Diagonale Formen mit polynomialen Koeffizienten und Summen binärer Formen

Von der Fakultät Mathematik und Physik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung.

von

Alexander Madlener
aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr. Jörg Brüdern (Stuttgart)
Mitberichter:	PD Dr. Rainer Dietmann (London)

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Januar 2010

Institut für Algebra und Zahlentheorie

2010

Inhaltsverzeichnis

Notation

Die Menge der natürlichen Zahlen, die nicht die Null enthalten, bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}$ und die reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. Für eine endliche Menge M bezeichne $\#M$ die Anzahl der enthaltenen Elemente. Den Buchstaben p verwenden wir ausschließlich für Primzahlen.

Zur Bezeichnung von Vektoren benutzen wir fette lateinische Buchstaben. Deren genaue Dimension ist meist im Text angegeben oder lässt sich aus dem Zusammenhang erschließen. Den größten gemeinsamen Teiler von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_\ell$, wobei ℓ eine beliebige natürliche Zahl größer als eins ist, bezeichnen wir mit $(a_1; a_2; ...; a_\ell)$, um Verwechslungen mit Vektoren zu vermeiden, bei denen die Einträge nur durch Kommata getrennt werden. Sind $a_1, a_2, ..., a_\ell$ ganze Zahlen, von denen wenigstens eine von null verschieden ist, ist ihr größter gemeinsamer Teiler durch $(|a_1|; |a_2|; ...; |a_\ell|)$ erklärt, wobei Einträge, die null sind, weggelassen werden und $(0; a) = a$ gilt für eine natürliche Zahl a. Die Schreibweise $p^r \parallel n$ benutzen wir um anzuzeigen, dass p^r die größte Potenz von p ist, die n teilt.

Die Gauß-Klammer $[\cdot]$ bezeichnet wie üblich den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl. Die gewöhnliche euklidsche Norm für Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_2$, die Bezeichnung $|\mathbf{a}|$ für einen Vektor $\mathbf{a}$ aus $\mathbb{R}^n$ benutzen wir zur kurzen Beschreibung der Maximumsnorm.

Die Landau-Symbole O und o und die Vinogradov-Symbole $\ll$ und $\gg$ verwenden wir im üblichen Sinn: Für Funktionen f und g, bei denen g nur nicht-negative Werte annimmt, bedeutet $f \ll g$, dass $|f| \leq Cg$ mit einer Konstanten C gilt. Ist f ebenfalls nicht-negativ, dann ist $f \gg g$ erklärt durch $g \ll f$. Außerdem schreiben wir kurz $f \asymp g$ für $f \ll g \ll f$. Die impliziten Konstanten können stets von k, s und ε abhängen. Andere Abhängigkeiten nennen wir im Text. Aussagen, in denen ε vorkommt, gelten für jedes positive ε.

Wie üblich in der Zahlentheorie bezeichnet $e(\alpha)$ die Funktion $e^{2\pi i\alpha}$.

1 Abstract

In their joint work on the Hasse principle Brüdern and Dietmann [5] proved that the Hasse principle for the equation $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ holds true for almost all diagonal forms Φ of degree k in more than $3k$ variables. In this paper we will use the same statistical approach in order to deal with two other types of forms. We will be able to show that the Hasse principle is true for almost all of these forms as soon as the number of variables exceeds a linear function of k.

To begin with, consider $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k$, where φ_i is a polynomial over $\mathbb{Z}$ of degree l and a_i is an integer for $1 \leq i \leq s$. If the degree k of this diagonal form with polynomial coefficients $F_{\mathbf{a}}$ is even, we need the additional condition that the leading coefficients of the φ_i may not all be of the same sign. Let $R_{\mathbf{a}}(B)$ denote the number of solutions of the equation $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ with $|x_i| \leq B$ for $1 \leq i \leq s$, and define the singular series $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})$ and the singular integral $J(F_{\mathbf{a}}; B)$ as usual by

$$\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a;q)=1}}^{q} \sum_{\mathbf{x} \pmod q} q^{-s}\, e\left(\frac{aF_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{q}\right)$$

and

$$J(F_{\mathbf{a}}; B) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{[-B,B]^s} e(\beta F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) \mathrm{d}\mathbf{x} \mathrm{d}\beta.$$

Furthermore, let $\mathcal{M}(A)$ be the set of all vectors $\mathbf{a}$ in $\mathbb{Z}^s$ with $|\mathbf{a}| \leq A$, for which $\varphi_i(a_i)$ does not equal zero and for which not all $\varphi_i(a_i)$ are of the same sign if k is even. We will prove the following theorem, which is stated in two versions.

Theorem 1.1. *Let $k > 4l$ and $l \geq 2$.*

a) Let $0 < \delta < 1/5$ and $\theta(\delta) = \delta\,(1/5 - \delta)^{-1}$. Then there exist a positive constant C_1 and $\tilde{\delta} > 0$, such that for $s \geq 2k\,(1 + l/\delta) - 1 + C_2\,(k, l, \delta)$ with

$$C_2\,(k, l, \delta) \;=\; \max\left(10k + 2, 2^l\theta\,(\delta) + 4l^2\,(3\log l + \log\log l + C_1)\right),$$

and for all $A, B \geq 1$ with $A^\delta \asymp B^k$ one has

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}(A)} \left|R_{\boldsymbol{a}}\,(B) - \mathfrak{S}\,(F_{\boldsymbol{a}})\,J\,(F_{\boldsymbol{a}}; B)\right|^2 \ll A^{s-\tilde{\delta}} \left(\frac{B^{s-k}}{A^l}\right)^2.$$

b) Let $0 < \delta < 1/10$ and $\theta(\delta) = \delta\,(1/5 - 2\delta)^{-1}$. Then there exist positive constants C_1, C_4 and $\tilde{\delta} > 0$, such that for $s \geq 2k\,(1 + l/\delta) - 1 + C_3\,(k, l, \delta)$ with

$$C_3(k, l, \delta) \;=\; \max\left(10k + 2, 4l^2((2\theta(\delta) + 3)\log l + \log\log l + C_1 + \theta(\delta)C_4)\right),$$

and for all $A, B \geq 1$ with $A^{\delta} \asymp B^{k}$ one has

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}(A)} \left| R_{\boldsymbol{a}}(B) - \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}}) J(F_{\boldsymbol{a}}; B) \right|^2 \ll A^{s-\tilde{\delta}} \left(\frac{B^{s-k}}{A^{l}} \right)^2 .$$

Version a) of theorem 1.1 gives a better lower bound for the number of variables s as long as l is smaller than about 10, whereas version b) is more efficient for larger l. Note that the set $\mathcal{M}(A)$ contains more than $O(A^s)$ vectors connected directly to forms. By asserting that the singular integral and the singular series are sufficiently large for almost all diagonal forms with polynomial coefficients, as long as the singular series does not equal zero and the locally soluble diagonal forms with polynomial coefficients have positive density, we can conclude that for almost all of these forms the asymptotic formula

$$R_{\mathbf{a}}(B) \quad = \quad \mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) J(F_{\mathbf{a}}; B) + O\left(A^{-l} B^{s-k-\varrho}\right) \tag{1}$$

holds true for some $\varrho > 0$, as the exceptional set is bounded by $O(A^{s-\tilde{\delta}/3})$. By using (1.1) for a fixed degree l of the polynomials in the coefficients, we will immediately obtain a lower bound for the number of variables s, which depends linearly on k. The Hasse principle will be fulfilled trivially if the singular series vanishes, and if the singular series does not equal zero we will show that it is sufficiently large for almost all forms considered. Therefore we conclude from (1) that the Hasse principle is valid for almost all diagonal forms with polynomial coefficients, as soon as $s \geq Ck$ with some constant C. Furthermore, we obtain an upper bound for the size of the solutions of $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$. We can conclude that, if the equation is soluble at all, small solutions with $|\mathbf{x}| \leq A^{\delta}$ for almost all forms must exist. This results from the setting of the parameters A and B in theorem 1.1.

The proof of theorem 1.1 is based on the circle method developed by Hardy and Littlewood. As usual, we split the integral, which describes the number of solutions, into major and minor arcs. In order to get an estimation on the major arcs, we use standard methods known from the application to Waring's problem. Dealing with the minor arcs we will make essential use of the additional summation over the forms. After interchanging the order of summations, we are able to apply the circle method once again. This time we have to solve a diagonal equation in polynomials of degree l, where l is small compared to k. This is essential in order to get an upper bound on the minor arcs for a small number of variables s. Using again known results for this second application of the circle method, we obtain theorem 1.1. A detailed proof will be given in section 4.

The second type of forms we will deal with are sums of binary forms of degree k. Let $\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i, y_i) = a_0^{(i)} x_i^k + a_1^{(i)} x_i^{k-1} y_i + \ldots + a_{k-1}^{(i)} x_i y_i^{k-1} + a_k^{(i)} y_i^k$ be a binary form of degree k, where $\mathbf{a}^{(i)}$ in $\mathbb{Z}^{k+1}$ is the vector of coefficients. The form considered here is defined by $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(1)}}(x_1, y_1) + \ldots + \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(s)}}(x_s, y_s)$. Let $\mathcal{R}_{\mathbf{a}}(B)$ be the number of solutions of $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ with $1 \le |x_i| \le B$ and $1 \le |y_i| \le B$ for $1 \le i \le s$. The singular series $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})$ of the form $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ is defined by

$$\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a;q)=1}}^{q} \sum_{\mathbf{x} \ (\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\mathbf{y} \ (\mathrm{mod}\ q)} q^{-2s}\, e\left(\frac{a\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{q}\right),$$

and the singular integral $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B)$ by

$$J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{[-B,B]^s} \int_{[-B,B]^s} e\left(\beta \mathcal{F}_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right) \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\beta.$$

The set $\mathcal{A}(A)$ contains all vectors $(\mathbf{a}^{(1)}, ..., \mathbf{a}^{(s)})$, where $\mathbf{a}^{(i)} = (a_0^{(i)}, ..., a_k^{(i)})$ is in $\mathbb{Z}^{k+1}$ with $a_j^{(i)} \neq 0$ for $1 \le i \le s$ and $0 \le j \le k$ and for which not all $a_0^{(i)}$ are of the same sign if k is even. We prove the following theorem.

Theorem 1.2. *For $k \ge 2$ let $s \ge 6k$. Then there is a $\delta > 0$, such that for all $A, B \ge 1$ with $A \asymp B^k$ one has*

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}(A)} \left|\mathcal{R}_{\boldsymbol{a}}\left(B\right) - \mathfrak{S}\left(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}\right) J\left(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}; B\right)\right|^2 \ll A^{s(k+1)-\delta} \left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2.$$

The set $\mathcal{A}(A)$ contains more than $O(A^{s(k+1)})$ vectors connected to forms. By asserting that the singular integral and the singular series are sufficiently large for almost all sums of binary forms, as long as the singular series does not equal zero and the locally soluble sums of binary forms have positive density, we can conclude that for almost all of these forms the asymptotic formula

$$\mathcal{R}_{\mathbf{a}}\left(B\right) \quad = \quad \mathfrak{S}\left(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}\right) J\left(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B\right) + O\left(A^{-1} B^{2s-k-\varrho}\right) \tag{2}$$

holds true for some $\varrho > 0$ as soon as $s > 6k$ with at most $O(A^{s(k+1)-\tilde{\delta}/3})$ forms that do not satisfy (2). By showing that the singular series is sufficiently large for almost all forms as long as it does not equal zero and remarking that the Hasse principle will be trivially true if the singular series vanishes, we can conclude that the Hasse principle is valid for almost all sums of binary forms in more than $12k$ variables. Another conclusion can be drawn concerning the size of solutions. If the equation is soluble at all, there must be small solutions of $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ with $|\mathbf{x}| \le A$ and $|\mathbf{y}| \le A$ for almost all forms dealt with in theorem 1.2. This follows from the setting of the parameters in theorem 1.2.

Just as before, the proof of theorem 1.2 uses the circle method of Hardy and Littlewood, and once again, the term arising from the major arcs can be treated by standard methods. Interchanging the order of summation in the minor arc term yields a lattice in the coefficients. The number of integer points of this lattice can easily be estimated and we obtain the aimed upper bound on the minor arcs with only $s > 6k$. A detailed proof of theorem 1.2 is located in section 5.

Section 3 presents some general results which are used in the proofs of the theorems 1.1 and 1.2.

2 Einführung

Eine der großen Aufgaben der Zahlentheorie ist eine systematische Theorie diophantischer Gleichungen. Hilbert stellte im Jahre 1900 in seiner Liste von 23 mathematischen Problemen die algorithmische Lösbarkeit diophantischer Gleichungen als zehntes Problem vor. Matijaszevics [10] bewies 1970, dass es keinen solchen Algorithmus geben kann. Das bedeutet, dass man sich bei einer Untersuchung auf Teilklassen beschränken muss. In der vorliegenden Arbeit sollen Formen, also homogene Polynome $F \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$ vom Grad k in s Variablen betrachtet werden. Die zentrale Fragestellung in diesem Zusammenhang ist die nichttriviale Lösbarkeit von $F(\mathbf{x}) = 0$, also die Suche nach Lösungen $\mathbf{x}$ in $\mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$.

Die Lösbarkeit der Gleichung $F(\mathbf{x}) = 0$ in ganzen p-adischen Zahlen ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit in ganzen Zahlen. Wenn die p-adische Lösbarkeit zusammen mit der reellen Lösbarkeit eine hinreichende Bedingung wird, dann gilt das Hasseprinzip. Deshalb wird das Hasseprinzip manchmal auch lokal-global-Prinzip genannt.

Zur lokalen Lösbarkeit stellte Artin [1] die Vermutung auf, dass für Formen F vom Grad k die Gleichung $F(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^l}$ für alle Primzahlen p und alle l nichttrivial lösbar ist, sobald nur s größer ist als k^2. Diese Vermutung hat sich als falsch herausgestellt, Terjanian [14] gibt ein Gegenbeispiel dazu an.

Nach Birch [2] gibt es $s_0(k)$, so dass Formen ungeraden Grades k in mehr als $s_0(k)$ Variablen tatsächlich Lösungen in $\mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$ besitzen und somit auch das Hasseprinzip gilt. Leider ist dabei $s_0(k)$ extrem groß.

Bevor wir nun auf einige Ergebnisse zu Diagonalformen näher eingehen, definieren wir formal zu einer Form F vom Grad k in s Variablen die singuläre Reihe durch

$$\mathfrak{S}(F) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a;q)=1}}^{q} \sum_{\mathbf{x} \pmod{q}} q^{-s}\, e\left(\frac{aF(\mathbf{x})}{q}\right)$$

und das singuläre Integral durch

$$J(F;B) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{[-B,B]^s} e(\beta F(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\beta.$$

Es ist klar, dass bei gegebener Form zunächst die Konvergenz dieser beiden Ausdrücke zu prüfen ist. Zu Diagonalformen $\tilde{F}_{\mathbf{a}} = a_1x_1^k + \ldots + a_sx_s^k$ betrachten wir Gleichungen der Gestalt $\tilde{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ und suchen ganzzahlige nichttriviale Nullstellen. Sei $\tilde{R}_{\mathbf{a}}(B)$ die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung mit $|\mathbf{x}| \leq B$. Ansatz zu diesem Problem ist die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode, mit deren Hilfe wir eine Lösungsanzahl als Integral darstellen können. Dieses Integral wird üblicherweise aufgespalten in Major Arcs und Minor Arcs, die getrennt abgeschätzt werden. Dabei ergibt sich im Normalfall der Hauptterm aus den Major Arcs, der Term aus den Minor Arcs sollte dagegen klein sein. Die Anwendung dieser Methode lässt erwarten:

$$\tilde{R}_{\mathbf{a}}(B) \;=\; \mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}})J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};B)(1+o(1)) \qquad (B\to\infty) \tag{3}$$

Das singuläre Integral $J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};B)$ konvergiert absolut, sobald $s>k$ ist und alle s Koeffizienten von null verschieden sind. Es lässt sich als Oberfläche von $a_1x_1^k+...+a_sx_s^k=0$ mit $|\mathbf{x}|\leq B$ deuten. Die Abhängigkeit der Oberfläche vom Parameter B kann durch $J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};B)=B^{s-k}J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};1)$ explizit angegeben werden. Nun hängt $J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};1)$ nicht mehr von B ab, allerdings noch von den Koeffizienten der Form $\tilde{F}_{\mathbf{a}}$, was bei den später folgenden Betrachtungen im Mittel beachtet werden muss. Die singuläre Reihe einer Diagonalform konvergiert absolut für $s>2k$, sofern die s Koeffizienten alle von null verschieden sind. Bei absoluter Konvergenz kann die singuläre Reihe als Produkt über alle Primzahlen geschrieben werden, nämlich

$$\mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}}) \;=\; \prod_p \lim_{t\to\infty} p^{t(1-s)}\cdot\#\left\{\mathbf{x}\pmod{p^t}: a_1x_1^k+\cdots+a_sx_s^k\equiv 0 \pmod{p^t}\right\}.$$

Ford [8] zeigt Gleichung (3) für $s>k^2\log k(1+o(1))$. Wegen absoluter Konvergenz der singulären Reihe $\mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}})$ zerfällt diese in ein Produkt wie oben beschrieben. Dieses Produkt ist nur dann null, wenn ein Faktor null ist. Das bedeutet, dass es eine Primzahl p gibt, für die $\tilde{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\equiv 0 \pmod{p^l}$ für große l nicht lösbar ist. Ist $\mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}})$ aber von null verschieden und die betrachtete Form nicht definit, so dass $J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};B)$ nicht null ist, dann gibt es wegen (3) auch für $\tilde{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})=0$ Lösungen in $\mathbb{Z}^s\setminus\{0\}$. Dies beweist das Hasseprinzip für Diagonalformen in mehr als $k^2\log k(1+o(1))$ Variablen. Auch die schwächere Aussage $\tilde{R}_{\mathbf{a}}(B)\gg\mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}})J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};B)$, die Wooley [17] sogar für $s>k\log k(1+o(1))$ beweist, genügt, um das Hasseprinzip zu folgern.

Mit Hilfe eines statistischen Ansatzes kann das Hasseprinzip im Mittel für noch weniger Variablen gefolgert werden. Dazu betrachten wir die Varianz der Lösungsanzahl um den aus der Kreismethode erwarteten Wert, also

$$\sum_{|a_j|\leq A}\left|\tilde{R}_{\mathbf{a}}(B)-\mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}})J(\tilde{F}_{\mathbf{a}};B)\right|^2. \tag{4}$$

Brüdern und Dietmann [5] zeigen, dass diese Varianz bereits für $s>3k$ und gekoppelte Parameter $A=B^{2k}$ klein gegen $A^{s-\delta}(B^{s-k}A^{-1})^2$ für ein $\delta>0$ ist. Auch Breyer [3] beweist einen Satz dieser Art. Für Diagonalformen in mehr als $2k+1$ Variablen kann in dem Fall, dass die singuläre Reihe von null verschieden ist, die untere Schranke $\mathfrak{S}(\tilde{F}_{\mathbf{a}})\gg A^{-\varepsilon}$ für fast alle dieser Formen hergeleitet und das singuläre Integral nach unten durch $O(B^{s-k}A^{-1})$ abgeschätzt werden. Zudem zeigen Browning und Dietmann [4], dass für Diagonalformen schon für $s\geq 4$ die lokal lösbaren Formen positive Dichte haben. Damit können wir die Aussage des Satzes von Brüdern und Dietmann wie folgt interpretieren: Die Asymptotik (3) gilt für fast alle Diagonalformen, denn es kann höchstens $O(A^{s-\delta/2})$ Ausnahmeformen geben, für die (3) nicht gilt. Wir sagen dann, Gleichung (3) gilt fast immer. In diesem Sinne kann der Satz als eine Formulierung des Hasseprinzips im Mittel bereits für Diagonalformen mit mehr als $3k$ Variablen interpretiert werden. Außerdem können wir an diesem Satz ablesen, dass es für die im Satz betrachteten Diagonalformen fast immer kleine Lösungen gibt, und zwar in dem Sinne, dass das Verhältnis der Lösung zur Größe der Koeffizienten durch $|x_j| \leq A^{1/k}$ für alle j gegeben ist, weil wir die Koeffizientengröße an die Größe der möglichen Werte der x_j durch $A = B^k$ gekoppelt haben. Im Mittel greift der Satz damit auch das Thema der Größenordnung von Lösungen diophantischer Gleichungen auf, das beispielsweise Pitman [12] für Diagonalformen behandelt.

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir den beschriebenen statistischen Ansatz für zwei weitere Arten von Formen. Wir betrachten zum einen Diagonalformen mit polynomialen Koeffizienten

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k, \tag{5}$$

wobei die φ_i für $1 \leq i \leq s$ Polynome über $\mathbb{Z}$ vom Grad $l \geq 2$ und die a_i ganze Zahlen sind. Die Leitkoeffizienten der φ_i seien für gerades k so gewählt, dass sie nicht alle dasselbe Vorzeichen haben. Sei $R_{\mathbf{a}}(B)$ die Anzahl der Lösungen von $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ mit $|x_i| \leq B$ für $1 \leq i \leq s$, sei $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})$ die singuläre Reihe und $J(F_{\mathbf{a}}; B)$ das singuläre Integral. Die Menge $\mathcal{M}(A)$ enthalte alle Vektoren $\mathbf{a}$ aus $\mathbb{Z}^s$ mit $|\mathbf{a}| \leq A$, für die $\varphi_i(a_i) \neq 0$ gilt. Außerdem fordern wir bei geradem k, dass nur diejenigen $\mathbf{a}$ in $\mathcal{M}(A)$ enthalten sind, für die nicht alle $\varphi_i(a_i)$ dasselbe Vorzeichen haben. Wir beweisen den folgenden Satz.

Satz 2.1. *Für $k > 4l$ und $l \geq 2$ gilt:*

a) Sei δ mit $0 < \delta < 1/5$ gegeben und $\theta(\delta) = \delta(1/5 - \delta)^{-1}$. Dann gibt es eine positive Konstante C_1 und $\tilde{\delta} > 0$, so dass für $s \geq 2k(1 + l/\delta) - 1 + C_2(k, l, \delta)$ mit

$$C_2(k,l,\delta) \quad = \quad \max\left(10k+2, 2^l\theta(\delta) + 4l^2(3\log l + \log\log l + C_1)\right)$$

und für alle $A, B \geq 1$ mit $A^\delta \asymp B^k$ gilt

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{M}(A)} |R_{\boldsymbol{a}}(B) - \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}})J(F_{\boldsymbol{a}}; B)|^2 \ll A^{s-\tilde{\delta}} \left(\frac{B^{s-k}}{A^l}\right)^2.$$

b) Sei δ mit $0 < \delta < 1/10$ gegeben und $\theta(\delta) = \delta(1/5 - 2\delta)^{-1}$. Dann gibt es positive Konstanten C_1, C_4 und $\tilde{\delta} > 0$, so dass für $s \geq 2k(1 + l/\delta) - 1 + C_3(k, l, \delta)$ mit

$$C_3(k,l,\delta) \;=\; \max\left(10k+2, 4l^2\left((2\theta(\delta)+3)\log l + \log\log l + C_1 + \theta(\delta)C_4\right)\right)$$

und für alle $A, B \geq 1$ mit $A^\delta \asymp B^k$ gilt

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}(A)} \left| R_{\boldsymbol{a}}(B) - \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}}) J(F_{\boldsymbol{a}}; B) \right|^2 \ll A^{s-\tilde{\delta}} \left(\frac{B^{s-k}}{A^l} \right)^2 .$$

Wir beweisen beide Varianten des Satzes 2.1, da die benötigte Variablenzahl vom Grad l der Koeffizientenpolynome abhängt. Aussage a) des Satzes liefert für kleine l, etwa bis $l \leq 10$, eine kleinere Variablenanzahl, während Aussage b) für größere l weniger Variablen verlangt. Zur Interpretation dieses Satzes beweisen wir eine Aussage zur Größenordnung der singulären Reihe und des singulären Integrals. Im Hinblick auf obigen Satz genügt uns das folgende Lemma, denn für den Fall, dass die singuläre Reihe null ist, gilt das Hasseprinzip trivialerweise.

Lemma 2.2. *Sei $\gamma > 0$ und $s > 2k + 2l$. Dann gibt es eine Konstante $\rho > 0$, die nur von s, k, l und γ abhängt, so dass folgendes gilt: Sei $N(A)$ die Anzahl der Formen $F_{\boldsymbol{a}} = \varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}(A)$, so dass für die singuläre Reihe gilt $0 < \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}}) < A^{-\gamma}$. Dann ist $N(A) \ll_{s,k,l,\gamma} A^{s-\rho}$. Eine untere Schranke für das singuläre Integral ist durch $J(F_{\boldsymbol{a}}, B) \gg B^{s-k}A^{-l}$ gegeben.*

Zudem benötigen wir noch eine Aussage zur lokalen Lösbarkeit von Diagonalformen mit polynomialen Koeffizienten. Sei $M_k^{(s)}(A)$ die Anzahl aller $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$ mit $|\mathbf{a}| \leq A$, für die

$$\varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k \quad = \quad 0 \tag{6}$$

überall lokal lösbar in $\mathbf{x}$ ist. Ferner sei die Bedingung $\mathscr{K}(q)$ erfüllt, falls es für alle Primzahlen $p \leq q$ eine geeignete Primpotenz $p^{\gamma(p)}$ und ein $\mathbf{c}$ modulo $p^{\gamma(p)}$ gibt, so dass die Kongruenz

$$\varphi_1(c_1)x_1^k + ... + \varphi_s(c_s)x_s^k \quad \equiv \quad 0 \pmod{p^{\gamma(p)}}$$

eine nichtsinguläre Lösung besitzt; diese kann mit Hilfe des Henselschen Lemmas immer zu einer nichttrivialen p–adischen Lösung geliftet werden.

Lemma 2.3. *Seien die φ_j Polynome vom Grad l, und sei $s \geq l + 3$. Dann gibt es ein $p_0 = p_0(k, \varphi_1, ..., \varphi_s)$, so dass bei erfüllter Bedingung $\mathscr{K}(p_0)$ gilt*

$$M_k^s(A) \gg A^s.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 2.1 können beispielsweise durch die Wahl des Polynoms $\varphi(a) = a^2 + 1$ als Koeffizientenpolynom erfüllt werden, denn sobald $s \geq 4$ ist, besitzt die Gleichung

$$(a_1^2 + 1)x_1^k + ... + (a_s^2 + 1)x_s^k \equiv 0 \pmod{q}$$

für alle q eine liftbare Lösung, denn durch die Wahl von $x_j = 1$ für alle $1 \leq j \leq s$ reduziert sich die Aufgabe darauf, die Kongruenz

$$a_1^2 + 1 + ... + a_s^2 + 1 \equiv 0 \pmod q$$

zu lösen. Es ist bekannt, dass dies für alle q möglich ist und somit können in diesem Fall die Voraussetzungen des Lemmas 2.3 erfüllt werden. Zudem ist die Diskriminante des Polynoms $\varphi(a) = a^2 + 1$ ungleich null, womit auch Satz 2.1 anwendbar ist. Bei Wahl eines Polynoms für alle φ_i kann zur Frage der lokalen Lösbarkeit auf Ergebnisse zum Waringschen Problem in Polynomen, vergleiche dazu etwa [7], zurückgegriffen werden; allerdings lässt Satz 2.1 im Gegensatz zum Waringschen Problem in Polynomen auch die Wahl verschiedener Polynome als Koeffizienten zu. Sind geeignete Koeffizientenpolynome gewählt, so dass die Voraussetzungen des Lemmas 2.3 erfüllt sind, dann erlaubt uns dieses Lemma zusammen mit Lemma 2.2 zu folgern, dass für fast alle Diagonalformen mit polynomialen Koeffizienten wie in (5) das Hasseprinzip bereits für eine Variablenanzahl s im Bereich der linearen Abhängigkeit vom Grad k der Form gilt. Das bedeutet, dass auch für die hier betrachteten Diagonalformen der statistische Ansatz leistungsstark genug ist, eine Aussage im Mittel zu treffen, welche das Hasseprinzip schon für $s \gg k$ im Mittel bestätigt. Genauer zeigen wir

Korollar 2.4. *Seien φ_i geeignete Koeffizientenpolynome, die die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllen. Dann gibt es ein $\varrho > 0$, so dass für fast alle $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$ unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$R_{\boldsymbol{a}}(B) \quad = \quad \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}})\, J(F_{\boldsymbol{a}}; B) + O\left(A^{-l} B^{s-k-\varrho}\right). \tag{7}$$

Zum Beweis des Korollars stellen wir, wie oben schon erwähnt, zunächst fest, dass die Menge $\mathcal{M}(A)$ ausreichend groß ist, denn es gilt $\mathcal{M}(A) \gg A^s$. Mit Hilfe des Lemmas 2.3 folgern wir, dass die Menge aller lokal lösbaren Formen in $\mathcal{M}(A)$ positive Dichte hat. Wir betrachten nun die Ausnahmemenge $\mathcal{E}$ aller $\mathbf{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$, für die (7) nicht gilt. Diese ist hinreichend klein, denn mit $\varrho = k\tilde{\delta}/(3\delta)$ erhalten wir

$$\#\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{E}} 1 \leq \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}(A)} \left| \frac{R_{\mathbf{a}}(B) - \mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})\, J(F_{\mathbf{a}}; B)}{A^{-l} B^{s-k-\varrho}} \right|^2 \ll A^{s-\tilde{\delta}/3}.$$

Das Korollar lässt zusammen mit Satz 2.1 außerdem eine Folgerung zur Größe der Lösungen von $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ zu: Wegen der Kopplung der maximalen Koeffizientengröße $O(A^l)$ an die maximale Größe der Variablen x_i durch $A^\delta \asymp B^k$ gibt es fast immer eine Lösung mit $|\mathbf{x}| \leq A^{\delta/k}$.

Methodisch gehen wir zum Beweis des Satzes 2.1 wie folgt vor. Wir benutzen für einen festen Koeffizientenvektor die Kreismethode und teilen wie üblich das entstehende Integral in Major und Minor Arcs auf. Die äußere Summation über die Formen zerfällt dann ebenfalls in einen Teil über die Major Arcs und einen über die Minor Arcs. Zur Behandlung des Anteils der Major Arcs approximieren wir das Integral mit Standardmethoden, was wie meist bei der Anwendung der Kreismethode keine großen Probleme bereitet, da selbst bei linearer Abhängigkeit der Variablenanzahl vom Grad k der Form genügend Variablen zur Verfügung stehen. Wegen der anschließenden Summation über die Koeffizienten ist eine explizite Bestimmung der Abhängigkeit des Fehlers von den Koeffizienten nötig. Die unteren Grenzen der Anzahl der benötigten Variablen im Zusammenhang mit der Beweistechnik der Kreismethode rühren üblicherweise von den Minor Arcs her. Deshalb nutzen wir auf dem Anteil der Minor Arcs die zusätzliche Summation über die Koeffizienten nach Anwendung einer erweiterten Weylschen Ungleichung und interpretieren den so entstehenden Ausdruck als Lösungsanzahl einer diophantischen Gleichung, in der sowohl die Koeffizienten als auch die ursprünglichen Variablen frei sind. Wir halten zunächst die ursprünglichen Variablen fest und schätzen die Lösungsanzahl der entstehenden diophantischen Gleichung in den Koeffizienten ab. Da die Koeffizienten Polynome vom Grad l sind, wenden wir dafür erneut die Kreismethode an. Unter Ausnutzung bekannter Ergebnisse genügt eine nur von l abhängige Variablenanzahl. Anschließend summieren wir über alle Variablen auf und benötigen so insgesamt nur eine linear vom Grad k der Form abhängende Anzahl an Variablen.

Die zweite Art von Formen, die wir betrachten, sind Summen binärer Formen. Sei $\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i, y_i) = a_0^{(i)} x_i^k + a_1^{(i)} x_i^{k-1} y_i + \ldots + a_{k-1}^{(i)} x_i y_i^{k-1} + a_k^{(i)} y_i^k$ eine binäre Form vom Grad k mit Koeffizientenvektor $\mathbf{a}^{(i)}$ aus $\mathbb{Z}^{k+1}$. Die zu untersuchende Form sei gegeben durch

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(1)}}(x_1, y_1) + \ldots + \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(s)}}(x_s, y_s). \tag{8}$$

Sei $\mathcal{R}_{\mathbf{a}}(B)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ mit $1 \leq |x_i| \leq B$ und $1 \leq |y_i| \leq B$ für $1 \leq i \leq s$, sei $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})$ die singuläre Reihe und $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B)$ das singuläre Integral zu $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$. Die Menge $\mathcal{A}(A)$ enthalte alle $(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(s)})$ mit $\mathbf{a}^{(i)} = (a_0^{(i)}, \ldots, a_k^{(i)})$ aus $\mathbb{Z}^{k+1}$ und $a_j^{(i)} \neq 0$ für $1 \leq i \leq s$ und $0 \leq j \leq k$. Für geraden Grad k fordern wir zudem, dass nur solche Elemente in $\mathcal{A}(A)$ enthalten sind, für die nicht alle $a_0^{(i)}$ dasselbe Vorzeichen haben. Wir beweisen zu Summen binärer Formen den folgenden Satz.

Satz 2.5. *Für $k \geq 2$ sei $s \geq 6k$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $A, B \geq 1$ mit $A \asymp B^k$ gilt*

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}(A)} |\mathcal{R}_{\boldsymbol{a}}(B) - \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}) J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}; B)|^2 \ll A^{s(k+1)-\delta} \left(\frac{B^{2s-k}}{A} \right)^2.$$

Bevor wir aus diesem Satz das Hasseprinzip im Mittel folgern können, sind Aussagen zur Größenordnung des singulären Integrals und der singulären Reihe nötig. Im Hinblick auf obigen Satz reichen Abschätzungen nach unten für fast alle Formen aus, und da im Fall des Verschwindens der singulären Reihe das Hasseprinzip trivialerweise erfüllt ist, genügt es, das folgende Lemma bereitzustellen.

Lemma 2.6. *Sei $\gamma > 0$ und $s > 2k + 1$. Dann gibt es eine Konstante $\rho > 0$, die nur von s, k, l und γ abhängt, so dass folgendes gilt: Sei $N(A)$ die Anzahl der Formen $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}(A)$, so dass für die singuläre Reihe gilt $0 < \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}) < A^{-\gamma}$. Dann ist $N(A) \ll_{s,k,l,\gamma} A^{s(k+1)-\rho}$. Für das singuläre Integral gilt für fast alle Formen $J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}; B) \gg A^{-1-\varepsilon} B^{2s-k}$.*

Eine einfache Anwendung von Theorem 1.2 in [4] zeigt, dass die Menge der lokal lösbaren Formen aus $\mathcal{A}(A)$ positive Dichte haben. Daher ermöglicht uns das obige Lemma, das Hasseprinzip für fast alle Summen binärer Formen vom Grad k wie in (8) für $s > 6k$, also in mehr als $12k$ Variablen, zu folgern. Auch hier erweist sich der statistische Ansatz als genügend leistungsstark, in den Bereich linearer Abhängigkeit der Variablenzahl s vom Grad k der Form vorzustoßen und das Hasseprinzip im Mittel zu bestätigen. Genauer zeigen wir

Korollar 2.7. *Es gibt ein $\varrho > 0$, so dass für fast alle $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$ unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{a}}(B) \;=\; \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}})\, J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}; B) + O\left(A^{-1} B^{2s-k-\varrho}\right). \tag{9}$$

Um das Korollar zu beweisen, stellen wir zunächst fest, dass die Menge der lokal lösbaren Formen aus $\mathcal{A}(A)$ wie oben bereits erwähnt ausreichend groß ist, denn es ist $\mathcal{A}(A) \gg A^{s(k+1)}$. Betrachten wir die Ausnahmemenge $\mathcal{E}$ aller Vektoren $\mathbf{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$, für die (9) nicht erfüllt ist, dann stellen wir fest, dass diese hinreichend klein ist, denn mit $\varrho = k\delta/3$ gilt

$$\#\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{E}} 1 \le \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \left| \frac{\mathcal{R}_{\mathbf{a}}(B) - \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})\, J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B)}{A^{-1} B^{2s-k-\varrho}} \right|^2 \ll A^{s(k+1)-\delta/3}.$$

Wir erhalten aus dem Korollar und Satz 2.5 auch in diesem Fall eine Bedingung an die Größe der Lösungen der Gleichung $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Durch die Kopplung der maximalen Koeffizientengröße A an die maximale Größe der Variablen x_i und y_i durch $A \asymp B^k$ gibt es für die in Satz 2.5 betrachteten Formen fast immer eine Lösungen mit $|\mathbf{x}| \le A^{1/k}$ und $|\mathbf{y}| \le A^{1/k}$.

Zum Beweis des Satzes 2.5 gehen wir weitgehend auf dieselbe Art vor wie bereits zum Beweis des Satzes 2.1. Wir verwenden für einen festen Koeffizientenvektor die Kreismethode und teilen das entstehende Integral in Major und Minor Arcs. Auf dem Major Arc-Anteil arbeiten wir mit Standardmethoden, es sind mit $s > 6k$ ausreichend Variablen vorhanden. Die Abhängigkeit des Fehlers von den Koeffizienten müssen wir explizit angeben, da über alle betrachteten Formen aufsummiert wird. Auf dem Minor Arc-Anteil entsteht nach Anwendung einer erweiterten Weylschen Ungleichung zusammen mit der äußeren Summation ein Ausdruck, den wir als eine diophantische Gleichung deuten können, bei der sowohl die ursprünglichen Variablen als auch die Koeffizienten freie Variablen sind. Halten wir die ursprünglichen Variablen fest, so entsteht eine lineare diophantische Gleichung in den Koeffizienten, also eine Gittergleichung. Für dieses Gitter bestimmen wir die Anzahl der möglichen Lösungen und summieren anschließend diese Lösungsanzahl über den Bereich der ursprünglichen Variablen auf. Das beschriebene Gitterpunktargument ist im Beweis des Satzes 2.5 der zentrale Baustein, denn es gibt uns die Möglichkeit, auf dem Minor Arc-Anteil eine geeignete obere Schranke bereits mit linear vom Grad abhängender Variablenanzahl zu finden.

Aufgeteilt ist die vorliegende Arbeit wie folgt. In Abschnitt 3 stellen wir zunächst einige vorbereitende Aussagen zur Verfügung; der Beweis von Satz 2.1 erfolgt daraufhin in Abschnitt 4, die beiden letzten Unterabschnitte sind dabei dem Beweis unterer Schranken der singulären Reihe und des singulären Integrals sowie der Frage der lokalen Lösbarkeit gewidmet. Der Beweis des Satzes 2.5 befindet sich schließlich in Abschnitt 5, wobei wiederum untere Schranken der singulären Reihe und des singulären Integrals im letzten Unterabschnitt bewiesen werden.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. J. Brüdern für den Themenvorschlag und seine Unterstützung während der Arbeit. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei PD Dr. R. Dietmann für seine wertvollen Hinweise und die Bereitschaft, die Aufgabe des Mitberichters zu übernehmen.

3 Allgemeine Lemmata

Wir tragen in diesem Abschnitt Aussagen zusammen, die wir später in den Beweisen der Sätze 2.1 und 2.5 benutzen. Dabei handelt es sich um grundlegende Ergebnisse, die sich allesamt mit Standardmethoden beweisen lassen. Sie dienen dazu, die Beweise der vorgestellten Sätze zu verkürzen und tragen der ähnlichen Vorgehensweise der beiden Beweise Rechnung. Dieser Abschnitt kann beim Lesen auch übersprungen werden, bei Bedarf können die benötigten Ergebnisse nachgeschlagen werden.

Wir beginnen mit der Hardy-Littlewoodschen Kreismethode, mit deren Hilfe wir eine Lösungsanzahl durch ein Integral ausdrücken und stellen die weitere Vorgehensweise anhand einer allgemeinen Form F, also eines homogenen Polynoms, vom Grad k dar. Die hier betrachtete Form F habe s Variablen. Zu dieser Form sei $R_F(B)$ die Anzahl der Lösungen von $F(\mathbf{x}) = 0$ mit $|\mathbf{x}| \leq B$ für $\mathbf{x}$ aus $\mathbb{Z}^s$, wobei B reell und positiv ist. Wir schreiben

$$S(F;\alpha) = \sum_{|\mathbf{x}|\leq B} e(\alpha F(\mathbf{x})).$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen erhalten wir

$$R_F(B) = \int_0^1 S(F;\alpha)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{10}$$

Seien nun Q, X aus $\mathbb{R}$ positiv und $1 \leq a \leq q \leq Q$ mit $(a;q) = 1$. Dann sei

$$\mathfrak{M}(q,a) = \{\alpha \in \mathfrak{U} : |\alpha - a/q| \leq X\}.$$

Die Major Arcs $\mathfrak{M}$ seien die Vereinigung der $\mathfrak{M}(q,a)$. Zur Vermeidung von Problemen bei der Null oder Eins arbeiten wir auf dem verschobenen Einheitsintervall $\mathfrak{U} = (X, 1+X]$. Die Minor Arcs $\mathfrak{m}$ sind als Komplement der Major Arcs im verschobenen Einheitsintervall definiert, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{M}$. Mit Hilfe dieser Definition und (10) erhalten wir

$$R_F(B) = \int_{\mathfrak{M}} S(F;\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S(F;\alpha)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{11}$$

Zur Abschätzung von $S(F;\alpha)$ auf den Major Arcs beweisen wir

Lemma 3.1. *Sei $B > 1$ und Q aus $\mathbb{R}$ gegeben mit $Q \leq B$. Sei C das Maximum der Beträge der Koeffizienten. Für $\alpha = a/q + \beta$ aus $\mathfrak{M}(q,a)$ mit $(a;q) = 1$, $|\beta| \leq X$ und $1 \leq q \leq Q$, gilt*

$$S(F;\alpha) = q^{-s} S(F;q,a)\, I(F;\beta,B) + O\left(XCQB^{s+k-1}\right),$$

wobei

$$S(F;q,a) = \sum_{\boldsymbol{x} \pmod q} e\left(\frac{aF(\boldsymbol{x})}{q}\right)$$

und

$$I\left(F;\beta,B\right)=\int_{[-B,B]^s} e\left(\beta F\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Beweis. Wir folgen dem Beweis des Lemmas 15.2 aus [6]. Wir sortieren nach Restklassen modulo q und erhalten

$$\begin{aligned}
S\left(F;a/q+\beta\right) &= \sum_{\mathbf{z} \pmod q} \sum_{|q\mathbf{y}+\mathbf{z}|\leq B} e\left(\left(\frac{a}{q}+\beta\right)F\left(q\mathbf{y}+\mathbf{z}\right)\right)\\
&= \sum_{\mathbf{z} \pmod q} e\left(\frac{aF\left(\mathbf{z}\right)}{q}\right)\sum_{|q\mathbf{y}+\mathbf{z}|\leq B} e\left(\beta F\left(q\mathbf{y}+\mathbf{z}\right)\right)\\
&= S\left(F;q,a\right)T,
\end{aligned}$$

wodurch T definiert ist. Die Bedingung an $\mathbf{y}$ in der Summe T liefert $|\mathbf{y}|\ll B/q$ wegen $Q\leq B$. Wir zerlegen diesen Würfel in Einheitswürfel W und erhalten davon $(B/q)^s+O\left((B/q)^{s-1}\right)$ Stück. Bei der Approximation durch Einheitswürfel liegen an den Rändern des ursprünglichen Würfels $O((B/q)^{s-1})$ Würfel, die nicht ganz im Ausgangswürfel enthalten sind. Deren Volumen liefert den Fehlerterm. In jedem Teilwürfel W gilt mit $\mathbf{y}$ und $\mathbf{h}$ aus W nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
&\left|e(\beta F(q\mathbf{y}+\mathbf{z}))-\int_W e(\beta F(q\mathbf{h}+\mathbf{z}))\mathrm{d}\mathbf{h}\right|\\
&\quad= \left|\int_W (e(\beta F(q\mathbf{y}+\mathbf{z}))-e(\beta F(q\mathbf{h}+\mathbf{z})))\mathrm{d}\mathbf{h}\right|\\
&\quad\ll \sup_{\mathbf{h}\in W}\left|\nabla_{\mathbf{h}}\beta F\left(q\mathbf{h}+\mathbf{z}\right)\right| \ll |\beta|qCB^{k-1} \ll XqCB^{k-1},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $|\beta|\leq X$ einsetzen. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\left|T-\int_{|q\mathbf{h}+\mathbf{z}|\leq B} e\left(\beta F\left(q\mathbf{h}+\mathbf{z}\right)\right)\mathrm{d}\mathbf{h}\right| &\ll XqCB^{k-1}\left((B/q)^s+(B/q)^{s-1}\right)\\
&\ll XCB^{s+k-1}q^{1-s}.
\end{aligned}$$

Damit approximieren wir T ausreichend gut durch das obenstehende Integral und zeigen noch, dass dieses Integral nicht zu sehr von $I\left(F;\beta,B\right)$ abweicht. Mit der Substitution $\mathbf{x}=q\mathbf{h}+\mathbf{z}$ in diesem Integral ist aber

$$\int_{|q\mathbf{h}+\mathbf{z}|\leq B} e\left(\beta F\left(q\mathbf{h}+\mathbf{z}\right)\right)\mathrm{d}\mathbf{h}=q^{-s}I\left(F;\beta,B\right).$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}
S\left(F;a/q+\beta\right) &= S\left(F;q,a\right)\left(q^{-s}I\left(F;\beta,B\right)+O\left(XCB^{s+k-1}q^{1-s}\right)\right)\\
&= q^{-s}S\left(F;q,a\right)I\left(F;\beta,B\right)+O\left(XCB^{s+k-1}q\right),
\end{aligned}$$

wenn wir $S(F;q,a)$ durch q^s trivial abschätzen. Die Aussage folgt zusammen mit $q\leq Q$. □

Wir approximieren jetzt den gesamten Major Arc Term und zeigen dazu

Lemma 3.2. *Unter den Voraussetzungen und mit der Notation von Lemma 3.1 gilt*

$$\int_{\mathfrak{M}} S\left(F;\alpha\right)\mathrm{d}\alpha = \mathfrak{S}\left(F;Q\right)J\left(F;B,X\right) + O\left(X^2Q^3CB^{s+k-1}\right).$$

Dabei ist

$$\mathfrak{S}\left(F;Q\right) = \sum_{1\le q\le Q}\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a;q)=1}}\frac{S\left(F;q,a\right)}{q^s}$$

und

$$J\left(F;B,X\right) = \int_{-X}^{X} I\left(F;\beta,B\right)\mathrm{d}\beta.$$

Beweis. Wir setzen zunächst die Definition der Major Arcs und dann Lemma 3.1 ein und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}} S\left(F;\alpha\right)\mathrm{d}\alpha &= \sum_{1\le q\le Q}\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a;q)=1}}\int_{-X}^{X} S\left(F;\frac{a}{q}+\beta\right)\mathrm{d}\beta\\ &= \sum_{1\le q\le Q}\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a;q)=1}}\int_{-X}^{X}\Big(\frac{S(F;q,a)}{q^s}I(F;\beta,B)+O(XCQB^{s+k-1})\Big)\mathrm{d}\beta\\ &= \sum_{1\le q\le Q}\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a;q)=1}}\frac{S(F;q,a)}{q^s}\int_{-X}^{X} I(F;\beta,B)\mathrm{d}\beta + O(X^2Q^3CB^{s+k-1}).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt fließen die trivialen Abschätzungen der Integrations- und Summationslängen ein. Zusammen mit den im Lemma definierten Ausdrücken erhalten wir die Aussage des Lemmas. □

Da wir auf dem Minor Arc-Anteil in den Beweisen der zentralen Sätze eine angepasste Weylsche Ungleichung benötigen, stellen wir an dieser Stelle vorbereitende Lemmata zur Verfügung. Der Beweis der erweiterten Weylschen Ungleichung folgt der Beweisidee in [16], deshalb veschaffen wir uns zunächst zwei Lemmata. Dazu definieren wir

$$\|\beta\| = \min_{y\in\mathbb{Z}}\left|\beta - y\right|.$$

Wegen

$$\sum_{A<h<B} e\left(h\alpha+\beta\right) \ll \begin{cases} B-A+1 & \\ \frac{1}{e(\alpha)-1} & \text{für } \alpha\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

erhalten wir

Lemma 3.3. *Seien A, B, α, β reell mit $B > A$. Dann ist*

$$\sum_{A<h<B} e\left(h\alpha + \beta\right) \ll \min\left(B - A + 1, \|\alpha\|^{-1}\right).$$

Wir zitieren zudem Lemma 2.2 aus [16].

Lemma 3.4. *Seien X, Y, α reell mit $X \geq 1$, $Y \geq 1$ und $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$ mit $(a; q) = 1$ und x aus $\mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\sum_{1\leq x\leq X} \min\left(XYx^{-1}, \|\alpha x\|^{-1}\right) \ll XY \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{Y} + \frac{q}{XY}\right) \log\left(2Xq\right).$$

Die nächste Aussage spielt eine zentrale Rolle im Beweis der Weylschen Ungleichung. Wir benötigen dazu etwas Notation. Sei Δ_j für jede Funktion ϕ einer reellen Variablen α gegeben als

$$\begin{aligned} \Delta_1\left(\phi(\alpha), \beta\right) &= \phi(\alpha+\beta) - \phi(\alpha), \\ \Delta_{j+1}\left(\phi(\alpha), \beta_1, ..., \beta_{j+1}\right) &= \Delta_1\left(\Delta_j\left(\phi(\alpha), \beta_1, ..., \beta_j\right), \beta_{j+1}\right). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass für diesen Operator gilt

$$\Delta_j\left(\alpha^k, \beta_1, ..., \beta_j\right) = \beta_1 ... \beta_j \omega_j\left(\alpha; \beta_1, ..., \beta_j\right), \tag{12}$$

wobei ω_j ein Polynom in α vom Grad $k-j$ mit Leitkoeffizient $k!/\left(k-j\right)!$ ist. Mit $\psi\left(\cdot\right) \in \mathbb{Z}\left[x\right]$ und A, B, α, β reell mit $A \geq 1$ und $B \geq 1$ schreiben wir

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{|a|\leq A} \sum_{|x|\leq B} \sum_{|y|\leq B} e\left(\psi(a)\left(\alpha x^k - \beta y^k\right)\right).$$

Lemma 3.5. *Sei $1 \leq j \leq k-1$ Dann gilt*

$$G\left(\alpha, \beta\right)^{2^j} \ll A^{2^j - 1} B^{2^{j+1}-(j+1)} \sum_{|a|\leq A} \sum_{\substack{h_1, h_2, .., h_j \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\boldsymbol{h})} e\left(\psi\left(a\right)\beta\Delta_j\left(y^k, \boldsymbol{h}\right)\right).$$

Dabei ist $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, .., h_j) \in \mathbb{Z}^j$, $\Delta_j(y^k, \boldsymbol{h})$ ein Polynom in y vom Grad $k-j$ und $I(\boldsymbol{h})$ ein Intervall mit der Eigenschaft $I(\boldsymbol{h}) \subset [-B, B]$.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über j. Für $j = 1$ gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und anschließendem Öffnen des Quadrats

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta)^2 &\ll AB \sum_{|a|\leq A} \sum_{|x|\leq B} \Big| \sum_{|y|\leq B} e\left(\psi\left(a\right)\left(\alpha x^k - \beta y^k\right)\right) \Big|^2 \\ &\ll AB \sum_{|a|\leq A} \sum_{|x|\leq B} \sum_{|y_1|\leq B} \sum_{|y_2|\leq B} e\left(\psi\left(a\right)\left(\alpha x^k - \beta y_1^k - \alpha x^k + \beta y_2^k\right)\right). \end{aligned}$$

Die Summe über x schätzen wir trivial ab, und mit der Substitution $y = y_2$ und $h_1 = y_1 - y_2$ erhalten wir zusammen mit der Definition von Δ_1 weiter

$$G(\alpha,\beta)^2 \ll AB^2 \sum_{|a|\leq A} \sum_{|h_1|\leq 2B} \sum_{y\in I(h_1)} e\left(\psi\left(a\right)\beta\Delta_1\left(y^k, h_1\right)\right),$$

wobei $I\left(h_1\right) = [-B, B] \cap \{y : y + h \in [-B, B]\}$. Das zeigt die geforderte Aussage für $j = 1$. Jetzt nehmen wir an, dass die Aussage für ein j mit $j \leq k-2$ gilt. Da $G(\alpha,\beta)^{2^{j+1}}$ das Quadrat von $G(\alpha,\beta)^{2^j}$ ist, folgern wir mit der Induktionsannahme und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} & G(\alpha,\beta)^{2^{j+1}} \\ & \ll A^{2^{j+1}-2} B^{2^{j+2}-2(j+1)} AB^j \sum_{|a|\leq A} \sum_{\substack{h_1,h_2,..,h_j \\ |h_i|\leq 2B}} \Bigg| \sum_{y\in I(\mathbf{h})} e\left(\psi(a)\beta\Delta_j\left(y^k, \mathbf{h}\right)\right) \Bigg|^2 \\ & \ll A^{2^{j+1}-1} B^{2^{j+2}-(j+2)} \sum_{|a|\leq A} \sum_{\substack{h_1,h_2,..,h_j,h_{j+1} \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\mathbf{h},h_{j+1})} e\left(\psi\left(a\right)\beta\Delta_{j+1}\left(y^k, \mathbf{h}, h_{j+1}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt sich aus

$$\Bigg| \sum_{y\in I(\mathbf{h})} e\left(\psi(a)\beta\Delta_j\left(y^k, \mathbf{h}\right)\right) \Bigg|^2 = \sum_{|h_{j+1}|\leq 2B} \sum_{y\in I(\mathbf{h},h_{j+1})} e\left(\psi(a)\beta\Delta_1\left(\Delta_j\left(y^k, \mathbf{h}\right), h_{j+1}\right)\right)$$

mit $I(\mathbf{h}, h_{j+1}) = I(\mathbf{h}) \cap \{y : y + h_{j+1} \in I(\mathbf{h})\}$ ergibt. □

Im Verlauf der Beweise der Sätze 2.1 und 2.5 benötigen wir Aussagen zu Lösungsanzahlen bestimmter Kongruenzen. Folgende Ergebnisse reichen für diese Zwecke aus. Zunächst zitieren wir Lemma 5.7. aus [3].

Lemma 3.6. *Für $d \in \mathbb{N}$, X positiv und reell sei*

$$B(d, X) = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq X, y \leq X, x^k \equiv y^k \pmod{d}\right\}.$$

Mit $d \leq X^k$ gilt

$$\#B(d, X) \ll X^{1+\varepsilon} + X^{2+\varepsilon} d^{-2/k}.$$

Zudem benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 3.7. *Für $d \in \mathbb{N}$, X positiv und reell sei*

$$C(d, X) = \left\{(x, u, y, v) \in \mathbb{N}^4 : x, u, y, v \leq X, xy^{k-1} \equiv uv^{k-1} \pmod{d}\right\}.$$

Mit $d \ll X^k$ gilt

$$\#C(d, X) \ll X^{3+\varepsilon} + X^{4+\varepsilon} d^{-2/(k-1)}.$$

Beweis. Wir folgen weitgehend dem Beweis von Lemma 5.7 aus [3]. Wir unterteilen die Paare (x_1, u_1) und (y_1, v_1) nach ihrem größten gemeinsamen Teiler. Mit $a = (x_1; u_1)$ und $b = (y_1; v_1)$ seien $x, u \leq Xa^{-1}$, $y, v \leq Xb^{-1}$ definiert durch $x_1 = ax, u_1 = au, y_1 = by$ und $v_1 = bv$. Es gilt $d \mid ab^{k-1}(xy^{k-1} - uv^{k-1})$. Mit $t = (ab^{k-1}; d)$ und $m = d/t$ folgt m teilt $xy^{k-1} - uv^{k-1}$ und nach Konstruktion gilt $(x; u) = (y; v) = 1$. Also können wir $\#C(d, X)$ abschätzen durch

$$\#C(d, X) \ll \sum_{a \leq X} \sum_{b \leq X} \#\tilde{C}\left(\frac{d}{(ab^{k-1}; d)}, \frac{X}{a}, \frac{X}{b}\right) \tag{13}$$

mit

$$\tilde{C}(\tau, X, Y) = \left\{x, u \leq X, y, v \leq Y\colon xy^{k-1} \equiv uv^{k-1} \pmod{\tau}, (x; u) = (y; v) = 1\right\}.$$

Um $\#\tilde{C}(\tau, X, Y)$ abzuschätzen gehen wir wie folgt vor. Für $\tau \leq \min(X, Y)$ wähle y modulo τ beliebig. Falls $(y^{k-1}; \tau) = 1$ ist, dann wähle u und v modulo τ frei, x liegt dann aber modulo τ bereits fest und es gibt in diesem Fall $O(\tau^3)$ Möglichkeiten. Ist aber $(y^{k-1}; \tau) = c > 1$, dann folgt $c \mid uv^{k-1}$, und da $(y; v) = 1$ ist, folgt $c \mid u$; für v bleiben damit $O(\tau)$ mögliche Wahlen, für u noch $O(\tau c^{-1})$, und aus der Kongruenz ergeben sich für x damit $O(c)$ Lösungen. Insgesamt gibt es also höchstens $O(\tau^3)$ Lösungen, und für $\tau \leq \min(X, Y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\#\tilde{C}(\tau, X, Y) &\ll \tau^3 \left(\left[\frac{X}{\tau}\right] + O(1)\right)^2 \left(\left[\frac{Y}{\tau}\right] + O(1)\right)^2 \\ &\ll \frac{X^2Y^2}{\tau}.\end{aligned}$$

Für $\tau > \min(X, Y)$ wählen wir $y \leq Y$ frei. Falls $(y^{k-1}; \tau) = 1$ ist, dann wähle u und v ebenfalls frei, x liegt dann modulo τ bereits fest und es gibt in diesem Fall $O(XY^2 + X^2Y^2\tau^{-1})$ Möglichkeiten. Falls gilt $(y^{k-1}; \tau) = c > 1$, folgt wie oben $c \mid u$ und wegen $(y; v) = 1$; mit $u \leq X$ und $c \mid u$ ergibt sich $c \leq X$, und es bleiben für u gerade $O(X\tau^{-1})$ Möglichkeiten, für v gibt es $O(Y)$. Damit hat die Kongruenz für x modulo τ gerade c Lösungen, was insgesamt auf $O(XY^2 + X^2Y^2\tau^{-1})$ auch in diesem Fall führt. Zusammenfassend erhalten wir

$$\#\tilde{C}(\tau, X, Y) \ll \frac{X^2Y^2}{\tau} + XY^2.$$

Eingesetzt in (13) ergibt sich

$$\begin{aligned}\#C(d, X) &\ll \sum_{a \leq X} \sum_{b \leq X} \left(\frac{X^2}{a^2}\frac{X^2}{b^2}\frac{(ab^{k-1}; d)}{d} + \frac{X}{a}\frac{X^2}{b^2}\right) \\ &\ll X^{3+\varepsilon} + X^4 \sum_{a \leq X} \sum_{b \leq X} \frac{(ab^{k-1}; d)}{a^2b^2d}.\end{aligned}$$

Wegen $(ab^{k-1};d) \le (a;d))(b^{k-1};d)$ und $(a;d) \le a$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
&\ll \quad X^{3+\varepsilon} + X^4 \sum_{a \le X} \frac{(a;d)}{a^2} \sum_{b \le X} \frac{(b^{k-1};d)}{b^2 d} \\
&\ll \quad X^{3+\varepsilon} + X^{4+\varepsilon} \sum_{b \le X} \frac{(b^{k-1};d)}{b^2 d}.
\end{aligned}$$

Mit $r = (b;(b^{k-1};d))$ zerlegen wir in der Summation b in $b = rs$. Wegen

$$r^{k-1} = (b;(b^{k-1};d))^{k-1} \ge (b^{k-1};(b^{k-1};d)) = (b^{k-1};d)$$

und somit $r^{-2} \le (b^{k-1};d)^{-2/(k-1)}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\ll \quad X^{3+\varepsilon} + X^{4+\varepsilon} \sum_{s \le X} \frac{(b^{k-1};d)}{s^2 (b^{k-1};d)^{2/(k-1)} d} \\
&\ll \quad X^{3+\varepsilon} + X^{4+\varepsilon} \sum_{t \mid d} \frac{t}{d t^{2/(k-1)}} \sum_{\substack{s \le X \\ b^{k-1} \equiv 0 \pmod t}} \frac{1}{s^2} \\
&\ll \quad X^{3+\varepsilon} + \frac{X^{4+\varepsilon}}{d^{2/(k-1)}},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $d \ll X^k$ verwendet haben. □

Lemma 3.8. *Sei ϕ ein Polynom über $\mathbb{Z}$ vom Grad l mit Diskriminante ungleich null. Dann hat die Gleichung $\phi(x) \equiv 0$ modulo d höchstens $O(d^\varepsilon)$ Lösungen, wobei die implizite Konstante vom jeweiligen Polynom abhängt.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $d = p^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ für eine Primzahl p. Nach Theorem 54 in [11] gibt es für ein ganzzahliges Polynom $\psi(x)$ vom Grad l, dessen Koeffizienten teilerfremd sind, mit Diskriminante D höchstens lD^2 Lösungen, welche die Kongruenz $\psi(x) \equiv 0$ modulo p^n erfüllen. Teilen wir den größten gemeinsamen Teiler r aus den Koeffizienten des Polynoms ϕ, dann bleibt ein primitives Polynom $\tilde{\phi}$ übrig, dessen Diskriminante $\tilde{D}$ ebenfalls von null verschieden ist, und wir können die oben zitierte Aussage anwenden. Also hat die Kongruenz $\phi(x) \equiv 0$ modulo p^n höchstens $rl\tilde{D}^2$ Lösungen. Mit Hilfe des chinesischen Restsatzes erhalten wir dann die Aussage des Lemmas. □

4 Der Beweis des Satzes über Diagonalformen mit polynomialen Koeffizienten

Zum Beweis des Satzes 2.1 behandeln wir $R_{\mathbf{a}}(B)$ mit der Kreismethode und zerlegen das dabei aus den Orthogonalitätsrelationen entstehende Integral in Major Arcs und Minor Arcs, wie in Abschnitt 3 beschrieben. Wir erhalten

$$R_{\mathbf{a}}(B) = \int_{\mathfrak{M}} S(F_{\mathbf{a}};\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S(F_{\mathbf{a}};\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Die Aufteilung ermöglicht uns, die in Satz 2.1 beschriebene Varianz durch jeweils eine Summe über den Major Arc-Anteil und eine über den Minor Arc-Anteil abzuschätzen, nämlich

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} |R_{\mathbf{a}}(B) - \mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})J(F_{\mathbf{a}};B)|^2 \ll \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \left| \int_{\mathfrak{M}} S(F_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha - \mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})J(F_{\mathbf{a}};B)\right|^2 + \\ + \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \left| \int_{\mathfrak{m}} S(F_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha\right|^2. \qquad (14)$$

Auf dem Major Arc-Anteil verwenden wir Standardmethoden. Das Integral über die Major Arcs kann durch das Produkt aus singulärer Reihe und singulärem Integral approximiert werden, was auch bei linearer Abhängigkeit der Variablenzahl vom Grad keine Probleme bereitet. Um die äußere Summation über alle betrachteten Formen ausführen zu können, müssen wir die Abhängigkeit des Fehlers von den Koeffizienten explizit machen. Auf dem Major Arc-Anteil erhalten wir durch diese Vorgehensweise die geforderte obere Schranke. Zur Behandlung des Minor Arc-Anteils verschaffen wir uns zunächst eine erweiterte Weylsche Ungleichung. Diese wenden wir auf wenige Variable an, denn wir sparen damit nur eine kleine Potenz gegenüber der trivialen Abschätzung ein. Für das verbleibende Integral spielt die äußere Summation eine entscheidende Rolle, denn sie ermöglicht uns, es als Lösungsanzahl einer diophantische Gleichung zu interpretieren. Bei dieser Gleichung vertauschen wir die Rollen der Koeffizienten und der Variablen, und es entsteht eine Gleichung in ganzzahligen Polynomen vom Grad l, deren Lösungsanzahl wir abschätzen und anschließend über alle ursprünglich Variablen aufsummieren. Zur Abschätzung der Lösungsanzahl einer diophantischen Gleichung in Polynomen vom Grad l brauchen wir $O(2^l)$ oder $O(l^2 \log l)$ Variablen, je nach Variante des Satzes; die lineare Abhängigkeit der Variablenanzahl s vom Grad k der Form wird dadurch jedoch nicht gestört. So gelingt es, auf dem Minor Arc-Anteil die geforderte Schranke mit der angegebenen Variablenanzahl zu beweisen.

4.1 Die Major Arcs

Auf den Major Arcs können wir das allgemeine Ergebnis des Lemmas 3.2 auf die Form $F_{\mathbf{a}}$ anwenden, deren Koeffizienten nach oben alle durch $O\left(A^l\right)$ beschränkt sind und erhalten

$$\int_{\mathfrak{M}} S\left(F_{\mathbf{a}};\alpha\right) \mathrm{d}\alpha = \mathfrak{S}\left(F_{\mathbf{a}};Q\right) J\left(F_{\mathbf{a}};B,X\right) + O\left(X^2 Q^3 A^l B^{s+k-1}\right). \tag{15}$$

Die Größe der Parameter Q und X unterliegt in den bisher verwendeten Lemmata recht schwachen Bedingungen, wir stellen diese daher später unter Beachtung ebendieser Bedingungen geeignet ein. Im Hinblick auf (14) approximieren wir in (15) den Ausdruck $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}};Q)$ durch $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})$ und $J(F_{\mathbf{a}};B,X)$ durch $J(F_{\mathbf{a}};B)$ und bestimmen den dabei auftretenden Fehler. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der singulären Reihe und benötigen als Hilfsmittel dazu

Lemma 4.1. *Für a aus $\mathbb{Z}$ und q aus $\mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{x \pmod q} e\left(ax^k/q\right) \ll (a;q)^{1/k} q^{1-1/k}.$$

Beweis. Für $a=0$ ist $(0;q)=q$ und die Aussage ist trivial. Für $(a;q)=1$ ist die Aussage des Lemmas die des Theorems 4.2 in [16]. Sei also $d=(a;q)>1$. Wir schreiben um

$$\sum_{x \pmod q} e\left(\frac{ax^k}{q}\right) = \sum_{x \pmod q} e\left(\frac{ax^k/d}{q/d}\right) = d \sum_{x \pmod{q/d}} e\left(\frac{ax^k/d}{q/d}\right).$$

Jetzt gilt $(a/d;q/d)=1$ und wir schätzen weiter ab

$$\ll d(q/d)^{1-1/k},$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Jetzt sind wir in der Lage, die Konvergenz der singulären Reihe zu beweisen.

Lemma 4.2. *Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}})$ konvergiert absolut für $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$ und $s>2k$.*

Beweis. Wir formen die singuläre Reihe um zu

$$\mathfrak{S}\left(F_{\mathbf{a}}\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q} q^{-s} \prod_{i=1}^{s} \Big(\sum_{x_i=1}^{q} e\Big(\frac{a\varphi_i(a_i)x_i^k}{q}\Big)\Big)$$

und können wegen $\varphi_i(a_i) \neq 0$ mit Hilfe des Lemmas 4.1 weiter abschätzen

$$\ll_{\mathbf{a}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q} q^{-s} q^{s-s/k} \ll_{\mathbf{a}} 1,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzen, dass für $s > 2k$ absolute Konvergenz vorliegt. Mit dem Vektor $\mathbf{a}$ im Index verdeutlichen wir, dass die Konstante hier von $\mathbf{a}$ abhängen kann. $\square$

Wir schreiben im Folgenden zur Abkürzung

$$v(\beta, B) = \int_{-B}^{B} e\left(\beta x^k\right) \mathrm{d}x. \tag{16}$$

Zum Nachweis der Konvergenz des singulären Integrals benötigen wir

Lemma 4.3. *Für alle β aus $\mathbb{R}$ gilt*

$$v(\beta, B) \ll B \cdot \left(1 + B^k |\beta|\right)^{-1/k}.$$

Beweis. Sei P ein Parameter mit $0 < P < B$. Für $\beta \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-B}^{B} e\left(\beta x^k\right) \mathrm{d}x &\ll \left| \int_{-P}^{P} e\left(\beta x^k\right) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{P}^{B} e\left(\beta x^k\right) \mathrm{d}x \right| \\ &\ll P + \left| \frac{1}{k} \int_{P^k}^{B^k} t^{-1+1/k} e(\beta x) \mathrm{d}x \right| \ll P + \frac{B^{1-k}}{|\beta|}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt sich mit partieller Integration sofort ergibt. Wählen wir nun $P = |\beta|^{-1/k}$, dann erhalten wir zusammen mit der trivialen Abschätzung $v(\beta, B) \ll B$ die Aussage. $\square$

Zur leichteren Lesbarkeit führen wir die Schreibweise

$$\pi_{\mathbf{a}} = \prod_{i=1}^{s} |\varphi_i(a_i)| \tag{17}$$

ein. Wir zeigen für das singuläre Integral die folgende Aussage.

Lemma 4.4. *Sei $F_{\boldsymbol{a}}$ eine Form mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$. Dann gilt für $s > k$*

$$J(F_{\boldsymbol{a}}; B) \ll \pi_{\boldsymbol{a}}^{-1/s} B^{s-k}.$$

Beweis. Mit (16) erhalten wir

$$J(F_{\mathbf{a}}; B) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{s} v(\beta\varphi_i(a_i), B) \mathrm{d}\beta$$

und mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 4.3 folgt

$$\begin{aligned} |J(F_{\mathbf{a}}; B)| &\leq \prod_{i=1}^{s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v(\beta\varphi_i(a_i), B)|^s \mathrm{d}\beta \right)^{1/s} \\ &\ll \prod_{i=1}^{s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(B \cdot \left(1 + B^k |\beta\varphi_i(a_i)|\right)^{-\frac{1}{k}} \right)^s \mathrm{d}\beta \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Substituieren wir $B^k|\varphi_i(a_i)|\beta$ und vereinfachen weiter, ergibt sich

$$\ll \quad B^{s-k}\Big(\prod_{i=1}^{s}|\varphi_i\left(a_i\right)|\Big)^{-1/s}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\beta|\right)^{-s/k}\mathrm{d}\beta.$$

Das auftretende Integral in der letzten Abschätzung konvergiert für $s>k$ und wir erhalten mit (17) die Aussage des Lemmas. □

Mit den Lemmata 4.2 und 4.4 ist die Konvergenz der Ausdrücke $\mathfrak{S}\left(F_{\mathbf{a}}\right)$ und $J\left(F_{\mathbf{a}};B\right)$ nachgewiesen. Als weiteres Hilfsmittel geben wir folgende Aussage zum singulären Integral an.

Lemma 4.5. *Sei $F_{\boldsymbol{a}}$ eine Form mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$. Dann gilt für $s>k$*

$$J(F_{\boldsymbol{a}};B,X)=J(F_{\boldsymbol{a}};B)+O\left(\pi_{\boldsymbol{a}}^{-1/k}X^{1-s/k}\right).$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$J(F_{\mathbf{a}};B,X)=J(F_{\mathbf{a}};B)+O\Big(\Big|\int_{X}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}v\left(\beta\varphi_i\left(a_i\right),B\right)\mathrm{d}\beta\Big|\Big).$$

Wir verwenden die Abschätzung $v\left(\beta\varphi_i\left(a_i\right),B\right)\ll|\beta\varphi_i\left(a_i\right)|^{-1/k}$ die aus Lemma 4.3 für $\beta\neq 0$ direkt gefolgert werden kann und erhalten

$$\int_{X}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}v\left(\beta\varphi_i\left(a_i\right),B\right)\mathrm{d}\beta \quad\ll\quad \int_{X}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}|\beta\varphi_i\left(a_i\right)|^{-1/k}\mathrm{d}\beta \quad\ll\quad \pi_{\mathbf{a}}^{-1/k}X^{1-s/k},$$

wobei wir im letzten Schritt (17) sowie die Konvergenz des Integrales für $s>k$ verwenden. Dies beweist das Lemma. □

Wir definieren die abkürzende Schreibweise

$$\check{\mathfrak{S}}(F_{\mathbf{a}})=\sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q}\sum_{\mathbf{x}\ (\mathrm{mod}\ q)}q^{-s}\ e\left(aF_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})/q\right),$$

benutzen die durch die absolute Konvergenz der singulären Reihe $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})$ motivierte Aussage $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}};Q)=\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})+O\left(|\check{\mathfrak{S}}(F_{\mathbf{a}})|\right)$ sowie die Lemmata 4.4 und 4.5 und erhalten als erste Approximation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}};Q)J(F_{\mathbf{a}};B,X) &= \mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})J(F_{\mathbf{a}};B)+O\Big(|\mathfrak{S}\left(F_{\mathbf{a}}\right)|\pi_{\mathbf{a}}^{-1/k}X^{1-s/k}+\\ &\qquad + |\check{\mathfrak{S}}(F_{\mathbf{a}})|\left(\pi_{\mathbf{a}}^{-1/s}B^{s-k}+\pi_{\mathbf{a}}^{-1/k}X^{1-s/k}\right)\Big).\end{aligned}$$

Zusammen mit (15) ergibt sich aus obiger Gleichung nach Festlegung des Parameters X folgende Aussage:

Lemma 4.6. *Für $X = A^{-l}B^{-k+\rho}$ und $\rho > 0$ hinreichend klein und konstant ($\rho = 1/(6k+4)$ genügt beispielsweise (vgl. Beweis zu Satz 4.7)) ergibt sich*

$$\int_{\mathfrak{M}} S(F_{\boldsymbol{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha = \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}})J(F_{\boldsymbol{a}};B) + O\big(B^{s-k}\left(|\mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}})|\pi_{\boldsymbol{a}}^{-1/k}B^{\rho(1-s/k)}A^{-l+ls/k} + \right.$$
$$\left. + |\check{\mathfrak{S}}(F_{\boldsymbol{a}})|\big(\pi_{\boldsymbol{a}}^{-1/s} + \pi_{\boldsymbol{a}}^{-1/k}B^{\rho(1-s/k)}A^{-l+ls/k}\big) + A^{-l}Q^3B^{-1+2\rho}\right)\big).$$

Wir fassen das Ergebnis dieses Abschnitts in folgendem Satz zusammen.

Satz 4.7. *Sei $F_{\boldsymbol{a}}$ eine Form mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$. Für $s > 2k$, $k > 4l$ und $Q = B^{k\rho}$ mit ρ wie in Lemma 4.6 sowie $A^{\delta} \asymp B^k$ mit δ wie in Satz 2.1 gibt es ein $\tilde{\delta} > 0$ mit*

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{M}(A)} \left| \int_{\mathfrak{M}} S(F_{\boldsymbol{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha - \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}})J(F_{\boldsymbol{a}};B)\right|^2 \ll A^{s-\tilde{\delta}}\left(\frac{B^{s-k}}{A^l}\right)^2.$$

Zum Beweis dieses Satzes setzen wir Lemma 4.6 ein und summieren anschließend den Fehlerterm auf. So entsteht

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \left| \int_{\mathfrak{M}} S\left(F_{\mathbf{a}};\alpha\right)\mathrm{d}\alpha - \mathfrak{S}\left(F_{\mathbf{a}}\right)J\left(F_{\mathbf{a}};B\right)\right|^2$$
$$\ll \quad A^s\left(\frac{B^{s-k}}{A^l}\right)^2 B^{\rho(6k+4)-2} + T_1 + T_2 + T_3, \qquad (18)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \left|\check{\mathfrak{S}}(F_{\mathbf{a}})\pi_{\mathbf{a}}^{-1/s}B^{s-k}\right|^2,\\
T_2 &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \left|\check{\mathfrak{S}}(F_{\mathbf{a}})\pi_{\mathbf{a}}^{-1/k}B^{s-k+\rho(1-s/k)}A^{-l+ls/k}\right|^2,\\
T_3 &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \left|\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})\pi_{\mathbf{a}}^{-1/k}B^{s-k+\rho(1-s/k)}A^{-l+ls/k}\right|^2.
\end{aligned}$$

Wir beginnen mit der Bearbeitung von T_1. Lemma 4.1 und der Beweis des Lemmas 4.2 liefert

$$|\check{\mathfrak{S}}(F_{\mathbf{a}})| \ll \sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q} q^{-s}q^{s-s/k}\prod_{i=1}^{s}(\varphi_i(a_i;q))^{1/k} \ll \sum_{q>Q}q^{1-s/k}\prod_{i=1}^{s}(\varphi_i(a_i);q))^{1/k}.$$

Zusammen mit dieser Ungleichung schätzen wir T_1 ab und es folgt

$$T_1 \ll (B^{s-k})^2\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)}\Big(\pi_{\mathbf{a}}^{-1/s}\sum_{q>Q}q^{1-s/k}\prod_{i=1}^{s}(\varphi_i(a_i);q))^{1/k}\Big)^2 \ll (B^{s-k})^2(T_1')^{1/2}(T_1'')^{1/2},$$

wobei $T_1' = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \pi_{\mathbf{a}}^{-4/s}$ und $T_1'' = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \Big(\sum_{q>Q} q^{1-s/k}\prod_{i=1}^{s}(\varphi_i(a_i);q)^{1/k}\Big)^4.$

Wir widmen uns zunächst T_1', schätzen die Summe

$$\sum_{a_i\in\mathcal{M}_i(A)} |\varphi_i(a_i)|^{-4/s}$$

mit $\mathcal{M}_i(A) = \{|a_i| \le A : \varphi_i(a_i) \neq 0\}$ durch dyadische Zerlegung ab und erhalten

$$\sum_{a_i\in\mathcal{M}_i(A)} |\varphi_i(a_i)|^{-4/s} \ll 1 + A^{1-4l/s} \ll A^{1-4l/s},$$

wobei wir $s > 4l$ benutzen, was aus den Voraussetzungen $s > 2k$ und $4l < k$ folgt. Die impliziten Konstanten können dabei vom jeweiligen Polynom φ_i abhängen. Da die in $\mathcal{M}_i(A)$ gestellte Bedingung aus den in $\mathcal{M}(A)$ geforderten folgen, ergibt sich $T_1' \ll A^{s-4l}$. Für T_1'' entsteht durch Öffnen der vierten Potenz

$$\begin{aligned} T_1'' &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \sum_{\substack{q_j>Q\\ j=1,..,4}} (q_1q_2q_3q_4)^{1-s/k} \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{4}(\varphi_i(a_i);q_j)^{1/k} \\ &\le \sum_{\substack{q_j>Q\\ j=1,..,4}} (q_1q_2q_3q_4)^{1-s/k} \prod_{i=1}^{s} \sum_{a_i\in\mathcal{M}_i(A)} (\varphi_i(a_i);q_1q_2q_3q_4)^{4/k}. \end{aligned} \tag{19}$$

Wir schätzen die Summe über die größten gemeinsamen Teiler ab durch

$$\sum_{a_i\in\mathcal{M}_i(A)} (\varphi_i(a_i);q_1q_2q_3q_4)^{4/k} \ll \sum_{\substack{d|q_1q_2q_3q_4\\ d\ll A^l}} d^{4/k} \sum_{\substack{a_i\in\mathcal{M}_i(A)\\ \varphi_i(a_i)\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d)}} 1.$$

Die Gleichung $\varphi_i(a_i) \equiv 0$ modulo d kann nach Lemma 3.8 höchstens $O(d^\varepsilon)$ Lösungen modulo d haben, das heißt wir erhalten $O(Ad^{\varepsilon-1} + d^\varepsilon)$ mögliche Lösungen für a_i aus $\mathcal{M}_i(A)$. Zusammen mit $k > 4l$ und $d \ll A^l$ erhalten wir

$$\sum_{a_i\in\mathcal{M}_i(A)} (\varphi_i(a_i);q_1q_2q_3q_4)^{4/k} \ll \sum_{\substack{d|q_1q_2q_3q_4\\ d\ll A^l}} d^{4/k}(Ad^{\varepsilon-1} + d^\varepsilon) \ll A^{1+\varepsilon}\sum_{d|q} 1 \ll A^{1+\varepsilon}q^\varepsilon,$$

wobei wir im letzten Schritt die Abschätzung der Teilerfunktion benutzt haben. Eingesetzt in (19) ergibt sich

$$T_1'' \ll A^{s+\varepsilon}\prod_{j=1}^{4}\sum_{q_j>Q} q_j^{1-s/k+\varepsilon} \ll A^{s+\varepsilon}Q^{-4/k+\varepsilon},$$

denn für $s > 2k$ entstehen konvergente Reihen, die bei Q beginnen und so die angegebene Einsparung liefern. Mit $Q = B^{k\rho}$ erhalten wir $T_1 \ll A^{s-2l}B^{2s-2k-2\rho+\varepsilon}$. Wir behandeln T_2 und T_3 mit derselben Technik wie T_1 und erhalten die oberen Schranken $T_2 \ll A^{s-2l}B^{2s-2k-2s\rho/k+\varepsilon}$ und $T_3 \ll A^{s-2l}B^{2s-2k+\rho(2-2s/k)+\varepsilon}$ unter den gegebenen Voraussetzungen. Setzen wir die Ergebnisse zu T_1, T_2 und T_3 in (18) ein, sparen wir für hinreichend kleines ρ, zum Beispiel $\rho = 1/(6k+4)$, eine kleine positive Potenz in B ein. Wegen $A^\delta \asymp B^k$ mit δ wie in Satz 2.1 lässt sich dies zu einer Einsparung $A^{-\tilde{\delta}}$ mit $\tilde{\delta} > 0$ umrechnen. Damit haben wir Satz 4.7 bewiesen und eine geeignete obere Schranke auf dem Major Arc-Anteil zur Verfügung gestellt.

4.2 Die Minor Arcs

Wir wenden uns in diesem Abschnitt der Behandlung des Minor Arc-Anteils zu. Hier wird der vollständige Rahmen für die weitere Vorgehensweise geschaffen, so dass Satz 2.1 bis auf eine verbleibende, eher technische Aussage, die in Abschnitt 4.3 bewiesen wird, gefolgert werden kann. Wir definieren $f(\beta) = f(\beta; B)$ durch

$$f(\beta; B) = \sum_{|x| \leq B} e\left(\beta x^k\right)$$

und erhalten durch Öffnen des Quadrats zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}(A)} \left| \int_{\mathfrak{m}} S(F_{\mathbf{a}}; \alpha) \mathrm{d}\alpha \right|^2 \leq \iint_{\mathfrak{m}^2} \prod_{i=1}^{s} |H(\varphi_i, \alpha, \beta; A, B)| \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta, \tag{20}$$

wobei $H(\varphi_i, \alpha, \beta; A, B)$ mit $\mathcal{M}_i(A) = \{|a_i| \leq A : \varphi_i(a_i) \neq 0\}$ definiert ist durch

$$H(\varphi_i, \alpha, \beta; A, B) = \sum_{a_i \in \mathcal{M}_i(A)} f(\alpha\varphi_i(a_i)) f(-\beta\varphi_i(a_i)).$$

Zum weiteren Vorgehen benötigen wir eine Ungleichung vom Weylschen Typ. Diese muss eine kleine feste Potenz in B auch bei den hier recht schmalen Major Arcs einsparen. Sei φ ein Polynom in einer Variable. Wir definieren $G(\alpha, \beta) = G(\varphi; \alpha, \beta)$ durch

$$G(\varphi; \alpha, \beta) = \sum_{|a| \leq A} f(\alpha\varphi(a)) f(-\beta\varphi(a)) = \sum_{|a| \leq A} \sum_{|x| \leq B} \sum_{|y| \leq B} e\left(\varphi(a)\left(\alpha x^k - \beta y^k\right)\right)$$

und zeigen folgende verallgemeinerte Weylsche Ungleichung.

Lemma 4.8 (Verallgemeinerte Weylsche Ungleichung)**.** *Sei* $|\beta - c/q| \leq q^{-2}$ *mit* $(c; q) = 1$, φ *ein ganzzahliges Polynom in einer Variable vom Grad* $l \geq 2$ *und* $\kappa = 2^{k-1+l-1}$, *dann gilt*

$$G(\alpha, \beta) \ll AB^{2+\varepsilon} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q} + \frac{q}{A^l B^k} + \frac{1}{A} \right)^{1/\kappa}.$$

Zum Beweis dieser Aussage verschaffen wir uns als Hilfsmittel

Lemma 4.9. *Zu jedem m mit $1 \leq m \leq l-1$ gibt es eine Darstellung*

$$\begin{aligned} G(\alpha,\beta)^{2^{k-1+m}} \ll\ & A^{2^{k-1+m}-1-m} B^{2^{k+m}-k} \cdot \\ & \cdot \sum_{\substack{h_1,h_2,..,h_{k-1} \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\boldsymbol{h})} \sum_{\substack{b_1,b_2,..,b_m \\ |b_i|\leq 2A}} \sum_{a\in I(\boldsymbol{b})} e\left(\beta\Delta_{k-1}(y^k,\boldsymbol{h})\Delta_m(\varphi(a),\boldsymbol{b})\right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, .., b_m) \in \mathbb{Z}^m$, $I(\boldsymbol{b})$ ein Intervall mit $I(\boldsymbol{b}) \subset [-A, A]$, Δ der in Abschnitt 3 definierte Operator und somit $\Delta_m(\varphi(a), \boldsymbol{b})$ ein Polynom, dessen Grad $l-m$ in a ist und das in den b_i höchstens Grad l hat.

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv in m. Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir die Schreibweise $\widehat{\Delta} = \Delta_{k-1}(y^k, \mathbf{h})$, da dieser Ausdruck während des Beweises unverändert bleibt. Da $G(\alpha,\beta)^{2^k}$ das Quadrat von $G(\alpha,\beta)^{2^{k-1}}$ ist folgern wir mit Lemma 3.5 für $j = k-1$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$G(\alpha,\beta)^{2^k} \ll A^{2^k-2} B^{2^{k+1}-2k+k} \sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1} \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\mathbf{h})} \Big| \sum_{|a|\leq A} e\left(\varphi(a)\beta\widehat{\Delta}\right) \Big|^2.$$

Wir betrachten die Identität

$$\Big| \sum_{|a|\leq A} e\left(\varphi(a)\beta\widehat{\Delta}\right) \Big|^2 = \sum_{|b_1|\leq 2A} \sum_{a\in I(b_1)} e\left(\beta\widehat{\Delta}\cdot(\varphi(a+b_1)-\varphi(a))\right)$$

mit dem Intervall $I(b_1) = \{a : a+b_1 \in [-A,A]\} \cap [-A,A]$ und schätzen weiter ab

$$\ll A^{2^k-2} B^{2^{k+1}-k} \sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1} \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\mathbf{h})} \sum_{|b_1|\leq 2A} \sum_{a\in I(b_1)} e\left(\beta\widehat{\Delta}\Delta_1(\varphi(a),b_1)\right),$$

weil $\Delta_1(\varphi(a), b_1) = \varphi(a+b_1)-\varphi(a)$ nach Definition des Operators Δ in Abschnitt 3 gilt. Man zeigt leicht, dass Δ_1 ein Polynom in a vom Grad $l-1$ ist und dass der Grad in b_1 höchstens l ist.

Nehmen wir an, die Aussage gelte für ein $m \leq l-2$. Da $G(\alpha,\beta)^{2^{k+m}}$ das Quadrat von $G(\alpha,\beta)^{2^{k-1+m}}$ ist, erhalten wir mit der Induktionsannahme und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} & G(\alpha,\beta)^{2^{k+m}} \\ & \ll A^{2^{k+m}-2-2m+m} B^{2^{k+m+1}-2k+k} \sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1} \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\mathbf{h})} \sum_{\substack{b_1,..,b_m \\ |b_i|\leq 2A}} \Big| \sum_{a\in I(\mathbf{b})} e(\beta\widehat{\Delta}\Delta_m(\varphi(a),\mathbf{b}))\Big|^2 \\ & \ll A^{2^{k+m}-2-m} B^{2^{k+m+1}-k} \sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1} \\ |h_i|\leq 2B}} \sum_{y\in I(\mathbf{h})} \sum_{\substack{b_1,..,b_{m+1} \\ |b_i|\leq 2A}} \sum_{a\in I(\mathbf{b},b_{m+1})} e(\beta\widehat{\Delta}\Delta_{m+1}(\varphi(a),\mathbf{b},b_{m+1})). \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ergibt sich aus der Identität

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{a\in I(\mathbf{b})} e(\beta\widehat{\Delta}\Delta_m(\varphi(a),\mathbf{b}))\Big|^2 \\ = \sum_{|b_{m+1}|\le 2A}\ \sum_{a\in I(\mathbf{b},b_{m+1})} e(\beta\widehat{\Delta}(\Delta_m(\varphi(a+b_{m+1}),\mathbf{b})-\Delta_m(\varphi(a),\mathbf{b}))),\end{aligned}$$

wobei $I(\mathbf{b},b_{m+1}) = I(\mathbf{b})\cap\{a : a+b_{m+1}\in I(\mathbf{b})\}$ ist und nach Definition des Operators Δ gilt $\Delta_{m+1}(\varphi(a),\mathbf{b},b_{m+1}) = \Delta_m(\varphi(a+b_{m+1}),\mathbf{b})-\Delta_m(\varphi(a),\mathbf{b})$. Wiederum zeigt man leicht, dass es sich bei $\Delta_{m+1}(\varphi(a),\mathbf{b},b_{m+1})$ um ein Polynom in a vom Grad $l-m-1$ handelt und der Grad in jedem b_i höchstens l ist. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir beweisen nun Lemma 4.8, die erweiterte Weylsche Ungleichung.

Beweis. Wir wählen $m = l-1$ in Lemma 4.9 und erhalten mit $\kappa = 2^{k+l-2}$

$$G(\alpha,\beta)^\kappa \ll A^{\kappa-l}B^{2\kappa-k}\sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1}\\|h_i|\le 2B}}\ \sum_{y\in I(\mathbf{h})}\ \sum_{\substack{b_1,..,b_{l-1}\\|b_i|\le 2A}}\ \sum_{a\in I(\mathbf{b})} e(\beta\Delta_{k-1}(y^k,\mathbf{h})\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b})).$$

Dabei ist $\Delta_{k-1}\left(y^k,\mathbf{h}\right)$ ein Polynom in y sowie $h_1,...,h_{k-1}$ und es ist linear in y mit Leitkoeffizient $h_1h_2...h_{k-1}c$, wobei $c = c(k)$ eine nur von k abhängige positive Konstante ist, vergleiche dazu (12). Da $I(\mathbf{h})$ ein Intervall mit $I(\mathbf{h})\subset[-B,B]$ ist, können wir Lemma 3.3 anwenden, solange $h_1h_2...h_{k-1}\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b})$ nicht null ist. Falls gilt

$$h_1h_2...h_{k-1}\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b}) = 0, \tag{21}$$

muss mindestens ein $h_i = 0$ oder $\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b}) = 0$ sein; das zuletzt genannte Polynom ist linear in a, der Grad in den b_i für $1\le i\le l-1$ ist höchstens l, das heißt für $\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b}) = 0$ gibt es höchstens $O(A^{l-1})$ Möglichkeiten und insgesamt können wir den Beitrag der Fälle, in denen Gleichung (21) gilt, durch $O\left(B^{k-1}A^l + B^kA^{l-1}\right)$ abschätzen. Andernfalls erhalten wir mit Lemma 3.3

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1}\\|h_i|\le 2B}}\ \sum_{y\in I(\mathbf{h})}\ \sum_{\substack{b_1,..,b_{l-1}\\|b_i|\le 2A}}\ \sum_{a\in I(\mathbf{b})} e(\beta\Delta_{k-1}(y^k,\mathbf{h})\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b})) \\ &\qquad\ll \sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1}\\|h_i|\le 2B}}\ \sum_{\substack{b_1,..,b_{l-1}\\|b_i|\le 2A}}\ \sum_{a\in I(\mathbf{b})} \min(B,\|\beta h_1...h_{k-1}c\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b})\|^{-1}). \end{aligned}\tag{22}$$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir die Darstellungsanzahl

$$\rho(l) = \#\left\{a\in\mathbb{Z},\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^{l-1},\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^{k-1} : l = c\Delta_{l-1}(\varphi(a),\mathbf{b})\,h_1...h_{k-1}\right\}.$$

Diese schätzen wir mit Hilfe der Teilerfunktion durch $\rho(l)\ll l^\varepsilon$ ab, was wegen $A^\delta\asymp B^k$ mit δ wie in Satz 2.1 durch $O(B^\varepsilon)$ nach oben beschränkt werden kann.

Außerdem gilt $\Delta_{l-1}(\varphi(a), \mathbf{b}) \ll A^l$, was sich leicht anhand der Definition des Operators Δ zeigen lässt. Damit setzen wir (22) fort durch

$$\ll \sum_{l \ll A^l B^{k-1}} \rho(l) \min(B, \|\beta l\|^{-1}) \quad \ll \quad B^\varepsilon \sum_{l \ll A^l B^{k-1}} \min(A^l B^k l^{-1}, \|\beta l\|^{-1}).$$

Jetzt benutzen wir Lemma 3.4 und beachten, dass wir $q \leq A^l B^k$ annehmen können, weil sonst die Aussage des zu beweisenden Lemmas trivial ist, und erhalten

$$\ll B^\varepsilon B^k A^l \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{q}{B^k A^l} \right) \log\left(2B^{k-1} A^l q\right) \quad \ll \quad B^{k+\varepsilon} A^l \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{q}{B^k A^l} \right).$$

Sammeln wir alle Ergebnisse, ergibt sich

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta)^\kappa \quad &\ll \quad A^{\kappa - l} B^{2\kappa - k} \left(B^{k-1} A^l + B^k A^{l-1} + B^{k+\varepsilon} A^l \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{q}{B^k A^l} \right) \right) \\ &\ll \quad A^\kappa B^{2\kappa + \varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A} + \frac{q}{B^k A^l} \right). \end{aligned}$$

Durch Ziehen der κ-ten Wurzel erhalten wir die Aussage des Lemmas. □

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen in

Lemma 4.10. *Es gibt ein* $\check{\delta} > 0$ *mit*

$$\sup_{\alpha, \beta \in \mathfrak{m}} |H(\varphi_i, \alpha, \beta; A, B)| \ll AB^{2-\check{\delta}}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass Lemma 4.8 für α und β aus den Minor Arcs $\mathfrak{m}$ anwendbar ist. Nach dem Dirichletschen Approximationssatz gibt es zu jedem α aus $\mathbb{R}$ eine rationale Approximation a/q mit $(a; q) = 1$ und $q \leq A^l B^{k-\rho}$, so dass gilt $|\alpha - a/q| \leq A^{-l} B^{-k+\rho} q^{-1} \leq A^{-l} B^{-k+\rho}$. Da α in den Minor Arcs $\mathfrak{m}$ liegt, erhalten wir mit der Definition der Major Arcs und den in Lemma 4.6 und Satz 4.7 geforderten Einstellungen der Parameter Q und X, dass $q > B^{k \cdot \rho} = Q$ ist, denn sonst läge α in einem Major Arc $\mathfrak{M}(a, q)$. Also gilt

$$B^{k\rho} < q \leq A^l B^{k-\rho} \tag{23}$$

und $|\alpha - a/q| \leq A^{-l} B^{-k+\rho} q^{-1} \leq q^{-2}$ für α aus den Minor Arcs $\mathfrak{m}$. Die Voraussetzung des Lemmas 4.8 mit der zusätzlichen Bedingung an q in (23) ist erfüllt, und wir erhalten mit $\kappa = 2^{k-1+l-1}$ und der Ungleichung $|H(\varphi_i, \alpha, \beta; A, B)| \leq |G(\alpha, \beta)|$ die Abschätzung

$$\sup_{\alpha, \beta \in \mathfrak{m}} |H(\varphi_i, \alpha, \beta; A, B)| \quad \ll \quad AB^{2+\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A} + \frac{q}{B^k A^l} \right)^{1/\kappa} \quad \ll \quad AB^{2-\check{\delta}}$$

für ein geeignetes positives $\check{\delta}$, wobei wir $A^\delta \asymp B^k$ mit δ aus Satz 2.1 benutzen. □

Ausgehend von (20) erhalten wir für den Minor Arc-Anteil mit Hilfe des Lemmas 4.10

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{M}(A)} \Big| \int_{\mathfrak{m}} S(F_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big|^2 \ll AB^{2-\check{\delta}} \iint_{\mathfrak{U}^2} \prod_{i=1}^{s-1} |H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \tag{24}$$

Zur weiteren Bearbeitung bleibt das Doppelintegral, in dem wir sämtliche Minor Arc-Information vernachlässigt haben, da wir diese nur zur Anwendung einer Ungleichung vom Weylschen Typ benötigen. Wir erhalten mit der Hölderschen Ungleichung

$$\iint_{\mathfrak{U}^2} \prod_{i=1}^{s-1} |H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \le \prod_{i=1}^{s-1} \Big(\iint_{\mathfrak{U}^2} |H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|^{s-1}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\Big)^{\frac{1}{s-1}} \tag{25}$$

und behandeln jetzt das innere Doppelintegral. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $s-1=2t$ gilt, weil wir sonst in (24) mit Lemma 4.10 eine weitere Variable entfernen. Wir schreiben also

$$\iint_{\mathfrak{U}^2} |H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|^{s-1}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \iint_{\mathfrak{U}^2} |H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|^{2t}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \tag{26}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung führt auf

$$|H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|^2 \le \Big(\sum_{a\in\mathcal{M}_i(A)} \Big| \sum_{|x|\le B} e(\varphi_i(a)\alpha x^k)\Big|^2\Big)\Big(\sum_{a\in\mathcal{M}_i(A)} \Big| \sum_{|y|\le B} e(-\varphi_i(a)\beta y^k)\Big|^2\Big).$$

Eingesetzt in (26) ergibt sich

$$\iint_{\mathfrak{U}^2} |H(\varphi_i,\alpha,\beta;A,B)|^{2t}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \le V(\varphi_i;A,B)^2 \tag{27}$$

mit

$$V(\varphi_i;A,B) = \int_{\mathfrak{U}} \Big(\sum_{a\in\mathcal{M}_i(A)} \Big| \sum_{|x|\le B} e(\varphi_i(a)\alpha x^k)\Big|^2\Big)^t \mathrm{d}\alpha.$$

Zur weiteren Bearbeitung bleibt $V(\varphi_i;A,B)$. Wir betrachten die Gleichung

$$\left(x_1^k - y_1^k\right)\varphi_i\left(a_1\right) + \ldots + \left(x_t^k - y_t^k\right)\varphi_i\left(a_t\right) = 0. \tag{28}$$

Sei $\mathcal{L}_t$ die Menge aller Vektoren $\mathbf{a},\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus $\mathbb{Z}^t$ mit a_j aus $\mathcal{M}_i(A)$, $|x_j|\le B$ und $|y_j|\le B$ für $1\le j\le t$, so dass (28) gilt. Durch Öffnen der Quadrate in $V(\varphi_i;A,B)$ entsteht

$$V(\varphi_i;A,B) = \int_{\mathfrak{U}} \Big(\sum_{a\in\mathcal{M}_i(A)} \sum_{|x|\le B} \sum_{|y|\le B} e\left(\alpha\varphi_i\left(a\right)\left(x^k-y^k\right)\right)\Big)^t \mathrm{d}\alpha = \#\mathcal{L}_t.$$

Wir bearbeiten die entstandene Lösungsanzahl $\#\mathcal{L}_t$ jetzt wie folgt: Statt $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Variablen aufzufassen, halten wir diese zunächst fest und betrachten Gleichung (28) für festes $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in den Variablen a_j. Zur Abschätzung der Lösungsanzahl dieser Gleichung nach oben nutzen wir erneut die Kreismethode. Diese Anwendung der Kreismethode auf Gleichung (28) für festes $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, also eine diagonale Gleichung im Polynom φ_i führen wir in Abschnitt 4.3 aus. Wir definieren hier eine Mindestanzahl r an Variablen, die wir benötigen, um die Gleichung

$$\left(x_1^k - y_1^k\right)\varphi_i\left(a_1\right) + \ldots + \left(x_r^k - y_r^k\right)\varphi_i\left(a_r\right) = 0 \tag{29}$$

bei festem $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ mit der Kreismethode in der richtigen Größenordnung behandeln zu können. Die Größe dieser Mindestanzahl wird in Abschnitt 4.3 bestimmt. Mit Hilfe dieser Anzahl definieren wir die Menge $\mathcal{L}_t'$ als Menge aller Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus $\mathcal{L}_t$, so dass für höchstens $t-r$ Variablenpaare die Differenz $x_j^k - y_j^k$ gleich null ist, und die Menge $\mathcal{L}_t''$ als Menge aller Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus $\mathcal{L}_t$, so dass für mindestens $t-r+1$ Variablenpaare die Differenz $x_j^k - y_j^k$ gleich null ist. Dann erhalten wir $V(\varphi_i; A, B) = \#\mathcal{L}_t' + \#\mathcal{L}_t''$. Die Menge $\mathcal{L}_t''$ schneidet aus der Menge $\mathcal{L}_t$ gerade den Teil aus, der zu wenige Variablen enthält, um sie mit der Kreismethode auf die oben beschriebene Art zu behandeln. Deshalb schätzen wir trivial ab und erhalten

$$V(\varphi_i; A, B) \ \ll \ \#\mathcal{L}_t' + A^t B^{t+r-1}. \tag{30}$$

Wir können in $\mathcal{L}_t'$ durch Umnummerieren stets erreichen, dass $x_j^k - y_j^k \neq 0$ für $1 \leq j \leq r$. Sei $\mathcal{K}_r$ die Menge aller Vektoren $\mathbf{a}$ aus $\mathbb{Z}^r$ mit a_j aus $\mathcal{M}_i(A)$, für die (29) gilt. Dann erhalten wir durch triviales Abschätzen der Variablen, deren Index j größer als r ist

$$\#\mathcal{L}_t' \ \ll \ A^{t-r}B^{2t-2r} \sum_{\substack{|x_j|,|y_j| \leq B \\ x_j^k - y_j^k \neq 0 \\ j=1,..,r}} \#\mathcal{K}_r. \tag{31}$$

Greifen wir nun vor und benutzen das Ergebnis des Abschnitts 4.3, um den Beweis des Satzes 2.1 zu vervollständigen: Wir erhalten $\#\mathcal{L}_t' \ll A^{t-l+\varepsilon}B^{2t-k}$ als Ergebnis des Abschnitts 4.3. Zusammen mit (30) ergibt sich

$$V(\varphi_i; A, B) \ll A^{t-l+\varepsilon}B^{2t-k} + A^t B^{t+r-1} \ \ll \ A^{t-l+\varepsilon}B^{2t-k},$$

wobei wir im letzten Schritt benutzen, dass gilt $t \geq k\left(1 + l/\delta\right) + r - 1$ und $A^\delta \asymp B^k$ mit δ aus den Voraussetzungen des Satzes 2.1. An dieser Stelle erhalten wir also eine Bedingung an die Größe der Variablenanzahl s, denn es ist $s \geq 2t+1$. Insgesamt erhalten wir als Ergebnis dieses Abschnitts

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}(A)} \left| \int_{\mathfrak{m}} S(F_{\mathbf{a}}; \alpha) \mathrm{d}\alpha \right|^2 \ll A^{s-\check{\delta}/2} \left(\frac{B^{s-k}}{A^l}\right)^2. \tag{32}$$

Zusammen mit (32) liefert Satz 4.7 die Aussage des Satzes 2.1. Die noch fehlende Bedingung an die Variablenzahl r ergibt sich in Abschnitt 4.3.

4.3 Noch einmal die Kreismethode

Die Aufgabe dieses Abschnitts ist es, die Lösunganzahl $\#\mathcal{L}_t'$ nach oben abzuschätzen. Wir haben in (31) den ersten Schritt zur Abschätzung dieser Lösungsanzahl bereits angegeben, es bleibt die Behandlung der Menge $\mathcal{K}_r$ sowie die anschließende Summation über alle möglichen Werte von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus $\mathbb{Z}^r$. Zur Behandlung der Menge $\mathcal{K}_r$ benutzen wir die Kreismethode. Wir setzen zur Abkürzung $c_j = x_j^k - y_j^k$ für $1 \leq j \leq r$ und schreiben φ statt φ_i, da das Polynom sich während der Bearbeitung nicht ändert. Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen erhalten wir

$$\#\mathcal{K}_r = \int_{\mathfrak{U}} S\left(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha\right) \mathrm{d}\alpha, \tag{33}$$

wobei gilt $\Phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = c_1\varphi(a_1) + ... + c_r\varphi(a_r)$ und

$$S(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha) = \sum_{|\mathbf{a}|\leq A} e(\alpha\Phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})).$$

Das entstandene Integral unterteilen wir in Major und Minor Arcs, die wir wie in Abschnitt 3 mit noch freien Parametern X und Q definieren. Wir erhalten mit (33) und der Summation über die ursprünglichen Variablen

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k - y_j^k \neq 0\\ j=1,..,r}} \#\mathcal{K}_r = \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k - y_j^k \neq 0\\ j=1,..,r}} \int_{\mathfrak{M}} S(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha)\mathrm{d}\alpha + \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k - y_j^k \neq 0\\ j=1,..,r}} \int_{\mathfrak{m}} S(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{34}$$

Die Parameter X und Q stellen wir später ein und beachten, dass zur Anwendung der Lemmata 3.1 und 3.2 gelten muss $Q \leq A$. Mit Hilfe dieser beiden Lemmata folgt für das Major Arc Integral

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha)\mathrm{d}\alpha = \mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)J(\Phi_{\mathbf{c}};A,X) + O\left(X^2Q^3B^kA^{r+l-1}\right) \tag{35}$$

mit

$$\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q) = \sum_{1\leq q\leq Q} \sum_{\substack{1\leq a\leq q\\ (a;q)=1}} q^{-r} \sum_{\mathbf{b} \pmod q} e\left(a\Phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})/q\right) \tag{36}$$

und

$$J(\Phi_{\mathbf{c}};A,X) = \int_{-X}^{X} \int_{[-A,A]^r} e\left(\beta\Phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})\right) \mathrm{d}\mathbf{a}\mathrm{d}\beta.$$

Bevor wir die Summation im ersten Term der rechten Seite von (34) ausführen, verschaffen wir uns weitere Lemmata. Aus Theorem 7.3 in [16] folgt

Lemma 4.11. *Es ist*

$$\int_{-A}^{A} e\left(\beta c\varphi(a)\right) \mathrm{d}a \ll_{\varphi} A\left(1 + |\beta c|A^l\right)^{-1/l}.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas geben wir eine obere Schranke für $J(\Phi_{\mathbf{c}}; A, X)$ an.

Lemma 4.12. *Sei $c_j \neq 0$ für $1 \leq j \leq r$ und $r > l$. Dann gilt*

$$J(\Phi_{\mathbf{c}}; A, X) \ll \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|\Big)^{-1/r} A^{r-l}.$$

Beweis. Wir erhalten mit Lemma 4.11

$$J(\Phi_{\mathbf{c}}; A, X) \quad \ll \quad \int_{-X}^{X} \prod_{j=1}^{r} \big(A(1 + |\beta c_j|\, A^l)^{-1/l}\big)\,\mathrm{d}\beta.$$

Die Höldersche Ungleichung ergibt

$$\ll \quad \prod_{j=1}^{r} \Big(\int_{-X}^{X} \big|A(1 + |\beta c_j|\, A^l)^{-1/l}\big|^r \,\mathrm{d}\beta\Big)^{1/r}.$$

Weiteres Vereinfachen und die Substitution von $\beta |c_j| A^l$ liefert die obere Schranke

$$\ll \quad A^{r-l}\Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|\Big)^{-1/r} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\beta|)^{-r/l} \mathrm{d}\beta \;\ll\; A^{r-l}\Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|\Big)^{-1/r},$$

da das verbleibende Integral für $r > l$ konvergiert. □

Wir stellen zur späteren Bearbeitung von $\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}}; Q)$ noch zwei Aussagen bereit.

Lemma 4.13. *Seien q aus $\mathbb{N}$ und $b_0, ..., b_l$ aus $\mathbb{Z}$. Dann ist*

$$\sum_{x=1}^{q} e\left((b_l x^l + ... + b_1 x + b_0)/q\right) \ll (q; b_l; ...; b_1)^{1/l} q^{1-1/l+\varepsilon}.$$

Beweis. Es ist

$$\Big|\sum_{x=1}^{q} e\left((b_l x^l + ... + b_1 x + b_0)/q\right)\Big| = \Big|\sum_{x=1}^{q} e\left((b_l x^l + ... + b_1 x)/q\right)\Big|.$$

Für $(q; b_l; ...; b_1) = q$ ist die Aussage trivial. Für $(q; b_l; ...; b_1) = 1$ ist Theorem 7.1 aus [16] anwendbar. Für den Fall, dass $1 < (q; b_l; ...; b_1) < q$ gilt, greift das gleiche Argument wie in Lemma 4.1, womit das Lemma gezeigt ist. □

Das Polynom φ besitzt nach unseren Voraussetzungen stets einen von null verschiedenen Leitkoeffizienten. Deshalb geben wir folgende obere Schranke für $\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}}; Q)$ an.

Lemma 4.14. *Es gilt*

$$\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q) \ll \sum_{q\leq Q} q^{1-r/k+\varepsilon} \prod_{j=1}^{r} (q;c_j)^{1/k}.$$

Beweis. Es ist $(q;b_l;...;b_1) \leq (q;b_l)$. Sei b_l der Leitkoeffizient des Polynoms φ, dann gilt mit Lemma 4.13, $(a;q)=1$, $k \geq l$ und der Tatsache, dass b_l als Leitkoeffizient des Polynoms φ in die O-Konstante aufgenommen werden kann,

$$\sum_{x=1}^{q} e\left((ac_j\varphi(x))/q\right) \ll (q;b_lc_j)^{1/l} q^{1-1/l+\varepsilon} \ll (q;c_j)^{1/k} q^{1-1/k+\varepsilon}.$$

Eingesetzt in (36) erhalten wir die gesuchte Abschätzung. □

Wir bearbeiten jetzt den ersten Summanden der rechten Seite der Gleichung (34) mit Hilfe von (35) und erhalten

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \int_{\mathfrak{M}} S(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha)\mathrm{d}\alpha \ll \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)J(\Phi_{\mathbf{c}};A,X)| + O(X^2Q^3B^{2r+k}A^{r+l-1}),$$

wobei wir die Summationen über $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ im Fehlerterm trivial abgeschätzt haben. Wir setzen die Aussage des Lemmas 4.12 ein und beachten $c_j \neq 0$ für $1 \leq j \leq r$, dann gilt

$$\ll A^{r-l} \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)| \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|\Big)^{-1/r} + O(X^2Q^3B^{2r+k}A^{r+l-1}). \tag{37}$$

Wir rufen uns noch einmal in Erinnerung, dass $c_j = x_j^k - y_j^k$ für $1 \leq j \leq r$ gilt, und schätzen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)| \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|\Big)^{-1/r}$$
$$\leq \Big(\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\leq B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|^{-\frac{2}{r}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Wir behandeln die einzelnen Faktoren der rechten Seite von (38) und beweisen

Lemma 4.15. *Für $r > 4k+1$ gilt*

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\boldsymbol{c}};Q)|^2 \ll B^{2r+\varepsilon}.$$

Beweis. Wir setzen Lemma 4.14 zur Abschätzung von $\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)$ ein, öffnen danach das Quadrat und erhalten

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)|^2 \ll \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \sum_{q_1\le Q}\sum_{q_2\le Q} (q_1q_2)^{1-\frac{r}{k}+\varepsilon} \prod_{j=1}^{r} (q_1;c_j)^{\frac{1}{k}} (q_2;c_j)^{\frac{1}{k}}.$$

Sei $t = [r/2]$. Indem wir jeweils einen Teil der größten gemeinsamen Teiler trivial durch q_1 beziehungsweise q_2 abschätzen, folgt

$$\ll \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \sum_{q_1\le Q} q_1^{1-\frac{t}{k}+\varepsilon} \prod_{j=1}^{t} (q_1;c_j)^{\frac{1}{k}} \sum_{q_2\le Q} q_2^{1-\frac{r-t}{k}+\varepsilon} \prod_{j=t+1}^{r} (q_2;c_j)^{\frac{1}{k}}.$$

Vertauschen wir die Summationen, ergibt sich

$$\ll \sum_{q_1\le Q} q_1^{1-\frac{t}{k}+\varepsilon} \prod_{j=1}^{t} \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0}} (q_1;c_j)^{\frac{1}{k}} \cdot \sum_{q_2\le Q} q_2^{1-\frac{r-t}{k}+\varepsilon} \prod_{j=t+1}^{r} \sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0}} (q_2;c_j)^{\frac{1}{k}}. \quad (39)$$

Rufen wir uns in Erinnerung, dass für $1 \le j \le r$ gilt $c_j = x_j^k - y_j^k$, dann betrachten wir

$$\sum_{\substack{|x|,|y|\le B\\ x^k-y^k\neq 0}} (q;x^k-y^k)^{1/k} \ll \sum_{\substack{d|q\\ d\le 2B^k}} d^{1/k} \sum_{\substack{|x|,|y|\le B\\ x^k-y^k\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d)}} 1.$$

Wegen $d \ll B^k$ schätzen wir mit Lemma 3.6 weiter ab

$$\ll \sum_{\substack{d|q\\ d\le 2B^k}} d^{\frac{1}{k}} \left(B^{1+\varepsilon} + B^{2+\varepsilon} d^{-2/k}\right) \ll B^{2+\varepsilon} q^{\varepsilon}, \quad (40)$$

wobei wir die Abschätzung der Teilerfunktion benutzen. Setzen wir (40) in (39) ein, erhalten wir

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)|^2 \ll B^{2r+\varepsilon} \sum_{q_1\le Q} q_1^{1-\frac{t}{k}+\varepsilon} \sum_{q_2\le Q} q_2^{1-\frac{r-t}{k}+\varepsilon}.$$

Wegen $r > 4k+1$ ist $t = [r/2] > 2k$, das heißt durch Ergänzen der Summen entstehen konvergente Reihen, was die Aussage des Lemmas beweist. $\square$

Für den zweiten Faktor zeigen wir

Lemma 4.16. *Für $r > 2k$ gilt*

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|^{-\frac{2}{r}}\Big) \ll (\log B)^{2r} B^{2r-2k}.$$

Beweis. Wir betrachten

$$\sum_{\substack{|x|,|y|\le B\\ x^k-y^k\neq 0}} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}} \ll \sum_{\substack{1\le x,y\le B\\ x^k-y^k\neq 0}} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}} + B. \tag{41}$$

Den ersten Summanden dieser oberen Schranke zerlegen wir dyadisch und erhalten

$$\sum_{\substack{x,y=1\\ x^k-y^k\neq 0}}^{B} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}} \le (\log B)^2 \sum_{X<x\le 2X}\sum_{Y<y\le 2Y} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}}$$

für geeignete X, Y mit $1 \le X \le B$ und $1 \le Y \le B$. Sortieren wir nach der Größe von $x^k - y^k$, ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}&\sum_{X<x\le 2X}\sum_{Y<y\le 2Y} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}}\\ &\le \sum_{1\le h\ll \log B}\sum_{X<x\le 2X}\sum_{\substack{Y<y\le 2Y\\ \frac{Y^k}{2^h}<|x^k-y^k|\le\frac{Y^k}{2^{h-1}}}} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}} + \sum_{X<x\le 2X}\sum_{\substack{Y<y\le 2Y\\ |x^k-y^k|>Y^k}} \left|x^k-y^k\right|^{-\frac{2}{r}}.\end{aligned} \tag{42}$$

Wegen $|x-y| = |x^k-y^k||x^{k-1}+x^{k-2}y+...+xy^{k-2}+y^{k-1}|^{-1}$ folgt für festes h, dass gilt $|x-y| \le 2^{-h+1}Y$; für gewähltes x bleiben somit $O\left(2^{-h+1}Y+1\right)$ Möglichkeiten für y. Da aber $x^k - y^k$ ungleich null ist, ist x ungleich y, also bleiben $O\left(2^{-h+1}Y\right)$ Möglichkeiten für y. Damit setzen wir (42) fort durch

$$\ll \sum_{1\le h\ll\log B} 2^{h(-1+2/r)} XY^{1-2k/r} + XY^{1-2k/r} \ll B^{2-2k/r},$$

da für $r > 2k$ wegen $k \ge 2$ auch $r > 2$ folgt, somit die Summe über h zu einer konvergenten Reihe ergänzt werden kann und wir wegen $r > 2k$ die Parameter X, Y durch B nach oben abschätzen. Wir erinnern uns, dass für $1 \le j \le r$ gilt $c_j = x_j^k - y_j^k$ und zusammen mit

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j|^{-\frac{2}{r}}\Big) = \prod_{j=1}^{r}\Big(\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0}} |x_j^k-y_j^k|^{-\frac{2}{r}}\Big)$$

und (41) erhalten wir die Aussage des Lemmas. □

Nun setzen wir die Ergebnisse der Lemmata 4.15 und 4.16 in (38) ein und erhalten für $r > 4k+1$, indem wir die Potenzen des Logarithmus und B^{ε} via $A^{\delta} \asymp B^k$ durch eine beliebig kleine Potenz in A kompensieren,

$$A^{r-l} \sum_{\substack{|x_j|,|y_j| \leq B \\ x_j^k - y_j^k \neq 0 \\ j=1,..,r}} |\mathfrak{S}(\Phi_{\mathbf{c}};Q)| \Big(\prod_{j=1}^{r} |c_j| \Big)^{-1/r} \ll A^{r-l+\varepsilon} B^{2r-k}. \tag{43}$$

Wir setzen $Q = A^{1/5}$ und $X = A^{-l+1/5} B^{-k}$, wodurch wir $Q \leq A$ gewährleistet haben, und erhalten mit (43) und (37)

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j| \leq B \\ x_j^k - y_j^k \neq 0 \\ j=1,..,r}} \int_{\mathfrak{M}} S(\Phi_{\mathbf{c}};\alpha) \mathrm{d}\alpha \ll A^{r-l+\varepsilon} B^{2r-k}. \tag{44}$$

Es bleibt der Anteil der Minor Arcs abzuschätzen. Wir stellen zunächst eine Aussage zur Verfügung, die die Rolle des klassischen Hua-Lemmas beim Waringschen Problem übernimmt.

Lemma 4.17. *Sei $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ und $a_k \neq 0$. Dann gibt es eine positive Konstante C_1, so dass für $s \geq k^2 (3 \log k + \log\log k + C_1)$ und $X > 2$ gilt*

$$\int_0^1 \Big| \sum_{x=1}^{X} e(\alpha f(x)) \Big|^{2s} \mathrm{d}\alpha \ll X^{2s-k},$$

wobei die implizite Konstante nur von s und k abhängt.

Beweis. Wir folgen dem Beweis des Theorems 6 in [9] und verwenden Theorem 7.4 aus [16]. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_s) = f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_s)$$

für $1 \leq x_i, y_i \leq X$ und $1 \leq i \leq s$ ist offensichtlich gleich der Anzahl der Lösungen von

$$x_1^h + ... + x_s^h - \big(y_1^h + ... + y_s^h\big) = N_h \qquad (1 \leq h \leq k), \tag{45}$$

wobei $N_1, ..., N_k$ die Bedingung

$$a_k N_k + ... + a_1 N_1 = 0, \quad N_h \ll_s X^h \tag{46}$$

erfüllen. Hierbei werden $x_1, ..x_s, y_1, .., y_s, N_1, .., N_k$ alle als Unbekannte behandelt. Wegen $N_h \ll_s X^h$ gibt es

$$O\left(X^{1+2+...+k-1}\right) = O\big(X^{\frac{1}{2}k(k-1)}\big) \tag{47}$$

Möglichkeiten für $N_1, .., N_k$, die die Bedingung (46) erfüllen, da N_k durch die Wahl von $N_1, .., N_{k-1}$ eindeutig bestimmt ist. Für festes $N_1, .., N_{k-1}$ und damit auch N_k ist die Lösungsanzahl der Gleichung (45) gegeben durch

$$\int_0^1 ... \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{X} e\left(\alpha_k x^k + ... + \alpha_1 x\right) \right|^{2s} e\left(-\left(N_k \alpha_k + ... + N_1 \alpha_1\right)\right) \mathrm{d}\alpha_1 ... \mathrm{d}\alpha_k.$$

Das ist aber

$$\leq \int_0^1 ... \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{X} e\left(\alpha_k x^k + ... + \alpha_1 x\right) \right|^{2s} \mathrm{d}\alpha_1 ... \mathrm{d}\alpha_k \ll_{s,k} X^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)},$$

wobei wir im letzten Schritt Theorem 7.4 aus [16] einsetzen. Zusammen mit (47) erhalten wir die Aussage des Lemmas. □

Wir brauchen zur Behandlung des Anteils der Minor Arcs noch eine Ungleichung vom Weylschen Typ. Dazu geben wir folgendes Lemma an:

Lemma 4.18 (erweiterte Weylsche Ungleichung)**.** *Sei* $(a; q) = 1$, $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$ *und*

$$f(\alpha c) = \sum_{x=1}^{N} e\left(\alpha c x^l + \alpha_1 x^{l-1} + \alpha_2 x^{l-2} + ... + \alpha_l\right)$$

mit $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Dann gilt mit* $K = 2^{l-1}$

$$f(\alpha c) \ll N^{1+\varepsilon} \left(q^{-1} + cN^{-1} + qN^{-l}\right)^{\frac{1}{K}} \log\left(2qN^{l-1}\right).$$

Beweis. Wir merken an, dass für $|c| \geq N$ die Aussage des Lemmas trivial ist. Für die verbleibenden $|c| < N$ folgt der Beweis dem des Lemmas 2.4 in [16] unter expliziter Berücksichtigung des Koeffizienten c und Ausnutzung der zusätzlichen Bedingung $|c| < N$. □

Da wir bei Benutzung dieses Lemmas für große Werte von l nur eine sehr kleine Potenz gegenüber der trivialen Abschätzung einsparen, stellen wir alternativ dazu folgendes Lemma bereit, das für große Werte von l mehr einspart.

Lemma 4.19. *Sei* $(a; q) = 1$, $|\alpha - a/q| \leq cq^{-2}$ *mit* $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|c| \leq q \leq N^k$ *und*

$$f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) = \sum_{x=1}^{N} e\left(\alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + ... + \alpha_k\right).$$

Dann gilt

$$f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \ll N\left(N^\eta \left(cq^{-1} + N^{-1} + qN^{-k}\right)\right)^{\frac{1}{2(k-1)l}} \log(2N),$$

wobei

$$\eta = \frac{1}{2}(k-1)^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^l.$$

Beweis. Durch Anpassung des Beweises von Theorem 5.3 in [16] ergibt sich unter Berücksichtigung von c in der Approximation $|\alpha - a/q| \leq cq^{-2}$ die Aussage. $\square$

Um Lemma 4.18 oder Lemma 4.19 auf den Minor Arcs anwenden zu können, benötigen wir Schranken an q. Diese gewinnen wir durch das übliche Argument via den Dirichletschen Approximationssatz. Zu $q \leq A^{l-1/5}B^k$ gibt es nach diesem Satz eine Approximation von $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha - a/q| \leq A^{-l+1/5}B^{-k}q^{-1}$. Wegen $A^{l-1/5}B^k \geq q$ folgt $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$. Für $1 \leq q \leq A^{1/5}$ folgt $|\alpha - a/q| \leq A^{-l+1/5}B^{-k}$. Damit läge aber α in einem Major Arc $\mathfrak{M}(q, a)$. Also folgt auf den Minor Arcs

$$A^{1/5} < q \leq A^{l-1/5}B^k. \tag{48}$$

Wir definieren $f_\varphi(\alpha) = f_\varphi(\alpha; A)$ durch

$$f_\varphi(\alpha; A) \;=\; \sum_{x=1}^{A} e(\alpha\varphi(x)).$$

Für kleine l wenden wir Lemma 4.18 unter Beachtung von $A^\delta \asymp B^k$ mit $\delta < 1/5$ und (48) auf $f_\varphi(\alpha c_j)$ an und erhalten

$$f_\varphi(\alpha c_j) \;\ll\; A^{1+\varepsilon}\left(A^{-1/5+\delta}\right)^{1/K},$$

wobei $K = 2^{l-1}$, da φ ein Polynom vom Grad l ist. Die Bedingung $\delta < 1/5$ ist nötig, um mit Lemma 4.18 noch eine Einsparung zu erhalten. Auf den Major Arcs haben wir eine Einsparung von B^k erhalten, diese müssen wir auf den Minor Arcs durch mehrfache Anwendung des Lemmas 4.18 erreichen. Wir wenden deshalb auf $r' \geq 2^{l-1}\delta/(1/5 - \delta)$ Variablen das Lemma 4.18 an, um eine Einsparung A^δ zu erreichen. Das liefert wegen $A^\delta \asymp B^k$ die oben genannte nötige Einsparung von B^k. Wir wählen r' mit seiner oben angegebenen unteren Schranke minimal, so dass r'' mit $2r'' = r - r'$ eine ganze Zahl ist, denn die verbleibenden $2r''$ Variablen benötigen wir, um Lemma 4.17 anzuwenden. Durch die Anwendung des Lemmas 4.18 auf r' Variablen erhalten wir

$$\int_{\mathfrak{m}} S(\Phi_{\mathbf{c}}; \alpha)\mathrm{d}\alpha \;=\; \int_{\mathfrak{m}} \prod_{j=1}^{r} f(\alpha c_j \varphi)\mathrm{d}\alpha \;\ll\; A^{r'-\delta+\varepsilon} \int_{\mathfrak{U}} \prod_{j=1}^{2r''} |f(\alpha c_j \varphi)|\,\mathrm{d}\alpha.$$

Für $r'' \geq l^2(3\log l + \log\log l + C_1)$ mit einer Konstanten C_1, die sich aus Lemma 4.17 ergibt, fahren wir wie folgt fort: Wir wenden auf das verbleibende Integral die Höldersche Ungleichung und danach Lemma 4.17 an, das ergibt

$$\ll\; A^{r'-\delta+\varepsilon} \prod_{j=1}^{2r''} \left(\int_{\mathfrak{U}} |f(\alpha c_j \varphi)|^{2r''}\,\mathrm{d}\alpha \right)^{\frac{1}{2r''}} \;\ll\; A^{r'-\delta+\varepsilon} A^{2r''-l} \;\ll\; A^{r-l+\varepsilon} B^{-k},$$

wobei wir im letzten Schritt zusammengefasst und $A^\delta \asymp B^k$ eingesetzt haben. Setzen wir (44) und das eben erhaltene Ergebnis für das Minor Arc Integral in die Ungleichung (34) ein und schätzen die Summationen über $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ trivial ab, erhalten wir

$$\sum_{\substack{|x_j|,|y_j|\le B\\ x_j^k-y_j^k\neq 0\\ j=1,..,r}} \#\mathcal{K}_r \ll A^{r-l+\varepsilon}B^{2r-k}$$

solange $r \geq \max(4k+2, 2^{l-1}\delta/((1/5)-\delta) + 2l^2(3\log l + \log\log l + C_1))$ gilt. Zusammen mit (31) ergibt sich $\#\mathcal{L}'_t \ll A^{t-l+\varepsilon}B^{2t-k}$, was wir in Abschnitt 4.2 als Ergebnis benutzt haben. Damit haben wir Teil a) des Satzes 2.1 bewiesen.
Zum Beweis der Variante b) des genannten Satzes benutzen wir Lemma 4.19 statt des Lemmas 4.18. Wir stellen zunächst sicher, dass die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind. Wir haben bereits gezeigt, dass es für α aus den Minor Arcs a und q gibt mit $(a;q)=1$ und $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$, wobei für q die Ungleichung (48) gilt. Um das Lemma auf $f_\varphi(\alpha c_j)$ anzuwenden, müssen wir αc_j approximieren. Mit der Approximation von α ergibt sich $|\alpha c_j - a c_j/q| \leq c_j q^{-2}$. Diese Approximation ist nicht unbedingt teilerfremd. Um dies sicherzustellen sei $d=(c_j;q)$ und $\tilde{q}$ durch $d\tilde{q}=q$ sowie $\tilde{c_j}$ durch $d\tilde{c_j}=c_j$ definiert. Damit erhalten wir $|\alpha c_j - a\tilde{c_j}/\tilde{q}| \leq c_j q^{-2} \leq c_j \tilde{q}^{-2}$ mit $(a\tilde{c_j};\tilde{q})=1$. Für $\tilde{q}$ gilt zudem $A^{1/5-\delta} < \tilde{q} \leq A^{l-1/5}B^k$. Daher liefert Lemma 4.19 für $0<\delta<1/10$

$$f_\varphi(\alpha c_j) \ll A\left(A^{\eta-1/5+2\delta}\right)^{1/(2(k-1)l)}\log(2A).$$

Die gleiche Rechnung wie im Beweis des Theorem 5.3 in [16] zeigt, dass es eine Konstante C_4 gibt, so dass wir $4l^2\log l + 2C_4 l^2$ Variablen zum Erhalt einer Einsparung von $A^{1/5-2\delta}$ benötigen. Wir gehen jetzt wie bereits für Teil a) des Satzes 2.1 beschrieben vor, benutzen Lemma 4.19 statt des Lemmas 4.18 und es ergibt sich dieselbe Abschätzung für $\#\mathcal{L}'_t$, aber mit einer anderen Bedingung an die benötigte Variablenanzahl. Wir setzen zur Abkürzung $\theta(\delta)=\delta/(1/5-2\delta)$, dann gilt in diesem Fall

$$r \geq \max\left(4k+2, 2l^2\left((2\theta(\delta)+3)\log l + \log\log l + C_1 + C_4\theta(\delta)\right)\right).$$

Damit erhalten wir Teil b) des Satzes 2.1, der für große Werte des Grades l der Koeffizientenpolynome weniger Variablen benötigt als Variante a).

4.4 Untere Schranken

Dieser Abschnitt dient dem Beweis unterer Schranken an das singuläre Integral und die singuläre Reihe im Sinne des Lemmas 2.2. Diese Aussagen stellen sicher, dass Korollar 2.4 tatsächlich eine nichttriviale Aussage ist und der Hauptterm dort tatsächlich größer als der Fehlerterm ist. Da nur Folgerungen für fast alle Formen aus den bewiesenen Sätzen gezogen werden können, genügt eine untere Schranke an die singuläre Reihe für fast alle Formen.

Zunächst betrachten wir das singuläre Integral. Aus Lemma 4.5 in [3] folgern wir, dass bereits für $s > k$ und $\varphi_i(a_i)$, welche für alle $1 \leq i \leq s$ nicht null sind und für gerades k nicht alle dasselbe Vorzeichen haben, gilt

$$J(F_{\mathbf{a}}; B) \gg B^{s-k}\Big(\max_{1\leq i\leq s}|\varphi_i(a_i)|\Big)^{-1}.$$

Da die φ_i Polynome einer Variable vom Grad l sind und wir Werte bis zur Größe A einsetzen, liefert diese Aussage die in Lemma 2.2 für $\mathbf{a}$ aus $\mathcal{M}(a)$ geforderte untere Schranke an das singuläre Integral, denn es ist $J(F_{\mathbf{a}}; B) \gg A^{-l}B^{s-k}$. Es bleibt also die Aussage zur singulären Reihe zu zeigen. Wir folgen einem Beweis von Dietmann [5] und stellen dazu folgendes Ergebnis bereit.

Lemma 4.20. *Seien $\varphi_i(\cdot)$ ganzzahlige Polynome vom Grad l. Sei $s \geq 2k+1$, p eine Primzahl und seien $a_1, ..., a_s$ ganze Zahlen, so dass mindestens $2k+1$ der $\varphi_i(a_i)$ nicht durch p teilbar sind. Sei außerdem*

$$\varrho(q; \boldsymbol{a}) \;=\; \#\left\{\boldsymbol{x} \pmod q : \varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k \equiv 0 \pmod q\right\}.$$

Dann ist $\varrho(p^n; \boldsymbol{a}) = p^{n(s-1)}\left(1 + O\left(p^{-1-1/k}\right)\right)$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\varphi_1(a_1), ..., \varphi_{2k+1}(a_{2k+1})$ teilerfremd zu p sind. Wir schreiben

$$S(q, a) \;=\; \sum_{x \pmod q} e\left(ax^k/q\right)$$

und folgern $S(p^m, a) \ll p^{m(1-1/k)}$ mit Theorem 4.2 in [16] für $(a; p) = 1$. Wir schreiben die Lösungsanzahl $\varrho(p^n; \mathbf{a})$ mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen als Summe und sortieren nach gemeinsamen p-Potenzen. Das ergibt

$$\varrho(p^n; \mathbf{a}) \;=\; \frac{1}{p^n}\sum_{b=1}^{p^n}\prod_{i=1}^{s} S(p^n, b\varphi_i(a_i)) \;=\; \frac{1}{p^n}\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{\substack{c=1\\(c;p)=1}}^{p^{n-\ell}}\prod_{i=1}^{s} S(p^n, p^\ell c\varphi_i(a_i)).$$

Nun spalten wir den Hauptterm ab, schätzen im Fehlerterm die Summe über c trivial ab und benutzen zur weiteren Abschätzung $S(p^m, a) \ll p^{m(1-1/k)}$ für $(a; p) = 1$. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}
&= p^{n(s-1)} + O\Big(p^{-n}\sum_{\ell=0}^{n-1} p^{n-\ell}\Big|\prod_{i=1}^{s} p^\ell S(p^{n-\ell}, c\varphi_i(a_i))\Big|\Big)\\
&= p^{n(s-1)} + O\Big(p^{-n}\sum_{\ell=0}^{n-1} p^{n-\ell+s\ell+(2k+1)(n-\ell)(1-1/k)+(s-2k-1)(n-\ell)}\Big).
\end{aligned}$$

Weiteres Vereinfachen und Ausklammern von $p^{n(s-1)}$ führt zu

$$\begin{aligned}
&= p^{n(s-1)} + O\Big(\sum_{\ell=0}^{n-1} p^{-\ell+sn+(\ell-n)(2+1/k)}\Big) \\
&= p^{n(s-1)}\Big(1 + O\Big(\sum_{\ell=0}^{n-1} p^{(\ell-n)(1+1/k)}\Big)\Big) \quad = \quad p^{n(s-1)}\left(1 + O\left(p^{-1-1/k}\right)\right),
\end{aligned}$$

womit wir das Lemma bewiesen haben. □

Als weiteres Hilfsmittel genügt uns folgendes Lemma.

Lemma 4.21. *Seien X und L natürliche Zahlen. Sei N die Anzahl der x mit $1 \le x \le X$ und*

$$\prod_{p|x} p \quad \le \quad X^{1/L^2}. \tag{49}$$

Dann ist $N \ll_L X^{2/L}$.

Beweis. Jedes x, das von N gezählt wird, lässt sich in der Form $x = x_1 x_2$ schreiben, wobei x_1 eine L-te Potenz und x_2 eine L-freie Zahl ist. Bekanntermaßen gibt es für x_1 höchstens $O\left(X^{1/L}\right)$ Möglichkeiten. Betrachten wir x_2, so stellen wir fest, dass aus (49) folgt $x_2 \le X^{1/L}$, da x_2 eine L-freie Zahl ist. Deshalb gibt es höchstens $O\left(X^{1/L}\right)$ Möglichkeiten für x_2 und wir erhalten die Aussage des Lemmas. □

Wir formulieren in folgendem Satz das Ergebnis zur singulären Reihe, das die in Lemma 2.2 geforderte Aussage beweist.

Satz 4.22. *Sei $\gamma > 0$ und $s \ge 2k + 2l + 1$, wobei l der Grad der Polynome $\varphi_i(\cdot)$ ist, deren Diskriminanten sämtliche nicht verschwinden. Dann gibt es eine Konstante $\rho > 0$, die nur von s, k, l und γ abhängt, so dass gilt: Sei $N(A)$ die Anzahl der Formen $F_{\boldsymbol{a}} = \varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k$ mit $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$, für die gilt $0 < \mathfrak{S}(F_{\boldsymbol{a}}) < A^{-\gamma}$. Dann ist $N(A) \ll_{s,k,l,\gamma} A^{s-\rho}$.*

Beweis. Nach Kapitel 2 in [16] gibt es eine Produktdarstellung der singulären Reihe der Form

$$\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) \quad = \quad \prod_p \chi_p(\mathbf{a})$$

mit

$$\chi_p(\mathbf{a}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} p^{n(1-s)} \varrho(p^n; \mathbf{a})$$

und $\varrho(q;\mathbf{a})$ definiert wie in Lemma 4.20. Sei $\mathcal{P}(\mathbf{a}) = \mathcal{P}(C;\mathbf{a})$ die Menge aller Primzahlen p, die größer sind als C und die höchstens $s-(2k+1)$ der Koeffizienten $\varphi_i(a_i)$ teilen. Nach Lemma 4.20 gibt es eine Konstante C, die nur von k abhängt, so dass für alle p aus $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ gilt

$$\prod_{p\in\mathcal{P}(\mathbf{a})} \chi_p(\mathbf{a}) = \prod_{p\in\mathcal{P}(\mathbf{a})} \left(1 + O\left(p^{-1-1/k}\right)\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{50}$$

Wir können ein bezüglich s, k und γ hinreichend kleines $\delta > 0$ und eine bezüglich s, k, l, γ und δ hinreichend große natürliche Zahl L wählen und führen folgende Notation ein. Wir fixieren $\mathbf{a}$ aus $\mathcal{M}(A)$. Wir nennen $\mathbf{a}$ *schlecht erster Art*, wenn gilt

$$\prod_{p\notin\mathcal{P}(\mathbf{a})} p \geq A^{1/L^2}.$$

Zudem nennen wir $\mathbf{a}$ *schlecht zweiter Art*, wenn $\mathbf{a}$ nicht schlecht erster Art ist, aber gilt

$$\prod_{p\notin\mathcal{P}(\mathbf{a})} p^{\ell(p)} \geq A^{\delta}$$

mit $\ell(p) = \max\left\{\ell : p^\ell \parallel \varphi_i(a_i) \text{ für ein } i \text{ mit } 1 \leq i \leq s\right\}$. Wir zeigen, dass schlechte $\mathbf{a}$ recht selten sind. Wir behaupten

$$\#\left\{\mathbf{a} \in \mathcal{M}(A) : \mathbf{a} \textit{ schlecht erster Art}\right\} \ll A^{s-1/L^2+\varepsilon}. \tag{51}$$

Für jedes $\mathbf{a}$, das schlecht erster Art ist, ist das Produkt $\varphi_1(a_1)...\varphi_s(a_s)$ durch eine Zahl der Form q^{2l+1} mit

$$q \quad = \quad \prod_{\substack{p\notin\mathcal{P}(\mathbf{a})\\ p>C}} p$$

teilbar. Für festes q existieren höchstens $O(q^\varepsilon)$ mögliche Zerlegungen in ein Produkt aus q_j' und mit Lemma 3.8 schätzen wir die Lösungsanzahl von $\varphi_i(a_i) \equiv 0$ modulo q_j' mit $|a_i| \leq A$ zunächst durch $O((1 + A/q_j')(q_j')^\varepsilon)$ ab, was sich für $q_j' \ll A^l$ dann durch $O\left(A^{1+\varepsilon}(q_j')^{-1/l}\right)$ majorisieren lässt. Für festes q ergibt das $A^{s+\varepsilon}q^{-(2l+1)/l}$ Möglichkeiten für das Produkt $\varphi_1(a_1)...\varphi_s(a_s)$. Wir erhalten wegen $A^{1/L^2} \ll q \ll A^{s/2}$ für die Anzahl der möglichen Produkte $\varphi_1(a_1)...\varphi_s(a_s)$, die zu $\mathbf{a}$, die schlecht erster Art sind, gehören, höchstens

$$\sum_{A^{1/L^2}\ll q\ll A^{s/2}} A^{s+\varepsilon}q^{-(2l+1)/l} \quad \ll \quad A^{s-1/L^2+\varepsilon}.$$

Mit der Abschätzung der Teilerfunktion erhalten wir $O(A^{s-1/L^2+\varepsilon})$ Möglichkeiten für $\varphi_1(a_1),...,\varphi_s(a_s)$, was mit dem Hauptsatz der Algebra die in (51) angegebene Schranke liefert. Nun zeigen wir

$$\#\{\mathbf{a} \in \mathcal{M}(A) : \mathbf{a} \textit{ schlecht zweiter Art}\} \ll A^{s+2s/L-\delta/l+\varepsilon}. \tag{52}$$

Für jedes $\mathbf{a}$, das schlecht zweiter Art ist, ist das Produkt $\varphi_1(a_1)...\varphi_s(a_s)$ teilbar durch eine Zahl q der Form

$$q = \prod_{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a})} p^{\ell(p)} \geq A^\delta \qquad \text{mit} \qquad \prod_{p|q} p \leq A^{1/L^2}.$$

Nach Lemma 4.21 gibt es höchstens $A^{2s/L}$ verschiedene q. Ein festes q kann auf höchstens $O(q^\varepsilon)$ Arten in ein Produkt aus q'_j zerlegt werden. Wir müssen wieder Kongruenzen $\varphi_i(a_i) \equiv 0$ modulo q'_j lösen. Dafür gibt es, wie oben schon gezeigt, höchstens $O\left(A^{1+\varepsilon}(q'_j)^{-1/l}\right)$ Lösungen. Multiplizieren wir alle Möglichkeiten für die a_i, so erhalten wir unter Berücksichtigung aller Möglichkeiten für q und dessen Zerlegungen, der Abschätzung der Teilerfunktion und dem Hauptsatz der Algebra die in (52) geforderte Schranke. Wir zeigen, dass für $\mathbf{a}$, die weder schlecht erster noch schlecht zweiter Art sind, gilt

$$\mathfrak{S}(F_\mathbf{a}) \geq A^{-\gamma}, \tag{53}$$

sofern $\mathfrak{S}(F_\mathbf{a})$ nicht null ist. Wir benutzen zum Beweis von (53) die Produktdarstellung der singulären Reihe. Da $\mathbf{a}$ weder schlecht erster noch schlecht zweiter Art ist, gilt

$$\prod_{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a})} p^{-\ell(p)} \quad > \quad A^{-\delta}. \tag{54}$$

Um untere Schranken an χ_p für $p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a})$ zu erhalten, verwenden wir das Henselsche Lemma. Da wir wissen, dass $\mathfrak{S}(F_\mathbf{a}) \neq 0$ ist, gibt es zu jeder Potenz p^m eine Lösung $\mathbf{x}$ modulo p^m der Gleichung

$$\varphi_1(a_1)x_1^k + ... + \varphi_s(a_s)x_s^k \quad \equiv \quad 0 \pmod{p^m}$$

mit mindestens einem x_i, das nicht durch p teilbar ist. Wir können annehmen, dass beispielsweise x_1 nicht durch p teilbar ist und wir wissen, dass aus $p^r \mid \varphi_1(a_1)$ folgt, dass $r \leq \ell(p)$ ist. Deshalb erhalten wir mit Hensels Lemma

$$\varrho(p^n; \mathbf{a}) \quad \geq \quad \frac{p^{n(s-1)}}{p^{D(\ell(p)+1)}}$$

für hinreichend große n. Die Konstante D hängt dabei nur von s und k ab. Wir erhalten $\chi_p(\mathbf{a}) \geq p^{-D(\ell(p)+1)}$. Zusammen mit (50) und (54) erhalten wir für die singuläre Reihe

$$\mathfrak{S}(F_\mathbf{a}) \quad \geq \quad \frac{1}{2} \prod_{p \leq C} p^{-D} \prod_{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a})} p^{-2D\ell(p)} \gg A^{-2D\delta}.$$

Da δ hinreichend klein bezüglich s, k und γ gewählt wurde, folgt die untere Schranke (53) sofort. Die singulären Reihen aller Formen, die weder schlecht erster noch schlecht zweiter Art sind, haben deshalb die geforderte untere Schranke. Da die Anzahl der schlechten Formen durch (51) und (52) beschränkt ist, folgt die geforderte obere Schranke an $N(A)$ mit einem positiven ρ durch Wahl eines hinreichend großen L, beispielsweise $2s/L < \delta/(2l)$. Das zeigt den Satz. $\square$

4.5 Zur lokalen Lösbarkeit

In diesem letzten kurzen Abschnitt beweisen wir Lemma 2.3. Da der Beweis sich sehr stark an dem des Theorems 1.2 in [4] orientiert, ist er eher knapp gehalten. Die Notation entspricht der in Abschnitt 2 eingeführten.

Beweis. Nach demselben Argument wie im Beweis zu Theorem 1.2 aus [4] gibt es ein $p_0 = p_0(k)$, so dass für jedes $p > p_0$ gilt $p \nmid k$ und außerdem die Kongruenz der Form

$$\varphi_1(a_1)x_1^k + \varphi_2(a_2)x_2^k + \varphi_3(a_3)x_3^k \equiv 0 \pmod p$$

eine nichttriviale Lösung besitzt, solange $p \nmid \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2)\varphi_3(a_3)$ gilt. Jede solche Lösung kann zu einer nichttrivialen p–adischen Lösung geliftet werden. Bei erfüllter Bedingung $\mathscr{K}(p_0)$ gibt es zu allen $p \le p_0$ eine Restklasse $\mathbf{c}$ modulo $p^{\gamma(p)}$, so dass (6) eine nichttriviale p–adische Lösung besitzt, sobald gilt

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{c} \pmod{p^{\gamma(p)}}.$$

Dem Beweis des Theorems 1.2 aus [4] weiter folgend definieren wir $Q = \prod_{p \le p_0} p^{\gamma(p)}$. Nach dem chinesischen Restsatz gibt es eine Restklasse $\mathbf{d}$ modulo Q, so dass aus $\mathbf{a} \equiv \mathbf{d} \pmod Q$ für jedes $p \le p_0$ folgt $\mathbf{a} \equiv \mathbf{c} \pmod{p^{\gamma(p)}}$. Daraus schließen wir, dass gilt $M_k^s(A) \ge \tilde{M}_k^s(A)$, wobei $\tilde{M}_k^s(A)$ die Anzahl aller $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$ beschreibt, für die $|\mathbf{a}| \le A$ und $\mathbf{a} \equiv \mathbf{d} \pmod Q$ gilt, und zudem jedes $p > p_0$ höchstens l der Koeffizienten $\varphi_j(a_j)$ teilt. Um $\tilde{M}_k^s(A) \gg A^s$ zu zeigen, sieben wir aus den Vektoren $\mathbf{a} \equiv \mathbf{d} \pmod Q$ mit $|\mathbf{a}| \le A$ all diejenigen heraus, bei denen ein $p > p_0$ mindestens $l+1$ der Koeffizienten $\varphi_j(a_j)$ teilt. Wir erhalten als Abschätzung für diese Menge die Schranke

$$\ll \sum_{p_0 < p \ll A^l} \left(\frac{A}{Q}\right)^{s-l-1} \left(\frac{A}{Qp} + 1\right)^{l+1} l^{l+1} \ll \left(\frac{A}{Q}\right)^s p_0^{-l},$$

wobei die implizite Konstante von den Polynomen φ_j und deren Grad abhängt, und wir $s \ge l+3$ ausnutzen. Für hinreichend großes p_0 folgern wir daraus $\tilde{M}_k^s(A) \gg A^s$, was das Lemma beweist. $\square$

5 Der Beweis des Satzes über Summen binärer Formen

Wir vereinbaren zunächst, dass im weiteren Verlauf Summen ohne untere Grenze stets bei eins beginnen, für eine Summe des Typs $\sum_{1\le|i|\le I}$ mit i aus $\mathbb{Z}$ schreiben wir also kurz $\sum_{|i|\le I}$. Zur leichteren Lesbarkeit verwenden wir die Abkürzungen $\pi_{\mathbf{x}}$ für das Produkt über alle x_i mit $1 \le i \le s$. Zum Beweis des Satzes 2.5 behandeln wir $\mathcal{R}_{\mathbf{a}}(B)$ mit der Kreismethode und unterteilen das aus den Orthogonalitätsrelationen entstehende Integral in Major und Minor Arcs wie in Abschnitt 3 beschrieben. Wir definieren

$$S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha) = \sum_{\substack{|\mathbf{x}|\le B\\ \pi_{\mathbf{x}}\ne 0}}\sum_{\substack{|\mathbf{y}|\le B\\ \pi_{\mathbf{y}}\ne 0}} e(\alpha\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})),$$

und es ergibt sich

$$\mathcal{R}_{\mathbf{a}}(B) = \int_{\mathfrak{M}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

Diese Zerlegung ermöglicht uns, die in Satz 2.5 vorgestellte Varianz abzuschätzen, indem wir die Summe über die Formen ebenfalls in einen Teil über die Major Arcs und einen über die Minor Arcs aufteilen. Das führt auf

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} |\mathcal{R}_{\mathbf{a}}(B) - \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)|^2 \ll \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \Big|\int_{\mathfrak{M}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha - \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)\Big|^2 + \\ + \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \Big|\int_{\mathfrak{m}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big|^2. \tag{55}$$

Zur Behandlung des Major Arc-Anteils verwenden wir Standardmethoden. Wir approximieren das Integral über die Major Arcs durch das Produkt aus singulärer Reihe und singulärem Integral, was auch bei der hier verwendeten geringen Anzahl an Variablen keine Probleme bereitet. Die Abhängigkeit des Approximationsfehlers von der Koeffizientengröße muss explizit bestimmt werden, da sonst eine Summation über diesen Approximationsfehler nicht möglich ist. Zur Abschätzung des Minor Arc-Anteils ist die äußere Summation über die Koeffizienten entscheidend, denn wir spalten mit deren Hilfe den Diagonalanteil der Form ab und behandeln die beiden entstehenden Teile getrennt. Auf dem Diagonalanteil verschaffen wir uns zunächst eine erweiterte Weylsche Ungleichung, um eine kleine Potenz gegenüber der trivialen Abschätzung einzusparen. Dann tauschen wir die Rollen der Variablen und haben in beiden verbleibenden Fällen, also dem Diagonalanteil und dem Rest, ein Gitterpunktproblem vorliegen, dessen Lösungsanzahl wir gut mit wenigen Variablen behandeln können. Dieses Vorgehen ermöglicht es, auch auf dem Minor Arc-Anteil mit nur linear vom Grad k abhängender Variablenanzahl auszukommen.

5.1 Die Major Arcs

Wir wenden Lemma 3.2 auf die Form $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ an, deren Koeffizienten alle nach oben durch A beschränkt sind, und erhalten

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha = \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};Q)J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B,X) + O\left(X^2Q^3AB^{2s+k-1}\right). \tag{56}$$

Die Parameter Q und X, die die Größe der Major Arcs bestimmen, unterliegen in den bisher benutzten Lemmata keinen all zu starken Bedingungen. Ihre Größe werden wir in den abschließenden Aussagen dieses Abschnitts festlegen. Zur Bearbeitung des MajorArc-Anteils in (55) approximieren wir $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};Q)$ und $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B,X)$ in Bezug auf (56) durch die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})$ und das singuläre Integral $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)$ und bestimmen den dabei entstehenden Fehler. Zunächst zeigen wir die Konvergenz der singulären Reihe mit Hilfe des folgenden Lemmas.

Lemma 5.1. *Sei $\Phi_{\boldsymbol{a}}(x,y) = a_0x^k + a_1x^{k-1}y + ... + a_{k-1}xy^{k-1} + a_ky^k$ eine binäre Form vom Grad k mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathbb{Z}^{k+1}$. Für q aus $\mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{x,y \pmod q} e\left(\Phi_{\boldsymbol{a}}(x,y)/q\right) \ll (q;a_k)^{1/k}q^{2-1/k+\varepsilon}.$$

Beweis. Falls gilt $a_k = 0$, ist die Aussage des Lemmas trivial. Für $a_k \neq 0$ betrachten wir

$$\Big|\sum_{x,y \pmod q} e\Big(\frac{\Phi_{\mathbf{a}}(x,y)}{q}\Big)\Big| \le \sum_{x \pmod q} \Big|e\Big(\frac{a_0x^k}{q}\Big)\Big|\Big|\sum_{y \pmod q} e\Big(\frac{a_1x^{k-1}y + ... + a_ky^k}{q}\Big)\Big|$$

und wenden Theorem 7.1 aus [16] auf die Summe über y an. Wir stellen wie im Beweis des Lemmas 4.1 die Teilerfremdheit der Koeffizienten mit q her und erhalten weiter

$$\ll \sum_{x \pmod q} q^{1-1/k+\varepsilon}(q;a_k;a_{k-1}x;...;a_1x^{k-1})^{1/k} \ll q^{2-1/k+\varepsilon}(q;a_k)^{1/k},$$

wobei wir im letzten Schritt $(q;a_k;a_{k-1}x;...;a_1x^{k-1}) \le (q;a_k)$ benutzen und die Summe über x trivial abschätzen. Das beweist das Lemma. □

Jetzt sind wir in der Lage, die Konvergenz der singulären Reihe nachzuweisen.

Lemma 5.2. *Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}})$ der Form $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ in $2s$ Variablen mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$ konvergiert absolut für $s > 2k$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Umformung der singulären Reihe

$$\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q} q^{-2s}\prod_{i=1}^{s}\Big(\sum_{x_i,y_i \pmod q} e\Big(\frac{a\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i,y_i)}{q}\Big)\Big)$$

und schätzen mit Hilfe des Lemmas 5.1 weiter ab

$$\ll_{\mathbf{a}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a;q)=1}}^{q} q^{-2s} q^{2s-s/k+\varepsilon} \ll_{\mathbf{a}} 1.$$

Dabei nutzen wir im letzten Schritt aus, dass die entstehende Reihe für $s > 2k$ absolut konvergiert. □

Wir stellen zum singulären Integral folgende Aussage bereit.

Lemma 5.3. *Für β aus $\mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{-B}^{B} \int_{-B}^{B} e(\beta \mathcal{F}_{\boldsymbol{a}^{(i)}}(x_i, y_i)) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}y_i \ll B^2 \big(1 + |\beta a_0^{(i)}| B^k\big)^{-1/k}.$$

Beweis. Es ist

$$\Big| \int_{-B}^{B} \int_{-B}^{B} e(\beta \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i, y_i)) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}y_i \Big|$$
$$\le \int_{-B}^{B} \Big| \int_{-B}^{B} e\big(a_0^{(i)} x_i^k + a_1^{(i)} x_i^{k-1} y_i + ... + a_{k-1}^{(i)} x_i y_i^{k-1}\big) \mathrm{d}x_i \Big| \mathrm{d}y_i.$$

Wir wenden auf das innere Integral Theorem 7.3 aus [16] an und erhalten

$$\ll \int_{-B}^{B} B\big(1 + \big|\beta a_{k-1}^{(i)} y_i^{k-1}\big| B + \big|\beta a_{k-2}^{(i)} y_i^{k-2}\big| B^2 + ... + \big|\beta a_0^{(i)}\big| B^k\big)^{-1/k} \mathrm{d}y_i.$$

Wegen $1 + \big|\beta a_{k-1}^{(i)} y_i^{k-1}\big| B + \big|\beta a_{k-2}^{(i)} y_i^{k-2}\big| B^2 + ... + \big|\beta a_0^{(i)}\big| B^k \ge 1 + \big|\beta a_0^{(i)}\big| B^k$ ergibt sich durch triviales Abschätzen der Integration über y_i die Aussage des Lemmas. □

Wir definieren den Vektor $\mathbf{a}_0 = (|a_0^{(1)}|, ..., |a_0^{(s)}|)$ und geben folgende obere Schranke für das singuläre Integral an.

Lemma 5.4. *Ist $s > k$, dann konvergiert das singuläre Integral $J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}; B)$ zur Form $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$, und es gilt*

$$J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}; B) \ll \pi_{\boldsymbol{a}_0}^{-1/s} B^{2s-k}.$$

Beweis. Es ist

$$J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{s} \Big(\int_{-B}^{B} \int_{-B}^{B} e(\beta \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i, y_i)) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}y_i \Big) \mathrm{d}\beta.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 5.3 folgt weiter

$$|J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B)| \le \prod_{i=1}^{s} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-B}^{B} \int_{-B}^{B} e(\beta \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i, y_i)) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}y_i \Big|^s \mathrm{d}\beta \Big)^{1/s}$$
$$\ll \prod_{i=1}^{s} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big(B^2 \big(1 + \big|\beta a_0^{(i)}\big| B^k\big)^{-1/k} \Big)^s \mathrm{d}\beta \Big)^{1/s}.$$

Wir vereinfachen weiter, substituieren $B^k|a_0^{(i)}|\beta$ in den Integralen und erhalten

$$\ll \quad B^{2s-k}\prod_{i=1}^{s}\left|a_0^{(i)}\right|^{-1/s}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\beta|)^{-s/k}\mathrm{d}\beta.$$

Das auftretende uneigentliche Integral konvergiert für $s>k$ und mit der vereinbarten Kurzschreibweise für das Produkt ergibt sich die Aussage des Lemmas. $\square$

Mit den Lemmata 5.2 und 5.4 ist die Konvergenz von $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})$ und $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)$ gesichert. Als Hilfsmittel stellen wir noch folgendes Lemma bereit.

Lemma 5.5. *Sei $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ eine Form mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$. Dann gilt für $s>k$*

$$J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}};B,X)=J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}};B)+O(\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/k}X^{1-s/k}B^s).$$

Beweis. Es ist offensichtlich

$$J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B,X) \;=\; J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)+O\Big(\Big|\int_X^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\Big(\iint_{[-B,B]^2}e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i,y_i))\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i\Big)\mathrm{d}\beta\Big|\Big).$$

Wir verwenden die Abschätzung $B^2\big(1+\left|\beta a_0^{(i)}\right|B^k\big)^{-1/k}\ll B\left|\beta a_0^{(i)}\right|^{-1/k}$, die für $\beta>X$ gilt, zusammen mit Lemma 5.3 und erhalten

$$\int_X^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\Big(\iint_{[-B,B]^2}e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}(x_i,y_i))\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i\Big)\mathrm{d}\beta \;\ll\; \int_X^{\infty}\prod_{i=1}^{s}B\left|\beta a_0^{(i)}\right|^{-1/k}\mathrm{d}\beta.$$

Wir vereinfachen weiter und setzen die Ungleichung fort durch

$$\ll \quad B^s\int_X^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\left|\beta a_0^{(i)}\right|^{-1/k}\mathrm{d}\beta \quad\ll\quad \pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/k}B^sX^{1-s/k},$$

wobei wir im letzten Schritt die vereinbarte Kurzschreibweise für das Produkt sowie die Tatsache, dass das auftretende uneigentliche Integral für $s>k$ konvergiert, verwendet haben. $\square$

Jetzt definieren wir zur Abkürzung folgende Schreibweise. Sei

$$\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})=\sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q}\sum_{\mathbf{x}\ (\mathrm{mod}\ q)}\sum_{\mathbf{y}\ (\mathrm{mod}\ q)}q^{-2s}e\left(a\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})/q\right).$$

Benutzen wir die durch die absolute Konvergenz der singulären Reihe $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})$ motivierte Aussage $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};Q)=\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})+O\left(|\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})|\right)$ sowie die Lemmata 5.4 und 5.5, erhalten wir als erste Approximation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};Q)J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B,X) \;=\;& \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)+O\Big(|\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})|\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/k}X^{1-s/k}B^s+\\ &+|\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})|\left(\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/s}B^{2s-k}+\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/k}X^{1-s/k}B^s\right)\Big).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit (56) und der expliziten Angabe des Parameters X das folgende Ergebnis.

Lemma 5.6. *Für $X = A^{-1}B^{-k+\rho}$ und $\rho > 0$ hinreichend klein und konstant ($\rho = 1/(6k+4)$ genügt beispielsweise nach dem Beweis zu Satz 5.7) ist*

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha = \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}})J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}};B) + O\left(B^{2s-k}\left(|\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}})|\pi_{\boldsymbol{a}_0}^{-1/k}B^{\rho(1-s/k)}A^{-1+s/k} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + |\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}})|\left(\pi_{\boldsymbol{a}_0}^{-1/s} + \pi_{\boldsymbol{a}_0}^{-1/k}B^{\rho(1-s/k)}A^{-1+s/k}\right) + A^{-1}Q^3B^{-1+2\rho}\right)\right).$$

Das Ergebnis der Behandlung des Major Arc-Anteils fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 5.7. *Sei $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ eine Form mit Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$. Für $s > 2k$, $k \geq 2$ und $Q = B^{k\rho}$ mit ρ wie in Lemma 5.6 sowie $A \asymp B^k$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}(A)} \left| \int_{\mathfrak{M}} S(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha - \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}})J(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}};B)\right|^2 \ll A^{s(k+1)-\delta}\left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2.$$

Zum Beweis dieses Satzes setzen wir die Aussage des Lemmas 5.6 zur Approximation des Major Arc Integrals ein, summieren dann den Fehlerterm auf und erhalten

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \left| \int_{\mathfrak{M}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha - \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B)\right|^2$$
$$\ll A^{s(k+1)}\left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2 B^{\rho(6k+4)-2} + T_1 + T_2 + T_3, \quad (57)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \left|\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/s}B^{2s-k}\right|^2, \\ T_2 &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \left|\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/k}B^{2s-k+\rho(1-s/k)}A^{-1+s/k}\right|^2, \\ T_3 &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \left|\mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})\pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/k}B^{2s-k+\rho(1-s/k)}A^{-1+s/k}\right|^2. \end{aligned}$$

Wir beginnen mit der Bearbeitung von T_1. Lemma 5.1 und der Beweis von Lemma 5.2 liefern

$$|\check{\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})| \ll \sum_{q>Q} \sum_{\substack{a=1\\(a;q)=1}}^{q} q^{-2s}q^{2s-s/k+\varepsilon}\prod_{i=1}^{s}\left(q;a_k^{(i)}\right)^{1/k} \ll \sum_{q>Q} q^{1-s/k+\varepsilon}\prod_{i=1}^{s}\left(q;a_k^{(i)}\right)^{1/k},$$

wobei wir die Summation über a trivial durch q abschätzen. Diese Ungleichung setzen wir in T_1 ein und erhalten

$$\begin{aligned} T_1 &\ll \left(B^{2s-k}\right)^2 \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \Big(\sum_{q>Q} q^{1-s/k+\varepsilon} \prod_{i=1}^{s} \big(q; a_k^{(i)}\big)^{1/k} \pi_{\mathbf{a}_0}^{-1/s} \Big)^2 \\ &\ll \left(B^{2s-k}\right)^2 \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \pi_{\mathbf{a}_0}^{-2/s} \sum_{q_1,q_2>Q} (q_1q_2)^{1-s/k+\varepsilon} \prod_{i=1}^{s} \big(q_1q_2; a_k^{(i)}\big)^{2/k}, \end{aligned}$$

weil $\big(q_1; a_k^{(i)}\big)\big(q_2; a_k^{(i)}\big) \leq \big(q_1q_2; a_k^{(i)}\big)^2$ gilt. Wir schätzen die Summationen über $a_j^{(i)}$ für $1 \leq j \leq k-1$ und $1 \leq i \leq s$ trivial ab und setzen die Ungleichung fort durch

$$\ll \left(B^{2s-k}\right)^2 A^{s(k-1)} \Big(\prod_{i=1}^{s} \sum_{a_0^{(i)}\leq A} \big|a_0^{(i)}\big|^{-2/s} \Big) \Big(\sum_{\substack{q_j>Q\\ j=1,2}} (q_1q_2)^{1-s/k+\varepsilon} \prod_{i=1}^{s} \sum_{a_k^{(i)}\leq A} \big(q_1q_2; a_k^{(i)}\big)^{2/k} \Big).$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer ist offensichtlich $O(A^{s-2})$, also gilt

$$\ll A^{sk} \left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2 \sum_{\substack{q_j>Q\\ j=1,2}} (q_1q_2)^{1-s/k+\varepsilon} \prod_{i=1}^{s} \sum_{a_k^{(i)}\leq A} \big(q_1q_2; a_k^{(i)}\big)^{2/k}.$$

Wir betrachten folgende Summe über einen größten gemeinsamen Teiler und schätzen ab

$$\sum_{a\leq A} (q_1q_2; a)^{2/k} \leq \sum_{\substack{d|q_1q_2\\ d\leq A}} \sum_{\substack{a\leq A\\ d|a}} d^{2/k} \ll \sum_{d|q_1q_2} Ad^{2/k-1} \ll A \sum_{d|q_1q_2} 1 \ll_\varepsilon A(q_1q_2)^\varepsilon.$$

Dabei beschränken wir die Summe über alle $a \leq A$, die von d geteilt werden, nach oben durch $O(Ad^{-1})$ und verwenden daraufhin $k \geq 2$ sowie die Abschätzung der Teilerfunktion. Mit dieser Ungleichung setzen wir unsere Abschätzung fort durch

$$\ll A^{s(k+1)} \left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2 \sum_{\substack{q_j>Q\\ j=1,2}} (q_1q_2)^{1-s/k+\varepsilon} \ll A^{s(k+1)} \left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2 Q^{-2/k+\varepsilon},$$

weil für $s > 2k$ die auftretenden Reihen konvergieren. Setzen wir $Q = B^{k\rho}$, ergibt sich $T_1 \ll A^{s(k+1)-2} B^{4s-2k-2\rho+\varepsilon}$. Wir behandeln T_2 und T_3 mit derselben Technik und erhalten $T_2 \ll A^{s(k+1)-2} B^{4s-2k-2s\rho/k+\varepsilon}$ und $T_3 \ll A^{s(k+1)-2} B^{4s-2k+(2-2s/k)\rho+\varepsilon}$. Setzen wir alles in (57) ein, sparen wir für hinreichend kleines ρ, zum Beispiel $\rho = 1/(6k+4)$, eine kleine positive Potenz in B ein, die via $A \asymp B^k$ in eine kleine positive Potenz A^δ umgerechnet wird. Damit haben wir Satz 5.7 bewiesen und auf dem Major Arc-Anteil eine geeignete Schranke zur Verfügung gestellt.

5.2 Die Minor Arcs

Wir behandeln in diesem Abschnitt den Minor Arc-Anteil und teilen dazu die Form in einen Diagonalanteil und einen Rest. Sei $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathcal{F}'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, wobei gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{s}\left(a_0^{(i)}x_i^k + a_k^{(i)}y_i^k\right),\\ \mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{s}\left(a_1^{(i)}x_i^{k-1}y_i + \ldots + a_{k-1}^{(i)}x_iy_i^{k-1}\right).\end{aligned}$$

Der Strich dient hier allein der Bezeichnung und steht in keinem Zusammenhang mit einer Ableitung. Führen wir die beschriebene Unterteilung in einen diagonalen Anteil und einen Restanteil im Minor Arc-Anteil von (55) ein, öffnen das Quadrat und vertauschen die Summationen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)}\left|\int_{\mathfrak{m}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha\right|^2\\ &\leq \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\leq B\\ |\mathbf{u}|,|\mathbf{v}|\leq B\\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}}\neq 0\\ \pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}}\neq 0}} \iint_{\mathfrak{m}^2} \sum_{\substack{|a_j^{(i)}|\leq A\\ 1\leq i\leq s\\ j=0,k}} e(\alpha\mathcal{F}'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\beta\mathcal{F}'_{\mathbf{a}}(\mathbf{u},\mathbf{v})) \sum_{\substack{|a_j^{(i)}|\leq A\\ 1\leq j\leq k-1\\ 1\leq i\leq s}} e(\alpha\mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\beta\mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{u},\mathbf{v}))\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

Wenden wir auf diese Ungleichung zweimal Cauchy-Schwarz an, einmal im Integral und danach in der äußeren Summe über $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, dann erhalten wir

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)}\left|\int_{\mathfrak{m}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha\right|^2 \leq V^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}, \tag{58}$$

mit

$$\begin{aligned}V &= \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}|\leq B\\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}},\pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}}\neq 0}} \iint_{\mathfrak{m}^2}\Bigg|\sum_{\substack{|a_j^{(i)}|\leq A\\ 1\leq i\leq s\\ j=0,k}} e(\alpha\mathcal{F}'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\beta\mathcal{F}'_{\mathbf{a}}(\mathbf{u},\mathbf{v}))\Bigg|^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta,\\ W &= \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}|\leq B\\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}},\pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}}\neq 0}} \iint_{\mathfrak{U}^2}\Bigg|\sum_{\substack{|a_j^{(i)}|\leq A\\ 1\leq j\leq k-1\\ 1\leq i\leq s}} e(\alpha\mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\beta\mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{u},\mathbf{v}))\Bigg|^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

Dabei haben wir in W das Integral nur vergrößert, indem wir über das gesamte Einheitsintervall $\mathfrak{U}$ integrieren. Dies erlaubt uns später, W als Lösungsanzahl einer diophantischen Gleichung zu interpretieren. Wir beginnen mit V und nutzen zunächst die Information aus, dass wir über die Minor Arcs integrieren. Dazu definieren wir die abkürzende Schreibweise

$$G(b;\alpha,\beta) \;=\; \sum_{|a|\le A}\sum_{|x|\le B}\sum_{|y|\le B} e\left((a-b)\left(\alpha x^k-\beta y^k\right)\right)$$

und stellen folgende verallgemeinerte Weylsche Ungleichung bereit.

Lemma 5.8. *Sei $(c;q)=1$, $|\beta-c/q|\le q^{-2}$ und $\kappa=2^{k-1}$. Für $|b|\le A$ gilt*

$$G(b;\alpha,\beta) \;\ll\; AB^{2+\varepsilon}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{AB^k}\right)^{1/\kappa}.$$

Beweis. Wir wählen $j=k-1$ in Lemma 3.5 und für das dort angegebene Polynom $\psi(a)$ wählen wir das in a lineare Polynom $a-b$. Wir erhalten

$$G(b;\alpha,\beta)^{2^{k-1}} \;\ll\; A^{2^{k-1}-1}B^{2^k-k}\sum_{|a|\le A}\sum_{\substack{h_1,h_2,..,h_{k-1}\\|h_i|\le 2B}}\sum_{y\in I(\mathbf{h})} e\left((a-b)\beta\Delta_{k-1}(y^k,\mathbf{h})\right).$$

Dabei ist $I(\mathbf{h})$ das in Lemma 3.5 beschriebene Intervall und Δ der Operator aus Abschnitt 3, für den nach (12) gilt $\Delta_{k-1}(y^k,\mathbf{h})=h_1..h_{k-1}\omega_{k-1}(y;h_1,..,h_{k-1})$, wobei ω_{k-1} ein Polynom in y vom Grad 1 mit Leitkoeffizient $k!$ ist. Da $I(\mathbf{h})$ ein Teilintervall von $[-B,B]$ ist, können wir Lemma 3.3 anwenden, solange $h_1...h_{k-1}(a-b)$ ungleich null ist. Falls gilt

$$h_1...h_{k-1}\,(a-b)\,k!=0, \tag{59}$$

muss mindestens ein $h_i=0$ oder $(a-b)=0$ sein, das heißt, wir können den Beitrag der Fälle, in denen Gleichung (59) gilt, durch $O(AB^{k-1}+B^k)$ abschätzen. Andernfalls ist Lemma 3.3 anwendbar und wir erhalten

$$\sum_{|a|\le A}\sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1}\\|h_i|\le 2B}}\sum_{y\in I(\mathbf{h})} e((a-b)\beta\Delta_{k-1}(y^k,\mathbf{h})) \ll \sum_{|a|\le A}\sum_{\substack{h_1,..,h_{k-1}\\|h_i|\le 2B}}\min(B,\|\beta h_1..h_{k-1}k!\|^{-1}). \tag{60}$$

Für das weitere Vorgehen betrachten wir die Darstellungsanzahl

$$\rho(l)=\#\left\{a\in\mathbb{Z},\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^{k-1}: l=k!\,(a-b)\,h_1...h_{k-1}\right\}.$$

Diese können wir mit Hilfe der Teilerfunktion durch $\rho(l)\ll l^{\varepsilon}$ abschätzen. Da l nach oben durch feste Potenzen von A und B beschränkt ist, erhalten wir wegen $A\asymp B^k$ die obere Schranke $\rho(l)\ll B^{\varepsilon}$. Nun setzen wir (60) fort durch

$$\ll \sum_{l\ll AB^{k-1}}\rho(l)\min(B,\|\beta l\|^{-1}) \;\ll\; B^{\varepsilon}\sum_{l\ll AB^{k-1}}\min(AB^kl^{-1},\|\beta l\|^{-1}).$$

Setzen wir jetzt Lemma 3.4 ein und beachten, dass wir $q \leq AB^k$ annehmen können, weil sonst die Aussage des Lemmas trivial ist, folgt

$$\ll \quad B^{\varepsilon} B^k A \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{q}{AB^k} \right) \log \left(2AB^{k-1} q \right) \quad \ll \quad B^{k+\varepsilon} A^l \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{q}{B^k A^l} \right),$$

wobei wir im letzten Schritt den Logarithmus via $A \asymp B^k$ durch B^{ε} kompensiert haben. Alles zusammen liefert

$$\begin{aligned} G(b;\alpha,\beta)^{2^{k-1}} \quad &\ll \quad A^{2^{k-1}-1} B^{2^k - k} \left(AB^{k-1} + B^k + B^{k+\varepsilon} A^l \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{B} + \frac{q}{B^k A^l} \right) \right) \\ &\ll \quad A^{2^{k-1}} B^{2^k+\varepsilon} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{q} + \frac{q}{B^k A} \right). \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich die Aussage des Lemmas. □

Die einfache Struktur von V, die sich aus dem diagonalen Anteil der Form ergibt, erlaubt uns das weitere Vorgehen. Wir definieren $f(\alpha) = f(\alpha; B)$ durch

$$f(\alpha; B) \quad = \quad \sum_{|x| \leq B} e(\alpha x^k).$$

Öffnen wir in V das Quadrat und vertauschen wiederum die Summationen, dann erhalten wir

$$V \quad = \quad \iint_{\mathfrak{m}^2} H(A, B; \alpha, \beta)^{2s} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta, \tag{61}$$

wobei gilt

$$H(A, B; \alpha, \beta) \quad = \quad \sum_{|a| \leq A} \sum_{|b| \leq A} f(\alpha(a-b)) f(\beta(b-a)).$$

Wir wenden auf $H(A, B; \alpha, \beta)$ Lemma 5.8 an. Dazu zeigen wir, dass für α und β aus $\mathfrak{m}$ die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt sind. Nach dem Dirichletschen Approximationssatz gibt es zu jedem β aus $\mathbb{R}$ eine Approximation der Form c/q mit $(c; q) = 1$ und $q \leq AB^{k-\rho}$, so dass gilt $|\beta - c/q| \leq A^{-1} B^{-k+\rho} q^{-1} \leq A^{-1} B^{-k+\rho}$. Wegen β aus den Minor Arcs $\mathfrak{m}$, der Definition der Major Arcs in Abschnitt 3 und den in Lemma 5.6 und Satz 5.7 geforderten Einstellungen der Parameter erhalten wir $q > B^{k\rho} = Q$; andernfalls läge β in einem Major Arc $\mathfrak{M}(q, c)$. Es gilt also

$$B^{k\rho} < q \leq AB^{k-\rho} \tag{62}$$

und $|\beta - c/q| \leq A^{-1} B^{-k+\rho} q^{-1} \leq q^{-2}$ für β aus $\mathfrak{m}$. Somit ist die Voraussetzung des Lemmas 5.8 mit der zusätzlichen Bedingung an q in (62) erfüllt. Wir wenden zunächst die Dreiecksungleichung an, das ergibt

$$|H(A, B; \alpha, \beta)| \quad \leq \quad \sum_{|b| \leq A} \left| \sum_{|a| \leq A} \sum_{|x| \leq B} \sum_{|y| \leq B} e\left((a-b) \left(\alpha x^k - \beta y^k \right) \right) \right|.$$

Wir wenden Lemma 5.8 auf den Ausdruck in Beträgen auf der rechten Seite an, schätzen die verbleibende Summe über b trivial ab und erhalten durch Bildung des Supremums über α, β aus $\mathfrak{m}$

$$\sup_{\alpha,\beta\in\mathfrak{m}} |H(A,B;\alpha,\beta)| \ \ll \ A^2B^{2+\varepsilon}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{AB^k}\right)^{1/\kappa} \ \ll \ A^2B^{2-\tilde{\delta}}$$

für ein geeignetes positives $\tilde{\delta}$, das sich aus (62) zusammen mit $A \asymp B^k$ ergibt. Hier ist $\kappa = 2^{k-1}$. Setzen wir die erhaltene Ungleichung für zwei der $H(A,B;\alpha,\beta)$ in V ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} V &\leq \iint_{\mathfrak{m}^2} |H(A,B;\alpha,\beta)|^{2s}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\ &\leq \sup_{\alpha,\beta\in\mathfrak{m}} |H(A,B,\alpha,\beta)|^2 \iint_{\mathfrak{m}^2} |H(A,B;\alpha,\beta)|^{2s-2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\ &\ll A^4B^{4-2\tilde{\delta}} \iint_{\mathfrak{U}^2} \left|H\left(A,B;\alpha,\beta\right)\right|^{2s-2} \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta, \end{aligned}$$

wobei wir die Integrationen über die Minor Arcs $\mathfrak{m}$ auf das gesamte Einheitsintervall $\mathfrak{U}$ ausdehnen. Damit vergrößern wir das Integral lediglich und deuten das entstehende Integral als Lösungsanzahl einer diophantischen Gleichung. Aus der bewiesenen Ungleichung folgern wir mit $A \asymp B^k$, dass es $\delta > 0$ gibt, so dass gilt

$$V \ll A^{4-\delta}B^4 \iint_{\mathfrak{U}^2} |H(A,B;\alpha,\beta)|^{2s-2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \tag{63}$$

Wenden wir Cauchy-Schwarz auf $|H(A,B;\alpha,\beta)|^2$ an, ergibt sich

$$|H(A,B;\alpha,\beta)|^2 \ \leq \ \sum_{|a|,|b|\leq A}\Big|\sum_{|x|\leq B} e(\alpha(a-b)x^k)\Big|^2 \sum_{|a|,|b|\leq A}\Big|\sum_{|y|\leq B} e(\beta(a-b)y^k)\Big|^2.$$

Für das verbleibende Integral in (63) erhalten wir damit

$$\iint_{\mathfrak{U}^2} |H(A,B;\alpha,\beta)|^{2s-2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \ \leq \ L^2, \tag{64}$$

wobei gilt

$$L \ = \ \int_{\mathfrak{U}}\Big(\sum_{|a|,|b|\leq A}\Big|\sum_{|x|\leq B} e(\alpha(a-b)x^k)\Big|^2\Big)^{s-1}\mathrm{d}\alpha.$$

Sei $\mathcal{L}_{s-1}$ gegeben als die Menge aller Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus $(\mathbb{Z}\setminus\{0\})^{s-1}$ mit $|\mathbf{a}|$ und $|\mathbf{b}| \leq A$ und $|\mathbf{x}|$ und $|\mathbf{y}| \leq B$, für die die Gleichung

$$(a_1-b_1)(x_1^k-y_1^k)+...+(a_{s-1}-b_{s-1})(x_{s-1}^k-y_{s-1}^k) \ = \ 0 \tag{65}$$

erfüllt ist. Sei außerdem $\mathcal{K}_{s-1}$ die Menge aller Vektoren $\mathbf{c}$ aus $\mathbb{Z}^{s-1}$ mit $|\mathbf{c}| \ll A$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ aus $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{s-1}$ mit $|\mathbf{x}|$ und $|\mathbf{y}| \leq B$, für die die Gleichung

$$c_1(x_1^k - y_1^k) + ... + c_{s-1}(x_{s-1}^k - y_{s-1}^k) \;\; = \;\; 0$$

erfüllt ist. Dann ist $L = \#\mathcal{L}_{s-1}$. Fassen wir $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in der entstandenen diophantischen Gleichung (65) als fest und $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ als variabel auf, dann entsteht eine Gittergleichung in $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Wir substituieren den Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ und erhalten $L = \#\mathcal{L}_{s-1} \ll A^{s-1}\#\mathcal{K}_{s-1}$. Das erwähnte Gitterpunktargument wird in Satz 2 aus [3] umgesetzt, wir können für $s > 2k$ auf $\#\mathcal{K}_{s-1}$ sofort das Korollar 5.3 aus der eben zitierten Arbeit anwenden, denn der Beweis lässt sich einfach an die leicht modifizierten Voraussetzungen anpassen. Wir erhalten somit

$$L \;\; \ll \;\; A^{2(s-1)-1}B^{2(s-1)-k+\varepsilon} + A^{2(s-1)}B^{s-1}.$$

Wegen $s > 2k$ und $A \asymp B^k$ dominert in dieser Abschätzung der erste Term. Mit (63) und (64) ergibt sich die Aussage

$$V \;\; \ll \;\; A^{4s-\delta}\frac{B^{4s-2k}}{A^2} \tag{66}$$

für ein positives δ, welches wir beispielsweise als $\delta/2$ mit δ aus der Gleichung (63) wählen können, um die Potenz B^ε zusammen mit $A \asymp B^k$ zu kompensieren. Damit haben wir V vollständig behandelt und bearbeiten jetzt W, um via (58) den Minor Arc-Anteil komplett abzuschätzen. Zentraler Baustein ist wieder das Gitterpunktargument, das wir zunächst vobereiten. Wir schreiben

$$\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\; = \;\; \mathcal{F}''_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{F}''_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

und erhalten durch Öffnen des Quadrats und Vertauschen der Summationen

$$W \;\; = \;\; \iint_{\mathfrak{U}^2} \sum_{\substack{|a_j^{(i)}|,|b_j^{(i)}| \leq A \\ 1 \leq j \leq k-1 \\ 1 \leq i \leq s}} \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}| \leq B \\ \pi_\mathbf{x}, \pi_\mathbf{y}, \pi_\mathbf{u}, \pi_\mathbf{v} \neq 0}} e(\alpha\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \beta\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.$$

Wir wenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die Summationen über $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ an, teilen danach das Doppelintegral auf und schätzen weiter ab

$$\leq \iint_{\mathfrak{U}^2} \Big(\sum_{\substack{|a_j^{(i)}| \leq A \\ |b_j^{(i)}| \leq A \\ 1 \leq j \leq k-1 \\ 1 \leq i \leq s}} \Big| \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}| \leq B \\ \pi_\mathbf{x}, \pi_\mathbf{y} \neq 0}} e(\alpha\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\substack{|a_j^{(i)}| \leq A \\ |b_j^{(i)}| \leq A \\ 1 \leq j \leq k-1 \\ 1 \leq i \leq s}} \Big| \sum_{\substack{|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}| \leq B \\ \pi_\mathbf{u}, \pi_\mathbf{v} \neq 0}} e(\beta\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$\leq \Big(\int_{\mathfrak{U}} \Big(\sum_{\substack{|a_j^{(i)}|,|b_j^{(i)}| \leq A \\ 1 \leq j \leq k-1 \\ 1 \leq i \leq s}} \Big| \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}| \leq B \\ \pi_\mathbf{x}, \pi_\mathbf{y} \neq 0}} e(\alpha\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\alpha \Big)^2.$$

Öffnen des inneren Betragsquadrats ergibt

$$\leq \left(\int_{\mathfrak{U}}\Bigg(\sum_{\substack{|a_j^{(i)}|,|b_j^{(i)}|\leq A\\ 1\leq j\leq k-1\\ 1\leq i\leq s}}\ \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\leq B\\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}}\neq 0}}\ \sum_{\substack{|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}|\leq B\\ \pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}}\neq 0}} e(\alpha(\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\mathcal{F}''_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(\mathbf{u},\mathbf{v})))\Bigg)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha\right)^2.$$

Zur Abkürzung definieren wir folgende Schreibweise: Für $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aus $\mathbb{Z}^{k-1}$ und x, y aus $\mathbb{Z}$ sei

$$\Psi_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(x,y) = (a_1-b_1)x^{k-1}y + (a_2-b_2)x^{k-2}y^2 + ... + (a_{k-1}-b_{k-1})xy^{k-1}. \tag{67}$$

Dann sei $H(\alpha) = H(A,B;\alpha)$ definiert durch

$$H(A,B;\alpha) = \sum_{\substack{|a_i|\leq A\\ 1\leq i\leq k-1}}\ \sum_{\substack{|b_i|\leq A\\ 1\leq i\leq k-1}}\ \sum_{|x|,|y|\leq B}\ \sum_{|u|,|v|\leq B} e(\alpha(\Psi_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(x,y)-\Psi_{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(u,v))).$$

Damit setzen wir die obige Ungleichung fort und es folgt

$$\leq \left(\int_{\mathfrak{U}}(H(\alpha))^{\frac{s}{2}}\mathrm{d}\alpha\right)^2 \leq \left(\int_{\mathfrak{U}}(H(\alpha))^{\frac{1}{2}t}(H(\alpha))^{\frac{1}{2}(s-t)}\mathrm{d}\alpha\right)^2,$$

wobei $t = [s/2]$ ist. Wir wenden nochmals die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung im Integral an und erhalten als Ergebnis dieser Rechnung

$$W \leq \int_{\mathfrak{U}}|H(\alpha)|^t\,\mathrm{d}\alpha\int_{\mathfrak{U}}|H(\alpha)|^{(s-t)}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{68}$$

Wegen $t \leq s-t$ genügt es, das vordere Integral zu betrachten; das hintere kann auf dieselbe Art behandelt werden, denn es hat mindestens soviele Variablen wie das vordere. Falls t gerade ist, dann sei $2\tilde{t} = t$ und es ist

$$\int_{\mathfrak{U}}|H(\alpha)|^t\,\mathrm{d}\alpha = \int_{\mathfrak{U}}|H(\alpha)|^{2\tilde{t}}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{69}$$

andernfalls sei $2\tilde{t}+1 = t$ und wir schätzen ab

$$\int_{\mathfrak{U}}|H(\alpha)|^t\,\mathrm{d}\alpha \ll A^{2(k-1)}B^4\int_{\mathfrak{U}}|H(\alpha)|^{2\tilde{t}}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{70}$$

Wir müssen also lediglich das Integral der Funktion $H(\alpha)^{2\tilde{t}}$ über das Einheitsintervall zu betrachten. Dafür definieren wir die Menge $\mathcal{L}$ aller Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aus $(\mathbb{Z}\backslash\{0\})^{2\tilde{t}}$ sowie $\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)}$ aus $(\mathbb{Z}\backslash\{0\})^{k-1}$ für $1 \leq i \leq 2\tilde{t}$ mit $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, |\mathbf{u}|, |\mathbf{v}| \leq B$ und $|\mathbf{a}^{(i)}|, |\mathbf{b}^{(i)}| \leq A$, für die die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{2\tilde{t}} \Psi_{\mathbf{a}^{(i)}-\mathbf{b}^{(i)}}(x_i,y_i) - \Psi_{\mathbf{a}^{(i)}-\mathbf{b}^{(i)}}(u_i,v_i) = 0 \tag{71}$$

erfüllt ist. Dabei ist $\Psi_{\mathbf{a}^{(i)}-\mathbf{b}^{(i)}}(x_i, y_i)$ durch (67) gegeben. Außerdem sei $\mathcal{K}$ gegeben als Menge aller Vektoren $\mathbf{c}^{(i)}$ aus $\mathbb{Z}^{k-1}$ für $1 \leq i \leq 2\tilde{t}$ mit $|\mathbf{c}^{(i)}| \ll A$, für die (71) mit $\mathbf{a}^{(i)} - \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)}$ erfüllt ist. Zur besseren Lesbarkeit definieren wir $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (x_1^{k-1}y_1 - u_1^{k-1}v_1, x_1^{k-2}y_1^2 - u_1^{k-2}v_1^2, .., x_{2\tilde{t}}y_{2\tilde{t}}^{k-1} - u_{2\tilde{t}}v_{2\tilde{t}}^{k-1})$ und $\mathrm{ggT}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ als den größten gemeinsamen Teiler der Einträge des Vektors $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Das verbleibende Integral ist gleich der Lösungsanzahl $\#\mathcal{L}$. Wir wollen Gleichung (71) als Gitter in den $\mathbf{a}^{(i)} - \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)}$ auffassen, dazu zitieren wir zunächst die folgende Aussage über Gitterdiskriminanten aus Kapitel I, § 4 in [13].

Lemma 5.9. *Sei $\boldsymbol{a}$ aus $\mathbb{Z}^n$ nicht der Nullvektor und $\boldsymbol{x}$ aus $\mathbb{Z}^n$. Das von der Gleichung $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ aufgespannte Gitter hat die Diskriminante*

$$\mathrm{disc}(\boldsymbol{a}) \quad = \quad \|\boldsymbol{a}\|_2(a_1; ...; a_n)^{-1}.$$

Wir können Lemma 5.9 nur anwenden, solange der Koeffizientenvektor dieses Gitters nicht der Nullvektor ist. Deshalb unterscheiden wir zur Abschätzung diese beiden Fälle und erhalten

$$\int_{\mathfrak{U}} |H(\alpha)|^{2\tilde{t}} \mathrm{d}\alpha \quad = \quad \#\mathcal{L} \ll \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}| \leq B \\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}},\pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}} \neq 0 \\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 \neq 0}} \sum_{|\mathbf{b}| \leq A} \#\mathcal{K} + \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}| \leq B \\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}},\pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}} \neq 0 \\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 = 0}} A^{4\tilde{t}(k-1)}. \tag{72}$$

Dabei substituieren wir $\mathbf{a}^{(i)} - \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)}$ und schätzen die Lösungsanzahl für den Fall $\|v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\|_2 = 0$ trivial ab, weil Lemma 5.9 hier nicht greift. Die verbleibende Lösungsanzahl $\#\mathcal{K}$ können wir wegen $\|v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\|_2 \neq 0$ mit Lemma 5.9 abschätzen durch

$$\#\mathcal{K} \quad \ll \quad \frac{A^{4\tilde{t}(k-1)-1}}{\mathrm{disc}(v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}))} \quad \ll \quad A^{4\tilde{t}(k-1)-1} \frac{\mathrm{ggT}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\|_2}.$$

Setzen wir dies in (72) für den ersten Term ein und beachten im zweiten, dass wegen $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ für frei gewählte $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ mit Hilfe der Abschätzung der Teilerfunktion für $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ nur $O(B^\varepsilon)$ Möglichkeiten bleiben, dann erhalten wir damit

$$\int_{\mathfrak{U}} |H(\alpha)|^{2\tilde{t}} \mathrm{d}\alpha \quad \ll \quad A^{4(k-1)\tilde{t}-1} \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}| \leq B \\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}},\pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}} \neq 0 \\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 \neq 0}} \frac{\mathrm{ggT}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\|_2} + A^{4(k-1)\tilde{t}} B^{4\tilde{t}+\varepsilon}. \tag{73}$$

Zur vollständigen Bearbeitung von W bleibt folgende Summe, für die wir mit Cauchy-Schwarz erhalten

$$\sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}| \leq B \\ \pi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}},\pi_{\mathbf{u}},\pi_{\mathbf{v}} \neq 0 \\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 \neq 0}} \frac{\mathrm{ggT}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\|_2} \quad \ll \quad Q^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}, \tag{74}$$

wobei gilt

$$Q = \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}|\le B\\ \pi_\mathbf{x},\pi_\mathbf{y},\pi_\mathbf{u},\pi_\mathbf{v}\neq 0\\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2\neq 0}} (\mathrm{ggT}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}))^2,$$

$$P = \sum_{\substack{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\mathbf{u}|,|\mathbf{v}|\le B\\ \pi_\mathbf{x},\pi_\mathbf{y},\pi_\mathbf{u},\pi_\mathbf{v}\neq 0\\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2\neq 0}} \frac{1}{\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^2}.$$

Nun folgt die Abschätzung von Q und P. Wir bearbeiten zunächst Q und beweisen dazu das nächste Lemma.

Lemma 5.10. *Für $2\tilde{t} \ge 3k$ gilt*

$$Q \ll B^{8\tilde{t}+\varepsilon}.$$

Beweis. Es genügt, $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}$ aus $\mathbb{N}^{2\tilde{t}}$ zu betrachten. Wir sortieren nach dem größten gemeinsamen Teiler $d = \mathrm{ggT}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})$, wobei wir aus $\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 \neq 0$ folgern, dass $d \le 2B^k$ ist. Damit erhalten wir

$$Q \ll \sum_{d\le 2B^k} \sum_{\substack{x_i,y_i,u_i,v_i\le B\ (1\le i\le 2\tilde{t})\\ d|\mathrm{ggT}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})}} d^2.$$

Es gibt wegen des Lemmas 3.7 höchstens $O(B^{4+\varepsilon}d^{-2/(k-1)} + B^{3+\varepsilon})$ Möglichkeiten für $1\le x_i,y_i,u_i,v_i\le B$, so dass $\mathrm{ggT}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})$ von d geteilt wird. Somit folgt

$$\ll \sum_{d\le 2B^k} d^2\big(B^{4+\varepsilon}d^{-2/(k-1)} + B^{3+\varepsilon}\big)^{2\tilde{t}} \ll B^{8\tilde{t}+\varepsilon},$$

da wir für $2\tilde{t} > 3k$ die auftretenden Summen sämtliche durch die rechte Seite majorisieren können. □

Zur Abschätzung von P reicht es aus, für $1 \le i \le 2\tilde{t}$ die Variablen x_i, y_i, u_i und v_i aus $\mathbb{N}$ zu betrachten. Wir zerlegen P dyadisch und erhalten die Ungleichung

$$P \ll (\log B)^{8\tilde{t}} P_1(2\tilde{t}) \tag{75}$$

mit

$$P_1(2\tilde{t}) = \sum_{\substack{U_i<u_i\le 2U_i\\ 1\le i\le 2\tilde{t}}} \sum_{\substack{V_i<v_i\le 2V_i\\ 1\le i\le 2\tilde{t}}} \sum_{\substack{Y_i<y_i\le 2Y_i\\ 1\le i\le 2\tilde{t}}} \sum_{\substack{X_i<x_i\le 2X_i\\ 1\le i\le 2\tilde{t}\\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2\neq 0}} \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^{-2}$$

für geeignete X_i, Y_i, U_i, V_i mit $1 \le X_i, Y_i, U_i, V_i \le B$ für $1 \le i \le 2\tilde{t}$. Dabei ist $v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})$ der oben definierte Vektor für $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}$ aus $\mathbb{Z}^{2\tilde{t}}$. Wir zeigen zunächst

Lemma 5.11. *Sei $l = [k/2]$. Für $s > l$ gilt*

$$P_1(s) \ \ll \ (\log B)B^{4s-2k} + B^{2s+1+\varepsilon} + B^3 P_1(s-1).$$

Beweis. Wir können stets $X_iY_i \geq U_iV_i$ für alle $1 \leq i \leq s$ erreichen, da wir die Rollen von x, y und u, v wegen der Beträge vertauschen können. Außerdem können wir annehmen, dass $X_1Y_1 \geq X_2Y_2 \geq X_iY_i$ für alle $3 \leq i \leq s$ gilt. Wir definieren $E = (\log X_1)/(\log 2)$ und setzen zur besseren Lesbarkeit in diesem Beweis die Abkürzung $v = v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ ein. Wir sortieren nach der Größe von $\|v\|_2$ und erhalten die Ungleichung

$$\begin{aligned} P_1(s) \ \leq \ & \sum_{\substack{U_i<u_i\leq 2U_i \\ V_i<v_i\leq 2V_i \\ Y_i<y_i\leq 2Y_i \\ 1\leq i\leq s}} \ \sum_{\substack{X_i<x_i\leq 2X_i \\ 1\leq i\leq s \\ \|v\|_2 > X_1^{k-l}Y_1^l}} \|v\|_2^{-2} + \sum_{h\leq E} \ \sum_{\substack{U_i<u_i\leq 2U_i \\ V_i<v_i\leq 2V_i \\ Y_i<y_i\leq 2Y_i \\ 1\leq i\leq s}} \ \sum_{\substack{X_i<x_i\leq 2X_i \\ 1\leq i\leq s \\ \frac{X_1^{k-l}Y_1^l}{2^h} < \|v\|_2 \leq \frac{X_1^{k-l}Y_1^l}{2^{h-1}}}} \|v\|_2^{-2} + \\ & + \sum_{\substack{U_i<u_i\leq 2U_i \\ V_i<v_i\leq 2V_i \\ Y_i<y_i\leq 2Y_i \\ 1\leq i\leq s}} \ \sum_{\substack{X_i<x_i\leq 2X_i \\ 1\leq i\leq s \\ \|v\|_2 \leq 2^{-E}X_1^{k-l}Y_1^l \\ \|v\|_2 \neq 0}} \|v\|_2^{-2}. \end{aligned} \tag{76}$$

Wir beobachten

$$\begin{aligned} x^{k-l}y^l - u^{k-l}v^l \ &= \ y^l \left(x^{k-l} - (u^{k-l}v^l)/y^l\right) \\ &= \ y^l(x-\zeta)(x^{k-l-1} + x^{k-l-2}\zeta + ... + \zeta^{k-l-1}) \end{aligned} \tag{77}$$

mit $\zeta = \zeta(u, v, y)$ definiert durch $\zeta(u, v, y) = ((u^{k-l}v^l)/(y^l))^{1/(k-l)}$. Damit folgt $|x_1 - \zeta(u_1, v_1, y_1)| \leq 2^{-h+1}X_1$ und es bleiben bei gewähltem u_1, v_1, y_1 für x_1 noch $O(2^{-h+1}X_1 + 1)$ Möglichkeiten. Wegen $h \leq E$ im Fall des zweiten abzuschätzenden Summanden gilt $2^{-h+1}X_1 + 1 \ll 2^{-h+1}X_1$, also bleiben für x_1 im zweiten Summanden von (76) noch $O(2^{-h+1}X_1)$ Möglichkeiten. Im dritten Summanden gibt es für x_1 noch $O(2^{-E}X_1 + 1)$ mögliche Wahlen, was mit der Definition von E zu $2^{-E}X_1 \ll 1$ führt. Somit bleiben im Fall des dritten Summanden von (76) nur $O(1)$ Werte für x_1. Für x_2 ergibt sich aus (77) die Ungleichung $|x_2 - \zeta(u_2, v_2, y_2)| \leq 2^{-h+1}X_1(X_1/X_2)^{k-l-1}(Y_1/Y_2)^l$. Daraus erhalten wir für gewähltes u_2, v_2 undy_2 noch $O(2^{-h+1}X_1(X_1/X_2)^{k-l-1}(Y_1/Y_2)^l + 1)$ Möglichkeiten für x_2. Wegen $h \leq E$ im Fall des zweiten abzuschätzenden Summanden gilt $1 \ll 2^{-h+1}X_1$, deshalb verbleiben für x_2 im zweiten Summanden von (76) $O(2^{-h+1}X_1((X_1/X_2)^{k-l-1}(Y_1/Y_2)^l + 1))$ mögliche Wahlen. Wir schätzen den zweiten Summanden der Ungleichung (76) wie folgt ab. Es ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{h\le E}\sum_{\substack{U_i<u_i\le 2U_i\\ V_i<v_i\le 2V_i\\ Y_i<y_i\le 2Y_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{X_i<x_i\le 2X_i\\ 1\le i\le s\\ \frac{X_1^{k-l}Y_1^l}{2^h}<\|v\|_2\le\frac{X_1^{k-l}Y_1^l}{2^{h-1}}}}\|v\|_2^{-2}\\
&\ll \sum_{h\le E}2^{-2h}X_1^2\Big(\Big(\frac{X_1}{X_2}\Big)^{k-l-1}\Big(\frac{Y_1}{Y_2}\Big)^l+1\Big)X_3..X_sY_1..Y_sU_1V_1..U_sV_s2^{2h}X_1^{-2k+2l}Y_1^{-2l}\\
&\ll (\log B)Y_1Y_2(X_1X_2Y_1Y_2)^{s-1}(X_1X_2)^{-k+l+1}(Y_1Y_2)^{-l}+\\
&\qquad +(\log B)(X_1Y_1)^{2s-1}X_1Y_2X_1^{-2k+2l}Y_1^{-2l},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Summe über h trivial durch $\log B$ abschätzen und die gewählte Größenanordnung der Parameter ausnutzen. Wegen $s>l$ können wir die Parameter X_i beziehungsweise Y_i für $i=1,2$ nach oben durch B abschätzen und erhalten die obere Schranke $(\log B)B^{4s-2k}$ für den zweiten Summanden der Ungleichung (76). Für den ersten Summanden dieser Ungleichung erhalten wir mit der gewählten Ordnung der Parametergrößen sofort die obere Schranke B^{4s-2k}. Es bleibt der dritte Summand der Ungleichung (76) zu bearbeiten. Sei $\hat v=\hat v(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}})$ mit $\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}}$ aus $\mathbb{Z}^{s-1}$ der Vektor, der aus dem Vektor v entsteht, indem wir alle Einträge, die Variablen mit Index 1 enthalten, fortlassen. Es gilt $\|\hat v\|_2\le\|v\|_2$ und zusammen mit der Unterscheidung der Fälle $\|\hat v\|_2\ne 0$ und $\|\hat v\|_2=0$ erhalten wir für den dritten Summanden

$$\sum_{\substack{U_i<u_i\le 2U_i\\ V_i<v_i\le 2V_i\\ Y_i<y_i\le 2Y_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{X_i<x_i\le 2X_i\\ 1\le i\le s\\ \|v\|_2\le 2^{-E}X_1^{k-l}Y_1^l}}\frac{1}{\|v\|_2^2}\ll\sum_{\substack{U_i<u_i\le 2U_i\\ V_i<v_i\le 2V_i\\ Y_i<y_i\le 2Y_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{X_i<x_i\le 2X_i\\ 1\le i\le s\\ \|v\|_2\le 2^{-E}X_1^{k-l}Y_1^l\\ \|\hat v\|_2\ne 0}}\frac{1}{\|\hat v\|_2^2}+\sum_{\substack{U_i<u_i\le 2U_i\\ V_i<v_i\le 2V_i\\ Y_i<y_i\le 2Y_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{X_i<x_i\le 2X_i\\ 1\le i\le s\\ \|v\|_2\le 2^{-E}X_1^{k-l}Y_1^l\\ \|\hat v\|_2=0}}1.$$

Dabei benutzen wir im letzten Schritt, dass $\|v\|_2^{-1}\le 1$ gilt, da die Werte von v in $\mathbb{Z}^{s(k-1)}$ liegen. Im ersten Summanden dieser Ungleichung schätzen wir die Summationen über y_1,u_1 und v_1 trivial ab. Für x_1 gibt es in diesem Fall $O(1)$ Möglichkeiten. Die verbleibende Summe kann durch $P_1(s-1)$ majorisiert werden. Das liefert die obere Schranke $B^3P_1(s-1)$. Im zweiten Summand schätzen wir die Summationen über x_1,y_1,u_1 und v_1 wie bereits im ersten ab und nutzen $\|\hat v\|_2=0$ aus: Es bleiben für frei gewähltes $\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}}$ mit Hilfe der Abschätzung der Teilerfunktion für $\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}$ nur $O(B^\varepsilon)$ Möglichkeiten, und wir erhalten als obere Schranke des zweiten Summands dieser Ungleichung $B^3B^{2(s-1)+\varepsilon}$. Setzen wir alle erarbeiteten Abschätzungen in (76) ein, ergibt sich das Lemma. $\square$

Für $1\le\ell\le k$ und $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v}$ aus $\mathbb{N}^s$ definieren wir $P_2(s,\ell)=P_2(s,\ell,k)$ durch

$$P_2(s,\ell,k)\;=\;\sum_{\substack{U_i<u_i\le 2U_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{V_i<v_i\le 2V_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{Y_i<y_i\le 2Y_i\\ 1\le i\le s}}\sum_{\substack{X_i<x_i\le 2X_i\\ 1\le i\le s\\ \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2\ne 0}}\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^{-\ell/k}$$

für $1 \leq X_i, Y_i, U_i, V_i \leq B$ und $1 \leq i \leq s$. Wir geben folgendes Lemma ohne Beweis an, da dieser lediglich eine Anpassung des Beweises von Lemma 5.11 ist.

Lemma 5.12. *Sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq k$. Für $2s \geq \ell$ gilt*

$$P_2(s,\ell) \ll (\log B)B^{4s-\ell} + B^{2s+1+\varepsilon} + B^3 P_2(s-1,\ell).$$

Das folgende Argument, welches die Lemmata 5.11 und 5.12 induktiv einsetzt, wird zeigen, dass uns die Bedingung $2\tilde{t} \geq 2k$ ausreicht, um P in der richtigen Größenordnung abzuschätzen. Dies ergibt für die Anzahl der Variablen s der Ausgangsform die Bedingung $s > 4k$. Wir erhalten zunächst per Induktion aus Lemma 5.11 für $l = [k/2]$ und $2\tilde{t} - (k-1) \geq l + 2$ die Aussage

$$P_1(2\tilde{t}) \ll (\log B)B^{8\tilde{t}-2k} + B^{4\tilde{t}+k+\varepsilon} + B^{3k} P_1(2\tilde{t}-k). \tag{78}$$

Nun können wir $\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 \geq 1$ aus $\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2 \neq 0$ folgern, da $v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})$ ein Vektor mit ganzzahligen Einträgen ist. Damit erhalten wir die Ungleichungen $\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^2 \geq \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2$ und $\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^{\ell/k} \geq \|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^{(\ell-1)/k}$, es gilt also $P_1(2\tilde{t}-k) \leq P_2(2\tilde{t}-k,k)$ und $P_2(s,\ell) \leq P_2(s,\ell-1)$ für $\ell \geq 2$. Die letzte Ungleichung liefert zusammen mit Lemma 5.12 unter dessen Voraussetzungen und $\ell \geq 2$

$$P_2(s,\ell) \ll (\log B)B^{4s-\ell} + B^{2s+1+\varepsilon} + B^3 P_2(s-1,\ell-1).$$

Wenden wir diese Ungleichung iterativ auf $P_2(2\tilde{t}-k,k)$ an, erhalten wir für $2\tilde{t} \geq 2k$ bei Anwendung des Lemmas 5.12 im letzten Schritt

$$P_2(2\tilde{t}-k,k) \ll (\log B)B^{8\tilde{t}-5k} + B^{4\tilde{t}-k+\varepsilon} + B^{3k} P_2(2\tilde{t}-2k,1). \tag{79}$$

Setzen wir (79) in (78) ein, ergibt sich

$$P_1(2\tilde{t}) \ll (\log B)B^{8\tilde{t}-2k} + B^{4\tilde{t}+2k+\varepsilon} + B^{6k} P_2(2\tilde{t}-2k,1).$$

Schätzen wir abschließend $P_2(2\tilde{t}-2k,1)$ trivial ab, indem wir $\|v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{v})\|_2^{-1/k}$ nach oben durch 1 abschätzen, und beachten, dass die möglicherweise leere Summe durch 1 abgeschätzt werden kann, erhalten wir für $P_2(2\tilde{t}-2k,1)$ die obere Schranke $B^{8\tilde{t}-8k}$. Bereits für $2\tilde{t} \geq k$ folgt $B^{4\tilde{t}+2k} \leq B^{8\tilde{t}-2k}$, und zusammen mit der letzten Ungleichung für $P_1(2\tilde{t})$ und (75) ergibt sich das folgende Lemma.

Lemma 5.13. *Für $2\tilde{t} \geq 2k$ gilt*

$$P \ll (\log B)^{8\tilde{t}+1} B^{8\tilde{t}-2k+\varepsilon}.$$

Die Aussagen der Lemmata 5.10 und 5.13 zusammen mit (74) in (73) liefern für $2\tilde{t} \geq 3k$

$$\int_{\mathfrak{U}} |H(\alpha)|^{2\tilde{t}} \mathrm{d}\alpha \ll A^{4(k-1)\tilde{t}-1} B^{8\tilde{t}-k+\varepsilon} + A^{4(k-1)\tilde{t}} B^{4\tilde{t}+\varepsilon} \ll A^{4(k-1)\tilde{t}-1} B^{8\tilde{t}-k+\varepsilon}.$$

Dabei kompensieren wir die Logarithmus-Potenzen durch B^{ε} und benutzen im letzten Schritt die Ungleichung $A^{4(k-1)\tilde{t}}B^{4\tilde{t}} \ll A^{4(k-1)\tilde{t}-1}B^{8\tilde{t}-k}$, die bereits für $2\tilde{t} \geq k$ und $A \asymp B^k$ folgt. Drücken wir $\tilde{t}$ wieder durch s aus, so erhalten wir mit (68), (69), (70) und $s \geq 6k$ für W die obere Schranke

$$W \ll A^{2s(k-1)+\varepsilon}\frac{B^{4s-2k}}{A^2}. \tag{80}$$

Auf dem Minor Arc-Anteil können wir mit (66), (80) und (58) zusammenfassend folgern, dass es für $s \geq 6k$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}(A)} \left| \int_{\mathfrak{m}} S(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};\alpha)\mathrm{d}\alpha \right|^2 \ll A^{s(k+1)-\delta}\left(\frac{B^{2s-k}}{A}\right)^2.$$

Zusammen mit dem Ergebnis des Major Arc-Anteils ist damit Satz 2.5 für $s \geq 6k$ bewiesen.

5.3 Untere Schranken

In diesem Abschnitt beweisen wir untere Schranken an das singuläre Integral und die singuläre Reihe im Sinne des Lemmas 2.6. Diese Aussagen stellen sicher, dass Korollar 2.7 eine nichttriviale Aussage über Formen des in Satz 2.5 betrachteten Typs darstellt und der Hauptterm dort dominiert und nicht im Fehlerterm verschwindet. Da wir Folgerungen aus dem genannten Satz nur im Mittel ziehen können, genügen untere Schranken für fast alle betrachteten Formen. Im folgenden Lemma beweisen wir für fast alle Summen binärer Formen eine untere Schranke an deren singuläres Integral.

Lemma 5.14. *Sei $s > k$. Für fast alle $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$ gilt $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B) \gg A^{-1+\varepsilon}B^{2s-k}$.*

Beweis. Wir substituieren $x_i = B\tilde{x_i}$ und $y_i = B\tilde{y_i}$ für $1 \leq i \leq s$ und erhalten für das singuläre Integral

$$\begin{aligned} J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}};B) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{[-B,B]^s}\int_{[-B,B]^s} e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\beta \\ &= B^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{[-1,1]^s}\int_{[-1,1]^s} e\left(\beta B^k\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\beta. \end{aligned}$$

Mit der Substitution von $B^k\beta$ ergibt sich als Abschluss dieser ersten Rechnung

$$= B^{2s-k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{[-1,1]^s}\int_{[-1,1]^s} e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\beta.$$

Durch Aufteilen der Integrale über $[-1,1]$ in die Summe von Integralen über $[-1,0]$ und $[0,1]$ erhalten wir 2^{2s} Integrale. Durch Substitution kann immer erreicht werden, dass sich diese Integrale über $[0,1]^{2s}$ erstrecken, wobei sich dabei aber die Vorzeichen der Koeffizienten der Form $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ abhängig von der aktuellen Kombination der Integrale und von k ändern. Da die geänderten Vorzeichen für unser Argument zunächst keine Rolle spielen, schreiben wir für die Form weiterhin $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$. Wir betrachten eines dieser Integrale und zerlegen weiter

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{[0,1]^{2s}} & e\left(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right)\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{[0,1]^{2s-2}}\int_{x_1=0}^{1}\int_{y_1=0}^{x_1} e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\beta + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{[0,1]^{2s-2}}\int_{y_1=0}^{1}\int_{x_1=0}^{y_1} e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\beta. \quad (81)\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass alle 2^{2s} Integrale größer oder gleich Null sind, führen wir das Argument exemplarisch am ersten Term der rechten Seite von (81) vor. Wir schreiben mit $\mathbf{x} = (x_2, ..., x_s)$ und $\mathbf{y} = (y_2, ..., y_s)$ zur Abkürzung

$$\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad = \quad \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(2)}}(x_2,y_2) + ... + \mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(s)}}(x_s,y_s).$$

Außerdem definieren wir $r(x_1, y_1) = r(x_1, y_1, a_1^{(1)}, ..., a_k^{(1)})$ durch

$$r(x_1,y_1,a_1^{(1)},...,a_k^{(1)}) \quad = \quad a_1^{(1)}x_1^{k-1}y_1 + ... + a_{k-1}^{(1)}x_1y_1^{k-1} + a_k^{(1)}y_1^k.$$

Das liefert die Zerlegung

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(1)}}(x_1,y_1) \quad = \quad x_1^k\left(a_0^{(1)} + r\left(1,\frac{y_1}{x_1}\right)\right).$$

Wir substituieren $\tilde{y}_1 = y_1/x_1$ und erhalten für den ersten Term der rechten Seite

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{[0,1]^{2s-2}}\int_{x_1=0}^{1}\int_{y_1=0}^{x_1} e(\beta\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\beta \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{[0,1]^{2s-2}}\int_{x_1=0}^{1}\int_{\tilde{y}_1=0}^{1} x_1 e\big(\beta\big(x_1^k a_0^{(1)} + x_1^k r(1,\tilde{y}_1) + \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)\big)\mathrm{d}\tilde{y}_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

und mit der Substitution $\tilde{x}_1 = x_1^k$ ergibt sich

$$= \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{[0,1]^{2s-2}}\int_{\tilde{x}_1=0}^{1}\int_{\tilde{y}_1=0}^{1} \tilde{x}_1^{\frac{2}{k}-1} e\big(\beta\big(\tilde{x}_1 a_0^{(1)} + \tilde{x}_1 r(1,\tilde{y}_1) + \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)\big)\mathrm{d}\tilde{y}_1\mathrm{d}\tilde{x}_1\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\beta.$$

Abschließend substituieren wir $\gamma = \tilde{x}_1 a_0^{(1)} + \tilde{x}_1 r(1, \tilde{y}_1) + \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ für $\tilde{x}_1$ und erhalten

$$= \quad \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V(\gamma)e(\beta\gamma)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\beta \quad (82)$$

mit

$$V(\gamma) = \int_{B(\gamma)} (a_0^{(1)} + r(1,\tilde{y}_1))^{-\frac{2}{k}} (\gamma - \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\frac{2}{k}-1} \mathrm{d}(\tilde{y}_1, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

und

$$B(\gamma) = \left\{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^{s-1}, \tilde{y}_1 \in [0,1] : 0 \leq \frac{\gamma - \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{a_0^{(1)} + r(1,\tilde{y}_1)} \leq 1 \right\}.$$

Nach dem Fourierschen Umkehrsatz folgt aus (82), dass das betrachtete Integral gleich $V(0)/k$ ist. An der Definition von $V(\gamma)$ lesen wir $V(0) \geq 0$ ab. Das gezeigte Argument lässt sich auf jedes der Teilintegrale anwenden, deshalb ist jedes der 2^{2s} Integrale größer oder gleich null. Damit genügt es, die geforderte untere Schranke für eines der Teilintegrale zu zeigen. Für ungeraden Grad k gibt es ein Integral unter diesen, in dem nicht alle $a_0^{(i)}$ für $1 \leq i \leq s$ dasselbe Vorzeichen haben; für geraden Grad k gibt es ein solches, weil wir dies vorausgesetzt haben. Dieses Integral wählen wir zur weiteren Bearbeitung aus. Da $V(0)$ in $\mathbb{R}$ liegt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass der betragsmäßig größte der Koeffizienten $a_0^{(i)}$ positiv ist, weil wir stets das konjugiert komplexe Integral betrachten können. Diesen bezeichnen wir mit $a_0^{(1)}$. Da nicht alle der Koeffizienten $a_0^{(i)}$ dasselbe Vorzeichen haben, gibt es ein $a_0^{(j)}$, dessen Vorzeichen negativ ist. Wir wählen nun die Größe der Variablen so, dass die in $B(0)$ geforderten Bedingungen automatisch erfüllt sind. Für y_i mit $2 \leq i \leq s$ sei $0 \leq y_i \leq |a_0^{(j)}|/(8s^3kA)$, wobei A die maximale Koeffizientengröße ist. Für x_i mit $2 \leq i \leq s$ und $i \neq j$ soll gelten $0 \leq x_i \leq |a_0^{(j)}|/((8s^3)^{1/k}A)$. Für x_1 lassen wir den vollen Bereich zwischen null und eins zu, für x_j gelte $1/(2s^2)^{1/k} \leq x_j \leq 1/(s^2)^{1/k}$ und für $\tilde{y}_1$ sei $0 \leq \tilde{y}_1 \leq a_0^{(1)}/(ksA)$. Damit erhalten wir $a_0^{(1)} + r(1,\tilde{y}_1) \geq a_0^{(1)}(1 - s^{-1})$ und $|a_0^{(j)}|/(4s^2) \leq -\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq a_0^{(1)} + r(1,\tilde{y}_1)$. Durch diese Ungleichungen sind die geforderten Bedingungen in $B(0)$ erfüllt und wir können abschätzen

$$V(0) \gg_{k,s} \Big(\frac{|a_0^{(j)}|}{A}\Big)^{2(s-2)+1} \frac{a_0^{(1)}}{A} (a_0^{(1)})^{-2/k} |a_0^{(j)}|^{-1+2/k} \gg_{k,s} \frac{|a_0^{(j)}|^{2(s-1)-1}}{A^{2(s-1)}}.$$

Lassen wir nun lediglich Formen zu, für die $A^{1-\varepsilon} \ll |a_0^{(j)}| \ll A$ gilt, so erhalten wir für diese Formen die untere Schranke $A^{-1+\varepsilon}B^{2s-k}$ an das singuläre Integral $J(\mathcal{F}_{\mathbf{a}}; B)$. Das bedeutet aber, dass diese Schranke für fast alle Summen binärer Formen mit maximaler Koeffizientengröße A gilt, da die Ausnahmemenge mit der oberen Schranke $A^{s(k+1)-\varepsilon}$ hinreichend klein ist. □

Zu zeigen bleibt die Aussage über die singuläre Reihe. Wir nutzen eine Beweisidee von Dietmann [5] und zeigen zunächst folgende Aussage zur Diskriminante einer binären Form. Mit ∇_x bezeichnen wir die partielle Ableitung nach der Variablen x.

Lemma 5.15. *Sei $F(x,y) = a_0x^k + a_1x^{k-1}y + ... + a_{k-1}xy^{k-1} + a_ky^k$ und p eine Primzahl. Dann gilt für die Diskriminante $D(F)$ der binären Form F die folgende Aussage. Gibt es eine Lösung (x,y) von $\nabla_x F(x,y) \equiv 0$ modulo p^l und $\nabla_y F(x,y) \equiv 0$ modulo p^l, bei der nicht beide Variablen x und y durch p geteilt werden, dann ist die Diskriminante $D(F)$ durch p^l teilbar.*

Beweis. Wir können annehmen, dass p nicht y teilt, da das Problem symmetrisch in den Variablen x und y ist. Da (x,y) eine Lösung der Kongruenzen

$$\begin{aligned} \nabla_x F(x,y) &\equiv 0 \pmod{p^l}, \\ \nabla_y F(x,y) &\equiv 0 \pmod{p^l} \end{aligned}$$

ist, gelten auch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla_x F(xy^{-1},1) &= r'p^l, \\ \nabla_y F(xy^{-1},1) &= r''p^l \end{aligned}$$

für geeignete r' und r''. Dabei bezeichnet y^{-1} das multiplikative Inverse zu y modulo p^l mit $1 \leq y < p^l$, das wegen $p \nmid y$ existiert und immer im angegebenen Bereich gewählt werden kann. Zur Abkürzung setzen wir $\tilde{x} = xy^{-1}$. Wir bemerken, dass $\tilde{x}$ in $\mathbb{Z}$ liegt und können aufgrund der letzten beiden Gleichungen a_{k-1} und ka_k ausdrücken durch

$$\begin{aligned} a_{k-1} &= r'p^l - 2a_{k-2}\tilde{x} - 3a_{k-3}\tilde{x}^2 - ... - ka_0\tilde{x}^{k-1}, \\ ka_k &= r''p^l - (k-1)\tilde{x}\left(r'p^l - 2a_{k-2}\tilde{x} - 3a_{k-3}\tilde{x}^2 - ... - ka_0\tilde{x}^{k-1}\right) - \\ &\quad -(k-2)a_{k-2}\tilde{x}^2 - ... - a_1\tilde{x}^{k-1}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Form $\tilde{F}(x,y) = a_0x^k + ... + a_{k-2}x^2y^{k-2} + \tilde{a}_{k-1}xy^{k-1} + \tilde{a}_ky^k$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k-1} &= -2a_{k-2}\tilde{x} - 3a_{k-3}\tilde{x}^2 - ... - ka_0\tilde{x}^{k-1}, \\ k\tilde{a}_k &= -(k-1)\tilde{x}\left(-2a_{k-2}\tilde{x} - 3a_{k-3}\tilde{x}^2 - ... - ka_0\tilde{x}^{k-1}\right) - \\ &\quad -(k-2)a_{k-2}\tilde{x}^2 - ... - a_1\tilde{x}^{k-1}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\nabla_x \tilde{F}(\tilde{x},1) = 0$ und $\nabla_y \tilde{F}(\tilde{x},1) = 0$. Deshalb muss $D(\tilde{F})$ verschwinden. Da die Diskriminante ein Polynom in den Koeffizienten ist, vergleiche dazu [15], und wir modulo p^l die Koeffizienten nicht verändert haben, ändert sich auch die Restklasse der Diskriminante modulo p^l nicht und wir erhalten $0 \equiv D(\tilde{F}) \equiv D(F)$ modulo p^l. Damit folgt das Lemma. □

Wir stellen nun folgendes Ergebnis bereit, welches direkt aus dem Beweis von Lemma 4.20 unter Verwendung des Beweises von Lemma 5.1 folgt, wobei wir statt des Theorems 4.2 aus [16] die Aussage zu Potenzen einer Primzahl im Beweis von Theorem 7.1 desselben Buches verwenden.

Lemma 5.16. *Sei $s \geq 2k+1$, p eine Primzahl und seien $\boldsymbol{a}^{(1)}, ..., \boldsymbol{a}^{(s)}$ Vektoren aus $\mathbb{Z}^{k+1}$, so dass für mindestens $2k+1$ der $\boldsymbol{a}^{(i)}$ gilt $(p; a_0^{(i)}; ..; a_k^{(i)}) = 1$. Sei zur Form $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}^{(1)}(x_1, y_1) + ... + \mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}^{(s)}(x_s, y_s)$, wie zu Beginn der Arbeit definiert, die Lösungsanzahl*

$$\varrho(q; \boldsymbol{a}) \quad = \quad \# \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \pmod q : \mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod q\}$$

gegeben. Dann ist $\varrho(p^n; \boldsymbol{a}) = p^{n(2s-1)}\left(1 + O\left(p^{-1-1/k}\right)\right)$.

Wir formulieren im folgenden Satz die Aussage des Lemmas 2.6 zur unteren Schranke der singulären Reihe von Summen binärer Formen.

Satz 5.17. *Sei $\gamma > 0$ und $s \geq 2k+2$. Dann gibt es eine Konstante $\rho > 0$, die nur von s, k, l und γ abhängt, so dass gilt: Sei $N(A)$ die Anzahl der Formen $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ mit $\boldsymbol{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$, für die gilt $0 < \mathfrak{S}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}) < A^{-\gamma}$. Dann ist $N(A) \ll_{s,k,l,\gamma} A^{s-\rho}$.*

Beweis. Auch für eine allgemeine Form zerfällt die singuläre Reihe in ein Produkt, sofern sie absolut konvergiert; für eine allgemeine kubische Form findet sich ein Beweis beispielsweise in Kapitel 17 von [6]. Deshalb entsteht auch für die singuläre Reihe einer Summe binärer Formen bei absoluter Konvergenz ein Produkt der Form

$$\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) \quad = \quad \prod_p \chi_p(\mathbf{a})$$

mit

$$\chi_p(\mathbf{a}) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} p^{n(1-2s)} \varrho(p^n; \mathbf{a}).$$

Hier ist $\varrho(q; \mathbf{a})$ definiert wie in Lemma 5.16. Sei $\mathcal{P}(\mathbf{a}) = \mathcal{P}(C; \mathbf{a})$ die Menge aller Primzahlen p, die größer als C sind und höchstens $s - (2k+1)$ der Koeffizientenvektoren $\mathbf{a}^{(i)}$ teilen. Zur Einstellung der Größe des Parameters C benutzen wir Lemma 5.16, denn danach gibt es eine Konstante C, die nur von k abhängt, so dass für alle p aus $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ gilt

$$\prod_{p \in \mathcal{P}(\mathbf{a})} \chi_p(\mathbf{a}) = \prod_{p \in \mathcal{P}(\mathbf{a})} \left(1 + O\left(p^{-1-1/k}\right)\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{83}$$

Wir können ein bezüglich s, k und γ hinreichend kleines $\delta > 0$ und eine bezüglich s, k, l, γ und δ hinreichend große natürliche Zahl L wählen und führen damit folgende Notation ein. Wir fixieren $\mathbf{a}$ aus $\mathcal{A}(A)$ und definieren zunächst noch $\ell(p) = \ell_k(p) = \max\left\{\ell : p^\ell \parallel D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}) \text{ für ein } i \text{ mit } 1 \leq i \leq s\right\}$. Dabei bezeichnet $D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}})$ die Diskriminante der beiden als Argument genannten Formen. Außerdem hängt der Wert $\ell(p)$ auch vom Grad k ab. Wir nennen $\mathbf{a}$ *schlecht erster Art*, wenn gilt

$$\prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p) = 0}} p \geq A^\delta,$$

und **a** *schlecht zweiter Art*, falls

$$\prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)>0}} p \geq A^{1/L^2}.$$

Zudem nennen wir **a** *schlecht dritter Art*, wenn **a** nicht schlecht zweiter Art ist, jedoch gilt

$$\prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)>0}} p^{\ell(p)} \geq A^{\delta}.$$

Wir zeigen, dass schlechte **a** recht selten sind. Wir behaupten

$$\#\left\{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(A) : \mathbf{a} \textit{ schlecht erster Art}\right\} \ll A^{s(k+1)-\delta+\varepsilon}. \tag{84}$$

Für jedes **a**, das schlecht erster Art ist, ist das Produkt $a_0^{(1)}a_1^{(1)}...a_{k-1}^{(s)}a_k^{(s)}$ durch eine Zahl der Form $q^{2(k+1)}$ mit

$$q \quad = \prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)=0 \\ p>C}} p$$

teilbar. Es ist $A^{\delta} \ll q \leq A^{s/2}$, also erhalten wir für die Anzahl möglicher Produkte $a_0^{(1)}a_1^{(1)}...a_{k-1}^{(s)}a_k^{(s)}$, die zu **a**, welche schlecht erster Art sind, gehören, höchstens

$$\sum_{A^{\delta} \ll q \ll A^{s/2}} A^{s(k+1)}q^{-2(k+1)} \quad \ll \quad A^{s(k+1)-\delta}.$$

Die Abschätzung der Teilerfunktion $d(n) \ll n^{\varepsilon}$ liefert (84). Mit demselben Argument folgt sofort

$$\#\left\{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(A) : \mathbf{a} \textit{ schlecht zweiter Art}\right\} \ll A^{s(k+1)-1/L^2+\varepsilon}. \tag{85}$$

Für **a**, die schlecht dritter Art sind, zeigen wir mit einer nur von k abhängigen Konstante $c(k)$

$$\#\left\{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(A) : \mathbf{a} \textit{ schlecht dritter Art}\right\} \ll A^{s(k+1)+2s/L-\delta/c(k)+\varepsilon}. \tag{86}$$

Das Produkt der Diskriminanten $D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(1)}})...D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(s)}})$ ist für jedes **a**, das schlecht dritter Art ist, teilbar durch eine Zahl q der Form

$$q = \prod_{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a})} p^{\ell(p)} \geq A^{\delta} \qquad \text{mit} \qquad \prod_{p|q} p \leq A^{1/L^2}.$$

Nach Lemma 4.21 gibt es höchstens $A^{2s/L}$ verschiedene q. Für festes q müssen die Kongruenzen $D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}}) \equiv 0$ modulo geeigneter q_j' gelöst werden, wobei das

Produkt über alle q_j' gerade q ergibt. Da die Diskriminante ein Polynom in den Koeffizienten mit einem nur von k abhängigen Grad $c(k)$ ist (vergleiche dazu [15]), folgt $q_j' \ll A^{c(k)}$ aus der Konstruktion von q. Für die Diskriminanten $D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(i)}})$ gibt es daher wegen $q \geq A^{\delta}$ mit der Abschätzung der Teilerfunktion höchstens $O(A^{s(k+1)-\delta/c(k)+\varepsilon})$ Möglichkeiten, die Anzahl der möglichen Zerlegungen von q schätzen wir durch die Abschätzung der Teilerfunktion mit A^{ε} ab und erhalten so zusammen mit dem Hauptsatz der Algebra (86). Wir zeigen, dass für $\mathbf{a}$, die weder schlecht erster noch schlecht zweiter noch schlecht dritter Art sind, gilt

$$\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) \geq A^{-\gamma}, \tag{87}$$

sofern $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}})$ nicht null ist. Wir benutzen zum Beweis von (87) die Produktdastellung der singulären Reihe. Da $\mathbf{a}$ weder schlecht erster noch schlecht zweiter noch schlecht dritter Art ist, gilt

$$\prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)>0}} p^{-\ell(p)} > A^{-\delta} \quad \text{und} \quad \prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)=0}} p^{-1} > A^{-\delta}. \tag{88}$$

Um untere Schranken an χ_p für $p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a})$ zu erhalten, verwenden wir das Henselsche Lemma. Wir wissen, dass $\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) \neq 0$ ist, somit gibt es zu jeder Potenz p^m eine Lösung $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ modulo p^m der Gleichung

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^m}$$

mit mindestens einem x_i oder y_i, das nicht durch p teilbar ist. Wir benutzen eine Lösung dieser Kongruenz mit hinreichend großem m und können annehmen, dass beispielsweise y_1 nicht durch p teilbar ist. Aus p^r teilt $D(\mathcal{F}_{\mathbf{a}^{(1)}})$ folgt $r \leq \ell(p)$. Wegen Lemma 5.15 kann so nicht jede Komponente des Gradienten der Form $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ durch $p^{\ell(p)+1}$ teilbar sein. Wir können also stets eine Variante des Henselschen Lemmas für Formen anwenden (vergleiche dazu beispielsweise den Beweis von Lemma 17.1 in [6]) und erhalten

$$\varrho(p^n; \mathbf{a}) \geq \frac{p^{n(2s-1)}}{p^{D(\ell(p)+1)}}$$

für hinreichend große n. Die Konstante D hängt dabei nur von s ab. Wir erhalten $\chi_p(\mathbf{a}) \geq p^{-D(\ell(p)+1)}$. Zusammen mit (83) und (88) erhalten wir für die singuläre Reihe

$$\mathfrak{S}(F_{\mathbf{a}}) \geq \frac{1}{2} \prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)=0}} p^{-D} \prod_{\substack{p \notin \mathcal{P}(\mathbf{a}) \\ \ell(p)>0}} p^{-2D\ell(p)} \gg A^{-3D\delta}.$$

Da δ hinreichend klein bezüglich s, k und γ gewählt wurde, folgt die untere Schranke (53) sofort. Die singulären Reihen aller Formen, die weder schlecht erster noch schlecht zweiter noch schlecht dritter Art sind, besitzen deshalb die geforderte untere Schranke. Da die Anzahl der schlechten Formen durch (84), (85) und (86) beschränkt ist, folgt die geforderte obere Schranke an $N(A)$ mit einem positiven ρ durch Wahl eines hinreichend großen L, beispielsweise $2s/L < \delta/(2c(k))$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Literatur

[1] Emil Artin. *The collected papers of Emil Artin.* Edited by Serge Lang and John T. Tate. Addison–Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1965.

[2] B. J. Birch. Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables. *Mathematika*, 4:102–105, 1957.

[3] Thilo Breyer. *Hasse-Prinzipien für Diagonalformen.* Dissertation, Universität Stuttgart, 2004.

[4] T. D. Browning and R. Dietmann. Solubility of Fermat equations. In *Quadratic forms—algebra, arithmetic, and geometry*, volume 493 of *Contemp. Math.*, pages 99–106. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[5] J. Brüdern and R. Dietmann. Persönliche Gespräche.

[6] H. Davenport. *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2005.

[7] Kevin Ford. Waring's problem with polynomial summands. *J. London Math. Soc. (2)*, 61(3):671–680, 2000.

[8] Kevin B. Ford. New estimates for mean values of Weyl sums. *Internat. Math. Res. Notices*, (3):155–171 (electronic), 1995.

[9] L. K. Hua. *Additive theory of prime numbers.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 13. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.

[10] Ju. V. Matijaszevics. Solution of the tenth problem of Hilbert. *Mat. Lapok*, 21:83–87, 1970.

[11] Trygve Nagell. *Introduction to number theory.* Second edition. Chelsea Publishing Co., New York, 1964.

[12] Jane Pitman. Bounds for solutions of diagonal equations. *Acta Arith.*, 19:223–247. (loose errata), 1971.

[13] Wolfgang M. Schmidt. *Diophantine approximations and Diophantine equations*, volume 1467 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[14] Guy Terjanian. Un contre-exemple à une conjecture d'Artin. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 262:A612, 1966.

[15] B. L. van der Waerden. *Algebra. Teil I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. XXXIII. Springer-Verlag, Berlin, 1955. 4te Aufl.

[16] R. C. Vaughan. *The Hardy-Littlewood method*, volume 125 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1997.

[17] Trevor D. Wooley. Large improvements in Waring's problem. *Ann. of Math. (2)*, 135(1):131–164, 1992.