen definiert. Es handelt sich hierbei um die skalaren Kugelflächenfunktionen, die Vektorkugelflächenfunktionen und die Lamb-Moden. Über die kartesischen Koordinaten x^i mit Basisvektoren e_i eines festen

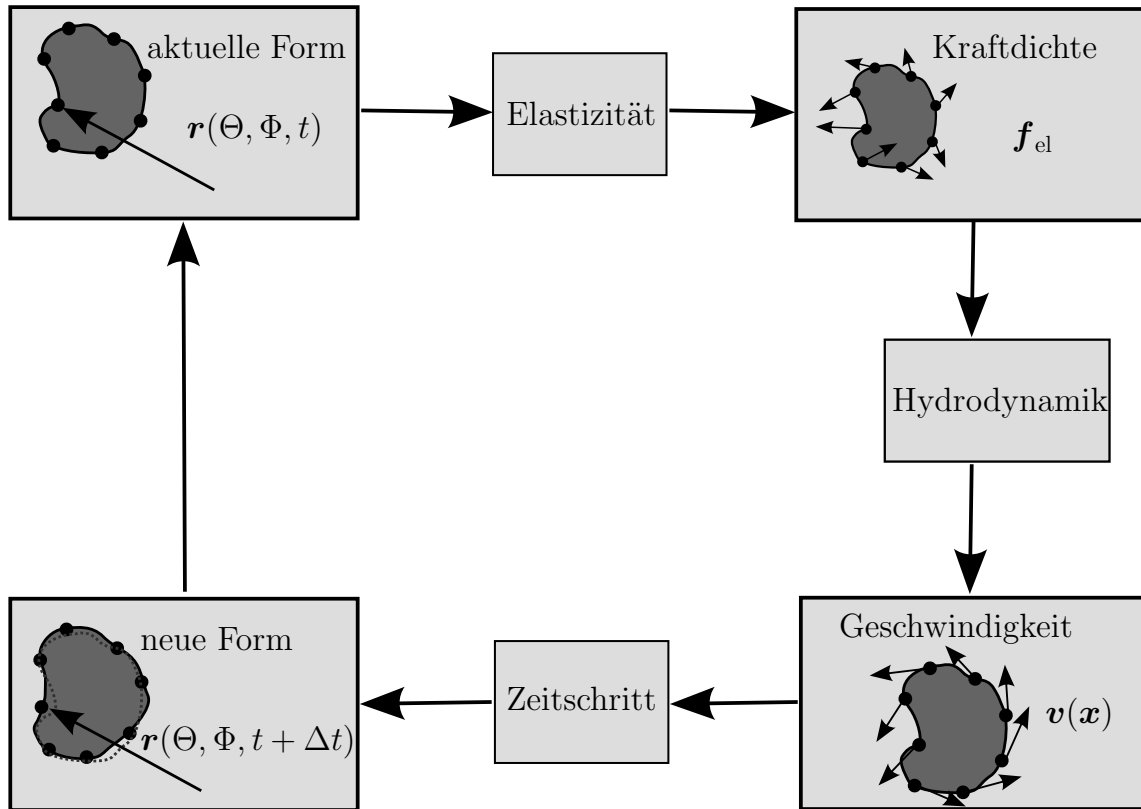


Abbildung 4.2: Fahrplan der Spektralmethode: Aus der aktuellen Form $\mathbf{r}(\Theta, \Phi, t)$ wird mit Hilfe von Basisfunktionen im elastischen Abschnitt die Kraftdichte \mathbf{f}_{el} auf der Membran berechnet, die im hydrodynamischen Abschnitt über die Kräftebilanz an der Membran in eine Randbedingung eingeht. Mit Hilfe der Lamb-Moden, die die Stokes-Gleichungen erfüllen, folgt aus den Randbedingungen die Advektionsgeschwindigkeit der Membranpunkte. Eine zeitlich diskrete Integration liefert die Membranform einen Zeitschritt Δt später. Iteration dieses Verfahrens liefert schließlich die Dynamik der Membran.

Koordinatensystemen lassen sich zunächst Kugelkoordinaten r , ϑ und φ durch

$$x^1 \equiv r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (4.1)$$

$$x^2 \equiv r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (4.2)$$

$$x^3 \equiv r \cos \vartheta. \quad (4.3)$$

und sphärische Basisvektoren \mathbf{e}_α durch

$$\mathbf{e}_r \equiv \partial_r \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) = \partial_r x^i(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_i, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \equiv \frac{1}{r} \partial_\vartheta \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \partial_\vartheta x^i(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_i, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{e}_\varphi \equiv \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi x^i(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_i \quad (4.6)$$

mit $\mathbf{x} \equiv x^i(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_i$ definieren.

Kugelflächenfunktionen

In sphärischer Geometrie bilden die Kugelflächenfunktionen als Winkelanteile der Eigenfunktionen

$$\Delta^S y_{lm} = -l(l+1)y_{lm} \quad (4.7)$$

des Laplace–Beltrami–Operators

$$\Delta^S \equiv \nabla^S \cdot \nabla^S \quad (4.8)$$

mit dem Gradienten auf der Kugel

$$\nabla^S \equiv \mathbf{e}_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi \quad (4.9)$$

eine vollständige Orthonormalbasis auf S^2 , d.h. es gilt

$$\int_{S^2} d\omega y_{lm}^* y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (4.10)$$

Das Flächenelement $d\omega$ auf der Kugel S^2 ist durch

$$d\omega \equiv \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (4.11)$$

gegeben. Die Kugelflächenfunktion für ganzzahlige nicht–negative l und ganzzahlige m mit $|m| \leq l$ können in der Form

$$y_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (4.12)$$

dargestellt werden, wobei die P_{lm} die zugeordneten Legendre–Polynome bezeichnen, die für ganzzahlige nicht–negative l und ganzzahlige nicht–negative m mit $m \leq l$ durch

$$P_{lm}(x) \equiv \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} (\partial_x)^{l+m} (x^2-1)^l \quad (4.13)$$

und für ganzzahlige negative m mit $-l \leq m$ durch

$$P_{lm}(x) \equiv (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_{l,-m}(x) \quad (4.14)$$

gegeben sind.

Für eine beliebige Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ mit

$$f(\vartheta, \varphi) \equiv \sum_{lm} f_{lm} y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (4.15)$$

lauten die Entwicklungskoeffizienten

$$f_{lm} = \int_{S^2} d\omega y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) f(\vartheta, \varphi). \quad (4.16)$$

Aus Notationsgründen werden die Kugelflächenfunktionen auch auf negative Werte von l über die Definition

$$y_{lm} \equiv y_{-(l+1),m} \quad (4.17)$$

erweitert, wobei die Eigenwertgleichung (4.7) für alle ganzzahligen l gilt.

Vektorkugelflächenfunktionen

Eine vollständige Orthonormalbasis von dreidimensionalen Vektorfeldern auf der Kugel ist durch die Vektorkugelflächenfunktionen gegeben, die durch

$$\mathbf{Y}_{0lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv y_{lm}(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \quad (4.18)$$

$$\mathbf{Y}_{1lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla^S y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (l \neq 0, -1), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{Y}_{2lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{e}_r \times \mathbf{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (l \neq 0, -1) \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{e}_r \times \nabla^S y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (4.21)$$

für alle ganzzahligen l definiert sind [73], wobei die Orthonormalität

$$\int_{S^2} d\omega \mathbf{Y}_{slm}^* \cdot \mathbf{Y}_{s'l'm'} = \delta_{ss'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.22)$$

jeweils für $l, l' \geq 0$ und $l, l' < 0$ gilt. Für ein beliebiges dreidimensionales Vektorfeld $\mathbf{v}(\vartheta, \varphi)$ auf der Kugel S^2 mit

$$\mathbf{v}(\vartheta, \varphi) \equiv \sum_{slm} v_{slm} \mathbf{Y}_{slm}(\vartheta, \varphi) \quad (4.23)$$

lauten die Entwicklungskoeffizienten

$$v_{slm} = \int_{S^2} d\omega \mathbf{Y}_{slm}^*(\vartheta, \varphi) \mathbf{v}(\vartheta, \varphi). \quad (4.24)$$

Die radialen Vektorkugelflächenfunktionen \mathbf{Y}_{lm} werden als Biegemoden bezeichnet, wohingegen die tangentialen Vektorkugelflächenfunktionen $\mathbf{\Psi}_{lm}$ und $\mathbf{\Phi}_{lm}$ Streck- und Schermoden genannt werden. Die Bezeichnungen rühren von der Entwicklung einer quasisphärischen Deformation der Kugel her [74].

Lamb-Moden

Die Lamb-Moden [75, 76] bilden in Kugelkoordinaten eine Basis für Geschwindigkeitsfelder, welche die Stokes-Gleichungen erfüllen. Dabei lassen sich ihre Winkelanteile als geeignete Linearkombination der Vektorkugelflächenfunktionen schreiben, während die Radialteile durch Potenzen des Abstandes r gegeben sind. Mit Hilfe der Definitionen der Winkelanteile für alle ganzzahligen $l \neq 0, -1$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{0lm}(\vartheta, \varphi) &\equiv \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) \\ &\equiv \frac{1}{2(l+1)(2l+3)} \left(l(l+1) \mathbf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) + (l+3) \sqrt{l(l+1)} \mathbf{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{V}_{1lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) \equiv l \mathbf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{l(l+1)} \mathbf{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.26)$$

$$\mathbf{V}_{2lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{V}_{lm}^x(\vartheta, \varphi) \equiv -\sqrt{l(l+1)} \mathbf{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (4.27)$$

und für $l = 0, -1$

$$\mathbf{V}_{0lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{0}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{V}_{1lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) \equiv l \mathbf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{V}_{2lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{V}_{lm}^x(\vartheta, \varphi) \equiv \mathbf{0} \quad (4.30)$$

lauten die Entwicklungen des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes mit Viskosität η

$$p(r, \vartheta, \varphi) = \eta \sum_{lm} p_{lm} r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{v}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} \left(p_{lm} r^{l+1} \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) + \phi_{lm} r^{l-1} \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) + \chi_{lm} r^l \mathbf{V}_{lm}^\chi(\vartheta, \varphi) \right) \quad (4.32)$$

mit $p_{-1,0} = \phi_{00} = \chi_{00} = \chi_{-1,0} = 0$. Weil für $l = 0, -1$ nur zwei Moden (konstanter Druck $p_0 \equiv \eta p_{00}/\sqrt{4\pi}$ und radialer Fluss mit Quelle im Ursprung $\phi_0 \equiv -\phi_{-1,0}/\sqrt{4\pi}$) beitragen, ist es günstig, sie abzutrennen, um keine Moden in der Entwicklung aufzusummieren

$$p(r, \vartheta, \varphi) = p_0 + \eta \sum_{l \neq 0, -1; m} p_{lm} r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{v}(r, \vartheta, \varphi) = \phi_0 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) + \sum_{l \neq 0, -1; m} \left(p_{lm} r^{l+1} \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) + \phi_{lm} r^{l-1} \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) + \chi_{lm} r^l \mathbf{V}_{lm}^\chi(\vartheta, \varphi) \right), \quad (4.34)$$

die nicht beitragen. Betrachtet man ein Gebiet um den Ursprung mit am Ursprung regulären Lamb-Moden, genügen die Moden mit $l \geq 1$

$$p(r, \vartheta, \varphi) = p_0 + \eta \sum_{l \geq 1; m} p_{lm} r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.35)$$

$$\mathbf{v}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l \geq 1; m} \left(p_{lm} r^{l+1} \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) + \phi_{lm} r^{l-1} \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) + \chi_{lm} r^l \mathbf{V}_{lm}^\chi(\vartheta, \varphi) \right). \quad (4.36)$$

Betrachtet man dagegen nur Flüsse mit im Unendlichen verschwindender Geschwindigkeit und konstantem Druck und ohne Quelle im Ursprung, so tragen nur die Moden mit $l \leq -2$ bei

$$p(r, \vartheta, \varphi) = p_0 + \eta \sum_{l \leq -2, m} p_{lm} r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.37)$$

$$\mathbf{v}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l \leq -2, m} \left(p_{lm} r^{l+1} \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) + \phi_{lm} r^{l-1} \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) + \chi_{lm} r^l \mathbf{V}_{lm}^\chi(\vartheta, \varphi) \right). \quad (4.38)$$

Wird der ganze Raum mit im Unendlichen verschwindender und im Ursprung regulärer Geschwindigkeit betrachtet, wählt man zunächst ein beliebiges Gebiet, welches den Ursprung umschließt. Innerhalb dieses Gebietes werden Druck und Geschwindigkeit in die Moden mit $l \geq 1$, im komplementären Gebiet hingegen in die Moden mit $l \leq -2$ entwickelt. Beide Anteile werden auf der Zwischenfläche stetig zusammengefügt.

4.2.2 Parametrisierung und Diskretisierung

Als Lagrangesche Koordinaten der Referenzmembran dienen die Kugelkoordinaten $\xi^1 \equiv \Theta$ und $\xi^2 \equiv \Phi$. Aus der gegebenen Parametrisierung $\mathbf{R}(\Theta, \Phi)$ lassen sich einfach alle differentialgeometrischen Größen analytisch bestimmen. Die kartesischen Komponenten der Membranform $\mathbf{r}(\Theta, \Phi, t)$ zur Zeit t werden in skalare Kugelflächenfunktionen

$$r_i(\Theta, \Phi, t) \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}(\Theta, \Phi, t) = \sum_{lm} r_i^{lm}(t) y_{lm}(\Theta, \Phi) \quad (4.39)$$

entwickelt ($l \geq 0, |m| \leq l$). Eine in Kugelflächenfunktionen entwickelte Funktion

$$f(\Theta, \Phi) = \sum_{lm, l < b} f^{lm} y_{lm}(\Theta, \Phi), \quad (4.40)$$

deren Spektralkoeffizienten f^{lm} für $l \geq b$ verschwinden, heißt bandbreitenbegrenzte Funktion mit Bandbreite b . Für die numerische Implementierung wird eine Bandbreite b gewählt, die die Moden auf die b^2 Moden mit $l < b$ einschränkt, so dass die Dynamik der Kapsel numerisch im Unterraum der bandbreitenbegrenzten Funktionen bestimmt wird. Weil die spektralen Amplituden glatter Funktionen exponentiell mit l abklingen, ist die Spektralmethode schon für kleine Bandbreiten b sehr genau [70].

Um die Koeffizienten f^{lm} einer bandbreitenbegrenzten Funktion f zu bestimmen, werden eine endliche Anzahl n_D von Diskretisierungsstellen $\boldsymbol{\xi}_i \equiv (\Theta_i, \Phi_i)$ mit $i = 1, \dots, n_D$ auf der Membran gewählt, an denen die Funktion f die Werte $f_i \equiv f(\boldsymbol{\xi}_i) = f(\Theta_i, \Phi_i)$ annimmt. Damit es mindestens so viele Diskretisierungsstellen wie unabhängige Moden gibt, muss $n_D \geq 6b^2 - 5$ gewährleistet sein. Die Transformation der spektralen Koeffizienten f^{lm} auf die Funktionswerte f_i an den Diskretisierungsstellen geschieht durch Auswertung der Kugelflächenfunktionen an den Diskretisierungsstellen

$$f_i = \sum_{lm} f^{lm} y_{lm}(\Theta_i, \Phi_i) \equiv \sum_{lm} A_{i,lm} f^{lm}. \quad (4.41)$$

Falls die Transformationsmatrix \mathbf{A} mit Koeffizienten $A_{i,lm}$ invertierbar ist, geschieht die Rücktransformation mit Hilfe der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1}

$$f^{lm} = \sum_i (\mathbf{A}^{-1})^{lm,i} f_i. \quad (4.42)$$

Werden mehr Diskretisierungspunkte als Moden gewählt $n_D > 6b^2 - 5$, existiert zwar die Inverse \mathbf{A}^{-1} nicht, kann aber durch die Moore–Penrose–Pseudoinverse ersetzt werden [77].

4.2.3 Membrankräfte

Metrik und äußere Krümmung beinhalten erste und zweite Ableitungen der Membranform. Der Vorteil spektraler Methoden ist, dass die Ableitungen der Basisfunktionen algebraisch bekannt sind [78, 79] und deshalb das Differenzieren bandbreitenbegrenzter Funktionen mit sehr hoher Genauigkeit erfolgt. Entsprechend einfach können Funktionen über der Kugel integriert werden, indem die Beziehung

$$\int_{S^2} d\omega f(\Theta, \Phi) = \sqrt{4\pi} f^{00} \quad (4.43)$$

verwendet wird.

Sind durch die Transformation in den Spektralraum alle Ableitungen der kartesischen Formfunktionen $r_i(\Theta, \Phi)$ bestimmt worden, können alle weiteren geometrischen Berechnungen im Ortsraum erfolgen. Es ist dann sehr einfach, die elastische Gesamtenergie \mathcal{H} (2.113) einer vorgegebenen Form für beliebige Konstitutivgesetze mit hoher Genauigkeit numerisch zu berechnen. Ähnlich einfach erhält man auch die Variation der Energiedichte für eine vorgegebene Membranform und eine vorgegebene Variation dieser Form [72].

Die elastischen Kräfte \mathbf{f}_{el} an den Diskretisierungspunkten erhält man direkt durch Variation der Gesamtenergie für spezielle Variationen der Form. Wählt man

$$\delta \mathbf{r}(\Theta, \Phi) = \delta \mathbf{r}_i^{lm}(\Theta, \Phi) \equiv -\frac{\sin \Theta}{\sqrt{g(\Theta, \Phi)}} y_{lm}^*(\Theta, \Phi) \mathbf{e}_i \quad (4.44)$$

für $l = 0, \dots, b$, $m = -l, \dots, l$, $i = 1, 2, 3$, so folgt über Variation der Gesamtenergie

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{M}} da \mathbf{f}_{\text{el}} \cdot \delta \mathbf{r}_i^{lm} = \int_{S^2} d\omega \mathbf{f}_{\text{el}} \cdot \mathbf{e}_i y_{lm}^* = f_{\text{el}}^{i,lm}(t) \quad (4.45)$$

die spektrale kartesische Komponente der Kraftdichte $f_{\text{el}}^{i,lm}(t)$. Die Transformation in den Ortsraum liefert schließlich die elastische Kraftdichte an den Diskretisierungsstellen

$$\mathbf{f}_{\text{el}}^j(t) \equiv \mathbf{f}_{\text{el}}(\Theta_j, \Phi_j, t) = \sum_{ilm} f_{\text{el}}^{i,lm}(t) y_{lm}(\Theta_j, \Phi_j) \mathbf{e}_i = \sum_{ilm} A_{j,lm} f_{\text{el}}^{i,lm}(t) \mathbf{e}_i. \quad (4.46)$$

4.2.4 Flussgeschwindigkeit

Es ist günstig, die Aufspaltung des Flusses (2.159)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^\infty + \mathbf{v}^{\text{ind}} \quad (4.47)$$

und des Druckes (2.160)

$$p = p^\infty + p^{\text{ind}} \quad (4.48)$$

in den ungestörten angelegten linearen Scherfluss \mathbf{v}^∞ bzw. p^∞ (2.148) und den durch die Anwesenheit der Kapsel induzierten Fluss \mathbf{v}^{ind} bzw. p^{ind} zu verwenden. Weil der äußere angelegte Fluss bekannt ist, lässt sich für eine durch die Diskretisierungsstellen gegebene Membranform sein hydrodynamischer Kraftanteil $\mathbf{f}_{\text{hyd}}^\infty$ leicht berechnen. Mit Hilfe der elastischen Kraft \mathbf{f}_{el}^i an den Diskretisierungsstellen folgt damit eine effektive elastische Kraft

$$\mathbf{f}_{\text{eff}}^i(t) \equiv \mathbf{f}_{\text{eff}}(\Theta_i, \Phi_i, t) = \mathbf{f}_{\text{el}}^i(t) + \mathbf{f}_{\text{hyd}}^\infty{}^i(t). \quad (4.49)$$

Die induzierten Geschwindigkeits- und Druckfelder der inneren und der äußeren Flüssigkeit werden bis zur Bandbreite b in Lamb-Moden und Kugelflächenfunktionen mit noch unbekanntem Koeffizienten p_{lm}^α , ϕ_{lm}^α und χ_{lm}^α entwickelt. Dabei wird die Regularität am Ursprung und das Verschwinden der induzierten Geschwindigkeit im Unendlichen direkt eingebaut. Es folgen die Ansätze

$$p_i^{\text{ind}}(r, \vartheta, \varphi) = p_0^i + \eta^i \sum_{1 \leq l < b; m} p_{lm}^i r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.50)$$

$$\mathbf{v}_i^{\text{ind}}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{1 \leq l < b; m} \left(p_{lm}^i r^{l+1} \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) + \phi_{lm}^i r^{l-1} \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) + \chi_{lm}^i r^l \mathbf{V}_{lm}^\chi(\vartheta, \varphi) \right) \quad (4.51)$$

für die innere Flüssigkeit und

$$p_o^{\text{ind}}(r, \vartheta, \varphi) = p_0^o + \eta^o \sum_{-b \leq l \leq -2, m} p_{lm}^o r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.52)$$

$$\mathbf{v}_o^{\text{ind}}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{-b \leq l \leq -2, m} \left(p_{lm}^o r^{l+1} \mathbf{V}_{lm}^p(\vartheta, \varphi) + \phi_{lm}^o r^{l-1} \mathbf{V}_{lm}^\phi(\vartheta, \varphi) + \chi_{lm}^o r^l \mathbf{V}_{lm}^\chi(\vartheta, \varphi) \right) \quad (4.53)$$

für die äußere Flüssigkeit. Die zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten $p_{lm}^{i,o} = p_{lm}^{i,o}(t)$, $\phi_{lm}^{i,o} = \phi_{lm}^{i,o}(t)$, $\chi_{lm}^{i,o} = \chi_{lm}^{i,o}(t)$ samt homogener Druckdifferenz

$$\Delta p(t) \equiv p_0^i(t) - p_0^o(t) \quad (4.54)$$

werden durch die Randbedingungen auf der Membran bestimmt, die an den Diskretisierungsstellen ausgewertet werden. Die Stetigkeit der Geschwindigkeiten (*no-slip* Randbedingung) (2.162)

$$\mathbf{v}_i^{\text{ind}}(\mathbf{r}^i(t), t) = \mathbf{v}_o^{\text{ind}}(\mathbf{r}^i(t), t) \quad (4.55)$$

führt auf n_D homogene lineare Gleichungen, die Kräftebilanz

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^{\text{ind } i}(t) = -\mathbf{f}_{\text{eff}}^i(t) \quad (4.56)$$

auf n_D inhomogene lineare Gleichungen für die $6b^2 - 5$ Koeffizienten. Die sechs Moden mit $l = 0, -1$ fehlen mit Ausnahme der Druckdifferenz Δp . Das im Allgemeinen überbestimmte lineare System aus $2n_D$ Gleichungen und $6b^2 - 5$ Unbekannten wird im Sinne des kleinsten Fehlerquadrats (*least square*) gelöst. Mit den dadurch bestimmten Koeffizienten ist das hydrodynamische Problem schließlich numerisch bestimmt.

4.2.5 Advektion und Iteration

Das Geschwindigkeitsfeld, ausgewertet an den Diskretisierungsstellen, gibt direkt die Advektionsgeschwindigkeit der Membran

$$\mathbf{V}^i \equiv \mathbf{V}(\Theta_i, \Phi_i, t) = \mathbf{v}_i^\infty + \mathbf{v}_i^{\text{ind}} \equiv \mathbf{v}^\infty(r(\Theta_i, \Phi_i, t), t) + \mathbf{v}_i^{\text{ind}}. \quad (4.57)$$

Über einen expliziten Eulerschritt

$$\mathbf{r}^i(t + \Delta t) \equiv \mathbf{r}^i(t) + \mathbf{V}^i \Delta t \quad (4.58)$$

oder entsprechende Methoden höherer Ordnung, wie beispielsweise Runge–Kutta–Verfahren, erhält man die Membranform einen Zeitschritt Δt später. Iteration des Verfahrens beginnend zur Zeit $t = 0$ ergibt die Membrandynamik an den diskreten Zeitpunkten $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, d.h. jeweils die Orte der Diskretisierungsstellen $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}(\Theta_i, \Phi_i)$ bzw. die entsprechenden spektralen Moden bis zur Bandbreite b .

4.3 Modell einer ellipsoidalen Kapsel im Scherfluss

Die vorgestellte Spektralmethode wird nun auf eine ellipsoidale Kapsel mit speziellem Konstitutivgesetz (Abschnitt 4.3.1) im linearen Scherfluss (2.149) angewendet. Durch Einführung von Längen-, Zeit- und Energieskalen werden die unabhängigen dimensionslosen Parameter definiert und deren in den Läufen verwendeten Werte und Wertebereiche sowie die Werte der numerischen Parameter aufgelistet (Abschnitt 4.3.2), bevor die für die Dynamik relevanten Freiheitsgrade im Abschnitt 4.3.3 definiert werden. Zuletzt wird die Spektralmethode am Fall einer sphärischen Referenzkapsel getestet, indem die Dynamik mit Ergebnissen aus dem quasisphärischen Grenzfall erfolgreich verglichen wird (Abschnitt 4.3.4).

4.3.1 Spezifisches Konstitutivmodell

Im Unterkapitel 4.3 wird die Dynamik einer elastischen Kapsel mit ellipsoidaler Referenzmembran mit Halbachsen \hat{a}_i (mit $\hat{a}_1 > \hat{a}_2$)

$$\mathbf{R}(\Theta, \Phi) = \hat{a}_1 \sin \Theta \cos \Phi \mathbf{e}_1 + \hat{a}_2 \sin \Theta \sin \Phi \mathbf{e}_2 + \hat{a}_3 \cos \Theta \mathbf{e}_3 \quad (4.59)$$

und dem spezifischen Konstitutivgesetz

$$H^{\text{num}} \equiv \frac{\lambda_L + 2\mu_L}{2} (\text{Sp } \mathbf{E})^2 - 2\mu_L \det \mathbf{E} + J \frac{\kappa}{2} (\text{Sp } \mathbf{k} - C_0)^2 \quad (4.60)$$

bestehend aus der Summe der Energiedichten des Hookeschen Gesetzes (2.135) und der Helfrichschen Krümmungsenergie (2.130) im linearen Scherfluss (2.149)

$$\mathbf{v}^\infty = \dot{\gamma} x^2 \mathbf{e}_1 = \dot{\gamma} y \mathbf{e}_x, \quad p^\infty = 0 \quad (4.61)$$

mit der im vorigen Unterkapitel 4.2 beschriebenen Spektralmethode numerisch bestimmt.

4.3.2 Skalen und Parameter

Die Anzahl freier Parameter kann durch Festlegen folgender Skalen verringert werden. Das Volumen der ellipsoidalen Referenzkapsel V_0 , das aufgrund der Inkompressibilität der inneren Flüssigkeit erhalten bleibt, legt die Längenskala R_0 gemäß Gleichung (2.1) fest. Die Scherelastizität μ_L definiert die Energieskala $\mu_L R_0^2$, während die Zeitskala mit Hilfe der äußeren Viskosität η° durch die viskose Relaxationszeit $R_0 \eta^\circ / \mu_L$ gegeben ist.

Als dimensionslose Größen verbleiben zwei geometrische, drei elastische und zwei hydrodynamische Parameter. Die Form der Kapsel ist durch die beiden Verhältnisse \hat{a}_2/\hat{a}_1 und \hat{a}_3/\hat{a}_1 gegeben. Die zweidimensionale Poissonzahl

$$\nu \equiv \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L}, \quad (4.62)$$

die dimensionslose Biegesteifigkeit

$$\tilde{\kappa} \equiv \frac{\kappa}{\mu_L R_0^2} \quad (4.63)$$

und die dimensionslose spontane Krümmung

$$\tilde{C}_0 \equiv \frac{1}{2} R_0 C_0 \quad (4.64)$$

legen die elastischen Eigenschaften der Membran fest. Die beiden hydrodynamischen Größen spielen im weiteren Verlauf die wichtigste Rolle. Es handelt sich zum einen um den Viskositätskontrast (2.145) $\lambda = \eta^i/\eta^\circ$ und zum anderen um das Verhältnis der elastischen und viskosen Zeitskalen, die durch die Kapillarzahl

$$\chi \equiv \frac{R_0 \eta^\circ}{\mu_L} \dot{\gamma} \quad (4.65)$$

gegeben ist, die im Weiteren auch dimensionslose Scherrate genannt wird.

Die Kapsel startet stets aus der Referenzkapsel, die so orientiert ist, dass die Achse \hat{a}_i in Richtung der Koordinatenachse x^i zeigt. Damit werden die beiden Symmetrien des Scherflusses, Spiegelung an der Scherebene ($x^1 x^2$ -Ebene) und Spiegelung an der x^3 -Achse (Vortizitätsrichtung), auch von der Kapsel erfüllt, und die Symmetrie der Kapsel bleibt unter der Dynamik erhalten.

Die n_D Diskretisierungspunkte werden äquidistant in Θ und Φ mit $n_D = 4b^2$ gewählt, wobei Anfangs- und Endwerte für Θ möglichst weit entfernt von den Polen liegen, um numerische Probleme in den Polregionen zu vermeiden

$$\Theta_i \equiv \Theta_{(j,k)} \equiv \frac{j + \frac{1}{2}}{2b} \pi, \quad (4.66)$$

$$\Phi_i \equiv \Phi_{(j,k)} \equiv \frac{k}{2b} 2\pi \quad (4.67)$$

mit $j, k = 0, 1, \dots, 2b - 1$. Damit gibt es für jede der drei kartesischen Formkomponenten insgesamt b^2 Moden und $n_D = 4b^2$ Diskretisierungspunkte.

Bevor auf Ergebnisse der Simulation eingegangen wird, werden die verwendeten Werte aufgelistet. Die beiden Achsenverhältnisse der ellipsoidalen Referenzmembran sind stets als $\hat{a}_2/\hat{a}_1 = \hat{a}_3/\hat{a}_1 = 0,9$ gewählt. Die elastischen Parameter bestehen aus der zweidimensionalen Poissonzahl $\nu = 0,333$, der dimensionslosen Biegesteifigkeit $\tilde{\kappa} = 0,01$ und der dimensionslosen spontanen Krümmung $\tilde{C}_0 = 1,0$. Die hydrodynamischen Parameter, Viskositätskontrast λ und dimensionslose Scherrate bzw. Kapillanzahl χ , werden über einen großen Bereich variiert. In der Numerik wurde als Bandbreite stets $b = 11$ gewählt, was 121 skalaren Moden und 484 Diskretisierungsstellen entspricht. Die Startmembran stimmt mit der Referenzmembran überein: $a_2/a_1|_{t=0} = a_3/a_1|_{t=0} = 0,9$. Als Zeitschritt wurde ein Wert in der Größenordnung $\Delta t \sim 1/(1000\chi)$ gewählt.

4.3.3 Relevante Freiheitsgrade

In den einfachen Modellen aus Kapitel 3 haben sich Größen wie Anstellwinkel Ψ , Phasenwinkel ϕ und Halbachsen a_i als relevant zur Beschreibung der Kapseldynamik herausgestellt. Es ist *a priori* nicht klar, wie man diese Größen auf beliebige Kapselformen verallgemeinern kann. Eine effektive ellipsoidale Form wird daher definiert, indem eine beliebige Kapsel auf eine ellipsoidale Kapsel mit identischem Trägheitstensor abgebildet wird. Die Richtungen und Längen der Halbachsen dieses abgebildeten Ellipsoids werden entsprechend wie im reduzierten Modell (Kapitel 3) zur Definition des Anstellwinkels Ψ und der Halbachsen a_i verwendet.

Aufgrund der Symmetrie von Scherfluss und Kapsel, steht eine Halbachse a_3 stets senkrecht auf der Scherebene. Die beiden anderen Halbachsen $a_{1,2}$ mit $a_1 \geq a_2$ liegen senkrecht zueinander in der Scherebene. Die Richtung der langen Halbachse a_1 definiert wie im reduzierten Modell den Anstellwinkel Ψ . Der Winkel Φ eines beliebigen Membranpunktes zur Richtung des Scherflusses kann verwendet werden, um über (3.2)

$$\Phi(t) = \Psi(t) + \phi(t) \tag{4.68}$$

den Phasenwinkel ϕ zu definieren. Weil der Phasenwinkel ϕ von Membranpunkt zu Membranpunkt variiert, wird zur Eindeutigkeit entweder ein spezieller Membranpunkt gewählt oder ϕ über die gesamte Membran gemittelt. Die normierte Differenz der langen und kurzen Halbachsen des Ellipsoides in der Scherebene definieren den Taylorschen Deformationsparameter

$$D \equiv \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}. \tag{4.69}$$

Während die Form des Ellipsoides bis auf die Länge der dritten Achse a_3 eindeutig durch den Deformationsparameter D festgelegt ist, ist seine Orientierung im Raum eindeutig durch den Anstellwinkel Ψ gegeben. Die Panzerkettenbewegung der Membran hingegen ist durch den Phasenwinkel ϕ gegeben.

Neben diesen dominanten Freiheitsgraden besitzt die Kapsel natürlich noch weitere Freiheitsgrade, die zum einen dafür sorgen, dass sich die Form von der eines Ellipsoides unterscheidet und zum anderen sich in einer tangentialen Deformation widerspiegeln, die der Panzerkettenbewegung überlagert ist.

4.3.4 Quasisphärischer Testfall einer sphärischen Kapsel

Die Spektralmethode kann im quasisphärischen Grenzfall einer sphärischen Referenzmembran einigen Testfällen unterzogen werden [72]. Eine quasisphärische Kapseldeformation gemäß den

analytisch bestimmten Eigenmoden [74] im ruhenden äußeren Fluss führt auf eine Relaxation der Membran zurück in den sphärischen Zustand. Die Spektralmethode liefert dabei exzellente Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen. Zum einen werden während der Relaxation keine anderen Moden angeregt, so dass es sich tatsächlich um Eigenmoden handelt. Zum anderen stimmen die Relaxationszeiten mit den analytischen Vorhersagen überein. Ein zweiter Testfall untersucht die Kapsel im Scherfluss bei geringer Scherrate. Hier verformt sich die Kapsel quasisphärisch mit linear in $\dot{\gamma}$ anwachsendem Deformationsparameter D bei konstantem Anstellwinkel $\Psi = \pi/4$. Auch hier stimmen Numerik und Analytik bestens überein [72].

4.4 Resultate

Die Ergebnisse der Kapseldynamik innerhalb des speziellen Modells, die mit Hilfe der Spektralmethode gewonnen wurden, werden im Folgenden vorgestellt. Typische Trajektorien der beiden Größen, Anstellwinkel Ψ und Phasenwinkel ϕ , für Taumel-, Schwing- und transiente Bewegungen werden in Abschnitt 4.4.1 gezeigt. Die Ergebnisse der in Abschnitt 4.4.2 definierten Poincaré-Abbildungen bestätigen das transiente Verhalten der Kapsel im Gebiet zwischen Schwing- und Taumelbereich. Das vollständige Phasendiagramm wird schließlich in Abschnitt 4.4.3 gezeigt. Eine kurze Diskussion zur Diskrepanz zwischen transientem Verhalten innerhalb der Spektralmethode und intermittierendem Verhalten innerhalb des reduzierten Modells schließt dieses Unterkapitel ab.

4.4.1 Trajektorien

Trägt man Phasenwinkel $\phi(t)$ und Anstellwinkel $\Psi(t)$ übereinander ab, siehe Abbildung 4.3, lassen sich Taumel- bzw. Schwingbewegungen durch das monotone unbeschränkte Wachsen eines der beiden Winkel und der Oszillation des jeweils anderen Winkels erkennen. Beide Winkel sollen nicht nur die Orientierung auf dem Torus angeben, sondern die insgesamt zurückgelegte Winkelstrecke wiedergeben, um die Anzahl der Umdrehungen zählen zu können. Dies geschieht formal durch Integration über die jeweilige Winkelgeschwindigkeit

$$\Psi(t) = \Psi(0) + \int_0^t dt' \partial_{t'} \Psi(t'), \quad (4.70)$$

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t dt' \partial_{t'} \phi(t'). \quad (4.71)$$

Abbildung 4.3 zeigt parametrische Abbildungen der beiden Winkel für die drei verschiedenen auftretenden Bewegungstypen, wobei der Pfeil die Zeitrichtung angibt. Die Schwingbewegung (Abb. 4.3 a) ist durch einen unbeschränkt wachsenden Phasenwinkel $\phi(t)$ charakterisiert. Hier oszilliert der Anstellwinkel $\Psi(t)$ um einen stationären Wert Ψ_0 mit Amplitude $\Delta\Psi$. Die Taumelbewegung (Abb. 4.3 b) hingegen ist dadurch gekennzeichnet, dass der Anstellwinkel $\Psi(t)$ unbeschränkt wächst, während der Phasenwinkel $\phi(t)$ um einen stationären Wert ϕ_0 mit Amplitude $\Delta\phi$ oszilliert. In den Abbildungen 4.3 c und d ist der Übergang der Taumel- in eine stabile Schwingbewegung zu sehen. Trotz intensiver Suche wurde der umgekehrte Übergang nicht beobachtet. Eine Kapsel, die zunächst Schwingbewegungen ausübt, beginnt nie zu taumeln. Die ursprüngliche Taumelbewegung im Bereich zwischen Taumeln und Schwingen (siehe auch das Phasendiagramm in Abbildung 4.6) scheint daher eine Transiente zu sein. Diese Behauptung wird im nächsten Abschnitt durch Poincaré-Abbildungen unterstützt.

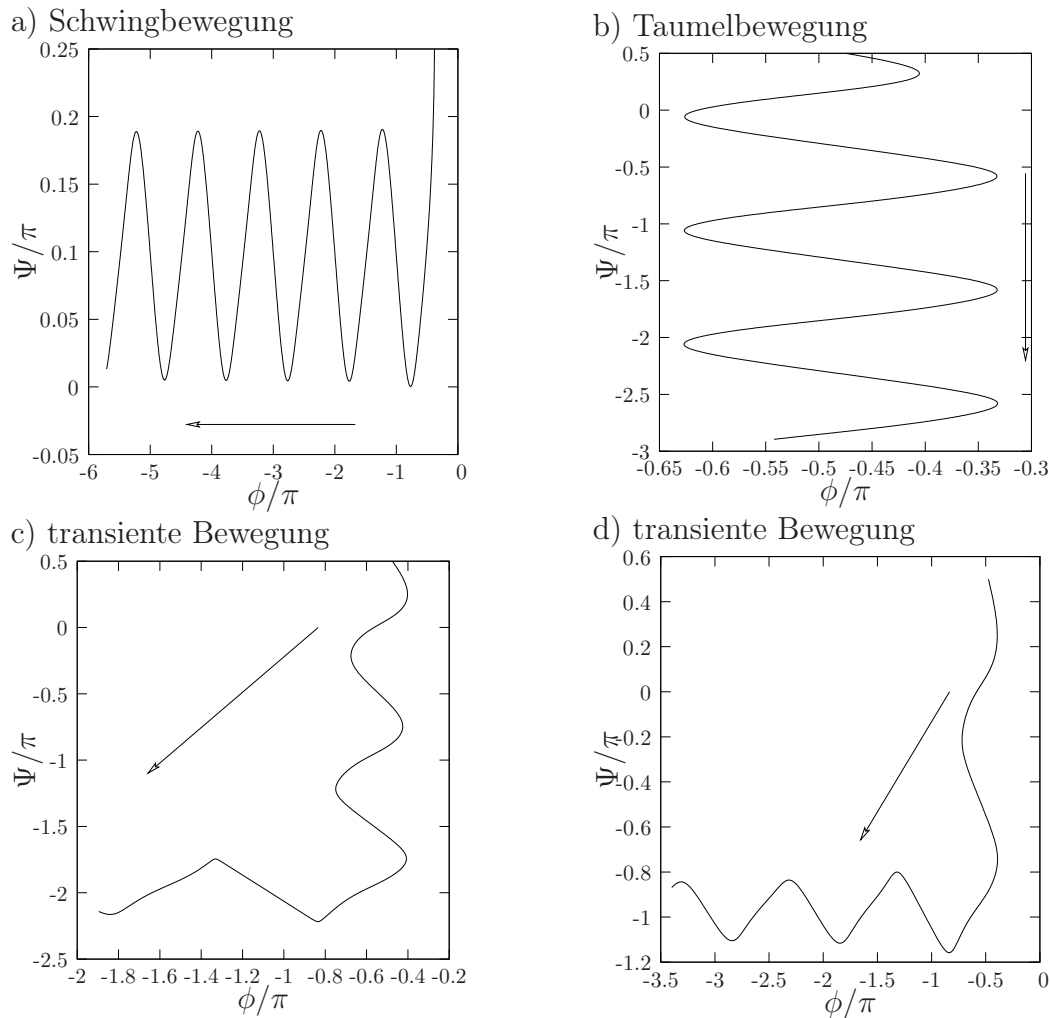


Abbildung 4.3: Typische parametrische Schaubilder des Anstellwinkels Ψ über den Phasenwinkel ϕ für a) Schwing- ($\lambda = 13,3$, $\chi = 0,08$), b) Taumel- ($\lambda = 13,3$, $\chi = 0,025$), c), d) transiente Bewegungen der Kapsel ($\lambda = 23$, $\chi = 0,2$ bzw. $\lambda = 27,5$, $\chi = 0,2$), wobei der Pfeil die Zeitrichtung wiedergibt. Im Phasendiagramm in Abbildung 4.6 sind die entsprechenden Stellen durch a)–d) markiert. Übrige Parameter wie in Abb. 4.6.

Für konstanten Viskositätskontrast $\lambda = 10$ zeigt Abbildung 4.4 die Scherratenabhängigkeit des mittleren Anstellwinkels Ψ_0 im Schwingbereich, des mittleren Phasenwinkels ϕ_0 im Taumelbereich und der entsprechenden Oszillationsamplituden $\Delta\Psi$ bzw. $\Delta\phi$ im jeweiligen Bereich.

Für geringe Scherraten χ taumelt die Kapsel, weil eine vollständige Panzerkettenbewegung energetisch nicht möglich ist. In diesem Taumelbereich sind sowohl der mittlere Phasenwinkel ϕ_0 als auch seine Oszillationsamplitude $\Delta\phi$ als Funktion der dimensionslosen Scherrate χ eingezeichnet. Während der mittlere Phasenwinkel nur schwach von der Scherrate abhängt, wächst die Amplitude des Phasenwinkels mit steigender Scherrate an. Für geringe Scherraten erkennt man dabei über einen großen Bereich einen linearen Anstieg. Bei einer Grenzamplitude von $\pi/2$ findet schließlich der Übergang zur Schwingbewegung statt.

Für hohe Scherraten χ im Schwingbereich sind der mittlere Anstellwinkel Ψ_0 und seine Amplitude $\Delta\Psi$ als Funktion der Scherrate χ dargestellt. Mit fallender Scherrate wächst die Amplitude bis $\pi/2$ an, wo der Übergang zur Taumelbewegung stattfindet. Der mittlere An-

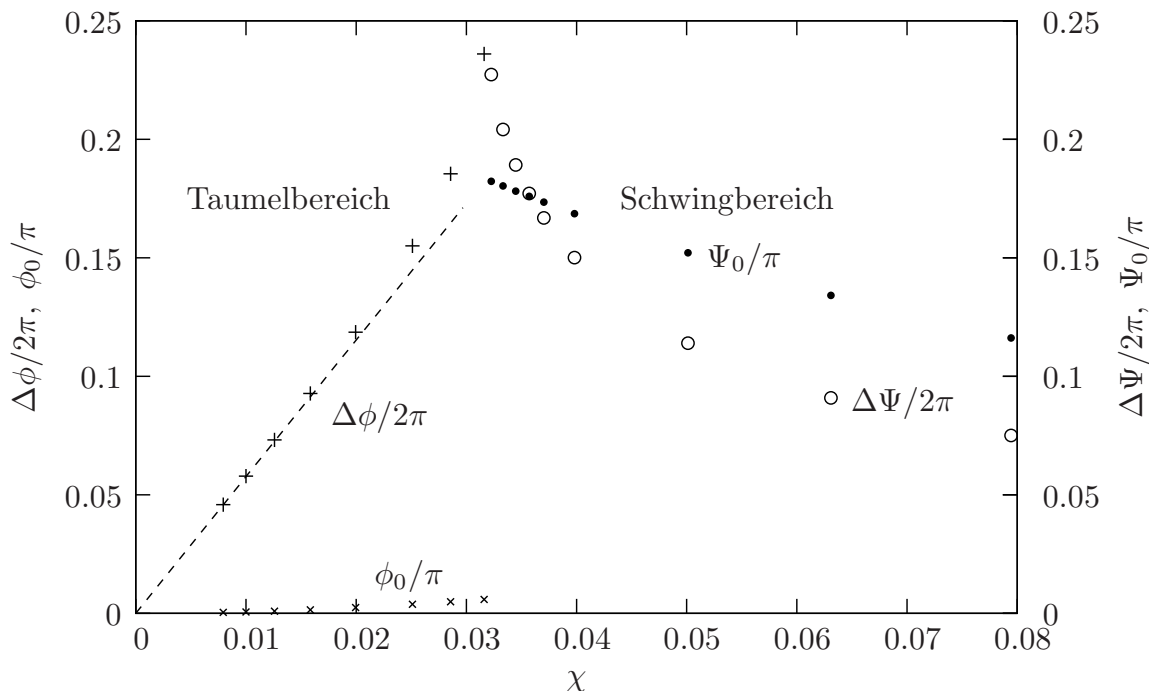


Abbildung 4.4: Mittlerer Phasenwinkel ϕ_0 (kleine Kreuze), mittlerer Anstellwinkel Ψ_0 (kleine gefüllte Kreise) und Oszillationsamplituden des Phasenwinkels $\Delta\phi$ (Plus) sowie des Anstellwinkels $\Delta\Psi$ (Kreise) für verschiedene Scherraten χ und konstantes Viskositätsverhältnis $\lambda = 10$. Dieser Schnitt durch das Phasendiagramm ist in Abb. 4.6 durch eine gepunktete Linie angedeutet. Für geringe Scherraten χ taumelt die Kapsel mit $\Delta\phi < \pi/2$, wobei die gestrichelte Gerade das lineare Verhalten andeutet. Für große Scherraten χ hingegen schwingt die Kapsel mit $\Delta\Psi < \pi/2$. Alle übrigen Parameter tragen Werte wie in Abb. 4.6 aufgelistet.

stellwinkel wächst dabei an, erreicht aber nicht den Wert $\pi/4$. Möglicherweise überraschend wird nahe des Überganges die Oszillationsamplitude größer als der mittlere Anstellwinkel, was bedeutet, dass der Anstellwinkel während jeder Oszillation für eine gewisse Zeit negativ wird.

Der transiente Bereich, der zwischen Schwing- und Taumelbereich liegt, wird innerhalb der numerisch erzielten Genauigkeit erst für einen größeren Viskositätskontrast sichtbar. Er wird im übernächsten Abschnitt 4.4.3 ausführlicher besprochen. Zuvor werden jedoch Poincaré-Abbildungen definiert, die das transiente Verhalten bestätigen.

4.4.2 Poincaré-Abbildungen

Die Analyse der Bewegung mit Hilfe von Poincaré-Abbildungen hilft zusätzlich zwischen den verschiedenen Bewegungsformen zu unterscheiden. Insbesondere liefern die Ergebnisse weitere Indizien, dass die Kapsel im Intermittenzbereich des reduzierten Modells transientes Verhalten zeigt. In Poincaré-Abbildungen werden nur Schnitte des dynamischen Phasenportraits mit einer festen Hyperebene des Phasenraums betrachtet, womit die Zeitvariable eliminiert wird. Angewendet auf das Kapselsystem werden nur die beiden Winkelvariablen, der Anstellwinkel Ψ und der Phasenwinkel ϕ , betrachtet. Alle anderen Freiheitsgrade werden vernachlässigt.

Für jeden Lauf werden die beiden Winkel $\Psi(t)$ und $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t extrahiert, siehe auch Abb. 4.3. Weil beide Winkel 2π -periodisch sind, laufen die so bestimmten Trajektorien auf einem Torus \mathbb{T} , der hier die Rolle eines effektiven Phasenraumes einnimmt. Weil es sich hierbei nur um den Unterraum des gesamten Phasenraumes handelt, können sich die

Trajektorien auf dem Torus schneiden.

Die Poincaré–Abbildung ist nun wie folgt definiert. Zunächst wird eine Abbildung betrachtet, die jedem Punkt P der Trajektorie einen neuen Punkt Q der Trajektorie zuordnet. Die entsprechenden Winkel am Punkt P bzw. Q seien mit (Ψ_P, ϕ_P) bzw. (Ψ_Q, ϕ_Q) , die Zeiten mit t_P bzw. t_Q bezeichnet. Bevor diese Abbildung von P nach Q definiert wird, soll wiederholt werden, dass der Summenwinkel $\Phi = \Psi + \phi$ dem Winkel zwischen der Lage eines Membranpunktes und der Scherflussrichtung entspricht. Aufgrund des Rotationsanteils des Scherflusses wächst bzw. fällt der Winkel Φ monoton und kann daher effektiv als Zeitvariable betrachtet werden. Es wird nun die Kurve durch P mit konstanter Winkelsumme Φ betrachtet. Läuft man entlang der Trajektorie beginnend bei P , ändert sich der Summenwinkel Φ monoton und trifft wegen der Periodizität des Torus schließlich wieder auf die Kurve konstanter Winkelsumme Φ . Dieser erneute Schnittpunkt ist nun der abgebildete Punkt Q . Die Poincaré–Abbildung bildet also den Anstellwinkel Ψ_P des Punktes P auf den Anstellwinkel Ψ_Q des Punktes Q ab: $\Psi_P \mapsto \Psi_Q$. Dabei wird der Wert des Winkels Ψ_Q nicht durch seine Lage auf dem Torus modulo 2π , sondern durch Integration über die Geschwindigkeit des Anstellwinkels aus dem Wert des Winkels Ψ_P bestimmt

$$\Psi_Q \equiv \Psi_P + \int_{t_P}^{t_Q} dt \partial_t \Psi(t), \quad (4.72)$$

um zählen zu können wie oft die Trajektorie sich in Ψ –Richtung um den Torus windet.

Entspräche der Torus dem gesamten Phasenraum, wären Grenzzyklen auf dem Torus durch Fixpunkte der Poincaré–Abbildung $\Psi_Q = \Psi_P$ modulo 2π gegeben. Eine der Poincaré–Abbildung äquivalente Abbildung erhält man über die Differenzabbildung $\Psi_P \mapsto \Psi_Q - \Psi_P$, bei der der ursprüngliche Anstellwinkel abgezogen wird

$$\Psi_P \mapsto \Psi_Q - \Psi_P = \int_{t_P}^{t_Q} dt \partial_t \Psi(t). \quad (4.73)$$

Grenzzyklen auf dem Torus entsprechen hier Abbildungen verschwindender Differenz $\Psi_P \mapsto \Psi_Q - \Psi_P = 0$ modulo 2π . Für jeden Punkt P der Trajektorie ergibt diese Abbildung einen Punkt im Schaubild mit Koordinaten Ψ_P und $\Psi_Q - \Psi_P$. Trägt man alle Punkte der Trajektorie in das Schaubild ein, erhält man schließlich die Poincaré–Schaubilder, die in Abbildung 4.5 zu sehen sind. Der Pfeil gibt dabei erneut die zeitliche Entwicklung an. Für eine reine Schwingbewegung oszilliert der Anstellwinkel, hat aber bei beiden Punkten P und Q ungefähr den gleichen Wert, so dass die Abbildung $\Psi_P \mapsto \Psi_Q - \Psi_P$ näherungsweise verschwindet, siehe Abb. 4.5 a. Während einer Taumelbewegung vollführt hingegen der Anstellwinkel ungefähr eine volle Umdrehung, ändert sich also um etwa 2π , so dass die Abbildung $\Psi_P \mapsto \Psi_Q - \Psi_P$ näherungsweise 2π ergibt, siehe Abb. 4.5 b. Das transiente Verhalten ist in Abbildung 4.5 c zu sehen. Hier relaxiert die Poincaré–Abbildung $\Psi_P \mapsto \Psi_Q - \Psi_P$ von etwa 2π , was Taumeln entspricht, nach 0, was einer Schwingbewegung entspricht, wodurch das transiente Verhalten wiederum belegt wird.

4.4.3 Phasendiagramm

Das Phasendiagramm über einen großen Bereich des Viskositätskontrasts λ und der inversen dimensionslosen Scherrate χ^{-1} ist in Abbildung 4.6 zu sehen. Bei kleinen Scherraten, d.h. großem χ^{-1} vollführt die Kapsel eine Taumelbewegung. Bei hohen Scherraten, d.h. kleinem χ^{-1} und nicht zu großem Viskositätskontrast λ ist hingegen die Schwingbewegung stabil.

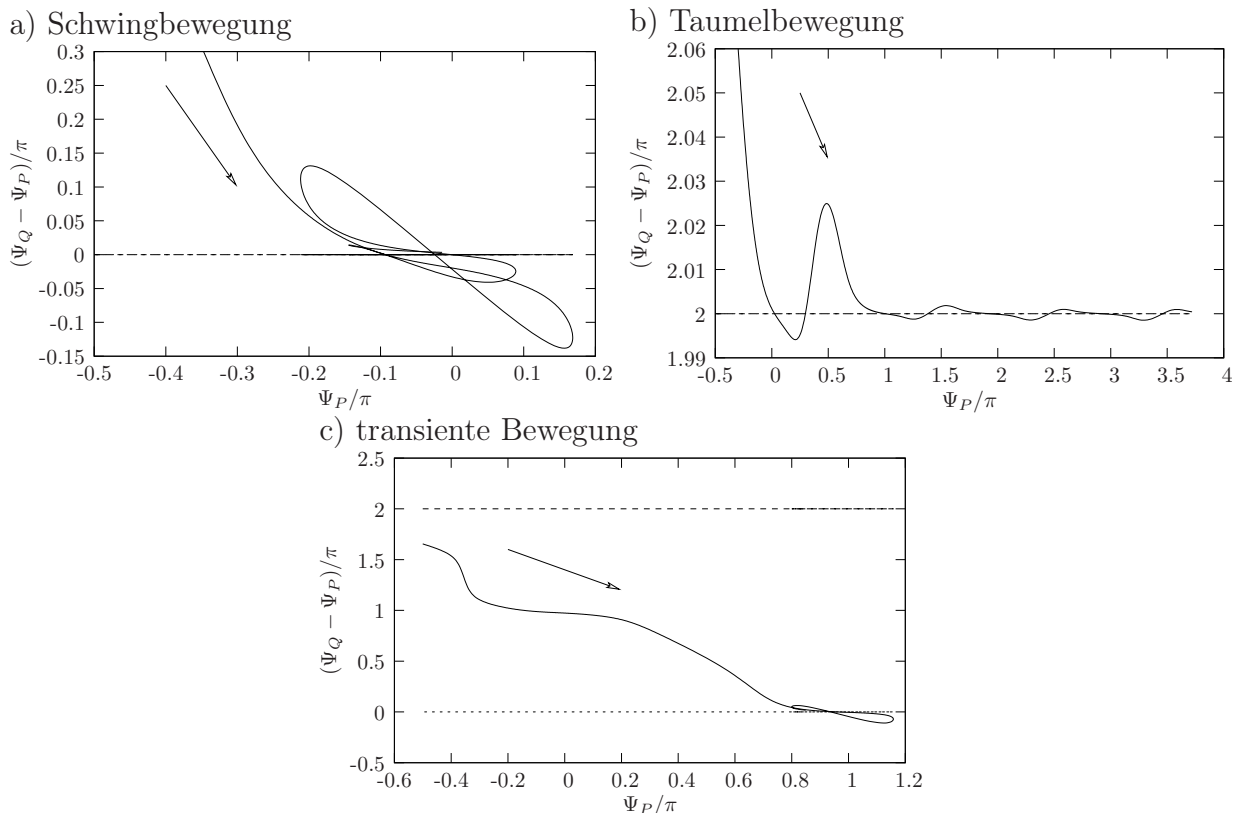


Abbildung 4.5: Poincaré–Abbildungen des Anstellwinkels Ψ für je eine typische a) Schwing–, b) Taumel– und c) transiente Bewegung, wobei die jeweiligen Werte der Parameter wie in Abb. 4.3 und Abb. 4.6 gewählt sind. Die stabile Schwingbewegung a) ist durch eine stabile Abbildung auf 0 gekennzeichnet, die stabile Taumelbewegung durch eine stabile Abbildung auf 0. Im transienten Bereich relaxiert die Bewegung vom Taumeln (nahe 2π) ins Schwingen (auf 0).

Zwischen den Gebieten des Taumelns und der Schwingens befindet sich das transiente Gebiet, in der die Kapseldynamik ein transientes Verhalten von einer Taumel– in eine Schwingbewegung zeigt.

Das Phasendiagramm kann mit dem Phasendiagramm des reduzierten Modells aus den Abbildungen 3.3 und 3.4 verglichen werden. In Abbildung 4.6 erkennt man bis auf Unterschiede des transienten und intermittierenden Verhaltens qualitative und was die Größenordnungen betrifft auch quantitative Übereinstimmungen trotz der starken Vereinfachung des reduzierten Modells. Nur für großen Viskositätskontrast λ treten ausgesprochene Unterschiede auf. Es liegt nahe, dass im transienten bzw. intermittierenden Bereich die Formänderungen relevant sind und daher die Intermittenz ein Artefakt des reduzierten Modells ist.

Es soll an dieser Stelle abschließend noch darauf hingewiesen werden, dass die Deformationen während aller Simulationen so gering sind, dass sie innerhalb des Gültigkeitsbereichs des modifizierten Hookeschen Gesetzes liegen. Die Streckfaktoren $\lambda_{1,2}$ weichen nie mehr als 5% von der Eins ab. Die Ergebnisse sind daher in diesem Bereich nicht gegen Veränderungen des Konstitutivgesetzes empfindlich.

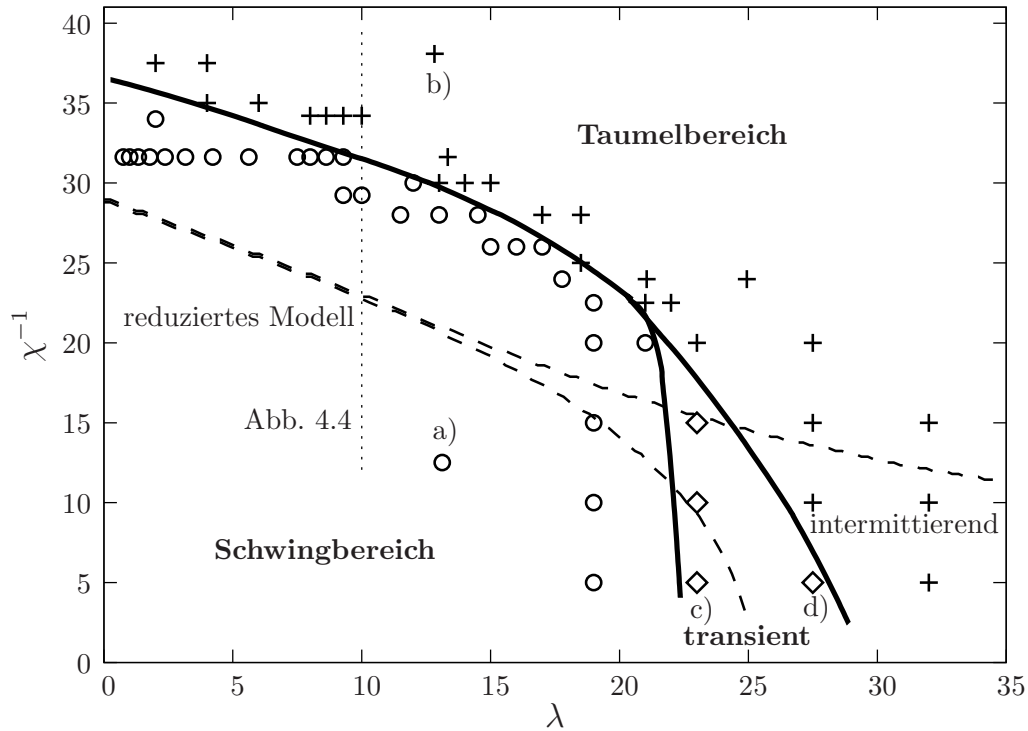


Abbildung 4.6: Mit Hilfe der Spektralmethode ermitteltes Phasendiagramm einer elastischen Kapsel im Scherfluss mit Taumel- und Schwingbereich als Funktion des Viskositätskontrasts $\lambda = \eta^i/\eta^o$ und der inversen dimensionslosen Scherrate χ^{-1} . Die durchgezogenen Linien dienen der Veranschaulichung, um den Schwingbereich (Kreise) von Taumelbereich (Kreuze) und transienten Bereich (Rauten) zu trennen. Die gestrichelten Kurven zeigen das Phasendiagramm, das aus dem reduzierten Modell [31] für gleiche Parameterwerte folgt, siehe auch Abb. 3.3 und 3.4. Im Bereich zwischen den gestrichelten Linien folgt im reduzierten Modell eine intermittierende Bewegung. Im vollen Modell wurden mit Hilfe der Spektralmethode jedoch nur Anzeichen für transientes Verhalten gefunden. Die Bezeichnungen a)–d) im Phasendiagramm beziehen sich auf die Abbildungen 4.3 und 4.5, während der Schnitt $\lambda = 10$ in Abbildung 4.4 dargestellt ist. Geometrische Werte: $\hat{a}_2 = \hat{a}_3 = 0,9\hat{a}_1$, elastische Werte: $\nu = 0,333$, $\tilde{\kappa} = 0,01$, $\tilde{C}_0 = 1$.

4.5 Zusammenfassung

Um elastische Kapseln im Scherfluss zu untersuchen und dabei eine vollständige Kontrolle über die der Dynamik zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen zu bewahren, wurde eine Spektralmethode entwickelt, die die Dynamik der Kapsel numerisch bestimmt. Die Kapselform wird dabei in glatte Basisfunktionen entwickelt, was zu genauen Werten der Membrankräfte führt. Die Methode ist flexibel und stabil genug, um einen großen Wertebereich sowohl der Scherrate als auch des Viskositätskontrasts abzudecken.

Als Testfall konnte die stationäre Form samt Relaxationszeiten sphärischer Kapseln im schwachen Scherfluss gemäß den analytischen Vorhersagen reproduziert werden. Die Methode wurde anschließend auf ellipsoidale Kapseln angewendet, wobei zum einen eine stabile Panzerkettenbewegung beobachtet wurde, der Oszillationen mit der doppelten Frequenz überlagert waren und die deshalb als Schwingen bezeichnet wird, und zum anderen konnte für schwache Scherraten die Taumelbewegung stabil simuliert werden.

Das Phasendiagramm wurde für einen großen Bereich der Scherrate und des Viskositätskontrasts mit guter Übereinstimmung mit dem reduzierten Modell bestimmt. Jedoch wurden im

intermittierenden Bereich des reduzierten Modells starke Indizien für ein transientes Verhalten gefunden, wobei hier die Kapsel stets von einer anfänglichen Taumelbewegung in eine stabile Schwingbewegung relaxiert, was in der Zwischenzeit durch weitere unabhängige numerische Arbeiten bestätigt werden konnte [58, 48].

5 Quasisphärische ellipsoidale Kapseln

Das Phasendiagramm, welches aus der Spektralmethode folgt und im vorhergehenden Kapitel 4 in Abbildung 4.6 zu finden ist, zeigt zwar insbesondere im Taumel- und Schwingbereich gute Übereinstimmungen mit dem Phasendiagramm des reduzierten Modells aus Kapitel 3, siehe Abbildung 3.3, jedoch gibt es eine qualitative Diskrepanz im Bereich zwischen Taumeln und Schwingen. Während innerhalb des reduzierten Modells ein intermittierendes Verhalten folgt, zeigt die Kapsel in der Spektralmethode eine transiente Dynamik. Weil hier die Formänderungen ausgeprägt sind, liegt es nahe, das reduzierte Modell dahingehend zu erweitern, dass sich die Form ändern kann. In diesem Kapitel werden zunächst die Bewegungsgleichungen einer elastischen Kapsel im quasisphärischen Grenzfall bestimmt. Die anschließend vorgestellten numerischen und analytischen Resultate lösen die obige Diskrepanz zu Gunsten des transienten Verhaltens [80].

Im Unterkapitel 5.1 wird das zu betrachtende Modell definiert, bevor in Unterkapitel 5.2 die quasisphärischen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden. Zuletzt werden in Unterkapitel 5.3 die Ergebnisse der Kapseldynamik unter diesen Bewegungsgleichungen präsentiert.

5.1 Modell einer Kapsel mit flächeninkompressibler Membran im Scherfluss

In diesem Unterkapitel wird eine elastische ellipsoidale Kapsel im quasisphärischen Grenzfall betrachtet, die sich in einem Scherfluss mit Rotationsanteil ω und Elongationsstärke s befindet, siehe Gleichung (2.37). Die Membran wird als flächeninkompressibel angenommen, so dass die elastische Energie der Deformationen im Grenzfall geringer Deformationen allgemein durch die Summe aus der Hookeschen Energie (2.135), der Biegeenergie (2.130) und der Energie einer Oberflächenspannung (2.133)

$$\mathcal{H}^{\text{QS}} \equiv \mathcal{H}^{\text{MH}} + \mathcal{H}^{\kappa} + \mathcal{H}^{\text{O}} \quad (5.1)$$

geschrieben werden kann, wobei die drei Anteile

$$\mathcal{H}^{\text{MH}} \equiv \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA H^{\text{MH}} = \int_{\mathcal{M}_{\text{Ref}}} dA \left(\frac{\lambda_{\text{L}}}{2} (E_1 + E_2)^2 + \mu_{\text{L}} (E_1^2 + E_2^2) \right), \quad (5.2)$$

$$\mathcal{H}^{\kappa} \equiv \int_{\mathcal{M}} da h^{\kappa} = \int_{\mathcal{M}} da \frac{\kappa}{2} (\text{Sp } \mathbf{k} - 2/R_0)^2, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{H}^{\text{O}} \equiv \int_{\mathcal{M}} da h^{\text{O}} = \int_{\mathcal{M}} da \sigma, \quad (5.4)$$

durch die Energiedichten aus (2.135, 2.130, 2.133) gegeben sind. Die Oberflächenspannung σ hängt hier vom Membranpunkt und der Zeit ab und sorgt zu jedem Zeitpunkt für die lokale und globale Erhaltung der Fläche ($da = dA$, $a = A$). Die Eigenschaft der Flächeninkompressibilität teilt die Membran damit mit der eines roten Blutkörperchens. Gleichzeitig vereinfacht die Flächenerhaltung die weitere Rechnung, weil dadurch die Deformationsmoden bereits in

niedrigster Ordnung koppeln und die Dynamik schon hier die wesentlichen physikalischen Eigenschaften zeigt.

Die Eigenschaften der Membran sind durch die folgenden Parameter festgelegt: Das Volumen V_0 setzt die Längenskala R_0 gemäß Gleichung (2.1), während die konstante Membranfläche a durch die dimensionslose Exzessfläche Δ gegeben ist (2.72). Der Schermodul μ_L legt die elastische Energieskala $\mu_L R_0^2$ fest, so dass mit λ_L und κ zwei elastische Module frei wählbar bleiben, deren Werte jedoch im betrachteten Grenzfall des Modells aufgrund der Flächenerhaltung und der speziellen Symmetrie des Flusses und der Referenzmembran keinen Einfluss auf die Dynamik nehmen. Neben der genauen Form der Referenzmembran, bei der Volumen V_0 und Fläche A vorgegeben sind, verbleibt durch das Festlegen der Längen- und Energieskala als einziger freier, relevanter Parameter die Exzessfläche Δ . In der Hydrodynamik ist die Zeitskala durch die Stärke des Elongationsanteils s festgelegt. Der äußere Fluss ist durch das Verhältnis ω/s zwischen der Frequenz des Rotationsanteils ω und der Elongationsstärke s bestimmt. Die Viskosität η^o setzt über $R_0\eta^o/\mu_L$ eine weitere Zeitskala, während die Viskosität η^i durch den Viskositätskontrast $\lambda = \eta^i/\eta^o$ festgelegt wird. In der Hydrodynamik bleiben also insgesamt drei freie Parameter, die äußere Viskosität η^o und die beiden Verhältnisse ω/s , und λ . Im Falle einer axisymmetrischen Referenzmembran ist die Form eindeutig durch die Exzessfläche Δ und einen weiteren Formparameter $\hat{\beta}$ (siehe Gleichungen (5.116), (5.117)) gegeben. Startet die Kapsel aus ihrer Referenzmembran symmetrisch zum Scherflusses, gehen die fünf freien Parameter Δ , $\hat{\beta}$, η^o , ω/s , und λ nur in bestimmten Kombinationen in die Dynamik ein, so dass die Dynamik letztlich alleine durch drei dimensionslose Parameter $\hat{\beta}$, S (5.122), ω (5.121) eindeutig festgelegt ist.

5.2 Quasisphärische Bewegungsgleichungen

Im Folgenden werden die quasisphärischen Bewegungsgleichungen in mehreren Schritten bestimmt. Referenzmembran und Membran werden in Abschnitt 5.2.1 parametrisiert und in Abschnitt 5.2.2 in einer geeigneten Basis dargestellt. Die Formeln der geometrischen Erhaltungsgrößen Volumen und Oberfläche sind in Abschnitt 5.2.3 zu finden, bevor die elastische Energie und Kraftdichte in Abschnitt 5.2.4 allgemein berechnet wird. Die Oberflächenspannung, die für die Flächenerhaltung sorgt, bleibt hier noch unbestimmt. Im hydrodynamischen Abschnitt 5.2.5 wird schließlich mit Hilfe der Stokes-Gleichungen und den entsprechenden Randbedingungen die Advektionsgeschwindigkeit der Membran für einen beliebigen externen Fluss bestimmt. Die Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit von der Oberflächenspannung folgen direkt in Abschnitt 5.2.6. Hier wird schließlich die Oberflächenspannung so festgelegt, dass die Fläche sich unter der Dynamik lokal und global nicht ändert. Im letzten Abschnitt 5.2.7 werden die Bewegungsgleichungen für den speziellen Fluss (siehe Gleichung (2.37)) bestimmt, wobei hier Membran und Referenzmembran die Symmetrie des Scher- und Elongationsflusses erfüllen.

5.2.1 Parametrisierungen

Zur Berechnung der elastischen und differentialgeometrischen Größen kann die Membran der Kapsel durch Kugelkoordinaten parametrisiert werden. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass die elastische Energie aus der Verzerrung der Membran folgt und hierzu jedes materielle Membranelement mit demselben materiellen Membranelement auf der undeformierten Referenzmembran verglichen werden muss. Selbst wenn die Deformation eines Membranelementes

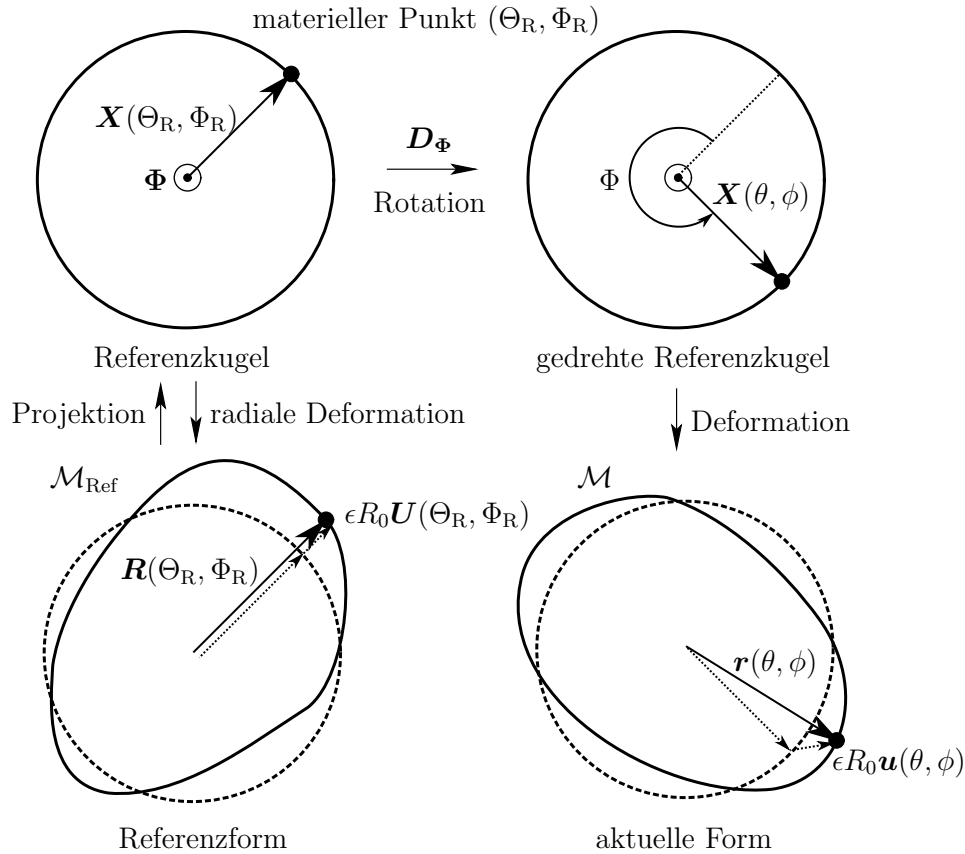


Abbildung 5.1: Referenzform \mathcal{M}_{Ref} , Referenzkugel, gedrehte Referenzkugel und aktuelle Form \mathcal{M} einer Kapsel (von links nach rechts). Ein Membranpunkt auf der Referenzmembran wird radial auf die Referenzkugel mit Radius R_0 projiziert und erhält die materiellen Koordinaten (Θ_R, Φ_R) durch seine sphärischen Koordinaten auf dieser Referenzkugel. Die Form der aktuellen Membran erhält man durch eine Drehung D_{Φ} um die Drehachse $\Phi = \Phi \mathbf{n}$ der Referenzkugel, die anschließend geringfügig deformiert wird. Unter der Forderung, dass das Deformationsfeld $\mathbf{u}(\vartheta, \varphi)$ keine Rotationsanteile enthält ($u_{1m}^{\Phi} = 0$), wird diese Aufteilung eindeutig.

klein bleibt, kann der Differenzvektor zwischen ursprünglicher Position und neuer Position durch Rotationen und Translationen groß werden. Um eine störungstheoretische Betrachtung zu ermöglichen, müssen, wie im Folgenden erläutert, die Bewegungen des starren Körpers von den kleinen Deformationen getrennt behandelt werden.

Jeder Membranpunkt kann, wie in Abbildung 5.1 dargestellt, durch die Lagrangeschen Koordinaten $(\Theta_R, \Phi_R) \in S^2$ bezeichnet werden, die auf einer Referenzkugel mit gleichem Volumen wie die Kapsel definiert sind. Auf dieser Kugel mit Radius R_0 gilt für den Ort der Membranpunkte

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{X}(\Theta_R, \Phi_R) &\equiv R_0 \mathbf{e}_r(\Theta_R, \Phi_R) \\ &= R_0 (\sin \Theta_R \cos \Phi_R \mathbf{e}_x + \sin \Theta_R \sin \Phi_R \mathbf{e}_y + \cos \Theta_R \mathbf{e}_z) . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Eine beliebige Membranform lässt sich hieraus wie folgt in zwei Schritten erhalten. Zunächst wird die Kugel $\mathbf{X}(\Theta_R, \Phi_R)$ um den Drehvektor $\Phi \equiv \Phi \mathbf{n}$ mit Drehwinkel Φ und Drehachse \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$) gedreht. Der neue Ort des Membranpunktes (Θ_R, Φ_R) ist dann durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\vartheta, \varphi) \equiv D_{\Phi}(\mathbf{X}(\Theta_R, \Phi_R)) \quad (5.6)$$

mit von der Drehung Φ abhängigem Drehoperator \mathbf{D}_Φ gegeben. Diese Gleichung liefert in Abhängigkeit von der Drehung Φ die Beziehung zwischen den gedrehten Koordinaten (ϑ, φ) und den ursprünglichen Koordinaten (Θ_R, Φ_R) . Im Falle einer Drehung um die z -Achse, d.h. für $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, gilt speziell

$$\vartheta(\Theta_R, \Phi_R) = \Theta_R, \quad \varphi(\Theta_R, \Phi_R) = \Phi_R + \Phi. \quad (5.7)$$

Während es sich bei (ϑ, φ) um die Lagrangeschen Koordinaten handelt, sind (Θ_R, Φ_R) ortsfeste Koordinaten des Laborsystems. Insbesondere in der Hydrodynamik ist die Behandlung im Laborsystem einfacher.

Im Anschluss an die Drehung wird die rotierte Kugel durch ein kleines Deformationsfeld $\epsilon R_0 \mathbf{u}$ (mit den gedrehten Koordinaten (ϑ, φ) als Argumente) verzerrt, so dass sich der materielle Punkt (Θ_R, Φ_R) nun am Ort

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\vartheta, \varphi; \Phi, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{D}_\Phi(\mathbf{X}(\Theta_R, \Phi_R)) + \epsilon R_0 \mathbf{u}(\vartheta, \varphi) \quad (5.8)$$

befindet. Hierbei ist ϵ ein kleiner Wert $\epsilon \ll 1$, der prinzipiell beliebig gewählt werden kann, später aber eindeutig über eine Normierung der Deformation \mathbf{u} festgelegt wird. Er dient als formaler Parameter dazu, eine systematische Entwicklung in der Deformation vorzunehmen. Der Radius R_0 wurde aus den Deformationen faktorisiert, um das Feld $\mathbf{u}(\vartheta, \varphi)$ dimensionslos zu machen.

Die Parametrisierung der Membran (5.8) sowie die Größen \mathbf{u} , Φ und \mathbf{r} sind zeitabhängig. Die undeformierte Referenzmembran kann durch eine analoge Vorgehensweise parametrisiert werden. Hier kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Rotation der ursprünglichen Kugel verzichtet werden und direkt eine kleine Deformation mit Feld $\epsilon R_0 \mathbf{U}$ vorgenommen werden. Der Membranpunkt (Θ_R, Φ_R) befindet sich auf der Referenzmembran dann am Ort

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\Theta_R, \Phi_R; \mathbf{U}) \equiv \mathbf{X}(\Theta_R, \Phi_R) + \epsilon R_0 \mathbf{U}(\Theta_R, \Phi_R). \quad (5.9)$$

5.2.2 Spektraldarstellung

Aufgrund der hohen Symmetrie der Kugel ist eine spektrale Darstellung der Deformationsfelder in der Basis der Vektorkugelflächenfunktionen (vgl. Abschnitt 4.2.1) sinnvoll

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\vartheta, \varphi) &= \sum_{slm} u_{lm}^s \mathbf{Y}_{slm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{lm} (u_{Ylm}, u_{\Psi lm}, u_{\Phi lm}) (\mathbf{Y}_{Ylm}(\vartheta, \varphi), \mathbf{Y}_{\Psi lm}(\vartheta, \varphi), \mathbf{Y}_{\Phi lm}(\vartheta, \varphi))^T \\ &\equiv \sum_{lm} \mathbf{u}_{lm}^T \tilde{\mathbf{Y}}_{lm}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{U}(\Theta_R, \Phi_R) = \sum_{lm} U_{lm}^Y \mathbf{Y}_{slm}(\Theta_R, \Phi_R) \equiv \sum_{lm} \mathbf{U}_{lm}^T \tilde{\mathbf{Y}}_{lm}(\Theta_R, \Phi_R), \quad (5.11)$$

wobei für jedes feste Paar (lm) die Moden zu $s = Y, \Psi, \Phi$ jeweils zu einem Spaltenvektor $\tilde{\mathbf{Y}}_{lm}$, \mathbf{u}_{lm} bzw. \mathbf{U}_{lm} zusammengefasst werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hier die Deformation \mathbf{U} der Referenzmembran radial gewählt

$$\mathbf{U}_{lm}^T \equiv (U_{lm}^Y, 0, 0). \quad (5.12)$$

Das Deformationsfeld der Referenzmembran bezüglich der ortsfesten Koordinaten erhält man durch Drehen der Referenzmembran

$$\tilde{U}(\vartheta, \varphi) \equiv U(\Theta_R(\vartheta, \varphi), \Phi_R(\vartheta, \varphi)) = \mathbf{D}_{\Phi} U(\Theta_R, \Phi_R). \quad (5.13)$$

Der Drehoperator \mathbf{D}_{Φ} in der Basis der Vektorkugelflächenfunktionen ist durch die Wigner-schen Drehmatrizen $D_{mm'}^l(\Phi)$ gegeben [78, 79]. Weil keine tangentialen Referenzmoden vorhanden sind, genügt es, die Beziehung für die radialen Moden anzugeben

$$(\mathbf{D}_{\Phi} U)_{lm}^Y = \sum_{m'} D_{mm'}^l(\Phi) U_{lm'}^Y, \quad (5.14)$$

die sich im Spezialfall einer Drehung $\Phi = \Phi \mathbf{e}_z$ um die z -Achse wegen

$$D_{mm'}^l(\Phi \mathbf{e}_z) = \exp(-im\Phi) \delta_{mm'} \quad (5.15)$$

zu

$$(\mathbf{D}_{\Phi} U)_{lm}^Y = \exp(-im\Phi) U_{lm}^Y \quad (5.16)$$

vereinfacht.

5.2.3 Fläche und Volumen

In der spektralen Darstellung sind Fläche a , Exzessfläche Δ und Volumen der Kapsel in einer quasisphärischen Entwicklung bis in zweiter Ordnung ϵ^2 durch [81]

$$\begin{aligned} a \approx & 4\pi R_0^2 + 2\epsilon\sqrt{4\pi}R_0^2 u_{00}^Y + \epsilon^2 R_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(1 + \frac{l(l+1)}{2}\right) |u_{lm}^Y|^2 \\ & + \epsilon^2 R_0^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-\sqrt{l(l+1)} \left(u_{lm}^Y u_{lm}^{\psi*} + u_{lm}^{Y*} u_{lm}^{\psi}\right) + |u_{lm}^{\Psi}|^2 + |u_{lm}^{\Phi}|^2\right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta \approx & 2\epsilon\sqrt{4\pi}u_{00}^Y + \epsilon^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(1 + \frac{l(l+1)}{2}\right) |u_{lm}^Y|^2 \\ & + \epsilon^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-\sqrt{l(l+1)} \left(u_{lm}^Y u_{lm}^{\psi*} + u_{lm}^{Y*} u_{lm}^{\psi}\right) + |u_{lm}^{\Psi}|^2 + |u_{lm}^{\Phi}|^2\right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} V_0 \approx & \frac{4\pi}{3} R_0^3 + \epsilon\sqrt{4\pi}R_0^3 u_{00}^Y + \epsilon^2 R_0^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |u_{lm}^Y|^2 \\ & + \epsilon^2 \frac{1}{2} R_0^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-\sqrt{l(l+1)} \left(u_{lm}^Y u_{lm}^{\psi*} + u_{lm}^{Y*} u_{lm}^{\psi}\right) + |u_{lm}^{\Psi}|^2 + |u_{lm}^{\Phi}|^2\right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

gegeben. Weil das Volumen konstant bleibt, wird die Amplitude u_{00}^Y durch die anderen Moden festgelegt [81]

$$u_{00}^Y \approx \frac{-\epsilon}{4\sqrt{\pi}} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=-l}^l \left(2|u_{lm}^Y|^2 - \sqrt{l(l+1)} \left(u_{lm}^Y u_{lm}^{\psi*} + u_{lm}^{Y*} u_{lm}^{\psi}\right) + |u_{lm}^{\Psi}|^2 + |u_{lm}^{\Phi}|^2\right). \quad (5.20)$$

Eingesetzt in die Exzessfläche folgt für die feste Exzessfläche der flächeninkompressiblen Membran die Bedingung

$$\Delta \stackrel{!}{=} \epsilon^2 \sum_{l \geq 1} \sum_{m=-l}^l 2F_l |u_{lm}^Y|^2 \quad (5.21)$$

mit

$$F_l \equiv \frac{1}{4}(l+2)(l-1). \quad (5.22)$$

Für die lokale Flächenerhaltung genügt es, das Flächenelement in erster Ordnung in ϵ zu betrachten. Wegen $u_{00}^Y \sim \epsilon$ (Volumenerhaltung) gilt hierfür

$$da \approx R_0^2 \sin \vartheta (1 + \epsilon \nabla^S \cdot \mathbf{u}) d\vartheta d\varphi \quad (5.23)$$

$$\approx R_0^2 \sin \vartheta \left(1 + \epsilon \sum_{l \geq 1, m} (2u_{lm}^Y - \sqrt{l(l+1)} u_{lm}^\Psi) y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right) d\vartheta d\varphi. \quad (5.24)$$

Die lokale Erhaltung der Fläche in der Basis der Vektorkugelflächenfunktionen erzwingt also für alle $l \geq 1$ und alle m eine Kopplung der radialen und tangentialen Moden

$$2 \left(u_{lm}^Y - (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{lm}^Y \right) \stackrel{!}{=} \sqrt{l(l+1)} u_{lm}^\Psi, \quad (5.25)$$

wobei die restlichen tangentialen Moden u_{lm}^Φ das Flächenelement in erster Ordnung unberührt lassen.

5.2.4 Elastische Energie und elastische Kräfte

Es werden die elastischen Energien und Kräfte der einzelnen Energiebeiträge aus Gleichung (5.1) berechnet. In den Energieanteil des Hookeschen Gesetzes \mathcal{H}^{MH} geht die Differenz der Metriken \mathbf{g} der Membran und der Referenzmembran \mathbf{G} ein, die beide jeweils nur vom Deformationsfeld \mathbf{u} bzw. \mathbf{U} und nicht von der Drehung Φ abhängen. Hieraus folgt der Green–Lagrangesche Verzerrungstensor am materiellen Punkt (Θ_R, Φ_R) in den ortsfesten Koordinaten (ϑ, φ)

$$\mathbf{E}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{G})|_{(\vartheta, \varphi)}. \quad (5.26)$$

Beide Metriken werden am selben materiellen Punkt ausgewertet. Da beide Parametrisierungen gleichermaßen konstruiert sind, kann die Metrik der Referenzmembran \mathbf{G} durch die Metrik der aktuellen Membran \mathbf{g} dargestellt werden, indem das Deformationsfeld \mathbf{U} der Referenzmembran in die Metrik \mathbf{g} eingesetzt wird. Weil sich der materielle Punkt auf der Membran und der Referenzmembran an verschiedenen Orten befindet, muss aber zusätzlich die Metrik noch an den richtigen Ort gedreht werden. Dies geschieht durch den Drehoperator \mathbf{D}_Φ , der den metrischen Tensor entsprechend transformiert, wobei

$$\mathbf{G}(\vartheta, \varphi; \mathbf{U}) = \mathbf{D}_\Phi \mathbf{g}(\Theta_R, \Phi_R; \mathbf{U}) \quad (5.27)$$

gilt. Die Berechnung der elastischen Energie des modifizierten Hookeschen Modells kann vereinfacht werden, weil die elastische Energie im quasisphärischen Grenzfall quadratisch in der Verzerrung und die Verzerrung linear in der Deformation ist. Für eine kugelförmige Referenzmembran $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ findet man die elastische Energie $\mathcal{H}^{\text{MH}}[\mathbf{u}]$ in der Literatur [74, 22]. Die Energie

für eine nicht-sphärische Referenzmembran ist daher einfach durch den entsprechenden Ausdruck $\mathcal{H}^{\text{MH}}[\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\Phi}\mathbf{U}]$ gegeben. In der Basis der Vektorkugelfunktionen folgt in quadratischer Ordnung die Energie

$$\mathcal{H}^{\text{MH}} \approx \frac{\epsilon^2 R_0^2}{2} \sum_{l \geq 1, m} (\mathbf{u}_{lm} - (\mathbf{D}_{\Phi}\mathbf{U})_{lm})^* \mathbf{K}_l (\mathbf{u}_{lm} - (\mathbf{D}_{\Phi}\mathbf{U})_{lm}) \quad (5.28)$$

mit der Steifigkeit

$$\mathbf{K}_l \equiv \mu_L \mathbf{K}_l^{\mu_L} + (\lambda_L + \mu_L) \mathbf{K}_l^{(\lambda_L + \mu_L)}, \quad (5.29)$$

die aus den beiden Anteilen

$$\mathbf{K}_l^{\mu_L} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (l+2)(l-1) & 0 \\ 0 & 0 & (l+2)(l-1) \end{pmatrix} \text{ und} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{K}_l^{(\lambda_L + \mu_L)} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{l(l+1)} & 0 \\ -2\sqrt{l(l+1)} & l(l+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

besteht. Der Anteil der Helfrichschen Biegeenergie beträgt [74]

$$\mathcal{H}^{\kappa} \approx \frac{\epsilon^2 \kappa}{2} \sum_{l \geq 1, m} \mathbf{u}_{lm}^* \mathbf{K}_l^{\kappa} \mathbf{u}_{lm} \quad (5.32)$$

mit

$$\mathbf{K}_l^{\kappa} \equiv \begin{pmatrix} (l+2)^2(l-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Der Anteil der Oberflächenspannung

$$\sigma \equiv \sum_{lm} \sigma_{lm} y_{lm} \equiv \bar{\sigma} + \sum_{l \geq 1, m} \sigma_{lm}^* y_{lm} \quad (5.34)$$

an der Energie wird in einen homogenen und in einen inhomogenen Anteile getrennt

$$\mathcal{H}^{\sigma} \equiv \mathcal{H}^{\bar{\sigma}} + \mathcal{H}^{\sigma_{lm}}. \quad (5.35)$$

Die homogene Oberflächenspannung $\bar{\sigma}$, die für die globale Flächenerhaltung sorgt, führt mit (5.21) auf die Energie

$$\mathcal{H}^{\bar{\sigma}} \approx 4\pi R_0^2 \bar{\sigma} + 2\epsilon^2 R_0^2 \bar{\sigma} \sum_{l \geq 1, m} F_l |u_{lm}^Y|^2 \quad (5.36)$$

$$= 4\pi R_0^2 \bar{\sigma} + \frac{\epsilon^2 R_0^2 \bar{\sigma}}{2} \sum_{l \geq 1, m} \mathbf{u}_{lm}^* \mathbf{K}_l^{\bar{\sigma}} \mathbf{u}_{lm} \quad (5.37)$$

mit

$$\mathbf{K}_l^{\bar{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} (l+2)(l-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Die inhomogenen Anteile $\sigma_{lm} \sim \epsilon$, die die lokale Flächenerhaltung erzwingen, ergeben mit (5.24) die Energie

$$\mathcal{H}^{\sigma_{lm}} \approx \epsilon R_0^2 \sum_{l \geq 1, m} \sigma_{lm} (2u_{lm}^Y - \sqrt{l(l+1)} u_{lm}^\Psi)^* = \epsilon R_0^2 \sum_{l \geq 1, m} \sigma_{lm} \mathbf{a}_l^T \mathbf{u}_{lm}^* \quad (5.39)$$

mit

$$\mathbf{a}_l^T \equiv (2, -\sqrt{l(l+1)}, 0). \quad (5.40)$$

Die elastischen Kräfte

$$\mathbf{f}^{\text{el}} \equiv \sum_{slm} f_{slm} \mathbf{Y}_{slm} \equiv \sum_{lm} \tilde{\mathbf{Y}}_{lm}^T \mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} \quad (5.41)$$

folgen aus der Gesamtenergie \mathcal{H}^{QS} durch Differentiation nach \mathbf{u}_{lm}^* gemäß

$$\mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} \approx -\frac{1}{\epsilon R_0^3} \frac{\partial \mathcal{H}^{\text{QS}}}{\partial \mathbf{u}^*}. \quad (5.42)$$

Aus den einzelnen Energieanteilen ergeben sich damit die elastischen Kräfte

$$\mathbf{f}_{lm}^{\text{MH}} \approx -\frac{\epsilon}{R_0} \mathbf{K}_l (\mathbf{u}_{lm} - (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{lm}), \quad (5.43)$$

$$\mathbf{f}_{lm}^\kappa \approx -\frac{\epsilon \kappa}{R_0^3} \mathbf{K}_l^\kappa \mathbf{u}_{lm}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{f}_{lm}^{\bar{\sigma}} \approx -\frac{\epsilon \bar{\sigma}}{R_0} \mathbf{K}_l^{\bar{\sigma}} \mathbf{u}_{lm}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}} \approx -\frac{1}{R_0} \sigma_{lm} \mathbf{a}_l. \quad (5.46)$$

Zur gesamten elastischen Kraft im Spektralraum

$$\mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} = \mathbf{f}_{lm}^{\text{MH}} + \mathbf{f}_{lm}^\kappa + \mathbf{f}_{lm}^{\bar{\sigma}} + \mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}} \quad (5.47)$$

tragen in erster Ordnung in ϵ lineare Beiträge in \mathbf{u}_{lm} , die unter anderem die noch zu bestimmende homogene Oberflächenspannung $\bar{\sigma}$ beinhalten, sowie lineare Beiträge in der Differenz $(\mathbf{u}_{lm} - (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{lm})$ bei. Ferner enthält der konstante Anteil $\mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}}$ die noch unbekannt inhomogene Oberflächenspannung σ_{lm} , die für die lokale Flächenerhaltung sorgt.

5.2.5 Hydrodynamik

Die elastischen Kräfte werden vom hydrodynamischen Kraftsprung an der Membran kompensiert. Zusammen mit der Stetigkeit der Geschwindigkeit (*no-slip* Randbedingung) folgen hieraus die Geschwindigkeitsprofile im Inneren und Äußeren der Kapsel, die in diesem Abschnitt bestimmt werden. In führender Ordnung werden hierbei sämtliche Randbedingungen und Geschwindigkeitsfelder, die die Membran betreffen, nicht auf der Membran, sondern auf der Kugel mit Radius R_0 ausgewertet.

Zerlegt man den Fluss in den äußeren angelegten linearen Fluss \mathbf{v}^∞ (2.148) und einen induzierten Fluss \mathbf{v}^{ind} (2.159), lassen sich ihre spektralen Komponenten v_{slm}^∞ und v_{slm}^{ind} bzw. \mathbf{v}_{lm}^∞ und $\mathbf{v}_{lm}^{\text{ind}}$ auf der Kugel mit Radius R_0 durch

$$\mathbf{v}^\infty(r = R_0) \equiv \sum_{slm} v_{slm}^\infty \mathbf{Y}_{slm} \equiv \sum_{lm} (\mathbf{v}_{lm}^\infty)^T \tilde{\mathbf{Y}}_{lm}, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{v}^{\text{ind}}(r = R_0) \equiv \sum_{slm} v_{slm}^{\text{ind}} \mathbf{Y}_{slm} \equiv \sum_{lm} (\mathbf{v}_{lm}^{\text{ind}})^T \tilde{\mathbf{Y}}_{lm} \quad (5.49)$$

definieren. Für den externen Fluss \mathbf{v}^∞ erhält man in Anwesenheit der Membran aus der Stetigkeit der Geschwindigkeit (*no-slip* Randbedingung) (2.155) bzw. (2.162) auf der Kugel die lineare Beziehung

$$\mathbf{f}_{lm}^\infty = \tilde{\mathbf{Q}}_l \mathbf{v}_{lm}^\infty \quad (5.50)$$

zwischen den Kraftmoden \mathbf{f}_{lm}^∞ auf die Membran (siehe Gleichung (2.32))

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^\infty \equiv \sum_{slm} f_{slm}^\infty \mathbf{Y}_{slm} \equiv \sum_{lm} \mathbf{f}_{lm}^\infty{}^T \tilde{\mathbf{Y}}_{lm} \quad (5.51)$$

und den Geschwindigkeitsmoden \mathbf{v}_{lm}^∞ . Der Sprung des Spannungstensors $\tilde{\mathbf{Q}}_l$ auf der Kugel ist hierbei durch

$$\tilde{\mathbf{Q}}_l \equiv \frac{\eta^o - \eta^i}{R_0} \begin{pmatrix} 2l + 1 + \frac{3}{l} & -3\sqrt{\frac{l+1}{l}} & 0 \\ -3\sqrt{\frac{l+1}{l}} & 2l + 1 & 0 \\ 0 & 0 & l - 1 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

gegeben [74], wenn im äußeren Fluss nur Lamb-Moden mit $l > 0$ auftreten. Analog folgt die lineare Beziehung

$$\mathbf{f}_{lm}^{\text{ind}} = \mathbf{Q}_l \mathbf{v}_{lm}^{\text{ind}} \quad (5.53)$$

mit Tensor [74]

$$\mathbf{Q}_l \equiv -\frac{\eta^i}{R_0} \begin{pmatrix} 2l + 1 + \frac{3}{l} & -3\sqrt{\frac{l+1}{l}} & 0 \\ -3\sqrt{\frac{l+1}{l}} & 2l + 1 & 0 \\ 0 & 0 & l - 1 \end{pmatrix} - \frac{\eta^o}{R_0} \begin{pmatrix} 2l + 1 + \frac{3}{l+1} & -3\sqrt{\frac{l}{l+1}} & 0 \\ -3\sqrt{\frac{l}{l+1}} & 2l + 1 & 0 \\ 0 & 0 & l + 2 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

zwischen der hydrodynamischen Kraft des induzierten Flusses

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^{\text{ind}} \equiv \sum_{slm} f_{slm}^{\text{ind}} \mathbf{Y}_{slm} \equiv \sum_{lm} (\mathbf{f}_{lm}^{\text{ind}})^T \tilde{\mathbf{Y}}_{lm} \quad (5.55)$$

und den induzierten Flussmoden $\mathbf{v}_{lm}^{\text{ind}}$.

Aus der Kräftebilanz (2.154) auf der Membran — angewendet auf der Kugel mit Radius R_0 — in Spektraldarstellung

$$\mathbf{f}_{lm}^{\text{ind}} = -(\mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} + \mathbf{f}_{lm}^\infty) \quad (5.56)$$

ergeben sich die induzierten Geschwindigkeitsmoden

$$\mathbf{v}_{lm}^{\text{ind}} = -\mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} - \mathbf{Q}_l^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_l \mathbf{v}_{lm}^\infty. \quad (5.57)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{V} , mit der die Membran advektiert wird, lautet in Spektraldarstellung schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{lm} \equiv \mathbf{v}_{lm}^{\text{ind}} + \mathbf{v}_{lm}^{\infty} &= \left(\mathbf{1} - \mathbf{Q}_l^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_l \right) \mathbf{v}_{lm}^{\infty} - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} \\ &= \mathbf{Q}_l^{-1} \left[\left(\mathbf{Q}_l - \tilde{\mathbf{Q}}_l \right) \mathbf{v}_{lm}^{\infty} - \mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} \right]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Sie enthält jedoch noch als unbekannte Größen die Oberflächenspannung σ , die im folgenden Abschnitt 5.2.6 aus der Flächenerhaltung bestimmt wird.

5.2.6 Flächenerhaltung und Bewegungsgleichungen

Mit Hilfe der Advektionsgeschwindigkeit $\mathbf{V}(\vartheta, \varphi)$ mit spektralen Komponenten \mathbf{V}_{lm} gemäß Gleichung (5.58) werden die materiellen Membranpunkte im Zeitschritt dt entlang des Vektors $\mathbf{V}dt$ transportiert. Blicke innerhalb dieses Zeitschrittes die Drehachse unverändert, ergäben sich direkt die Bewegungsgleichungen

$$\partial_t \Phi = \mathbf{0}, \quad (5.59)$$

$$\epsilon R_0 \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{V}, \quad (5.60)$$

bei denen jedoch das Deformationsfeld \mathbf{u} aufgrund von Rotationen im Laufe der Zeit groß wird. Dennoch können diese Bewegungsgleichungen zunächst dafür verwendet werden, um die Oberflächenspannung so zu bestimmen, dass auf der Membran auch nach dem Zeitschritt dt lokal und global die Fläche erhalten bleibt. In den folgenden beiden Unterabschnitten werden zunächst die inhomogenen Anteile der Oberflächenspannung und anschließend der homogene Anteil bestimmt. Mit Hilfe der dadurch eindeutig bestimmten Advektionsgeschwindigkeit \mathbf{V} werden im darauf folgenden Unterabschnitt die Bewegungsgleichungen bestimmt, bei denen sich die Drehachse Φ so ändert, dass das Deformationsfeld \mathbf{u} keine Rotationsanteile enthält, somit reine Deformationen beschreibt und zumindest nicht durch Rotationen groß werden kann.

Lokale Flächenerhaltung

Teilt man zunächst in der Advektionsgeschwindigkeit in (5.58) die hydrodynamischen und elastischen Kräfte in die inhomogene Oberflächenkraft $\mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}}$ und eine verbleibende Kraft \mathbf{f}_{lm}^0 gemäß

$$\left(\mathbf{Q}_l - \tilde{\mathbf{Q}}_l \right) \mathbf{v}_{lm}^{\infty} - \mathbf{f}_{lm}^{\text{el}} \equiv \mathbf{f}_{lm}^0 - \mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}} \quad (5.61)$$

auf, so folgt mit Hilfe der lokalen Flächenerhaltung

$$\mathbf{a}_l^T \mathbf{u}_{lm} \approx \mathbf{a}_l^T (\mathbf{D}_{\Phi} \mathbf{U})_{lm} \quad (5.62)$$

durch Multiplikation der Bewegungsgleichung (5.60) mit \mathbf{a}_l^T direkt eine Bestimmungsgleichung für die inhomogenen Anteile σ_{lm} der Oberflächenspannung

$$0 \approx \mathbf{a}_l^T \partial_t (\epsilon R_0 \mathbf{u}_{lm}) = \mathbf{a}_l^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{f}_{lm}^0 - \mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}}) \approx \mathbf{a}_l^T \mathbf{Q}_l^{-1} \left(\mathbf{f}_{lm}^0 + \frac{1}{R_0} \sigma_{lm} \mathbf{a}_l^T \right). \quad (5.63)$$

Auflösen nach σ_{lm} und Einsetzen in die Advektionsgeschwindigkeit (5.58) ergibt schließlich die Darstellung

$$\mathbf{V}_{lm} = \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{f}_{lm}^0 - \mathbf{f}_{lm}^{\sigma_{lm}}) = \mathbf{P}_l \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{f}_{lm}^0 \quad (5.64)$$

mit dem Projektionsoperator

$$\mathbf{P}_l \equiv \mathbf{1} - \frac{\mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^T}{\mathbf{a}_l^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{a}_l}. \quad (5.65)$$

Die Kraft der inhomogenen Oberflächenspannung aufgrund der lokalen Flächenerhaltung wirkt sich also effektiv dadurch aus, dass der Projektionsoperator \mathbf{P}_l auf die übrigen Terme der Advektionsgeschwindigkeit angewendet wird.

Setzt man alle bisherigen Ergebnisse ein, lassen sich die spektralen Moden der Advektionsgeschwindigkeit in der Form

$$\mathbf{V}_{lm}/(\epsilon R_0) = \left(\Omega_l^{(1)} + \bar{\sigma} \mathbf{X}_l \right) \mathbf{u}_{lm} + \left(-\Omega_l^{(2)} (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{lm} + \mathbf{W}_{lm} \right) \quad (5.66)$$

mit

$$\Omega_l^{(1)} \equiv \Omega_l^{(2)} + \frac{\kappa}{R_0^4} \mathbf{P}_l \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{K}_l^\kappa, \quad (5.67)$$

$$\Omega_l^{(2)} \equiv \frac{1}{R_0^2} \mathbf{P}_l \mathbf{Q}_l^{-1} \left(\mu_L \mathbf{K}_l^{\mu_L} + (\lambda_L + \mu_L) \mathbf{K}_l^{\lambda_L + \mu_L} \right), \quad (5.68)$$

$$\mathbf{X}_l \equiv \frac{1}{R_0^2} \mathbf{P}_l \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{K}_l^{\bar{\sigma}}, \quad (5.69)$$

$$\mathbf{W}_{lm} \equiv \frac{1}{\epsilon R_0} \mathbf{P}_l \mathbf{Q}_l^{-1} \left(\mathbf{Q}_l - \tilde{\mathbf{Q}}_l \right) \mathbf{v}_{lm}^\infty \quad (5.70)$$

schreiben. Für die radialen Biegemoden ($s = Y$) und die tangentialen Schermoden ($s = \Phi$) erhält man

$$\eta_l V_{lm}^Y/(\epsilon R_0) = - \left(\Omega_l^{(1)} + \bar{\sigma} X_l \right) u_{lm}^Y + \left(\Omega_l^{(2)} (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{lm}^Y + W_{lm}^Y \right), \quad (5.71)$$

$$\tilde{\eta}_l V_{lm}^\Phi/(\epsilon R_0) = -\Omega_l^{(3)} u_{lm}^\Phi + W_{lm}^\Phi \quad (5.72)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega_l^{(1)} &\equiv -\eta_l \left((\Omega_l^{(1)})^{YY} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}} (\Omega_l^{(1)})^{Y\Psi} \right) \\ &= 4\Omega_l^{(3)} + \frac{1}{R_0^3} (l+2)^2 (l+1) l (l-1)^2 \kappa, \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\Omega_l^{(2)} \equiv -\eta_l \left((\Omega_l^{(2)})^{YY} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}} (\Omega_l^{(1)})^{Y\Psi} \right) = 4\Omega_l^{(3)}, \quad (5.74)$$

$$\Omega_l^{(3)} \equiv -\tilde{\eta}_l (\Omega_l^{(2)})^{\Phi\Phi} = \frac{4F_l}{R_0} \mu_L = \frac{1}{R_0} (l+2)(l-1) \mu_L, \quad (5.75)$$

$$X_l \equiv \eta_l \left((\mathbf{X}_l^{(1)})^{YY} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}} (\mathbf{X}_l^{(1)})^{Y\Psi} \right) = \frac{1}{R_0} (l+2)(l+1) l (l-1), \quad (5.76)$$

$$W_{lm}^Y \equiv \eta_l ((\mathbf{W}_{lm})^Y) = \frac{(2l+1)\eta^\circ}{\epsilon R_0} \left((2l^2 + 2l - 3)v_{Ylm}^\infty + \sqrt{l(l+1)}v_{\Phi lm}^\infty \right), \quad (5.77)$$

$$W_{lm}^\Phi \equiv \tilde{\eta}_l ((\mathbf{W}_{lm})^\Phi) = \frac{\eta^\circ}{\epsilon R_0} (2l+1)v_{\Phi lm}^\infty, \quad (5.78)$$

$$\eta_l \equiv (l^2(2l+3) - 5)\eta^i + (l^2(2l+3) + 4)\eta^\circ, \quad (5.79)$$

$$\tilde{\eta}_l \equiv (l-1)\eta^i + (l+2)\eta^\circ. \quad (5.80)$$

Bei der radialen Bewegungsgleichung wurde die lokale Flächenerhaltung ausgenutzt, mit Hilfe derer sich die tangentialen Streckdeformationen

$$u_{lm}^\Psi \approx \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}} (u_{lm}^Y - (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{lm}^Y) \quad (5.81)$$

durch die radialen Deformationen ersetzen lassen. Hierbei verschwindet $X_l^{Y\Psi} = 0$. In den Gleichungen für die tangentialen Streckmoden ($s = \Psi$) stecken daher keine zusätzlichen Informationen.

Globale Flächenerhaltung

Der formal freie Entwicklungsparameter ϵ wird nun durch

$$\epsilon \equiv \sqrt{\Delta/2} \quad (5.82)$$

festgelegt, wodurch die Flächennormierung (5.21) der Moden

$$1 = \sum_{l \geq 1, m} F_l |u_{lm}^Y|^2 = \sum_{l \geq 1, m} F_l |U_{lm}^Y|^2 \quad (5.83)$$

unabhängig von der Exzessfläche Δ wird. Werden die radialen Moden u_{lm}^Y und U_{lm}^Y sowie die Geschwindigkeiten W_{lm}^Y und V_{lm}^Y mit gleichem l jeweils in einen Vektor

$$\mathbf{u}_l \equiv (u_{l,l}^Y, \dots, u_{lm}^Y, \dots, u_{l,-l}^Y)^T, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{U}_l \equiv (U_{l,l}^Y, \dots, U_{lm}^Y, \dots, U_{l,-l}^Y)^T, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{W}_l \equiv (W_{l,l}^Y, \dots, W_{lm}^Y, \dots, W_{l,-l}^Y)^T, \quad (5.86)$$

$$\mathbf{V}_l \equiv (V_{l,l}^Y, \dots, V_{lm}^Y, \dots, V_{l,-l}^Y)^T \quad (5.87)$$

geschrieben, lautet die Flächennormierung (5.83) und die Advektionsgeschwindigkeit (5.71) bzw. die (im Falle konstanter Drehachse) radiale Bewegungsgleichung (5.60)

$$1 = \sum_{l \geq 1, m} F_l \mathbf{u}_l^\dagger \mathbf{u}_l = \sum_{l \geq 1, m} F_l \mathbf{U}_l^\dagger \mathbf{U}_l, \quad (5.88)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_l = \mathbf{V}_l / (\epsilon R_0) = \bar{\sigma} \alpha_l \mathbf{u}_l + \beta_l \quad (5.89)$$

mit

$$\alpha_l \equiv -\eta_l^{-1} X_l, \quad (5.90)$$

$$\beta_l \equiv \eta_l^{-1} \left(-\Omega_l^{(1)} \mathbf{u}_l + \Omega_l^{(2)} (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_l + \mathbf{W}_l \right). \quad (5.91)$$

Differenzieren der Flächenerhaltung (5.88) ergibt

$$0 = \partial_t \sum_{l \geq 1} F_l \mathbf{u}_l^\dagger \mathbf{u}_l = \sum_{l \geq 1} F_l \left((\partial_t \mathbf{u}_l)^\dagger \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_l^\dagger \partial_t \mathbf{u}_l \right). \quad (5.92)$$

Durch Einsetzen der Bewegungsgleichung (5.89) erhält man die homogene Oberflächenspannung

$$\bar{\sigma} = - \left(\sum_{l \geq 1} F_l \alpha_l \mathbf{u}_l^\dagger \beta_l \right) \left(\sum_{l \geq 1} F_l \alpha_l \mathbf{u}_l^\dagger \mathbf{u}_l \right)^{-1}. \quad (5.93)$$

Hierbei wurde neben der Normierung (5.88) benutzt, dass der Term $\mathbf{b}_l^\dagger \mathbf{u}_l$ reell ist, woraus $\mathbf{b}_l^\dagger \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_l^\dagger \mathbf{b}_l$ folgt. Eingesetzt in Gleichung (5.89) ergibt sich schließlich mit Hilfe des Projektors $\mathbf{P}^{\bar{\sigma}}$ mit Komponenten

$$\mathbf{P}_{ll'}^{\bar{\sigma}} \equiv \delta_{ll'} \mathbf{1} - \frac{\alpha_l F_{l'} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_{l'}^\dagger}{\sum_{l''} \alpha_{l''} F_{l''} \mathbf{u}_{l''}^\dagger \mathbf{u}_{l''}}, \quad (5.94)$$

$$P_{lm'l'm'}^{\bar{\sigma}} \equiv \delta_{ll'} \delta_{mm'} - \frac{\alpha_l F_{l'} u_{lm}^Y u_{l'm'}^{Y*}}{\sum_{l''m''} \alpha_{l''} F_{l''} |u_{l''m''}|^2} \quad (5.95)$$

die Advektionsgeschwindigkeit, die lokal und global die Fläche erhält

$$\mathbf{V}_l / (\epsilon R_0) = \sum_{l' \geq 1} \mathbf{P}_{ll'}^{\bar{\sigma}} \beta_{l'} = \sum_{l' \geq 1} \mathbf{P}_{ll'}^{\bar{\sigma}} \eta_{l'}^{-1} \left(-\Omega_{l'}^{(1)} \mathbf{u}_{l'} + \Omega_{l'}^{(2)} (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{l'} + \mathbf{W}_{l'} \right). \quad (5.96)$$

In Form der radialen Einzelkomponenten u_{lm}^Y lautet die Advektionsgeschwindigkeit

$$V_{lm}^Y / (\epsilon R_0) = \sum_{l' \geq 1, m'} \eta_{l'}^{-1} P_{lm'l'm'}^{\bar{\sigma}} \left(-\Omega_{l'}^{(1)} u_{l'm'}^Y + \Omega_{l'}^{(2)} (\mathbf{D}_\Phi \mathbf{U})_{l'm'}^Y + W_{l'm'}^Y \right). \quad (5.97)$$

Die tangentialen Bewegungsgleichungen (5.72) der Schermoden ($s = \Phi$) entkoppeln und lauten explizit

$$V_{lm}^\Phi / (\epsilon R_0) = \frac{-(l+2)(l-1)\mu_L u_{lm}^\Phi + \eta^\circ (2l+1) v_{\Phi lm}^\infty / \sqrt{\Delta/2}}{R_0((l-1)\eta^i + (l+2)\eta^\circ)}. \quad (5.98)$$

Speziell für die Rotationsmoden ($l = 1$) gilt mit (5.82)

$$V_{1m}^\Phi = R_0 \sqrt{\Delta/2} D_t u_{1m}^\Phi = v_{\Phi 1m}^\infty. \quad (5.99)$$

Die Kraft der homogenen Oberflächenspannung aufgrund der globalen Flächenerhaltung wirkt sich also dadurch aus, dass im Anschluss an die Projektion, die die lokale Flächenerhaltung sichert, der Projektionsoperator $\mathbf{P}^{\bar{\sigma}}$ auf die übrigen Terme der radialen Advektionsgeschwindigkeit angewendet wird. Der Projektionsoperator koppelt hierbei auf nicht-lineare Weise die radialen Moden mit verschiedenen Werten für l und m . Ohne Flächenerhaltung gäbe es in dieser Ordnung nur entkoppelte lineare Bewegungsgleichungen der einzelnen Moden.

Rotation und Advektion

Damit die Deformationen klein bleiben, wird die Dynamik der Drehung $\Phi(t)$ eindeutig über die Bedingung festgelegt, dass das Deformationsfeld \mathbf{u} stets keine reinen Rotationsmoden Φ_{1m} enthalten soll. Hierzu betrachtet man den radialen Vektor $\mathbf{e}_r(\vartheta_1, \varphi_1)$ zur Zeit t , der zum Zeitpunkt $t + dt$ durch die infinitesimale Drehung $d\Phi(t) = \partial_t \Phi(t) dt$ auf den Vektor $\mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2)$ gedreht wird und verwendet im Weiteren die Interpretation

$$\mathbf{u}(\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)) \equiv \mathbf{u}(\vartheta, \varphi) \quad (5.100)$$

für das Deformationsfeld der Membran. Der materielle Punkt, der sich zur Zeit t an Position $R_0(\mathbf{e}_r(\vartheta_1, \varphi_1) + \epsilon \mathbf{u}(\vartheta_1, \varphi_1, t))$ befindet, liegt zur Zeit $t + dt$ bezüglich der Koordinaten (ϑ_1, φ_1) am Ort $R_0(\mathbf{e}_r(\vartheta_1, \varphi_1) + \epsilon \mathbf{u}(\vartheta_1, \varphi_1, t) + \mathbf{V}(\vartheta_1, \varphi_1, t) dt)$ und bezüglich der Koordinaten (ϑ_2, φ_2) am Ort $R_0(\mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2) + \epsilon \mathbf{u}(\vartheta_2, \varphi_2, t + dt))$. Mit Hilfe der infinitesimalen Drehung

$$\mathbf{e}_r(\vartheta_1, \varphi_1) \approx \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2) - \partial_t \Phi(t) \times \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2) dt \quad (5.101)$$

gilt für das Deformationsfeld zur Zeit $t + dt$

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{u}(\vartheta_2, \varphi_2, t + dt) &\approx \epsilon \mathbf{u}(\vartheta_2, \varphi_2, t) \epsilon \partial_t \mathbf{u}(\vartheta_2, \varphi_2, t) dt \\ &\approx \epsilon \mathbf{u}(\vartheta_1, \varphi_1, t) + (\mathbf{V}(\vartheta_1, \varphi_1, t) / R_0 - \partial_t \Phi(t) \times \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2)) dt. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Die Koordinaten (ϑ_1, φ_1) hängen über die infinitesimale Drehung durch (5.101) mit den Koordinaten (ϑ_2, φ_2) zusammen. In erster Ordnung in dt gilt $\mathbf{V}(\vartheta_1, \varphi_1, t) dt \approx \mathbf{V}(\vartheta_2, \varphi_2, t) dt$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\vartheta_1, \varphi_1, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{e}_r(\vartheta_1, \varphi_1), t) = \mathbf{u}(\mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2) - \partial_t \Phi(t) \times \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2) dt, t) \\ &\approx \mathbf{u}(\vartheta_2, \varphi_2, t) - (\partial_t \Phi(t) \times \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2)) \cdot \nabla \mathbf{u}(\vartheta_2, \varphi_2, t) dt, \end{aligned} \quad (5.103)$$

woraus schließlich mit (5.82) die Bewegungsgleichung

$$\sqrt{\Delta/2} D_t \mathbf{u}(\vartheta, \varphi, t) = R_0^{-1} \mathbf{V}(\vartheta, \varphi, t) - \partial_t \Phi(t) \times \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \quad (5.104)$$

mit der substantiellen Ableitung

$$D_t \equiv \partial_t + (\partial_t \Phi(t) \times \mathbf{e}_r(\vartheta_2, \varphi_2)) \cdot \nabla \quad (5.105)$$

folgt. Die Drehrate $\partial_t \Phi(t)$ wird so gewählt, dass die Φ_{1m} -Moden auf der rechten Seite von (5.104) verschwinden, dass die Rotationsachse also dem Rotationsanteil des äußeren Flusses folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(t) &= -\frac{1}{2R_0} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(V_{10}^\Phi \mathbf{e}_z - V_{11}^\Phi \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{2} + V_{1,-1}^\Phi \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{2} \right) \\ &\stackrel{(5.99)}{=} -\frac{1}{2R_0} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(v_{\Phi 10}^\infty \mathbf{e}_z - v_{\Phi 11}^\infty \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{2} + v_{\Phi 1,-1}^\infty \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.106)$$

Enthält der äußere Fluss nur Rotationen mit Frequenz $\omega(t)$ um die z -Achse, d.h.

$$v_{\Phi 10}^\infty = -2R_0 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \omega(t), \quad v_{\Phi 11}^\infty = v_{\Phi 1,-1}^\infty = 0, \quad (5.107)$$

lauten die Bewegungsgleichungen für die Drehung (5.106) und das Deformationsfeld (5.104)

$$\partial_t \Phi(t) = \omega(t) \quad (5.108)$$

$$(\partial_t + \omega(t) \partial_\varphi) \mathbf{u}(\vartheta, \varphi, t) = \sqrt{2/\Delta} (R_0^{-1} \mathbf{V}(\vartheta, \varphi, t) - \omega(t) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi(\vartheta, \varphi)). \quad (5.109)$$

5.2.7 Reduzierte Bewegungsgleichungen

Der hier betrachtete lineare Fluss (2.37) hat als einzige Rotationsmode eine Drehung konstanter Frequenz ω um die z -Achse

$$v_{\Phi 10}^{\infty} = -2R_0 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \omega. \quad (5.110)$$

Sein Elongationsanteil besteht aus den vier Moden

$$v_{Y22}^{\infty} = -v_{Y2,-2}^{\infty} = -2i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} R_0 s, \quad v_{\Psi 22}^{\infty} = -v_{\Psi 2,-2}^{\infty} = -2i \sqrt{\frac{3\pi}{15}} R_0 s. \quad (5.111)$$

Besteht das Deformationsfeld einer axisymmetrischen Referenzkapsel nur aus den Moden mit $l = 2$ und startet die Kapsel zum Anfangszeitpunkt aus der Referenzform und symmetrisch zum Fluss, bleibt diese Symmetrie unter der Dynamik erhalten und nur die Deformationsmoden mit $s = Y, \Psi$, $l = 2$ und $m = 0, \pm 2$ bleiben angeregt. Ferner ist die Drehachse unter der Dynamik in Richtung der z -Achse erhalten

$$\Phi = \Phi e_z, \quad (5.112)$$

so dass zur Beschreibung der Drehung der Drehwinkel Φ genügt. Die Zahl der radialen Deformationsmoden reduziert sich aufgrund der Symmetrie auf die radialen Moden $u_{20}^Y \equiv u_0$ und $u_{2\pm 2}^Y \equiv u_{\pm 2}$, die mit den entsprechenden tangentialen Moden u_{20}^{Ψ} und $u_{2\pm 2}^{\Psi}$ gekoppelt sind. Bei der Referenzmembran gibt es nur die radialen Deformationsmoden $U_{20}^Y \equiv U_0$ und $U_{2\pm 2}^Y \equiv U_{\pm 2}$. Aufgrund der Normierung dieser Moden (beachte $F_2 = 1$)

$$\sum_m |u_m|^2 = \sum_m |U_m|^2 = 1 \quad (5.113)$$

reduziert sich die Zahl der unabhängigen Deformationsmoden u_{im}^s um eins, wobei sich die angeregten Moden durch zwei Freiheitsgrade β und Ψ in der Form

$$u_0 \equiv \cos \beta, \quad (5.114)$$

$$u_{\pm 2} \equiv \sin \beta \exp(\mp 2i\Psi) \quad (5.115)$$

parametrisieren lassen. Die Referenzform ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit alleine durch den Parameter $\hat{\beta}$ über

$$U_0 \equiv \cos \hat{\beta}, \quad (5.116)$$

$$U_{\pm 2} \equiv \sin \hat{\beta} \quad (5.117)$$

mit $\hat{\beta} \in [0, \pi/2]$ gegeben. Bei den Freiheitsgraden handelt es sich um den schon bekannten Anstellwinkel Ψ , der die Orientierung der langen Halbachse angibt, und um die Formparameter $\beta, \hat{\beta} \in [0, \pi/2]$, die die Exzentrizität der Membranform und Referenzform innerhalb der Scherebene messen. Im Grenzfall $\beta = 0$ ist nur die Mode u_0 angeregt und der Schnitt der Kapsel mit der Scherebene ist kreisförmig, wie in Abbildung 5.2 zu sehen ist. Senkrecht dazu ist die Kapsel maximal gestreckt. Es handelt sich hier also um eine axisymmetrische prolate Form mit Symmetrieachse senkrecht zur Scherebene. Im Grenzfall $\beta = \pi/2$ sind nur die Moden $u_{\pm 2}$ angeregt und der Schnitt der Kapsel mit der Scherebene ist maximal gestreckt, wie in Abbildung 5.3 zu sehen ist. Senkrecht dazu ist die Kapsel minimal gestreckt. Es handelt sich auch hier um eine axisymmetrische prolate Form, wobei hier die Symmetrieachse innerhalb der Scherebene liegt. Die Lage der Symmetrieachse, auf der die lange Achse der Kapsel liegt,

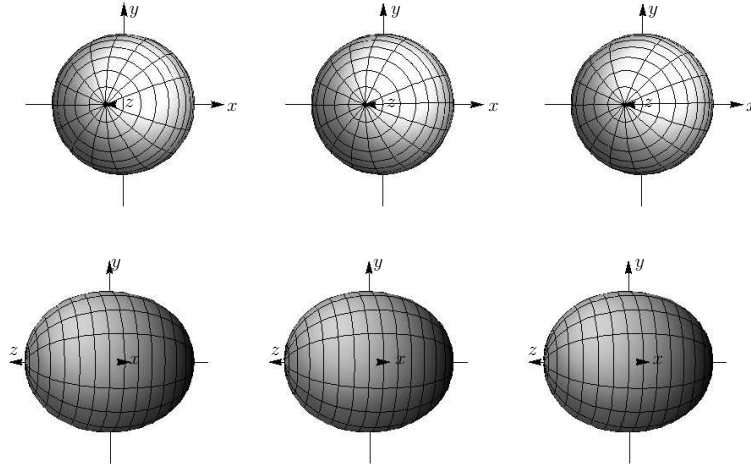


Abbildung 5.2: Darstellung einer prolaten axisymmetrischen Kapselform ($\beta = 0$), die entlang der z -Achse maximal gestreckt ist, für feste Parameter $\Delta = 0,08$, $\phi = 0$. Der Anstellwinkel $\Psi = 0, \pi/4, \pi/2$ (von links nach rechts) ändert nichts an der Form. In der oberen Bildfolge liegt der Blickpunkt nahe der z -Achse, während er in den unteren Bildern nahe der x -Achse liegt.

innerhalb der Scherebene ist dabei durch den Anstellwinkel Ψ gegeben. Für Werte dazwischen $0 < \beta < \pi/2$ sind sowohl die Mode u_0 also auch die Moden $u_{\pm 2}$ angeregt, und die Kapsel ist nicht mehr axisymmetrisch, siehe Abbildung 5.4. Der Zustand der Kapsel wird also durch den Formparameter β , den Anstellwinkel Ψ und den Drehwinkel Φ beschrieben. Anstelle des Drehwinkels Φ , der dem Phasenwinkel Φ bzgl. des Scherflusssystems entspricht (3.2), kann der Phasenwinkel ϕ bzgl. der Membranform verwendet werden.

Die Bewegungsgleichungen des Drehwinkels Φ (5.108) und der radialen Deformationsmoden mit $l = 2$ (5.109) in niedrigster Ordnung lauten nun

$$\partial_t \Phi = \omega, \quad (5.118)$$

$$(\partial_t + im\omega)u_m = \frac{1}{23\eta^i + 32\eta^o} \sum_{m'} (\delta_{mm'} - u_m u_{m'}^*) \times \left(\frac{16\mu_L}{R_0} \exp(-im'\Phi) U_{m'} - 240i \sqrt{\frac{\pi}{15\Delta}} (\delta_{m',2} - \delta_{m',-2}) \eta^o s \right). \quad (5.119)$$

Hierbei wurde die Projektionseigenschaft $\sum_{m'} (\delta_{mm'} - u_m u_{m'}^*) u_{m'} = 0$ benutzt, woraus folgt, dass die Dynamik in niedrigster Ordnung unabhängig von der Biegesteifigkeit ist. Neben der dimensionslosen Zeit

$$\hat{\tau} \equiv 8 \sqrt{\frac{30\pi}{\Delta}} \frac{s}{32 + 23\eta^i/\eta^o} t \quad (5.120)$$

werden zwei unabhängige dimensionslose Parameter definiert

$$\Lambda \equiv \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\Delta}{30\pi}} (32 + 23\eta^i/\eta^o)^{-\frac{\omega}{s}}, \quad (5.121)$$

$$S \equiv \sqrt{\frac{30\pi}{\Delta}} \frac{R_0 \eta^o}{\mu_L \sin \hat{\beta}} s, \quad (5.122)$$

die zusammen mit der Referenzform $\hat{\beta}$ alle Parameter berücksichtigen. Für einen allgemeinen Scher- und Elongationsfluss (2.148), d.h. für unabhängige ω und s , messen die Parameter

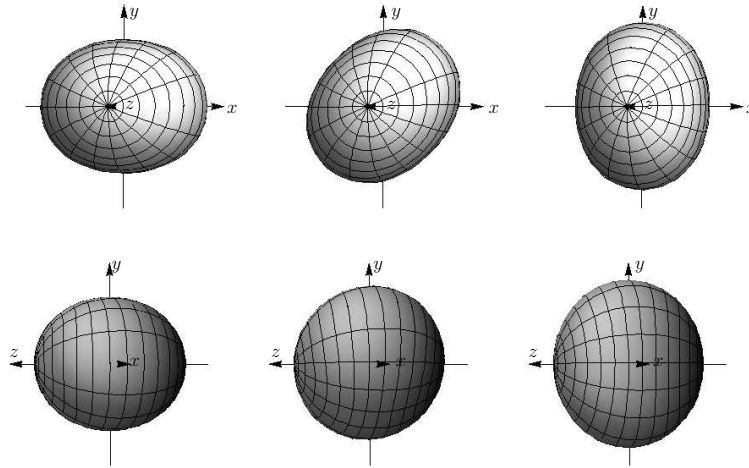


Abbildung 5.3: Darstellung einer prolaten axisymmetrischen Kapselform ($\beta = \pi/2$), die in der xy -Ebene maximal gestreckt ist, für verschiedene Anstellwinkel $\Psi = 0, \pi/4, \pi/2$ (von links nach rechts) und feste Parameter $\Delta = 0,08, \phi = 0$. In der oberen Bildfolge liegt der Blickpunkt nahe der z -Achse, während er in den unteren Bildern nahe der x -Achse liegt.

Λ und S die Stärken des Rotations- und Elongationsanteils. Für einen linearen Scherfluss $s = -\omega = \dot{\gamma}/2$ hingegen ist Λ ein Maß des Viskositätsverhältnisses, während S eine dimensionslose Scherrate darstellt. In dimensionsloser Zeit $\hat{\tau}$ und in der obigen Parametrisierung folgen durch Einsetzen von (5.114) – (5.117) in (5.118) und (5.119) schließlich die drei Bewegungsgleichungen

$$\partial_{\hat{\tau}}\Psi = -\Lambda + \partial_{\hat{\tau}}\phi, \quad (5.123)$$

$$\sin\beta \partial_{\hat{\tau}}\phi = -S^{-1} \sin 2\phi - \cos 2\Psi, \quad (5.124)$$

$$\partial_{\hat{\tau}}\beta = -S^{-1} \cot\hat{\beta} \sin\beta + \cos\beta(S^{-1} \cos 2\phi + \sin 2\Psi). \quad (5.125)$$

Es handelt sich hierbei um die zentralen Gleichungen dieses Kapitels. Bevor im nächsten Unterkapitel 5.3 diese quasisphärischen Bewegungsgleichungen (5.123)–(5.125) numerisch und analytisch untersucht sowie die Ergebnisse diskutiert werden, wird kurz auf die Konsistenz dieser Gleichungen mit den Bewegungsgleichungen im reduzierten Modell aus Kapitel 3 eingegangen.

Ignoriert man die Dynamik des Formparameters, indem man ihn konstant hält, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen (3.29) und (3.30) des reduzierten Modells im quasisphärischen Fall $\alpha \rightarrow 0$ durch die Identifizierungen

$$\tau = \frac{\hat{\tau}}{\sin\beta}, \quad (5.126)$$

$$\tilde{\lambda} = \Lambda \sin\beta, \quad (5.127)$$

$$\tilde{\chi} = S. \quad (5.128)$$

Ist die Dynamik des Formparameters β im Vergleich zu den beiden Winkeln Ψ und ϕ langsam, ergibt sich die schnelle Dynamik dieser beiden Winkeln direkt aus dem Phasendiagramm des reduzierten Modells im quasisphärischen Grenzfalle (siehe Abbildung 3.3). Wie später gezeigt wird, ändert sich die Form bei starkem Scherfluss auf einer viel langsameren Zeitskala als die beiden Winkel. Die Zeitskalenseparation ist der Schlüssel, um die Dynamik quasisphärischer Kapseln zu verstehen.

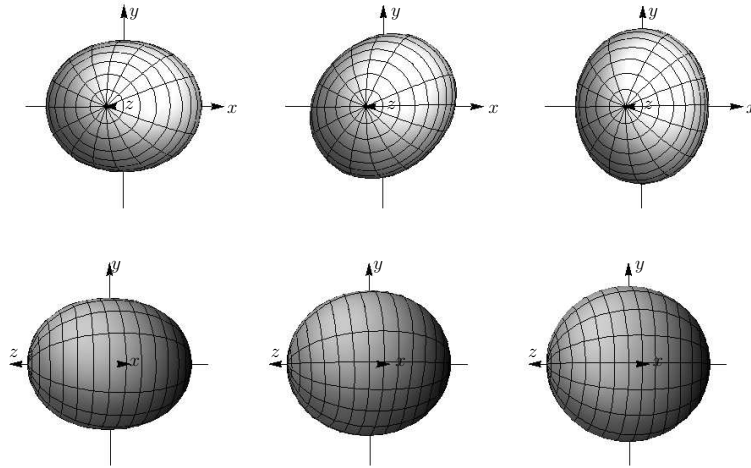


Abbildung 5.4: Darstellung einer Kapsel ($\beta = \pi/4$) für verschiedene Anstellwinkel $\Psi = 0, \pi/4, \pi/2$ (von links nach rechts) und feste Parameter $\Delta = 0,08, \phi = 0$. In der oberen Bildfolge liegt der Blickpunkt nahe der z -Achse, während er in den unteren Bildern nahe der x -Achse liegt.

5.3 Phasendiagramm

Bevor die quasisphärischen Bewegungsgleichungen (5.123)–(5.125) in Abschnitt 5.3.2 analytisch untersucht werden, werden im nächsten Abschnitt 5.3.1 Ergebnisse vorgestellt, die durch direkte numerische Integration der Bewegungsgleichungen folgen. Als Wert für den Formparameter der Referenzmembran wird speziell $\hat{\beta} = \pi/3$ gewählt, was einem axisymmetrischen Ellipsoid mit langer Halbachse entlang der x -Achse innerhalb der Scherebene entspricht. Die Kapsel startet hierbei stets aus ihrer Ruheform $\beta(0) = \hat{\beta}$. Die Anfangswerte der beiden Winkel Ψ und ϕ sind für das Phasenverhalten unerheblich. Inwiefern die Anfangsform die Dynamik im Langzeitlimit beeinflusst, wird am Ende der Analyse aufgezeigt.

5.3.1 Numerische Ergebnisse

Als Ordnungsparameter, der die verschiedenen Bewegungsformen unterscheidet, eignen sich die mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ und der mittlere Formparameter $\langle \beta \rangle$ im Langzeitlimit, wobei in Abbildung 5.5 zu erkennen ist, dass der Formparameter $\langle \beta \rangle$ zur Unterscheidung der verschiedenen Phasen besser geeignet ist. In Abbildung 5.5 werden auf der linken Seite die mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ und auf der rechten Seite der mittlere Formparameter $\langle \beta \rangle$ als Funktion des Viskositätskontrasts Λ und der Scherrate S in Grauskalenabbildungen dargestellt. Die dunkelsten Grautöne entsprechen den Minimalwerten $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = \langle \beta \rangle = 0$, während die hellsten Grautöne die Maximalwerte $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$ bzw. $\langle \beta \rangle = \pi/2$ kennzeichnen.

Es können wie schon beim reduzierten Modell drei Bereiche unterschieden werden. Für kleine Scherraten (grob gegeben durch $S \lesssim 1$ oder $S \lesssim 0.63\Lambda$) taumelt die Kapsel $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 1$, wobei die Form näherungsweise axisymmetrisch bleibt $\beta \simeq \hat{\beta} = \pi/3$, wie man in den Abbildungen 5.6, links und 5.8, oben erkennen kann. Der linearen Bewegung des Anstellwinkels sowie den konstanten Werten des Phasenwinkels und des Formparameters sind Oszillationen mit Frequenz 2Λ überlagert, d.h. der doppelten Rotationsfrequenz des Scherflusses, siehe Abb. 5.6, links.

Für geringen skalierten Viskositätskontrast ($\Lambda \lesssim 1$) und große Scherraten ($S \gtrsim 1$) schwingt

die Kapsel $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$ um einen konstanten Anstellwinkel, wobei die Kapsel in der Scherebene aufgrund des Elongationsanteiles stark exzentrisch ist ($\beta \simeq \pi/2$), siehe Abb. 5.6, rechts. Den Bewegungen sind auch hier Oszillationen mit Frequenz 2Λ überlagert. Die Abhängigkeit der mittleren Taumelrate und des mittleren Anstellwinkels $\langle \Psi \rangle$ von Λ sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Die Amplitude $\Delta\Psi$ der Oszillationen des Anstellwinkels finden sich in Abbildung 5.9, oben.

Im Bereich zwischen Taumeln und Schwingen findet nun keine intermittierende Bewegung, sondern eine transiente Bewegung statt, bei der die Kapsel von anfänglichen Taumelbewegungen in stabile Schwingbewegungen $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n = 0$ relaxiert, siehe Abb. 5.6, unten. Hierbei relaxiert der Formparameter β langsam, bis eine Form entsteht, die in der Scherebene fast kreisförmig ist und die senkrecht dazu stark ausgelenkt ist. Es zeigt sich also bereits aus den phänomenologischen Ergebnissen, dass die Intermittenz ein Artefakt des reduzierten Modells ist und es insbesondere im intermittierenden bzw. transienten Bereich wichtig ist, Formänderungen in der Dynamik zu berücksichtigen.

In Abbildung 5.7 ist schließlich noch für konstante dimensionslose Scherrate $S = 10$ der mittlere Anstellwinkel $\langle \Psi \rangle$ als Funktion des Viskositätskontrasts Λ im Schwingbereich und im transienten Bereich dargestellt. Der mittlere Anstellwinkel fällt von $\pi/4$ bei geringem Viskositätskontrast auf Werte nahe 0. Hier findet der Übergang zum transienten Bereich statt, in dem sich der mittlere Anstellwinkel weiter dem Wert 0 annähert.

5.3.2 Analytische Ergebnisse

Nachdem die numerische Phänomenologie im vorigen Abschnitt dargestellt worden ist, werden nun die Bewegungsgleichungen analytisch untersucht. Sowohl für den Schwing- als auch den transienten Bereich samt Phasenübergang werden im Grenzfall großer Scherrate $S \rightarrow \infty$ und konstantem Viskositätskontrast Λ analytische Ergebnisse präsentiert. Ein zweiter Grenzfall beschäftigt sich mit dem Taumel- und dem transienten Bereich, wobei hier Scherrate und Viskositätskontrast mit konstantem Verhältnis divergieren $S, \Lambda \rightarrow \infty$.

Als zentrales Ergebnis wird Abbildung 5.8 hervorgehoben, in der innerhalb des Schnittes durch das Phasendiagramm mit $S = 10$ die Abhängigkeit des mittleren Formparameters $\langle \beta \rangle$ vom Viskositätskontrast Λ dargestellt ist. Hier startet die Kapsel im oberen Schaubild aus ihrer Referenzform $\beta(0) = \hat{\beta} = \pi/3$. Man erkennt die drei Bereiche des Schwingens, der transienten Bewegung und des Taumelns. Die grauen Kurven sind Schaubilder analytischer Ergebnisse, die im Weiteren abgeleitet und erläutert werden. Weil jedoch an den analytischen Kurven der Abbildung 5.8, oben schon zu erkennen ist, dass neben der stabilen Taumelbewegung noch eine stabile transiente Bewegung existieren kann, ist im unteren Schaubild der Abbildung 5.8 der langfristige mittlere Formparameter $\langle \beta \rangle$ für den Fall gezeigt, dass der Formparameter im Bereich $\Lambda > 1$ nahe des zweiten Attraktors mit $\arcsin(1/\Lambda)$ startet.

Übergang zwischen Schwingem und transienter Bewegung

Im Grenzfall $S \rightarrow \infty$ und $\Lambda \sim 1$ haben die Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit von Λ qualitativ unterschiedliche Lösungen. Analytische Lösungen werden hierzu in erster bzw. zweiter Ordnung in $1/S$ für die Fälle $\Lambda < 1$ und $\Lambda > 1$ angegeben.

- Im Fall $\Lambda < 1$, d.h. im **Schwingbereich** ergeben sich im Langzeitlimes $\hat{\tau} \rightarrow \infty$ als

Lösungen stabile Schwingbewegungen mit

$$\Psi(\hat{\tau}) \approx \frac{1}{2} \arccos \Lambda - \frac{1}{2S} \sin(2\Lambda\hat{\tau}), \quad (5.129)$$

$$\phi(\hat{\tau}) \approx \frac{1}{4}(2 \arccos \Lambda - \pi) - \Lambda\hat{\tau} + \frac{1}{2S} \sin(2\Lambda\hat{\tau}), \quad (5.130)$$

$$\beta(\hat{\tau}) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cot \hat{\beta}}{S\sqrt{1-\Lambda^2}}. \quad (5.131)$$

Abweichungen vom stabilen Grenzyklus klingen dabei exponentiell ab. Der Formparameter β ist in dieser Ordnung zeitlich konstant und fällt von $\pi/2 - \cot \hat{\beta}/S$ mit steigendem Viskositätskontrast Λ ab, was im Bereich $\Lambda < 1$ in Abbildung 5.8 dargestellt ist. Seine Oszillationen können erst in zweiter Ordnung angeregt werden. Hier ergibt sich eine im Vergleich zu den beiden Winkeln um $\pi/2$ verschobene Oszillation

$$\beta(\hat{\tau}) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cot \hat{\beta}}{S\sqrt{1-\Lambda^2}} + \frac{\cot \hat{\beta}}{S^2\sqrt{1-\Lambda^2}} \cos(2\Lambda\hat{\tau}). \quad (5.132)$$

Die Dynamik des Phasen- und Anstellwinkels kann auch in zweiter Ordnung analytisch bestimmt werden, wobei die Ergebnisse aufgrund ihres Umfangs hier nicht präsentiert werden.

Im Unterschied zum Formparameter oszillieren Phasenwinkel und Anstellwinkel bereits in erster Ordnung. Sie schwingen dabei gegenphasig mit gleicher Amplitude $1/(2S)$. Abbildung 5.9 zeigt sowohl numerische Ergebnisse der Oszillationsamplituden $\Delta\Psi$ und $\Delta\beta$ des Anstellwinkels Ψ und des Formparameters β als auch die analytischen Ergebnisse in erster Ordnung in $1/S$. Lediglich die Amplitude der Form ist in zweiter Ordnung dargestellt. Der mittlere Anstellwinkel $\langle\Psi\rangle$ fällt innerhalb des Schwingbereichs ab und erreicht in erster Ordnung den Wert 0 am Übergang zum transienten Bereich, siehe auch Abb. 5.7.

- Im Fall $\Lambda > 1$, d.h. im **transienten Bereich** ergeben sich im Langzeitlimit nach der transienten Relaxation als Lösungen ebenfalls stabile Schwingbewegungen mit

$$\Psi(\hat{\tau}) \approx \frac{\cot \hat{\beta}}{2S\sqrt{\Lambda^2-1}} + \frac{3\Lambda^2-1}{2S(\Lambda^2+1)} \cos(2\Lambda\hat{\tau}) + \frac{1}{S} \Psi_c(\hat{\tau}), \quad (5.133)$$

$$\phi(\hat{\tau}) \approx -\Lambda\hat{\tau} - \frac{\cot \hat{\beta}}{2S\sqrt{\Lambda^2-1}} - \frac{3\Lambda^2-1}{2S(\Lambda^2+1)} \cos(2\Lambda\hat{\tau}) + \frac{1}{S} \phi_c(\hat{\tau}), \quad (5.134)$$

$$\beta(\hat{\tau}) \approx \arcsin \frac{1}{\Lambda} + \frac{2\sqrt{\Lambda^2-1}}{S(\Lambda^2+1)} \sin(2\Lambda\hat{\tau}) + \frac{1}{S} \beta_c(\hat{\tau}). \quad (5.135)$$

Neben den Oszillationen mit Frequenz 2Λ treten in erster Ordnung noch weitere Oszillationen der geringeren Frequenz $\sqrt{2(\Lambda^2-1)}$ auf, deren Amplituden von den Anfangs-

bedingungen $(\Psi_{\mathbf{c}}(0), \phi_{\mathbf{c}}(0), \beta_{\mathbf{c}}(0))$ abhängen

$$\Psi_{\mathbf{c}}(\hat{\tau}) \equiv \Psi_{\mathbf{c}}(0) \cos(\sqrt{2(\Lambda^2 - 1)}\hat{\tau}) - \beta_{\mathbf{c}}(0) \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2(\Lambda^2 - 1)}\hat{\tau}), \quad (5.136)$$

$$\phi_{\mathbf{c}}(\hat{\tau}) \equiv \phi_{\mathbf{c}}(0) + \Psi_{\mathbf{c}}(0)(1 - \cos(\sqrt{2(\Lambda^2 - 1)}\hat{\tau})) + \beta_{\mathbf{c}}(0) \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2(\Lambda^2 - 1)}\hat{\tau}), \quad (5.137)$$

$$\beta_{\mathbf{c}}(\hat{\tau}) \equiv \Psi_{\mathbf{c}}(0) \frac{\sqrt{2}}{\Lambda} \sin(\sqrt{2(\Lambda^2 - 1)}\hat{\tau}) + \beta_{\mathbf{c}}(0) \cos(\sqrt{2(\Lambda^2 - 1)}\hat{\tau}). \quad (5.138)$$

Der mittlere Formparameter $\langle \beta \rangle$ fällt mit wachsendem Viskositätskontrast Λ und wachsender Scherrate S gegen 0 ab, d.h. die mittlere Form innerhalb der Scherebene wird immer kreisförmiger, während sich die Achse senkrecht zur Scherebene nahe an ihrem Maximalwert befindet. Die Oszillationen der Form sind deutlich ausgeprägter als innerhalb des Schwingbereichs, siehe Abb. 5.9, unten. Hier beginnt der Formparameter β schon in erster Ordnung in $1/S$ zu oszillieren, d.h. für seine Amplitude gilt $\Delta\beta \sim 1/S$. Sie wird maximal für $\Lambda = \sqrt{3}$ bevor sie im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ (mit $\Lambda \ll S$) wie $1/\Lambda$ abfällt.

Der mittlere Anstellwinkel $\langle \Psi \rangle$ fällt für größeres Λ weiter ab und geht asymptotisch wie $1/\Lambda$ gegen 0, siehe Abb. 5.7. Die Amplitude $\Delta\Psi$ seiner Oszillationen steigen mit wachsendem Λ an und erreichen den Wert $3/(2S)$ asymptotisch, siehe Abb. 5.9. Ab einem von $\hat{\beta}$ abhängigen Wert Λ werden die Amplituden größer als der mittlere Wert, so dass hier die Kapsel so schwingt, dass der Anstellwinkel bei jeder Auslenkung nach unten auch negative Werte annimmt. Für den Fall $\hat{\beta} = \pi/3$ tritt dies schon für Werte $\Lambda \gtrsim 1,1$ ein.

Der Übergang zwischen Schwingbereich und transientem Bereich ist im Ordnungsparameter $\langle \beta \rangle$ kontinuierlich, entspricht also einem Phasenübergang zweiter Ordnung. Im Schwingbereich ist die Kapsel in der Scherebene maximal gestreckt, wobei Formänderungen wenig ausgeprägt sind. Beim transienten Schwingen hingegen ist die Kapsel stark senkrecht zur Scherebene gestreckt, wobei die Form stärker oszilliert. Der mittlere Anstellwinkel ist im Schwingbereich positiv. Erst innerhalb des transienten Schwingens kommt die lange Halbachse in die Nähe der Scherflussrichtung.

Übergang und Koexistenz von Taumeln und transienter Bewegung

Das numerisch erhaltende Phasendiagramm aus Abbildung 5.5 legt nahe, dass der Übergang zum Taumeln für große Werte von Λ und S bei konstantem Verhältnis der Beiden geschieht. Im Grenzfall $S, \Lambda \rightarrow \infty$ mit $\Lambda/S \sim 1$ treten in den Bewegungsgleichungen zwei Zeitskalen auf. Während die Oszillationen der drei Parameter Ψ , ϕ und β auf der kurzen Zeitskala $\sim 1/\Lambda$ mit kleiner Amplitude $\sim 1/S \sim 1/\Lambda$ stattfinden, bewegen sich die mittleren Werte der drei Parameter auf einer langsamen Zeitskala ~ 1 . Die zeitliche Ableitung der kleinen raschen Oszillationen ist daher von Ordnung ~ 1 . Für eine grundlegende Beschreibung der Zeitskalenseparation sei auf [69] verwiesen. Im Folgenden werden erneut zwei Fälle unterschieden. Es werden in niedrigster Ordnung in $1/S$ einmal stationäre Schwing- und einmal stationäre Taumellösungen gesucht.

- Im **transienten Bereich** erwartet man nach der Relaxation in eine stabile Schwingbewegung in niedrigster Ordnung einen linear sich mit $\partial_{\hat{\tau}}\phi = -\Lambda$ ändernden Phasenwinkel ϕ , während Anstellwinkel Ψ und Formparameter β in niedrigster Ordnung konstant sind. Lösen der Bewegungsgleichungen in den führenden Ordnungen ergibt folgende Lösungen in erster Ordnung in $1/\Lambda \sim 1/S$:

$$\Psi(\hat{\tau}) \approx -\frac{3}{2S} \cos(2\Lambda\hat{\tau}), \quad (5.139)$$

$$\phi(\hat{\tau}) \approx -\Lambda\hat{\tau} + \frac{3}{2S} \cos(2\Lambda\hat{\tau}), \quad (5.140)$$

$$\beta(\hat{\tau}) \approx \frac{1}{\Lambda}. \quad (5.141)$$

Diese Lösungen bleiben im gesamten Bereich linear stabil gegenüber Störungen. Auch hier bleibt die Form in erster Ordnung in $1/\Lambda \sim 1/S$ konstant, während die beiden Winkel gegenphasig oszillieren. Der Anstellwinkel oszilliert hierbei um die Scherflussrichtung. In zweiter Ordnung erhält man für den Formparameter die Oszillationen

$$\beta(\hat{\tau}) \approx \frac{1}{\Lambda} - \frac{2}{S\Lambda} \cos(2\Lambda\hat{\tau}). \quad (5.142)$$

Alle Ergebnisse sind konsistent mit dem transienten Langzeitlimites im Grenzfalle $S \rightarrow \infty$, $\Lambda \sim 1$ und $\Lambda > 1$. Denn für $\Lambda \rightarrow \infty$ gilt $\arcsin(1/\Lambda) \approx 1/\Lambda$, $(3\Lambda^2 - 1)/(2S(\Lambda^2 + 1)) \approx 3/(2S)$ und $2\sqrt{\Lambda^2 - 1}/(S(\Lambda^2 + 1)) \approx 2/(S\Lambda)$.

- Im **Taumbereich** erwartet man in niedrigster Ordnung einen sich linear mit $\partial_{\hat{\tau}}\Psi = -\Lambda$ ändernden Anstellwinkel Ψ , während Phasenwinkel ϕ und Formparameter β in niedrigster Ordnung konstant sind. Lösen der Bewegungsgleichungen in den führenden beiden Ordnungen ergibt folgende Lösungen in erster Ordnung in $1/\Lambda \sim 1/S$

$$\Psi(\hat{\tau}) \approx -\Lambda\hat{\tau} + \frac{1}{2\Lambda \sin \beta_0} \sin(2\Lambda\hat{\tau}), \quad (5.143)$$

$$\phi(\hat{\tau}) \approx \phi_0 - \frac{1}{2\Lambda \sin \beta_0} \sin(2\Lambda\hat{\tau}), \quad (5.144)$$

$$\beta(\hat{\tau}) \approx \beta_0 + \frac{\cos \beta_0}{2\Lambda} \cos(2\Lambda\hat{\tau}) \quad (5.145)$$

mit noch unbekannt konstanten Größen ϕ_0 und β_0 der führenden Ordnung ~ 1 . Die Bewegungsgleichungen in erster Ordnung in $1/\Lambda \sim 1/S$ liefern die Bestimmungsgleichungen für diese beiden Größen:

$$\sin^2(2\phi_0) = -\frac{1 + \sin^2 \beta_0}{\sin \beta_0} \frac{S}{4\Lambda}, \quad (5.146)$$

$$\cos^2(2\phi_0) = \frac{\tan \beta_0}{\tan \hat{\beta}}. \quad (5.147)$$

Lösungen dieser Gleichung existieren jedoch erst ab einem bestimmten Verhältnis Λ/S , welches nur von der Referenzform $\hat{\beta}$ abhängt. Durch Eliminierung von ϕ_0 erhält man eine Beziehung zwischen $\hat{\beta}$, Λ/S und β_0 :

$$\frac{\Lambda}{S} = \frac{(3 - \cos(2\beta_0)) \tan \hat{\beta}}{8 \sin \beta_0 \sqrt{\tan^2 \hat{\beta} - \tan^2 \beta_0}}. \quad (5.148)$$

Das Schaubild dieser Funktion ist für den Fall $\hat{\beta} = \pi/3$ in Abbildung 5.8 dargestellt. Es besteht aus zwei Zweigen, von denen für $\Lambda \rightarrow \infty$ der eine Zweig nach 0, der andere nach $\hat{\beta}$ konvergiert. Die beiden Zweige treffen sich am minimalen kritischen Verhältnis Λ/S , an dem Taumelbewegungen noch möglich sind. Für alle geringeren Werte Λ/S gibt es keine Taumelbewegungen. Das kritische Verhältnis hängt alleine von der Referenzform $\hat{\beta}$ ab und kann einfach aus $d\Lambda = 0$ bestimmt werden. Weil die Abhängigkeit von $\hat{\beta}$ sehr umfangreich ist und selbst für konkrete Werte von $\hat{\beta}$ der genaue Wert viel Platz in Anspruch nimmt, sei hier nur der numerische Wert des kritischen Verhältnisses für den Fall $\hat{\beta} = \pi/3$ angegeben: Eine Kapsel kann dann und nur dann taumeln, wenn $\Lambda/S \gtrsim 0,627$ gilt. Für alle Werte unterhalb führt eine transiente Taumelbewegung letztlich auf stabiles Schwingen.

In Abbildung 5.8 ist in beiden Schaubildern der mittlere langfristige Formparameter $\langle \beta \rangle$ als Funktion des skalierten Viskositätskontrasts Λ dargestellt. Neben dem stabilen transienten Schwingbereich gibt es beginnend mit dem kritischen Viskositätskontrast für $\Lambda/S \gtrsim 0,627$ einen stabilen und einen instabilen Taumelzweig. Hier koexistieren die transiente Schwingbewegung und die Taumelbewegung, wobei im Langzeitlimes stets der Taumelzweig erreicht wird, wenn die Kapsel aus ihrer Referenzform startet. Der Übergang zwischen Taumeln und transientem Schwingen entspricht also einem Phasenübergang erster Ordnung.

5.4 Zusammenfassung

Zur Lösung der Diskrepanz zwischen reduziertem Modell und den Ergebnissen der Spektralmethode wurden Bewegungsgleichungen im quasisphärischen Grenzfall bestimmt und untersucht. Schon die numerischen Ergebnisse zeigen, dass innerhalb des Intermittenzbereichs ein transientes Verhalten existiert. Nach anfänglichen Taumelbewegungen wechselt die Kapsel in eine Schwingbewegung. Zuvor relaxiert die Kapsel in eine stabile Form, die dadurch gekennzeichnet ist, dass die Kapsel senkrecht zur Scherebene stark gestreckt ist. Die analytischen Lösungen im Grenzfall starker Flüsse zeigen, dass der Übergang zwischen transientem Verhalten und stabilem Verhalten kontinuierlich ist, während der Übergang zwischen transientem Verhalten und Taumeln einem Phasenübergang zweiter Ordnung entspricht. Alle analytisch bestimmten Größen der Dynamik stimmen dabei sehr gut mit den numerisch bestimmten Werten überein. Insbesondere folgt aus der Analyse, dass der transiente Schwingbereich auch innerhalb des Taumelbereichs stabil bleibt. Hier entscheidet im Wesentlichen die Anfangsform darüber, welche Bewegungsform im Langzeitlimes erreicht wird.

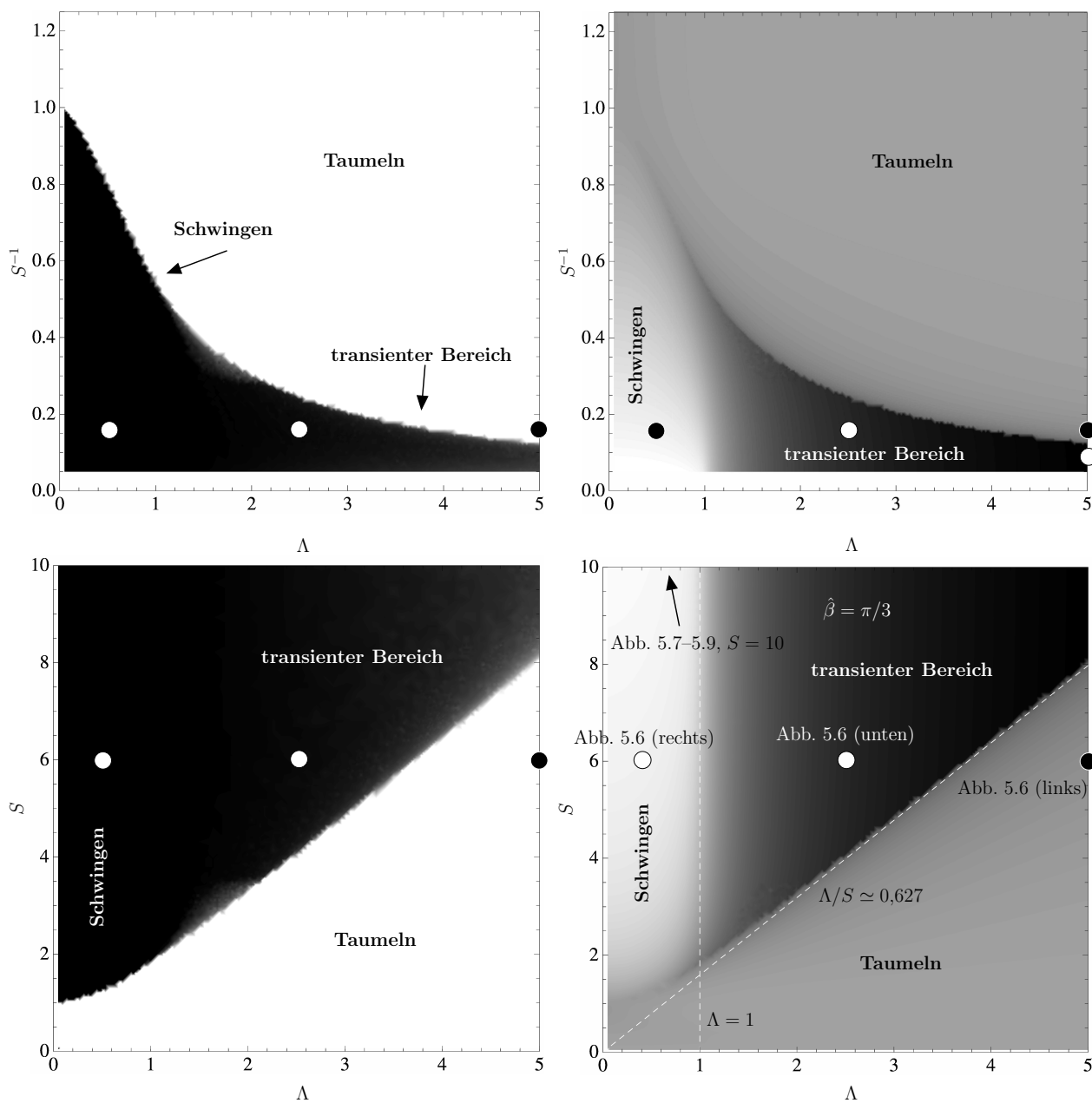


Abbildung 5.5: Phasendiagramm einer quasisphärischen axisymmetrischen Kapsel $\hat{\beta} = \pi/3$. Mittlere Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ (links) und mittlerer Formparameter $\langle \beta \rangle$ (rechts) als Funktion des dimensionslosen Viskositätskontrasts Λ und der inversen dimensionslosen Scherrate S^{-1} (oben) bzw. der dimensionslosen Scherrate S (unten). Durch Vergleich mit dem Phasendiagramm des reduzierten Modells (s. Abb. 3.3) erkennt man, dass Taumel- und Schwingbereich im Wesentlichen identisch sind, während der intermittierende Bereich durch einen transienten Bereich ersetzt wird. Die gestrichelten Linien sind analytische asymptotische Ergebnisse der Phasengrenzen.

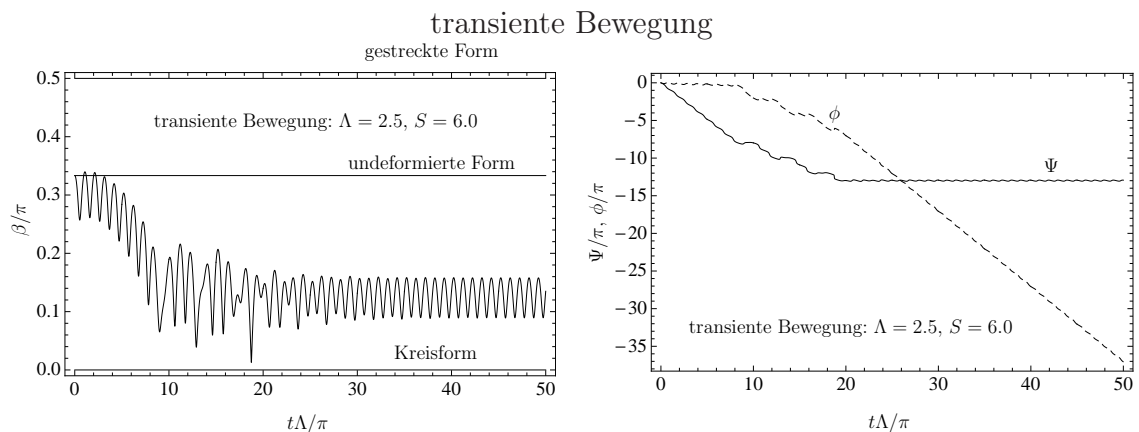
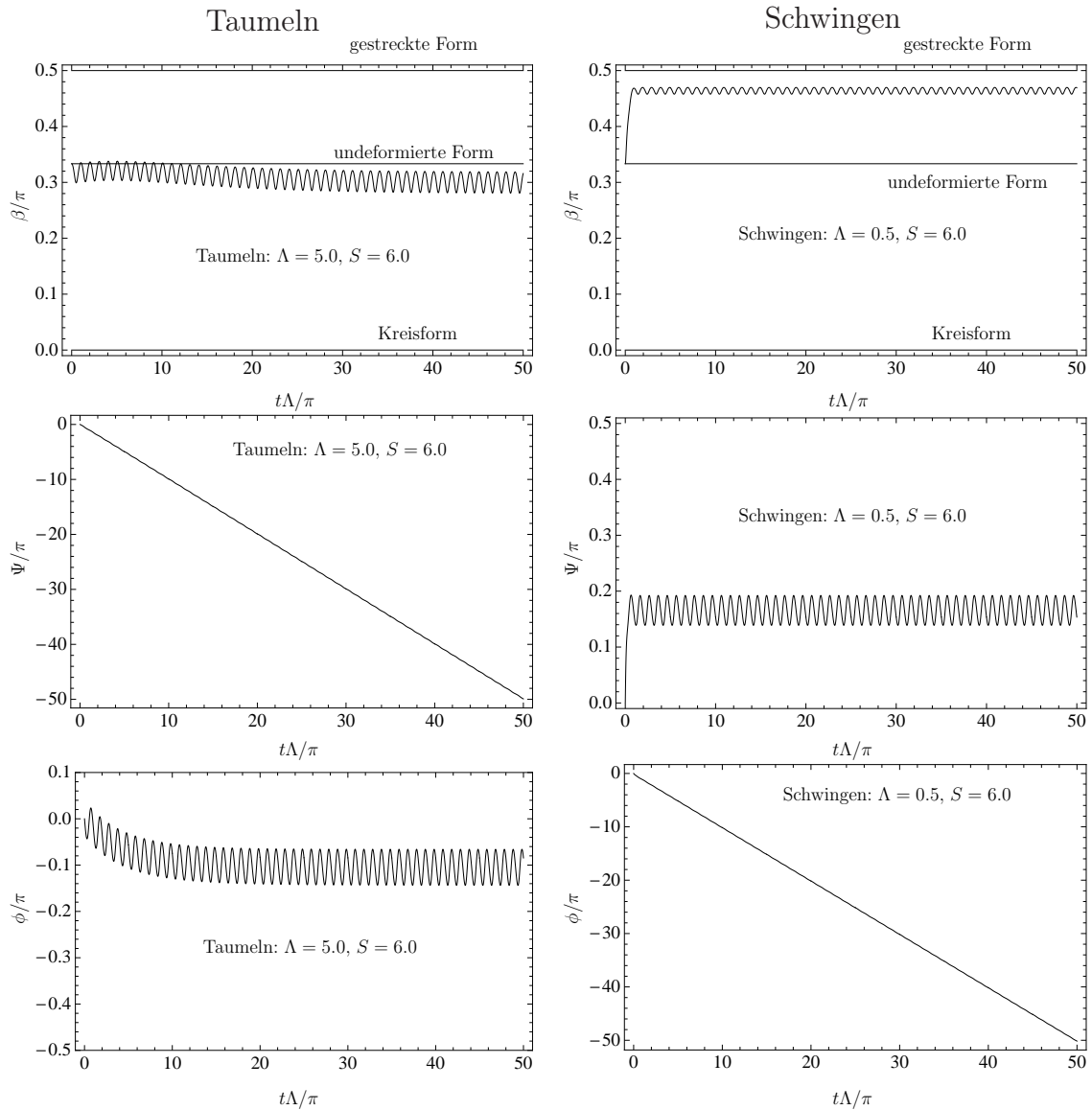


Abbildung 5.6: Typische Trajektorien des Formparameters β , des Anstellwinkels Ψ und des Phasenwinkels ϕ für eine axisymmetrische Kapsel $\hat{\beta} = \pi/3$ und verschiedene Werte Λ und S , siehe auch Kreise in Abb. 5.5. Oben: Taumelbewegung (links) und Schwingbewegung (rechts). Unten: transiente Bewegung.

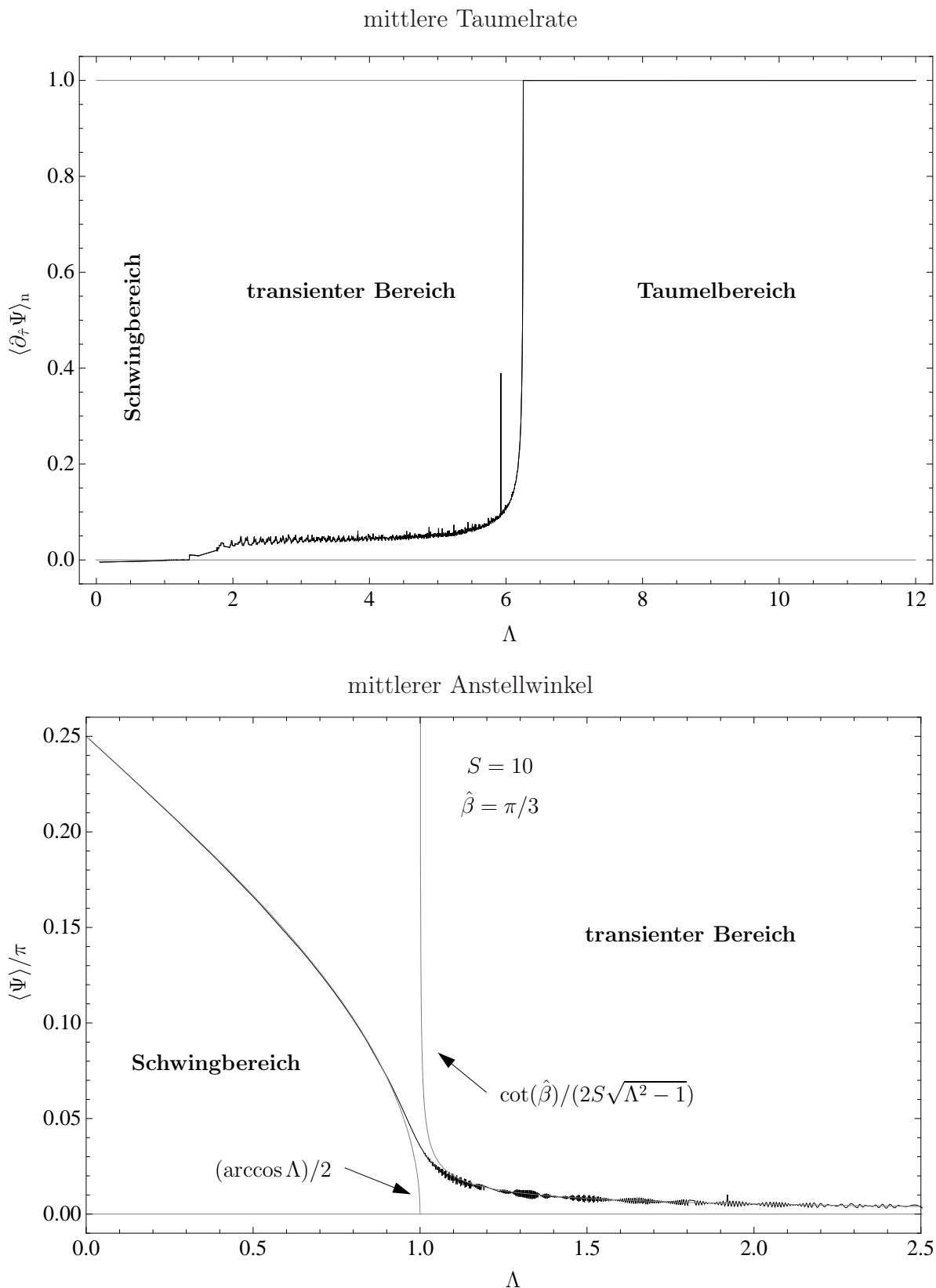


Abbildung 5.7: Oben: Mittlere normierte Taumelrate $\langle \partial_\tau \Psi \rangle_n$ als Funktion des Viskositätskontrasts Λ für konstante Scherrate S und axisymmetrischer Kapsel $\hat{\beta} = \pi/3$. Unten: Mittlerer Anstellwinkel $\langle \Psi \rangle$ innerhalb des Schwing- und transienten Bereichs als Funktion des Viskositätskontrasts Λ für konstante Scherrate S und axisymmetrischer Kapsel $\hat{\beta} = \pi/3$. Die schwarze Kurve wurde mittels numerischer Integration der Bewegungsgleichungen erhalten, die grauen Kurven sind analytische asymptotische Kurven.

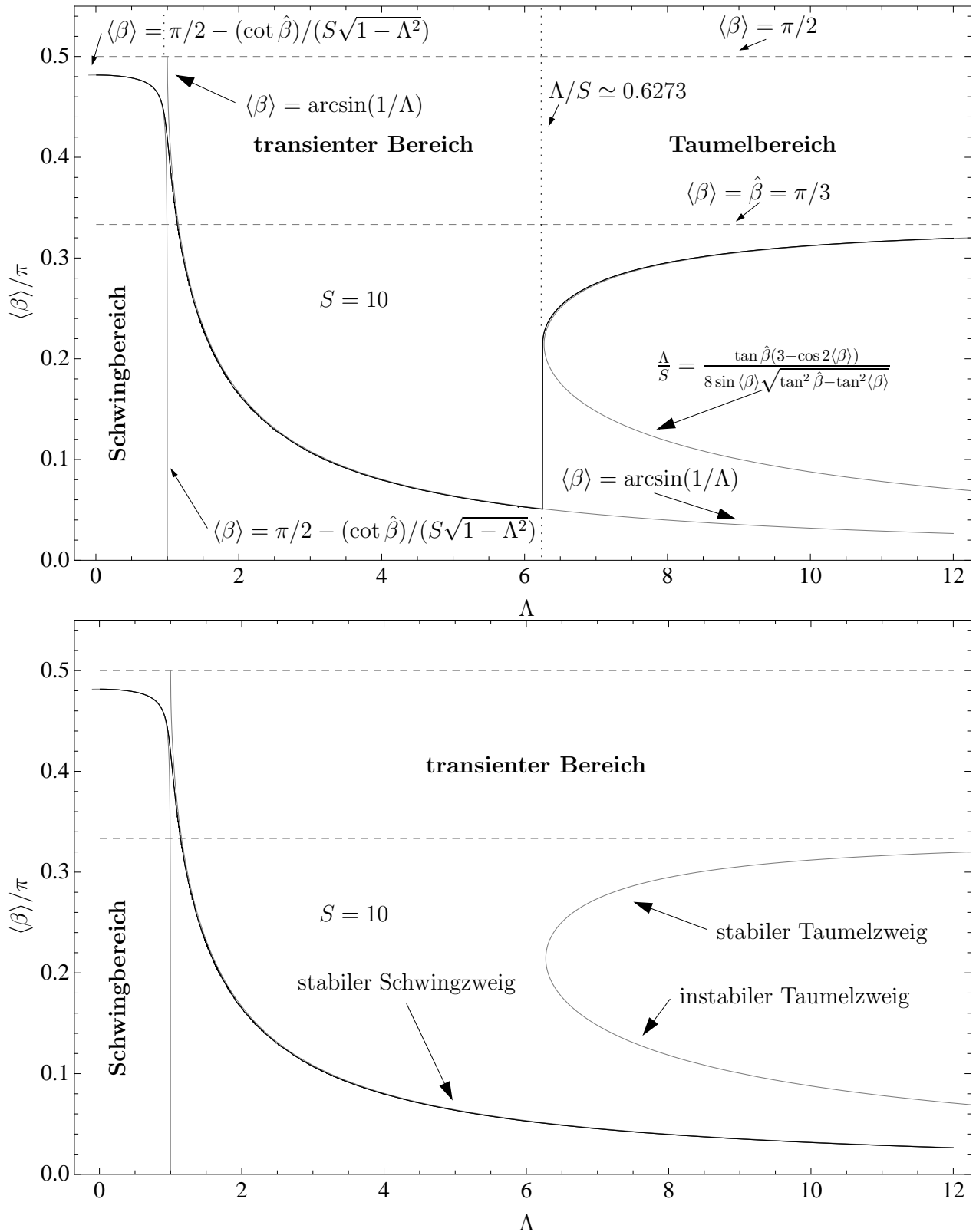


Abbildung 5.8: Schnitt durch das Phasendiagramm mit $S = 10$ und mittlerem Formparameter $\langle \beta \rangle$ als Ordnungsparameter. Oben: Startet man mit der Referenzform $\beta(0) = \hat{\beta} = \pi/3$, bilden sich drei Phasen heraus: Schwingen, transientes Verhalten und Taumeln. Unten: Startet man mit der Form für $\Lambda > 1$ in der Nähe von $\beta = \arcsin(1/\Lambda)$, so bilden sich nur zwei Phasen heraus: Schwingen und transientes Verhalten. Die stabile Taumelbewegung wird nicht erreicht. Schwarze Kurven zeigen numerische, graue hingegen analytische Ergebnisse.

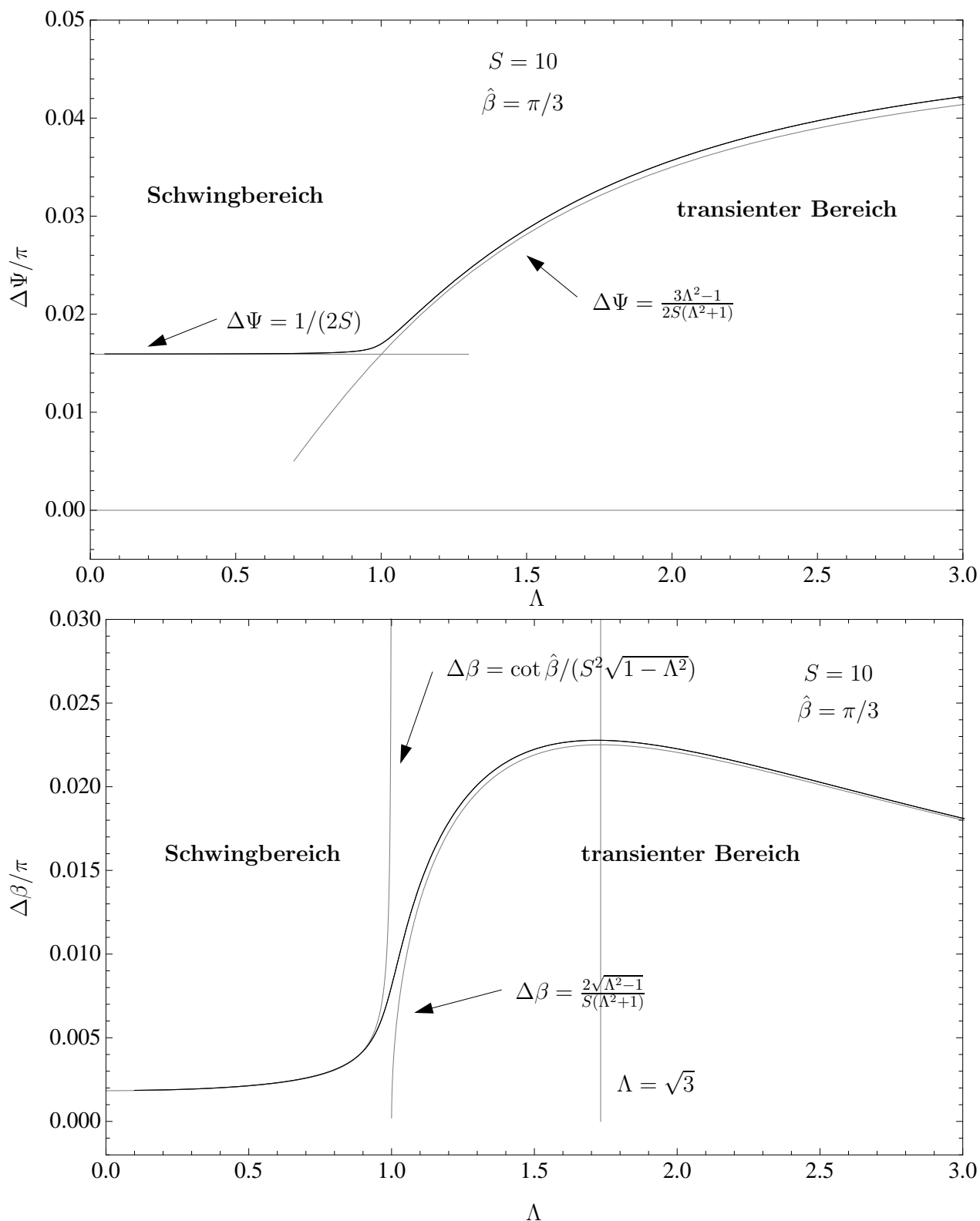


Abbildung 5.9: Schnitt durch das Phasendiagramm mit $S = 10$ und $\hat{\beta} = \pi/3$. Oszillationsamplituden $\Delta\Psi$ und $\Delta\beta$ des Anstellwinkels Ψ und des Formparameters β im Schwing- und im transienten Bereich. Schwarze Kurven zeigen numerische, graue hingegen analytische Ergebnisse.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Zusammenfassung der Ergebnisse wird an dieser Stelle kurz gehalten, weil eine ausführlichere Fassung am Anfang dieser Arbeit zu finden ist. Wie gezeigt wurde, bietet die Dynamik einer Kapsel im hydrodynamischen Fluss interessante und herausfordernde Fragestellungen.

Mit Hilfe von Untersuchungen an einem reduzierten Kapselmodell, durch Entwicklung und Anwendung einer Spektralmethode und mit einer vollständigen störungstheoretischen Behandlung quasisphärischer Kapseln wurde das Verhalten einer ellipsoidalen Kapsel im linearen Fluss unter Beachtung der experimentellen Beobachtungen umfassend untersucht.

Im quasisphärischen Grenzfall konnten die Bewegungsgleichungen des reduzierten Modells sowohl im zeitlich konstanten als auch im zeitlich oszillierenden Fluss analytisch vollständig gelöst werden. Im ersten Fall wurden Trajektorien und die Phasengrenze zwischen Taumeln und Schwingen bestimmt, während sich im zweiten Fall ein reichhaltiges Resonanzverhalten zeigte. Anschließend wurde eine Spektralmethode entwickelt, mit der die vollständigen Bewegungsgleichungen der Kapsel im Fluss gelöst werden konnten. Das damit bestimmte Phasendiagramm zeigt zwar im Schwing- und Taumelbereich gute Übereinstimmung mit den Vorhersagen im reduzierten Modell, die Ergebnisse widersprechen aber den Resultaten innerhalb des intermittierenden Bereichs des reduzierten Modells, weil sich hier ein transientes Verhalten von einer Taumel- hin zu einer stabilen Schwingbewegung zeigt. Zur Klärung dieses Intermitenzproblems wurden im Grenzfall kleiner Deformationen systematisch Bewegungsgleichungen abgeleitet und numerisch sowie analytisch untersucht. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Spektralmethode ergibt sich im Gebiet zwischen Taumel- und Schwingbereich erneut ein transienter Bereich, innerhalb dessen die Kapsel unter Änderung ihrer Form in eine stabile Schwingbewegung relaxiert. Darüber hinaus konnten im Grenzfall starker Flüsse analytische Lösungen der Trajektorien und der Phasengrenze bestimmt werden. Es zeigte sich, dass der Phasenübergang zwischen Schwingen und transientem Verhalten von zweiter Ordnung ist, während der Übergang zwischen Taumeln und transientem Verhalten einem Phasenübergang erster Ordnung entspricht, so dass bei entsprechend gewählten Anfangsbedingungen die Kapsel auch innerhalb des Taumelbereichs ein stabiles Schwingverhalten zeigen kann.

Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf zusätzliche interessante Fragestellungen und weiterführende Arbeiten im Kontext einer elastischen Kapsel im äußeren Fluss. Zunächst steht eine experimentelle Überprüfung der präsentierten Ergebnisse im konstanten Scherfluss noch bevor. In einer systematischen Studie in einer Vier-Walzen-Anordnung könnte das Phasendiagramm experimentell bestimmt und mit den theoretischen Vorhersagen verglichen werden, wobei insbesondere auf einen Nachweis des transienten Schwingverhaltens Wert gelegt werden sollte.

Neben sphärischen und ellipsoidalen Formen lassen sich aus theoretischer Sicht weitere Membranformen betrachten. Insbesondere im Hinblick auf rote Blutkörperchen wäre eine diskozyte Membranform interessant. Zudem sollten weitere Konstitutivgesetze in Betracht gezogen und verglichen werden, wobei neben den elastischen Eigenschaften der Membran viskoelastische Eigenschaften einen Einfluss auf die Dynamik haben könnten. Aufgrund der langreichweitigen Wechselwirkung in der Hydrodynamik haben Wände, die innerhalb dieser Arbeit nicht vorkommen, einen wichtigen Einfluss auf die Dynamik der Kapsel. Beispielsweise ergibt sich

innerhalb einer Kapillaren dadurch ein nicht-linearer Fluss. Aber auch ohne Wände kann es ein Poiseuille-Fluss mit seinem quadratischen Geschwindigkeitsprofil ermöglichen, eine Kapsel senkrecht zur Flussrichtung entweder in das Zentrum oder an den Rand hin zu transportieren [82].

Bis vor kurzem haben sich alle theoretischen und experimentellen Arbeiten zu Kapseln, Vesikeln und roten Blutkörperchen auf zeitlich konstante Flüsse konzentriert. Erste Experimente im zeitlich sich ändernden Scherfluss wurden mit roten Blutkörperchen [12] und Vesikeln [83] ausgeführt. Bei den Vesikeln zeigte sich durch plötzliche Umkehrung des Scherflusses eine Falteninstabilität, die durch eine negative Oberflächenspannung verursacht wurde, welche ihrerseits aus der lokalen Flächeninkompressibilität der Membran folgt. Eine analytische Betrachtung konnte wesentliche Größen mit guter Übereinstimmung ableiten [84]. In einem ersten Experiment mit zeitlich sich ändernden Flüssen wurden rote Blutkörperchen in einem Scherfluss betrachtet [12], dessen Scherrate um einen verschwindenden Wert oszillierte. Der Schwerpunkt lag hierbei auf den Deformationen und Relaxationen der Membranform, wobei die schwingende Form dem oszillierenden Scherfluss zeitlich nachlief und die Reaktion der roten Blutkörperchen durch eine schnelle Formänderung und eine langsame Relaxation gekennzeichnet waren. Innerhalb eines phänomenologischen reduzierten Modells mit Formänderungen [32] konnte ein qualitativ vergleichbares Verhalten gefunden werden. Bei endlicher mittlerer Scherrate ergab sich ein reichhaltiges Phasenverhalten mit Schwing- und Taumelbewegungen sowie Formänderungen. Die theoretischen Ergebnisse legen nahe, dass Formänderungen auch im zeitlich sich ändernden Scherfluss wichtig sein können. Es ist daher eine offene, aber lohnenswerte Frage, inwiefern in theoretischen Untersuchungen die Bewegung im zeitabhängigen Scherfluss modifiziert wird, wenn Änderungen der Form zugelassen werden. Interessante Effekte sollten speziell im Taumelbereich zu erwarten sein, in welchem die Taumelbewegung und die transiente Schwingbewegung mit jeweils eigenem Stabilitätsbereich koexistieren. Durch periodisches Ändern der Flussparameter könnte hier Hysterese eine wichtige Rolle spielen.

Ein Scherfluss kann eine Kapsel von einem Substrat, an dem sie haftet, loslösen. Während dieser Ablöseprozess bei Vesikeln sowohl theoretisch [85, 86, 87] als auch experimentell [88, 89, 90] gut untersucht ist, wurde für an Substraten haftende Kapseln bislang nur die Gleichgewichtsform in Abhängigkeit der Adhäsionsenergie und der Materialparameter berechnet [91, 92]. Interessante weiterführende Fragen in diesem Kontext sind, wie ein Scherfluss die Kapselform ändert und inwiefern sich hier der Ablöseprozess der Kapseln von dem bei Vesikeln unterscheidet.

Ein weiterer spannender Aspekt betrifft den Einfluss thermischer Fluktuationen auf die Dynamik. Während thermisches Rauschen für Kapseln energetisch weitaus weniger maßgeblich ist als für Vesikel, beeinflusst es dennoch Phasenübergänge. Thermische Fluktuationen können deshalb wie bei dreidimensionalen quasisphärischen Vesikeln [93, 94, 81, 55] oder zweidimensionalen quasikreisförmigen Vesikeln [95, 96] den Bewegungsgleichungen der Kapseln beigefügt werden. Ähnlich wie bei Vesikeln [21] kann auch bei Kapseln der thermische Einfluss auf stationäre Zustände in Abhängigkeit der verschiedenen Fluss- und Membranparameter experimentell untersucht werden.

Schließlich scheint es aussichtsreich, die stationäre Bewegung von Kapseln und Vesikeln als Beispiele stationärer Nichtgleichgewichtszustände zu betrachten und im Rahmen der stochastischen Thermodynamik zu untersuchen [97, 98]. Hier ließe sich nach der Entropieproduktion und dem Verhalten an den dynamischen Phasenübergängen fragen. Gleichmaßen könnte die Reaktion der Schwing- und Taumelbewegungen auf zusätzliche kleine Störungen durch Korrelationsfunktionen im entsprechenden stationären Zustand ausgedrückt werden [99]. Innerhalb dieses Rahmens könnten Kapseln und Vesikel zu zweidimensionalen Standardmodellen werden,

um diese neuartigen Konzepte zu erforschen, die bislang nur auf null- und eindimensionale Objekte wie Kolloide und Polymere angewendet worden sind.

Anhand dieses Auszugs möglicher weiterführender Forschung zeigt sich, dass es noch viele offene spannende Fragestellungen gibt, die Kapseln im Fluss betreffen. Man darf gespannt sein, welche interessante Resultate künftige Arbeiten hier liefern werden.

Literaturverzeichnis

- [1] POZRIKIDIS, C. (Hrsg.): *Modelling and simulation of capsules and biological cells*. Chapman & Hall/CRC, 2003
- [2] MÖHWALD, H. ; DONATH, E. ; SUKHORUKOV, G.: *Smart capsules*. New York: Wiley VCH, 2003
- [3] FERY, A. ; WEINKAMER, R.: Mechanical properties of micro- and nanocapsules: single-capsule measurements. *Polymer* 48 (2007), 7221
- [4] ABKARIAN, M. ; VIALLAT, A.: Vesicles and red blood cells in shear flow. *Soft matter* 4 (2008), 653
- [5] BARTHÈS-BIESEL, Dominique: Capsule motion in flow: deformation and membrane buckling. *C. R. Physique* 10 (2009), 764
- [6] PATWARDHAN, S. A. ; DAS, K. G.: Microencapsulation. DAS, K. G. (Hrsg.): *Controlled release technology - bioengineering aspects*. New York : Wiley, 1983, 121–141
- [7] DINSMORE, A. D. ; HSU, M. F. ; NIKOLAIDES, M. G. ; MARQUEZ, M. ; BAUSCH, A. R. ; WEITZ, D.A.: Colloidosomes: selectively permeable capsules composed of colloidal particles. *Science* 298 (2002), 1006
- [8] SEIFERT, U: Configurations of fluid membranes and vesicles. *Adv. Physics* 46 (1997), S. 13
- [9] REHAGE, H. ; HUSMANN, M. ; WALTER, A.: From two-dimensional model networks to microcapsules. *Rheol. Acta* 41 (2002), 292
- [10] DISCHER, D. E. ; CARL, P.: New insights into red cell network structure, elasticity, and spectrin unfolding — a current review. *Cell. Mol. Biol. Lett.* 6 (2001), 593
- [11] FISCHER, T. M.: Shape memory of human red blood cells. *Biophys. J.* 86 (2004), 3304
- [12] WATANABE, N. ; KATAOKA, H. ; YASUDA, T. ; TAKATANI, S.: Dynamic deformation and recovery response of red blood cells to a cyclically reversing shear flow: effects of frequency of cyclically reversing shear flow and shear stress level. *Biophys. J.* 91 (2006), 1984
- [13] TAYLOR, G. I.: The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* 146 (1932), 501
- [14] DESCHAMPS, J. ; KANTSLER, V. ; SEGRE, E. ; STEINBERG, V.: Dynamics of a vesicle in general flow. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 106 (2009), 11444
- [15] VLAHOVSKA, P. M. ; PODGORSKI, T. ; MISBAH, C.: Vesicles and red blood cells in flow: From individual dynamics to rheology. *C. R. Physique* 10 8 (2009), 775

- [16] WALTER, A. ; REHAGE, H. ; LEONHARD, H.: Shear induced deformation of microcapsules: shape oscillations and membrane folding. *Coll. Surf. A* 183–185 (2001), 123
- [17] FINKEN, R. ; SEIFERT, U.: Wrinkling of microcapsules in shear flow. *J. Phys.: Condens. Matter* 18 (2006), L185
- [18] CHANG, K. ; OLBRICHT, W. L.: Experimental studies of the deformation of a synthetic capsule in extensional flow. *J. Fluid. Mech.* 250 (1993), 587
- [19] CHANG, K. ; OLBRICHT, W. L.: Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in steady and unsteady simple shear-flow. *J. Fluid. Mech.* 250 (1993), 609
- [20] WALTER, A. ; REHAGE, H. ; LEONHARD, H.: Shear-induced deformations of polyamid microcapsules. *Colloid. Polym. Sci.* 278 (2000), 169
- [21] KANTSLER, V. ; STEINBERG, V.: Orientation and dynamics of a vesicle in tank-treading motion in shear flow. *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005), 258101
- [22] BARTHÈS-BIESEL, D.: Motion of a spherical microcapsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid. Mech.* 100 (1980), 831
- [23] BARTHÈS-BIESEL, D. ; RALLISON, J. M.: The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid. Mech.* 113 (1981), 251
- [24] ALBERTS, B. ; JOHNSON, A. ; LEWIS, J. ; RAFF, M. ; ROBERTS, K. ; WALTER, P.: *Molekularbiologie der Zelle*. Wiley-VCH Verlag, 2004
- [25] GOLDSMITH, H. L. ; MARLOW, J.: Flow behavior of erythrocytes. 1. rotation and deformation in dilute suspensions. *Proc. R. Soc. London, Ser. B* 182 (1972), 351
- [26] FISCHER, T. ; SCHMID-SCHÖNBEIN, H.: Tank tread motion of red-cell membranes in viscometric flow — behavior of intracellular and extracellular markers (with film). *Blood Cells* 3 (1977), 351
- [27] FISCHER, T. ; STÖHRLIESEN, M. ; SCHMID-SCHÖNBEIN, H.: Red-cell as a fluid droplet — tank tread-like motion of human erythrocyte-membrane in shear-flow. *Science* 202 (1978), 894
- [28] TRAN-SON-TAY, R. ; SUTERA, S. P. ; RAO, P. R.: Determination of red-blood-cell membrane viscosity from rheoscopic observations of tank-treading motion. *Biophys. J.* 46 (1984), S. 65
- [29] ABKARIAN, M. ; FAIVRE, M. ; VIALLAT, A.: Swinging of red blood cells under shear flow. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), 188302
- [30] RAMANUJAN, ; POZRIKIDIS, C.: Deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow: Large deformations and the effect of fluid viscosities. *J. Fluid Mech.* 361 (1998), 117
- [31] SKOTHEIM, J. M. ; SECOMB, T. W.: Red blood cells and other nonspherical capsules in shear flow: oscillatory dynamics and the tank-treading-to-tumbling transition. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), 078301

-
- [32] NOGUCHI, H.: Dynamic Modes of Red Blood Cells in Steady and Oscillatory Shear Flows. *arXiv:0903.0038v1 [cond-mat.soft]* (2009)
- [33] NOGUCHI, H.: Swinging and synchronized rotations of red blood cells in simple shear flow. *Phys. Rev. E* 80 (2009), 021902
- [34] KESSLER, ; FINKEN, R. ; SEIFERT, U.: Elastic capsules in shear flow: analytical solutions for constant and time-dependent shear rates. *Eur. Phys. J. E* 29 (2009), 399
- [35] LI, X. Z. ; BARTHÈS-BIESEL, D. ; HELMY, A.: Large deformations and burst of a capsule freely suspended in an elongational flow. *J. Fluid. Mech.* 187 (1988), 179
- [36] LEYRAT-MAURIN, A. ; DROCHON, A. ; BARTHÈS-BIESEL, D.: Flow of a capsule through a constriction — application to cell filtration. *Journal De Physique III* 3 (1993), 1051
- [37] LEYRAT-MAURIN, A. ; BARTHÈS-BIESEL, D.: Motion of a deformable capsule through a hyperbolic constriction. *J. Fluid. Mech.* 279 (1994), 135
- [38] POZRIKIDIS, C.: *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press, 1992
- [39] POZRIKIDIS, C.: Finite deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear-flow. *J. Fluid. Mech.* 297 (1995), 123
- [40] POZRIKIDIS, C.: Numerical simulation of the flow-induced deformation of red blood cells. *Ann. Biomed. Eng.* 31 (2003), 1194
- [41] WANG, Y. C. ; DIMITRAKOPOULOS, P.: A three-dimensional spectral boundary element algorithm for interfacial dynamics in Stokes flow. *Phys. Fluids* 18 (2006), 82106
- [42] DIMITRAKOPOULOS, P.: Interfacial dynamics in Stokes flow via a three-dimensional fully-implicit interfacial spectral boundary element algorithm. *J. Comput. Phys.* 225 (2007), 408
- [43] DODSON III, W. R. ; DIMITRAKOPOULOS, P.: Spindles, cusps, and bifurcation for capsules in Stokes flow. *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008), 208102
- [44] SUI, Y. ; CHEW, Y. T. ; ROY, P. ; CHEN, X. B. ; LOW, H. T.: Transient deformation of elastic capsules in shear flow: Effect of membrane bending stiffness. *Phys. Rev. E* 75 (2007), 66301
- [45] SUI, Y. ; LOW, H. T. ; CHEW, Y. T. ; ROY, P.: Tank-treading, swinging, and tumbling of liquid-filled elastic capsules in shear flow. *Phys. Rev. E* 77 (2008), 016310
- [46] KAOUI, B. ; RISTOW, G. H. ; CANTAT, I. ; MISBAH, C. ; ZIMMERMANN, W.: Lateral migration of a two-dimensional vesicle in unbounded Poiseuille flow. *Phys. Rev. E* 77 (2008), 021903
- [47] MA, G. ; HUA, J. ; LI, H.: Numerical modeling of the behavior of an elastic capsule in a microchannel flow: The initial motion. *Phys. Rev. E* 79 (2009), 046710
- [48] BAGCHI, P. ; KALLURI, R. M.: Dynamics of nonspherical capsules in shear flow. *Phys. Rev. E* 80 (2009), 016307

- [49] IHLE, T. ; KROLL, D. M.: Stochastic rotation dynamics: A Galilean-invariant mesoscopic model for fluid flow. *Phys. Rev. E* 63 (2001), 020201(R)
- [50] KIKUCHI, N. ; POOLEY, C. M. ; RYDER, J. F. ; YEOMANS, J. M.: Transport coefficients of a mesoscopic fluid dynamics model. *J. Chem. Phys.* 119 (2003), 6388
- [51] LAMURA, A. ; GOMPPER, G. ; IHLE, T. ; KROLL, D. M.: Multi-particle collision dynamics: flow around a circular and a square cylinder. *Europhys. Lett.* 56 (2001), 319
- [52] RIPOLL, M. ; MUSSAWISADE, K. ; WINKLER, R. G. ; GOMPPER, G.: Low-Reynolds-number hydrodynamics of complex fluids by multi-particle-collision dynamics. *Europhys. Lett.* 68 (2004), 106
- [53] NOGUCHI, H. ; GOMPPER, G.: Fluid vesicles with viscous membranes in shear flow. *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), 258102
- [54] NOGUCHI, H. ; GOMPPER, G.: Shape transitions of fluid vesicles and red blood cells in capillary flows. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 102 (2005), 14159
- [55] NOGUCHI, H. ; GOMPPER, G.: Dynamics of fluid vesicles in shear flow: effect of membrane viscosity and thermal fluctuations. *Phys. Rev. E* 72 (2005), 011901
- [56] NOGUCHI, H. ; GOMPPER, G.: Swinging and tumbling of fluid vesicles in shear flow. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), 128103
- [57] KESSLER, ; FINKEN, R. ; SEIFERT, U.: Swinging and tumbling of elastic capsules in shear flow. *J. Fluid Mech.* 605 (2007), 207
- [58] SUI, Y. ; CHEW, Y. T. ; ROY, P. ; CHENG, Y. P. ; LOW, H. T.: Dynamic motion of red blood cells in simple shear flow. *Phys. Fluids* 20 (2008), 112106
- [59] KELLER, S. R. ; SKALAK, R.: Motion of a tank-treading ellipsoidal particle in a shear-flow. *J. Fluid. Mech.* 120 (1982), S. 27
- [60] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: *Theory of elasticity*. London, Pergamon Press, 1959
- [61] MARSDEN, J. E. ; HUGHES, T. J. R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, 1983
- [62] FRANKEL, T.: *The geometry of physics*. Cambridge University Press, 1997
- [63] MÜLLER, M. ; DESERNO, M.: Interface mediated interactions between colloidal particles — a geometric approach. *Europhys. Lett.* 69 (2005), 482
- [64] DESTUYNDER, P.: A classification of thin shell theories. *Acta Appl. Math.* 4 (1985), S. 15
- [65] BUDIANSKY, B. ; SANDERS, J. L. Jr.: On the best first-order linear shell theory. *Prog. Appl. Mech.* (1963), 129
- [66] HELFRICH, W.: Elastic properties of lipid bilayers — theory and possible experiments. *Z. Naturf. C* 28 (1973), 693

-
- [67] JEFFERY, G. B.: The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A* 102 (1922), 161
- [68] ROSCOE, R.: On the rheology of a suspension of viscoelastic spheres in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.* 28 (1967), 273
- [69] HINCH, E. J.: *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991
- [70] BOYD, John P.: *Chebyshev and fourier spectral methods*. Dover Publications, 2001
- [71] KRAUS, M. ; WINTZ, W. ; SEIFERT, U. ; LIPOWSKY, R.: Fluid vesicles in shear flow. *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996), 3685
- [72] KESSLER, S.: *Hydrodynamik von Vesikeln*. Diplomarbeit, 2006
- [73] MORSE, P. M. ; FESHBACH, H.: *Methods of theoretical physics*. Bd. Part II. McGraw-Hill, 1953
- [74] ROCHAL, S. B. ; LORMAN, V. L. ; MENNESSIER, G.: Viscoelastic dynamics of spherical composite vesicles. *Phys. Rev. E* 71 (2005)
- [75] LAMB, H.: *Hydrodynamics*. London: Cambridge University Press, 1932
- [76] HAPPEL, J. ; BRENNER, H.: *Low Reynolds number hydrodynamics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1983
- [77] SWARZTRAUBER, P. N. ; SPOTZ, W. F.: Spherical harmonic projectors. *Math. Comput.* 73 (2004), 753
- [78] ROSE, M. E.: *Elementary theory of angular momentum*. Chapman & Hall/CRC, 1957
- [79] BRINK, D. M. ; SATCHLER, G. R.: *Angular momentum*. Clarendon Press, 1968
- [80] FINKEN, R. ; KESSLER, ; SEIFERT, U.: Micro-capsules in shear flow. *J. Phys.: Condens. Mat.* (2010). – eingereicht
- [81] SEIFERT, U.: Fluid dynamics in hydrodynamic force fields: formalism and an application to fluctuating quasispherical vesicles in shear flow. *Eur. Phys. J. B* 8 (1999), 405
- [82] COUPIER, G. ; KAOUI, B. ; PODGORSKI, T. ; MISBAH, C.: Noninertial lateral migration of vesicles in bounded Poiseuille flow. *Phys. Fluids* 20 (2008), 111702
- [83] KANTSLE, V. ; SEGRE, E. ; STEINBERG, V.: Vesicle dynamics in elongation flow: wrinkling instability and bud formation. *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007), 178102
- [84] TURITSYN, K. ; VERGELES, S. S.: Wrinkling of vesicles during transient dynamics in elongational flow. *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), 028103
- [85] CANTAT, I. ; MISBAH, C.: Lift force and dynamical unbinding of adhering vesicles under shear flow. *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 880
- [86] SEIFERT, U.: Hydrodynamic lift on bound vesicles. *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 876
- [87] SUKUMARAN, ; SEIFERT, U.: Influence of shear flow on vesicles near a wall: a numerical study. *Phys. Rev. E* 64 (2001), 11916

- [88] LORZ, B. ; SIMSON, R. ; NARDI, J. ; SACKMANN, E.: Weakly adhering vesicles in shear flow: tanktreading and anomalous lift force. *Europhys. Lett.* 51 (2000), 468
- [89] ABKARIAN, M. ; VIALLAT, A.: Dynamics of vesicles in a wall-bounded shear flow. *Biophys. J.* 89 (2005), 1055
- [90] CHATKAEW, ; GEORGELIN, M. ; JAEGER, M. ; LEONETTI, M.: Dynamics of vesicle unbinding under axisymmetric flow. *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009), 248103
- [91] GRAF, P. ; FINKEN, R. ; SEIFERT, U.: Adhesion of microcapsules. *Langmuir* 22 (2006), 7117
- [92] SPRINGMAN, R. M. ; BASSANI, J. L.: Snap transitions in adhesion. *J. Mech. Phys. Solids* 56 (2008), 2358
- [93] KATS, E. I. ; LEBEDEV, V. V. ; MURATOV, A. R.: Nearly spherical vesicles: shape fluctuations. *JETP Lett.* 63 (1996), 216
- [94] HAAS, K. H. ; BLOM, C. ; ENDE, D. van d. ; DUTS, M. H. G. ; MELLEMA, J.: Deformation of giant lipid bilayer vesicles in shear flow. *Phys. Rev. E* 56 (1997), 7132
- [95] FINKEN, R. ; LAMURA, A. ; SEIFERT, U. ; GOMPPER, G.: Two-dimensional fluctuating vesicles in linear shear flow. *Eur. Phys. J. E* 25 (2008), 309
- [96] MESSLINGER, ; SCHMIDT, B. ; NOGUCHI, H. ; GOMPPER, G.: Dynamical regimes and hydrodynamic lift of viscous vesicles under shear. *Phys. Rev. E* 80 (2009), 011901
- [97] SEIFERT, U.: Stochastic thermodynamics: principles and perspectives. *Eur. Phys. J. B* 64 (2008), 423
- [98] SPECK, T. ; MEHL, J. ; SEIFERT, U.: Role of external flow and frame invariance in stochastic thermodynamics. *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), 178302
- [99] SEIFERT, U. ; SPECK, T.: Fluctuation-dissipation theorem in nonequilibrium steady states. *Europhys. Lett.* 89 (2010), 10007

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Steffen Keßler
Geburtsdatum	12.09.1980
Geburtsort	Backnang

Schulbildung

1987–1989	Grund- und Hauptschule Höfen, Winnenden
1989–1991	Grundschule Birkmannsweiler, Winnenden
1991–1997	Georg-Büchner-Gymnasium, Winnenden
1997–1998	Lakota-East High School, West Chester, Ohio, USA
1998–2000	Georg-Büchner-Gymnasium, Winnenden
2000	Abitur, Georg-Büchner-Gymnasium, Winnenden

Studium

2001–2006	Diplomstudium Physik, Universität Stuttgart
10/2003	Vordiplom Physik
10/2006	Diplom Physik
2006–2010	Promotion bei Prof. Dr. U. Seifert, Universität Stuttgart

Erklärung und Danksagung

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Stuttgart, 20. Mai 2010

Steffen Keßler

Danksagung

Ich möchte hiermit meinen Dank an all die vielen Personen richten, die letztlich zur Fertigstellung dieser Dissertation beigetragen haben. Zunächst möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Udo Seifert und insbesondere bei meinem direkten Betreuer Herrn Dr. Reimar Finken für die sehr gute, kompetente und hilfreiche Betreuung innerhalb idealer Rahmenbedingungen bedanken. Herrn Professor Dr. Siegfried Dietrich danke ich für die Übernahme und das Erstellen des Mitberichts. Des weiteren gilt mein Dank

- Frau Anja Steinhauser für die stets freundliche, kompetente und schnelle Hilfe bei einer Vielzahl administrativer Belange,
- den Herren Dr. Peter Graf, Dr. Roman Bedau und Stefan Leitenberger für die administrative Tätigkeit des Computer-Netzwerkes und die stets schnelle Hilfe bei jeglichen Problemen im Umgang mit den Computern,
- meiner Mutter Gisela Keßler und den Herren Dr. Reimar Finken, Dr. Roman Bedau, Timo Bihr, Benedikt Sabass, Jakob Mehl und Boris Lander für das Korrekturlesen dieser Dissertation.