
Über Differenzierbarkeit 2-dimensionaler projektiver Ebenen

am Beispiel von Schiebe- und Schellhammer-Ebenen

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Steffen Poppitz
aus Backnang

Hauptberichter: Prof. Dr. Hermann Hähl
Mitberichter: Prof. Dr. Markus Stroppel

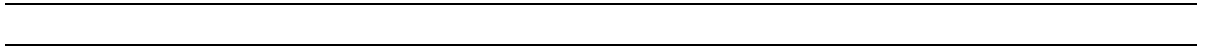
Tag der mündlichen Prüfung: 1. Februar 2011

Institut für Geometrie und Topologie der Universität Stuttgart
2011

Für alle, denen ich in den letzten Jahren aktiv oder passiv helfen durfte, ein bisschen mehr
Mathematik zu verstehen.

Dank

Großer Dank gebührt meinem Betreuer, Prof. Dr. Hermann Hähl, für die außerordentlich fruchtbare Zusammenarbeit in den letzten Jahren und seinen fast schon aufopferungsvollen Einsatz für alle seine Schützlinge. Ebenso möchte ich Prof. Dr. Markus Stroppel danken, der immer für Kaffee (oder Tee) und „richtige“ Mathematik zu haben ist, selbst wenn gerade mal wieder die Höhere Mathematik ihm die Haare vom Kopf zu fressen droht. Beide haben mein mathematisches Weltbild über die letzten Jahre hinweg entscheidend mitgeprägt. Besonderen Dank möchte ich an Martin Bulach richten für sein breites mathematisches und computertechnisches Wissen, das er bereitwillig mit jedem teilt, sowie an Robert Sowada für die Grundversorgung mit Kuchen. Vielen Dank an die vielen Mitstreiter und Kollegen am Fachbereich Mathematik für die interessanten Probleme jeglicher Art, die fruchtbaren Diskussionen und die moralische Unterstützung – insbesondere an Tanja Dörfner für den geteilten Schokoladenkuchen. Vielen Dank auch an Sandra Weigl, die Mädels (Katrin Grau, Corinna Hager und Dagmar Scherzinger) und all die anderen für die Besuche und die Ablenkung zum richtigen Zeitpunkt.



Zusammenfassung

In dieser Arbeit sollen ausgesuchte Familien von (2-dimensionalen) projektiven Ebenen auf Differenzierbarkeit untersucht werden. Dabei bedeutet „differenzierbar“, dass Punktmenge und Geradenmenge der Ebene differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, so dass „Schneiden von Geraden“ und „Verbinden von Punkten“ differenzierbar ist.

Eine jede differenzierbare projektive Ebene ist auch eine topologische Ebene und es gibt viele höchst verschiedene Beispiele topologischer projektiver Ebenen, die bis zu einem gewissen Grad sogar klassifiziert sind.

Bei differenzierbaren projektiven Ebenen stellt sich die Situation ganz anders dar: Bis jetzt sind nur sehr wenige Beispiele differenzierbarer projektiver Ebenen bekannt. Abgesehen von den klassischen Beispielen über den reellen Zahlen, den komplexen Zahlen, den Quaternionen und den Oktaven gibt es eine Konstruktion sehr starrer Beispiele von Otte (bei denen es unklar ist, ob sie nichttriviale Automorphismen besitzen) und eine Konstruktion von B. Segre, von der Immervoll gezeigt hat, dass sie differenzierbare projektive Ebenen liefert, welche sogar große Automorphismengruppen aufweisen.

Differenzierbare *affine* (oder allgemeiner *stabile*) Ebenen sind hingegen leichter zu finden. Im Gegensatz zu topologischen Ebenen, wo der projektive Abschluss einer lokalkompakten, zusammenhängenden affinen Ebene eine kompakte topologische projektive Ebene ist, gibt es differenzierbare affine Ebenen, deren projektiver Abschluss *nicht* differenzierbar ist (eine Familie solcher Beispiele wird in Kapitel 4 vorgestellt).

Auf der Suche nach Beispielen differenzierbarer Ebenen bietet es sich an, bekannte topologische Ebenen darauf hin zu untersuchen, ob Punkt- und Geradenmenge eine differenzierbare Struktur zulassen, so dass „Schneiden“ und „Verbinden“ differenzierbar wird. Kompakte zusammenhängende topologische projektive Ebenen können bezüglich der Dimension und Struktur ihrer Automorphismengruppen klassifiziert werden und in diesem Rahmen lässt sich die Suche nach differenzierbaren Ebenen recht systematisch durchführen. Bödi hat in seiner Habilitationsschrift bewiesen: Übersteigt die Dimension der Automorphismengruppe einer Ebene eine gewisse Schranke, so ist die Ebene nur dann differenzierbar, wenn sie isomorph zur entsprechenden klassischen Ebene ist. Es ist naheliegend, die verbleibenden bekannten Klassen und Familien kompakter zusammenhängender topologischer Ebenen auf Differenzierbarkeit zu untersuchen. Da die Beschreibung dieser Familien allerdings sehr allgemein ist – meist gestützt auf einzelne oder mehrere Funktionen, die relativ schwachen Anforderungen genügen müssen und mit deren Hilfe man die Punktreihen der Geraden beschreibt –, kann die Untersuchung sehr unangenehm werden. In der Regel wird es wohl bei solchen Klassen nötig sein, mit Hilfe geometrischer Operationen und der Wirkung der Automorphismengruppe die differenzierbare Struktur zu konstruieren, die in einer differenzierbaren Ebene notwendigerweise vorliegen muss, um dann

Schneiden und Verbinden zu untersuchen. Das eigentliche Konstruieren der differenzierbaren Struktur ist dabei weniger das Problem, sondern die dann konkret anzugebenden Karten und der Umgang mit diesen: Die auftretenden Terme werden zum Teil so unangenehm, dass auch – oder gerade – Computeralgebrasysteme keine Hilfe mehr darstellen.

Im Fall 2-dimensionaler Ebenen hat Bödi gezeigt, dass differenzierbare projektive Ebenen mit mindestens 3-dimensionaler Automorphismengruppe isomorph zur klassischen Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ sind. Da die 2-dimensionalen kompakten zusammenhängenden topologischen projektiven Ebenen mit 2-dimensionaler Automorphismengruppe vollständig klassifiziert sind, soll deshalb mit dieser Arbeit anhand zweier Familien begonnen werden, diese Ebenen systematisch auf Differenzierbarkeit zu untersuchen. In Kapitel 4 wird eine Familien von Schiebe-Ebenen studiert, die zwar eine differenzierbare affine Teilebene besitzen, im Allgemeinen aber als projektive Ebene nicht differenzierbar sind. In Kapitel 5 werden Schellhammer-Ebenen untersucht. Dort ist es zwar möglich, Ebenen mit differenzierbaren stabilen Teilebenen zu finden, jedoch ist eine affine oder projektive differenzierbare Schellhammer-Ebene, sofern sie gewisse Zusatzvoraussetzungen erfüllt, isomorph zur klassischen Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

Summary

In this thesis we study differential projective planes, i.e. projective planes where the point set and line set respectively are differential manifolds such that joining of points and intersection of lines are differentiable maps.

Up to now there are few examples of differential projective planes known. It is considered common knowledge that the classical projective planes over the real numbers, the complex numbers, the quaternions and the Cayley numbers are differential. Then there are some rather rigid planes constructed by Otte for which it is not clear if they admit non trivial automorphisms at all. Furthermore there is a construction by B. Segre for which Immervoll provided the proof that they are indeed differential projective planes. The latter examples even have relatively large groups of automorphisms. Apart from these examples there is some theory mainly due to or collected by Bödi in his Habilitationsschrift (Böd95).

As for topological planes, under mild topological conditions one gets a topological projective plane from a topological affine plane simply by taking the projective closure. When one considers differential planes things are not that easy. In fact there are examples of differential affine planes which do not admit a differential projective closure (although the underlying planes – the affine plane and its projective closure – are both topological planes).

In order to procure examples of differential projective planes one can pursue mainly two different approaches. Since within a differential projective plane the flag space is a submanifold of the product space of the point manifold and the line manifold respectively, one might try to find a triple of manifolds such that the first one serves as the point manifold, the second as the line manifold and the third as the flag manifold of a differential projective plane. Immervoll, Löwen and Pupeza formulated suitable conditions (ILP10). It is a completely different task to satisfy these conditions. Immervoll uses this approach in (Imm03) to prove that the planes due to B. Segre are indeed differential projective planes. In general however one will encounter difficulties analysing the geometric structure of such examples, to determine the automorphisms or the placement of the planes within existing classifications.

The other method which we pursue here is to start from known topological projective planes and to find out whether they admit a differential structure such that differential projective planes result.

One important piece of information is the topological dimension of the point set of a topological projective plane. The topological dimension of the point set coincides with the topological dimension of the line set and this dimension is called the dimension of the plane. Since 2-dimensional projective planes are rather well understood – at least if their group of automorphisms has dimension greater than 1 – the focus shall be on these planes.

Due to Bödi it is known that a 2-dimensional differential projective plane which admits

a group of automorphisms of dimension at least 3 is isomorphic to the classical plane $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ (see Theorem 3.6 on page 33). That means non-classical examples of differential projective planes can only be found among planes whose automorphism group has dimension 2 or less. The 2-dimensional topological projective planes admitting a group of automorphisms of dimension 2 are explicitly known; see 3.17 for a summary of the classification. We will study two different classes of planes of that kind.

In chapter 4 we will study a special family of 2-dimensional shift planes. The point set of a 2-dimensional projective shift plane consists of \mathbf{R}^2 (the affine point set) plus certain points at infinity. The lines are in general determined by the graph of a map $\mathfrak{h}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ satisfying certain conditions; this graph together with its translates under \mathbf{R}^2 represent the standard lines. “Vertical” lines and a line at infinity have to be added in order to obtain a projective plane. This construction is invariant under the obvious action of the Lie group \mathbf{R}^2 . Here we will consider a map of the form $\mathfrak{h}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x^2 + \mathfrak{a}(x)$ where $\mathfrak{a}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ represents a “small” disturbance, i.e. all its derivatives are supposed to diminish rapidly such that $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^m \mathfrak{a}^{(n)}(x) = 0$ for all $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ and all $n \in \mathbf{N}$. The action of the Lie group \mathbf{R}^2 on the set of points and the set of lines provides parts of a differential structure that are necessary to get a differential plane. In fact this action determines the differential structure on the set \mathbf{R}^2 of affine points and also on the line at infinity minus one point (the point at infinity of the vertical lines). The remaining gaps in the differential structure can also be closed. Such a differential structure on the set of points can be transported to the set of lines by a polarity.

We will prove that in this way one obtains a differential *affine* plane. In order to achieve this it is sufficient to check the differentiability of the intersection map. Differentiability of the joining map is procured by the self-duality of the plane via the polarity. *But* we are also able to prove under certain further conditions that these differential affine planes do not extend to differential projective planes (and even if these conditions are not met it still seems highly unlikely that one would obtain a differential projective plane).

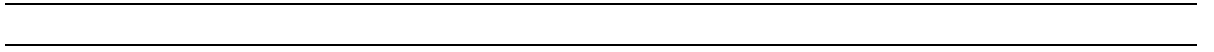
This family of shift planes is but a small sub-family of all 2-dimensional shift planes. A similar family has been treated by Immervoll (Imm98). Some of our arguments apply to all shift planes (for example the parts of the differential structure provided by the action of the group of automorphisms); however, for treating differentiability of other shift planes different arguments will have to be found. As is often the case with applying differential geometry to concrete examples calculations can quickly become quite inconvenient and even impossible to handle. A lot of (probably difficult) work would have to be done to close the case of differential shift planes in general.

Things are much more pleasant for the second family of 2-dimensional projective planes which we study in chapter 5; they will be called Schellhammer planes. With the exception of one sub-family we are able to discuss Schellhammer planes concludingly. In general we will see that a Schellhammer plane is a differential plane precisely if it is isomorphic to the classical plane $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

Any 2-dimensional Schellhammer plane can be described using the complex numbers \mathbf{C} plus a set of points at infinity as point space. The point rows of standard lines are determined by a suitable function \mathfrak{h} leading to a description in polar coordinates. The special lines are the ordinary straight lines through the origin $0 \in \mathbf{C}$ and the line at infinity contain-

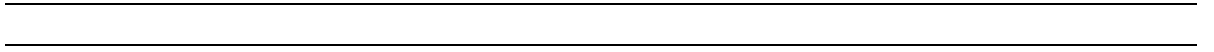
ing the points at infinity. The multiplicative group \mathbf{C}^\times acts as a group of automorphisms of such a plane by multiplication.

As was the case with shift planes the differential structure a differential Schellhammer plane would have to carry is determined by this group action up to a certain degree. Except for the planes whose generating function \mathfrak{h} satisfies $\mathfrak{h}(0) = 0$ and $\mathfrak{h}'(0) = 0$, the inverse function theorem makes it possible to fill in the gaps in the differential structure using geometric operations. Based on this differential structure it is possible to formulate conditions on \mathfrak{h} that determine whether the corresponding Schellhammer plane is differential or not. Using Fourier series we are then able to conclude that this is the case only if the plane is the classical projective plane $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.



Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	7
Summary	9
Einleitung	15
1 Differentialtopologische Begriffe und Hilfsmittel	19
1.1 Grundlegende Notationen aus der klassischen Analysis	19
1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildungen	21
2 Differenzierbare Ebenen	27
2.1 Definitionen: differenzierbare stabile, affine, projektive Ebenen	27
2.2 Kollineationen differenzierbarer stabiler Ebenen	29
3 Differenzierbarkeit 2-dimensionaler projektiver Ebenen	31
3.1 Differenzierbare projektive Ebenen	31
3.2 Werkzeuge für die Untersuchung projektiver Ebenen auf Differenzierbarkeit .	34
3.3 Über 2-dimensionale projektive Ebenen	35
3.3.1 Differenzierbarkeitsfragen bei 2-dimensionalen projektiven Ebenen .	38
4 Differenzierbarkeitsfragen bei 2-dimensionalen Schiebe-Ebenen	41
4.1 Definition und allgemeine Erkenntnisse	41
4.2 Differenzierbare Karten für Schiebe-Ebenen	46
4.3 Eine Familie differenzierbarer affiner Schiebe-Ebenen	51
4.3.1 Der Einfluss der Störfunktion α auf die Differenzierbarkeit der projek-	
tiven Ebene	60
5 Differenzierbarkeit bei 2-dimensionalen Schellhammer-Ebenen	75
5.1 Definition und allgemeine Erkenntnisse	75
5.2 Eigenschaften differenzierbarer Schellhammer-Ebenen	81
5.3 Der generische Fall $h'(0) \neq 0$	91
Anhang	121
A Geometrische Herleitung der glatten Familie aus Lemma 4.22	123
B Ein „Scheibenmodell“ für 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen	127



Einleitung

Viele, ja vielleicht sogar die meisten Objekte in der Mathematik tragen mehr interessante Strukturen als die, die den Betrachter gerade unmittelbar interessieren. Viele Gruppen zum Beispiel tragen ganz natürlich auch Vektorraumstrukturen, Topologien oder sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dieser Umstand allein wäre wenig interessant, wenn sich die unterschiedlichen Strukturen des einen Objekts nicht untereinander vertragen würden, wie zum Beispiel skalare Operationen, die stetig oder Gruppenhomomorphismen oder beides sind, Gruppenmultiplikationen, die stetig oder differenzierbar sind.

Auch die Geometrie ist da keine Ausnahme. Die klassische projektive Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$, deren affine Ableitung in der Schule als solche de facto meist rein inzidenzgeometrisch betrachtet wird, trägt zum Beispiel ganz natürlich eine Topologie (die in der Schule, wenn überhaupt, eher unterschwellig ins Spiel kommt). Überhaupt ist die Verquickung von Inzidenzgeometrie mit topologischen Strukturen inzwischen zu einem recht umfangreichen Gebiet geworden (wo übrigens wieder ganz natürlich algebraische Strukturen auftauchen).

Die Verträglichkeit der Strukturen äußert sich im Bereich der topologischen Geometrie (meist) darin, dass die Punkt- und Geradenmengen eine Topologie tragen und die geometrischen Operationen (in der Regel „Schneiden von Geraden“ und „Verbinden von Punkten“) stetig erfolgen sollen. Eine reiche Quelle an Informationen über kompakte projektive (und auch allgemeinere) topologische Ebenen ist zum Beispiel (SBG⁺95).

Doch man muss nicht bei topologischen Strukturen aufhören. Viele topologische Ebenen sind lokal homöomorph zu \mathbf{R}^n für ein geeignetes $n \in \mathbf{N}$. Die Frage ist also ganz natürlich, ob sich solche Ebenen auch als differenzierbare Ebenen erkennen lassen (wo analog zum topologischen Fall die Punkt- und Geradenmenge differenzierbare Mannigfaltigkeiten sein sollen, so dass Schneiden und Verbinden jeweils differenzierbar ist). Bei der klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ ist dies zum Beispiel ganz natürlich gegeben. Genaue Definitionen und erste allgemeine Erkenntnisse werden in Kapitel 2 zusammengefasst. Eine umfangreiche Quelle hierzu ist die Habilitationsschrift von Richard Bödi (Böd95).

Aber im Gegensatz zur topologischen Geometrie ist es bei differenzierbaren projektiven Ebenen nicht so leicht, Beispiele zu finden. Zunächst einmal sind die klassischen Ebenen über den reellen Zahlen, den komplexen Zahlen, den Quaternionen und den Oktaven differenzierbare projektive Ebenen. Dann gibt eine Konstruktion von Otte, die sehr starre Beispiele erzeugt (für die nicht klar ist, ob sie nicht-triviale Automorphismen zulassen; siehe Kapitel 3 und insbesondere Abschnitt 3.1). Schließlich ist noch eine Konstruktion von B. Segre bekannt, von der Immervoll bewiesen hat, dass sie zu differenzierbaren projektiven Ebenen führt – dazu gleich mehr.

Im Gegensatz zu topologischen Ebenen, wo sich aus einer lokalkompakten, zusammenhängenden affinen Ebene durch Übergang zum projektiven Abschluss eine topologische projektive Ebene gewinnen lässt, gibt es differenzierbare affine Ebenen, deren projektiver

Abschluss *nicht* differenzierbar ist. Eine Familie von Beispielen solcher Ebenen soll in Kapitel 4, insbesondere Abschnitt 4.3, vorgestellt werden.

Auf der Suche nach Beispielen differenzierbarer projektiver Ebenen bieten sich nun zwei verschiedene Vorgehensweisen an.

Da sich bei einer jeden differenzierbaren Ebene die Fahnenmenge als Untermannigfaltigkeit des Produkts aus Punkt- und Geradenmannigfaltigkeit darstellt, kann man versuchen, ein geeignetes Tripel von Mannigfaltigkeiten anzugeben, das eine differenzierbare projektive Ebene beschreibt. Immervoll, Löwen und Pupeza haben in (ILP10) entsprechende Bedingungen an die Mannigfaltigkeiten formuliert. Ein ganz anderes Problem ist es, diese Bedingungen zu erfüllen. Eine Möglichkeit, auf diesem Weg zum Ziel zu kommen, ist das alte Prinzip, eine vorhandene Struktur leicht zu stören oder modifizieren, so dass zwar die grundlegenden Eigenschaften erhalten bleiben, das neue Objekt aber nicht mehr isomorph zum alten ist. Immervoll verwendet in (Imm03) diesen Ansatz, um zu beweisen, dass es sich bei der von B. Segre angegebenen Konstruktion in der Tat um differenzierbare projektive Ebenen handelt. Etwas konkreter wird ausgegangen von den klassischen projektiven Ebenen über einem Körper $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}\}$. Die Punktmenge wird dabei beschrieben als die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von \mathbf{K}^3 , die Geraden lassen sich als eindimensionale Unterräume im Dualraum beschreiben. Die Inzidenz wird dann durch Annullieren beim Einsetzen beschrieben. Oder, anders ausgedrückt, man erhält die Punktreihe einer Geraden als volles Urbild der 0 unter einer differenzierbaren Abbildung. Eine geeignete Modifikation dieser differenzierbaren Abbildung führt dann zu einer differenzierbaren projektiven Ebene. Im Fall der Konstruktion von B. Segre hat Immervoll nachgewiesen, dass die Automorphismengruppe relativ groß ist, das heißt topologische Dimension ≥ 1 hat. Im Allgemeinen wird jedoch bei einem solchen Beispiel, das durch Angabe eines Mannigfaltigkeiten-Tripels beschrieben ist, die Frage nach der geometrischen Struktur schwer zu beantworten sein. Das heißt, welche Automorphismen besitzt die Ebene, wie ist sie gegebenenfalls in bestehende Klassifikationen einzuordnen und als Abwandlung davon die vielleicht entscheidende Frage: Ist dieses Beispiel dann wirklich ein neues, bislang unbekanntes Beispiel einer differenzierbaren Ebene?

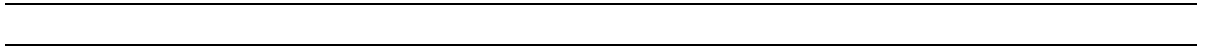
Die andere Möglichkeit – und sie soll in dieser Arbeit verfolgt werden – besteht darin, bekannte topologische Ebenen daraufhin zu untersuchen, ob sie mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden können, so dass Schneiden und Verbinden differenzierbar wird. Lokalkompakte zusammenhängende topologische projektive Ebenen mit großer Automorphismengruppe lassen sich bezüglich der Dimension und Struktur der Automorphismengruppe klassifizieren. In diesem Rahmen hat Bödi in seiner Habilitationsschrift (Böd95) schon einige Klassen aufgeführt, welche nicht differenzierbar sein können (siehe Zusammenfassung in Satz 3.6 auf Seite 33). In dieser Arbeit sollen Ebenen untersucht werden, deren Punkt- und Geradenraum jeweils die Dimension 2 besitzt. Diese Ebenen sollen kurz als 2-dimensionale Ebenen bezeichnet werden. Solche 2-dimensionale Ebenen mit einer mindestens 2-dimensionalen Automorphismengruppe sind vollständig klassifiziert (siehe die Zusammenfassung der Klassifikation 3.17 in Abschnitt 3.3, Seite 35f). Bödi benutzt diese Klassifikation, um zu beweisen, dass – die klassische Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ ausgenommen – die 2-dimensionalen Ebenen mit mindestens 3-dimensionaler Automorphismengruppe nicht differenzierbar sind.

Es bleiben also auf der Suche nach 2-dimensionalen differenzierbaren projektiven Ebenen die Familien mit 2-dimensionaler Automorphismengruppe zu untersuchen. In dieser Arbeit soll dies für eine spezielle Familie von 2-dimensionalen Schiebe-Ebenen (Kapitel 4) und bei 2-dimensionalen Schellhammer-Ebenen (Kapitel 5) durchgeführt werden.

Dabei wollen wir einerseits sehen, wie ausgehend von der Wirkung der Automorphismengruppe, die eine Lie-Gruppe ist und differenzierbar auf einer differenzierbaren Ebene wirkt, eine differenzierbare Struktur auf Teilen der Ebene zu gewinnen ist. Eine differenzierbare Struktur für die ganze Ebene soll dann mit Hilfe der geometrischen Operationen Schneiden und Verbinden sowie unter Zuhilfenahme einer Polarität konstruiert werden. Wir werden sehen, welche Schwierigkeiten dabei auftreten (die sich oft, aber nicht immer mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen lösen lassen).

Nachdem die differenzierbare Struktur konstruiert ist, die eine differenzierbare Ebene notwendigerweise tragen muss, ist noch zu prüfen, ob sich die geometrischen Strukturen mit dieser differenzierbaren Struktur vertragen. Zunächst wird gezeigt, dass die Punktreihen von Geraden und dual dazu die Geradenbüschel Untermannigfaltigkeiten von Punkt- beziehungsweise Geradenmannigfaltigkeiten sind. Anstatt die Differenzierbarkeit von Schneiden und Verbinden durch direkte Rechnungen zu überprüfen, was in der Regel sehr mühsam ist, wird hierzu ein Werkzeug eingesetzt, welches Peter Maier in seiner Dissertation (Mai99) bereitgestellt hat, nämlich die Argumentation mit Hilfe von differenzierbaren Familien von Untermannigfaltigkeiten (siehe auch Proposition 1.22).

Insgesamt ergibt sich, dass sich unter den untersuchten Ebenen keine nicht-klassische differenzierbare projektive Ebene findet. Es ist also nach wie vor ein offenes Problem, ob es nicht-klassische 2-dimensionale differenzierbare projektive Ebenen mit 2-dimensionaler Automorphismengruppe gibt.



1 Differentialtopologische Begriffe und Hilfsmittel

1.1 Grundlegende Notationen aus der klassischen Analysis

In diesem Abschnitt soll die verwendete Notation erläutert und einige aus der einschlägigen Literatur (zum Beispiel (Heu01), (Heu08), (Die85), (Hil01), (Hil02)) bekannte Ergebnisse aus der klassischen Analysis, die im weiteren Verlauf von Relevanz sind, angegeben werden.

Zunächst soll festgehalten werden, dass für diese Arbeit die natürlichen Zahlen \mathbf{N} die 0 nicht enthalten.

Ist $U \subseteq T$ eine offene Menge eines topologischen Raums T , so soll dies mit $U \overset{\circ}{\subseteq} T$ bezeichnet werden.

In dieser Arbeit sollen Koordinatentupel, sprich Elemente, von \mathbf{R}^n als Zeilenvektoren geschrieben werden. Dies hat zur Folge, dass die Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen von rechts operieren müssen. Es ist deshalb nur konsequent, lineare Abbildungen und damit die Ableitung einer Funktion $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ mit $m, n \in \mathbf{N}$, die ja auch nur eine lineare Abbildung ist, von rechts operieren zu lassen. Andererseits ist es aber sehr ungewohnt, klassische Analysis in \mathbf{R} mit von rechts operierenden Funktionen zu betreiben. Um kenntlich zu machen, wann die Operation von rechts und wann von links erfolgt, soll die folgende Konvention befolgt werden:

Funktionen, die von links operieren, werden durch Frakturbuchstaben beschrieben. Anwenden der Funktion f auf ein Element x des Definitionsbereichs wird durch „ $f(x)$ “ bezeichnet; die Komposition „ $f \circ g$ “ (beziehungsweise „ $(f \circ g)(x)$ “, angewendet auf x) ist als „ f nach g “ zu lesen. In der Regel soll dieser Fall bei Funktionen $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ verwendet werden.

Ansonsten soll die Operation von rechts erfolgen. Das Anwenden einer Funktion φ auf ein Element x soll dann in Exponentialschreibweise „ x^φ “ oder wie folgt „ $x \cdot \varphi$ “ geschehen. Die Komposition $\varphi\psi$ ist dann als „zuerst φ dann ψ “ zu lesen; angewendet auf ein Element wird dies zu „ $x^{\varphi\psi}$ “ beziehungsweise „ $x \cdot \varphi\psi$ “.

Ist $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung, dann soll f^\leftarrow das **volle Urbild** beschreiben, das heißt, wir erhalten eine Abbildung in die Potenzmenge M^\wp durch $f^\leftarrow: N \rightarrow M^\wp: y \mapsto \{x \in M \mid x^f = y\}$. Auch diese Abbildung soll nach obigen Regeln verwendet werden.

Unter der **Ableitung** $D_{x_0} f$ einer Funktion $f: \mathbf{R}^m \overset{\circ}{\supseteq} U \rightarrow \mathbf{R}^n$ an der Stelle $x_0 \in U$ soll diejenige lineare Abbildung verstanden werden, die im Sinne der Taylor-Entwicklung die Funk-

tion f linear approximiert, so dass lax gesprochen

$$x \cdot f \approx x_0 \cdot f + (x - x_0) \cdot D_{x_0} f$$

gilt.

Eine Funktion $f: \mathbf{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathbf{R}^n$ heißt **differenzierbar an der Stelle** $x_0 \in U$, wenn die Ableitung $D_{x_0} f$ existiert. Sie heißt **differenzierbar**, wenn sie an allen Stellen $x_0 \in U$ differenzierbar ist.

Für eine Funktion $f: \prod_{j=1}^n \mathbf{R}^{k_j} \supseteq U \rightarrow \mathbf{R}^m$ und $1 \leq i \leq n$ bezeichnet $\partial_{i;x} f$ die **partielle Ableitung** nach dem i -ten Argument an der Stelle $x \in U$. Ist genauer $x = (x_1, \dots, x_n)$ und

$$f_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}^i: \mathbf{R}^{k_i} \rightarrow \mathbf{R}^m: \xi \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot f,$$

dann ist $\partial_{i;x} f := D_{x_i} f_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}^i$. Sehr häufig begegnet einem dies für den Fall $k_i = 1$ für $1 \leq i \leq n$ und $m = 1$. In Anlehnung an die übliche „f'“-Notation soll dabei auch für $f: \mathbf{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbf{R}$ die Schreibweise $\partial_i f(x)$ für die partielle Ableitung von f nach dem i -ten Argument an der Stelle x verwendet werden.

Ist $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n: x \mapsto (x \cdot f_1, \dots, x \cdot f_n)$ differenzierbar, so ist für $x_0 \in \mathbf{R}^m$ die **Jacobi-Matrix** $J_{x_0} f$ gegeben durch

$$J_{x_0} f = \begin{pmatrix} \partial_{1;x_0} f_1 & \cdots & \partial_{1;x_0} f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m;x_0} f_1 & \cdots & \partial_{m;x_0} f_n \end{pmatrix}.$$

Wie gewohnt sei die Ableitung $D_{x_0} f$ mit der zugehörigen Jacobi-Matrix $J_{x_0} f$ identifiziert; es soll also der Bequemlichkeit halber die Matrix $J_{x_0} f$ mit der Abbildung $D_{x_0} f: x \mapsto x \cdot (J_{x_0} f)$ gleichgesetzt werden.

Ist $f: \mathbf{R} \supseteq U \rightarrow \mathbf{R}$, so soll auch die übliche Bezeichnung „f'“ für die Ableitung verwendet werden. Und zwar ist $f': x \mapsto f'(x)$ mit $f'(x) = J_x f$. Die m -te Ableitung von f für $m \in \mathbf{N}$ soll mit $f^{(m)}$ bezeichnet werden.

1.1 Proposition (Kettenregel): Es seien $f: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^m$ und $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$D_x (fg) = (D_x f)(D_{x \cdot f} g)$$

und für die zugehörigen Jacobi-Matrizen

$$J_x (fg) = (J_x f) \cdot (J_{x \cdot f} g).$$

1.2 Bemerkung: Die Reihenfolge in der Notation der Ableitungen passt also ganz direkt zur Reihenfolge der zugehörigen Jacobi-Matrizen. Bei einer Operation der linearen Abbildungen von links hätte die Kettenregel die Form $D_x (g \circ f) = (D_{f(x)} g) \circ (D_x f)$ gehabt. Behält man die Verwendung von Zeilenvektoren bei, so dreht sich damit die Reihenfolge in der Notation der Abbildungen im Vergleich zur Reihenfolge der zugehörigen Jacobi-Matrizen um.

1.3 Proposition: Ist die stetige Abbildung $f: \mathbf{R}^m \overset{\circ}{\supseteq} U \rightarrow \mathbf{R}^n$ gegeben, so ist f genau dann stetig differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und alle $1 \leq j \leq m$ die partiellen Ableitungen $\partial_{j;x} f$ existieren und stetig von x abhängen, das heißt, die durch $x \mapsto \partial_{j;x} f$ gegebenen Abbildungen sind stetig (der Bildbereich ist dabei die Menge der linearen Abbildungen $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, welche man getrost mit \mathbf{R}^n versehen mit der Standardtopologie identifizieren kann).

Als ein Korollar aus dem Mittelwertsatz (zum Beispiel (Hil01, 3.3, Korollar 6)) kann man folgende nützliche Erkenntnis gewinnen:

1.4 Proposition: Sei $f: \mathbf{R} \overset{\circ}{\supseteq} (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ stetig und stetig differenzierbar auf $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Außerdem existiere $\lim_{x \rightarrow x_0} D_x f$. Dann ist f stetig differenzierbar auf (a, b) und es gilt $D_{x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} D_x f$.

Für eine r -mal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbf{R}^m \overset{\circ}{\supseteq} U \rightarrow \mathbf{R}^n$, wobei $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, soll die Bezeichnung \mathcal{C}^r -Funktion verwendet werden; die Menge der entsprechenden \mathcal{C}^r -Funktionen sei mit $\mathcal{C}^r(U, \mathbf{R}^n)$ bezeichnet. Dabei heißt r **Differenzierbarkeitsgrad**.

Vielleicht das wichtigste Hilfsmittel in der Differentialrechnung ist das folgende:

1.5 Proposition (Satz über implizite Funktionen): Es sei $U \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m$ und $f \in \mathcal{C}^r(U, \mathbf{R}^m)$. Weiter sei $(x_0, y_0) \in U$ mit $(x_0, y_0) \cdot f = 0$ und $\partial_{2;(x_0, y_0)} f \in \text{GL}_m(\mathbf{R})$.

Dann gibt es eine offene Umgebung $x_0 \in V \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{R}^l$ und eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $g \in \mathcal{C}^r(V, \mathbf{R}^m)$, so dass $x_0 \cdot g = y_0$ und $(x, x \cdot g) \cdot f = 0$ für alle $x \in V$. Weiter gilt dort jeweils

$$D_x g = - \left(\partial_{1;(x, x \cdot g)} f \right) \left(\partial_{2;(x, x \cdot g)} f \right)^{-1}.$$

Ein wichtiger Spezialfall davon ist:

1.6 Proposition (Satz über die Umkehrfunktion): Es sei $U \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^r(U, \mathbf{R}^n)$. Weiter sei $x_0 \in U$ und $D_{x_0} f \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$.

Dann gibt es eine Umgebung $x_0 \in V \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{R}^n$, so dass für $\tilde{f} := f|_V^{V, f}$ die Inverse \tilde{f}^{-1} existiert und $\tilde{f}^{-1} \in \mathcal{C}^r(V, f, V)$ ist. Weiter gilt für alle $y = x^f \in V^f$ dann die Beziehung

$$D_y (f^{-1}) = (D_x f)^{-1}.$$

1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildungen

Es werden die üblichen Definitionen und Begrifflichkeiten aus der Differentialtopologie und der Theorie der Lie-Gruppen verwendet, siehe zum Beispiel (Hir94), (Kos93), (BJ73), (MRD92), (Bre93), (OV90), (War83). Der Notation und der Bequemlichkeit halber seien einige Definitionen und Werkzeuge aber noch einmal explizit angegeben.

1.7 Definition: Sei \mathfrak{M} eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (ein separabler Hausdorffraum, der lokal homöomorph zu \mathbf{R}^n ist). Sei weiter $\{\mathfrak{U}_j \subseteq \mathfrak{M} \mid j \in J\}$, wobei J eine geeignete Indexmenge ist, eine offene Überdeckung von \mathfrak{M} , das heißt $\mathfrak{M} = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{U}_j$ und \mathfrak{U}_j ist offen für alle $j \in J$. Außerdem gebe es eine Familie von Abbildungen $K = \{\chi_j: \mathfrak{U}_j \rightarrow \mathbf{R}^n \mid j \in J\}$, so dass für alle $j \in J$ die Abbildung $\chi_j \big|_{\mathfrak{U}_j}^{\mathfrak{U}_j, \chi_j}$ ein Homöomorphismus ist. Eine jede solche Abbildung χ_j heißt **Karte** von \mathfrak{M} , der Definitionsbereich \mathfrak{U}_j heißt **Kartengebiet** der Karte χ_j ; es soll auch die Bezeichnung (χ_j, \mathfrak{U}_j) für die Karte verwendet werden. Überlappen sich die Kartengebiete zweier Karten (χ_j, \mathfrak{U}_j) und (χ_k, \mathfrak{U}_k) , also $\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k \neq \emptyset$, so heißt

$${}_j \chi_k = \left(\chi_j \big|_{\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k} \right)^{-1} \left(\chi_k \big|_{\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k} \right) : \mathbf{R}^n \supseteq (\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k)^{\chi_j} \rightarrow (\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k)^{\chi_k} \subseteq \mathbf{R}^n$$

Kartenwechsel. Die Familie von Karten K heißt **\mathcal{C}^r -differenzierbarer Atlas**, wenn alle Kartenwechsel \mathcal{C}^r -differenzierbar sind. Ein maximaler \mathcal{C}^r -Atlas K' (das ist ein Atlas, der *alle* Abbildungen enthält, die differenzierbare Kartenwechsel liefern) heißt **\mathcal{C}^r -differenzierbare Struktur**. Das Paar (\mathfrak{M}, K') , bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} und einer \mathcal{C}^r -Struktur K' , heißt **\mathcal{C}^r -differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

1.8 Bemerkung: Statt „ \mathcal{C}^∞ “ verwendet man auch gerne das Synonym **glatt**.

Wenn im Folgenden von „differenzierbar“ die Rede ist, so soll darunter in der Regel \mathcal{C}^r -differenzierbar verstanden werden für einen beliebigen aber festen Differenzierbarkeitsgrad $r \geq 1$. Auch der Begriff „Mannigfaltigkeit“ soll synonym mit „differenzierbare Mannigfaltigkeit“ verwendet werden. Außerdem wird in der Notation meist die Angabe der differenzierbaren Struktur unterdrückt. Gegebenenfalls kann, wenn nicht näher erläutert, auch aus dem Kontext auf einen eventuell abweichenden Differenzierbarkeitsgrad geschlossen werden.

Um die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit zu bestimmen, reicht es schon aus, einen konkreten Atlas anzugeben.

Aus einer Karte $\chi_j: \mathfrak{U}_j \rightarrow \mathbf{R}^n$ kann man durch Einschränken auf offene Teilmengen $\mathfrak{U}'_j \subseteq \mathfrak{U}_j$ weitere Karten gewinnen. Der Übersichtlichkeit halber werden diese aber in der Regel mit der ursprünglichen Karte identifiziert, wie auch überhaupt mit den Definitionsbereichen (und der Angabe derselben) im Sinne der Übersichtlichkeit gerne lax umgegangen wird; so reicht es zum Beispiel in der Regel einen Kartenwechsel in der Form „ ${}_j \chi_k = \chi_j^{-1} \chi_k$ “ anzugeben – die nötigen Restriktionen und Co-Restriktionen ergeben sich üblicherweise aus dem Kontext.

1.9 Notation: Bezüglich einer genauen Definition von **Tangentialraum** und **Tangentialbündel** sei hiermit auf die einschlägige Literatur (Hir94), (Kos93), (BJ73), (MRD92), (Bre93) verwiesen. Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} sei mit $T\mathfrak{M}$ bezeichnet, der Tangentialraum an einer Stelle $p \in \mathfrak{M}$ mit $T_p \mathfrak{M}$; ist dabei $\pi_{\mathfrak{M}}: T\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ die Bündelprojektion, so gilt $T_p \mathfrak{M} = p^{\pi_{\mathfrak{M}}^{-1}}$.

1.10 Definition: Es seien $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ und $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Eine Abbildung $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt **(lokal) \mathcal{C}^r -differenzierbar an der Stelle $x \in \mathcal{M}$** , wenn für Karten $(\alpha, \mathcal{U}) \in \mathcal{K}$ mit $x \in \mathcal{U}$ und $(\lambda, \mathcal{V}) \in \mathcal{L}$ mit $\mathcal{U}^f \subseteq \mathcal{V}$ die sogenannte **lokale Repräsentation** $\alpha^{-1} f \lambda$ an der Stelle x^α eine \mathcal{C}^r -differenzierbare Abbildung ist.

Eine Abbildung $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt **\mathcal{C}^r -differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle $x \in \mathcal{M}$ lokal \mathcal{C}^r -differenzierbar ist.

Die **Kategorie der \mathcal{C}^r -differenzierbaren Mannigfaltigkeiten** besitzt \mathcal{C}^r -differenzierbare Mannigfaltigkeiten als Objekte und \mathcal{C}^r -differenzierbare Abbildungen als Morphismen. Die Menge der Morphismen von \mathcal{M} nach \mathcal{N} sei mit $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichnet. Ein Isomorphismus dieser Kategorie heißt **Diffeomorphismus**.

Ist $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine differenzierbare Abbildung, so sei das **Differential** mit Df bezeichnet, das ist diejenige Abbildung zwischen Tangentialbündeln, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{Df} & T\mathcal{N} \\ \pi_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{N}} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \end{array}$$

kommutativ ergänzt. Als Einschränkung des Differential erhält man dann das **lokale Differential** oder die **Ableitung** von f an der Stelle $x \in \mathcal{M}$ durch $D_x f: T_x \mathcal{M} \rightarrow T_x \mathcal{N}$; dies ist eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen.

Ist die lineare Abbildung $D_x f$ injektiv, so heißt f **immersiv bei x** , ist $D_x f$ surjektiv, so heißt f **submersiv bei x** . Ist f immersiv für alle Stellen $x \in \mathcal{M}$, so heißt f **Immersion**, ist f submersiv für alle Stellen $x \in \mathcal{M}$, so heißt f **Submersion**. Eine Immersion f heißt **Einbettung**, wenn $f|_{\mathcal{M}^f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^f \subseteq \mathcal{N}$ ein Homöomorphismus ist. Das Bild $\mathcal{M}^f \subseteq \mathcal{N}$ einer Einbettung f heißt **(differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}** ; in solch einem Fall sprechen wir auch davon, dass die differenzierbare Struktur von \mathcal{M} mit der von \mathcal{N} **verträglich** ist.

Seien $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ und $g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Man sagt f und g liegen **transversal**, wenn $T_x \mathcal{L} \cdot Df + T_y \mathcal{M} \cdot Dg = T_{x^f = y^g} \mathcal{N}$, wann immer $x^f = y^g$ gilt. Denkt man sich eine Untermannigfaltigkeit durch die zugehörige Einbettung repräsentiert, lässt sich der Begriff in natürlicher Weise auf zwei Untermannigfaltigkeiten oder eine Untermannigfaltigkeit und eine Abbildung ausdehnen.

1.11 Bemerkung: In natürlicher Weise ist $(\mathbf{R}^n, \{\text{id}\})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Der Begriff des „lokalen Differential“ fällt dann mit der „Ableitung“ im Sinne der klassischen Analysis zusammen. Daher stellt es auch kein Problem dar, beidesmal dasselbe Symbol und auch dieselbe Bezeichnung dafür zu verwenden.

Ebenso natürlich ist jede nicht leere offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit eine Untermannigfaltigkeit. Die differenzierbare Struktur erhält man durch Einschränken, die Einbettung durch die Inklusion.

Ist $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine bei x differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten mit der lokalen Repräsentation $\alpha^{-1} f \lambda$ an der Stelle x , so ist $D_{x,x}(\alpha^{-1} f \lambda)$ die lokale Repräsentation von $D_x f$ mit zugehöriger Jacobi-Matrix $J_{x,x}(\alpha^{-1} f \lambda)$. Die Eigenschaften von f und

Df im Sinne der Differentialtopologie werden durch alle ihre lokalen Repräsentationen bestimmt. Es sind also in der Praxis am konkreten Beispiel genau diese lokalen Repräsentationen zu untersuchen, üblicherweise anhand der Jacobi-Matrizen.

1.12 Proposition (Kettenregel): Es seien $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ und $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ differenzierbare Abbildungen zwischen den Mannigfaltigkeiten \mathcal{L} , \mathcal{M} und \mathcal{N} . Dann gilt

$$D(fg) = (Df)(Dg)$$

und

$$D_x(fg) = (D_x f)(D_{x.f} g).$$

1.13 Definition: Ist $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ eine Familie von Mannigfaltigkeiten und $f: \prod_{j=1}^n \mathcal{M}_j \rightarrow \mathcal{N}$ eine Abbildung in die Mannigfaltigkeit \mathcal{N} . Für $1 \leq i \leq n$ bezeichnet $\partial_{i;x} f$ die **partielle Ableitung** nach dem i -ten Argument an der Stelle $x \in \prod_{j=1}^n \mathcal{M}_j$. Ist genauer $x = (x_1, \dots, x_n)$ und

$$f_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}^i: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{N}: \xi \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n).f,$$

dann ist $\partial_{i;x} f := D_{x_i} f_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}^i$.

1.14 Proposition (Satz über implizite Funktionen): Es sei $\mathcal{L} \times \mathcal{M}$ das Produkt zweier Mannigfaltigkeiten, weiter sei \mathcal{N} eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{L} \times \mathcal{M}, \mathcal{N})$. Weiter sei $(x_0, y_0) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$ und $\partial_{2;(x_0, y_0)} f \in GL_n(\mathbf{R})$.

Dann gibt es eine offene Umgebung $x_0 \in \mathfrak{V} \subseteq \mathring{\mathcal{L}}$ und eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $g \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{V}, \mathcal{M})$, so dass $x_0.g = y_0$ und $(x, x.g).f = (x_0, y_0).f$ für alle $x \in \mathfrak{V}$. Weiter gilt dort jeweils

$$D_x g = - \left(\partial_{1;(x, x.g)} f \right) \left(\partial_{2;(x, x.g)} f \right)^{-1}.$$

Insbesondere ist die Menge $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}.g) \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{M}$ eine \mathcal{C}^r -Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{L} \times \mathcal{M}$.

1.15 Bemerkung: Formulierungen des *Satzes über implizite Funktionen* und des *Satzes über die inverse Funktion* wie in Proposition 1.5 und Proposition 1.6 geschehen sind allgemein üblich. Oft werden auch Banachräume statt der hier angegebenen reellen Vektorräume verwendet. Eine Formulierung bezüglich Mannigfaltigkeiten ist weitaus seltener zu finden, zum Beispiel aber in (MRD92), dort sogar noch sehr viel allgemeiner für Mannigfaltigkeiten über Banachräumen mit Ecken.

1.16 Definition: Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} Mannigfaltigkeiten. Sei weiter $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Eine Stelle $x \in \mathcal{M}$ heißt **reguläre Stelle**, wenn f submersiv bei x ist, ansonsten heißt x **kritische Stelle** und $x.f$ heißt **kritischer Wert**. Ist $y \in \mathcal{N}$ kein kritischer Wert, so ist es ein **regulärer Wert**.

1.17 Proposition (Satz über reguläre Werte): Sei \mathcal{M} eine \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbf{N}$ und \mathcal{N} eine \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbf{N}$. Sei weiter $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Ist $y \in \mathcal{N}$ ein regulärer Wert, dann ist das volle Urbild $y^{f^{-1}}$ von y unter f eine \mathcal{C}^r -Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M} der Dimension $m - n$.

1.18 Definition: Es sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit und G eine **Lie-Gruppe**, also eine Gruppe, die gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so dass die Gruppenoperationen – Verknüpfung und Inversion von Gruppenelementen – differenzierbar sind.

Eine (**rechts-**) **Wirkung** von G auf \mathcal{M} ist eine \mathcal{C}^r -differenzierbare Abbildung

$$\omega: \mathcal{M} \times G \rightarrow \mathcal{M}: (x, g) \mapsto (x, g)^\omega =: x \cdot g =: x^g$$

mit

$$(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh) \quad \text{und} \quad x \cdot e = x$$

für alle $x \in \mathcal{M}$ und alle $g, h \in G$, dabei bezeichne e das Neutralelement der Lie-Gruppe G .

Sei $x \in \mathcal{M}$. Dann heißt $G_x := \{g \in G \mid x \cdot g = x\} \leq G$ **Stabilisator** von x in G .

Die Wirkung heißt **transitiv**, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt, dass $x \cdot G = \mathcal{M}$. Sie heißt **regulär** oder **scharf einfach transitiv**, wenn zusätzlich für eines und dann alle $x \in \mathcal{M}$ gilt, dass $G_x = \{e\}$.

1.19 Proposition: Sei G eine Lie-Gruppe und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann trägt der **Faktorraum der Rechtsnebenklassen** $H \backslash G$ genau eine differenzierbare Struktur so, dass $G \rightarrow H \backslash G: g \mapsto Hg$ eine Submersion ist.

Beweis: Siehe (MRD92, Proposition 6.2.1), (OV90, Chapter 1, Theorem 3), (War83, Theorem 3.58). □

1.20 Proposition: Sei G eine Lie-Gruppe, die transitiv auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} wirkt. Dann ist für beliebige $x \in \mathcal{M}$

$$G_x \backslash G \rightarrow \mathcal{M}: G_x g \mapsto x \cdot g$$

ein Diffeomorphismus.

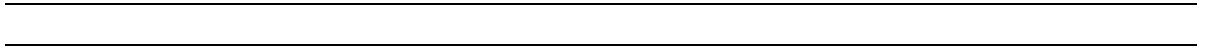
Beweis: Siehe (MRD92, Proposition 6.2.13), (OV90, Chapter 1, Theorem 4), (War83, Theorem 3.62). □

1.21 Definition: Es seien \mathcal{A}, \mathcal{M} und \mathcal{G} jeweils \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten. Eine Familie $(\mathcal{G}_a)_{a \in \mathcal{A}}$ heißt **\mathcal{C}^r -differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{M}** , wenn es eine \mathcal{C}^r -Abbildung $\alpha: \mathcal{A} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$ gibt, so dass für alle $a \in \mathcal{A}$ die Abbildung $(a, \bullet)^\alpha: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}: p \mapsto (a, p)^\alpha$ eine \mathcal{C}^r -Einbettung ist, sowie $(a, \mathcal{G})^\alpha = \mathcal{G}_a$ gilt.

Man sagt, dass zwei differenzierbare Familien von Untermannigfaltigkeiten $(\mathcal{G}_a)_{a \in \mathcal{A}}$ und $(\mathcal{H}_b)_{b \in \mathcal{B}}$ **transvers** zueinander liegen, wenn für alle Paare $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ der Schnitt von \mathcal{G}_a und \mathcal{H}_b einelementig und transversal ist. In diesem Fall ist die Abbildung $\wedge: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}: (a, b) \mapsto \mathcal{G}_a \cap \mathcal{H}_b$ definiert.

1.22 Proposition (Peter Maier): Gegeben sind die \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ und \mathcal{M} . Weiter seien $(\mathcal{G}_a)_{a \in \mathcal{A}}$ sowie $(\mathcal{H}_b)_{b \in \mathcal{B}}$ differenzierbare Familien von Untermannigfaltigkeiten der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Liegen $(\mathcal{G}_a)_{a \in \mathcal{A}}$ und $(\mathcal{H}_b)_{b \in \mathcal{B}}$ transvers zueinander, dann ist die Abbildung $\wedge: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$ differenzierbar.

Beweis: Siehe (Mai99, Corollary 5.1.9). Die Aussage wird dort zwar unter Verwendung von \mathcal{C}^∞ -Strukturen formuliert, der Beweis des zu Grunde liegenden Lemmas 5.1.7 verwendet allerdings nur Tangentialräume und den Satz über implizite Funktionen (Proposition 1.14), das heißt, die Aussage ist auch für beliebige Differenzierbarkeitsgrade gültig. □



2 Differenzierbare Ebenen

In diesem Kapitel sollen Definitionen und Grundlagen differenzierbarer Ebenen behandelt werden, so weit sie im weiteren Verlauf von Interesse sind. Die Ergebnisse sind dabei im Wesentlichen in (Böd95) beziehungsweise (Böd97) und (Böd98) zu finden. Hierzu noch die folgende Anmerkung: In diesen Quellen werden die Ergebnisse für den Fall von \mathcal{C}^∞ -Differenzierbarkeit formuliert, die Beweise der hier verwendeten Ergebnisse benutzen aber nur differentialtopologische Hilfsmittel, die auch im Fall von \mathcal{C}^r -Differenzierbarkeit für $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ beziehungsweise in Proposition 2.11, 2.13 und 2.14 für $2 \leq r \leq \infty$ gelten. Dass hier lediglich \mathcal{C}^r -Differenzierbarkeit gefordert und benutzt wird, stellt also kein Problem dar.

2.1 Definitionen: differenzierbare stabile, affine, projektive Ebenen

2.1 Definition: Sei $\mathcal{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ eine Inzidenzstruktur mit **Punktmenge** \mathcal{P} , **Geradenmenge** \mathcal{L} und **Fahnenmenge** $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Sei weiter für beliebige Mengen M die **Diagonale** $\Delta_M := \{(m, m) \in M \times M \mid m \in M\}$ in $M \times M$ definiert.

Ein Element $f \in \mathcal{F}$ heißt **Fahne**, ein Element $f \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \setminus \mathcal{F}$ heißt **Antifahne**.

Ist $L \in \mathcal{L}$ eine Gerade, dann heißt $\mathcal{P}_L := \{p \in \mathcal{P} \mid (p, L) \in \mathcal{F}\}$ die **Punktreihe** von L . Ist dual dazu $p \in \mathcal{P}$, so heißt $\mathcal{L}_p := \{L \in \mathcal{L} \mid (p, L) \in \mathcal{F}\}$ das **Geradenbüschel** in p .

Eine solche Inzidenzstruktur \mathcal{R} heißt **linearer Raum**, wenn für jedes Punktepaar $(p, q) \in \mathcal{P}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{P}}$ genau eine **Verbindungsgerade** $L \in \mathcal{L}$ existiert, mit $(p, L) \in \mathcal{F} \ni (q, L)$. Die Verbindungsgerade L soll mit $p \vee q$ bezeichnet werden.

Damit kann in einem linearen Raum die **Verbindungsabbildung**

$$\vee: \mathcal{P}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{L}: (p, q) \mapsto p \vee q$$

definiert werden. Außerdem schneiden sich in einem linearen Raum zwei Geraden in höchstens einem Punkt. Mit $D_\wedge := \{(L, M) \in \mathcal{L}^2 \mid \mathcal{P}_L \cap \mathcal{P}_M \neq \emptyset\}$ erhalten wir deshalb die **Schnittabbildung**

$$\wedge: \mathcal{L}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{L}} \supseteq D_\wedge \rightarrow \mathcal{P}: (L, M) \mapsto L \wedge M := \mathcal{P}_L \cap \mathcal{P}_M.$$

Da aber nicht gefordert ist, dass sich je zwei verschiedene Geraden schneiden, ist im Allgemeinen $D_\wedge \neq \mathcal{L}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{L}}$.

Eine Menge $M \subseteq \mathcal{P}$ von Punkten heißt **kollinear**, wenn es eine Gerade $L \in \mathcal{L}$ gibt, so dass $M \subseteq \mathcal{P}_L$. Dual dazu heißt eine Menge $M \subseteq \mathcal{L}$ von Geraden **konfluent**, wenn es einen Punkt $p \in \mathcal{P}$ gibt, so dass $M \subseteq \mathcal{L}_p$.

Ein **Dreieck** ist eine Menge von drei verschiedenen Punkten, die nicht kollinear sind. Ein **Dreiseit** ist die dazu duale Figur, also eine Menge von drei verschiedenen Geraden, die nicht konfluent sind, sich aber paarweise in einem Punkt schneiden. Ein **Viereck** ist eine Menge von vier verschiedenen Punkten, von denen jede dreielementige Teilmenge ein Dreieck ist.

Da im weiteren Verlauf nur differenzierbare Ebenen von Interesse sind, sei für eine allgemeine Definition einer *stabilen Ebene* auf die Literatur (GL95) verwiesen. Stattdessen sei direkt eine *differenzierbare stabile Ebene* definiert:

2.2 Definition: Eine \mathcal{C}^r -**differenzierbare stabile Ebene** $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ ist ein linearer Raum, der außerdem die folgenden Axiome erfüllt:

(DS1) \mathfrak{P} und \mathfrak{L} sind \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten.

(DS2) Der Definitionsbereich des Schneidens $D_\wedge \overset{\circ}{\subseteq} \mathfrak{L}^2$ ist eine offene Teilmenge. Die Verbindungsabbildung \vee und die Schnittabbildung \wedge sind \mathcal{C}^r -differenzierbar.

(DS3) \mathfrak{R} enthält ein Viereck.

2.3 Definition: Eine \mathcal{C}^r -**differenzierbare projektive Ebene** $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ ist eine \mathcal{C}^r -differenzierbare stabile Ebene, für die $D_\wedge = \mathfrak{L}^2 \setminus \Delta_\mathfrak{L}$ gilt, das heißt, je zwei verschiedene Geraden haben einen eindeutigen Schnittpunkt.

2.4 Definition: Sei $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ eine \mathcal{C}^r -differenzierbare stabile Ebene. Zwei Geraden $L, M \in \mathfrak{L}$ heißen **parallel**, wenn $\mathfrak{P}_L \cap \mathfrak{P}_M = \emptyset$ oder $L = M$. Sind L und M parallele Geraden, so schreiben wir $L \parallel M$.

Eine **affine Ebene** ist eine stabile Ebene, die zusätzlich das folgende **Parallelenaxiom** erfüllt:

(P) Für alle $(p, L) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$ existiert genau eine Gerade G , so dass $(p, G) \in \mathfrak{F}$ und $G \parallel L$. Diese Gerade soll mit $G = (p, L)^\parallel$ bezeichnet werden.

Damit kann die **Parallelenabbildung** $\parallel: \mathfrak{P} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}: (p, L) \mapsto (p, L)^\parallel$ definiert werden.

Gilt in einer \mathcal{C}^r -differenzierbaren stabilen Ebene das Parallelenaxiom (P) und ist die Parallelenabbildung \mathcal{C}^r -differenzierbar, so sprechen wir von einer **\mathcal{C}^r -differenzierbaren affinen Ebene**.

2.5 Proposition: *Differenzierbare stabile, projektive beziehungsweise affine Ebenen sind insbesondere stabile, topologische projektive beziehungsweise topologische affine Ebenen.*

Damit gilt aber auch $\dim \mathfrak{P} = \dim \mathfrak{L} = 2l$ und $l \in \{1, 2, 4, 8\}$. Man sagt dann auch, die Ebene hat Dimension $2l$.

Beweis: Siehe (GL95, Theorem 3.25 & Theorem 3.29). □

2.6 Proposition: Ist $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ eine $2l$ -dimensionale differenzierbare stabile Ebene, dann ist jede Punktreihe \mathfrak{P}_L einer Gerade $L \in \mathfrak{L}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{P} und jedes Geradenbüschel \mathfrak{L}_p in einem Punkt $p \in \mathfrak{P}$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{L} ; in beiden Fällen handelt es sich um eine l -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis: Siehe (Böd95, Theorem 1.6) oder (Böd97, Theorem 2.6). □

2.7 Proposition: In einer differenzierbaren stabilen Ebene $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ sind die differenzierbaren Strukturen der Punktmenge \mathfrak{P} und der Geradenmenge \mathfrak{L} bereits durch die differenzierbaren Strukturen auf den Geradenbüscheln $\mathfrak{L}_o, \mathfrak{L}_u, \mathfrak{L}_v$ eines Dreiecks $o, u, v \in \mathfrak{P}$ und die geometrischen Operationen (Schneiden und Verbinden) von \mathfrak{R} vollständig bestimmt.

Beweis: Siehe (Böd95, Corollary 1.10) oder (Böd97, Corollary 2.10). □

2.8 Proposition: In einer differenzierbaren stabilen Ebene $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ schneiden sich die Punktfolgen von zwei verschiedenen Geraden transversal. Ebenso schneiden sich verschiedene Geradenbüschel transversal.

Beweis: Siehe (Böd95, Theorem 1.13) oder (Böd97, Theorem 2.13). □

2.9 Proposition: In einer differenzierbaren stabilen Ebene $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ ist die Fahnenmenge \mathfrak{F} eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Produktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$.

Beweis: Siehe (Böd95, Theorem 1.14) oder (Böd97, Theorem 2.14). □

2.2 Kollineationen differenzierbarer stabiler Ebenen

2.10 Definition: Eine **Kollineation** $\varphi = (\varphi_{\mathfrak{P}}, \varphi_{\mathfrak{L}})$ zwischen zwei linearen Räumen $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ und $\mathfrak{R}' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', \mathfrak{F}')$ besteht aus einem Paar bijektiver Abbildungen $\varphi_{\mathfrak{P}}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ und $\varphi_{\mathfrak{L}}: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}'$, so dass $\varphi_{\mathfrak{F}} := \varphi_{\mathfrak{P}} \times \varphi_{\mathfrak{L}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}': (p, L) \mapsto (p^{\varphi_{\mathfrak{P}}}, L^{\varphi_{\mathfrak{L}}})$ eine Abbildung ist; man sagt auch, die (Punkt-) Abbildung ist **geradentreu**. Als Kurzschreibweise soll $\varphi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ verwendet werden.

Sind $\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ und $\mathfrak{R}' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', \mathfrak{F}')$ differenzierbare stabile Ebenen und sind die Abbildungen $\varphi_{\mathfrak{P}}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ und $\varphi_{\mathfrak{L}}: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}'$ stetig, so sprechen wir von einer **stetigen Kollineation**, sind sie \mathcal{C}^r -differenzierbar, so sprechen wir von einer **\mathcal{C}^r -differenzierbaren Kollineation**.

Die **Automorphismengruppe** $\text{Aut}(\mathfrak{R})$ einer \mathcal{C}^r -differenzierbaren stabilen Ebene \mathfrak{R} besteht aus den \mathcal{C}^r -differenzierbaren Kollineationen der Ebene in sich.

2.11 Proposition: Es sei $2 \leq r \leq \infty$. Dann gilt: Jede stetige Kollineation $\varphi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ zwischen \mathcal{C}^r -differenzierbaren stabilen Ebenen ist \mathcal{C}^r -differenzierbar.

Beweis: Siehe (Böd95, Theorem 4.3) oder (Böd98, Theorem 2.3). Da das Hauptargument hier durch einen Verweis auf (BK94) erbracht wird, sei auch hier darauf hingewiesen, dass dort die Voraussetzung \mathcal{C}^∞ -differenzierbar nicht zum Tragen kommt (dafür wird im Beweis aber explizit \mathcal{C}^2 -Differenzierbarkeit verwendet; es ist jedoch nicht klar, inwieweit diese Bedingung wirklich notwendig ist). □

2.12 Bemerkung: Im Fall einer stabilen Ebene ohne Differenzierbarkeitseigenschaften soll die Gruppe der stetigen Kollineationen innerhalb der Ebene ebenfalls als Automorphismengruppe bezeichnet werden. Die vorige Proposition 2.11 zeigt auch, dass trotzdem im Allgemeinen keine Verwechslungsgefahr besteht. Einzig im Fall einer \mathcal{C}^1 -differenzierbaren Ebene ist es mangels geeigneter Beispiele oder Sätze derzeit nicht klar, ob jede stetige Kollineation auch differenzierbar ist.

2.13 Proposition: Es sei $2 \leq r \leq \infty$. Versehen mit der kompakt-offenen-Topologie ist die Automorphismengruppe Γ einer \mathcal{C}^r -differenzierbaren stabilen Ebene $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ eine Lie-Gruppe und wirkt in natürlicher Weise \mathcal{C}^r -differenzierbar jeweils auf der Punktmanifoldigkeit \mathfrak{P} , der Geradenmannigfaltigkeit \mathfrak{L} sowie der Fahnenmannigfaltigkeit \mathfrak{F} .

Beweis: Siehe (Böd95, Corollary 4.4) oder (Böd98, Theorem 2.4). □

2.14 Proposition: Eine \mathcal{C}^r -differenzierbare stabile Ebene mit $2 \leq r \leq \infty$ besitzt genau eine differenzierbare Struktur.

Beweis: Siehe (Böd95, Corollary 4.5) oder (Böd98, Theorem 2.5). □

2.15 Bemerkung: Die vorige Proposition 2.14 hat insbesondere zur Folge, dass man bei differenzierbaren Ebenen im Allgemeinen *nicht* durch Anpassen der differenzierbaren Struktur von einer \mathcal{C}^r -differenzierbaren Ebene zu einer \mathcal{C}^∞ -differenzierbaren Ebene gelangt – im Gegensatz zu rein differentialtopologischen Untersuchungen, wo dies durchaus möglich ist, siehe zum Beispiel (Hir94, Chapter 2, insbesondere Theorem 2.9).

3 Differenzierbarkeit 2-dimensionaler projektiver Ebenen

3.1 Differenzierbare projektive Ebenen

Eine umfassende Quelle und wohl *der* Ausgangspunkt heutzutage für alle Untersuchungen über differenzierbare Ebenen ist die Habilitationsschrift von Richard Bödi (Böd95). Allerdings handelt es sich nicht nur dort oft um Erkenntnisse eher theoretischer Natur. Die Suche nach Beispielen, gar nach „vernünftigen“ Beispielen (das sollen solche mit einer „großen“ Automorphismengruppe sein; groß in dem Sinne, dass sie eine topologische Dimension ≥ 1 aufweisen) ist sehr mühsam und hat bislang noch nicht viel zu Tage gefördert – im Gegensatz zu topologischen projektiven Ebenen, wo sich im Zuge einer Klassifikation nach der Dimension der Automorphismengruppe mannigfaltige Beispielfamilien finden lassen. Da jede differenzierbare projektive Ebene auch eine topologische projektive Ebene ist, muss wohl die Forderung der Differenzierbarkeit eine sehr starke Bedingung sein, die dazu führt, dass bislang nur sehr homogene oder andererseits eher starre Beispiele bekannt sind.

Die klassischen projektiven Ebenen über Divisionsalgebren $\mathbf{P}_2(\mathbf{F})$, wobei $\mathbf{F} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}\}$, sind natürlich Beispiele für differenzierbare projektive Ebenen. Sucht man einen Beweis, der tiefer geht als die allgemein feste Überzeugung, dass dabei doch wohl nichts schiefgehen könne, so wird man zum Beispiel in der Dissertation von Otte (Ott92, 8.13) fündig, welche überhaupt wichtige Beispiele bereitstellt. Oft erhält man den Beweis auch quasi als „Abfallprodukt“ bei Erkenntnissen der Form „das einzige differenzierbare Mitglied einer gewissen Familie projektiver Ebenen ist eine der klassischen Ebenen“. Auch im Zuge dieser Arbeit wird sich eine entsprechende Erkenntnis einstellen (siehe Beispiel 5.51 und Satz 5.60).

Häufiger als Beispiele zu finden, ist die Erkenntnis, dass gewisse projektive Ebenen *nicht* differenzierbar sind.

3.1 Satz (Joachim Otte): Die einzigen differenzierbaren projektiven Translationsebenen sind die klassischen (das heißt eine differenzierbare projektive Translationsebene ist isomorph zu einer der Ebenen $\mathbf{P}_2(\mathbf{F})$, wobei $\mathbf{F} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}\}$).

Beweis: Siehe (Ott92, Satz 8.10), (Ott95, Theorem 2.8). □

Bei topologischen Ebenen ist bekannt, dass jede lokalkompakte zusammenhängende affine Ebene einen kompakten projektiven Abschluss besitzt (SBG⁺95, Corollary 43.7), das heißt, sie lässt sich als Komplement einer Punktreihe in eine kompakte projektive Ebene einbetten. Dies gilt also insbesondere für differenzierbare affine Ebenen. Und hier wird ein

großer Unterschied zwischen topologischen Ebenen und differenzierbaren Ebenen deutlich: Dieser projektive Abschluss ist im Allgemeinen *nicht* differenzierbar.

3.2 Satz (Joachim Otte): Es gibt nicht-klassische differenzierbare affine Translations-ebenen der Dimension 4, 8 oder 16.

Beweis: Siehe (Ott92, Satz 6.16). □

Dass hier Dimension 2 nicht vorkommt, liegt nicht etwa daran, dass diese Dimension eine Ausnahme bezüglich der Differenzierbarkeit des projektiven Abschlusses darstellt, sondern am Mangel weiterer nicht-klassischer 2-dimensionaler Translationsebenen. Auch in Dimension 2 gibt es differenzierbare affine Ebenen, deren projektiver Abschluss nicht differenzierbar sein kann; solche Beispiele (in Form von Schiebe-Ebenen) sind in der Diplomarbeit von Stefan Immervoll (Imm98) zu finden und auch hier soll in Kapitel 4, Abschnitt 4.3 eine verwandte Konstruktion angegeben werden, die unabhängig davon entstanden ist. Dabei ist nicht das Problem, eine differenzierbare Struktur für die projektive Ebene zu finden. Im Gegenteil: Diese Beispiele lassen sich mit einer im differentialtopologischen Sinn sehr „schönen“ differenzierbaren Struktur versehen, so dass nämlich Punkt-reihen und Geradenbüschel Untermannigfaltigkeiten der Punktmannigfaltigkeit respektive Geradenmannigfaltigkeit sind, die sich untereinander auch noch transversal schneiden; beides Eigenschaften, die nach Proposition 2.6 und Proposition 2.8 notwendig, nach dem eben festgestellten aber auch nicht mehr als nur notwendig für die Differenzierbarkeit einer Ebene sind.

Zusammengefasst ergibt sich also:

3.3 Korollar: In jeder der möglichen Dimensionen 2, 4, 8 und 16 gibt es differenzierbare affine Ebenen, deren projektiver Abschluss nicht differenzierbar ist.

Die Suche nach differenzierbaren projektiven Ebenen ist also nicht so „einfach“ wie im Fall topologischer Ebenen, wo es reicht, eine entsprechende affine Ebene zu konstruieren, um durch den projektiven Abschluss eine passende projektive Ebene zu bekommen.

Die andere wichtige Frage – um der Theorie auch einen praktischen Sinn zu geben –, ob es denn überhaupt nicht-klassische differenzierbare projektive Ebenen gibt, hat ebenfalls Joachim Otte in seiner Dissertation beantwortet:

3.4 Satz (Joachim Otte): In jeder der möglichen Dimensionen 2, 4, 8 und 16 gibt es nicht-klassische differenzierbare projektive Ebenen.

Beweis: Siehe (Ott92, Satz 9.5). □

Allerdings sind dies auf Grund der Konstruktion sehr starre Ebenen: Es ist nicht klar, ob die Automorphismengruppe dieser Ebenen nichttrivial ist.

Stefan Immervoll konnte den Beweis führen, dass es auch differenzierbare projektive Ebenen mit relativ großer Automorphismengruppe gibt:

3.5 Satz (Stefan Immervoll): In jeder der Dimensionen 2, 4 und 8 gibt es nicht-klassische differenzierbare projektive Ebenen \mathcal{E} , für deren Automorphismengruppe die Dimensionsabschätzung der folgenden Tabelle 3.1 gilt.

$\dim \mathcal{E}$	$\dim \text{Aut}(\mathcal{E})$
2	≥ 1
4	≥ 4
8	≥ 13

Tabelle 3.1: Dimension der Automorphismengruppe

Beweis: Siehe (Imm03). □

Zum Beweis verwendet er die Methode aus (BI00), die in (ILP10) weiter ausgebaut ist. Dort wird ausgehend von einem Tripel differenzierbarer Mannigfaltigkeiten mit gewissen Zusatzeigenschaften untersucht, wann sich differenzierbare projektive Ebenen ergeben. Um Beispiele zu generieren, weist dieser Zugang doch einige Schwierigkeiten auf: Zum einen ist es eher schwer, geeignete Tripel von Mannigfaltigkeiten zu finden, die die benötigten Zusatzeigenschaften aufweisen, zum anderen ist nicht abzusehen, ob sich die Automorphismengruppe einer so erzeugten Ebene gut verstehen lässt, um sie in die bestehende Klassifikation einzuordnen. Es ist zu befürchten, dass andere so generierte Beispiele ähnliche Probleme aufweisen, wie die in Satz 3.4 angesprochenen Ebenen, und unter Umständen ziemlich starr sind.

Ein anderer Ansatz bei der Suche nach differenzierbaren projektiven Ebenen ist es, bereits bekannte geeignete *topologische* projektive Ebenen zu studieren und zu entscheiden, ob diese sich mit einer differenzierbaren Struktur versehen lassen, die sie zu differenzierbaren projektiven Ebenen machen. Dieser Ansatz hat den Vorzug, dass die entsprechenden Ebenen bezüglich ihrer topologischen Eigenschaften und bezüglich ihrer Automorphismengruppe bereits einigermaßen verstanden sind. Bis zu einem gewissen Punkt ist diese Arbeit schon getan:

3.6 Satz (Richard Bödi (Dieter Betten)): Sei \mathcal{E} eine differenzierbare projektive Ebene. Ist die Dimension der Ebene und die Dimension der Automorphismengruppe wie in der folgenden Tabelle 3.2 angegeben, so ist \mathcal{E} klassisch.

$\dim \mathcal{E}$	$\dim \text{Aut}(\mathcal{E})$
2	≥ 3
4	≥ 7
8	≥ 17
16	≥ 39

Tabelle 3.2: Grenzdimensionen für differenzierbare projektive Ebenen

Beweis: Für den Fall $\dim \mathcal{E} = 2$ wurden Teile des Satzes von Dieter Betten in (Bet71) bewiesen. Der umfassende Beweis des ganzen Satzes ist in (Böd95, Chapter 9–12) zu finden. (Siehe auch Anmerkung 3.19.) □

Dieser Weg, topologische projektive Ebenen auf ihre Verträglichkeit mit differenzierbaren Strukturen hin zu untersuchen, soll auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit gegangen werden.

3.2 Werkzeuge für die Untersuchung projektiver Ebenen auf Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt sollen Werkzeuge eingeführt werden, die im späteren Verlauf bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit spezieller projektiver Ebenen von Interesse sind.

3.7 Proposition: Eine differenzierbare projektive Ebene $\mathcal{E} = (\mathfrak{P}, \mathcal{L}, \mathfrak{F})$ ist kompakt (das heißt, die Punktmenge ist ein kompakter topologischer Raum).

Beweis: Die Punktmenge ist lokal homöomorph zu \mathbf{R}^n für ein geeignetes $n \in \mathbf{N}$, damit sind die Bedingungen von (GL95, Theorem 3.11) erfüllt. \square

3.8 Definition: Es sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ eine projektive Ebene. Die **duale Ebene** ist gegeben durch $\mathcal{E}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{F}^*) = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{F}^*)$, wobei $\mathcal{F}^* = \{(L, p) \in \mathcal{L} \times \mathcal{P} \mid (p, L) \in \mathcal{F}\}$.

Eine **Dualität** ist eine Kollineation $\varphi = (\varphi_{\mathcal{P}}, \varphi_{\mathcal{L}}): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$. Eine projektive Ebene, die eine Dualität zulässt, heißt **selbstdual**.

Eine **Polarität** φ ist eine involutorische Dualität, das heißt $\varphi^2 := \varphi \varphi^* = \text{id}_{\mathcal{E}}$, dabei ist $\varphi^* = (\varphi_{\mathcal{L}}, \varphi_{\mathcal{P}}): \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}$.

3.9 Proposition: Die duale Ebene \mathcal{E}^* einer kompakten projektiven Ebene $\mathcal{E} = (\mathfrak{P}, \mathcal{L}, \mathfrak{F})$ ist ebenfalls eine kompakte projektive Ebene.

Beweis: Siehe (SBG⁺95, Proposition 41.7). \square

3.10 Proposition: Die duale Ebene \mathcal{E}^* einer differenzierbaren projektiven Ebene $\mathcal{E} = (\mathfrak{P}, \mathcal{L}, \mathfrak{F})$ ist ebenfalls eine differenzierbare projektive Ebene.

3.11 Proposition: In einer differenzierbaren projektiven Ebene $\mathcal{E} = (\mathfrak{P}, \mathcal{L}, \mathfrak{F})$ sind die differenzierbaren Strukturen der Punktmenge \mathfrak{P} und der Geradenmenge \mathcal{L} bereits durch die differenzierbaren Strukturen auf den Punktreihen $\mathfrak{P}_O, \mathfrak{P}_U, \mathfrak{P}_V$ eines Dreiseits $O, U, V \in \mathcal{L}$ und die geometrischen Operationen (Schneiden und Verbinden) von \mathcal{E} vollständig bestimmt.

Beweis: Dies ist die duale Aussage von Proposition 2.7. \square

3.12 Proposition: Besitzt eine \mathcal{C}^r -differenzierbare projektive Ebene $\mathcal{E} = (\mathfrak{P}, \mathcal{L}, \mathfrak{F})$ mit $2 \leq r \leq \infty$ eine stetige Dualität ι , so ist diese \mathcal{C}^r -differenzierbar, das heißt insbesondere $\iota_{\mathfrak{P}}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathcal{L}$ und $\iota_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{P}$ sind Diffeomorphismen.

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus Proposition 2.11, denn als stetige Bijektionen zwischen kompakten Räumen sind $\iota_{\mathfrak{P}}$ und $\iota_{\mathcal{L}}$ Homöomorphismen. \square

3.13 Proposition: Sei $\mathcal{E} = (\mathfrak{P}, \mathcal{L}, \mathfrak{F})$ eine topologische projektive Ebene, $\iota: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$ eine stetige Dualität und \mathfrak{P} sowie \mathcal{L} seien \mathcal{C}^r -differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $2 \leq r \leq \infty$. Dann ist \mathcal{E} genau dann eine \mathcal{C}^r -differenzierbare projektive Ebene, wenn Schneiden von Geraden \wedge oder Verbinden von Punkten \vee eine \mathcal{C}^r -differenzierbare Abbildung ist.

Beweis: Wegen Proposition 3.12 reicht die Feststellung $\wedge = (\iota \times \iota) \vee \iota^{-1}$ und $\vee = (\iota \times \iota) \wedge \iota^{-1}$ und das Wissen, dass die Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist. \square

3.14 Definition: Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ eine projektive Ebene, außerdem $L, M \in \mathcal{L}$ verschiedene Geraden und $p \in \mathcal{P}$, so dass $(p, L) \notin \mathcal{F} \neq (p, M)$. Eine Abbildung $L \rightarrow M: q \mapsto (q \vee p) \wedge M$ (oder eine dazu duale Abbildung) heißt **Perspektivität**.

3.15 Proposition: In einer differenzierbaren projektiven Ebene sind Perspektivitäten Diffeomorphismen.

Beweis: Eine Perspektivität in einer differenzierbaren Ebene ist die Komposition von Diffeomorphismen. \square

3.16 Korollar: In einer differenzierbaren projektiven Ebene sind alle Punktreihen von Geraden und alle Geradenbüschel zueinander diffeomorph.

3.3 Über 2-dimensionale projektive Ebenen

Um die systematische Suche nach nicht-klassischen Beispielen differenzierbarer projektiver Ebenen fortzusetzen, bieten sich geradezu die 2-dimensionalen projektiven Ebenen an, da diese einerseits der üblichen Vorstellung einer „Ebene“ noch sehr gut entsprechen, andererseits schon recht gut bekannt sind; gilt $\dim \text{Aut}(\mathcal{E}) \geq 2$, so sind sie sogar vollständig klassifiziert (siehe (SBG⁺95, Section 33–38) und die im Detail angegebenen Quellen):

3.17 Klassifikation 2-dimensionaler projektiver Ebenen mit großer Automorphismengruppe: Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ eine 2-dimensionale projektive Ebene. Weiter sei $\Delta \leq \text{Aut}(\mathcal{E})$ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe mit $\dim \Delta \geq 2$. Dann lässt sich die Situation wie folgt klassifizieren (Fixgebilde sind dabei nur bis auf Dualitäten angegeben):

- (a) Es ist $8 \geq \dim \Delta \geq 5$. Dann ist $\mathcal{E} \cong \mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ klassisch (siehe (SBG⁺95, Theorem 33.6)).
- (b) Es ist $\dim \Delta = 4$. Dann fixiert Δ eine Antifahne und \mathcal{E} ist eine Moulton-Ebene (siehe Beispiel 5.25, (SBG⁺95, Section 34)).
- (c) Es ist $\dim \Delta = 3$. Dann tritt einer der folgenden Fälle auf:
 - (c1) Die Gruppe $\Delta \cong \text{PSL}_2\mathbf{R}$ fixiert keinen Punkt und keine Gerade, aber ein Oval. Dann ist die Ebene \mathcal{E} eine schiefhyperbolische Ebene (siehe (SBG⁺95, Section 35)).
 - (c2) Die Gruppe $\Delta \cong \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ fixiert genau eine Fahne. Dann ist die Ebene \mathcal{E} eine Schiefparabel-Ebene (siehe Beispiel 4.6, (SBG⁺95, Section 36)).
 - (c3) Die Gruppe $\Delta \cong \mathbf{R} \times L_2$ fixiert genau zwei Punkte und zwei Geraden. Dann ist die Ebene \mathcal{E} eine Ebene über einem kartesischen Körper (siehe (SBG⁺95, Section 37)).
- (d) Es ist $\dim \Delta = 2$. Dann tritt einer der folgenden Fälle auf (siehe (SBG⁺95, Theorem 38.5)):
 - (d1) Die Gruppe $\Delta \cong \mathbf{C}^\times \cong \mathbf{R} \times \text{SO}_2\mathbf{R}$ fixiert genau eine Antifahne und \mathcal{E} ist eine Schellhammer-Ebene (siehe (Sch81)). Diese Ebenen sollen in Kapitel 5 untersucht werden.

- (d2) Es gilt $\Delta \cong \mathbf{R}^2$.
- (d2,1) Die Gruppe Δ fixiert genau die Punktreihe einer Geraden. Dann ist $\mathcal{E} \cong \mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ (siehe (Sal67, 5.4(b))).
 - (d2,2) Die Gruppe Δ fixiert genau eine Fahne. Dann ist \mathcal{E} eine Schiebe-Ebene (siehe (Gro76), (SBG+95, 31.25)). Solche Ebenen sollen in Kapitel 4 untersucht werden.
 - (d2,3) Die Gruppe Δ fixiert genau zwei Geraden und zwei Punkte (siehe (Gro81)).
 - (d2,4) Die Gruppe Δ fixiert genau ein Dreieck (siehe (Poh90)).
- (d3) Es gilt $\Delta \cong L_2$.
- (d3,1) Die Gruppe Δ wirkt transitiv auf einer affinen Teilebene, das heißt auf $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_L$ für eine Gerade $L \in \mathcal{L}$.
 - (d3,1,1) Die Gruppe Δ fixiert genau eine Fahne (siehe (Gro76)).
 - (d3,1,2) Die Gruppe Δ fixiert genau zwei Punkte und ihre Verbindungsgerade (siehe (Gro76)).
 - (d3,2) Die Gruppe Δ wirkt auf *keiner* affinen Teilebene $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_L$ mit $L \in \mathcal{L}$ transitiv.
 - (d3,2,1) Die Gruppe Δ fixiert genau zwei Geraden und zwei Punkte (siehe (Sch81)).
 - (d3,2,2) Die Gruppe Δ fixiert genau zwei Geraden und eine mehr als zweielementige abgeschlossene Teilmenge der Punktreihe einer dieser Geraden (siehe (Poh90)).
 - (d3,2,3) Die Gruppe Δ fixiert genau ein Oval und eine Tangente des Ovals (siehe (Lip86), auch für eine genaue Beschreibung der Situation).
 - (d3,2,4) Die Gruppe Δ fixiert genau ein Semioval, eine das Semioval „berührende“ Gerade und eine abgeschlossene Teilmenge auf dieser Geraden, die mindestens die „Berührungspunkte“ enthält (siehe (Lip86), auch für eine genaue Beschreibung der Situation).

In Tabelle 3.3 auf Seite 37 ist die Klassifikation noch einmal kompakt zusammengefasst.

3.18 Bemerkung: Die in der Klassifikation 3.17 angegebenen Familien von Ebenen sind zwar „horizontal“ streng voneinander getrennt, in dem Sinne, dass eine Familie zu genau einer der angegebenen Konfigurationen bei fester Dimension der Automorphismengruppe passt. „Vertikal“ hingegen sind sie unter Umständen jedoch Teile voneinander: So ist zum Beispiel die klassische projektive Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ in jeder Familie enthalten, jede Moulton-Ebene (mit 4-dimensionaler Automorphismengruppe) nach 3.17(b) ist auch eine Schellhammer-Ebene nach 3.17(d1) (in der Automorphismengruppe einer Moulton-Ebene ist eine geeignete Untergruppe enthalten) und jede Schiefparabel-Ebene 3.17(c2) ist eine Schiebe-Ebene 3.17(d2,2).

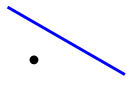

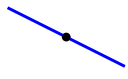
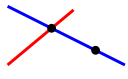
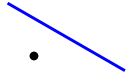
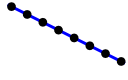
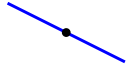

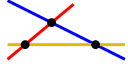
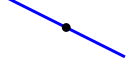
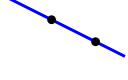
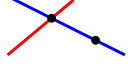
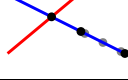
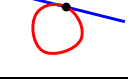
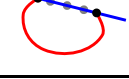
dim Δ			Fixkonfiguration	
$5 \leq \dim \Delta \leq 8$		$\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$	—	(a)
4		Moulton		(b)
3	$\Delta \cong \mathbf{PSL}_2\mathbf{R}$	Schiefhyperbel		(c1)
	$\Delta \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$	Schiefparabel		(c2)
	$\Delta \cong \mathbf{R} \times L_2$	kartes. Körper		(c3)
2	$\Delta \cong \mathbf{C}^\times$	Schellhammer		(d1)
	$\Delta \cong \mathbf{R}^2$	$\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$		(d2,1)
		Schiebe		(d2,2)
				(d2,3)
				(d2,4)
	$\Delta \cong L_2$			(d3,1,1)
				(d3,1,2)
				(d3,2,1)
				(d3,2,2)
				(d3,2,3)
				(d3,2,4)

Tabelle 3.3: Klassifikation 2-dimensionaler projektiver Ebenen

3.3.1 Differenzierbarkeitsfragen bei 2-dimensionalen projektiven Ebenen

3.19 Anmerkungen zu Satz 3.6: Bödi verwendet in seinem Beweis von Satz 3.6 über die Grenzdimension differenzierbarer projektiver Ebenen im Fall 2-dimensionaler projektiver Ebenen die eben ausgeführte Klassifikation 3.17. Wie bereits angesprochen, ist geklärt, dass die klassische projektive Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ differenzierbar ist. Um zu beweisen, dass die anderen Ebenen mit $\dim \text{Aut} \geq 3$ *nicht* differenzierbar sein können – so lange sie eben nicht isomorph zur klassischen sind –, untersucht er die entsprechenden Familien im Einzelnen (Böd95, Chapter 9).

Im Fall der Moulton-Ebenen 3.17(b) verwendet Bödi die Wirkung der Automorphismengruppe (Böd95, Corollary 6.6). Betten gibt in (Bet71, Satz 4) einen Beweis an, der zeigt, dass eine echte Moulton-Ebene keine differenzierbare Struktur besitzen kann, so dass die Punktreihen der Geraden differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind, was nach Proposition 2.6 notwendig wäre. Auch die Untersuchung der Schellhammer-Ebenen – die Moulton-Ebenen gehören ja in die Familie der Schellhammer-Ebenen – wird diese Erkenntnis liefern (siehe Korollar 5.25).

Im Fall der Schiefhyperbolischen Ebenen 3.17(c1) argumentiert Bödi hauptsächlich mit der notwendigen Differenzierbarkeit von Projektivitäten und kommt so zum Widerspruch gegen die Annahme einer differenzierbaren Ebene.

Bei den Schiefparabel-Ebenen 3.17(c2) untersucht Bödi, wie die differenzierbare Struktur notwendigerweise auszusehen hat. Zunächst wird mit Hilfe der Wirkung der Automorphismengruppe und Proposition 1.20 die differenzierbare Struktur auf den Teilen der Punktmenge identifiziert, wo die Automorphismengruppe transitiv wirkt. Die dabei entstehenden „Lücken“ werden anschließend mit Hilfe der Geometrischen Operationen „Schneiden von Geraden“ und „Verbinden von Punkten“ geschlossen. Im Abschnitt 4.2 wird ein nicht unähnliches Vorgehen angewandt. Die so notwendigerweise festgelegte differenzierbare Struktur sorgt dann auch dafür, dass als einzige differenzierbare Schiefparabel-Ebene die klassische in Frage kommt.

Die Argumentation bei den Ebenen über kartesischen Körpern 3.17(c3) führt Bödi mit Hilfe des Konzepts der tangentialen Translationsebenen, das er in (Böd95) einführt. Bei Betten ist eine Beweisskizze angegeben (Bet71, Satz 5), die sich direkt auf die Wirkung der Automorphismengruppe auf der Punktreihe der Fixgeraden beruft.

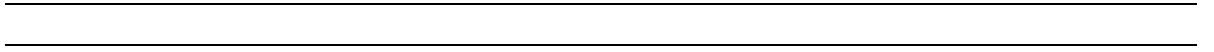
Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sollen nun zwei Familien 2-dimensionaler projektiver Ebenen mit mindestens 2-dimensionaler Automorphismengruppe auf Differenzierbarkeit untersucht werden. Kapitel 4 behandelt spezielle Familien von Schiebe-Ebenen 3.17(d2,2). Die Klasse der Schellhammer-Ebenen 3.17(d1) ist Gegenstand von Kapitel 5. Da die Automorphismengruppen dabei wohl „zu klein“ sind, um „Probleme“ hinsichtlich der Differenzierbarkeit früh zu erkennen, muss zunehmend dazu übergegangen werden, festzulegen, wie die differenzierbare Struktur auf Punktmenge und Geradenmenge notwendigerweise aussehen muss. Ist dies geschehen, so kann versucht werden, mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 und Abschnitt 3.2 notwendige Kriterien für die Differenzierbarkeit der Ebene zu überprüfen. Zunächst bietet es sich an, die Verträglichkeit der differenzierbaren Struktur

mit Punktreihen und Geradenbüscheln zu testen. Sind nun in der Tat Punktreihen und Geradenbüschel geeignete Untermannigfaltigkeiten, so kann in einem weiteren Schritt die Forderung nach Differenzierbarkeit von „Schneiden“ und „Verbinden“ untersucht werden.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung der differenzierbaren Struktur wird die Wirkung der Automorphismengruppe sein, da sich aufgrund Proposition 1.20 die differenzierbare Struktur der Automorphismengruppe auf ihren Bahnen überträgt. Je größer dabei aber die unter der Wirkung fixierten Strukturen der Ebenen werden, desto kleiner werden die Bereiche, auf denen die differenzierbare Struktur auf diese Weise festgelegt ist. Die danach noch übrigen „weißen Flecken“ auf der Landkarte – sprich des Atlas – können oder müssen gegebenenfalls mit Hilfe der geometrischen Operationen „Schneiden von Geraden“ und „Verbinden von Punkten“ geschlossen werden. Allerdings hat dies – und das werden die Beispiele in Kapitel 4 und 5 zeigen –, den entscheidenden Nachteil, dass mit Hilfe der geometrischen Operationen gewonnene Karten sehr unhandlich werden, so dass mit ihnen kaum noch gearbeitet oder argumentiert werden kann.

Ist die differenzierbare Struktur der Ebene einmal bestimmt, so kann mit Hilfe von Proposition 1.22 versucht werden, die Differenzierbarkeit von „Schneiden von Geraden“ und „Verbinden von Punkten“ zu beweisen. Dieses Ergebnis von Peter Maier hat den Vorteil, dass die Anzahl der Parameter im Vergleich zu einer direkten Rechnung reduziert wird und so die Rechnung und das Argumentieren leichter fällt.

Ein weiteres Problem bei der Untersuchung auf Differenzierbarkeit der Ebenen ist der folgende Umstand: Die Beschreibung der Ebenenfamilien der Klassifikation ist so allgemein, dass man nicht immer erwarten kann, die ganze Familie mit einem gewissen Argument einschließen zu können; man muss sich unter Umständen mit Informationen über gewisse Teilfamilien begnügen.



4 Differenzierbarkeitsfragen bei 2-dimensionalen Schiebe-Ebenen

4.1 Definition und allgemeine Erkenntnisse

In diesem Kapitel sollen zunächst allgemein 2-dimensionale Schiebe-Ebenen auf ihre Verträglichkeit mit differenzierbaren Strukturen hin untersucht werden. Anschließend wollen wir dies bei einer speziellen Familie 2-dimensionaler Schiebe-Ebenen vertiefen.

4.1 Definition: Eine **Schiebe-Ebene** oder **Shift-Ebene** $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ ist eine projektive Ebene mit einer Fahne $((\infty), L_{(\infty)}) \in \mathcal{F}$, die von einer kommutativen Gruppe $\Sigma \leq \text{Aut}(\mathcal{E})$, der sogenannten **Schiebungs-Gruppe** (oder **Shift-Gruppe**), fixiert wird, das heißt für alle $\varphi \in \Sigma$ gilt $((\infty), L_{(\infty)}) \cdot \varphi = ((\infty), L_{(\infty)})$. Weiter wird verlangt, dass Σ jeweils auf $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{L_{(\infty)}}$ und auf $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{L_{(\infty)}}$ regulär wirkt (KS09, Definition 1.1).

Die affine Ableitung einer Schiebe-Ebene an der Geraden $L_{(\infty)}$ soll als **affine Schiebe-Ebene** bezeichnet werden.

Im Fall 2-dimensionaler Schiebe-Ebenen führt dies gemäß der Klassifikation 3.17 auf die folgende Konstruktion (siehe zum Beispiel (Sal65), (DO68), (Gro76), (Bet79), (Kna86), (Pol93), (Pol95), (SBG⁺95, 31.25(c)); dabei beleuchten die jeweiligen Arbeiten verschiedene Teilaspekte des Gesamtbildes, die späteren Arbeiten geben in der Regel zumindest einen Überblick über die früheren Arbeiten).

4.2 Konstruktion einer 2-dimensionalen Schiebe-Ebene: Eine Funktion $\mathfrak{h}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ heißt **planar**, wenn für alle $d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ die Abbildung

$$\mathfrak{h}_d: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto \mathfrak{h}(x+d) - \mathfrak{h}(x)$$

eine Bijektion ist. Damit lässt sich unmittelbar die Abbildung

$$\mathfrak{h}^\triangleright: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}: (x, d) \mapsto \mathfrak{h}(x+d) - \mathfrak{h}(x)$$

definieren. Da \mathfrak{h}_d eine Bijektion ist, kann weiter die sogenannte **Auflösungsabbildung**

$$\mathfrak{h}^\blacktriangleleft: \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}: (y, d) \mapsto x, \text{ wobei } \mathfrak{h}_d(x) = y,$$

definiert werden.

Zu einer gegebenen (planaren) Funktion $\mathfrak{h}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definieren wir eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{E} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$. Bei dieser Konstruktion kann ohne Einschränkung $\mathfrak{h}(0) = 0$ angenommen werden. Es sei

$$\mathfrak{P} := \mathbf{R}^2 \cup \{(x) \mid x \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}\}$$

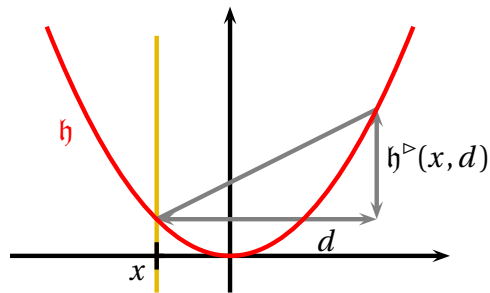


Abbildung 4.1: Planarität I
Zur „Grundseite“ d gibt $h^>(x, d)$ die Höhe des „Steigungsdreiecks“ bei x an.

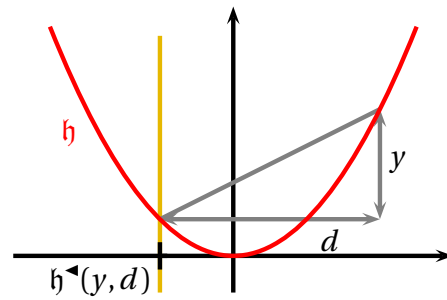


Abbildung 4.2: Planarität II
Ein „Steigungsdreieck“ mit „Grundseite“ d und Höhe y kann genau an der Stelle $h^<(y, d)$ eingepasst werden.

die **Punktmenge**. Die **Geradenmenge** ist gegeben durch

$$\mathcal{L} := \{L_{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbf{R}^2\} \cup \{L_{(a)} \mid a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}\},$$

wobei für $a, b \in \mathbf{R}$

$$L_{(a,b)} := \{(x, h(x-a) + b) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\} \cup \{(a)\} \subseteq \mathfrak{P}$$

$$L_{(a)} := (\{a\} \times \mathbf{R}) \cup \{(\infty)\} \subseteq \mathfrak{P}$$

$$L_{(\infty)} := \{(x) \mid x \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}\} \subseteq \mathfrak{P}.$$

Die Inzidenzrelation sei die Elementrelation, das heißt für die Fahnenmenge

$$\mathfrak{F} = \{(p, L) \in \mathfrak{P} \times \mathcal{L} \mid p \in L\}.$$

Die eben beschriebene Inzidenzstruktur \mathfrak{E} ist genau dann eine projektive Ebene, wenn die Funktion h planar ist.

Für $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ ist die Abbildung

$$\sigma_{(s,t)}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}: \begin{cases} (x, y) \mapsto (x + s, y + t) \\ (x) \mapsto (x + s) \quad \text{für } x \in \mathbf{R} \\ (\infty) \mapsto (\infty) \end{cases}$$

geradentreu. Wir wollen der Bequemlichkeit halber diese so definierte Abbildung mit der von ihr induzierten Kollineation auf der Ebene identifizieren und sie als **Schiebung** (oder **Shift**) bezeichnen. Sie wirkt damit also auch auf der Menge der Geraden \mathcal{L} durch:

$$\sigma_{(s,t)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}: \begin{cases} L_{(x,y)} \mapsto L_{(x+s,y+t)} \\ L_{(x)} \mapsto L_{(x+s)} \quad \text{für } x \in \mathbf{R} \\ L_{(\infty)} \mapsto L_{(\infty)} \end{cases}$$

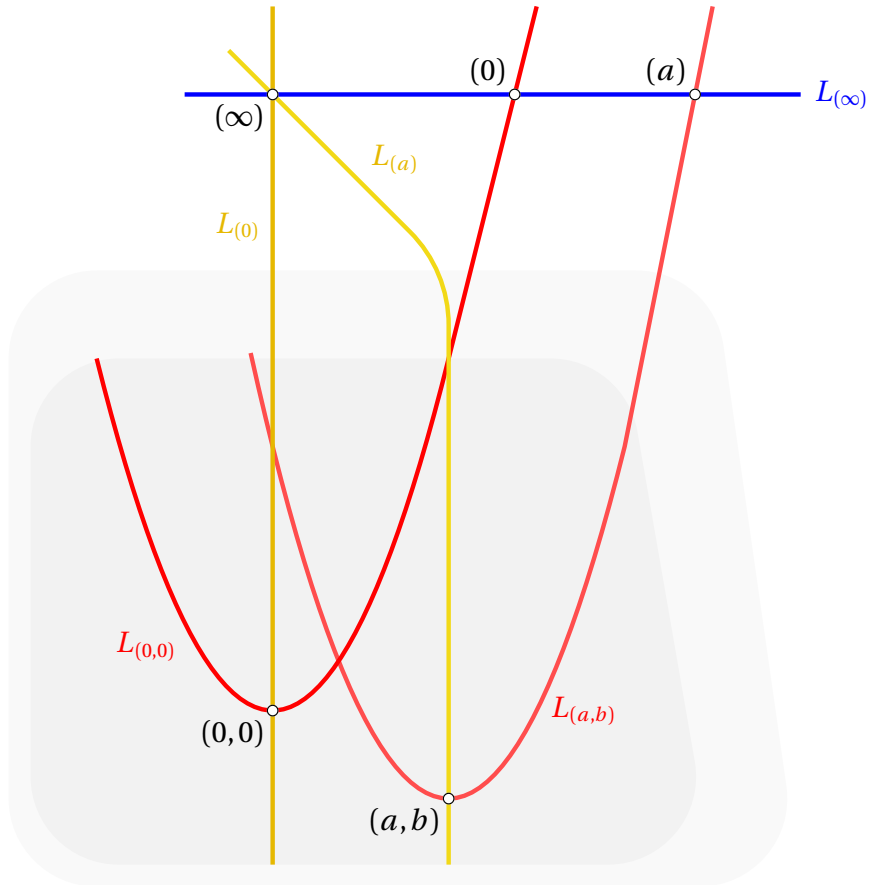


Abbildung 4.3: (Punktreihen von) Geraden in einer Schiebe-Ebene

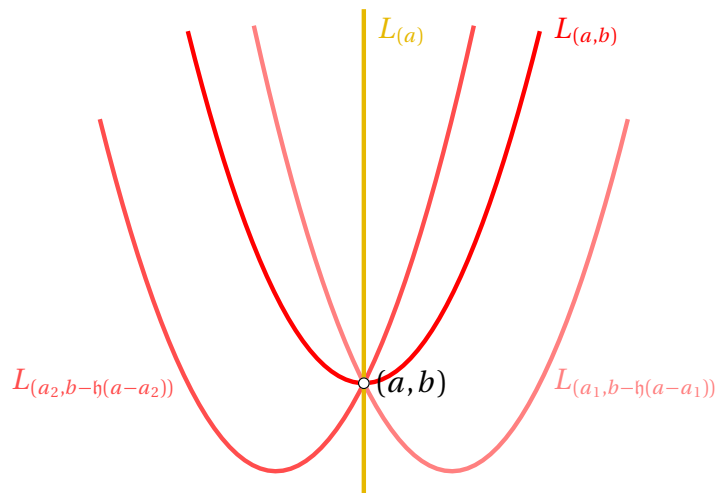


Abbildung 4.4: Geradenbündel im affinen Teil der Schiebe-Ebene

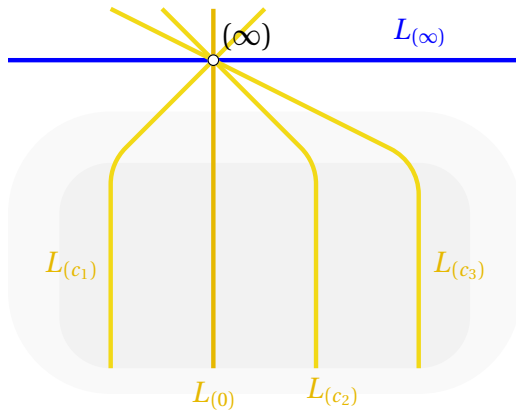


Abbildung 4.5: Geradenbündel im Fernpunkt (∞)

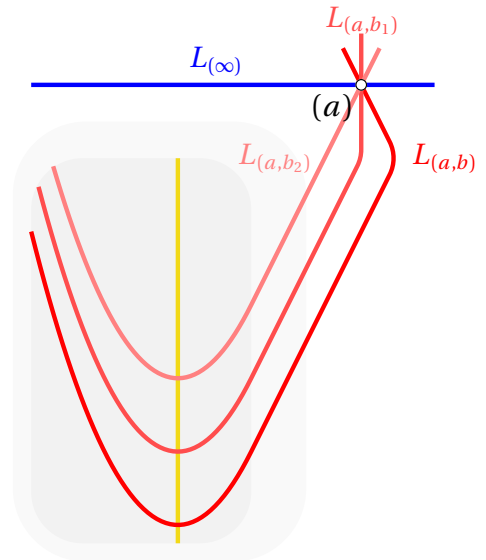


Abbildung 4.6: Geradenbündel im Fernpunkt (a)

Die **Schiebungs-Gruppe** $\Sigma := \{\sigma_{(s,t)} \mid (s,t) \in \mathbf{R}^2\}$ ist damit eine Untergruppe der Automorphismengruppe der Ebene \mathcal{E} . Sie wirkt regulär auf $\mathfrak{P} \setminus L_{(\infty)} = \mathbf{R}^2$, regulär auf $L_{(\infty)} \setminus \{(\infty)\}$ und ist isomorph zur Gruppe $(\mathbf{R}^2, +)$.

Eine sogenannte **Standardgerade** $L_{(a,b)}$ entspricht dem durch die Schiebung $\sigma_{(a,b)}$ verschobenen Graphen von \mathfrak{h} , also der Geraden $L_{(0,0)}$. Die **vertikalen Geraden** $L_{(a)}$ sind Bilder von $L_{(0)}$ unter $\sigma_{(a,b)}$. Die Gerade $L_{(\infty)}$ wird üblicherweise auch als **Ferngerade** bezeichnet; die darauf liegenden Punkte (x) für $x \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ sind gerade die **Fernpunkte**, also die Schnittpunkte der Parallelenscharen, die man beim projektiven Abschluss der durch die Punktmenge \mathbf{R}^2 gegebenen affinen Ebene hinzufügt.

Die Fahne $((\infty), L_{(\infty)})$ ist eine Fixfahne unter Σ . Punkt- und Geradenmenge zerfallen damit jeweils in die folgenden Bahnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \{(0,0)\}^\Sigma \dot{\cup} \{(0)\}^\Sigma \dot{\cup} \{(\infty)\} \\ \mathfrak{L} &= \{L_{(0,0)}\}^\Sigma \dot{\cup} \{L_{(0)}\}^\Sigma \dot{\cup} \{L_{(\infty)}\}. \end{aligned}$$

4.3 Proposition: Eine Abbildung $\mathfrak{h} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ist genau dann planar, wenn \mathfrak{h} strikt konvex ist und für alle $a \in \mathbf{R}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\mathfrak{h}(x) - ax) = \infty$, oder wenn die Aussage für $-\mathfrak{h}$ statt \mathfrak{h} wahr ist.

Beweis: Siehe (Gro76) □

4.4 Proposition: Eine Abbildung $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ist genau dann planar, wenn \mathfrak{h}' eine Bijektion ist.

Beweis: Siehe (Sal65) oder (SBG⁺95). □

4.5 Proposition: Es sei \mathcal{E} eine Schiebe-Ebene. Dann ist

$$\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*: \begin{cases} (x, y) \leftrightarrow L_{(-x, -y)} \\ (x) \leftrightarrow L_{(-x)} \text{ für } x \in \mathbf{R} \\ (\infty) \leftrightarrow L_{(\infty)} \end{cases}$$

eine Polarität. Insbesondere ist die Schiebe-Ebene \mathcal{E} selbstdual.

Beweis: Siehe (SBG⁺95, Proposition 74.5) oder (DO68). □

4.6 Beispiel (Schiefparabel-Ebenen): Eine **Schiefparabel-Ebene** ist eine Schiebe-Ebene der folgenden Form:

Seien $c, d \in \mathbf{R}$ mit $c > 0$ und $d > 1$. Sei weiter die sogenannte **Schiefparabel**

$$h_{c,d}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto \begin{cases} x^d & \text{für } x \geq 0 \\ c(-x)^d & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben. Eine solche Abbildung $h_{c,d}$ erfüllt offensichtlich die Kriterien aus Proposition 4.3 oder Proposition 4.4 und erzeugt somit eine Schiebe-Ebene $\mathcal{E}_{c,d}$, siehe zum Beispiel (SBG⁺95, Section 36).

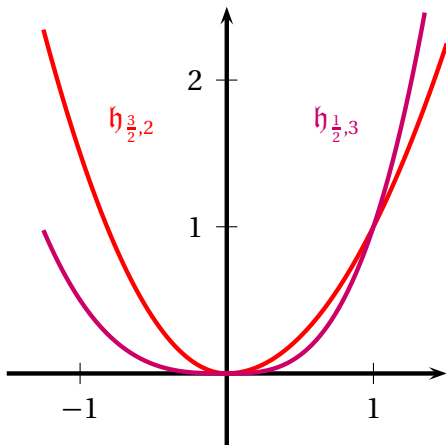


Abbildung 4.7: Schiefparabeln

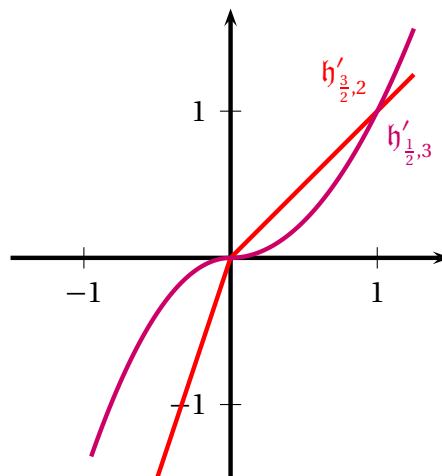


Abbildung 4.8: Ableitungen von Schiefparabeln

In dieser Familie ist auch die klassische 2-dimensionale projektive Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ wie folgt enthalten (SBG⁺95, Example 31.2(a)): Für die Schiefparabel-Ebene zur Normalparabel $h_{1,2}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x^2$ gilt $\mathcal{E}_{1,2} \cong \mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ vermöge des Isomorphismus Φ mit Punktabbildung $\Phi_{\mathcal{D}}: \mathcal{E}_{1,2} \rightarrow \mathbf{P}_2(\mathbf{R}): (x, y) \mapsto (x, y - x^2)$.

4.2 Differenzierbare Karten für Schiebe-Ebenen

In diesem Abschnitt sollen Karten untersucht werden, die in einer geeigneten differenzierbaren Struktur für eine differenzierbare Schiebe-Ebene notwendigerweise enthalten sein müssen. Es kann aber damit noch keine Aussage gemacht werden, ob eine Schiebe-Ebene mit solchen Karten auch wirklich eine differenzierbare Ebene ist.

Wir wollen dabei grundsätzlich davon ausgehen, dass die Wirkung der Schiebungs-Gruppe Σ differenzierbar erfolgt. Ebenso soll die Polarität π aus Proposition 4.5 differenzierbar sein. Nach Proposition 2.11 und 2.13 ist es dafür hinreichen, \mathcal{C}^r -differenzierbare Schiebe-Ebenen mit $2 \leq r \leq \infty$ zu betrachten.

4.7 Lemma: Ist $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, wobei $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, so gilt für die Auflösungsabbildung $\mathfrak{h}^\blacktriangleleft \in \mathcal{C}^r(\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}), \mathbf{R})$. Die zugehörige Ableitung ergibt sich zu:

$$D_{(y,d)} \mathfrak{h}^\blacktriangleleft = \frac{1}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d)+d) - \mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d))} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d)+d) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$\mathfrak{f}: \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}): (x, d) \mapsto (\mathfrak{h}^\blacktriangleright(x, d), d)$$

$$\mathfrak{g}: \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}): (y, d) \mapsto (\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y, d), d).$$

Unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{h}^\blacktriangleright$ respektive $\mathfrak{h}^\blacktriangleleft$ folgt, dass $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f} = \text{id}_{\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})}$; die beiden Funktionen sind also invers zueinander. Da $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vorausgesetzt war, gilt $\mathfrak{f} \in \mathcal{C}^r(\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}), \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}))$. Wir erhalten also die Ableitung

$$D_{(x,d)} \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} D_{(x,d)} \mathfrak{h}^\blacktriangleright & 0 \\ \mathfrak{h}'(x+d) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}'(x+d) - \mathfrak{h}'(x) & 0 \\ \mathfrak{h}'(x+d) & 1 \end{pmatrix},$$

welche wegen $d \neq 0$ offenbar invertierbar ist. Wir können also den Satz über die Umkehrfunktion 1.6 aus der klassischen Analysis anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} D_{(y,d)} \mathfrak{g} &= \begin{pmatrix} D_{(y,d)} \mathfrak{h}^\blacktriangleleft & 0 \\ \mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d)+d) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{\mathfrak{g}(y,d)} \mathfrak{f} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d)+d) - \mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d))} & 0 \\ \frac{-\mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d)+d)}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d)+d) - \mathfrak{h}'(\mathfrak{h}^\blacktriangleleft(y,d))} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der ersten Spalten der auftretenden Matrizen liefert dann schließlich die Behauptung. \square

Die differenzierbare Wirkung der Schiebungs-Gruppe auf dem affinen Teil der Schiebe-Ebene hat unmittelbare Konsequenzen für eine geeignete differenzierbare Struktur der Ebene:

4.8 Proposition: Die Karte $\mathfrak{A} \setminus L_\infty \rightarrow \mathbf{R}^2: (x, y) \mapsto (x, y)$ ist in der differenzierbaren Struktur der differenzierbaren Schiebe-Ebene enthalten.

Beweis: Die Wirkung der Schiebungs-Gruppe Σ auf $\mathfrak{P} \setminus L_\infty$ ist regulär, wie bereits in Konstruktion 4.2 festgestellt wurde. Mit Proposition 1.20 ergibt sich dann die Behauptung. \square

4.9 Korollar: Ist die von der Funktion \mathfrak{h} erzeugte Schiebe-Ebene \mathcal{C}^r -differenzierbar, dann ist $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Beweis: Nach Proposition 2.6 sind Punktreihen von Geraden differenzierbare Untermannigfaltigkeiten. \square

4.10 Korollar: Für den affinen Teil der Geraden einer differenzierbaren Schiebe-Ebene sind die folgenden Karten mit der differenzierbaren Struktur verträglich:

$$\begin{aligned} L_{(a,b)} \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbf{R}: (x, \mathfrak{h}(x-a) + b) \mapsto x \\ L_{(a)} \setminus \{\infty\} &\rightarrow \mathbf{R}: (a, x) \mapsto x. \end{aligned}$$

Mit demselben Argument wie in Proposition 4.8 – diesmal wird die Wirkung der Schiebungs-Gruppe auf $L_{(\infty)}$ betrachtet – ergibt sich:

4.11 Proposition: Die Karte

$$L_{(\infty)} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbf{R}: (x) \mapsto x$$

ist mit der differenzierbaren Struktur der Ebene verträglich.

Damit sind die differenzierbaren Strukturen auf den Punktreihen der Geraden schon weitgehend verstanden. Allerdings fehlt bei allen Geradentypen die Information, wie der letzte fehlende Punkt in die differenzierbare Struktur zu integrieren ist. Hätte man diese, so könnte man mit Hilfe von Proposition 3.11 die differenzierbare Struktur der Punktmenge und damit auch der Geradenmenge vollständig beschreiben.

Um zu verstehen, ob und wie im Fall, dass man auf einer Geraden die Information über dieses „Einbinden des fehlenden Punktes“ gewonnen hat, sich diese Information auf andere Geraden übertragen lässt, soll das folgende Hilfsmittel eingeführt werden.

4.12 Definition: Wir definieren $\mathfrak{G} := \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ und erhalten die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi_{L_{(a,b)}}: L_{(a,b)} &\rightarrow \mathfrak{G}: \begin{cases} (x, \mathfrak{h}(x-a) + b) \mapsto x \\ (a) \mapsto \infty \end{cases} \\ \varphi_{L_{(a)}}: L_{(a)} &\rightarrow \mathfrak{G}: \begin{cases} (a, x) \mapsto x \\ (\infty) \mapsto \infty \end{cases} \\ \varphi_{L_{(\infty)}}: L_{(\infty)} &\rightarrow \mathfrak{G}: \begin{cases} (x) \mapsto x \\ (\infty) \mapsto \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Überträgt man mittels dieser Abbildungen die differenzierbare Struktur der jeweiligen Punktreihen auf die Menge \mathfrak{G} , so wird diese zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die eben definierten Abbildungen werden damit in den jeweiligen Fällen zu Diffeomorphismen.

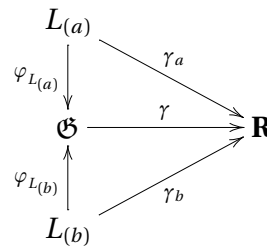
Auf \mathfrak{E} sei weiter die Abbildung

$$\tau: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}: \begin{cases} x \mapsto -x \\ \infty \mapsto \infty \end{cases}$$

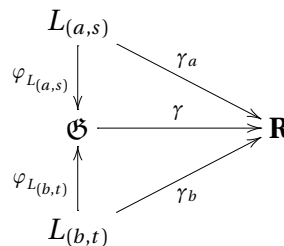
definiert, die offensichtlich eine Involution ist.

4.13 Proposition: Es sei \mathfrak{E} eine differenzierbare Schiebe-Ebene, $O \subseteq \mathfrak{E}$ eine offene Teilmenge und $\gamma: O \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung. Dann gilt:

- (a) Die Abbildung $\gamma_a := (\varphi_{L(a)}|_O) \gamma$ ist genau dann eine mit der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{E} verträgliche Karte der Geraden $L(a)$, wenn die Abbildung $\gamma_b := (\varphi_{L(b)}|_O) \gamma$ eine mit der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{E} verträgliche Karte der Geraden $L(b)$ ist.

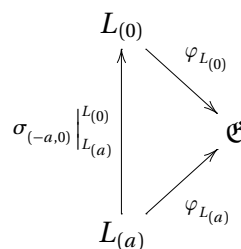


- (b) Die Abbildung $\gamma_a := (\varphi_{L(a,s)}|_O) \gamma$ ist genau dann eine mit der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{E} verträgliche Karte der Geraden $L(a,s)$, wenn die Abbildung $\gamma_b := (\varphi_{L(b,t)}|_O) \gamma$ eine mit der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{E} verträgliche Karte der Geraden $L(b,t)$ ist.



(Anmerkung: Bei den Diagrammen ist der Übersichtlichkeit halber auf die korrekte Angabe der Definitionsbereiche verzichtet.)

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für Geraden der Form $L(a)$, das heißt für die vertikalen Geraden; es reicht dabei, den Fall beliebiger $a \in \mathbf{R}$ und $b = 0$ zu betrachten. Sei also γ_0 eine Karte der Geraden $L(0)$.



Die Schiebung $\sigma_{(-a,0)}$ ist ein Diffeomorphismus und weiter gilt $\sigma_{(-a,0)} \Big|_{L(a)}^{L(0)} = (\varphi_{L(a)})(\varphi_{L(0)})^{-1}$.
 Damit ist dann $\left(\sigma_{(-a,0)} \Big|_{L(a)}^{L(0)}\right) \gamma_0$ eine Karte der Geraden $L(a)$. Nun ist aber

$$\left(\sigma_{(-a,0)} \Big|_{L(a)}^{L(0)}\right) \gamma_0 = (\varphi_{L(a)})(\varphi_{L(0)})^{-1}(\varphi_{L(0)})\gamma = \varphi_{L(a)}\gamma = \gamma_a.$$

Die Behauptung für die Geraden der Form $L(a,s)$ folgt analog, man verwendet dort die Schiebung $\sigma_{(-a,-s)}$. □

Wir sehen also, dass je zwei vertikale Geraden gewissermaßen (via \mathfrak{G}) „dieselbe“ differenzierbare Struktur besitzen, denn wenn $L(a)$ eine Karte der Form $(a, x) \mapsto x^\gamma$ besitzt, so ist $(b, x) \mapsto x^\gamma$ eine Karte von $L(b)$. Gleiches gilt für die Standardgeraden untereinander. Es ist jedoch *nicht* klar, in wieweit die differenzierbaren Strukturen der beiden verschiedenen Arten von Geraden „in der Nähe der Ferngeraden“ miteinander vergleichbar sind, sprich, ob sich die differenzierbare Struktur zwischen einer Vertikalen und einer Standardgerade auf so einfache Weise übertragen lässt wie innerhalb der jeweiligen Art der Geraden. Wir erinnern uns: Die einzig problematische Stelle bei dieser Frage ist wegen Korollar 4.10 die differenzierbare Struktur in einer Umgebung des Fernpunktes der jeweiligen Geraden, ansonsten stimmen auch hier die differenzierbaren Strukturen gewissermaßen überein. Natürlich vermitteln Perspektivitäten die differenzierbare Struktur zwischen beliebigen Geraden, die Beschreibung der Abbildungen wird dabei im Allgemeinen aber so kompliziert, dass sich konkrete Rechnungen damit kaum mehr durchführen lassen.

Im Gegensatz zu dieser Problematik lassen sich die differenzierbaren Strukturen von Standardgeraden und der Ferngerade auf „einfache“ Weise übertragen.

4.14 Proposition: Es sei \mathfrak{E} eine differenzierbare Schiebe-Ebene, $O \subseteq \mathfrak{G}$ eine offene Teilmenge, $\gamma: O \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung und τ wie in 4.12 definiert.

Dann ist die Abbildung $\gamma_\infty := \left(\varphi_{L(\infty)} \Big|_{O^\tau}\right) \tau\gamma$ genau dann eine mit der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{E} verträgliche Karte der Geraden $L(\infty)$, wenn die Abbildung $\gamma_a := \left(\varphi_{L(a,b)} \Big|_O\right) \gamma$

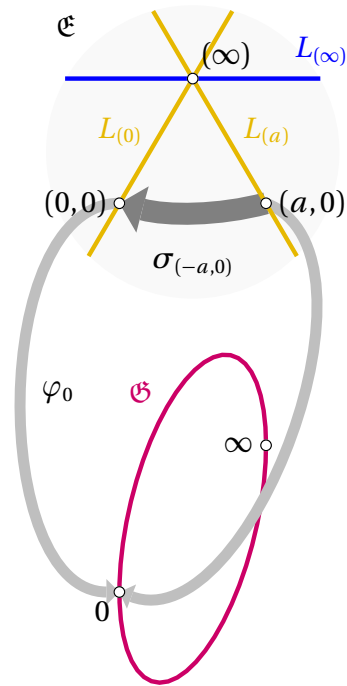
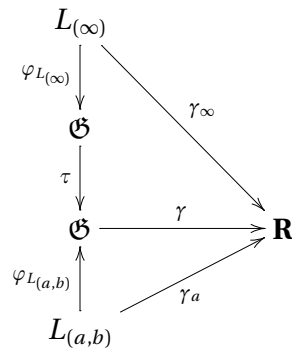


Abbildung 4.9:
Übertragen der differenzierbaren Struktur vertikaler Geraden mittels Schiebung

eine mit der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{E} verträgliche Karte der Geraden $L_{(a,b)}$ ist.



Beweis: Wegen Proposition 4.13 reicht es, die Behauptung für die Gerade $L_{(0,0)}$ zu zeigen.

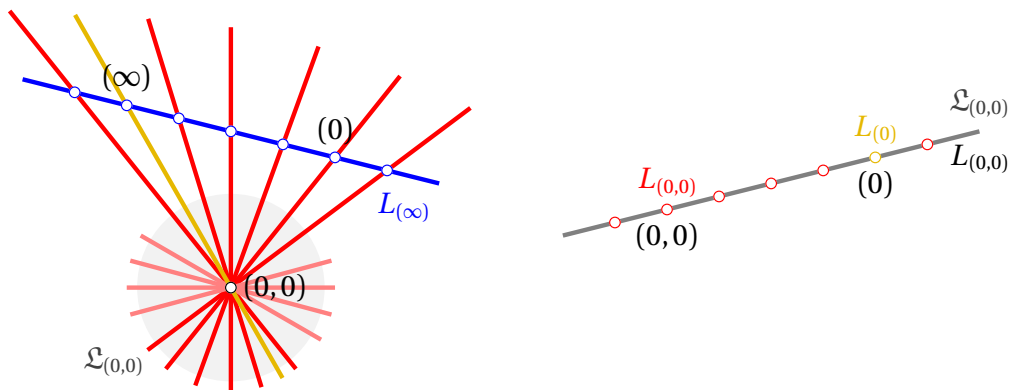


Abbildung $\nu: L_{(\infty)} \rightarrow \mathfrak{L}_{(0,0)}$ und...

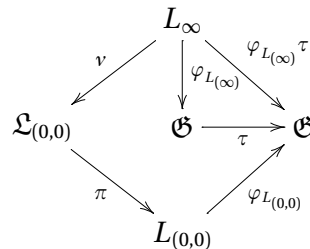
...anschließend Polarität π

Abbildung 4.10: Übertragen der differenzierbaren Struktur von der Fern- auf Standardgerade

Die Abbildung

$$\nu := \bullet \vee (0,0): L_{\infty} \rightarrow \mathfrak{L}_{(0,0)}: \begin{cases} (x) \mapsto L_{(x, -\mathfrak{h}(-x))} \\ (\infty) \mapsto L_{(0)} \end{cases}$$

ist ein Diffeomorphismus und dasselbe gilt wegen Proposition 3.12 für die Polarität π aus Lemma 4.5. Damit ist γ_0 eine Karte der Geraden $L_{(0,0)}$ genau dann, wenn $\nu\pi\gamma_0$ eine Karte der Geraden L_{∞} ist.



Durch einfaches Nachrechnen sieht man, dass $\nu\pi\varphi_{L_{(0,0)}} = \varphi_{L_{(\infty)}}\tau$, also ist $\nu\pi\gamma_0 = \gamma_{\infty}$. \square

4.3 Eine Familie differenzierbarer affiner Schiebe-Ebenen

Im vorherigen Abschnitt hatten wir uns mit einigen notwendigen Bedingungen für die Gestalt der differenzierbaren Struktur einer Schiebe-Ebene beziehungsweise derer Geraden beschäftigt. Nun wollen wir eine Familie differenzierbarer affiner Schiebe-Ebenen konstruieren.

Wir wollen dabei nach folgendem Muster vorgehen. Es ist bekannt, dass die klassische projektive Ebene über \mathbf{R} differenzierbar ist und dass diese als Schiebe-Ebene aufgefasst werden kann, indem man die planare Funktion $\eta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x^2$ für die Beschreibung der Standardgeraden verwendet (siehe auch Beispiel 4.6). Diese Geraden sollen durch eine kleine Störung so vorsichtig modifiziert werden, dass sich trotzdem noch die differenzierbare Struktur der ursprünglichen Ebene übernehmen lässt. So erhalten wir in der Tat eine Familie differenzierbarer affiner Schiebe-Ebenen. Wir finden aber auch eine hinreichende Bedingung, die verhindert, dass der projektive Abschluss gewisser Ebenen dieser Familie differenzierbar ist, obwohl die differenzierbare Struktur noch gut mit Punktreihen und Geradenbüscheln verträglich ist.

4.15 Generalvoraussetzung: Gegeben sei eine beschränkte Funktion $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ so, dass

$$\eta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x^2 + \alpha(x)$$

eine planare Funktion ist. Außerdem soll α für alle $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ sowie für alle $n \in \mathbf{N}$ die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^m \cdot \alpha^{(n)}(x) = 0$$

oder äquivalent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^m} \cdot \alpha^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

erfüllen.

Wir versehen die Menge \mathcal{G} mit der von folgenden beiden Karten induzierten differenzierbaren Struktur.

$$\begin{aligned} \gamma_0: \mathcal{G} \setminus \{\infty\} &\rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x \\ \gamma_\infty: \mathcal{G} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbf{R}: \begin{cases} x \mapsto \frac{1}{x} \\ \infty \mapsto 0 \end{cases} \text{ für } x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

4.16 Lemma: Es seien p und q reelle gebrochen rationale Funktionen mit $|p(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$, und $n \in \mathbf{N}$.

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) \cdot \alpha^{(n)}(p(x)) = 0$.

Falls $|p(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, so erhalten wir analog $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) \cdot \alpha^{(n)}(p(x)) = 0$.

Beweis: Zu jeder gebrochen rationalen Funktion τ gibt es eine Zahl $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ und eine gebrochen rationale Funktion $\tilde{\tau}$ so, dass

$$\tau(x) = \frac{1}{x^k} \cdot \tilde{\tau}(x)$$

und $\tilde{\tau}(x)$ beschränkt ist für $x \rightarrow 0$.

Damit folgt aber aus der Bedingung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \cdot \alpha^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ aus Generalvoraussetzung 4.15 sofort

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) \cdot \alpha^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Durch ein Anpassen der Laufvariablen x und geeignete Abschätzungen lässt sich dann der allgemeine Fall $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) \cdot \alpha^{(n)}(p(x))$ auf diese Form mit einer geeigneten gebrochen rationalen Funktion \tilde{q} zurückführen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) \cdot \alpha^{(n)}(p(x)) \leq \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \tilde{q}(\tilde{x}) \cdot \alpha^{(n)}\left(\frac{1}{\tilde{x}}\right) = 0.$$

□

Dass es in der Tat Beispiele für solche Störfunktionen α gibt, zeigt das folgende Lemma.

4.17 Lemma: Es sei $c \in [0, 1[$ eine Konstante. Die Abbildung

$$\alpha: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto c \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 \right) x^2$$

erfüllt die in Generalvoraussetzung 4.15 geforderten Bedingungen.

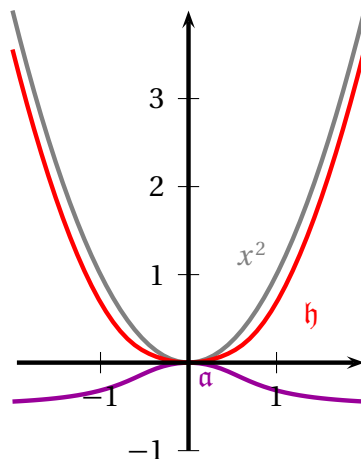


Abbildung 4.11:
Graphen für $c = \frac{1}{2}$

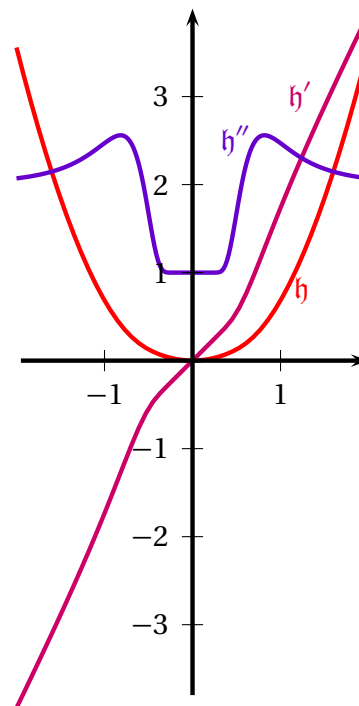


Abbildung 4.12:
Ableitungen von h

Beweis: Sicherlich ist $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ und erfüllt auch die Bedingungen an das asymptotische Verhalten. Um zu zeigen, dass die Funktion $\eta = (x \mapsto x^2) + \alpha$ planar ist, verwenden wir Lemma 4.4. Die erste Ableitung

$$\eta'(x) = \begin{cases} 2 \left((1-c)x + c e^{-\frac{1}{x^2}} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) & \text{für } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig und wegen $\eta'(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ auch surjektiv. Sie ist außerdem injektiv, weil die zweite Ableitung

$$\eta''(x) = \begin{cases} 2 \left(1 - c + c e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 1 \right) \right) & \text{für } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 2(1-c) & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

strikt positiv ist. (Abbildungen 4.11 und 4.12) □

4.18 Lemma: Wir erhalten für die Punktmenge \mathfrak{P} der Schiebe-Ebene eine Karte der affinen Punkte

$$\kappa_{(0,0)}: \mathfrak{P} \setminus L_{(\infty)} \rightarrow \mathbf{R}^2: (x, y) \mapsto (x, y),$$

eine Karte, die affine Punkte und Punkte der Ferngeraden umfasst

$$\kappa_{(0)}: \mathfrak{P} \setminus L_{(0)} \rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - x \right) \right) \\ (x) \mapsto (0, x) \end{cases}$$

und eine Karte in einer Umgebung um den Fernpunkt der senkrechten Geraden

$$\kappa_{(\infty)}: \mathfrak{P} \setminus (\{(x, x^2) \mid x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0)\}) \rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} (x, y) \mapsto \left(-\frac{2x}{y-x^2}, \frac{1}{y-x^2} \right) \\ (x) \mapsto \left(\frac{1}{x}, 0 \right) \\ (\infty) \mapsto (0, 0). \end{cases}$$

Diese Karten bilden einen Atlas der Menge \mathfrak{P} ; mit der von ihm erzeugten differenzierbaren Struktur ist \mathfrak{P} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Mit der Polarität π aus Lemma 4.5 erhalten wir ebenso einen Atlas für die Geradenmannigfaltigkeit mit einer Karte, die Standardgeraden umfasst,

$$\lambda_{(0,0)}: \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{L}_{(\infty)} \rightarrow \mathbf{R}^2: L_{(x,y)} \mapsto (-x, -y)$$

einer Karte, die zusätzlich senkrechte Geraden abbildet,

$$\lambda_{(0)}: \mathfrak{L} \setminus (\{L_{(0,x)} \mid x \in \mathbf{R}\} \cup \{L_{(\infty)}\}) \rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} L_{(x,y)} \mapsto \left(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + x \right) \right) \\ L_{(x)} \mapsto (0, -x), \end{cases}$$

und eine Karte in einer Umgebung der Ferngeraden

$$\lambda_{(\infty)}: \mathfrak{L} \setminus \{L_{(x,x^2)} \mid x \in \mathbf{R}\} \rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} L_{(x,y)} \mapsto \left(\frac{2x}{-y-x^2}, \frac{1}{-y-x^2} \right) \\ L_{(x)} \mapsto \left(-\frac{1}{x}, 0 \right) \\ L_{(\infty)} \mapsto (0, 0). \end{cases}$$

Beweis: Die erste Möglichkeit, dies einzusehen, ist direktes Nachrechnen der Kartenwechsel und die Erkenntnis, dass diese in der Tat differenzierbar sind.

Andererseits ist die angegebene differenzierbare Struktur genau diejenige, die die klassische Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ in ihrem Parabelmodell trägt, das heißt als Schiefparabel-Ebene $\mathcal{E}_{1,2}$. Da die Punkträume übereinstimmen, kann diese differenzierbare Struktur unmittelbar auch für die hier untersuchten Schiebe-Ebenen verwendet werden. Etwas konkreter tragen die Geraden $L_{(0,0)}$ sowie $L_{(0)}$ und $L_{(\infty)}$ via \mathfrak{G} wie in Definition 4.12 die in der Generalvoraussetzung 4.15 definierte differenzierbare Struktur. Die differenzierbare Struktur für die Punktmenge ergibt sich dann mit Proposition 3.11 durch geometrische Konstruktionen. \square

Mit dieser Angabe differenzierbarer Strukturen für Punkt- und Geradenmenge ist noch keine Aussage darüber gemacht, wie sich diese differenzierbaren Strukturen mit den geometrischen Strukturen und Operationen vertragen. Dies soll im Folgenden geschehen.

4.19 Lemma: Die Punktreihe einer jeden Geraden $L \in \mathcal{L}$ der betrachteten Schiebe-Ebene ist eine glatte Untermannigfaltigkeiten der Punktmannigfaltigkeit \mathfrak{P} .

Ist $(L, M) \in (\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \setminus \Delta_{\mathcal{L}}$ ein Paar verschiedener Geraden, dann schneiden sich die Punktreihen der beiden Geraden transversal.

Mit Hilfe der Polarität π überträgt sich dies auch auf Geradenbüschel in der Geradenmannigfaltigkeit.

Beweis: Da die differenzierbare Struktur der Ebene mit dem Parabelmodell der klassischen differenzierbaren Ebene übereinstimmt, ergibt sich die Behauptung für Paare von senkrechten Geraden $L_{(a)}$ mit $a \in \mathbf{R}$ direkt aus den Eigenschaften einer differenzierbaren projektiven Ebene. Dasselbe gilt für den Schnitt einer senkrechten Geraden mit der Ferngeraden $L_{(\infty)}$.

Mit Hilfe von Korollar 4.10 lassen sich senkrechte Geraden und Standardgeraden im affinen Teil der Ebene parametrisieren. Bezüglich der Karte $\varkappa_{(0,0)}$ sieht man dann leicht: Da die erste Ableitung h' nach Lemma 4.4 ein Homöomorphismus ist, muss der Schnitt zwischen einer senkrechten Geraden und einer Standardgeraden sowie zwischen zwei Standardgeraden verschiedener Parallelenscharen ebenfalls transversal sein.

Letztendlich bleibt der Fall einer Parallelenschar von Standardgeraden zu untersuchen. Da Schiebungen Diffeomorphismen sind, reicht es, die Parallelenschar $\{L_{(0,t)} \mid t \in \mathbf{R}\}$, das heißt das Bündel im Fernpunkt (0) , zu betrachten. Ist $p \in L_{(0,t)} \setminus (L_{(0)} \cup L_{(\infty)})$ ein Punkt der Geraden, dann gibt es ein $x \in \mathbf{R}$ so, dass sich für die Koordinaten des Punktes $p \cdot \varkappa_{(0)} = \left(x, -\frac{1}{2} \left(x \cdot a \left(\frac{1}{x}\right) + tx\right)\right)$ ergibt. Bezüglich der Karte $\varkappa_{(0)}$ können wir also eine Gerade $L_{(0,t)}$ als Graph der Funktion

$$g_t: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(x \cdot a \left(\frac{1}{x}\right) + tx\right) & \text{für } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auffassen. Mit der Leibniz-Regel erhalten wir für beliebige Ableitungen des Terms $x \cdot \alpha\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} \left(x \cdot \alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(x^{(i)} \cdot \left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-i)}\right) \\ &= x \cdot \left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} + n \cdot \left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion erhalten wir für die Ableitungen $\left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$ die Beziehung $\left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \sum_{l=1}^n q_{l,n}(x) \cdot \alpha^{(l)}\left(\frac{1}{x}\right)$, wobei $q_{l,n}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{k_{l,j,n}}{x^j}$ gebrochen rationale Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten $k_{l,j,n}$ sind, die von Grad n der Ableitung abhängen. Der Induktionsanfang entspricht der Kettenregel aus der klassischen Analysis. Setzen wir die Formel für n als gegeben voraus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} &= \left(\left(\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}\right)' \\ &= \left(\sum_{l=1}^n q_{l,n}(x) \cdot \alpha^{(l)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \sum_{l=1}^n q'_{l,n}(x) \cdot \alpha^{(l)}\left(\frac{1}{x}\right) + q_{l,n}(x) \cdot \alpha^{(l+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n+1} q_{l,n+1}(x) \cdot \alpha^{(l)}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

mit $q_{l,n+1}(x) := q'_{l,n}(x) - q_{l-1,n}(x) \cdot \frac{1}{x^2}$ für $l \leq n$ und $q_{n+1,n+1}(x) := -q_{n,n} \cdot \frac{1}{x^2}$ als neue gebrochen rationale Funktion.

Mit Lemma 4.16 erhalten wir damit $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \alpha\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = 0$. Falls $n \geq 2$ folgt weiterhin $\lim_{x \rightarrow 0} g_t^{(n)}(x) = 0$ im Grenzübergang. Für $n = 1$ können wir $\lim_{x \rightarrow 0} g_t'(x) = -\frac{1}{2}t$ berechnen.

Das heißt einerseits, dass g_t überall beliebig oft stetig differenzierbar ist. Insbesondere kann damit die Punktreihe von $L_{(0,t)}$ überall lokal als Graph einer \mathcal{C}^∞ -Funktion dargestellt werden und ist somit eine \mathcal{C}^∞ -Untermannigfaltigkeit der Punktmannigfaltigkeit.

Da dabei andererseits $\lim_{x \rightarrow 0} g_t'(x) = -\frac{1}{2}t$ gilt, schneiden sich zwei Geraden der Parallelschar $\{L_{(0,t)} \mid t \in \mathbf{R}\}$ untereinander und auch mit der Ferngeraden transversal. \square

Da jetzt sichergestellt ist, dass die Punktfolgen (und damit auch die Geradenbüschel) mit der gewählten differenzierbaren Struktur verträglich sind, soll jetzt versucht werden, mit Hilfe von differenzierbaren Familien, die die Punktfolgen parametrisieren, auf die Differenzierbarkeit des Schneidens zu schließen (und damit letztendlich auch auf die Differenzierbarkeit des Verbindens).

4.20 Lemma: Es sei $L_{(s_0,t_0)} \in \mathcal{L}$ eine Gerade der Schiebe-Ebene. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L} \setminus \{L_{(x)} \mid x \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}\}$ der Geraden, so dass

$$\alpha: \mathcal{U} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{P}: (L_{(s,t)}, x) \mapsto \begin{cases} (x+s, h(x)+t) & \text{für } x \neq \infty \\ (s) & \text{für } x = \infty \end{cases}$$

eine glatte Familie von Untermannigfaltigkeiten ist, die alle Geraden $L_{(s,t)} \in \mathcal{L}$ parametrisiert, das heißt $(L_{(s,t)}, \mathfrak{G})^\alpha = L_{(s,t)}$ erfüllt.

Beweis: Mit $\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \setminus \{L_{(x)} \mid x \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}\}$ und der Schiebung $\sigma_{(s,t)}$ definiert

$$\sigma: \tilde{\mathcal{L}} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}: (L_{(s,t)}, p) \mapsto p \cdot \sigma_{(s,t)}$$

eine Abbildung, die auf $\tilde{\mathcal{L}} \times \mathbf{R}^2$ differenzierbar ist, wie man leicht nachrechnet. Betrachten wir eine Stelle $(L_{(s,t)}, (c)) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathfrak{P}$, so benötigen wir für die Untersuchung der Differenzierbarkeit von σ die Karte $\lambda_{(0,0)} \times \chi_{(0)}$ im Definitions- und $\chi_{(0)}$ im Bildbereich. Bezüglich dieser Karten erhalten wir die lokale Repräsentation

$$(\lambda_{(0,0)}^{-1} \times \chi_{(0)}^{-1}) \sigma \chi_{(0)}: ((s, t), (x, y)) \mapsto \left(\frac{x}{1+sx}, \frac{2y+2s-tx+s^2x}{2(1+sx)} \right).$$

Da $(c) \cdot \chi_{(0)} = (0, c)$ kann die Umgebung $\mathcal{U} \stackrel{\circ}{\subseteq} \tilde{\mathcal{L}}$ so klein gewählt werden, dass im Nenner $1+sx$ keine Nullstellen auftreten.

Untersuchen wir nun die Abbildung

$$g: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{P}: x \mapsto \begin{cases} (x, h(x)) & \text{für } x \neq \infty \\ (0) & \text{für } x = \infty. \end{cases}$$

Die lokale Repräsentation von g ist auf $\mathbf{R} \subseteq \mathfrak{G}$ gerade die Umkehrung der in Korollar 4.10 angegebenen Karte der Geraden $L_{(0,0)}$, und damit differenzierbar. In einer Umgebung von $\infty \in \mathfrak{G}$ gilt für die lokale Repräsentation $\gamma_\infty g \chi_{(0)} = g_0$, wobei g_0 im Beweis von Lemma 4.19 definiert wurde. Dort hatten wir auch die Differenzierbarkeit von g_0 bewiesen. Insgesamt ist g also eine differenzierbare Abbildung.

Als Komposition differenzierbarer Abbildungen ist $\alpha = (\text{id}_{\mathcal{U}} \times g) \sigma$ damit ebenfalls differenzierbar. □

4.21 Bemerkung: Wie die differenzierbare Familie aus Lemma 4.20 zustande kommt, ist geometrisch leicht zu erklären: Eine jede Gerade wird parametrisiert, indem mittels einer Schiebung die Parametrisierung einer Referenzgeraden (nämlich von $L_{(0,0)}$) übertragen wird.

Um die folgende differenzierbare Familie geometrisch zu verstehen, bedarf es einer raumgreifenderen Erklärung. Diese soll in Anhang A gegeben werden.

4.22 Lemma: Es sei $L_{(a_0)}$ mit $a_0 \in \mathbf{R}$ eine Gerade der Schiebe-Ebene. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \stackrel{\circ}{\subseteq} \mathcal{L} \setminus \{L_{(\infty)}\}$ dieser Geraden so, dass die Abbildung

$$\lambda_p: \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} L_{(a,b)} \mapsto \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{b}}, a - \sqrt{-b} \right) \\ L_{(a)} \mapsto (0, a) \end{cases}$$

eine Karte der differenzierbaren Struktur der Ebene ist.

Offensichtlich ist $\tilde{\mathfrak{G}} := \mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{G} . Mit der obigen Karte λ_p erhalten wir die glatte Familie von Untermannigfaltigkeiten

$$\beta: \mathfrak{U} \times \tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{P}: \left((c, d), (\lambda_p^{-1}, x) \right) \mapsto \begin{cases} \left(cx + d, a \left(cx - \frac{1}{2c} \right) - x + c^2 x^2 \right) & \text{für } x \in \mathbf{R}, c \neq 0 \\ (d, -x) & \text{für } x \in \mathbf{R}, c = 0 \end{cases}$$

und für alle $L \in \mathfrak{U}$ gilt $(\{L\} \times \tilde{\mathfrak{G}})^\beta = \mathfrak{P}_L \setminus (L \wedge L_{(\infty)})$. Identifiziert man die Punktreihe \mathfrak{P}_L mit L so wird daraus $(\{L\} \times \tilde{\mathfrak{G}})^\beta = L \setminus (L \cap L_{(\infty)})$.

Beweis: Um die Abbildung λ_p überhaupt wie angegeben definieren zu können, müssen wir fordern, dass $\mathfrak{U} \stackrel{\circ}{\subseteq} \tilde{\mathfrak{U}} := \{L_{(a,b)} \mid (a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_-\} \cup \{L_{(a)} \mid a \in \mathbf{R}\}$ ist. Bevor wir überprüfen, ob $\tilde{\mathfrak{U}}$ eine Umgebung von $L_{(a_0)}$ ist, wollen wir λ_p genauer untersuchen.

Für die Umkehrabbildung der Karte λ_p erhalten wir

$${}_p\lambda := \lambda_p^{-1}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \tilde{\mathfrak{U}}: \begin{cases} (c, d) \mapsto L_{\left(d + \frac{1}{2c}, -\frac{1}{4c^2}\right)} & \text{für } c \neq 0 \\ (0, d) \mapsto L_{(d)} & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

Die vertikalen Geraden $L_{(d)}$, die unter λ_p die Koordinaten $(0, d)$ besitzen, sind nicht im Definitionsbereich der Karte $\lambda_{(0,0)}$ enthalten. Damit kann der Kartenwechsel

$${}_p\lambda_{(0,0)} = (\lambda_p)^{-1} \lambda_{(0,0)}: (c, d) \mapsto \left(-d - \frac{1}{2c}, \frac{1}{4c^2} \right)$$

bestimmt werden. Dieser ist an jeder Stelle des Definitionsbereichs ein lokaler Diffeomorphismus, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun ein Paar von Koordinaten $(c_0, d_0) \in \mathbf{R}^2$ gegeben. Es gilt $2c_0 d_0 + 1 = 0$ genau dann, wenn $(c_0, d_0) \cdot (\lambda_p)^{-1} = L_{(0, -d_0^2)}$ ist. Somit ist ein solches Paar (c_0, d_0) nicht im Definitionsbereich der Karte $\lambda_{(0)}$, also auch nicht im Definitionsbereich des Kartenwechsels ${}_p\lambda_{(0)} := (\lambda_p)^{-1} \lambda_{(0)}$ enthalten, welcher durch

$${}_p\lambda_{(0)}: (c, d) \mapsto \left(-\frac{2c}{2cd + 1}, -\frac{d(cd + 1)}{2cd + 1} \right)$$

gegeben ist. Untersuchen wir also den Bildbereich dieses Kartenwechsels. Das Gebiet

$$\begin{aligned} U &:= (\tilde{\mathfrak{U}} \setminus \{L_{(0,x)} \mid x \in \mathbf{R}\}) \cdot \lambda_{(0)} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + a \right) \right) \mid (a, b) \in \mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}_- \right\} \cup \{(0, -a) \mid a \in \mathbf{R}\} \\ &= \left\{ \left(a, \frac{1}{2} \left(ab + \frac{1}{a} \right) \right) \mid (a, b) \in \mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}_- \right\} \cup \{(0, a) \mid a \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

ist in \mathbf{R}^2 durch die Kurve $a \mapsto \left(a, \frac{1}{2a}\right)$ be-
randet (siehe Abbildung 4.13). Für alle Ele-
mente der Form $(0, a_0)$ mit $a_0 \in \mathbf{R}$ ist U eine
offene Umgebung. Also ist $\tilde{U} = U \cdot (\lambda_p)^{-1}$ für
alle Geraden $L_{(a_0)} = (0, a_0) \cdot (\lambda_p)^{-1}$ ebenfalls
eine offene Umgebung. Wir erhalten durch
Nachrechnen, dass der Kartenwechsel

$${}_p\lambda_{(0)}: \mathbf{R}^2 \setminus \{(c, d) \in \mathbf{R}^2 \mid 2cd + 1 = 0\} \rightarrow U$$

ein Diffeomorphismus ist. Damit ist
schließlich die Abbildung λ_p eine Karte
der differenzierbaren Struktur der Schiebe-Ebene.

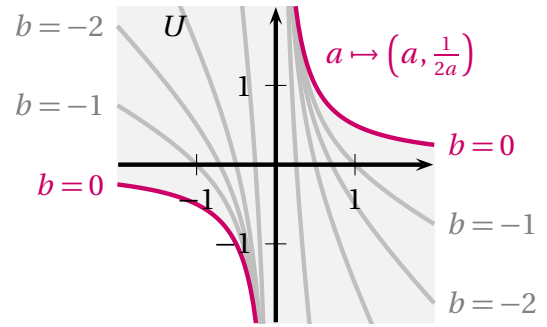


Abbildung 4.13:

Bild des Kartenwechsels ${}_p\lambda_{(0)}$

Untersuchen wir nun, ob die angegebene Abbildung β tatsächlich die gewünschten Ge-
raden parametrisiert.

Geben wir uns die Koordinaten $(c_1, d_1) \in \tilde{U} \cdot \lambda_p$ vor. Im Fall $c_1 \neq 0$ erhalten wir die Abbil-
dung

$$\beta \Big|_{(c_1, d_1) \cdot {}_p\lambda \times \tilde{\mathfrak{G}}} : x \mapsto \left(c_1 x + d_1, \alpha \left(c_1 x - \frac{1}{2c_1} \right) - x + c_1^2 x^2 \right),$$

welche eine Bijektion von $\tilde{\mathfrak{G}}$ auf den affinen Teil der Geraden

$$(c_1, d_1) \cdot {}_p\lambda = L_{\left(d_1 + \frac{1}{2c_1}, -\frac{1}{4c_1^2}\right)}$$

ist. Denn für einen Punkt $p_0 \in L_{\left(d_1 + \frac{1}{2c_1}, -\frac{1}{4c_1^2}\right)} \setminus \{(d_1 + \frac{1}{2c_1})\}$ gibt es genau ein $\tilde{x} \in \mathbf{R}$, nämlich
 $\tilde{x} := c_1 x - \frac{1}{2c_1}$, so, dass

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(\tilde{x} + d_1 + \frac{1}{2c_1}, \alpha(\tilde{x}) + \tilde{x}^2 + \left(-\frac{1}{4c_1^2}\right) \right) \\ &= \left(c_1 x - \frac{1}{2c_1} + d_1 + \frac{1}{2c_1}, \alpha \left(c_1 x - \frac{1}{2c_1} \right) + \left(c_1 x - \frac{1}{2c_1} \right)^2 - \frac{1}{4c_1^2} \right) \\ &= \left(c_1 x + d_1, \alpha \left(c_1 x - \frac{1}{2c_1} \right) - x + c_1^2 x^2 \right) \\ &= x \cdot \beta \Big|_{(c_1, d_1) \cdot {}_p\lambda \times \tilde{\mathfrak{G}}} \end{aligned}$$

gilt.

Im Fall $c_1 = 0$ müssen wir die Gerade $L_{(d_1)} = (0, d_1) \cdot {}_p\lambda$ betrachten. Offensichtlich ist hier
die Einschränkung

$$\beta \Big|_{\{L_{(d_1)}\} \times \tilde{\mathfrak{G}}} : \{L_{(d_1)}\} \times \tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow L_{(d_1)} \setminus \{(d_1)\} : x \mapsto (d_1, -x)$$

eine Bijektion.

Wenden wir uns nun der Differenzierbarkeit der Abbildung β zu. Es reicht dabei die lokale Repräsentation

$$\hat{\beta} = (\lambda_p^{-1} \times \gamma_0^{-1}) \beta \chi_{(0,0)}: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2: ((c, d), x) \mapsto \begin{cases} (cx + d, \alpha(cx - \frac{1}{2c}) - x + c^2x^2) & \text{für } c \neq 0 \\ (d, -x) & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

zu untersuchen. Da $\hat{\beta}$ stetig ist, müssen wegen Proposition 1.3 und 1.4 lediglich die partiellen Ableitungen von $\hat{\beta}$ auf stetige Fortsetzbarkeit für $c \rightarrow 0$ überprüft werden.

Sicherlich ist die Abbildung $((c, d), x) \mapsto cx + d$ und damit die erste Komponente von $\hat{\beta}$ auch an der Stelle $((0, d), x) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Die zweite Komponente von $\hat{\beta}$ ist eine Linearkombination der Abbildungen $((c, d), x) \mapsto -x + c^2x^2$, welche ebenfalls dort beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist, und $\hat{\beta}_3 := ((c, d), x) \mapsto \alpha(cx - \frac{1}{2c})$. Nun gilt aber wegen Lemma 4.16, dass für beliebige höhere partielle Ableitungen $\partial_\nu \hat{\beta}_3$, wobei ν für einen geeigneten Multi-Index steht,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \partial_\nu \hat{\beta}_3((c, d), x) = 0$$

und damit auch jede partielle Ableitung $\partial_\nu \hat{\beta}_3$ an der Stelle $((0, d), x)$ stetig fortsetzbar ist. Also ist β beliebig oft differenzierbar. \square

4.23 Korollar: Unter Generalvoraussetzung 4.15 ist die affine Ableitung (an der Ferngeraden $L_{(\infty)}$) der betrachteten Schiebe-Ebene eine glatte – also \mathcal{C}^∞ -differenzierbare – stabile Ebene.

Beweis: Mit den in Lemma 4.20 und Lemma 4.22 definierten differenzierbaren Familien von Untermannigfaltigkeiten erhält man mit Proposition 1.22 die Differenzierbarkeit des Schneidens von Geraden. Die duale Aussage zu Lemma 4.20 liefert die Differenzierbarkeit des Verbindens von Punkten. \square

4.24 Lemma: Unter Generalvoraussetzung 4.15 ist die betrachtete affine Schiebe-Ebene eine glatte affine Ebene.

Beweis: Wegen Korollar 4.23 ist nur noch zu zeigen, dass die Parallelenabbildung

$$\|: \mathfrak{P} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}: (p, L) \mapsto (p, L)^\|,$$

die dem Paar (p, L) die Parallele zu L durch den Punkt p zuordnet, differenzierbar ist.

Sei also ein Punkt $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ und eine Gerade $L_0 = L_{(a_0, b_0)}$ für $a_0, b_0 \in \mathbf{R}$ gegeben. Die Parallelenschar zu L_0 ist $\{L_{(a_0, t)} \mid t \in \mathbf{R}\}$. Eine Parallele zu L_0 inzidiert also genau dann mit dem Punkt p_0 , wenn $(x_0, y_0) = (x, (x - a_0)^2 + \alpha(x - a_0) + t)$ für geeignete $x, t \in \mathbf{R}$. Durch Umformen dieser Gleichung erhält man schließlich die lokale Repräsentation der Abbildung $\|$ in einer Umgebung von (p_0, L_0) bezüglich der Karte $\lambda_{(0,0)}$ im Bild und den Karten $\chi_{(0,0)}$ sowie $\lambda_{(0,0)}$ im Urbild:

$$\left((\chi_{(0,0)})^{-1} \times (\lambda_{(0,0)})^{-1} \right) \| \lambda_{(0,0)}: ((x, y), (a, b)) \mapsto \left(a, (x - a)^2 + \alpha(x - a) - y \right).$$

Sie ist offensichtlich beliebig oft stetig differenzierbar.

Für einen Punkt $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ und eine Gerade $L_0 = L_{(d_0)}$ mit $d_0 \in \mathbf{R}$ ist bezüglich der Geraden-Komponente die Karte $\lambda_{(0)}$ anzuwenden.

Untersucht man bezüglich dieser Karte die Inzidenzrelation, so stellt man fest, dass ein Punkt (x, y) mit der Geraden $(c, d) \cdot (\lambda_{(0)})^{-1} = L_{(-\frac{1}{c}, \frac{2dc-1}{c^2})}$ für $c \neq 0$ genau dann inzidiert, wenn

$$0 = -cy + cx^2 + 2x + 2d + \alpha \left(x + \frac{1}{c} \right).$$

Weiter stellt man fest, dass ein Punkt (x, y) mit einer Geraden $(0, d) \cdot (\lambda_{(0)})^{-1} = L_{(-d)}$ genau dann inzidiert, wenn

$$0 = x + d.$$

Setzt man

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}: (x, c) \mapsto \begin{cases} \alpha \left(x + \frac{1}{c} \right) & \text{für } c \neq 0 \\ 0 & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

so lassen sich die beiden Fälle zusammenfassen und man erhält *eine* Bedingung, nämlich, dass ein Punkt (x, y) genau dann mit einer Geraden $(c, d) \cdot (\lambda_{(0)})^{-1}$ inzidiert, wenn

$$0 = -cy + cx^2 + 2x + 2d + f(x, c).$$

Wegen Lemma 4.16 ist f beliebig oft stetig differenzierbar.

Des weiteren sind zwei Geraden $(c_1, d_1) \cdot (\lambda_{(0)})^{-1}$ und $(c_2, d_2) \cdot (\lambda_{(0)})^{-1}$ genau dann parallel, wenn $c_1 = c_2$. Insgesamt erhält man die Beschreibung der Abbildung \parallel bezüglich der Karte $\lambda_{(0)}$ im Bild und den Karten $\lambda_{(0)}$ sowie $\alpha_{(0,0)}$ im Urbild:

$$\left((\alpha_{(0,0)})^{-1} \times (\lambda_{(0)})^{-1} \right) \parallel \lambda_{(0)}: ((x, y), (c, d)) \mapsto \left(c, \frac{1}{2}(-cy + cx^2 + 2x + f(x, c)) \right)$$

Auch dies ist beliebig oft stetig differenzierbar. □

4.25 Korollar: Durch die in Lemma 4.17 angegebene Familie von Störfunktionen wird eine Familie glatter affiner Schiebe-Ebenen beschrieben.

4.3.1 Der Einfluss der Störfunktion α auf die Differenzierbarkeit der projektiven Ebene

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Störfunktion α auf die Differenzierbarkeit der projektiven Ebene auswirkt. Falls α die Nullfunktion ist, so ist die betrachtete Schiebe-Ebene isomorph zur klassischen Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$. Falls α „harmlos“ genug ist (wir werden noch sehen, was das genau bedeuten soll), wird sich herausstellen, dass die betrachtete Schiebe-Ebene keine differenzierbare projektive Ebene sein kann. Das heißt, es gibt in der Tat differenzierbare affine Schiebe-Ebenen, deren projektiver Abschluss *nicht* differenzierbar ist.

Dieser Teilabschnitt folgt dem Vorgehen von Immervoll in (Imm98). Er geht dort ebenfalls von einer leicht modifizierten Normalparabel für \mathfrak{h} aus, beschränkt die Störung aber auf einen kompakten Träger. Generalvoraussetzung 4.15 lässt hingegen Störungen auf einem unbeschränkten Definitionsbereich zu, und Lemma 4.17 zeigt, dass es auch geeignete

derartige Störfunktionen gibt. Immervolls Argumente müssen somit der veränderten Ausgangssituation angepasst werden.

Dabei werden zwei Folgen von Punktepaaren untersucht, deren Verbindungsgerade gegen die Ferngerade konvergiert. Diese Folgen zeigen dann auf, dass gewisse projektive Schiebe-Ebenen keine differenzierbare Struktur besitzen können, die differenzierbares „Verbinden“ zulässt.

4.26 Definition: Es seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ die Koordinaten zweier Punkte p_0 respektive p_1 bezüglich der Karte $\alpha_{(0)}$, also $p_0 \cdot \alpha_{(0)} = (x_0, y_0)$ und $p_1 \cdot \alpha_{(0)} = (x_1, y_1)$. Ist die Verbindungsgerade $L = p_0 \vee p_1$ der beiden Punkte im Definitionsbereich der Karte $\lambda_{(\infty)}$ enthalten und besitzt L bezüglich dieser Karte die Koordinaten $L \cdot \lambda_{(\infty)} = (c, d) \in \mathbf{R}^2$, dann erhält man Abbildungen \mathfrak{c} und \mathfrak{d} , die die Koordinaten der Verbindungsgerade in Abhängigkeit von den Koordinaten der Punkte beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}: ((x_0, y_0), (x_1, y_1)) &\mapsto c = \left(\left((x_0, y_0)^{\alpha_{(0)}^{-1}} \vee (x_1, y_1)^{\alpha_{(0)}^{-1}} \right) \cdot \lambda_{(\infty)} \right)_1 \\ \mathfrak{d}: ((x_0, y_0), (x_1, y_1)) &\mapsto d = \left(\left((x_0, y_0)^{\alpha_{(0)}^{-1}} \vee (x_1, y_1)^{\alpha_{(0)}^{-1}} \right) \cdot \lambda_{(\infty)} \right)_2. \end{aligned}$$

Beschränkt man sich bei der Wahl dieser Punkte $p_0 = (x_0, y_0) \cdot \alpha_{(0)}^{-1}$ und $p_1 = (x_1, y_1) \cdot \alpha_{(0)}^{-1}$ auf Punkte im affinen Teil der Schiebe-Ebene, also $p_0, p_1 \in \mathbf{R}^2$, so ist $p_0 \vee p_1 \in \mathcal{L} \setminus \{L_{(\infty)}\}$. Bei der Betrachtung spielt also nur noch die Karte $\lambda_{(\infty)}|_{\mathcal{L} \setminus \{L_{(\infty)}\}}$ eine Rolle; diese befindet sich in der differenzierbaren Struktur der differenzierbaren *affinen* Schiebe-Ebene. Damit ist nicht gesagt, dass die Karte $\lambda_{(\infty)}$ in der differenzierbaren Struktur der projektiven Ebene enthalten sein muss. Diese Frage zu klären ist auch gar nicht nötig: Wir werden sehen, dass wir die Untersuchung auf dem affinen Teil zu Ende führen können.

Die Inzidenzrelation lässt sich durch eine Gleichung beschreiben:

4.27: Es ist

$$L = (c, d) \cdot (\lambda_{(\infty)})^{-1} = L\left(\frac{c}{2d}, \frac{4d-c^2}{4d^2}\right)$$

und

$$p_0 = (x_0, y_0) \cdot (\alpha_{(0)})^{-1} = \left(\frac{1}{x_0}, -\frac{2y_0x_0 - 1}{x_0^2} \right).$$

Die Gerade L inzidiert also mit dem Punkt p_0 genau dann, wenn

$$-\frac{2y_0x_0 - 1}{x_0^2} = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{c}{2d} \right)^2 + \alpha\left(\frac{1}{x_0} - \frac{c}{2d}\right) + \frac{4d - c^2}{4d^2}$$

oder äquivalent

$$0 = 2y_0d - c + x_0 + dx_0 \alpha\left(\frac{1}{x_0} - \frac{c}{2d}\right)$$

gilt.

Die Koordinaten $(c, d) = L \cdot \lambda_{(\infty)}$ der Verbindungsgeraden $L = p_0 \vee p_1$ werden also in Abhängigkeit von den Koordinaten $(x_0, y_0) = p_0 \cdot \alpha_{(0)}$ und $(x_1, y_1) = p_1 \cdot \alpha_{(0)}$ beschrieben durch

das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= 2y_0d - c + x_0 + dx_0 \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{c}{2d} \right) \\ 0 &= 2y_1d - c + x_1 + dx_1 \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{c}{2d} \right). \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so erhält man:

$$0 = 2d(y_0 - y_1) + x_0 - x_1 + d \left(x_0 \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{c}{2d} \right) - x_1 \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{c}{2d} \right) \right).$$

4.28 Definition und Feststellung: Die Abbildung $f: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ sei gegeben durch

$$f: (x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) \mapsto 2v(y_0 - y_1) + x_0 - x_1 + v \left(x_0 \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right) - x_1 \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{u}{2v} \right) \right).$$

Das Tupel $((x_0, y_0), (x_1, y_1), (c, d))$ von Koordinaten zweier Punkte und ihrer Verbindungsgeraden liegt damit in der Nullstellenmenge von f . Betrachtet man also zu den Koordinaten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zweier Punkte die Koordinaten der Verbindungsgerade $(c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1))$, und setzt man weiter

$$\tilde{f}: (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto f(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)),$$

so gilt $\tilde{f}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$. Daraus folgt $D_{(x_0, y_0, x_1, y_1)} \tilde{f} = 0$ und $\partial_3 \tilde{f}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$.

4.29: Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_3 \tilde{f}(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &= \partial_3 f(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \\ &\quad + \partial_5 f(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \cdot \partial_3 c(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &\quad + \partial_6 f(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \cdot \partial_3 d(x_0, y_0, x_1, y_1), \end{aligned}$$

und weiter erhält man für die einzelnen Terme

$$\begin{aligned} \partial_3 f(x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) &= -1 + v \left(-\alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{u}{2v} \right) + \frac{1}{x_1} \alpha' \left(\frac{1}{x_1} - \frac{u}{2v} \right) \right) \\ \partial_5 f(x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) &= \frac{1}{2} \left(x_1 \alpha' \left(\frac{1}{x_1} - \frac{u}{2v} \right) - x_0 \alpha' \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right) \right) \\ \partial_6 f(x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) &= 2(y_0 - y_1) + \left(x_0 \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right) - x_1 \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{u}{2v} \right) \right) \\ &\quad + \frac{u}{2v} \left(x_0 \alpha' \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right) - x_1 \alpha' \left(\frac{1}{x_1} - \frac{u}{2v} \right) \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir analog zur Definition von f eine einzelne Gleichung aus 4.27.

4.30 Definition und Feststellung: Die Abbildung $g: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ sei durch

$$g: (x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) \mapsto 2y_0v - u + x_0 + vx_0 \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right)$$

gegeben.

Das Tupel $((x_0, y_0), (x_1, y_1), (c, d))$ von Koordinaten zweier Punkte und ihrer Verbindungsgerade liegt in der Nullstellenmenge der Funktion g . Betrachtet man also zu den Koordinaten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zweier Punkte die Koordinaten $(c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1))$ der Verbindungsgerade, und setzt man weiter

$$\tilde{g}: (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto g(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)),$$

so gilt $\tilde{g}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$. Daraus folgt $D_{(x_0, y_0, x_1, y_1)} \tilde{g} = 0$ und $\partial_3 \tilde{g}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$.

4.31: Man erhält

$$\begin{aligned} \partial_3 g(x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) &= 0 \\ \partial_5 g(x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) &= -1 - \frac{1}{2} x_0 \alpha' \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right) \\ \partial_6 g(x_0, y_0, x_1, y_1, u, v) &= 2y_0 + x_0 \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right) + \frac{u}{2v} x_0 \alpha' \left(\frac{1}{x_0} - \frac{u}{2v} \right), \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_3 \tilde{g}(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &= \partial_3 g(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \\ &\quad + \partial_5 g(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \cdot \partial_3 c(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &\quad + \partial_6 g(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \cdot \partial_3 d(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &= \partial_5 g(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \cdot \partial_3 c(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &\quad + \partial_6 g(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \cdot \partial_3 d(x_0, y_0, x_1, y_1). \end{aligned}$$

Die Gleichungen aus 4.29 und 4.31 ergeben ein Gleichungssystem für die Funktionen $\partial_3 c$ und $\partial_3 d$. Der Übersichtlichkeit halber lassen wir die Argumente $(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1))$ bei Ableitungen von f und g sowie (x_0, y_0, x_1, y_1) bei Ableitungen von c und d weg.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_3 f + \partial_5 f \cdot \partial_3 c + \partial_6 f \cdot \partial_3 d \\ 0 &= \partial_5 g \cdot \partial_3 c + \partial_6 g \cdot \partial_3 d \end{aligned}$$

4.32: Gilt $\partial_6 f(x_0, y_0, x_1, y_1, c(x_0, y_0, x_1, y_1), d(x_0, y_0, x_1, y_1)) \neq 0$, dann lässt sich dieses Gleichungssystem so umformen, dass $\partial_3 d$ in einer Gleichung eliminiert ist, und man erhält

$$0 = -\frac{\partial_6 g \cdot \partial_3 f}{\partial_6 f} + \partial_3 c \cdot \left(\partial_5 g - \frac{\partial_6 g \cdot \partial_5 f}{\partial_6 f} \right),$$

womit man später $\partial_3 c(x_0, y_0, x_1, y_1)$ bestimmen kann.

Nach dieser Vorarbeit wollen wir jetzt konkret das Verhalten von $\partial_3 \partial$ untersuchen, wenn die Punkte p_0 und p_1 gegen Punkte auf der Ferngeraden konvergieren. Wir werden feststellen, dass unter Umständen das Verhalten von $\partial_3 \partial$ von dem jeweiligen Grenzübergang abhängt und somit bezüglich keiner differenzierbaren Struktur das Verbinden von Punkten stetig differenzierbar sein kann.

Die Untersuchung soll anhand der Folgen von Koordinatenpaaren

$$(p_{0;n}^{[1]} \cdot \mathcal{X}_{(0)}, p_{1;n}^{[1]} \cdot \mathcal{X}_{(0)})_{n \in \mathbf{N}} := (x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]})_{n \in \mathbf{N}} := \left(\frac{1}{n}, 0, \frac{2}{n}, 1 \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

und

$$(p_{0;n}^{[2]} \cdot \mathcal{X}_{(0)}, p_{1;n}^{[2]} \cdot \mathcal{X}_{(0)})_{n \in \mathbf{N}} := (x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]})_{n \in \mathbf{N}} := \left(\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, 1 \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

vorgenommen werden. Um die dahinter liegende geometrische Idee anzudeuten, sei angemerkt, dass der erste Punkt $p_{0;n}^{[1]} = p_{0;n}^{[2]}$ bei beiden Folgen übereinstimmt, während der Punkt $p_{1;n}^{[1]}$ sich in einem Bereich befindet, wo die Störung auf der Geraden durch α deutlich zum Tragen kommt, die beim Punkt $p_{1;n}^{[2]}$ jedoch schon stärker abgeklungen ist.

Da es sich um eine topologische projektive Ebene handelt, ist das Verbinden von Punkten stetig. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{0;n}^{[1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{0;n}^{[2]} = (0)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1;n}^{[1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{1;n}^{[2]} = (1),$$

folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_{0;n}^{[1]} \vee p_{1;n}^{[1]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{0;n}^{[2]} \vee p_{1;n}^{[2]}) = L_{(\infty)}.$$

Setzt man für $l \in \{1, 2\}$ also

$$\begin{aligned} c_n^{[l]} &:= c(x_{0;n}^{[l]}, y_{0;n}^{[l]}, x_{1;n}^{[l]}, y_{1;n}^{[l]}) \quad \text{und} \\ d_n^{[l]} &:= d(x_{0;n}^{[l]}, y_{0;n}^{[l]}, x_{1;n}^{[l]}, y_{1;n}^{[l]}), \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{[l]} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{[l]} &= 0 \end{aligned}$$

als Grenzwert der via $\lambda_{(\infty)} \Big|_{\mathcal{L} \setminus \{L_{(\infty)}\}}$ gewonnenen Koordinaten $(c_n^{[l]}, d_n^{[l]})$ von $p_{0;n}^{[l]} \vee p_{1;n}^{[l]}$.

Untersuchen wir zunächst die Folge $(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]})_{n \in \mathbf{N}}$. Es gilt

$$0 = \tilde{f}(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}) = -2d_n^{[1]} - \frac{1}{n} + d_n^{[1]} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - \frac{2}{n} \alpha \left(\frac{1}{2}n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right).$$

Wegen $x_{0;n}^{[1]} \neq x_{1;n}^{[1]}$ ist die zugehörige Verbindungsgerade $p_{0;n}^{[1]} \vee p_{1;n}^{[1]}$ eine Standardgerade, das heißt, es gibt $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ so, dass $p_{0;n}^{[1]} \vee p_{1;n}^{[1]} = L_{(a_n, b_n)}$ und $L_{(a_n, b_n)} \cdot \lambda_{(\infty)} \Big|_{\mathcal{L} \setminus L_{(\infty)}} = (c_n^{[1]}, d_n^{[1]})$;

insbesondere hat das $d_n^{[1]} \neq 0$ zur Folge. Wir können deshalb obige Gleichung durch $d_n^{[1]}$ dividieren und erhalten

$$0 = -2 - \frac{1}{nd_n^{[1]}} + \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - \frac{2}{n} \alpha \left(\frac{1}{2}n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right).$$

Die Störfunktion α ist nach Generalvoraussetzung 4.15 beschränkt, somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - \frac{2}{n} \alpha \left(\frac{1}{2}n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) = 0,$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 - \frac{1}{nd_n^{[1]}} + \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - \frac{2}{n} \alpha \left(\frac{1}{2}n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 - \frac{1}{nd_n^{[1]}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - \frac{2}{n} \alpha \left(\frac{1}{2}n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\ &= -2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd_n^{[1]}}, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd_n^{[1]}} = -2.$$

Setzen wir nun die Koordinatenfolge $(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]})$ in die in 4.27 gewonnene Gleichung ein, welche die Inzidenz beschreibt:

$$0 = -c_n^{[1]} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} d_n^{[1]} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right).$$

Da $d_n^{[1]} \neq 0$ kann diese Gleichung durch $2d_n^{[1]}$ dividiert werden,

$$0 = -\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} + \frac{1}{2nd_n^{[1]}} + \frac{1}{2n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right),$$

und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} + \frac{1}{2nd_n^{[1]}} + \frac{1}{2n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nd_n^{[1]}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - 1 + 0, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} = -1.$$

Setzt man $x_n := \frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}}$, so gilt $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich wegen Lemma 4.16

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \alpha'(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \alpha'(x_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \alpha'(x_n) \right) \\ &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{[1]} = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) + \frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 f(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}, c_n^{[1]}, d_n^{[1]}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + d_n^{[1]} \left(-\alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) + \frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \right) \\ &= -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{[1]} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) + \frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\ &= -1 + 0 \cdot 0 = -1. \end{aligned}$$

Für $m \in \{0, 1\}$ ist weiterhin $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m;n}^{[1]} = 0$, und α' sowie α sind beschränkt, also

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_5 f(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}, c_n^{[1]}, d_n^{[1]}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_{1;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{1;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 f(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}, c_n^{[1]}, d_n^{[1]}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 (y_{0;n}^{[1]} - y_{1;n}^{[1]}) + \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - x_{1;n}^{[1]} \alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - x_{1;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \right) \\ &= -2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - x_{1;n}^{[1]} \alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - x_{1;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 + 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) - x_{1;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[1]}} - \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\
 &= -2 + 0 + (-1) \cdot 0 = -2.
 \end{aligned}$$

Die eben verwendeten Argumente helfen auch, die partiellen Ableitungen von g und deren Verhalten beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zu kontrollieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_5 g(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}, c_n^{[1]}, d_n^{[1]}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{2} x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\
 &= -1 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\
 &= -1 + 0 = -1
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 g(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}, c_n^{[1]}, d_n^{[1]}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2y_{0;n}^{[1]} + x_{0;n}^{[1]} \alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\
 &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{0;n}^{[1]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[1]}} + \frac{c_n^{[1]}}{2d_n^{[1]}} \right) \right) \\
 &= 0 + 0 + (-1) \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Mit 4.32 lässt sich nun $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]})$ bestimmen. (Der Übersichtlichkeit halber seien wieder die Argumente der Funktionen unterdrückt.)

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\partial_6 g \cdot \partial_3 f}{\partial_6 f} + \partial_3 c \cdot \left(\partial_5 g - \frac{\partial_6 g \cdot \partial_5 f}{\partial_6 f} \right) \right) \\
 &= -\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 g \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 f}{\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 f} + \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_5 g - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 g \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_5 f}{\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 f} \right) \\
 &= \frac{0 \cdot (-1)}{-2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c \cdot \left(-1 + \frac{0 \cdot 0}{-2} \right) \\
 &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c \cdot (-1) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c,
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]}) = 0.$$

4.33: Wir haben jetzt die einzelnen Terme der Gleichung aus 4.29 so weit unter Kontrolle, dass wir dort den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführen können.

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 f + \partial_5 f \cdot \partial_3 c + \partial_6 f \cdot \partial_3 \vartheta) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 f) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_5 f) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 c) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_6 f) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 \vartheta) \\
 &= -1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 \vartheta),
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 \delta \left(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Nachdem jetzt der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 \delta$ für die erste Folge bestimmt ist, wollen wir uns der Folge $(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]})_{n \in \mathbb{N}}$ zuwenden, um für diese den entsprechenden Grenzwert zu bestimmen.

Da wieder $x_{0;n}^{[2]} \neq x_{1;n}^{[2]}$ gilt, ist die zugehörige Verbindungsgerade $p_{0;n}^{[2]} \vee p_{1;n}^{[2]}$ eine Standardgerade, das heißt, es gibt wieder geeignete $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ so, dass $p_{0;n}^{[2]} \vee p_{1;n}^{[2]} = L_{(a_n, b_n)}$ und $L_{(a_n, b_n)} \cdot \lambda_{(\infty)} \Big|_{\mathcal{L} \setminus L_{(\infty)}} = (c_n^{[2]}, d_n^{[2]})$. Insbesondere folgt für die zweite Koordinate $d_n^{[2]} \neq 0$. Wir können deshalb die aus Proposition 4.27 durch Einsetzen der Folge gewonnene Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= 2y_{0;n}^{[2]} d_n^{[2]} - c_n^{[2]} + x_{0;n}^{[2]} + d_n^{[2]} x_{0;n}^{[2]} \alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \\ &= -c_n^{[2]} + \frac{1}{n} + \frac{d_n^{[2]}}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \end{aligned}$$

durch $2d_n^{[2]}$ dividieren und erhalten

$$0 = -\frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} + \frac{1}{2nd_n^{[2]}} + \frac{1}{2n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right).$$

4.34: Führt man für die letzte Gleichung den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so erhält man

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} + \frac{1}{2nd_n^{[2]}} \right).$$

Die durch Einsetzen der Koordinatenfolge in \tilde{f} gewonnene Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f}(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}) \\ &= -2d_n^{[2]} + \frac{1}{n^2} + d_n^{[2]} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \frac{n-1}{n^2} \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \end{aligned}$$

lässt sich mit $\frac{n}{d_n^{[2]}}$ multiplizieren, und ergibt

$$0 = -2n + \frac{1}{nd_n^{[2]}} + \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) + \frac{1}{n} \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right).$$

Auf Grund des Mittelwertsatzes gibt es ein $\xi_n \in I_n := \left[n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}, \frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right]$ so, dass

$$\begin{aligned} \alpha'(\xi_n) &= \frac{\alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right)}{\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right)} \\ &= \frac{\alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right)}{\frac{n}{n-1}}, \end{aligned}$$

also

$$\alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) - \alpha\left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) = \frac{n}{n-1} \alpha'(\xi_n).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= -2n + \frac{1}{nd_n^{[2]}} + \alpha\left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) - \alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) + \frac{1}{n} \alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) \\ &= -2n + \frac{1}{nd_n^{[2]}} + \frac{-n}{n-1} \alpha'(\xi_n) + \frac{1}{n} \alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right), \end{aligned}$$

das heißt

$$n - \frac{1}{2nd_n^{[2]}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-n}{n-1} \alpha'(\xi_n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right).$$

4.35: Da die Störfunktion α nach Generalvoraussetzung 4.15 beschränkt ist, gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{2nd_n^{[2]}} + n \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{-n}{n-1} \alpha'(\xi_n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{-n}{n-1} \alpha'(\xi_n) \right| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \alpha\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha'(\xi_n)| + 0 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\alpha'\|, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm ist.

4.36: Diese Abschätzung aus 4.35 zusammen mit der Erkenntnis aus 4.34 liefert

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| -n + \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| -n + \frac{1}{2nd_n^{[2]}} - \frac{1}{2nd_n^{[2]}} + \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| -n + \frac{1}{2nd_n^{[2]}} \right| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{2nd_n^{[2]}} + \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\alpha'\| + 0 = \frac{1}{2} \|\alpha'\|. \end{aligned}$$

4.37: Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n-1} - n \right| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \|\alpha'\|. \end{aligned}$$

4.38 Korollar: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 so, dass für alle $n > n_0$ gilt

$$\left| n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{2} \|\alpha'\|$$

$$\left| \frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right| \leq 1 + \varepsilon + \frac{1}{2} \|\alpha'\|,$$

also

$$I_n \subseteq J_\varepsilon := \left[-\varepsilon - \frac{1}{2} \|\alpha'\|, 1 + \varepsilon + \frac{1}{2} \|\alpha'\| \right].$$

Das nächste Ziel wird es wieder sein, die in 4.29 auftretenden Terme so weit zu kontrollieren, dass eine Aussage über das Grenzverhalten von $\partial_3 \mathfrak{d}$ getroffen werden kann.

Wenden wir uns dazu $\partial_3 \mathfrak{f}$ zu.

Setzt man die Folge $(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{f} ein, so führt das zu der Gleichung

$$\mathfrak{f}(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) = -2d_n^{[2]} + \frac{1}{n^2} + d_n^{[2]} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \frac{n-1}{n^2} \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) = 0.$$

Da $x_{1;n}^{[2]} \neq 0$ gilt, folgt aus obiger Gleichung via Division mit $x_{1;n}^{[2]}$

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} + \frac{1}{n^2 x_{1;n}^{[2]}} + \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \frac{n-1}{n^2} \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \\ &= -2 \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} + \frac{1}{n^2} \frac{n^2}{n-1} + d_n^{[2]} \frac{n^2}{n-1} \left(\frac{1}{n} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \frac{n-1}{n^2} \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \\ &= -2 \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} + \frac{1}{n-1} + d_n^{[2]} \left(\frac{n}{n-1} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right). \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{n}{n-1} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right)$ beschränkt und $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{[2]} = 0$, also erhält man aus dieser Gleichung durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n^{[2]} \left(\frac{n}{n-1} \alpha \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \right) \\ &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} = 0.$$

Damit kann $\partial_3 f$ untersucht werden. Es ist

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 f(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + d_n^{[2]} \left(-\alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) + \frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \right) \\
 &= -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-d_n^{[2]} \alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) + \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \\
 &= -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-d_n^{[2]} \alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

4.39: Da α sowie α' beschränkt sind und $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{[2]} = 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^{[2]}}{x_{1;n}^{[2]}} = 0$ gilt, folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 f(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) = -1.$$

4.40: Entsprechend dem Vorgehen bei der Folge $(x_{0;n}^{[1]}, y_{0;n}^{[1]}, x_{1;n}^{[1]}, y_{1;n}^{[1]})_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_5 f(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) = 0.$$

Bleibt noch der Term $\partial_6 f$ zu untersuchen, bei dem dann die entscheidenden Komplikationen auftreten.

Nach der Abschätzung aus 4.36 ist der Term $n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}$ beschränkt, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c_n^{[2]}}{2nd_n^{[2]}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) = 0.$$

4.41: Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^{[2]}}{2nd_n^{[2]}} = 1.$$

4.42: Damit gilt weiter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^{[2]}}{2n^2 d_n^{[2]}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{c_n^{[2]}}{2nd_n^{[2]}} = 0.$$

4.43 Proposition: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz eine Stelle $\zeta_n \in I_n = \left[n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}}, \frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right]$ so, dass

$$\alpha''(\zeta_n) = \frac{\alpha' \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha' \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right)}{\frac{n}{n-1}}$$

also

$$\alpha' \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \alpha' \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) = \frac{-n}{n-1} \alpha''(\zeta_n).$$

Da aber $I_n \subseteq J_\varepsilon$, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Grenzwert $\zeta := \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n$ existiert (via Übergang zu einer Teilfolge von $(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]})_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass die entsprechende Teilfolge von $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist).

Damit erhält man dann

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 f(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2(y_{0;n}^{[2]} - y_{1;n}^{[2]}) + \left(x_{0;n}^{[2]} \alpha \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - x_{1;n}^{[2]} \alpha \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \left(x_{0;n}^{[2]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{0;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - x_{1;n}^{[2]} \alpha' \left(\frac{1}{x_{1;n}^{[2]}} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \frac{1}{n} \alpha' \left(n - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \frac{1}{n} \alpha' \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) + \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \frac{1}{n^2} \alpha' \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{c_n^{[2]}}{2nd_n^{[2]}} \frac{-n}{n-1} \alpha''(\zeta_n) + \frac{c_n^{[2]}}{2n^2 d_n^{[2]}} \alpha' \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{c_n^{[2]}}{2d_n^{[2]}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Folglich gilt wegen 4.41, 4.42 und 4.43 sowie der Voraussetzung, dass α beliebig oft stetig differenzierbar ist:

4.44 Proposition:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 f(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) = -2 - \alpha''(\zeta).$$

Völlig analog zum Vorgehen bei der ersten Folge erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_5 g(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) = -1$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_6 g(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}, c_n^{[2]}, d_n^{[2]}) = 0$$

und damit wieder mit 4.32

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 c(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}) = 0.$$

4.45: Wir haben jetzt wieder die einzelnen Terme der Gleichung aus 4.29 so weit unter Kontrolle, dass wir dort den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführen können. (Der Übersichtlichkeit halber seien wieder einmal die Argumente der Funktionen unterdrückt)

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 f + \partial_5 f \cdot \partial_3 c + \partial_6 f \cdot \partial_3 d) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 f) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_5 f) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 c) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_6 f) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 d) \\
&= -1 + 0 \cdot 0 + (-2 - \alpha''(\zeta)) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_3 d)
\end{aligned}$$

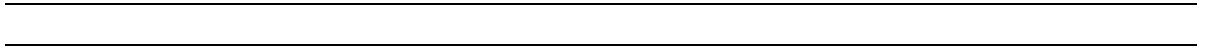
also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_3 d(x_{0;n}^{[2]}, y_{0;n}^{[2]}, x_{1;n}^{[2]}, y_{1;n}^{[2]}) = -\frac{1}{2 + \alpha''(\zeta)}.$$

4.46 Korollar: Besitzt α'' im Intervall J_ε keine Nullstelle, so ist die zugehörige Schiebe-Ebene als projektive Ebene nicht differenzierbar.

Beweis: Nach 4.33 und 4.45 ist $\partial_3 \delta$ nicht stetig an der Stelle $(0, 0, 0, 0)$ fortsetzbar, deswegen kann das Verbinden von Punkten nicht differenzierbar sein. \square

4.47 Korollar: Durch die in Lemma 4.17 angegebene Familie von Störfunktionen wird eine Familie glatter affiner Schiebe-Ebenen beschrieben, deren projektive Abschlüsse nicht differenzierbar sind.



5 Differenzierbarkeit bei 2-dimensionalen Schellhammer-Ebenen

5.1 Definition und allgemeine Erkenntnisse

In diesem Kapitel sollen 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen auf Differenzierbarkeit untersucht werden. Abgesehen von einer Teilfamilie, die sich unserer Untersuchung in der entscheidenden Frage verschließt, werden wir im Allgemeinen in der Lage sein, zu zeigen, dass 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen (einmal abgesehen von der klassischen projektiven Ebene) nicht differenzierbar sind.

5.1 Definition: Eine **Schellhammer-Ebene** ist eine projektive Ebene $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ mit einer Antifahne $(o, L_{(\infty)}) \in (\mathfrak{P} \times \mathfrak{L}) \setminus \mathcal{F}$, die von einer kommutativen Gruppe $\Sigma \leq \text{Aut}(\mathcal{S})$, der sogenannten **Schellhammer-Gruppe**, fixiert wird, das heißt für alle $\varphi \in \Sigma$ gilt $o^\varphi = o$ und $L_{(\infty)}^\varphi = L_{(\infty)}$. Weiter wird verlangt, dass Σ auf $\mathcal{P} \setminus (\mathcal{P}_{L_{(\infty)}} \cup \{o\})$ regulär wirkt. (PS11)

Im Fall 2-dimensionaler Schiebe-Ebenen führt dies gemäß der Klassifikation 3.17 auf die folgende Konstruktion, die in (Sch81, §7) angegeben ist. Da wir ab jetzt auch nur noch 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen untersuchen wollen, soll „Schellhammer-Ebene“ synonym mit „2-dimensionale Schellhammer-Ebene“ verwendet werden.

5.2 Konstruktion einer 2-dimensionalen Schellhammer-Ebene: Die beiden Mengen $\mathbf{R}_\pi := \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ und $\mathbf{R}_{2\pi} := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sollen mit der kanonischen differenzierbaren Struktur versehen werden. Weiter sei eine Funktion $\bar{h}: \mathbf{R}_\pi \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ gegeben mit $\bar{h}(0) = 0$, so dass $\ln \bar{h}: \mathbf{R}_\pi \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}: w \mapsto \ln(\bar{h}(w))$ streng konkav ist; eine solche Funktion \bar{h} soll als **Schellhammer-Funktion** bezeichnet werden. Eine jede Schellhammer-Funktion lässt sich durch einen skalierenden Faktor zu $\bar{h}(\frac{\pi}{2}) = 1$ normieren (die geometrische Struktur der im Folgenden beschriebenen Ebene bleibt davon aber unbeeinflusst).

Wir wollen nun eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \in)$ definieren. Als **Punktmenge** \mathfrak{P} verwenden wir die komplexen Zahlen \mathbf{C} , indem wir sie durch Polarkoordinaten beschreiben: wir setzen $(w, r) := re^{iw} \in \mathbf{C}^\times$, und $(w, 0) := (\bullet, 0) := 0 \in \mathbf{C}$ für den Ursprung. Außerdem fügen wir noch eine Menge von sogenannten **Fernpunkten** (w, ∞) mit $w \in \mathbf{R}_\pi$ hinzu; für $w \in \mathbf{R}$ oder $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$ ist die natürliche Projektion $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\pi: r \mapsto r + \pi\mathbf{Z}$ respektive $\mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}_\pi: r + 2\pi\mathbf{Z} \mapsto r + \pi\mathbf{Z}$ zu verwenden. Die Punktmenge ist also

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathbf{C} \cup \{(w, \infty) \mid w \in \mathbf{R}_\pi\} \\ &= \{(w, r) \in \mathbf{C} \mid w \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}\} \cup \{(\bullet, 0) \in \mathbf{C}\} \cup \{(w, \infty) \mid w \in \mathbf{R}_\pi\}. \end{aligned}$$

Die Geraden sind als Teilmengen der Punktmenge gegeben, womit dann bereits die Inzidenzrelation festliegt.

Für $(a, t) \in \mathbf{C}^\times$ sei

$$\begin{aligned} L_{(a,t)} &:= \left\{ \left(a + w, \frac{t}{\bar{h}(w)} \right) \in \mathfrak{P} \mid w \in \mathbf{R}_\pi^\times \right\} \cup \{(a, \infty) \in \mathfrak{P}\} \\ &= \left\{ \left(w, \frac{t}{\bar{h}(w-a)} \right) \in \mathfrak{P} \mid w + a \in \mathbf{R}_\pi^\times \right\} \cup \{(a, \infty) \in \mathfrak{P}\} \end{aligned}$$

eine **Standardgerade**, für $a \in \mathbf{R}_{2\pi}$ sei

$$L_{(a,0)} := \{(a, r) \in \mathfrak{P} \mid r \in \mathbf{R}^\times\} \cup \{(\bullet, 0) \in \mathfrak{P}\} \cup \{(a, \infty) \in \mathfrak{P}\}$$

eine **Ursprungsgerade** und schließlich

$$L_{(\bullet, \infty)} := \{(w, \infty) \in \mathfrak{P} \mid w \in \mathbf{R}_\pi\}$$

die **Ferngerade**. Die **Geradenmenge** setzt sich dann folgendermaßen zusammen:

$$\mathfrak{L} := \{L_{(a,t)} \mid (a, t) \in \mathbf{C}^\times\} \cup \{L_{(a,0)} \mid a \in \mathbf{R}_{2\pi}\} \cup \{L_{(\bullet, \infty)}\}.$$

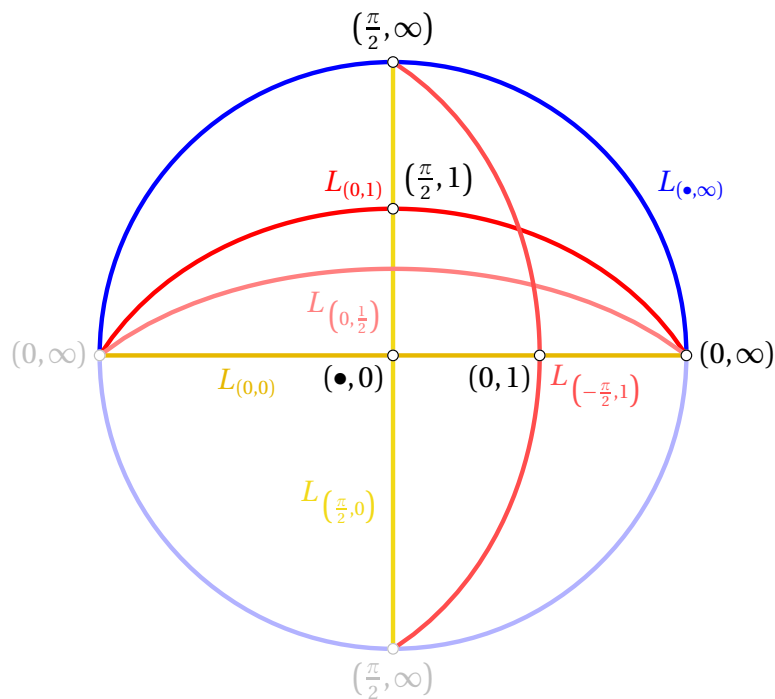


Abbildung 5.1: (Punktreihen von) Geraden einer Schellhammer-Ebene

Die **Schellhammer-Gruppe** $\Sigma := \{\sigma_{(a,t)} \mid (a, t) \in \mathbf{C}^\times\} \cong \mathbf{C}^\times$ ist eine Gruppe von Automorphismen der Inzidenzstruktur, die via Multiplikation komplexer Zahlen auf Punkten und

Geraden wirkt:

$$\sigma_{(a,t)}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}: \begin{cases} (w, r) \mapsto (w + a, r t) \\ (\bullet, 0) \mapsto (\bullet, 0) \\ (w, \infty) \mapsto (w + a, \infty) \end{cases}$$

und

$$\sigma_{(a,t)}: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}: \begin{cases} L_{(w,r)} \mapsto L_{(w+a,rt)} \\ L_{(\bullet,\infty)} \mapsto L_{(\bullet,\infty)} \\ L_{(w,0)} \mapsto L_{(w+a,0)}. \end{cases}$$

Die Antifahre $((\bullet, 0), L_{(\bullet,\infty)})$ wird also von Σ fixiert. Punkt- als auch Geradenmenge zerfallen damit jeweils in die folgenden Bahnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \{(0, 1)\}^\Sigma \dot{\cup} \{(0, \infty)\}^\Sigma \dot{\cup} \{(\bullet, 0)\} \\ \mathfrak{L} &= \{L_{(0,1)}\}^\Sigma \dot{\cup} \{L_{(0,0)}\}^\Sigma \dot{\cup} \{L_{(\bullet,\infty)}\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist Σ eine Lie-Gruppe versehen mit der von

$$\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^2: \sigma_{(a,t)} \mapsto (a, t)$$

induzierten differenzierbaren Struktur.

Für den praktischen Umgang mit 2-dimensionalen Schellhammer-Ebenen ist es sinnvoll, die Funktion

$$\mathfrak{h}: \mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}: w \mapsto \begin{cases} \bar{\mathfrak{h}}(w) & \text{für } 0 \leq w \leq \pi \\ -\bar{\mathfrak{h}}(w - \pi) & \text{für } \pi \leq w \leq 2\pi \end{cases}$$

zu verwenden (Abbildung 5.3). Da nämlich

$$L_{(0,1)} = \left\{ \left(w, \frac{t}{\bar{\mathfrak{h}}(w)} \right) \in \mathfrak{P} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\} \right\} \cup \{(0, \infty) \in \mathfrak{P}\}$$

wird durch $\bar{\mathfrak{h}}$ und \mathfrak{h} dieselbe Inzidenzstruktur beschrieben. Der Unterschied dabei ist, dass die Beschreibung der Punktreihen in Polarkoordinaten mit \mathfrak{h} auch negative Radien zulässt, was den entscheidenden Vorteil bei Betrachtungen in der Nähe der Ferngeraden bringt (Abbildung 5.4).

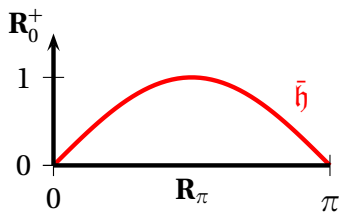


Abbildung 5.2: Graph von $\bar{\mathfrak{h}}$

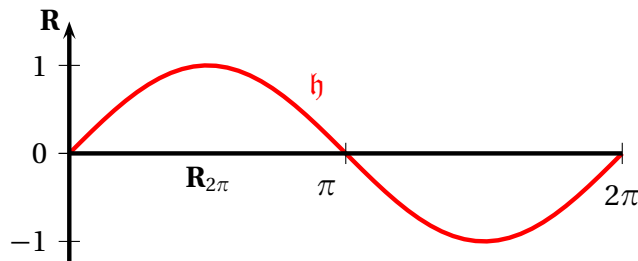


Abbildung 5.3: Graph von \mathfrak{h}

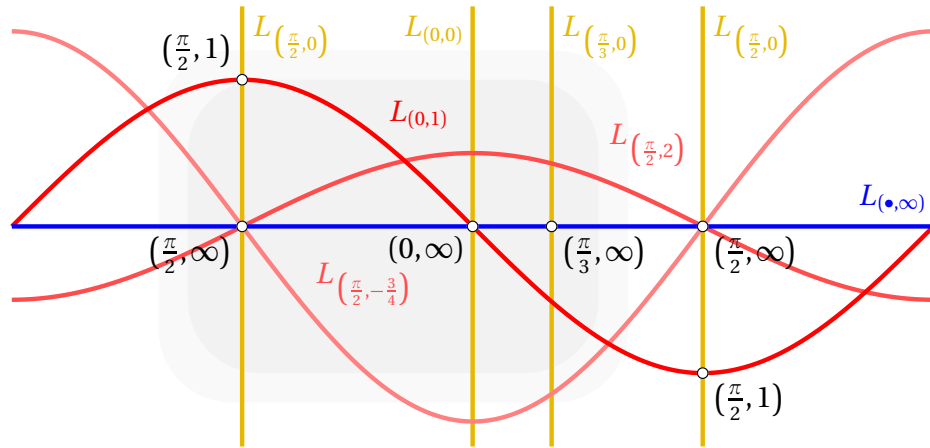


Abbildung 5.4: (Punktreihen von) Geraden in der Nähe der Ferngeraden

5.3 Proposition (Irene Schellhammer): Die in Konstruktion 5.2 angegebene Inzidenzstruktur $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \in)$ ist eine topologische projektive Ebene. Die Schellhammer-Gruppe Σ ist eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe (der stetigen Kollineationen) $\text{Aut}(\mathfrak{G})$.

Jede 2-dimensionale topologische projektive Ebene, die eine zu $\Sigma \cong \mathbf{C}^\times$ isomorphe Gruppe von Automorphismen besitzt, entsteht auf diese Weise (siehe auch Klassifikation 3.17(d1)).

Sind \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 zwei Schellhammer-Ebenen mit Schellhammer-Funktionen \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 , so sind \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 genau dann isomorphe Ebenen, wenn es ein $c > 0$ gibt derart, dass $\mathfrak{h}_2 = (w \mapsto (\mathfrak{h}_1(\pm w))^c)$.

Beweis: Siehe (Sch81, §7). □

5.4 Beispiel: Die Schellhammer-Ebene zur Schellhammer-Funktion $\mathfrak{h} = \sin$ ist isomorph zur klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

Eine einfache Rechnung zeigt nämlich $L_{(0,1)} = i + \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$. Die Schellhammer-Gruppe Σ stimmt ja mit der Gruppe der Drehstreckungen überein; die Bilder von $L_{(0,1)}$ unter Σ zusammen mit den Ursprungsgeraden ergeben somit genau die affinen Geraden von $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

5.5 Proposition: Die Punktreihen und Geradenbüschel einer 2-dimensionalen Schellhammer-Ebene lassen sich wie folgt beschreiben.

Ist $(a, t) \in \mathbf{C}^\times$, so gilt für die Punktreihe der Geraden $L_{(a,t)}$

$$\mathfrak{P}_{L_{(a,t)}} = L_{(a,t)} = \left\{ \left(a + w, \frac{t}{\mathfrak{h}(w)} \right) \in \mathfrak{P} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\} \right\} \cup \{(a, \infty) \in \mathfrak{P}\}$$

und für das Geradenbüschel durch (a, t)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{(a,t)} &= \{L_{(a-w, t \mathfrak{h}(w))} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi}\} = \{L_{(a-w, t \mathfrak{h}(w))} \mid w \in \mathbf{R}_\pi\} \\ &= \{L_{(a+w, t \mathfrak{h}(-w))} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi}\} = \{L_{(a+w, t \mathfrak{h}(-w))} \mid w \in \mathbf{R}_\pi\}. \end{aligned}$$

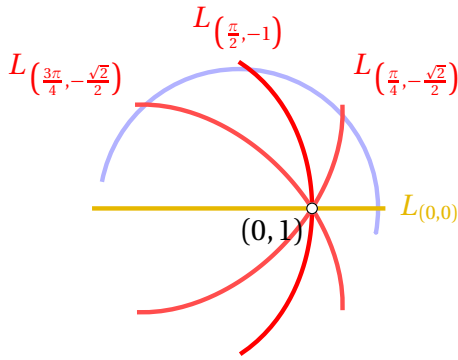


Abbildung 5.5: Bündel in $(0, 1)$

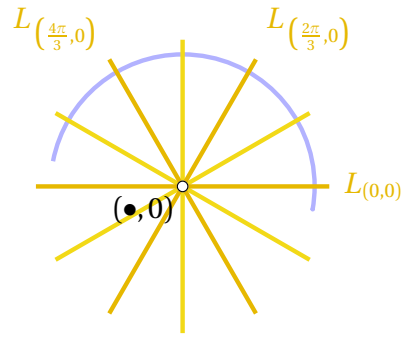


Abbildung 5.6: Bündel in $(\bullet, 0)$

Die Punktreihe der Geraden $L_{(\bullet, \infty)}$ hat die Form

$$\mathfrak{P}_{L_{(\bullet, \infty)}} = L_{(\bullet, \infty)} = \{(w, \infty) \in \mathfrak{P} \mid w \in \mathbf{R}_\pi\},$$

das Geradenbündel durch $(\bullet, 0)$ ist

$$\mathfrak{L}_{(\bullet, 0)} = \{L_{(w, 0)} \mid w \in \mathbf{R}_\pi\}.$$

Die Punktreihe der Geraden $L_{(a, 0)}$ ist

$$\mathfrak{P}_{L_{(a, 0)}} = L_{(a, 0)} = \{(a, r) \in \mathfrak{P} \mid r \in \mathbf{R}^\times\} \cup \{(\bullet, 0) \in \mathfrak{P}\} \cup \{(w, \infty) \in \mathfrak{P}\},$$

das Geradenbündel durch (a, ∞) hat die Form

$$\mathfrak{L}_{(a, \infty)} = \{L_{(a, r)} \mid r \in \mathbf{R}\} \cup \{L_{(\bullet, \infty)}\}.$$

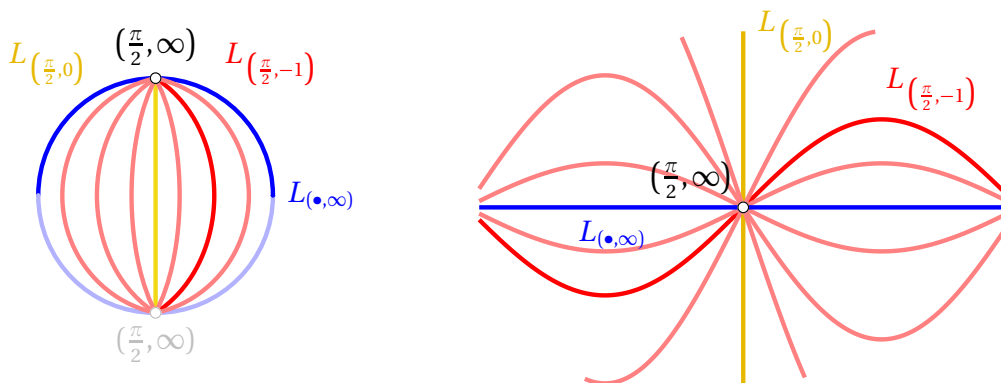


Abbildung 5.7: Geradenbündel im Fernpunkt $(\frac{\pi}{2}, \infty)$

Beweis: Für die Punktreihen der Geraden ist nichts mehr zu beweisen – diese sehen nach Definition so aus.

Die Geradenbüschel $\mathfrak{L}_{(a,\infty)}$ für $a \in \mathbf{R}_\pi$ und $\mathfrak{L}_{(\bullet,0)}$ erhält man durch Abgleich mit den explizit bestimmten Punktreihen; man stellt fest, dass die jeweiligen Punkte mit genau den angegebenen Geraden inzidieren.

Betrachten wir also den Punkt $(a, t) \in \mathbf{C}$. Es ist klar, dass $(a, t) \notin L_{(\bullet,\infty)}$ und $(a, t) \in L_{(a,0)}$. Die Gerade $L_{(s,r)}$ für $(s, r) \in \mathbf{C}$ enthält den Punkt (a, t) genau dann, wenn ein $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$ existiert, so dass

$$(a, t) = \left(w + s, r \frac{1}{\mathfrak{h}(w)} \right).$$

Dies ist gleichwertig zu $s = a - w$ und $r = t \mathfrak{h}(w)$. □

5.6 Lemma: In einer 2-dimensionalen Schellhammer-Ebene ist die Abbildung

$$\iota: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}: \begin{cases} (a, t) \leftrightarrow L_{(-a, \frac{1}{t})} \\ (\bullet, 0) \leftrightarrow L_{(\bullet, \infty)} \\ (a, \infty) \leftrightarrow L_{(-a, 0)} \end{cases}$$

eine Polarität. (PS11, Example 4.3)

Beweis: Es ist klar, dass $\iota^2 = \text{id}$.

Für $(a, t) \in \mathbf{C}$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{L_{(a,t)}}^\iota &= L_{(a,t)}^\iota = \left\{ \left(w + a, t \frac{1}{\mathfrak{h}(w)} \right) \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\} \right\} \cup \{(a, \infty)^\iota\} \\ &= \left\{ L_{(-w-a, \frac{1}{t \mathfrak{h}(w)})} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\} \right\} \cup \{L_{(-a, 0)}\} \\ &= \mathfrak{L}_{(-a, \frac{1}{t})}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{L_{(\bullet,\infty)}}^\iota &= L_{(\bullet,\infty)}^\iota = \{(w, \infty)^\iota \mid w \in \mathbf{R}_\pi\} \\ &= \{L_{(-w, 0)} \mid w \in \mathbf{R}_\pi\} \\ &= \mathfrak{L}_{(\bullet, 0)}. \end{aligned}$$

Und schließlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{L_{(a,0)}}^\iota &= L_{(a,0)}^\iota = \{(a, r)^\iota \mid r \in \mathbf{R}^\times\} \cup \{(\bullet, 0)^\iota\} \cup \{(a, \infty)^\iota\} \\ &= \{L_{(-a, \frac{1}{r})} \mid r \in \mathbf{R}^\times\} \cup \{L_{(\bullet, \infty)}\} \cup \{L_{(-a, 0)}\} \\ &= \{L_{(-a, r)} \mid r \in \mathbf{R}\} \cup \{L_{(\bullet, \infty)}\} \\ &= \mathfrak{L}_{(a, \infty)}. \end{aligned}$$

□

5.7 Korollar: 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen sind selbstdual.

Nach diesen ersten allgemeinen Erkenntnissen über Schellhammer-Ebenen wollen wir jetzt zu differenzierbaren Schellhammer-Ebenen übergehen.

5.2 Eigenschaften differenzierbarer Schellhammer-Ebenen

5.8 Generalvoraussetzung und Bemerkung: Unter einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene wollen wir nur solche Ebenen verstehen, bei denen auch die Schellhammer-Gruppe Σ differenzierbar wirkt, und die Polarität ι differenzierbar ist.

Wegen Proposition 2.11 ist es bereits hinreichend, wenn die Schellhammer-Ebene mindestens \mathcal{C}^2 -differenzierbar ist, denn Σ besteht aus stetigen Kollineationen und die Polarität ι ist eine stetige Kollineation in die duale Ebene.

5.9 Lemma: Durch die Wirkung von $\Sigma \cong \mathbf{C}^\times$ überträgt sich die differenzierbare Struktur von Σ auf die Punkte $\mathbf{C}^\times \subseteq \mathfrak{P}$, die Menge von Geraden $\{L_{(a,t)} \mid (a,t) \in \mathbf{C}^\times\}$, die Ferngerade $L_{(\bullet,\infty)}$, sowie das Büschel $\mathfrak{L}_{(\bullet,0)}$.

Insbesondere gibt es offene Mengen \mathfrak{U}_i für $i \in \{1, \dots, 4\}$ so, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} \supseteq \mathbf{C}^\times \supseteq \mathfrak{U}_1 &\rightarrow \mathbf{R}^2: (a, t) \mapsto (a, t) \\ \{L_{(a,t)} \mid (a,t) \in \mathbf{C}^\times\} \supseteq \mathfrak{U}_2 &\rightarrow \mathbf{R}^2: L_{(a,t)} \mapsto (a, t) \\ L_{(\bullet,\infty)} \supseteq \mathfrak{U}_3 &\rightarrow \mathbf{R}_\pi: (w, \infty) \mapsto w \\ \mathfrak{L}_{(\bullet,0)} \supseteq \mathfrak{U}_4 &\rightarrow \mathbf{R}_\pi: L_{(w,0)} \mapsto w \end{aligned}$$

differenzierbar sind und sich als Bestandteil der differenzierbaren Struktur einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene interpretieren lassen.

Beweis: Das ist eine direkte Folgerung aus Proposition 1.20. □

5.10 Korollar: Die Abbildung

$$L_{(\bullet,\infty)} \rightarrow \mathbf{R}_\pi: (w, \infty) \mapsto w$$

ist ein Diffeomorphismus.

5.11 Korollar: In einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene sind die Abbildungen $\bar{h} \Big|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}}$ und $h \Big|_{\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\}}$ differenzierbar.

Aus der Analysis weiß man:

5.12 Proposition: Sei $\bar{h}: \mathbf{R}_\pi \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ eine Abbildung mit $\bar{h}(0) = 0$, so dass $\bar{h}|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}}$ zusätzlich \mathcal{C}^r -differenzierbar ist für $r \geq 1$.

Dann ist $\ln \bar{h}|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}}$ streng konkav und \bar{h} damit eine Schellhammer-Funktion genau dann, wenn die Abbildung

$$\left(\ln \bar{h} \Big|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}} \right)' = \frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \Big|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}} : \mathbf{R}_\pi \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

ein fallender Homöomorphismus ist.

Ist $\bar{h}|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}}$ sogar \mathcal{C}^r -differenzierbar mit $r \geq 2$, dann ist bereits

$$\left(\ln \bar{h} \Big|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}} \right)'' = \frac{\bar{h}'' \bar{h} - (\bar{h}')^2}{\bar{h}^2} \Big|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}} < 0$$

äquivalent dazu, dass $\ln \bar{h}|_{\mathbf{R}_\pi \setminus \{0\}}$ streng konkav, also wiederum \bar{h} eine Schellhammer-Funktion ist.

Das nächste Ziel ist, über Lemma 5.9 hinaus möglichst viele Informationen über die differenzierbare Struktur einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene zu gewinnen, um damit letztendlich Karten zu finden, die notwendigerweise in der differenzierbaren Struktur einer solchen Ebene enthalten sein müssen und als Atlas verwendet werden können.

Dazu wenden wir uns zunächst den Ursprungsgeraden zu, also Geraden $L_{(w,0)}$ für $w \in \mathbf{R}_\pi$.

5.13 Proposition: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene. Dann vererbt sich auf der Geraden $L_{(w,0)}$ für $w \in \mathbf{R}_\pi$ im Bereich $L_{(w,0)} \setminus \{(\bullet, 0), (w, \infty)\}$ die differenzierbare Struktur von der differenzierbaren Struktur auf $\mathbf{C}^\times \subseteq \mathfrak{P}$.

Insbesondere ist die Abbildung

$$L_{(w,0)} \setminus \{(\bullet, 0), (w, \infty)\} \rightarrow \mathbf{R}: (w, r) \mapsto r$$

eine Karte in der differenzierbaren Struktur von $L_{(w,0)}$.

5.14 Lemma: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene und $(a, t) \in \mathbf{C}^\times$. Dann ist

$$\mathbf{R}_\pi \rightarrow \mathfrak{L}_{(a,t)}: w \mapsto L_{(a-w, t \bar{h}(w))}$$

ein Diffeomorphismus. Mit Hilfe entsprechender Karten beziehungsweise Parametrisierungen von \mathbf{R}_π erhält man so Karten beziehungsweise Parametrisierungen des Büschels $\mathfrak{L}_{(a,t)}$.

Beweis:

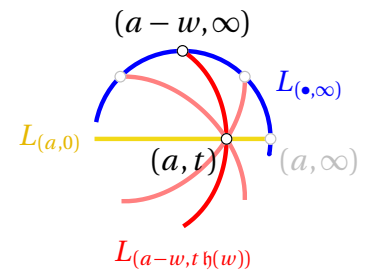
Es gilt

$$(w \mapsto L_{(a-w, t \bar{h}(w)}) = (w \mapsto (a-w, \infty) \mapsto (a-w, \infty) \vee (a, t))$$

und letzteres ist als Komposition differenzierbarer Abbildungen selbst differenzierbar. Das selbe gilt für die zugehörige Umkehrabbildung

$$(L_{(a-w, t \bar{h}(w)}) \mapsto w) = ((L_{(a-w, t \bar{h}(w)}) \wedge L_{(\bullet, \infty)}) = (a-w, \infty) \mapsto w).$$

□



5.15 Lemma: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene und

$$\mathfrak{k}: \mathbf{R}_\pi \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbf{R}: w \mapsto \frac{\mathfrak{h}(w)}{\mathfrak{h}(w - \frac{\pi}{2})}.$$

Dann ist \mathfrak{k} eine Bijektion und

$$\mathbf{R}_\pi \rightarrow L_{(a,0)}: w \mapsto \begin{cases} (a, \mathfrak{k}(w)) & \text{für } w \notin \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\} \\ (\bullet, 0) & \text{für } w = 0 \\ (a, \infty) & \text{für } w = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus. Mit Hilfe entsprechender Karten beziehungsweise Parametrisierungen von \mathbf{R}_π erhält man so Karten beziehungsweise Parametrisierungen der Punktreihe $L_{(a,0)}$.

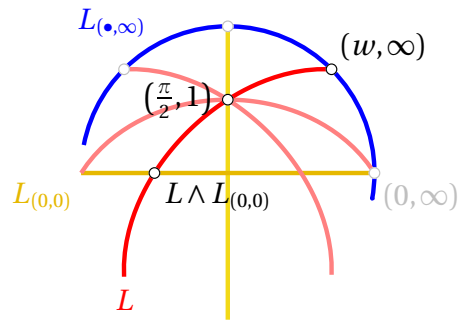
Beweis:

Wir betrachten zunächst die Gerade $L_{(0,0)}$ und das Büschel $\mathfrak{L}_{(\frac{\pi}{2},1)}$. Die Abbildung

$$\mathfrak{L}_{(\frac{\pi}{2},1)} \rightarrow L_{(0,0)}: L \mapsto L \wedge L_{(0,0)}$$

ist eine differenzierbare Bijektion mit Umkehrabbildung

$$L_{(0,0)} \rightarrow \mathfrak{L}_{(\frac{\pi}{2},1)}: p \mapsto p \vee \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right),$$



welche ebenso differenzierbar ist. Somit liegt also ein Diffeomorphismus vor. Durch Komposition mit dem in Lemma 5.14 gewonnenen Diffeomorphismus zwischen \mathbf{R}_π und einem Büschel erhält man also einen Diffeomorphismus zwischen \mathbf{R}_π und $L_{(0,0)}$:

Ist konkret $L_{(\frac{\pi}{2}-w_0, \mathfrak{h}(w_0))}$ eine Gerade des Büschels $\mathfrak{L}_{(\frac{\pi}{2},1)}$ – dabei ist $w_0 \in \mathbf{R}_\pi$ –, so gilt für geeignetes $r \in \mathbf{R}$:

$$L_{(\frac{\pi}{2}-w_0, \mathfrak{h}(w_0))} \wedge L_{(0,0)} = \begin{cases} (0, r) & \text{für } w_0 \notin \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\} \\ (\bullet, 0) & \text{für } w_0 = 0 \\ (0, \infty) & \text{für } w_0 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Beachtet man, dass

$$L_{(\frac{\pi}{2}-w_0, \mathfrak{h}(w_0))} = \left\{ \left(s + \frac{\pi}{2} - w_0, \frac{\mathfrak{h}(w_0)}{\mathfrak{h}(s)} \right) \mid s \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\} \right\} \cup \left\{ \left(s + \frac{\pi}{2} - w_0, \infty \right) \right\},$$

so führt dies für $w_0 \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$ auf die Gleichung

$$(0, r) = \left(s + \frac{\pi}{2} - w_0, \frac{\mathfrak{h}(w_0)}{\mathfrak{h}(s)} \right)$$

beziehungsweise

$$s = w_0 - \frac{\pi}{2} \quad \text{und folglich} \quad r = \frac{\mathfrak{h}(w_0)}{\mathfrak{h}(w_0 - \frac{\pi}{2})}.$$

Die Abbildung

$$\mathbf{R}_\pi \rightarrow L_{(0,0)}: w_0 \mapsto \begin{cases} \left(0, \frac{\mathfrak{h}(w_0)}{\mathfrak{h}(w_0 - \frac{\pi}{2})} \right) & \text{für } w_0 \notin \left((0 + \pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z} \right) \right) \\ (\bullet, 0) & \text{für } w_0 \in 0 + \pi\mathbf{Z} \\ (0, \infty) & \text{für } w_0 \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z} \end{cases}$$

ist also ein Diffeomorphismus zwischen der Geraden auf $L_{(0,0)}$ und \mathbf{R}_π .

Nach Anwenden von Automorphismen $\sigma_{(a,1)}$ erhält man dann Diffeomorphismen zwischen \mathbf{R}_π und beliebigen Ursprungsgeraden. \square

5.16 Bemerkung: Um tatsächlich konkret Karten angeben zu können, ist die Abbildung \mathfrak{k} zu invertieren. Im Allgemeinen ist dies nicht ohne weiteres explizit möglich.

5.17 Lemma: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene, $a_0 \in \mathbf{R}_\pi$ und $\mathfrak{l}: \mathbf{R} \stackrel{\circ}{\supseteq} D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung so, dass

$$L_{(a_0,0)} \stackrel{\circ}{\supseteq} \mathfrak{U}_0 \rightarrow \mathbf{R}: (a_0, r) \mapsto \mathfrak{l}(r)$$

eine Karte der Punktreihe von $L_{(a_0,0)}$ in der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{S} ist.

Dann gibt es für beliebige $a \in \mathbf{R}_\pi$ eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_1 \stackrel{\circ}{\subseteq} \mathfrak{L}_{(a,\infty)} \setminus \{L_{(\bullet,\infty)}\}$ so, dass

$$\mathfrak{L}_{(a,\infty)} \setminus \{L_{(\bullet,\infty)}\} \stackrel{\circ}{\supseteq} \mathfrak{U}_1 \rightarrow \mathbf{R}: L_{(a,r)} \mapsto \mathfrak{l}(r)$$

eine Karte des Büschels $\mathfrak{L}_{(a,\infty)}$ in der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{S} ist.

Ist weiter $0 \in D$, so gibt es für beliebige $a \in \mathbf{R}_\pi$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_2 \stackrel{\circ}{\subseteq} L_{(a,0)} \setminus \{(\bullet, 0)\}$ mit $(a, \infty) \in \mathfrak{U}_2$ so, dass

$$L_{(a,0)} \setminus \{(\bullet, 0)\} \stackrel{\circ}{\supseteq} \mathfrak{U}_2 \rightarrow \mathbf{R}: \begin{cases} (a, r) \mapsto \mathfrak{l}\left(\frac{1}{r}\right) \\ (a, \infty) \mapsto \mathfrak{l}(0) \end{cases}$$

eine Karte der Punktreihe $L_{(a,0)}$ in der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{S} ist.

Beweis: Die Abbildung

$$\varphi: \mathfrak{L}_{(a,\infty)} \setminus \{L_{(\bullet,\infty)}\} \rightarrow L_{(a+\frac{\pi}{2},0)}: L_{(a,r)} \mapsto \left(L_{(a,r)} \wedge L_{(a+\frac{\pi}{2},0)} = \left(a + \frac{\pi}{2}, r \right) \right)$$

ist als Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar. Der Automorphismus $\sigma_{(a_0-a-\frac{\pi}{2},1)}$ ist ebenfalls differenzierbar, die Komposition $\varphi \sigma_{(a_0-a-\frac{\pi}{2},1)}$ ist dann ein Diffeomorphismus von $\mathfrak{L}_{(a,\infty)}$ nach $L_{(a_0,0)}$, der mit Hilfe der Karte auf $L_{(a_0,0)}$ die angegebene Karte auf $\mathfrak{L}_{(a,\infty)}$ liefert.

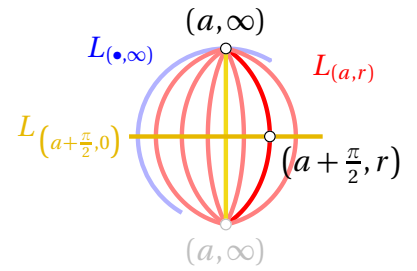
Mit Hilfe der Polarität ι aus Lemma 5.6 ist $\iota \varphi \sigma_{(a_0+a-\frac{\pi}{2},1)}$ ein Diffeomorphismus von $L_{(a,0)}$ nach $L_{(a_0,0)}$, der die angegebene Karte auf $L_{(a,0)}$ nach sich zieht, denn

$$L_{(a,0)} \ni (a, r) \xrightarrow{\iota} L_{(-a, \frac{1}{r})} \xrightarrow{\varphi} \left(-a + \frac{\pi}{2}, \frac{1}{r} \right) \xrightarrow{\sigma_{(a_0+a-\frac{\pi}{2},1)}} \left(a_0, \frac{1}{r} \right) \in L_{(a_0,0)}$$

und

$$L_{(a,0)} \ni (a, \infty) \xrightarrow{\iota} L_{(-a,0)} \xrightarrow{\varphi} \left(-a + \frac{\pi}{2}, 0 \right) \xrightarrow{\sigma_{(a_0+a-\frac{\pi}{2},1)}} (a_0, 0) \in L_{(a_0,0)}.$$

\square



5.18 Korollar: Sei $\iota: \mathbf{R} \overset{\circ}{\supseteq} D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung so, dass für festes $a_0 \in \mathbf{R}_\pi$ die Abbildung

$$L_{(a_0,0)} \overset{\circ}{\supseteq} \mathfrak{U}_0 \rightarrow \mathbf{R}: (a_0, r) \mapsto \iota(r)$$

eine Karte in der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{S} ist, so ist für beliebige $a \in \mathbf{R}_\pi$

$$L_{(a,0)} \overset{\circ}{\supseteq} \mathfrak{U}_1 \rightarrow \mathbf{R}: (a, r) \mapsto \iota(r)$$

ebenfalls eine Karte der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{S} .

5.19 Lemma: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene und $L_{(a,0)} \in \mathfrak{L}$ für $a \in \mathbf{R}_\pi$ eine Ursprungsgerade. Sei weiter $0 \in D \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{R}$ und $\iota: D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung so, dass

$$\mathfrak{L}_{(0,\infty)} \setminus \{L_{(\bullet,\infty)}\} \rightarrow \mathbf{R}: L_{(0,r)} \mapsto \iota(r)$$

(gegebenenfalls unter Einschränkung auf eine Umgebung um $L_{(0,0)}$ im Definitionsbereich) eine Karte der differenzierbaren Struktur ist.

Dann gibt es eine Umgebung \mathfrak{U} von $L_{(a,0)}$ so, dass die Abbildung

$$\mathfrak{U} \rightarrow \mathbf{R}^2: L_{(a,r)} \mapsto (a, \iota(r))$$

eine Karte der differenzierbaren Struktur von \mathfrak{S} ist. Insbesondere ist $\iota|_{D \setminus \{0\}}$ differenzierbar.

Beweis: Für

$$\begin{aligned} \varphi_1: L_{(a,r)} &\mapsto (L_{(a,r)} \wedge L_{(\bullet,\infty)} = (a)) \mapsto a \\ \varphi_2: L_{(a,r)} &\mapsto (L_{(a,r)} \cdot (\sigma_{(a,0)})^{-1} = L_{(0,r)}) \mapsto \iota(r) \end{aligned}$$

ist

$$(L_{(a,r)} \mapsto (a, \iota(r))) = (L_{(a,r)} \mapsto ((L_{(a,r)}) \cdot \varphi_1, (L_{(a,r)}) \cdot \varphi_2))$$

also als Komposition differenzierbarer Abbildungen selbst differenzierbar.

Nach Lemma 5.9 gehört die Abbildung $L_{(0,r)} \mapsto r$ für $r \neq 0$ zur differenzierbaren Struktur der Ebene. Der Kartenwechsel $r \mapsto L_{(0,r)} \mapsto \iota(r)$ muss also differenzierbar sein. \square

Damit ist es jetzt prinzipiell möglich, einen Atlas für die Punktmenge und für die Geradenmenge anzugeben.

5.20 Satz: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene und $\iota: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\pi$ eine Abbildung derart, dass für beliebige $a \in \mathbf{R}_\pi$ die Abbildung

$$L_{(a,0)} \rightarrow \mathbf{R}_\pi: \begin{cases} (a, r) \mapsto \iota(r) \\ (\bullet, 0) \mapsto \iota(0) \\ (a, \infty) \mapsto \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus zwischen $L_{(a,0)}$ und \mathbf{R}_π ist (die Abbildung $\iota = \mathfrak{k}^{-1}$ aus Lemma 5.15 wäre ein Beispiel hierfür).

Dann besitzt die differenzierbare Struktur der Punktmenge einen Atlas, dessen Beschreibung im Wesentlichen nur noch von \mathfrak{l} abhängt. Um dies nicht unnötig kompliziert werden zu lassen, wollen wir ihn mit Hilfe der Zuordnungsvorschriften

$$\begin{aligned} \kappa_Z: \mathfrak{P} \supseteq \mathbf{C}^\times &\rightarrow \mathbf{R}^2: (w, r) \mapsto (w, r) \\ \kappa_F: \mathfrak{P} \setminus \{(\bullet, 0)\} &\rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} (w, r) \mapsto (\hat{w}, \mathfrak{l}(\frac{1}{r})) & \text{mit } \hat{w} \in w + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \\ (w, \infty) \mapsto (\hat{w}, 0) & \text{mit } \hat{w} \in w + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \end{cases} \\ \kappa_O: \mathfrak{P} \setminus L_{(\bullet, \infty)} &\rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} (w, r) \mapsto (\mathfrak{l}(r \mathfrak{h}(w)), \mathfrak{l}(-r \mathfrak{h}(w - \frac{\pi}{2}))) \\ (\bullet, 0) \mapsto (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

angeben. Aus diesen Zuordnungsvorschriften lassen sich stetige Abbildungen und damit Karten des Atlas gewinnen, indem man die Definitionsbereiche – wenn nötig – einschränkt und die Repräsentanten geeignet wählt – insbesondere den Repräsentanten \hat{w} bei κ_F . Der Bequemlichkeit halber wollen wir in Zukunft die Zuordnungsvorschriften κ_O , κ_Z und κ_F mit den daraus abgeleiteten Karten identifizieren und mit der vorigen Interpretation im Hintergrund wie Karten verwenden.

Mit Hilfe der Polarität ι aus Lemma 5.6 ist aus dem Atlas für die Punktmenge auch ein Atlas für die Geradenmenge zu gewinnen, den wir ebenso mit Hilfe der Zuordnungsvorschriften

$$\begin{aligned} \lambda_U: \mathfrak{L} \setminus \{L_{(\bullet, \infty)}\} &\rightarrow \mathbf{R}_{2\pi} \times \mathbf{R}: \begin{cases} L_{(a, t)} \mapsto (-\hat{a}, \mathfrak{l}(t)) & \text{mit } \hat{a} \in a + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \\ L_{(a, 0)} \mapsto (-\hat{a}, 0) & \text{mit } \hat{a} \in a + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \end{cases} \\ \lambda_F: \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{L}_{(\bullet, 0)} &\rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} L_{(a, t)} \mapsto (\mathfrak{l}(\frac{1}{t} \mathfrak{h}(-a)), \mathfrak{l}(-\frac{1}{t} \mathfrak{h}(-a - \frac{\pi}{2}))) \\ L_{(\bullet, \infty)} \mapsto (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

beschreiben wollen.

Beweis: Die Karte κ_Z wurde schon in Lemma 5.9 angegeben.

Die Karte κ_F entsteht durch Anwenden der aus Lemma 5.6 bekannten Polarität $\iota: (w, r) \mapsto L_{(-w, \frac{1}{r})}$ und danach Komposition mit den durch Lemma 5.17 und Lemma 5.19 gewonnenen Karten.

Die Abbildung κ_O entsteht durch die folgende geometrische Konstruktion. Für die erste Komponente des Bilds eines Punkts (w, r) verwendet man den Punkt $((w, r) \vee (0, \infty)) \wedge L_{(\frac{\pi}{2}, 0)}$, für die zweite Komponente den Punkt $((w, r) \vee (\frac{\pi}{2}, \infty)) \wedge L_{(0, 0)}$. Die Koordinaten erhält man dann nach Anwenden der in der Voraussetzung geforderten Karten auf $L_{(\frac{\pi}{2}, 0)}$ respektive $L_{(0, 0)}$. Als Komposition geometrischer Operationen und Karten, die zur differenzierbaren Struktur der Schellhammer-Ebene gehören, sind die so gewonnenen Karten also auch Bestandteil der differenzierbaren Struktur. Im Einzelnen gilt ja

$$(w, r) \vee (0, \infty) \in \{L_{(0, t)} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

sowie

$$(w, r) \vee \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right) \in \left\{L_{\left(\frac{\pi}{2}, t\right)} \mid t \in \mathbf{R}\right\}.$$

Das heißt $(w, r) \in L_{(0, t_1)}$ mit $t_1 \neq 0$ und folglich $(w, r) = \left(\omega_1 + 0, \frac{t_1}{\mathfrak{h}(\omega_1)}\right)$ oder $(w, r) \in L_{(0, 0)}$ und folglich $(w, r) = (\omega_1, \varrho_1)$ für geeignete ω_1 , t_1 und ϱ_1 . Damit ist aber $w = \omega_1$ und $t_1 = r \mathfrak{h}(w)$

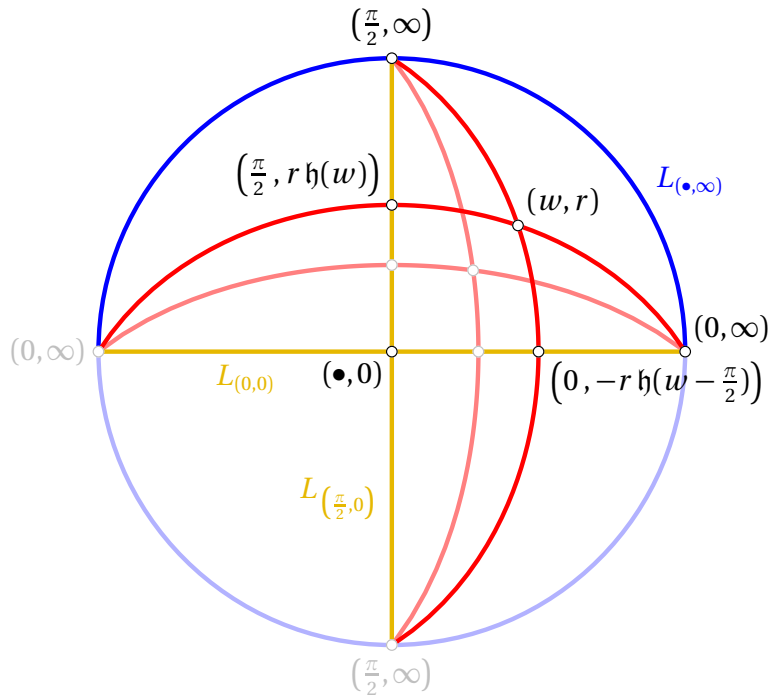


Abbildung 5.8: Konstruktion der Karte α_O

respektive $\varrho_1 = r$. Der Fall $(w, r) \in L_{(0,0)}$ tritt nur auf, wenn $r = 0$ oder $w = 0$. Aus $w = 0$ folgt aber auch $\mathfrak{h}(w) = 0$. Insgesamt gilt also

$$(w, r) \vee (0, \infty) = L_{(0, r \mathfrak{h}(w))}.$$

Analog sieht man auch

$$(w, r) \vee \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right) = L_{\left(\frac{\pi}{2}, r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

ein. Schließlich ist

$$L_{(0, r \mathfrak{h}(w))} \wedge L_{\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{r \mathfrak{h}(w)}{\mathfrak{h}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, r \mathfrak{h}(w)\right)$$

und

$$L_{\left(\frac{\pi}{2}, r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)\right)} \wedge L_{(0,0)} = \left(0, \frac{r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)}{\mathfrak{h}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \left(0, -r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Bildet man jetzt die eben bestimmten Schnittpunkte mit Hilfe der geforderten Karte ab, so ergibt sich

$$\left(\frac{\pi}{2}, r \mathfrak{h}(w)\right) \mapsto \mathfrak{l}(r \mathfrak{h}(w))$$

und

$$\left(0, -r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)\right) \mapsto \mathfrak{l}\left(-r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)\right);$$

dies sind die Komponenten der Karte α_O . □

5.21 Bemerkung: Die im vorherigen Satz 5.20 angegebene Karte x_Z ist für den Atlas redundant. Sie wird trotzdem mit aufgeführt, weil von ihr ausgehend die anderen Karten konstruiert wurden.

Die bei der Definition der Karten angesprochenen Schwierigkeiten (Einschränken des Definitionsbereichs so, dass wirklich Abbildungen entstehen) verschwinden, wenn stattdessen Parametrisierungen der entsprechenden Teile der Schellhammer-Ebene verwendet werden. Man erhält zwar so mehrfache Überlagerungen der Ebene, kann aber ohne Probleme mit Abbildungen (wenn auch nicht injektiven) hantieren. Für die praktischen Rechnungen werden aber später die Karten explizit benötigt, weshalb sie hier (mit der nötigen Vorsicht) so bereitgestellt wurden.

5.22 Lemma: Sei \mathcal{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene. Dann gibt es in einer geeigneten Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \overset{\circ}{L}_{(a,0)}$ von $(\bullet, 0)$ eine Karte $\gamma: L_{(a,0)} \supseteq \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}: (a, r) \mapsto l(r)$ mit einer geeigneten stetigen Abbildung $l: \mathbf{R} \supseteq U \rightarrow \mathbf{R}$ so, dass $(a, -r)^\gamma = -(a, r)^\gamma$, also $l(-r) = -l(r)$.

Insbesondere gilt $0 \in U$ und $l(0) = 0$. Wegen Korollar 5.11 ist außerdem $l|_{U \setminus \{0\}}$ differenzierbar und für $r \neq 0$ gilt $l'(-r) = l'(r)$.

Beweis: Für eine offene Umgebung \mathfrak{V} von $(\bullet, 0)$ sei die Karte

$$\varphi: L_{(a,0)} \supseteq \mathfrak{V} \rightarrow \mathbf{R}: (a, r) \mapsto m(r)$$

der differenzierbaren Struktur der Ebene gegeben mit einer zugehörigen stetigen Abbildung $m: \mathbf{R} \supseteq V \rightarrow \mathbf{R}$. Dann ist $\sigma_{(\pi,1)}\varphi: (a, r) \mapsto ((a + \pi, r) = (a, -r)) \mapsto m(-r)$ ebenfalls eine Karte der differenzierbaren Struktur, da $\sigma_{(\pi,1)}$ bezüglich dieser ein Diffeomorphismus ist, mit der offenen Umgebung $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}^{\sigma_{(\pi,1)}}$ von $(\bullet, 0)$ als Definitionsbereich.

Es ist leicht nachzurechnen, dass die Abbildung

$$\gamma: \mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}^{\sigma_{(\pi,1)}} \rightarrow \mathbf{R}: (a, r) \mapsto m(r) - m(-r)$$

die geforderte Eigenschaft $(a, -r)^\gamma = -(a, r)^\gamma$ erfüllt. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass sie in der Tat ein Bestandteil der differenzierbaren Struktur der Ebene ist. Da φ ein lokaler Homöomorphismus ist, kann m ohne Beschränkung der Allgemeinheit als streng monoton steigend angenommen werden. Dann ist aber $r \mapsto -m(-r)$ ebenfalls streng monoton steigend. Damit ist $r \mapsto m(r) - m(-r)$ eingeschränkt aufs Bild ein Homöomorphismus, ebenso γ . Ist nun $\nu: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: r \mapsto -r$, dann ist $D_r \nu = -1$ und $\sigma_{(\pi,1)}\varphi = \varphi \nu$. Es ist $\gamma = \varphi - \sigma_{(\pi,1)}\varphi$, und die Ableitung des Kartenwechsels $\varphi^{-1}\gamma$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} D_r(\varphi^{-1}\gamma) &= D_r(\varphi^{-1}\varphi - \varphi^{-1}\sigma_{(\pi,1)}\varphi) = D_r(\varphi^{-1}\varphi - \varphi^{-1}\varphi\nu) \\ &= D_r(\text{id} - \nu) = D_r \text{id} - D_r \nu \\ &= 1 - (-1) = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Der Kartenwechsel ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion 1.6 also sogar ein Diffeomorphismus. □

5.23 Lemma: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene, der linksseitige oder rechtsseitige Grenzwert von \mathfrak{h}' bei 0 existiere und es gelte dabei $\lim_{w \nearrow 0} \mathfrak{h}'(w) \neq 0$ beziehungsweise $\lim_{w \searrow 0} \mathfrak{h}'(w) \neq 0$.

Dann ist \mathfrak{h}' stetig an der Stelle 0.

Beweis: Wir betrachten für festes $a_0 \in \mathbf{R}_{2\pi}$ Bündel von der Form

$$\mathfrak{L}_{(a_0,t)} = \{L_{(a_0-w,t \mathfrak{h}(w))} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi}\},$$

wobei $t \neq 0$. Diese Bündel lassen sich nach Lemma 5.14 durch

$$\mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathfrak{L}_{(a_0,t)}: w \mapsto L_{(a_0-w,t \mathfrak{h}(w))}$$

mit der differenzierbaren Struktur verträglich parametrisieren. Alle diese Bündel schneiden sich für den Parameter $w = 0$ in der gemeinsamen Geraden $L_{(a_0,0)}$. Nach Lemma 5.19 gibt es für diese Bündel in einer geeigneten Umgebung der gemeinsamen Geraden $L_{(a_0,0)}$ Karten der Form

$$L_{(a_0-w,t \mathfrak{h}(w))} \mapsto (a_0 - w, \iota(t \mathfrak{h}(w))).$$

Als Komposition der Parametrisierung der Bündel mit der Karte auf den Geraden muss für w in einer geeigneten Umgebung von 0 die Abbildung

$$\mathfrak{m}_t: w \mapsto (\mathfrak{m}_{t,1}(w), \mathfrak{m}_{t,2}(w)) := (a_0 - w, \iota(t \mathfrak{h}(w)))$$

differenzierbar sein; insbesondere ist $\mathfrak{m}_{t,2}$ an der Stelle 0 differenzierbar. Da die Karten für alle betrachteten Bündel $\mathfrak{L}_{(a_0,t)}$ in der ersten Komponente übereinstimmen, kann der Schnitt der Bündel nur dann transversal erfolgen, wenn die Ableitungen der zweiten Komponenten von \mathfrak{m}_t nach dem Parameter w für verschiedene t verschieden sind, das heißt es gilt $\mathfrak{m}'_{t_1,2}(0) \neq \mathfrak{m}'_{t_2,2}(0)$, wenn $t_1 \neq t_2$. Folglich gibt es Bündel $\mathfrak{L}_{(a_0,t)}$ so, dass $\mathfrak{m}'_{t,2}(0) \neq 0$, und wir wollen uns im Folgenden auf genau solche Bündel beschränken. Für $w \notin \pi\mathbf{Z}$ und $x \neq 0$ existieren $\mathfrak{h}'(w)$ sowie $\iota'(x)$ und sind insbesondere stetig, wir können mit Hilfe der Kettenregel also

$$\mathfrak{m}'_{t,2}(w) = \iota'(t \mathfrak{h}(w)) t \mathfrak{h}'(w)$$

bestimmen. Sei nun $\lim_{w \searrow 0} \mathfrak{h}'(w) \neq 0$ angenommen, so folgt, da ja $\lim_{w \searrow 0} \mathfrak{m}'_{t,2}(w)$ existiert, dass

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{w \searrow 0} \mathfrak{m}'_{t,2}(w)}{\lim_{w \searrow 0} \mathfrak{h}'(w)} &= \lim_{w \searrow 0} \frac{\mathfrak{m}'_{t,2}(w)}{\mathfrak{h}'(w)} \\ &= \lim_{w \searrow 0} \frac{t \iota'(t \mathfrak{h}(w)) \mathfrak{h}'(w)}{\mathfrak{h}'(w)} \\ &= t \lim_{w \searrow 0} \iota'(t \mathfrak{h}(w)). \end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{w \searrow 0} \iota'(t \mathfrak{h}(w))$ existiert demnach ebenfalls; außerdem gilt $\lim_{w \searrow 0} \iota'(t \mathfrak{h}(w)) \neq 0$, da $\mathfrak{m}'_{t,2}(0) \neq 0$. Die Funktion \mathfrak{h} ist stetig, das heißt

$$\lim_{w \rightarrow 0} \mathfrak{h}(w) = \lim_{w \searrow 0} \mathfrak{h}(w) = \lim_{w \nearrow 0} \mathfrak{h}(w) = 0,$$

und nach Definition von \mathfrak{h} lässt sich insbesondere $\lim_{w \searrow 0} \mathfrak{h}(w) \searrow 0$ und $\lim_{w \nearrow 0} \mathfrak{h}(w) \nearrow 0$ schließen. Wegen Lemma 5.22 existiert mit dem rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} l'(x)$ auch der linksseitige $\lim_{x \nearrow 0} l'(x)$ und $\lim_{x \nearrow 0} l'(x) = \lim_{x \searrow 0} l'(x)$. Das bedeutet

$$\lim_{w \searrow 0} l'(t \mathfrak{h}(w)) = \lim_{x \searrow 0} l'(x) = \lim_{x \nearrow 0} l'(x) = \lim_{w \nearrow 0} l'(t \mathfrak{h}(w)).$$

Damit ist \mathfrak{h}' stetig in 0, denn

$$\lim_{w \nearrow 0} \mathfrak{h}'(w) = \lim_{w \nearrow 0} \frac{m'_{t,2}(w)}{t l'(t \mathfrak{h}(w))} = \frac{\lim_{w \nearrow 0} m'_{t,2}(w)}{\lim_{w \nearrow 0} t l'(t \mathfrak{h}(w))} = \frac{\lim_{w \searrow 0} m'_{t,2}(w)}{\lim_{w \searrow 0} t l'(t \mathfrak{h}(w))} = \lim_{w \searrow 0} \mathfrak{h}'(w).$$

Analog schließt man, wenn $\lim_{w \nearrow 0} \mathfrak{h}'(w) \neq 0$ angenommen wird. □

5.24 Bemerkung: Falls bei 0 weder der linksseitige noch der rechtsseitige Grenzwert von \mathfrak{h}' existiert, sei es, weil \mathfrak{h}' bestimmt divergiert, sei es, weil trotz Beschränktheit keine Konvergenz vorliegt, so lässt sich nicht mehr viel über die Eigenschaften von \mathfrak{h} beziehungsweise l aussagen.

Der Beweis von Lemma 5.23 zeigt außerdem: Konvergenz von \mathfrak{h}' gegen 0 an der Stelle 0 zieht bestimmte Divergenz der Ableitung l' nach sich. Denn angenommen $\mathfrak{h}'(0) = 0$ und l' ist beschränkt, so folgt $m'_{t_1,2}(0) = 0 = m'_{t_2,2}(0)$, die Büschel würden sich also nicht transversal schneiden, was aber in einer differenzierbaren Ebene nicht vorkommen kann. Mehr Information lässt sich aber wohl in diesem Fall nicht gewinnen. Zwar lassen sich Beispiele dieser Art gegebenenfalls mit einer differenzierbaren Struktur versehen so, dass die Punktreihen und Geradenbüschel Untermannigfaltigkeiten der Punkt- beziehungsweise Geradenmannigfaltigkeit sind, die sich untereinander auch transversal schneiden, über die Differenzierbarkeit von Schneiden und Verbinden kann aber leider im Allgemeinen keine Aussage gemacht werden (siehe Bemerkung 5.26). Im Gegensatz zum generischen Fall, der in Abschnitt 5.3 besprochen wird, ist die differenzierbare Struktur deutlicher von der Funktion \mathfrak{h} abhängig.

5.25 Korollar: Moulton-Ebenen verschieden von $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ sind nicht differenzierbar.

Beweis: Moulton-Ebenen lassen sich als Schellhammer-Ebenen darstellen (siehe (Bet72) und (Sch81, §3)) mit $\tilde{\mathfrak{h}}_s(w) := e^{-sw} \sin(w)$ und $s \in \mathbf{R}_0^+$.

Dann ist für $w \notin \pi\mathbf{Z}$

$$\tilde{\mathfrak{h}}'_s(w) = e^{-sw} (-s \sin(w) + \cos(w)),$$

also

$$\lim_{w \searrow 0} \tilde{\mathfrak{h}}'_s(w) = 1$$

aber

$$\lim_{w \nearrow 0} \tilde{\mathfrak{h}}'_s(w) = e^{-s\pi}.$$

Damit ist $\tilde{\mathfrak{h}}'_s$ für $s \neq 0$ nicht stetig bei 0, obwohl der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert existiert und jeweils verschieden von 0 ist; nach Lemma 5.23 kann die Ebene also nicht differenzierbar sein. Im Fall $s = 0$ liegt eine Moulton-Ebene vor, die isomorph zur klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ ist (siehe Beispiel 5.4). □

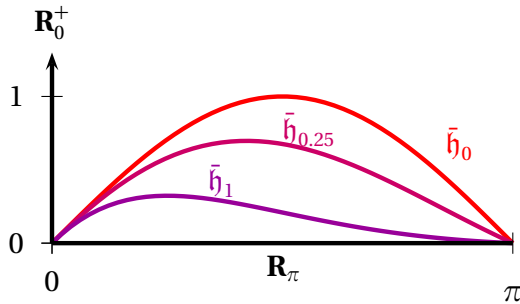


Abbildung 5.9:
Graphen der Schellhammer-Funktionen verschiedener Moulton-Ebenen

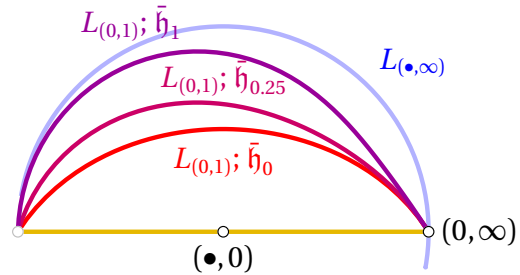


Abbildung 5.10:
Standardgeraden verschiedener Moulton-Ebenen

5.3 Der generische Fall $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$

5.26 Bemerkung: Auf den ersten Blick könnte man den Eindruck gewinnen, $\mathfrak{h}'(0) = 0$ zöge es nach sich, dass der Schnitt von Standardgeraden mit der Ferngeraden nicht mehr transversal sein kann und es deswegen für die Schellhammer-Ebene unmöglich ist differenzierbar zu sein. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall.

Die Schellhammer-Funktion

$$\mathfrak{h}: \mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto (\sin(x))^2$$

erzeugt nach Proposition 5.3 und Beispiel 5.4 eine zur klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ isomorphe und damit differenzierbare Schellhammer-Ebene – obwohl $\mathfrak{h}'(0) = 0$ erfüllt ist.

Die in Satz 5.20 angegebene differenzierbare Struktur lässt sich für dieses Beispiel sogar explizit angeben. Allerdings werden die dabei auftretenden Terme unangenehm kompliziert. Es erscheint deswegen fast unmöglich oder zumindest äußerst mühsam, im allgemeinen Fall einer Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} mit $\mathfrak{h}'(0) = 0$, mit Hilfe der geometrischen Konstruktionen aus 5.20 explizit eine differenzierbare Struktur zu bestimmen.

Im Fall einer Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} mit $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$ können wir jedoch wesentlich mehr erreichen: Mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion können wir den Atlas deutlich vereinfachen. Dies und die sich daraus ergebenden Konsequenzen sollen im Folgenden ausgeführt werden.

Es ist aber leider nicht klar, ob sich jede Schellhammer-Funktion auf eine Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} mit $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$ zurückführen lässt.

5.27 Generalvoraussetzung: Im Folgenden soll, wenn von einer (differenzierbaren) Schellhammer-Ebene die Rede ist, immer eine 2-dimensionale (differenzierbare) Schellhammer-Ebene gemeint sein, bei der \mathfrak{h} auf $\mathbf{R}_{2\pi}$ stetig differenzierbar und $\mathfrak{h}'(w) \neq 0$ für $w \in \pi\mathbf{Z}$ ist. (Nach Lemma 5.23 ist bereits die Existenz eines einseitigen Grenzwertes von \mathfrak{h}' bei 0 hinreichend für die stetige Differenzierbarkeit von \mathfrak{h} .)

Insbesondere gilt $\mathfrak{h}(w) = -\mathfrak{h}(w + \pi)$ und $\mathfrak{h}'(w) = -\mathfrak{h}'(w + \pi)$ für alle $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$.

5.28 Proposition: Sei \mathfrak{G} eine Schellhammer-Ebene mit \mathcal{C}^1 -Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} , die $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$ erfüllt. Dann gilt für alle $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$ und $a \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}$:

$$\mathfrak{h}(w)\mathfrak{h}'(w-a) - \mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w-a) \neq 0.$$

Insbesondere gibt es für $a \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}$ ein $r > 0$ so, dass für alle $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$ gilt:

$$|\mathfrak{h}(w)\mathfrak{h}'(w-a) - \mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w-a)| \geq r.$$

Beweis: Angenommen es gelte $\mathfrak{h}(w)\mathfrak{h}'(w-a) - \mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w-a) = 0$ für ein $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$.

Falls $\mathfrak{h}(w) = 0$, so ist

$$-\mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w-a) = 0.$$

Wegen der Bedingungen an die Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} aus Konstruktion 5.2 ist $\mathfrak{h}(w) = 0$ genau für $w \in \pi\mathbf{Z}$ erfüllt. Weil aber dann $\mathfrak{h}(w-a) \neq 0$, müsste daraus $\mathfrak{h}'(w) = \mathfrak{h}'(0) = 0$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zum selben Schluss kommt man unter der Annahme, dass $\mathfrak{h}(w-a) = 0$.

Gehen wir davon aus, dass weder $\mathfrak{h}(w) = 0$ noch $\mathfrak{h}(w-a) = 0$, so erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{h}'(w)}{\mathfrak{h}(w)} = \frac{\mathfrak{h}'(w-a)}{\mathfrak{h}(w-a)}$$

und damit einen Widerspruch zu Proposition 5.12, da $\frac{\mathfrak{h}'(w_1)}{\mathfrak{h}(w_1)} = \frac{\mathfrak{h}'(w_2)}{\mathfrak{h}(w_2)}$ genau dann gilt, wenn $w_2 \in w_1 + \pi\mathbf{Z}$ erfüllt ist.

Dass der Term $\mathfrak{h}(w)\mathfrak{h}'(w-a) - \mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w-a)$ nicht nur keine Nullstelle besitzt, sondern auch von 0 weg beschränkt ist, liegt daran, dass

$$\mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}: w \mapsto \mathfrak{h}(w)\mathfrak{h}'(w-a) - \mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w-a)$$

eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist. □

5.29 Lemma: Sei \mathfrak{G} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene. Dann ist

$$L_{(a,0)} \setminus \{(a, \infty)\} \rightarrow \mathbf{R}: \begin{cases} (a, r) \mapsto r \\ (\bullet, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

eine Karte in der differenzierbaren Struktur von $L_{(a,0)}$.

Beweis: In Lemma 5.15 haben wir bereits eine differenzierbare Parametrisierung bestimmt, die durch Einschränken auf geeignete Umgebungen und Invertieren zu einer Karte wird. Betrachtet man den zugehörigen Kartenwechsel, so erhält man

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbf{Z} & \rightarrow & L_{(a,0)} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ w_0 \mapsto (a, \mathfrak{k}(w_0)) & & & & \mathfrak{k}(w_0) \end{array}$$

(eine Fallunterscheidung ist dabei nicht mehr nötig, wenn man „(0,0)“ mit $(\bullet, 0)$ identifiziert). Dies ist auf $\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$ wegen Korollar 5.11 differenzierbar – die Ableitung werden wir sogleich bestimmen –; da sich aber die zugehörige Umkehrfunktion im Allgemeinen nicht

mehr explizit angeben lässt, kann nur mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion eine Aussage getroffen werden, ob der Kartenwechsel ein Diffeomorphismus $\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ ist. Es gilt

$$D_{w_0} \mathfrak{k} = \left(\frac{\mathfrak{h}(w_0)}{\mathfrak{h}(w_0 - \frac{\pi}{2})} \right)' = \frac{\mathfrak{h}'(w_0)\mathfrak{h}(w_0 - \frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(w_0)\mathfrak{h}'(w_0 - \frac{\pi}{2})}{(\mathfrak{h}(w_0 - \frac{\pi}{2}))^2}$$

und weiter $D_{w_0} \mathfrak{k} \neq 0$, denn sonst wäre

$$\mathfrak{h}'(w_0)\mathfrak{h}(w_0 - \frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(w_0)\mathfrak{h}'(w_0 - \frac{\pi}{2}) = 0,$$

im Widerspruch zu Proposition 5.28. Der Satz über die Umkehrfunktion 1.6 ist damit anwendbar. \square

5.30 Korollar: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene. Dann ist

$$\mathfrak{L}_{(a,\infty)} \setminus \{L_{(\bullet,\infty)}\} \rightarrow \mathbf{R}: L_{(a,r)} \mapsto r$$

eine Karte in der differenzierbaren Struktur des Büschels $\mathfrak{L}_{(a,\infty)}$.

Beweis: Dies ergibt sich aus Lemma 5.17 mit Hilfe der in Lemma 5.29 gewonnene Karte für die Gerade $L_{(a,0)}$. \square

5.31 Korollar: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammer-Ebene. Dann ist

$$L_{(a,0)} \setminus \{(\bullet, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}: \begin{cases} (a, r) \mapsto \frac{1}{r} \\ (a, \infty) \mapsto 0 \end{cases}$$

eine Karte in der differenzierbaren Struktur von $L_{(a,0)}$.

Beweis: Dies ergibt sich ebenfalls aus Lemma 5.17 mit Hilfe der in Lemma 5.29 gewonnene Karte für die Gerade $L_{(a,0)}$. \square

Damit sind also die differenzierbaren Strukturen auf den entscheidenden Punktreihen und Geradenbüscheln einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene explizit bekannt. Dies kann nun benutzt werden, um mit Hilfe geometrischer Operationen einen Atlas für die Punktmenge der Schellhammer-Ebene zu konstruieren.

5.32 Atlas für die Punktmenge: Mit Hilfe der in Lemma 5.29 gewonnenen Karte auf den Ursprungsgeraden kann man die Karten auf der Punktmenge aus Satz 5.20 folgendermaßen angeben (genau wie dort stehen auch hier wieder nur noch im Abbildungssinn zu interpretierende Zuordnungsvorschriften):

$$\begin{aligned} \chi_Z: \mathfrak{P} \supseteq \mathbf{C}^\times &\rightarrow \mathbf{R}^2: (w, r) \mapsto (w, r) \\ \chi_F: \mathfrak{P} \setminus \{(\bullet, 0)\} &\rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} (w, r) \mapsto (\hat{w}, \frac{1}{r}) & \text{mit } \hat{w} \in w + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \\ (w, \infty) \mapsto (\hat{w}, 0) & \text{mit } \hat{w} \in w + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \end{cases} \\ \chi_O: \mathfrak{P} \setminus L_{(\bullet,\infty)} &\rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} (w, r) \mapsto (r \mathfrak{h}(w), -r \mathfrak{h}(w - \frac{\pi}{2})) \\ (\bullet, 0) \mapsto (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Geht man andererseits von einer nicht notwendigerweise differenzierbaren Schellhammer-Ebene aus, so erhält man doch durch die angegebenen Abbildungen α_Z , α_F und α_O einen differenzierbaren Atlas der Punktmenge \mathfrak{P} , falls \mathfrak{h} differenzierbar ist und $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$.

Da sich die Definitionsbereiche von α_O und α_F genau im Definitionsbereich von α_Z schneiden, müssen hierzu nur die Kartenwechsel von α_Z nach α_O und von α_Z nach α_F untersucht werden.

Die Ableitung

$$D_{(w,r)}(\alpha_Z^{-1}\alpha_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

besitzt in ihrem Definitionsbereich vollen Rang. Deshalb ist der Kartenwechsel $\alpha_Z^{-1}\alpha_F$ nach dem Satz über die Umkehrfunktion 1.6 ein Diffeomorphismus.

Die Ableitung

$$D_{(w,r)}(\alpha_Z^{-1}\alpha_O) = \begin{pmatrix} r\mathfrak{h}(w) & r\mathfrak{h}'(w - \frac{\pi}{2}) \\ \mathfrak{h}(w) & -\mathfrak{h}'(w - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

des Kartenwechsels $\alpha_Z^{-1}\alpha_O$ besitzt die Determinante

$$\det(D_{(w,r)}(\alpha_Z^{-1}\alpha_O)) = -r(\mathfrak{h}(w)\mathfrak{h}'(w - \frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}'(w)\mathfrak{h}(w - \frac{\pi}{2})) \neq 0,$$

die wegen Proposition 5.28 nicht verschwindet. Also ist der Kartenwechsel wieder nach dem Satz über die Umkehrfunktion 1.6 ein Diffeomorphismus.

5.33 Atlas für die Geradenmenge: Wie in Satz 5.20 erhält man durch Anwenden der Polarität ι aus den in 5.32 gewonnenen Karten auch einen Atlas für die Geradenmenge. Mit

$$\begin{aligned} \lambda_U: \mathcal{L} \setminus \{L_{(\bullet,\infty)}\} &\rightarrow \mathbf{R}^2: L_{(a,t)} \mapsto (-\hat{a}, t) \quad \text{mit } \hat{a} \in a + \pi\mathbf{Z} \text{ geeignet} \\ \lambda_F: \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{(\bullet,0)} &\rightarrow \mathbf{R}^2: \begin{cases} L_{(a,t)} \mapsto \left(\frac{1}{t}\mathfrak{h}(-a), -\frac{1}{t}\mathfrak{h}(-a - \frac{\pi}{2})\right) \\ L_{(\bullet,\infty)} \mapsto (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

ist die differenzierbare Struktur von \mathcal{L} bestimmt.

Unser nächstes Ziel wird es sein, differenzierbare Familien von Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren, die die Geraden der Ebene parametrisieren, um dadurch auf die Differenzierbarkeit der Schnittabbildung schließen zu können beziehungsweise um weitere Eigenschaften, die \mathfrak{h} besitzen muss, ermitteln zu können. Hierzu wollen wir zunächst das Schneiden zweier Geraden etwas genauer untersuchen.

5.34 Schnittpunkt zweier Geraden: Die Schnittpunkte von beliebigen Geraden mit der Ferngeraden $L_{(\bullet,\infty)}$ beziehungsweise von zwei Geraden, die sich in einem Punkt der Ferngeraden schneiden, ergeben sich direkt aus der Definition dieser Geraden und sind aus Proposition 5.5 ersichtlich. Schwieriger ist die Situation im affinen Teil der Schellhammer-Ebene. Bei der folgenden Untersuchung genügt es aber, sich auf die Fälle zu beschränken, bei denen eine der beteiligten Geraden im Büschel $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$ liegt. Dies lässt sich durch Konjugation mit einem geeigneten Automorphismus $\sigma_{(a,1)}$ erreichen.

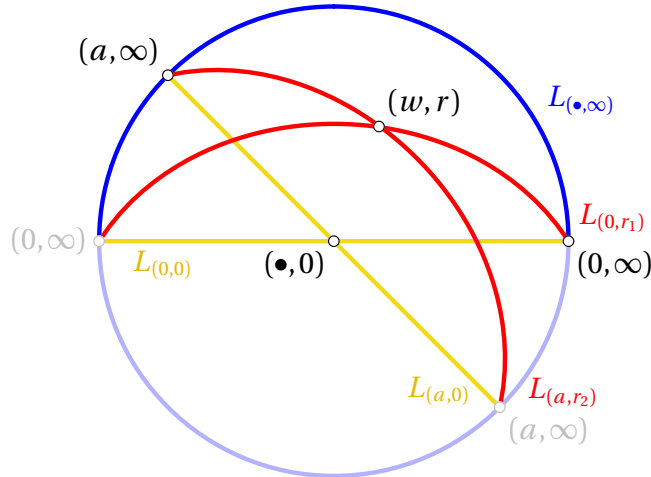


Abbildung 5.11: Schnitt von Geraden

Falls $a \in \pi\mathbf{Z}$, so schneiden sich zwei Geraden $L_{(0,r_1)}$ und $L_{(a,r_2)}$ entweder im Fernpunkt $(0, \infty)$ oder die Geraden fallen zusammen. Ist $a \notin \pi\mathbf{Z}$, so schneiden sich die Geraden $L_{(0,0)}$ und $L_{(a,0)}$ im Ursprung $(\bullet, 0)$.

Seien im Folgenden also zwei Geraden $L_{(0,r_1)}$ und $L_{(a,r_2)}$ für $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $a \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}$ gegeben. Die Lage der Geraden zueinander ist so, dass sie sich in einem Punkt im affinen Teil der Schellhammer-Ebene schneiden. Wegen 5.5 gilt für den Punkt $(w, r) = L_{(0,r_1)} \wedge L_{(a,r_2)}$

$$\left(w_1, r_1 \frac{1}{\mathfrak{h}(w_1)} \right) = (w, r) = \left(w_2 + a, r_2 \frac{1}{\mathfrak{h}(w_2)} \right)$$

für geeignete $w_1, w_2 \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}$. Das heißt aber

$$w_2 = w_1 - a = w - a \quad \text{und} \quad r = \frac{r_1}{\mathfrak{h}(w)} = \frac{r_2}{\mathfrak{h}(w - a)}$$

und letzteres ist genau dann der Fall, wenn

$$0 = r_1 \mathfrak{h}(w - a) - r_2 \mathfrak{h}(w),$$

womit dann der Winkel w des Schnittpunkts (w, r) bestimmt ist; dieser liefert auch sogleich den Abstand r vom Ursprung. Ist $r_1 = 0$ (also nach Voraussetzung $r_2 \neq 0$), so folgt wieder wegen 5.5 für $(w, r) = L_{(0,0)} \wedge L_{(a,r_2)}$

$$(0, t_1) = (w, r) = \left(w_2 + a, r_2 \frac{1}{\mathfrak{h}(w_2)} \right),$$

also

$$w = 0 \quad \text{sowie} \quad w_2 = -a \quad \text{und damit} \quad t_1 = \frac{r_2}{\mathfrak{h}(-a)}.$$

Andererseits wird der Winkel w auch schon durch die Gleichung

$$0 = r_1 \mathfrak{h}(w - a) - r_2 \mathfrak{h}(w)$$

bestimmt, denn für $r_1 = 0$ wird diese zu $0 = -r_2 \mathfrak{h}(w)$. Nun ist aber $r_2 \neq 0$, womit $w = 0$ folgt. Analog wird auch im Fall $r_2 = 0$ der Winkel w des Schnittpunkts $(w, r) = L_{(0, r_1)} \wedge L_{(a, 0)}$ bereits durch die Gleichung $0 = r_1 \mathfrak{h}(w - a) - r_2 \mathfrak{h}(w)$ festgelegt; es ist nämlich in diesem Fall $w = a$.

Die Abbildung

$$\mathfrak{s}: (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}_\pi \rightarrow \mathbf{R}: (r_1, r_2, a, w) \mapsto r_1 \mathfrak{h}(w - a) - r_2 \mathfrak{h}(w)$$

beschreibt also durch ihre Nullstellenmenge das Schneiden von Geraden in der Form, dass nach Vorgabe von Parametern $(r_1, r_2, a) \in (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z})$ genau ein $w \in \mathbf{R}_\pi$ existiert, so dass der Schnittpunkt die Form (w, r) für geeignetes $r \in \mathbf{R}$ hat. Die Frage ist nun, ob dieses „Auflösen nach w “ differenzierbar geschieht. Das geeignete Werkzeug hierzu ist der Satz über implizite Funktionen.

Bewegen wir uns in einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene gemäß Generalvoraussetzung 5.27, so ist \mathfrak{s} differenzierbar und es gilt

$$D_{(r_1, r_2, a, w)} \mathfrak{s} = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}(w - a) \\ -\mathfrak{h}(w) \\ -r_1 \mathfrak{h}'(w - a) \\ r_1 \mathfrak{h}'(w - a) - r_2 \mathfrak{h}'(w) \end{pmatrix}.$$

Wir sind ja an einer Situation mit $\mathfrak{s}(r_1, r_2, a, w) = 0$ interessiert, also wenn

$$\begin{aligned} r_1 \mathfrak{h}(w - a) - r_2 \mathfrak{h}(w) &= 0 \\ \text{oder äquivalent} \quad r_1 \mathfrak{h}(w - a) &= r_2 \mathfrak{h}(w) \end{aligned} \quad (*)$$

erfüllt ist. Der Satz über implizite Funktionen 1.5 liefert diesbezüglich eine Aussage, wenn für die vierte Komponente der Ableitung gilt

$$(D_{(r_1, r_2, a, w)} \mathfrak{s})_4 = r_1 \mathfrak{h}'(w - a) - r_2 \mathfrak{h}'(w) \neq 0.$$

Ist nun $r_1 = 0$, dann ist aufgrund der Definition von \mathfrak{s} der Fall $r_2 = 0$ ausgeschlossen, aus (*) folgt $\mathfrak{h}(w) = 0$ und damit $w \in \pi\mathbf{Z}$. Es gilt daher $(D_{(r_1, r_2, a, w)} \mathfrak{s})_4 = -r_2 \mathfrak{h}'(w) \neq 0$, da $\mathfrak{h}'(w) = 0$ für $w \in \pi\mathbf{Z}$ gemäß der Generalvoraussetzung 5.27 ausgeschlossen ist.

Falls $\mathfrak{h}(w) = 0$, so ist $w \in \pi\mathbf{Z}$. Mit (*) folgt $r_1 \mathfrak{h}(w - a) = 0$. Da für $\mathfrak{h}(w - a) = 0$ aber $w - a \in \pi\mathbf{Z}$ nötig ist, was wegen $a \notin \pi\mathbf{Z}$ ausgeschlossen ist, ergibt sich zwangsläufig $r_1 = 0$ und wie eben $(D_{(r_1, r_2, a, w)} \mathfrak{s})_4 \neq 0$.

Kommen wir jetzt zum allgemeinen Fall $0 \notin \{r_1\} \cup (w + \pi\mathbf{Z})$. Es ist

$$0 = r_1 \mathfrak{h}'(w - a) - r_2 \mathfrak{h}'(w)$$

wegen $\mathfrak{h}(w) \neq 0$ und (*) genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= (r_1 \mathfrak{h}'(w - a) - r_2 \mathfrak{h}'(w)) \mathfrak{h}(w) \\ &= r_1 \mathfrak{h}'(w - a) \mathfrak{h}(w) - r_2 \mathfrak{h}'(w) \mathfrak{h}(w) \\ &\stackrel{(*)}{=} r_1 \mathfrak{h}'(w - a) \mathfrak{h}(w) - r_1 \mathfrak{h}(w - a) \mathfrak{h}'(w) \\ &= r_1 (\mathfrak{h}'(w - a) \mathfrak{h}(w) - \mathfrak{h}(w - a) \mathfrak{h}'(w)), \end{aligned}$$

was aber wegen $r_1 \neq 0$ und Proposition 5.28 ausgeschlossen ist. Daher gilt $(D_{(r_1, r_2, a, w)} \mathfrak{s})_4 \neq 0$.

Auf Grund des Satzes über Implizite Funktionen 1.5 gibt es eine differenzierbare Funktion

$$\tilde{w}: (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{R}_\pi$$

mit

$$\mathfrak{s}(r_1, r_2, a, \tilde{w}(r_1, r_2, a)) = 0$$

für $(r_1, r_2, a) \in (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z})$ mit der Ableitung

$$D_{(r_1, r_2, a)} \tilde{w} = - \frac{1}{r_1 h'(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a) - r_2 h'(\tilde{w}(r_1, r_2, a))} \begin{pmatrix} h(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a) \\ -h(\tilde{w}(r_1, r_2, a)) \\ -r_1 h'(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion \tilde{w} bestimmt zu gegebenen Parametern $(r_1, r_2, a) \in (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z})$ die Winkelkoordinate $w = \tilde{w}(r_1, r_2, a)$ des Schnittpunkts $(w, r) = L_{(0, r_1)} \wedge L_{(a, r_2)}$. Die zugehörige Radiuskoordinate r lässt sich dann über $r = r_1 \frac{1}{h(w)} = r_2 \frac{1}{h(w-a)}$ bestimmen.

5.35 Bemerkung: Es sei an dieser Stelle betont, dass sich die Funktion \tilde{w} nicht stetig auf ganz $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z})$ fortsetzen lässt. Ja, es gilt sogar, dass für beliebige $w_0 \in \mathbf{R}_{2\pi}$ eine Folge $(r_{1,n}, r_{2,n})_{n \in \mathbf{N}}$ existiert so, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{w}(r_{1,n}, r_{2,n}, a) = w_0$. Denn betrachtet man auf der Geraden $L_{(w_0, 0)}$ eine Folge von Punkten $(w_0, t_n) \rightarrow (\bullet, 0)$, und bestimmt man $r_{1,n}$ und $r_{2,n}$ so, dass $L_{(0, r_{1,n})} := (w_0, t_n) \vee (0, \infty)$ und $L_{(a, r_{2,n})} := (w_0, t_n) \vee (a, \infty)$, so ist die Winkelkoordinate des Schnittpunkts $L_{(0, r_{1,n})} \wedge L_{(a, r_{2,n})}$ konstant w_0 und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{w}(r_{1,n}, r_{2,n}, a) = w_0$.

Dies darf aber nicht mit der Stetigkeit des Schneidens von Geraden verwechselt werden. Da eine topologische projektive Ebene zugrunde liegt, ist das Schneiden von Geraden stetig. Die eben bemerkte Tatsache ist lediglich eine Folge des Umstandes, dass der Ursprung $(\bullet, 0)$ in Polarkoordinaten nicht „vernünftig“ darstellbar ist. Das Problem betrifft aber lediglich den Winkel und nicht die Radiuskomponente.

5.36 Korollar: Sei $(r_1, r_2, a) \in (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z})$. Dann gilt

$$r_1 h(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a) = r_2 h(\tilde{w}(r_1, r_2, a)).$$

Beweis: Das ist genau die Aussage (*) aus 5.34. □

5.37 Definition und Korollar: Die Radiuskomponente des Schnittpunkts zweier Geraden, wie in 5.34 untersucht, wird durch die *stetige* Abbildung

$$\tilde{\tau}: \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{R}: (r_1, r_2, a) \mapsto \begin{cases} \frac{r_1}{h(\tilde{w}(r_1, r_2, a))} & \text{für } \tilde{w}(r_1, r_2, a) \notin \pi\mathbf{Z} \\ \frac{r_2}{h(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a)} & \text{für } \tilde{w}(r_1, r_2, a) - a \notin \pi\mathbf{Z} \\ 0 & \text{für } (r_1, r_2) = (0, 0) \end{cases}$$

beschrieben. Wir können deshalb die Ausdrücke

$$\frac{r_1}{h(\tilde{w}(r_1, r_2, a))} \quad \text{und} \quad \frac{r_2}{h(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a)}$$

gegenseitig ersetzen, insbesondere wenn einer der beiden nicht definiert ist. Dies soll im Folgenden in der Regel ohne weitere Kommentare geschehen.

Beweis: Da $a \notin \pi\mathbf{Z}$, kann entweder $\tilde{\omega}(r_1, r_2, a) \in \pi\mathbf{Z}$ oder $\tilde{\omega}(r_1, r_2, a) - a \in \pi\mathbf{Z}$ vorkommen. Aus Korollar 5.36 folgt die Wohldefiniertheit. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit des Schneidens, wie bereits in Bemerkung 5.35 angesprochen. \square

5.38 Korollar: Die in 5.34 ermittelte Ableitung $D_{(r_1, r_2, a)} \tilde{\omega}$ lässt noch andere Darstellungen zu. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_{1;(r_1, r_2, a)} \tilde{\omega} &= -\frac{1}{r_2} \cdot \frac{(\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a))^2}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a)\mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ &= -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a)\mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ \partial_{2;(r_1, r_2, a)} \tilde{\omega} &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a)\mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{(\mathfrak{h}(\tilde{\omega}))^2}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a)\mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ \partial_{3;(r_1, r_2, a)} \tilde{\omega} &= \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega})\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a)}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a)\mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}, \end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber die Argumente (r_1, r_2, a) der Funktion $\tilde{\omega}$ unterdrückt sind, es ist also „ $\tilde{\omega}$ “ als „ $\tilde{\omega}(r_1, r_2, a)$ “ zu lesen.

Beweis: Falls $\mathfrak{h}(\tilde{\omega}(r_1, r_2, a) - a) \neq 0$, so kann dies zum Erweitern von Brüchen verwendet werden. Zusammen mit Korollar 5.36 erhält man also

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) - r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})} &= \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}{(r_1 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) - r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ &= \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}{r_1 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a) - r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega}) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ &= \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}{r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) \mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega}) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)} \\ &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) \mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega}) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}. \end{aligned}$$

Analog erhält man im Fall $\mathfrak{h}(\tilde{\omega}(r_1, r_2, a)) \neq 0$

$$\frac{1}{r_1 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) - r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\tilde{\omega})}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) \mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega}) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}.$$

Demnach gilt im Fall $\mathfrak{h}(\tilde{\omega}(r_1, r_2, a) - a) \neq 0$

$$\begin{aligned} \partial_{1;(r_1, r_2, a)} \tilde{\omega} &= -\frac{1}{r_1 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) - r_2 \mathfrak{h}'(\tilde{\omega})} \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a) \\ &= -\frac{1}{r_2} \cdot \frac{(\mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a))^2}{\mathfrak{h}'(\tilde{\omega} - a) \mathfrak{h}(\tilde{\omega}) - \mathfrak{h}'(\tilde{\omega}) \mathfrak{h}(\tilde{\omega} - a)}. \end{aligned}$$

Da aber $h(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a) = 0$ auch $\partial_{1;(r_1, r_2, a)} \tilde{w} = 0$ impliziert und da nach Proposition 5.28 außerdem $h'(\tilde{w} - a)h(\tilde{w}) - h'(\tilde{w})h(\tilde{w} - a) \neq 0$ erfüllt ist, gilt für beliebige $(r_1, r_2, a) \in (\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbf{R}_{2\pi} \setminus \pi\mathbf{Z})$:

$$\partial_{1;(r_1, r_2, a)} \tilde{w} = -\frac{1}{r_2} \cdot \frac{(h(\tilde{w} - a))^2}{h'(\tilde{w} - a)h(\tilde{w}) - h'(\tilde{w})h(\tilde{w} - a)}.$$

Analog erhält man den alternativen Ausdruck für $\partial_{1;(r_1, r_2, a)} \tilde{w}$ sowie die Ausdrücke für $\partial_{2;(r_1, r_2, a)} \tilde{w}$.

Da $h(\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a) = 0$ auch $\tilde{w}(r_1, r_2, a) - a \in \pi\mathbf{Z}$ zur Folge hat, dies aber aufgrund der Lage der Geraden $L_{(0, r_1)}$ und $L_{(a, r_2)}$ zueinander nur für $r_1 = 0$ vorkommen kann, ergibt sich die angegebene Form von $\partial_{3;(r_1, r_2, a)} \tilde{w}$. \square

Es soll im Folgenden ja die Frage geklärt werden, ob das Schneiden von Geraden (und dual dazu das Verbinden von Punkten) differenzierbar ist. Man könnte dazu versuchen, mit Hilfe der eben in 5.34 definierten Funktion \tilde{w} (in Komposition mit den nötigen Karten der differenzierbaren Struktur), direkt die Differenzierbarkeit zu testen. Leider erweist sich dieser Versuch als ziemlich unfruchtbar. Wir wollen stattdessen auf die Verwendung differenzierbarer Familien von Untermannigfaltigkeiten hinarbeiten. Die Schnitte von Geraden, die wir für diesen Zweck benötigen, können aber ein wenig spezieller gewählt werden: Es reicht für die Konstruktion der differenzierbaren Familien, Schnitte von Geraden der Büschel $\mathcal{L}_{(0, \infty)}$ und $\mathcal{L}_{(\frac{\pi}{2}, \infty)}$ zu verwenden. Der Winkel des Schnittpunkts lässt sich dann mit der im Folgenden definierten Funktion bestimmen:

5.39 Definition: Es sei \tilde{w} die in 5.34 bestimmte Funktion, die den Schnittpunktswinkel bestimmt. Wir definieren

$$\mathfrak{w}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}_\pi: (r_1, r_2) \mapsto \begin{cases} \tilde{w}(r_1, r_2, \frac{\pi}{2}) & \text{für } (r_1, r_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (r_1, r_2) = (0, 0). \end{cases}$$

5.40 Bemerkung: Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass die eben definierte Funktion \mathfrak{w} an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig ist, da ja bereits \tilde{w} bei $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzbar war, siehe Bemerkung 5.35.

5.41 Korollar: Sei $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dann gilt

$$r_1 h(\mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2}) = r_2 h(\mathfrak{w}(r_1, r_2)).$$

Beweis: Man wendet Korollar 5.36 auf \mathfrak{w} an. \square

5.42 Korollar: Analog erhalten wir für die Radiuskomponente die stetige Abbildung

$$\mathfrak{r}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}: (r_1, r_2) \mapsto \begin{cases} \frac{r_1}{h(\mathfrak{w}(r_1, r_2))} & \text{für } \mathfrak{w}(r_1, r_2) \notin \pi\mathbf{Z} \\ \frac{r_2}{h(\mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2})} & \text{für } \mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Wir können deshalb auch wieder die Ausdrücke

$$\frac{r_1}{\mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, r_2))} \quad \text{und} \quad \frac{r_2}{\mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2})}$$

gegenseitig ersetzen, insbesondere wenn einer der beiden nicht definiert ist. Dies soll im Folgenden in der Regel ohne weitere Kommentare geschehen.

Beweis: Man wendet Korollar 5.37 auf \mathfrak{w} an. □

5.43 Korollar: Es gilt für $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} D_{(r_1, r_2)} \mathfrak{w} &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \mathfrak{h}(\mathfrak{w}) - \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \mathfrak{h}'(\mathfrak{w})} \begin{pmatrix} -\mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \\ \mathfrak{h}(\mathfrak{w}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\mathfrak{w})}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \mathfrak{h}(\mathfrak{w}) - \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \mathfrak{h}'(\mathfrak{w})} \begin{pmatrix} -\mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \\ \mathfrak{h}(\mathfrak{w}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wieder der Übersichtlichkeit halber die Argumente (r_1, r_2) der Funktion \mathfrak{w} unterdrückt sind.

Beweis: Das folgt direkt aus der Definition von \mathfrak{w} und Korollar 5.38. □

5.44 Korollar: Für die Umkehrungen der in Lemma 5.32 und 5.33 bestimmten Karten gilt:

$$(\mathfrak{x}_O)^{-1}: \begin{cases} (x, y) \mapsto (\mathfrak{w}(x, -y), \mathfrak{r}(x, -y)) \\ (0, 0) \mapsto (\bullet, 0) \end{cases}$$

und

$$(\lambda_F)^{-1}: \begin{cases} (x, y) \mapsto L_{(-\mathfrak{w}(x, -y), \frac{1}{\mathfrak{r}(x, -y)})} \\ (0, 0) \mapsto L_{(\bullet, \infty)}. \end{cases}$$

Beweis: Es seien die Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$ eines Punktes (w, r) unter der Karte \mathfrak{x}_O gegeben. Also

$$(w, r)^{\mathfrak{x}_O} = \left(r \mathfrak{h}(w), -r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right) \right) = (x, y),$$

folglich

$$x = r \mathfrak{h}(w) \quad \text{und} \quad y = -r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right).$$

Falls $y \neq 0$, so ist

$$\frac{x}{y} = \frac{r \mathfrak{h}(w)}{-r \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\mathfrak{h}(w)}{\mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right)}$$

und weiter

$$x \mathfrak{h}\left(w - \frac{\pi}{2}\right) = -y \mathfrak{h}(w),$$

was man auch im Fall $x \neq 0$ erhält. Nach 5.34 (*) und der Definition von \mathfrak{w} lässt sich also die Winkelkomponente w des Punktes durch

$$w = \mathfrak{w}(x, -y)$$

und damit dann auch die Radiuskomponente $r = r(x, -y)$ bestimmen.

Durch eine analoge Rechnung ergibt sich $(\lambda_F)^{-1}$. \square

In einer differenzierbaren projektiven Ebene müssen sich nach Proposition 2.8 die Punktreihen verschiedener Geraden transversal schneiden. Andererseits ist diese Bedingung auch notwendig für die Anwendung von Proposition 1.22.

5.45 Lemma: Es sei \mathfrak{G} eine nicht notwendigerweise differenzierbare Schellhammer-Ebene mit einer differenzierbaren Schellhammer-Funktion h so, dass h' auf $\mathbf{R}_{2\pi}$ stetig ist und $h'(0) \neq 0$ erfüllt.

Dann schneiden sich die Punktreihen zu je zwei verschiedenen Geraden transversal bezüglich der in 5.32 angegebenen differenzierbaren Struktur.

Beweis: Zu untersuchen ist, wie sich die Tangentialräume der Geraden eines Büschels in dem gemeinsamen Punkt verhalten.

Eine Gerade $L_{(a,0)}$ für $a \in \mathbf{R}_\pi$ des Büschels $\mathfrak{L}_{(\bullet,0)}$ lässt sich in einer Umgebung von $(\bullet, 0)$ durch $r \mapsto (r h(a), -r h(a - \frac{\pi}{2}))$ bezüglich der Karte \varkappa_O parametrisieren und für $r = 0$ erhält man gerade den gemeinsamen Punkt $(\bullet, 0)$ des Büschels (siehe Lemma 5.29, 5.32 und Abbildung 5.6 auf Seite 79). Bezüglich der entsprechenden Karte $\hat{\varkappa}_O$ des Tangentialraumes $T\mathfrak{P}$ erhält man

$$(T_{(\bullet,0)} L_{(a,0)})^{\hat{\varkappa}_O} = \text{Spann} \left\{ \left(h(a), -h(a - \frac{\pi}{2}) \right) \right\},$$

denn die Ableitung der angegebenen Parametrisierung nach dem Parameter r ist ja gerade $(h(a), -h(a - \frac{\pi}{2}))$. Bei der Untersuchung zweier Geraden dieses Büschels lässt sich durch Anwenden eines geeigneten Automorphismus $\sigma_{(w,1)}$ der Schellhammer-Gruppe ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass eine der beteiligten Geraden die Gerade $L_{(0,0)}$ ist. Sie schneidet die Gerade $L_{(a,0)}$ für $a \notin \pi\mathbf{Z}$ transversal, denn $(h(0), -h(-\frac{\pi}{2})) = (0, -h(-\frac{\pi}{2}))$ und $(h(a), -h(a - \frac{\pi}{2}))$ sind sicherlich linear unabhängig (für $a \in \pi\mathbf{Z}$ gilt $L_{(a,0)} = L_{(0,0)}$).

Zum Studium von Geraden, die sich in einem Punkt $(a, t) \in \mathbf{C}^\times \subseteq \mathfrak{P}$ schneiden, kann man nach Anwendung des Automorphismus $\sigma_{(-a, \frac{1}{t})}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ und $t = 1$ annehmen (siehe Abbildung 5.5 auf Seite 79). Eine Gerade $L_{(-a, h(a))}$ des Büschels $\mathfrak{L}_{(0,1)}$ lässt sich wegen Proposition 5.5 durch $w \mapsto (-a + w, \frac{h(a)}{h(w)})$ bezüglich der Karte \varkappa_Z parametrisieren mit Ableitung $(1, \frac{h(a)h'(w)}{(h(w))^2})$ an der Stelle w . Der Parameter $w = a$ liefert dabei genau den Punkt $(0, 1)$, folglich ergibt sich der Tangentialraum an die Gerade $L_{(-a, h(a))}$ im Punkt $(0, 1)$ zu

$$(T_{(0,1)} L_{(-a, h(a))})^{\hat{\varkappa}_Z} = \text{Spann} \left\{ \left(1, \frac{h'(a)}{h(a)} \right) \right\}.$$

Nun gilt zwar $\frac{h'(a)}{h(a)} = \frac{h'(a+\pi\mathbf{Z})}{h(a+\pi\mathbf{Z})}$, aber auch $L_{(-a, h(a))} = L_{(-a+\pi\mathbf{Z}, h(a+\pi\mathbf{Z}))}$, somit schneiden sich wegen Proposition 5.12 zwei Standardgeraden durch $(0, 1)$ transversal.

Die Gerade $L_{(0,0)}$ kann via $r \mapsto (0, r)$ parametrisiert werden. Die Ableitung der Parametrisierung ist $(0, 1)$, man erhält den Tangentialraum

$$(T_{(0,0)} L_{(0,0)})^{\hat{\varkappa}_Z} = \text{Spann} \{(0, 1)\}$$

und damit einen transversalen Schnitt mit den anderen Geraden durch $(0, 1)$.

Bei der Betrachtung von Geraden, deren Schnittpunkt ein Fernpunkt ist, (siehe Abbildung 5.7 auf Seite 79), reicht es wieder nach Anwenden eines geeigneten Automorphismus $\sigma_{(w,1)}$, den Schnittpunkt $(0, \infty)$ zu untersuchen. Dort treffen sich alle drei verschiedenen Typen von Geraden. Die Standardgeraden $L_{(0,t)}$ für $t \neq 0$ lassen sich bezüglich der Karte κ_F via $w \mapsto \left(w, \frac{1}{t} \mathfrak{h}(w)\right)$ parametrisieren, der Punkt $(0, \infty)$ wird durch den Parameter $w = 0$ erreicht. Die Ableitung der Parametrisierung nach dem Parameter w ergibt sich zu $\left(1, \frac{1}{t} \mathfrak{h}'(w)\right)$ und damit ist der Tangentialraum

$$(\mathbb{T}_{(0,0)} L_{(0,t)})^{\hat{\kappa}_F} = \text{Spann} \left\{ \left(1, \frac{1}{t} \mathfrak{h}'(0)\right) \right\}.$$

Die Ursprungsgerade $L_{(0,0)}$ lässt sich bezüglich der Karte κ_F via $r \mapsto (0, r)$ mit Ableitung $(0, 1)$ parametrisieren. Das heißt für den Tangentialraum

$$(\mathbb{T}_{(0,0)} L_{(0,0)})^{\hat{\kappa}_F} = \text{Spann} \{(0, 1)\}.$$

Schließlich ist die Ferngerade $L_{(\bullet, \infty)}$ über $w \mapsto (w, 0)$ bezüglich κ_F parametrisierbar. Und damit

$$(\mathbb{T}_{(0,0)} L_{(\bullet, \infty)})^{\hat{\kappa}_F} = \text{Spann} \{(1, 0)\}.$$

Da nun nach Voraussetzung $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$ sein soll, folgt also, dass sich verschiedene Geraden im Punkt $(0, \infty)$ transversal schneiden. \square

Als nächstes soll eine differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten konstruiert werden, die die affinen Geraden einer Schellhammer-Ebene parametrisiert, also die Standardgeraden und die Ursprungsgeraden.

5.46 Konstruktion: Die Einpunktkompaktifizierung $\mathfrak{G} := \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ wird mit den Karten

$$\begin{aligned} \gamma_0: \mathfrak{G} \setminus \{\infty\} &\rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x \\ \text{und } \gamma_\infty: \mathfrak{G} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die via $\mathfrak{G} \rightarrow L_{(w,0)}: r \mapsto (w, r)$ diffeomorph zu beliebigen Ursprungsgeraden ist; und das unabhängig davon, ob nun eine differenzierbare Schellhammer-Ebenen gemäß Generalvoraussetzung 5.27 angenommen wird, oder ob man eine entsprechende Schellhammer-Ebene mit der in 5.32 angegebenen differenzierbaren Struktur versieht. Weiter sei $\mathfrak{U} := \mathfrak{L} \setminus \{L_{(\bullet, \infty)}\}$.

Da die geometrischen Operationen in einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene differenzierbar sind, kann man damit eine differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten konstruieren, die in der Lage ist, Standardgeraden und Ursprungsgeraden zu parametrisieren.

Nach Lemma 5.9 und wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit des Schneidens ist

$$\mathfrak{U} \rightarrow \Sigma: L_{(w,r)} \mapsto ((L_{(w,r)} \wedge L_{(\bullet, \infty)}) = (w, \infty)) \mapsto w \mapsto \sigma_{(w,1)}$$

und

$$(\mathfrak{L}_{(0, \infty)} \setminus \{L_{(\bullet, \infty)}\}) \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{P}: (L_{(0,r_1)}, r_2) \mapsto L_{(0,r_1)} \wedge L_{(\frac{r_2}{r_1}, r_2)}$$

jeweils eine differenzierbare Abbildung (bei letzterer ist natürlich „ $L_{(\frac{\pi}{2}, \infty)}$ “ mit $L_{(\bullet, \infty)}$ zu identifizieren). Da Σ differenzierbar auf einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene wirkt, ist schließlich

$$\alpha: \mathcal{U} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{P}: (L_{(w, r_1)}, r_2) \mapsto \left((L_{(w, r_1)} \cdot \sigma_{(-w, 1)}) \wedge L_{(\frac{\pi}{2}, r_2)} \right) \cdot \sigma_{(w, 1)}$$

differenzierbar, und

$$(L_{(w, r_1)}, r_2)^\alpha = \begin{cases} (\bullet, 0) & \text{für } (r_1, r_2) = (0, 0) \\ (w + \mathfrak{w}(r_1, r_2), \mathfrak{v}(r_1, r_2)) & \text{für } r_2 \neq \infty \text{ und } (r_1, r_2) \neq (0, 0) \\ (w, \infty) & \text{für } r_2 = \infty. \end{cases}$$

Andererseits parametrisiert die Abbildung α auch in einer nicht notwendigerweise differenzierbaren Schellhammer-Ebene die Geraden aus \mathcal{U} in geeigneter Weise. Wir wollen jetzt klären, unter welchen Bedingungen α in diesem Fall zu einer differenzierbaren Familie wird.

Die Karte λ_U ist auf ganz \mathcal{U} definiert. Bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit ist also nur auf die jeweilige Karte von \mathcal{G} und die daraus resultierende Karte von \mathfrak{P} zu achten.

Für Parameter aus $\mathcal{G} \setminus \{0\}$ und damit die Karte γ_∞ erhält man unter α Bilder in $\mathfrak{P} \setminus \{(\bullet, 0)\}$, wofür die Karte α_F der Punktmannigfaltigkeit verwendet werden kann. Für die lokale Repräsentation ${}_{U_\infty}\alpha_F := ((\lambda_U)^{-1} \times (\gamma_\infty)^{-1})\alpha\alpha_F$ ergibt sich dann

$${}_{U_\infty}\alpha_F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2: (w, r_1, r_2) \mapsto \left. \begin{cases} \left(-w + \mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}), \frac{1}{\mathfrak{v}(r_1, \frac{1}{r_2})} \right) \\ = \left(-w + \mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}), \frac{1}{r_1} \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2})) \right) \\ = \left(-w + \mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}), r_2 \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}) - \frac{\pi}{2}) \right) \\ \quad \quad \quad (-w, 0) \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{für } r_2 \neq 0 \\ \text{für } r_2 = 0. \end{array}$$

Aus Korollar 5.41 folgt

$$r_1 \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}) - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{r_2} \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}))$$

und weiter

$$r_1 r_2 \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}) - \frac{\pi}{2}) = \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2})).$$

Da \mathfrak{h} beschränkt ist, folgern wir

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} r_1 r_2 \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}) - \frac{\pi}{2}) = 0,$$

also

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \mathfrak{h}(\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2})) = 0.$$

Da \mathfrak{h} stetig ist sowie $\mathfrak{h}(x) = 0$ genau für $x \in \pi\mathbf{Z}$ gilt und \mathfrak{w} nur Werte in \mathbf{R}_π annimmt, ergibt sich schließlich

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2}) \in 0 + \pi\mathbf{Z}.$$

Die Ableitung berechnet sich dann soweit möglich als

$$D_{(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F) = \begin{pmatrix} \partial_{1;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 & \partial_{1;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 \\ \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 & \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 \\ \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 & \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 \end{pmatrix}.$$

Konkret lassen sich diese partiellen Ableitungen an Stellen (w, r_1, r_2) mit $r_2 \neq 0$ problemlos angeben. Für $r_2 \rightarrow 0$ reicht eine Untersuchung der partiellen Ableitungen auf Stetigkeit aus, um auf die Differenzierbarkeit von $U_\infty \alpha_F$ schließen zu können.

Es ergibt sich

$$\partial_{1;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F) = (-1, 0).$$

Bei den folgenden partiellen Ableitungen sind die Argumente der Terme $\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2})$ der Übersichtlichkeit halber unterdrückt, es ist also in der Regel „ \mathfrak{w} “ als $\mathfrak{w}(r_1, \frac{1}{r_2})$ und „ $\partial_i \mathfrak{w}$ “ als $\partial_{i;(r_1, \frac{1}{r_2})} \mathfrak{w}$ zu interpretieren. Weiter ist beim Ableiten zu beachten, dass das zweite Argument der Funktion $U_0 \alpha_O$ (nämlich „ r_1 “) gemäß Definition an das erste Argument von \mathfrak{w} übergeben wird.

Es gilt

$$\partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 = \partial_1 \mathfrak{w} = r_2 \cdot \frac{-(\mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}))^2}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\mathfrak{w}) - \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(\mathfrak{w})},$$

und da \mathfrak{h} beschränkt ist, sowie wegen Proposition 5.28

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 = 0.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 &= r_2 \mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \cdot \partial_1 \mathfrak{w} \\ &= \frac{-(r_2 \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}))^2 \mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\mathfrak{w}) - \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(\mathfrak{w})}, \end{aligned}$$

also, wieder wegen Proposition 5.28 und weil auch \mathfrak{h}' beschränkt ist,

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 = 0.$$

Aus

$$\begin{aligned} \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 &= -\frac{1}{r_2^2} \partial_2 \mathfrak{w} \\ &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\mathfrak{w})}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\mathfrak{w}) - \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(\mathfrak{w})} \\ &= \frac{r_1 (\mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}))^2}{\mathfrak{h}'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\mathfrak{w}) - \mathfrak{h}(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(\mathfrak{w})} \end{aligned}$$

folgt dann

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_1 = \frac{r_1 (h(-\frac{\pi}{2}))^2}{h'(-\frac{\pi}{2})h(0) - h(-\frac{\pi}{2})h'(0)} = \frac{r_1}{h'(0)}.$$

Und schließlich

$$\begin{aligned} \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 &= \frac{1}{r_1} h'(\mathfrak{w}) \cdot \partial_2 \mathfrak{w} \cdot \left(-\frac{1}{r_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{r_1} h'(\mathfrak{w}) \cdot \left(-\frac{1}{r_2}\right) \cdot \frac{h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})} \\ &= -\frac{h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{h(\mathfrak{w})} h'(\mathfrak{w}) \frac{h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})} \\ &= -\frac{(h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}))^2 h'(\mathfrak{w})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}, \end{aligned}$$

woraus

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_\infty \alpha_F)_2 = 1$$

folgt.

Damit ist die Differenzierbarkeit der Abbildung $U_\infty \alpha_F$ nachgewiesen (man beachte dabei Proposition 1.3 und 1.4), und das unabhängig davon, ob nun eine differenzierbare Schellhammer-Ebene gemäß Generalvoraussetzung 5.27 angenommen ist oder ob man von einer nicht notwendigerweise differenzierbaren Schellhammer-Ebene ausgeht, die man mit der entsprechenden differenzierbaren Struktur aus 5.32 und 5.33 versehen hat.

Für Parameter aus $\mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ und damit die Karte γ_0 erhält man unter α Bilder in $\mathfrak{P} \setminus L_{(\bullet, \infty)}$, wofür die Karte α_O der Punktmannigfaltigkeit ausreicht. Damit ergibt sich dann für $U_0 \alpha_O := ((\lambda_U)^{-1} \times (\gamma_0)^{-1}) \alpha \alpha_O$ in Karten:

$$\begin{aligned} U_0 \alpha_O: \quad \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (w, r_1, r_2) &\mapsto \left(\tau(r_1, r_2) \cdot h(-w + \mathfrak{w}(r_1, r_2)), -\tau(r_1, r_2) \cdot h(-w + \mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2}) \right) \\ &= \left(r_1 \frac{h(-w + \mathfrak{w}(r_1, r_2))}{h(\mathfrak{w}(r_1, r_2))}, -r_1 \frac{h(-w + \mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2})}{h(\mathfrak{w}(r_1, r_2))} \right) \\ &= \left(r_2 \frac{h(-w + \mathfrak{w}(r_1, r_2))}{h(\mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2})}, -r_2 \frac{h(-w + \mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2})}{h(\mathfrak{w}(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2})} \right) \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass jedenfalls $U_0 \alpha_O$ als Komposition stetiger Abbildungen (nämlich Schneiden von Geraden, Verbinden von Punkten sowie von Karten und derer Inversen) stetig ist, obwohl die Funktion \mathfrak{w} bei $(0, 0)$ nicht stetig ist.

Die Ableitung berechnet sich dann als

$$D_{(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O) = \begin{pmatrix} \partial_{1;(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O)_1 & \partial_{1;(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O)_2 \\ \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O)_1 & \partial_{2;(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O)_2 \\ \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O)_1 & \partial_{3;(w,r_1,r_2)}(U_0 \alpha_O)_2 \end{pmatrix}.$$

Für $(r_1, r_2) \neq (0, 0)$ lassen sich die partiellen Ableitungen auch explizit angeben. Es ist

$$\begin{aligned}\partial_{1;(w,r_1,r_2)}({}_{U_0}\alpha_O)_1 &= -\tau(r_1, r_2) \cdot h'(-w + \tau(r_1, r_2)), \\ \partial_{1;(w,r_1,r_2)}({}_{U_0}\alpha_O)_2 &= \tau(r_1, r_2) \cdot h'(-w + \tau(r_1, r_2) - \frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Wegen Korollar 5.42 gilt $\lim_{(r_1, r_2) \rightarrow (0,0)} \tau(r_1, r_2) = 0$. Da weiter h' beschränkt ist, folgt

$$\lim_{(r_1, r_2) \rightarrow (0,0)} \partial_{1;(w,r_1,r_2)}({}_{U_0}\alpha_O)_1 = 0 = \lim_{(r_1, r_2) \rightarrow (0,0)} \partial_{1;(w,r_1,r_2)}({}_{U_0}\alpha_O)_2.$$

Bei den folgenden partiellen Ableitungen sind wieder die Argumente der Terme $\tau(r_1, r_2)$ der Übersichtlichkeit halber unterdrückt, es ist also in der Regel „ τ “ als $\tau(r_1, r_2)$ und „ $\partial_i \tau$ “ als $\partial_{i,(r_1, r_2)} \tau$ zu interpretieren. Weiter ist beim Ableiten zu beachten, dass das zweite Argument der Funktion ${}_{U_0}\alpha_O$ (nämlich „ r_1 “) gemäß Definition an das erste Argument von τ übergeben wird.

$$\begin{aligned}\partial_{2;(w,r_1,r_2)}({}_{U_0}\alpha_O)_1 &= \frac{h(-w + \tau)}{h(\tau)} + r_1 \frac{h'(-w + \tau) \cdot \partial_1 \tau \cdot h(w) - h(-w + \tau) h'(\tau) \cdot \partial_1 \tau}{(h(\tau))^2} \\ &= \frac{h(-w + \tau)}{h(\tau)} + \frac{h'(-w + \tau) h(w) - h(-w + \tau) h'(\tau)}{(h(\tau))^2} r_1 \partial_1 \tau \\ &= \frac{h(-w + \tau)}{h(\tau)} \\ &\quad + \frac{h'(-w + \tau) h(w) - h(-w + \tau) h'(\tau)}{(h(\tau))^2} \cdot \frac{-h(\tau) h(\tau - \frac{\pi}{2})}{h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(\tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau)} \\ &= (h(-w + \tau) (h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(\tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau)) \\ &\quad - (h'(-w + \tau) h(\tau) - h(-w + \tau) h'(\tau)) h(\tau - \frac{\pi}{2})) \\ &\quad \cdot (h(\tau) (h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(\tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau)))^{-1} \\ &= \frac{h(\tau) (h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(-w + \tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(-w + \tau))}{h(\tau) (h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(\tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau))} \\ &= \frac{h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(-w + \tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(-w + \tau)}{h'(\tau - \frac{\pi}{2}) h(\tau) - h(\tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau)}.\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\partial_{2;(w,r_1,r_2)}({}_{U_0}\alpha_O)_2 &= -\frac{h(-w + \tau - \frac{\pi}{2})}{h(\tau)} - r_1 \frac{h'(-w + \tau - \frac{\pi}{2}) \cdot \partial_1 \tau \cdot h(w) - h(-w + \tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau) \cdot \partial_1 \tau}{(h(\tau))^2} \\ &= \frac{-h(-w + \tau - \frac{\pi}{2})}{h(\tau)} + \frac{h'(-w + \tau - \frac{\pi}{2}) h(w) - h(-w + \tau - \frac{\pi}{2}) h'(\tau)}{(h(\tau))^2} (-r_1 \partial_1 \tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{h(\mathfrak{w})} \\
 &+ \frac{h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(w) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}{(h(\mathfrak{w}))^2} \cdot \frac{h(\mathfrak{w})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})} \\
 &= (h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w}) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) \\
 &\quad + h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})) \\
 &\quad \cdot (h(\mathfrak{w})(h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})))^{-1} \\
 &= \frac{h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 &\partial_{3;(w,r_1,r_2)}(\alpha_O)_1 \\
 &= r_1 \frac{h'(-w + \mathfrak{w}) \cdot \partial_1 \mathfrak{w} \cdot h(w) - h(-w + \mathfrak{w})h'(\mathfrak{w}) \cdot \partial_1 \mathfrak{w}}{(h(\mathfrak{w}))^2} \\
 &= \frac{h'(-w + \mathfrak{w})h(w) - h(-w + \mathfrak{w})h'(\mathfrak{w})}{(h(\mathfrak{w}))^2} r_1 \partial_1 \mathfrak{w} \\
 &= \frac{h'(-w + \mathfrak{w})h(w) - h(-w + \mathfrak{w})h'(\mathfrak{w})}{(h(\mathfrak{w}))^2} \cdot \frac{-h(\mathfrak{w})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})} \\
 &= \frac{h'(-w + \mathfrak{w})h(\mathfrak{w}) - h(-w + \mathfrak{w})h'(\mathfrak{w})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})},
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 &\partial_{3;(w,r_1,r_2)}(\alpha_O)_2 \\
 &= -r_1 \frac{h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2}) \cdot \partial_1 \mathfrak{w} \cdot h(w) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w}) \cdot \partial_1 \mathfrak{w}}{(h(\mathfrak{w}))^2} \\
 &= -\frac{h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(w) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}{(h(\mathfrak{w}))^2} r_1 \partial_1 \mathfrak{w} \\
 &= -\frac{h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(w) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}{(h(\mathfrak{w}))^2} \cdot \frac{-h(\mathfrak{w})h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})} \\
 &= -\frac{h'(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(-w + \mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}{h'(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h(\mathfrak{w}) - h(\mathfrak{w} - \frac{\pi}{2})h'(\mathfrak{w})}.
 \end{aligned}$$

Die Abbildung α ist also genau dann eine differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten, wenn die eben bestimmten partiellen Ableitungen stetig von der Stelle abhängen, an der sie ausgewertet werden. Da \mathfrak{w} auf $(\mathbf{R}^\times)^2$ stetig ist, ergibt sich dort kein Problem. Kritisch wird die Situation für $(r_1, r_2) \rightarrow (0, 0)$, denn wir haben in 5.35 bereits festgestellt, dass $\mathfrak{w}(r_1, r_2)$ in diesem Fall beliebige Werte in \mathbf{R}_π annehmen kann, die partiellen Ableitungen $\partial_{i;(w,r_1,r_2)}(\alpha_O)_j$ müssen aber unabhängig davon konvergieren. Da die Argumente r_1 und

r_2 in den Termen $\partial_{i;(w,r_1,r_2)}(\cup_0 \alpha_O)_j$ nur noch im Argument von \mathfrak{w} vorkommen, müssen die partiellen Ableitungen also konstant für beliebige Werte von $\mathfrak{w}(r_1, r_2)$ sein.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich die bei den einzelnen Termen auftretenden Bedingungen auf eine einzige reduzieren lassen:

5.47 Lemma: Sei \mathfrak{h} eine \mathcal{C}^1 -Schellhammer-Funktion mit $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}: \frac{\mathfrak{h}'(x-w)\mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(x-w)\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)} = C$
- (ii) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}: \frac{\mathfrak{h}'(x-(w+\frac{\pi}{2}))\mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(x-(w+\frac{\pi}{2}))\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)} = C$
- (iii) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}: \frac{\mathfrak{h}'(x-w)\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-w)\mathfrak{h}'(x)}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)} = C$
- (iv) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}: \frac{\mathfrak{h}'(x-(w+\frac{\pi}{2}))\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-(w+\frac{\pi}{2}))\mathfrak{h}'(x)}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)} = C.$

Das heißt, die Abbildung α aus 5.46 ist genau dann eine differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten, wenn *eine* der obigen Aussagen wahr ist. Auf Grund der Definition von α bedeutet dies, dass für die Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene die obigen Aussagen erfüllt sind.

Beweis: Setzt man $\tilde{x} := x + \frac{\pi}{2}$, so erhält man aufgrund der Definition von \mathfrak{h}

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}'(x - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x) &= \mathfrak{h}'(\tilde{x} - \pi)\mathfrak{h}(\tilde{x} - \frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(\tilde{x} - \pi)\mathfrak{h}'(\tilde{x} - \frac{\pi}{2}) \\ &= -\mathfrak{h}'(\tilde{x})\mathfrak{h}(\tilde{x} - \frac{\pi}{2}) + \mathfrak{h}(\tilde{x})\mathfrak{h}'(\tilde{x} - \frac{\pi}{2}) \\ &= \mathfrak{h}'(\tilde{x} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\tilde{x}) - \mathfrak{h}(\tilde{x} - \frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}'(x-w-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(x-w-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2}) \\ &= \mathfrak{h}'(\tilde{x}-w-\pi)\mathfrak{h}(\tilde{x}-\pi) - \mathfrak{h}(\tilde{x}-w-\pi)\mathfrak{h}'(\tilde{x}-\pi) \\ &= \mathfrak{h}'(\tilde{x}-w)\mathfrak{h}(\tilde{x}) - \mathfrak{h}(\tilde{x}-w)\mathfrak{h}'(\tilde{x}), \end{aligned}$$

das heißt,

$$\frac{\mathfrak{h}'(x-(w+\frac{\pi}{2}))\mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2}) - \mathfrak{h}(x-(w+\frac{\pi}{2}))\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)} = \frac{\mathfrak{h}'(\tilde{x}-w)\mathfrak{h}(\tilde{x}) - \mathfrak{h}(\tilde{x}-w)\mathfrak{h}'(\tilde{x})}{\mathfrak{h}'(\tilde{x}-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(\tilde{x}) - \mathfrak{h}(\tilde{x}-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(\tilde{x})}.$$

Für $x = \mathfrak{w}(r_1, r_2)$ erhält man in den Aussagen (i)–(iv) gerade die in 5.47 berechneten Terme der entscheidenden partiellen Ableitungen von α . □

5.48 Lemma: Für eine \mathcal{C}^1 -Schellhammer-Funktion h mit $h'(0) \neq 0$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}:$

$$\frac{h'(x-w)h(x) - h(x-w)h'(x)}{h'(x-\frac{\pi}{2})h(x) - h(x-\frac{\pi}{2})h'(x)} = C$$

(ii) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}:$

$$h(x)(h'(x-w) - Ch'(x-\frac{\pi}{2})) = h'(x)(h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2}))$$

(iii) $\forall w \in \mathbf{R}_{2\pi} \exists C \in \mathbf{R} \exists D \in \mathbf{R}^+ \forall x \in \mathbf{R}_{2\pi}:$

$$|h(x)| = D \cdot |h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2})|$$

Wegen Lemma 5.47 bedeutet dies: Die Abbildung α aus 5.46 ist genau dann eine differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten, wenn eine der obigen Aussagen wahr ist. Insbesondere sind für die Schellhammer-Funktion h einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene die obigen Aussagen erfüllt.

Beweis: Wegen Proposition 5.28 ergibt sich die Gleichwertigkeit der ersten beiden Aussagen durch einfache Äquivalenzumformungen.

Sei also $h(x)(h'(x-w) - Ch'(x-\frac{\pi}{2})) = h'(x)(h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2}))$ vorausgesetzt.

Falls $h(x) = 0$, so folgt $x \in \pi\mathbf{Z}$ und damit $h'(x) \neq 0$, also $h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2}) = 0$.

Angenommen $h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2}) = 0$, aber $h(x) \neq 0$. Dann folgt sofort

$$h'(x-w) - Ch'(x-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Somit gilt $h(x-w) = Ch(x-\frac{\pi}{2})$ und $h'(x-w) = Ch'(x-\frac{\pi}{2})$. Wäre nun $C = 0$, so zöge das $h(x-w) = 0 = h'(x-w)$ nach sich, was aber nach der Forderung an h nicht sein kann. Aus

$$h(x-w)Ch'(x-\frac{\pi}{2}) = Ch(x-\frac{\pi}{2})h'(x-w)$$

erhalten wir deshalb

$$h(x-w)h'(x-\frac{\pi}{2}) - h'(x-w)h(x-\frac{\pi}{2}) = 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung nach Proposition 5.28 genau für $w \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ erfüllt ist und nicht für beliebige $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$.

Wir wissen daher, dass $h(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2}) = 0$.

Im Fall $h(x) \neq 0$ kann man also

$$h(x)(h'(x-w) - Ch'(x-\frac{\pi}{2})) = h'(x)(h(x-w) - Ch(x-\frac{\pi}{2}))$$

zu

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{h'(x-w) - C h'(x - \frac{\pi}{2})}{h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2})} = \frac{(h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2}))'}{h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2})}$$

umformen. Durch Integration

$$\int_{x_0}^x \frac{h'(t)}{h(t)} dt = \int_{x_0}^x \frac{(h(t-w) - C h(t - \frac{\pi}{2}))'}{h(t-w) - C h(t - \frac{\pi}{2})} dt,$$

wobei $x_0 \notin \pi\mathbf{Z}$ zu wählen ist, erhält man

$$\ln |h(x)| - \ln |h(x_0)| = \ln |h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2})| - \ln |h(x_0-w) - C h(x_0 - \frac{\pi}{2})|,$$

und damit

$$|h(x)| = \frac{|h(x_0)|}{|h(x_0-w) - C h(x_0 - \frac{\pi}{2})|} |h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2})|$$

also ergibt sich für $D := \frac{|h(x_0)|}{|h(x_0-w) - C h(x_0 - \frac{\pi}{2})|}$ die Behauptung.

Umgekehrt gilt für $x \in [0, \pi]$, dass $h(x) = \bar{h}(x) \geq 0$. Ist weiter $h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2}) \geq 0$ angenommen, dann folgt aus

$$h(x) = D \cdot (h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2}))$$

auch

$$h'(x) = D \cdot (h'(x-w) - C h'(x - \frac{\pi}{2})).$$

Somit gilt

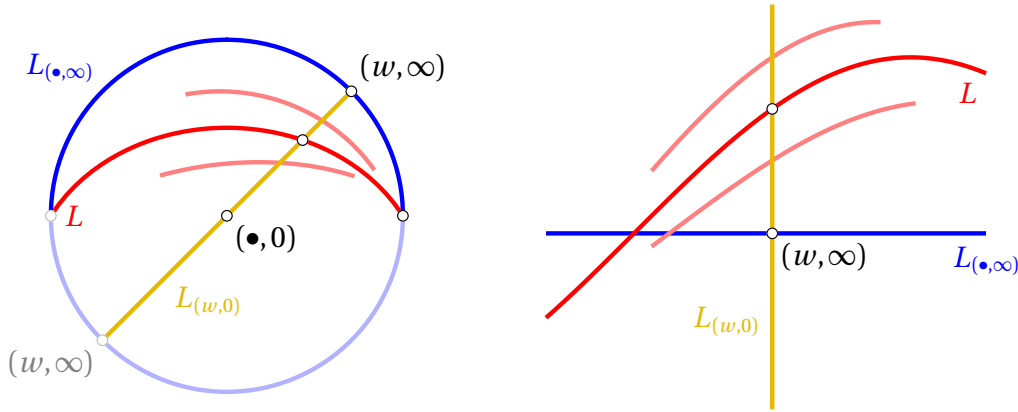
$$h(x)D(h'(x-w) - C h'(x - \frac{\pi}{2})) = h(x)h'(x) = D(h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2}))h'(x)$$

und damit für diesen Fall die Behauptung. Der Fall $h(x-w) - C h(x - \frac{\pi}{2}) < 0$ und die Fälle für $x \in [\pi, 2\pi]$ lassen sich ebenso direkt berechnen. \square

5.49 Konstruktion: Um auf die Differenzierbarkeit einer Schellhammer-Ebene schließen zu können, muss noch eine weitere differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten gefunden werden, nämlich eine, die auch die Ferngerade parametrisiert. Da die Punktreihen von Geraden aus $\mathcal{U} := \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{(\bullet, 0)}$ komplett im Definitionsbereich der Abbildung α_F liegen, macht das die Untersuchung bezüglich Karten wesentlich einfacher. Als Mannigfaltigkeit für die Parametrisierung der einzelnen Geraden kann $\mathcal{G} := \mathbf{R}_\pi$ mit der kanonischen Parametrisierung $(\gamma)^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\pi: t \mapsto t + \pi\mathbf{Z}$ verwendet werden. Die Abbildung

$$\beta: \mathcal{U} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{P}: (L, w) \mapsto ((w, \infty) \vee (\bullet, 0)) \wedge L,$$

ist in einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene als Komposition differenzierbarer Abbildungen selbst differenzierbar und somit eine differenzierbare Familie von Untermannigfaltigkeiten. Unabhängig davon, ob nun eine differenzierbare Schellhammer-Ebene vorliegt, parametrisiert β Standardgeraden und die Ferngerade.



Die Differenzierbarkeit der Abbildung β in dem Fall, wo nicht notwendigerweise eine differenzierbare Schellhammer-Ebene vorliegt, soll jetzt untersucht werden. Nach Korollar 5.44 beschreiben die Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$ bezüglich der Karte λ_F die Gerade $L_{(-\mathfrak{w}(x, -y), \frac{1}{\mathfrak{r}(x, -y)})}$. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der Ursprungsgeraden $(w, \infty) \vee (\bullet, 0) = L_{(w, 0)}$ in Koordinaten bezüglich der Karte χ_F ist dann $(w, \mathfrak{r}(x, -y)\mathfrak{h}(w + \mathfrak{w}(x, -y)))$. Insgesamt erhalten wir die lokale Repräsentation

$${}_F\beta_F := ((\lambda_F)^{-1} \times (\gamma)^{-1})\beta\chi_F: (x, y, w) \mapsto (w, \mathfrak{r}(x, -y)\mathfrak{h}(w + \mathfrak{w}(x, -y))) .$$

Bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit ist wieder der Grenzübergang für Koordinaten $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ entscheidend – in den anderen Fällen ergeben sich keine Probleme und die Differenzierbarkeit ist als Komposition differenzierbarer Abbildungen gegeben. Es ist

$$D_{(x, y, w)}({}_F\beta_F)_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Der Term der zweiten Komponenten $({}_F\beta_F)_2 = \mathfrak{r}(x, -y)\mathfrak{h}(w + \mathfrak{w}(x, -y))$ entspricht den bereits in 5.46 untersuchten Termen (zum Beispiel der ersten Komponente $({}_{U_0}\alpha_0)_1$). Wir stellen also fest, dass diese Familie von Untermannigfaltigkeiten β genau dann differenzierbar ist, wenn die Familie von Untermannigfaltigkeiten α aus 5.46 differenzierbar ist.

5.50 Korollar: Eine Schellhammer-Ebene ist im Sinn von Generalvoraussetzung 5.27 genau dann differenzierbar, wenn die Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} die Bedingungen aus Lemma 5.48 erfüllt.

5.51 Beispiel: Die Funktion $\mathfrak{h}: x \mapsto \sin(x)$ erzeugt gerade eine Schellhammer-Ebene, die isomorph zur klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ ist (siehe Beispiel 5.4). Die Differenzierbarkeitsbedingungen aus Lemma 5.48 entsprechen dabei bekannten Additionstheoremen

für trigonometrische Funktionen, denn

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{h}'(x-w)\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-w)\mathfrak{h}'(x)}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)} &= \frac{\cos(x-w)\sin(x) - \sin(x-w)\cos(x)}{\cos(x-\frac{\pi}{2})\sin(x) - \sin(x-\frac{\pi}{2})\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x-w-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{2}-x)} \\ &= \sin(w). \end{aligned}$$

Insbesondere heißt dies aber auch, dass $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ differenzierbar ist. Dies ist zwar keine neue Erkenntnis, doch ist hiermit ein weiterer Beweis für diese Tatsache gefunden.

5.52 Korollar: Sei $\mathfrak{S} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F})$ eine Schellhammer-Ebene. Die zugehörige Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} sei \mathcal{C}^r -differenzierbar für $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ und erfülle $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$.

Dann ist die aus der projektiven Ebene abgeleitete stabile Ebene $\mathfrak{S}' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', \mathfrak{F}')$ mit Punktmenge $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \setminus (\{\bullet, 0\} \cup L_{(\bullet, \infty)})$, Geradenmenge $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \setminus \{L_{(\bullet, \infty)}\}$ und Fahnenmenge $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \cap (\mathfrak{P}' \times \mathfrak{L}')$ eine \mathcal{C}^r -differenzierbare stabile Ebene.

Beweis: Mit Hilfe von Proposition 1.22 und den differenzierbaren Familien von Untermannigfaltigkeiten α und β aus 5.46 und 5.49 eingeschränkt auf die Ebene \mathfrak{S}' folgt unmittelbar die Differenzierbarkeit des Schneidens von Geraden. Anhand der Rechnungen erkennt man auch, dass der Differenzierbarkeitsgrad der differenzierbaren Familien direkt von dem der Schellhammer-Funktion abhängt. Die Polarität ι aus Lemma 5.6 überträgt diese differenzierbaren Familien, die Punktreihen parametrisieren, in differenzierbare Familien, die Geradenbüschel parametrisieren. Die bei der Konstruktion der differenzierbaren Familien problematischen Stellen, wo noch weitere Bedingungen für die Differenzierbarkeit erfüllt werden müssten, sind in dieser abgeleiteten stabilen Ebene nicht enthalten. \square

Für die weitere Untersuchung ist es von Nutzen, die Differenzierbarkeitsbedingung 5.48 in einem etwas anderen Licht zu betrachten.

5.53 Korollar: Sei \mathfrak{h} eine \mathcal{C}^1 -differenzierbare Schellhammer-Funktion mit $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$, und sei

$$\mathfrak{g}: \mathbf{R}_{2\pi} \times \mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}: (x, w) \mapsto \frac{\mathfrak{h}'(x-w)\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-w)\mathfrak{h}'(x)}{\mathfrak{h}'(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x-\frac{\pi}{2})\mathfrak{h}'(x)}.$$

Nach Korollar 5.50 sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} erzeugt eine differenzierbare Schellhammer-Ebene.
- (ii) Für beliebige $w_0 \in \mathbf{R}_{2\pi}$ und alle $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}_{2\pi} \times \mathbf{R}_{2\pi}$ gilt $\mathfrak{g}(x_1, w_0) = \mathfrak{g}(x_2, w_0)$.
- (iii) Für beliebige $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}_{2\pi} \times \mathbf{R}_{2\pi}$ stimmen die Funktionen

$$\mathfrak{g}(x_1, \bullet) := \mathfrak{g}|_{x_1 \times \mathbf{R}_{2\pi}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}(x_2, \bullet) := \mathfrak{g}|_{x_2 \times \mathbf{R}_{2\pi}}$$

überein, das heißt $\mathfrak{g}(x_1, \bullet) = \mathfrak{g}(x_2, \bullet)$.

5.54 Bemerkung: Mit

$$\tilde{g}: \mathbf{R}_{2\pi} \times \mathbf{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}: (x, w) \mapsto h'(x-w)h(x) - h(x-w)h'(x).$$

ist in 5.53

$$g(x, w) = \frac{\tilde{g}(x, w)}{\tilde{g}(x, \frac{\pi}{2})}.$$

5.55 Proposition: Es gilt $g(0, w) = g(\frac{\pi}{2}, w)$ genau dann, wenn $\tilde{g}(0, w) = \tilde{g}(\frac{\pi}{2}, w)$.

Beweis: Nach Definition gilt $h(0) = 0$ und $h(-\frac{\pi}{2}) = -h(\frac{\pi}{2})$. Damit ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(0, \frac{\pi}{2}) &= h(0)h'(0 - \frac{\pi}{2}) - h'(0)h(0 - \frac{\pi}{2}) \\ &= -h'(0)h(-\frac{\pi}{2}) \\ &= h'(0)h(\frac{\pi}{2}) \\ &= h(\frac{\pi}{2})h'(0) - h'(\frac{\pi}{2})h(0) \\ &= h(\frac{\pi}{2})h'(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) - h'(\frac{\pi}{2})h(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \tilde{g}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

□

5.56 Korollar: Wegen Korollar 5.53 gilt in einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene $\tilde{g}(0, w) = \tilde{g}(\frac{\pi}{2}, w)$, das heißt $\tilde{g}(0, \bullet) = \tilde{g}(\frac{\pi}{2}, \bullet)$ für $\tilde{g}(x, \bullet) := \tilde{g}|_{x \times \mathbf{R}_{2\pi}}$.

Jetzt sind wir in der Lage, Beispiele von differenzierbaren Schellhammer-Ebenen zu (unter-) suchen. Dabei hilft die folgende Feststellung:

5.57 Proposition: Jede \mathcal{C}^1 -Schellhammer-Funktion h lässt sich in eine Fourier-Reihe ohne konstantes Glied entwickeln, das heißt, es gibt Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ so, dass

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für alle $x \in \mathbf{R}_{2\pi}$. Des Weiteren gilt

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

für alle $x \in \mathbf{R}_{2\pi}$.

Insbesondere lässt sich also wegen Korollar 5.11 die Schellhammer-Funktion einer differenzierbaren Schellhammer-Ebene in eine solche Fourier-Reihe entwickeln.

Beweis: Da h als mindestens \mathcal{C}^1 vorausgesetzt ist, kann h in eine Fourier-Reihe entwickelt werden, deren Ableitung gliedweise bestimmt wird (siehe zum Beispiel (Heu08, Satz 136.3, Satz 143.1)). Zu klären ist nur, warum kein konstantes Glied $\frac{a_0}{2}$ vorkommt. Dies gilt, da

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{2\pi} h(x) dx = \int_0^{\pi} h(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} h(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \bar{h}(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\bar{h}(x - \pi) dx \\ &= \int_0^{\pi} \bar{h}(x) dx - \int_0^{\pi} \bar{h}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

□

Mit der Problematik, wann eine Fourier-Reihe eine Schellhammer-Funktion liefert, wollen wir uns anhand eines Beispiels auseinandersetzen.

5.58 Beispiel: Gegeben sei die abbrechende Fourier-Reihe $h: x \mapsto \sin(x) + c \sin(3x)$. Die Frage ist, für welche $c \in \mathbf{R}$ eine solche Funktion h eine Schellhammer-Funktion ist (in Beispiel 5.4 und Beispiel 5.51 haben wir gesehen, dass für $c = 0$ gerade der Fall der klassischen projektiven Ebene vorliegt). Auf die Normierung der Schellhammer-Funktion wollen wir dabei (der Übersichtlichkeit halber) keinen Wert legen, da sie weder für die benutzten Argumente noch für die Bestimmung des Isomphietyps der Ebene notwendig ist.

Zunächst einmal muss c so gewählt werden, dass h im Intervall $(0, \pi)$ keine Nullstelle besitzt.

Sei zunächst der Fall $c \geq 0$ untersucht. Für $x \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$ gilt dann zwar $c \sin(3x) \leq 0$, andererseits aber auch $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$. Wegen $|c \sin(3x)| \leq |c|$ folgt somit: Wenn $c < \frac{1}{2}$, dann gilt $h(x) > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Dies ist zwar eine recht vorsichtige Abschätzung. Die weitere Untersuchung zeigt aber, dass noch nicht einmal diese vorsichtig gewählt Schranke ausgeschöpft werden kann. Deswegen ist eine genauere Abschätzung an dieser Stelle nicht nötig.

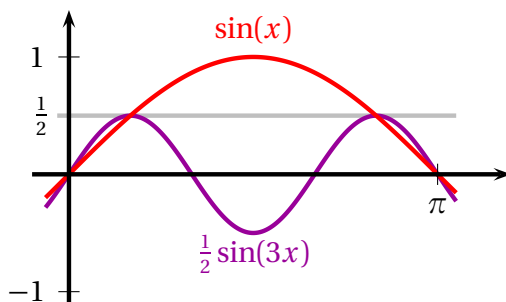


Abbildung 5.12:
Graphen von \sin und $\frac{1}{2} \sin(3x)$

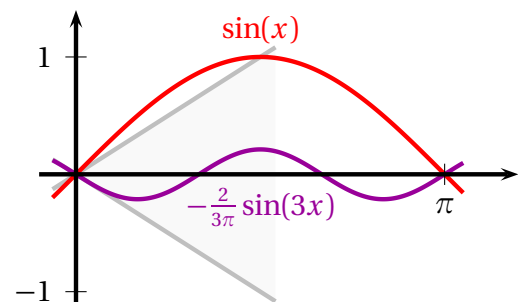


Abbildung 5.13:
Graphen von \sin und $-\frac{2}{3} \sin(3x)$

Im Fall $c \leq 0$ können wir wegen Symmetrie von h die Untersuchung auf das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ einschränken. Dort ist der Sinus konvex, also gilt $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$. Weiter ist $\sin(3x) \leq 3x$,

und da $c \leq 0$ vorausgesetzt war, also $c \sin(3x) \geq c3x$. Für $c > -\frac{2}{3\pi}$ gilt also

$$\sin(x) + c \sin(3x) \geq \frac{2}{\pi}x + c3x > \frac{2}{\pi}x + \left(-\frac{2}{3\pi}\right)3x = 0.$$

Insgesamt besitzt h für $c \in (-\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2})$ im Intervall $(0, \pi)$ keine Nullstelle.

Um zu zeigen, dass in diesen Fällen h eine Schellhammer-Funktion ist, reicht es nach Proposition 5.12, die Bedingung $\frac{h''h-(h')^2}{h^2}(x) < 0$ zu erfüllen. Dazu sei zunächst untersucht, für welche $c \in \mathbf{R}$ die Funktion $\frac{h''h-(h')^2}{h^2}$ in Intervall $(0, \pi)$ Nullstellen besitzt. Es ist

$$\begin{aligned} (h''h-(h')^2)(x) &= (-\sin(x) - 9c \sin(3x))(\sin(x) + c \sin(3x)) - (\cos(x) + 3c \cos(3x))^2 \\ &= -1 - 9c^2 - 10c \sin(x) \sin(3x) - 6c \cos(x) \cos(3x) \\ &= -1 - 9c^2 - 10c \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos(4x)) - 6c \frac{1}{2}(\cos(-2x) + \cos(4x)) \\ &= -1 - 9c^2 - 8c \cos(2x) + 2c \cos(4x) \\ &= -1 - 9c^2 - 8c(2(\cos(x))^2 - 1) + 2c(2(\cos(2x))^2 - 1) \\ &= -1 - 9c^2 + 6c - 16c(\cos(x))^2 + 4c(2(\cos(x))^2 - 1) \\ &= -1 - 9c^2 + 10c - 32c(\cos(x))^2 + 16c(\cos(x))^4. \end{aligned}$$

Substituiert man den Term $u := (\cos(x))^2$, so besitzt $h''h-(h')^2$ genau dann Nullstellen, wenn $0 \leq u \leq 1$ und

$$0 = 16cu^2 - 32cu - 1 + 10c - 9c^2,$$

also für

$$u = 1 + \sqrt{\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right)} \quad \text{oder} \quad u = 1 - \sqrt{\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right)}.$$

Da $1 + \sqrt{\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right)} \geq 1$, reicht es, den Term $u = 1 - \sqrt{\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right)}$ weiter zu untersuchen. Dabei ist klar, dass $1 - \sqrt{\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right)} \leq 1$.

Es gilt $\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right) = 0$ genau dann, wenn $9c^2 + 6c + 1 = 0$; dies ist für $c = -\frac{1}{3}$ der Fall. Da deswegen $9c^2 + 6c + 1 \geq 0$, folgt $\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right) \geq 0$ für $c > 0$ und $\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right) < 0$ für $c < 0$; die obige quadratische Gleichung ist also nur für positive c lösbar.

Weiter ist $u = 1 - \sqrt{\frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right)} \geq 0$ genau dann, wenn $0 \leq \frac{1}{16} \left(6 + \frac{1}{c} + 9c\right) \leq 1$. Dies ist genau für $c \in [\frac{1}{9}, 1]$ erfüllt.

Insgesamt besitzt $\frac{h''h-(h')^2}{h^2}$ für $c \notin [\frac{1}{9}, 1]$ keine Nullstellen. Für $c \in (-\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2})$ besitzt h keine Nullstellen im Intervall $(0, \pi)$. Wir haben also den in Frage kommenden Bereich für c auf das Intervall $(-\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{9})$ eingeschränkt. Es ist nun noch zu klären, dass $\frac{h''h-(h')^2}{h^2}$ für diese Werte von c negativ ist. Als Verkettung stetiger Funktionen ist dies aber stetig und da keine Nullstellen vorliegen, genügt es, einen Wert im Definitionsbereich zu testen. Es ist

$$\frac{h''h-(h')^2}{h^2} \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1 - 9c^2 + 10c}{1 - c} = 9c - 1,$$

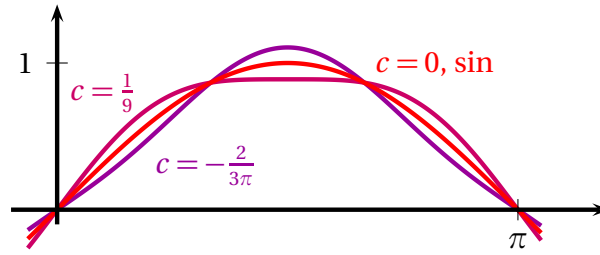


Abbildung 5.14: Graphen für $c = 0$, $c = \frac{1}{9}$, $c = -\frac{2}{3\pi}$

was für die angegebenen Werte von c tatsächlich negativ ist.

Als Fazit erhalten wir für $c \in (-\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{9})$ eine Familie von Schellhammer-Ebenen, welche nach Proposition 5.3 für $c \neq 0$ nicht isomorph zur klassischen Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ sind.

5.59 Lemma: Sei \mathfrak{h} eine \mathcal{C}^1 -Schellhammer-Funktion mit der zugehörigen Fourierreihendarstellung

$$\mathfrak{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Dann lässt sich für beliebiges $x \in \mathbf{R}_{2\pi}$ die in Bemerkung 5.54 eingeführte Funktion $\tilde{\mathfrak{g}}(x, \bullet)$ in eine Fourierreihe entwickeln, so dass also für beliebige $w \in \mathbf{R}_{2\pi}$ gilt:

$$\tilde{\mathfrak{g}}(x, w) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n(x) \cos(nw) + \tilde{b}_n(x) \sin(nw)),$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(x) &= n \mathfrak{h}(x) (-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) - \mathfrak{h}'(x) (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ \tilde{b}_n(x) &= n \mathfrak{h}(x) (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) - \mathfrak{h}'(x) (a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx)). \end{aligned}$$

Beweis: Mit Hilfe von Proposition 5.57 und Additionstheoremen trigonometrischer Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(x-w) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n(x-w)) + b_n \sin(n(x-w))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (\cos(nx) \cos(nw) + \sin(nx) \sin(nw)) \right. \\ &\quad \left. + b_n (\sin(nx) \cos(nw) - \cos(nx) \sin(nw)) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos(nw) \right. \\ &\quad \left. + (a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx)) \sin(nw) \right) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}'(x-w) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-a_n \sin(n(x-w)) + b_n \cos(n(x-w)) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-a_n (\sin(nx) \cos(nw) - \cos(nx) \sin(nw)) \right. \\ &\quad \left. + b_n (\cos(nx) \cos(nw) + \sin(nx) \sin(nw)) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left((-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \cos(nw) \right. \\ &\quad \left. + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin(nw) \right). \end{aligned}$$

Da \mathfrak{h} als \mathcal{C}^1 vorausgesetzt ist, konvergieren diese Reihen absolut. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{g}}(x, w) &= \mathfrak{h}(x) \mathfrak{h}'(x-w) - \mathfrak{h}'(x) \mathfrak{h}(x-w) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathfrak{h}(x) \left((-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \cos(nw) \right. \\ &\quad \left. + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin(nw) \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{h}'(x) \left((a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos(nw) \right. \\ &\quad \left. + (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \sin(nw) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n \mathfrak{h}(x) (-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathfrak{h}'(x) (-a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx)) \right) \cos(nw) \right. \\ &\quad \left. + \left(n \mathfrak{h}(x) (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathfrak{h}'(x) (-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \right) \sin(nw) \right). \end{aligned}$$

□

5.60 Satz: Sei \mathfrak{S} eine differenzierbare Schellhammerebene, für die Generalvoraussetzung 5.27 zutrifft. Dann ist \mathfrak{S} die klassische projektive Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

Beweis: Wegen Korollar 5.56 genügt es $\tilde{\mathfrak{g}}(0, \bullet)$ und $\tilde{\mathfrak{g}}(\frac{\pi}{2}, \bullet)$ zu untersuchen. Diese beiden Funktionen können nach Lemma 5.59 in eine Fourierreihe entwickelt werden und es gilt $\tilde{\mathfrak{g}}(0, \bullet) = \tilde{\mathfrak{g}}(\frac{\pi}{2}, \bullet)$ genau dann, wenn die jeweiligen Fourierkoeffizienten übereinstimmen, das heißt $\tilde{a}_n(0) = \tilde{a}_n(\frac{\pi}{2})$ und $\tilde{b}_n(0) = \tilde{b}_n(\frac{\pi}{2})$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Da

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(0) &= n \mathfrak{h}(0) (-a_n \sin(0) + b_n \cos(0)) - \mathfrak{h}'(0) (a_n \cos(0) + b_n \sin(0)) = -\mathfrak{h}'(0) a_n \\ \tilde{a}_n(\frac{\pi}{2}) &= n \mathfrak{h}(\frac{\pi}{2}) (-a_n \sin(n\frac{\pi}{2}) + b_n \cos(n\frac{\pi}{2})) - \mathfrak{h}'(\frac{\pi}{2}) (a_n \cos(n\frac{\pi}{2}) + b_n \sin(n\frac{\pi}{2})) \\ &= n (-a_n \sin(n\frac{\pi}{2}) + b_n \cos(n\frac{\pi}{2})) - \mathfrak{h}'(\frac{\pi}{2}) (a_n \cos(n\frac{\pi}{2}) + b_n \sin(n\frac{\pi}{2})) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{b}_n(0) &= n \mathfrak{h}(0)(a_n \cos(0) + b_n \sin(0)) - \mathfrak{h}'(0)(a_n \sin(0) - b_n \cos(0)) = \mathfrak{h}'(0)b_n \\ \tilde{b}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) &= n \mathfrak{h}\left(\frac{\pi}{2}\right)(a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)) - \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)(a_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - b_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)) \\ &= n(a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)) - \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)(a_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - b_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)),\end{aligned}$$

werden die Fourierkoeffizienten a_n und b_n von \mathfrak{h} für beliebiges aber festes $n \in \mathbf{N}$ beschrieben durch das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0))a_n + (-n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right))b_n &= 0 \\ (-n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right))a_n + (-n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mathfrak{h}'(0))b_n &= 0\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, für welche $n \in \mathbf{N}$ dieses Gleichungssystem nichttrivial lösbar ist.

Es sei zunächst n gerade angenommen. Die Koeffizientenmatrix K_n des obigen linearen Gleichungssystems hat dann die Form

$$K_n = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0) & -n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ -n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) & -\mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mathfrak{h}'(0) \end{pmatrix}$$

und für die Determinante gilt

$$\begin{aligned}\det(K_n) &= -\left(\mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0)\right)^2 - n^2 \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \\ &= -\left(\left(\mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0)\right)^2 + n^2\right).\end{aligned}$$

Das heißt, um $\det(K_n) = 0$ zu erhalten, ist $n^2 = 0$ notwendig. Für gerade $n \in \mathbf{N}$ lässt sich das lineare Gleichungssystem somit nur trivial lösen und in diesen Fällen ergibt sich für die Fourierkoeffizienten $a_n = 0 = b_n$.

Es können also nur Fourierkoeffizienten für ungerade $n \in \mathbf{N}$ vorkommen. Die Koeffizientenmatrix K_n des linearen Gleichungssystems hat dann die Form

$$K_n = \begin{pmatrix} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0) & \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ \mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) & -\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0)\right) \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$\begin{aligned}\det(K_n) &= -\left(n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0)\right)^2 - \left(\mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \\ &= -\left(\left(n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0)\right)^2 + \left(\mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\right).\end{aligned}$$

Also zieht $\det(K_n) = 0$ notwendigerweise $n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0) = 0$ und $\mathfrak{h}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nach sich. Die Bedingung

$$n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{h}'(0) = 0$$

kann aber für maximal ein festes $n \in \mathbf{N}$ erfüllt werden, denn angenommen, es gäbe $(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2$ so, dass obige Bedingung erfüllt ist, so folgt unmittelbar

$$n_1 \sin(n_1 \frac{\pi}{2}) = n_2 \sin(n_2 \frac{\pi}{2})$$

und damit

$$n_1 = |n_1 \sin(n_1 \frac{\pi}{2})| = |n_2 \sin(n_2 \frac{\pi}{2})| = n_2.$$

Demzufolge besitzt \mathfrak{h} beziehungsweise \mathfrak{h}' die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(x) &= a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ \mathfrak{h}'(x) &= n(-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \end{aligned}$$

für ein festes $n \in \mathbf{N}$. Nun muss, um eine nichttriviale Lösung des linearen Gleichungssystems zu erhalten, ja noch $\mathfrak{h}'(\frac{\pi}{2}) = 0$ erfüllt sein. Also muss

$$0 = \mathfrak{h}'(\frac{\pi}{2}) = -na_n \sin(n \frac{\pi}{2})$$

und folglich $a_n = 0$ gelten. Die Schellhammer-Funktion ist demnach durch

$$\mathfrak{h}(x) = b_n \sin(nx)$$

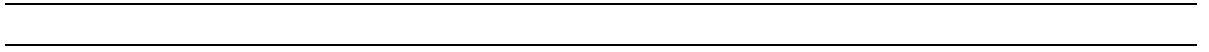
zu beschreiben, was wegen $\mathfrak{h}(x) \geq 0$ für $x \in [0, \pi]$ nur mit $n = 1$ zu erreichen ist. Weiter sorgt die vorgesehene Normierung der Schellhammer-Funktionen für $b_1 = 1$, denn

$$1 = \mathfrak{h}(\frac{\pi}{2}) = b_1 \sin(\frac{\pi}{2}).$$

Die Schellhammer-Funktion $\mathfrak{h} = \sin$ beschreibt aber gerade die klassische projektive Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$, siehe Beispiel 5.4. □

5.61 Korollar: Sei \mathfrak{S} eine Schellhammer-Ebene, die nicht isomorph zur klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ ist, mit einer \mathcal{C}^r -Schellhammer-Funktion \mathfrak{h} , die $\mathfrak{h}'(0) \neq 0$ erfüllt.

Dann ist die in Korollar 5.52 angegebene abgeleitete differenzierbare stabile Ebene \mathfrak{S}' maximal in dem Sinn, dass jede differenzierbare stabile Teilebene $\tilde{\mathfrak{S}}$ von \mathfrak{S} in \mathfrak{S}' als stabile Teilebene enthalten ist.



Anhang

A Geometrische Herleitung der glatten Familie aus Lemma 4.22

In Beispiel 4.6 wurde bereits erwähnt, dass die Schiefparabel-Ebene $\mathcal{E}_{1,2}$ (also die Ebene zur Normalparabel $\mathfrak{h}_{1,2}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x^2$) via $\Phi_{\mathcal{P}}: \mathcal{E}_{1,2} \rightarrow \mathbf{P}_2(\mathbf{R}): (x, y) \mapsto (x, y - x^2)$ isomorph ist zur klassischen projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

Diese Abbildung Φ kann nun verwendet werden, um eine andere Beschreibung einer Schiebe-Ebene \mathcal{E} nach Generalvoraussetzung 4.15 zu erhalten. Es gilt

$$(x, \mathfrak{h}(x-s) + t)^\Phi = (x, (x-s)^2 + a(x-s))^\Phi = (x, -2sx + s^2 + t + a(x-s));$$

also, statt wie im Fall der klassischen Ebene „Parabeln“ auf „Geraden“ abzubilden, überträgt Φ nun „gestörte Parabeln“ auf „gestörte Geraden“ (die Vertikalen bleiben dabei unverändert). Das heißt mit

$$\tilde{L}_{c,d} := \left\{ \left(x, cx + d + a \left(x + \frac{c}{2} \right) \right) \mid x \in \mathbf{R} \right\}$$

und

$$\tilde{\mathcal{L}} := \left\{ \tilde{L}_{c,d} \mid (c, d) \in \mathbf{R}^2 \right\} \cup \left\{ L_{(c)} \mid c \in \mathbf{R} \right\}$$

wird $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathbf{R}^2, \tilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$ zu einer affinen Ebene, die isomorph ist zur affinen Ableitung der Schiebe-Ebene \mathcal{E} an der Ferngeraden $L_{(\infty)}$. Der Isomorphismus Φ wirkt dabei auf den Geraden wie folgt:

$$\Phi_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}: \begin{cases} L_{(s,t)} \mapsto \tilde{L}_{-2s, s^2+t} \\ L_{(c)} \mapsto L_{(c)} \end{cases}$$

Da es in dem Modell der „gestörten Parabeln“ nicht so einfach scheint, eine glatte Familie zu konstruieren, die auch vertikale Geraden umfasst, soll dieses Modell $\tilde{\mathcal{A}}$ der „gestörten Geraden“ hierzu verwendet werden.

Als ersten Schritt würde man gerne ein Büschel (im Punkt $(0,0)$) parametrisieren, stellt dann aber fest, dass dies unnötige Komplikationen hervorruft. Es erweist sich als einfacher, von einem Büschel „ungestörter Geraden“ auszugehen und die zugehörigen „gestörten Geraden“ zu verwenden. Man erhält so zwar kein Büschel, aber doch immerhin eine einparametrische Familie von Geraden (siehe auch Abbildung A.3):

$$c \mapsto \begin{cases} \tilde{L}_{-\frac{1}{c}, 0} & \text{für } c \neq 0 \\ L_{(0)} & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

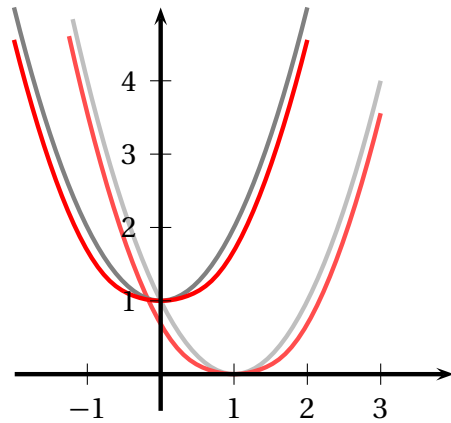


Abbildung A.1:
typische „gestörte Parabeln“

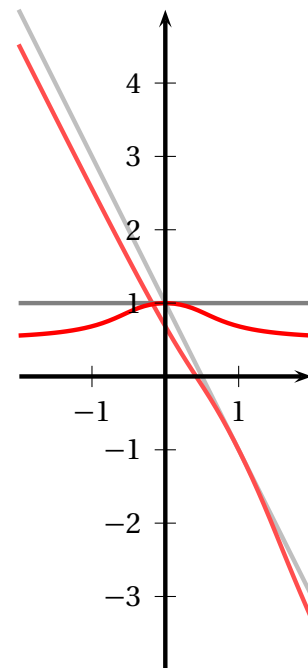


Abbildung A.2:
typische „gestörte Geraden“

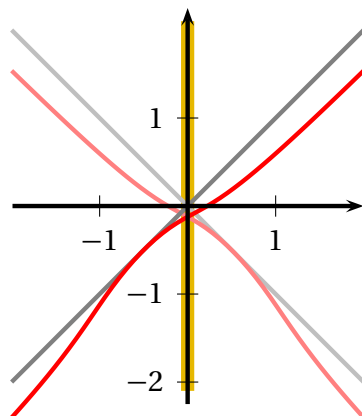


Abbildung A.3:
Familie „gestörter Geraden“

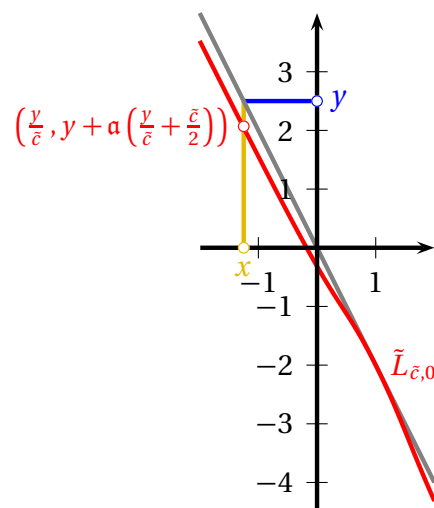


Abbildung A.4:
Parametrisierung

Die Geraden dieser Familie sollen gewissermaßen synchron parametrisiert werden. Eine Gerade $\tilde{L}_{\tilde{c},0}$ wird mit dem Parameter y wie folgt beschrieben (siehe auch Abbildung A.4):

$$y \mapsto \left(\frac{y}{\tilde{c}}, y + \alpha \left(\frac{y}{\tilde{c}} + \frac{\tilde{c}}{2} \right) \right) \in \tilde{L}_{\tilde{c},0}.$$

Die so gewonnene Parametrisierung der Punkte der Geraden-Familie

$$(c, y) \mapsto \begin{cases} \left(cy, -y + \alpha \left(cy - \frac{1}{2c} \right) \right) \in \tilde{L}_{-\frac{1}{c},0} & \text{für } c \neq 0 \\ (0, -y) \in L_{(0)} & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

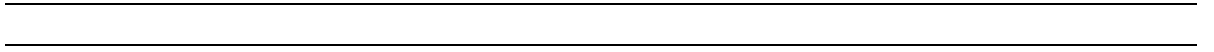
wird dann mit Φ^{-1} übertragen nach \mathcal{E} zu

$$(c, y) \mapsto \begin{cases} \left(cy, c^2 y^2 - y + \alpha \left(cy - \frac{1}{2c} \right) \right) \in L_{\left(\frac{1}{2c}, -\frac{1}{4c^2}\right)} & \text{für } c \neq 0 \\ (0, -y) \in L_{(0)} & \text{für } c = 0, \end{cases}$$

und durch Nachschalten der Schiebung $\sigma_{(d,0)}$ ergibt sich schließlich die gesuchte glatte Familie mit:

$$(c, d, y) \mapsto \begin{cases} \left(cy + d, c^2 y^2 - y + \alpha \left(cy - \frac{1}{2c} \right) \right) \in L_{\left(\frac{1}{2c}+d, -\frac{1}{4c^2}\right)} & \text{für } c \neq 0 \\ (d, -y) \in L_{(d)} & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

Die in Lemma 4.22 angegebene Karte λ_p ergibt sich dann gerade als Umkehrung der so gewonnenen Parametrisierung der Geradenfamilie.



B Ein „Scheibenmodell“ für 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen

So einfach die in Konstruktion 5.2 angegebene Beschreibung einer 2-dimensionalen Schellhammer-Ebene ist und so gut sie auch die Wirkung der Schellhammer-Gruppe auf der Schellhammer-Ebene darstellt, ist sie nicht so gut geeignet, um Zeichnungen der geometrischen Situation anzufertigen. Zwar ist man gewöhnt „unendlich große“ Zeichnungen zu interpretieren und man ist gewöhnt Skizzen zu verwenden, die die Situation abstrahieren, doch lassen sich 2-dimensionale Schellhammer-Ebenen auch kompakt beschreiben, so dass man ein Modell in die Hand bekommt, das sich sowohl für Zeichnungen gut eignet, als auch die Geometrie der Ebene gut trifft. Das Hilfsmittel hierzu ist denkbar einfach: In der Beschreibung der Ebene in Polarkoordinaten verwendet man in der Radius-Koordinate den Arcustangens derselben; die Punkte aus dem affinen Teil der Ebene kommen dadurch im Inneren, die Fernpunkte auf dem Rand einer Kreisscheibe D zu liegen. Diese Kreisscheibe besitzt Radius $\frac{\pi}{2}$ und kann gegebenenfalls auch zur Einheitskreisscheibe skaliert werden.

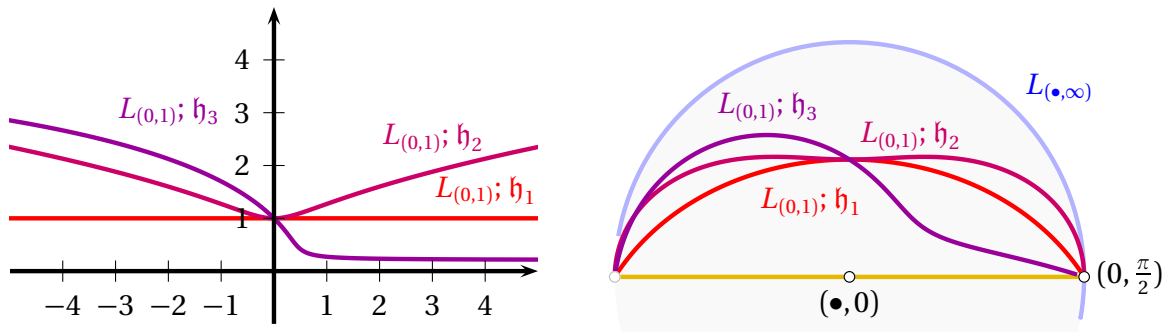


Abbildung B.1: Standardgeraden verschiedener Schellhammer-Ebenen. Links in der Gaußschen Zahlenebene, rechts Situation bezüglich D . Dabei ist $h_1(w) = \sin(w)$, $h_2(w) = (\sin(w))^2$ und $h_3 = e^{-(1-\frac{\pi}{2})w} \sin(w)$, also entsprechend der klassischen Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ (nach Beispiel 5.4 sowie nach Bemerkung 5.26) und einer Moulton-Ebene nach 5.25.

Für die konkrete Beschreibung des Scheibenmodells wollen wir wieder Polarkoordinaten verwenden, wie sie in Kapitel 5 eingeführt wurden. Sei $D = \{(w, r) \in \mathbf{C} \mid 0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}\}$ die Kreisscheibe. Dort sei weiter die Äquivalenzrelation \sim definiert durch $(w, \frac{\pi}{2}) \sim (w + k\pi, \frac{\pi}{2})$ für $k \in \mathbf{Z}$ auf den Fernpunkten und $(w, r) \sim (w, r)$ sonst. Für die Punktmenge gilt dann

$\mathfrak{P} = D/\sim$. Die Menge der Geraden setzt sich dann wieder zusammen aus der Ferngeraden

$$L_{(\bullet, \infty)} := \left\{ (w, \frac{\pi}{2}) \in \mathfrak{P} \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi} \right\},$$

den Ursprungsgeraden

$$L_{(w, 0)} := \left\{ (w, r) \in \mathfrak{P} \mid r \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\}$$

und den Standardgeraden

$$L_{(a, t)} := \left\{ \left(a + w, \arctan\left(\frac{t}{b(w)}\right) \right) \mid w \in \mathbf{R}_{2\pi} \setminus \{0, \pi\} \right\} \cup \left\{ (a, \frac{\pi}{2}) \right\}.$$

Durch Vergrößern der Kreisscheibe und Anpassen der Äquivalenzrelation zur Beschreibung der Punkte kann auch ein Modell gewonnen werden, bei dem man die Situation in der Nähe der Ferngeraden besser überblickt, allerdings mit dem Nachteil, dass deutlich mehr Punkte durch mehrere Repräsentanten beschrieben werden.

Für diese Beschreibung verwenden wir die Kreisscheibe $\tilde{D} = \{(w, r) \in \mathbf{C} \mid 0 \leq r \leq \pi\}$ und die Relation \sim auf der Punktmenge mit

$$(w, r) \sim (w, r)$$

$$(w, \frac{\pi}{2}) \sim (w + k\pi, \frac{\pi}{2}) \text{ für } k \in \mathbf{Z}$$

$$(w_1, \pi) \sim (w_2, \pi) \text{ für } w_1, w_2 \in \mathbf{R}_{2\pi}$$

$$\text{und } (w_1, r_1) \sim (w_2, r_2), \text{ wenn } w_1 = w_2 + \pi \text{ und } \tan(r_1) = -\tan(r_2).$$

Die Punktmenge ist dann wieder gegeben durch $\mathfrak{P} = \tilde{D}/\sim$; an der Beschreibung der Geraden ändert sich im Prinzip nichts, es wurden ja nur die Äquivalenzklassen, die einen Punkt beschreiben, vergrößert (siehe Abbildung B.2).

Trägt man hier wieder die Polarkoordinaten in einem kartesischen Schaubild ab, so ergibt sich eine Situation, die mit der in Abbildung 5.4 vergleichbar ist (siehe Abbildung B.3).

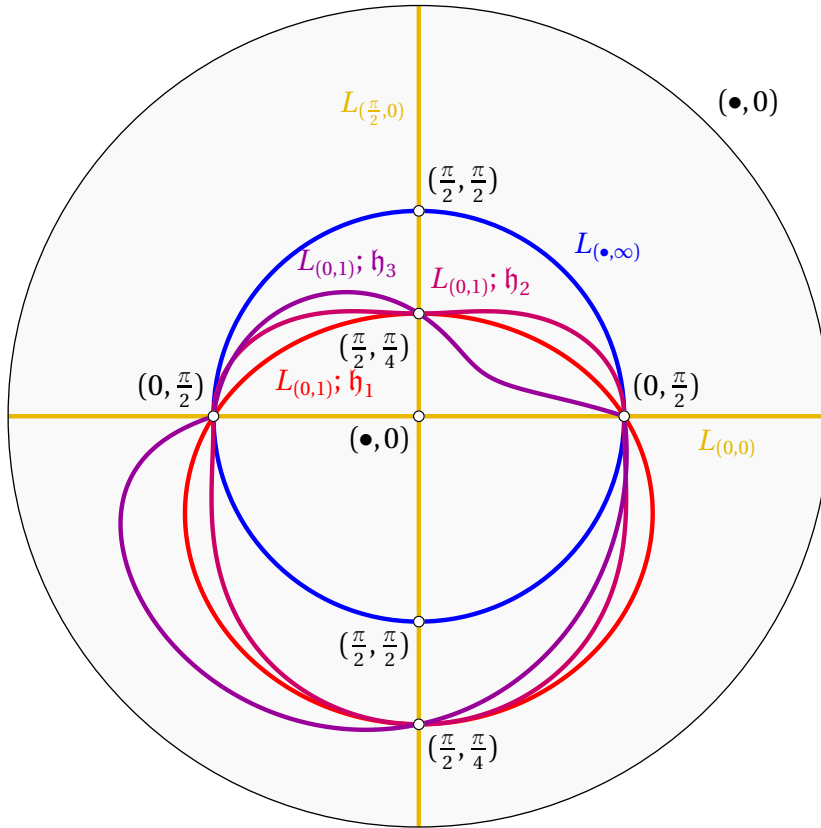


Abbildung B.2: Situation im Modell bezüglich \tilde{D}

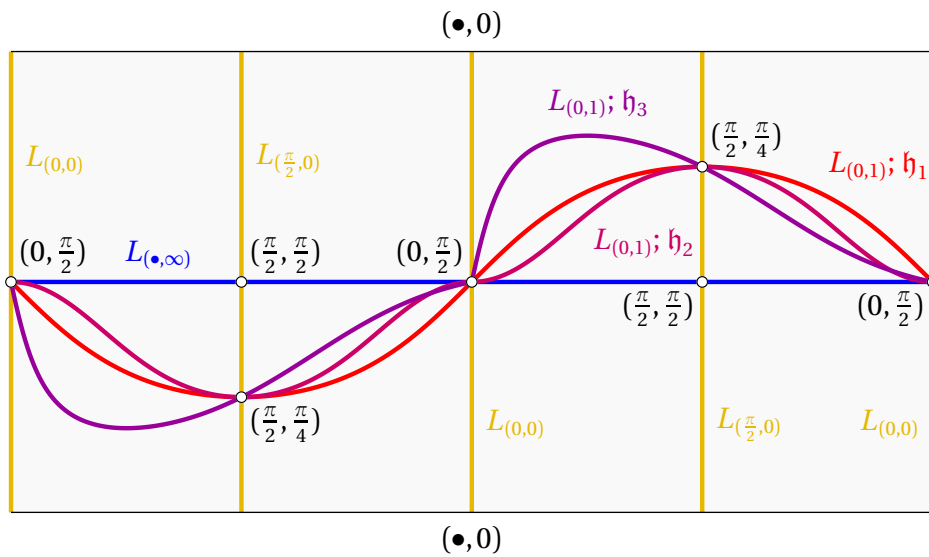
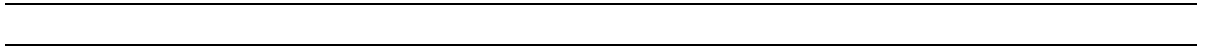


Abbildung B.3: Situation im Modell bezüglich \tilde{D} , kartesisch abgetragen



Literaturverzeichnis

- [ABW77] ARNOLD, Hans J. (Hrsg.) ; BENZ, Walter (Hrsg.) ; WEFELSCHIED, Heinrich (Hrsg.): *Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe*. Bd. 21: *Beiträge zur geometrischen Algebra*. Basel : Birkhäuser Verlag, 1977
- [Bet71] BETTEN, Dieter: 2-dimensionale differenzierbare projektive Ebenen. In: *Archiv der Mathematik* 22 (1971), Nr. 1, S. 304–309
- [Bet72] BETTEN, Dieter: Projektive Darstellung der Moulton-Ebenen. In: *Journal of Geometry* 2 (1972), Nr. 2, S. 107–114
- [Bet79] BETTEN, Dieter: Komplexe Schiefparabel-Ebenen. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 48 (1979), S. 76–88
- [BI00] BÖDI, Richard ; IMMERVOLL, Stefan: Implicit Characterizations of Smooth Incidence Geometries. In: *Geometriae Dedicata* 83 (2000), Nr. 1–3, S. 63–76
- [BJ73] BRÖCKER, Theodor ; JÄNICH, Klaus: *Heidelberger Taschenbücher*. Bd. 143: *Einführung in die Differentialtopologie*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1973
- [BK94] BÖDI, Richard ; KRAMER, Linus: Differentiability of Continuous Homomorphisms between Smooth Loops. In: *Results in Mathematics* 25 (1994), Nr. 1–2, S. 12–19
- [Böd95] BÖDI, Richard: *Smooth Stable and Projective Planes*, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Habilitationsschrift, 1995
- [Böd97] BÖDI, Richard: Smooth Stable Planes. In: *Results in Mathematics* 31 (1997), Nr. 3–4, S. 300–321
- [Böd98] BÖDI, Richard: Collineations of Smooth Stable Planes. In: *Forum Mathematicum* 10 (1998), Nr. 6, S. 751–773
- [Bre93] BREDON, Glen E.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 139: *Topology and Geometry*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1993
- [Bue95] BUEKENHOUT, Francis (Hrsg.): *Handbook of Incidence Geometry: Buildings and Foundations*. Amsterdam, London, New York, Tokyo : North-Holland, 1995
- [Die85] DIEUDONNÉ, Jean A.: *Logik und Grundlagen der Mathematik*. Bd. 8: *Grundzüge der modernen Analysis, Band 1*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1985

- [DO68] DEMBOWSKI, Peter ; OSTROM, Theodore G.: Planes of order n with collineation groups of order n^2 . In: *Mathematische Zeitschrift* 103 (1968), Nr. 4, S. 239–258
- [GL95] GRUNDHÖFER, Theo ; LÖWEN, Rainer: Linear Topological Geometries. In: (Bue95), S. 1255–1324
- [Gro76] GROH, Hansjoachim: Point homogeneous flat affine planes. In: *Journal of Geometry* 8 (1976), Nr. 1–2, S. 145–162
- [Gro77] GROH, Hansjoachim: Flat Projective Planes whose Automorphism Group Contains \mathbf{R}^2 . In: (ABW77), S. 129–131
- [Gro81] GROH, Hansjoachim: Pasting of \mathbf{R}^2 -planes. In: *Geometriae Dedicata* 11 (1981), Nr. 1, S. 69–98
- [Heu01] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden : Teubner, 2001 (Mathematische Leitfäden)
- [Heu08] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden : Teubner, 2008 (Mathematische Leitfäden)
- [Hil01] HILDEBRANDT, Stefan: *Analysis 1*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2001
- [Hil02] HILDEBRANDT, Stefan: *Analysis 2*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2002
- [Hir94] HIRSCH, Morris W.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 33: *Differential Topology*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1994
- [ILP10] IMMERVOLL, Stefan ; LÖWEN, Rainer ; PUPEZA, Ioachim: A local characterization of smooth projective planes. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 138 (2010), Nr. 1, S. 323–332
- [Imm98] IMMERVOLL, Stefan: *Glatte affine Ebenen mit großer Automorphismengruppe und ihr projektiver Abschluß*, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Diplomarbeit, 1998
- [Imm03] IMMERVOLL, Stefan: Real analytic projective planes with large automorphism groups. In: *Advances in Geometry* 3 (2003), S. 163–176
- [Kna86] KNARR, Norbert: *Topologische Differenzenflächenebenen mit nichtkommutativer Standgruppe*, Christian-Albrechts-Universität Kiel, Dissertation, 1986
- [Kos93] KOSINSKI, Antoni A.: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 138: *Differential Manifolds*. San Diego : Academic Press, 1993
- [KS09] KNARR, Norbert ; STROPPEL, Markus: Polarities of shift planes. In: *Advances in Geometry* 9 (2009), Nr. 4, S. 577–603

- [Lip86] LIPPERT, Martin F.: *Flat projective planes with two-dimensional non commutative automorphism group fixing a semioval*, Technische Hochschule Darmstadt, Dissertation, 1986
- [Mai99] MAIER, Peter: *Partitions of Lie Groups and Point-Regular Stable Geometries*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 1999
- [MRD92] MARGALEF-ROIG, Juan ; DOMINGUEZ, Enrique Outerelo: *North-Holland Mathematics Studies. Bd. 173: Differential Topology*. Amsterdam, London, New York, Tokyo : North-Holland, 1992
- [Ott92] OTTE, Joachim: *Differenzierbare Ebenen*, Christian-Albrechts-Universität Kiel, Dissertation, 1992
- [Ott95] OTTE, Joachim: Smooth Projective Translation Planes. In: *Geometriae Dedicata* 58 (1995), S. 203–212
- [OV90] ONISHCHIK, Arkadij L. ; VINBERG, Ernest B.: *Lie Groups and Algebraic Groups*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1990 (Springer series in Soviet mathematics)
- [Poh90] POHL, Hans-Joachim: Flat projective planes with 2-dimensional collineation group fixing at least two lines and more than two points. In: *Journal of Geometry* 38 (1990), Nr. 1–2, S. 107–157
- [Pol93] POLSTER, Burkard: *Stetige planare Funktionen*, Friedrich-Alexander-Universität Nürnberg-Erlangen, Dissertation, 1993
- [Pol95] POLSTER, Burkard: A sufficient condition for planar partition functions. In: *Archiv der Mathematik* 65 (1995), Nr. 2, S. 176–184
- [PS11] POPPITZ, Steffen ; STROPPEL, Markus: Polarities of Schellhammer planes. In: *Advances in Geometry* 11 (2011), S. 319–336
- [Sal65] SALZMANN, Helmut: Zur Klassifikation topologischer Ebenen. III. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 28 (1965), S. 250–261
- [Sal67] SALZMANN, Helmut: Topological planes. In: *Advances in Mathematics* 2 (1967), Nr. 1, S. 1–60
- [SBG⁺95] SALZMANN, Helmut ; BETTEN, Dieter ; GRUNDHÖFER, Theo ; HÄHL, Hermann ; LÖWEN, Rainer ; STROPPEL, Markus: *Expositions in Mathematics. Bd. 21: Compact Projective Planes*. Berlin : de Gruyter, 1995
- [Sch81] SCHELLHAMMER, Irene: *Einige Klassen von ebenen projektiven Ebenen*, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Diplomarbeit, 1981

- [War83] WARNER, Frank W.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 94: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1983

Index

- Abbildung
 differenzierbare, **23**
 immersive, **23**
 submersive, **23**
- Ableitung, **23**
 Notation, **19**
 partielle
 bzgl. Mannigfaltigkeiten, **24**
 Notation, **20**
- affine Ableitung (Schiebe-Ebene), 41
- affine Ebene, **28**
 differenzierbare, **28**
 nicht-klassisch, 32
 Schiebe-Ebene, *siehe* Schiebe-Ebene
- Antifahne, **27**, 35, 75, 77
- Atlas, **22**, 39
- Automorphismengruppe, **29**, 38
 Aut(\mathcal{E}), Bezeichnung, 29
 große, 16, 31–33, 35–36
- \mathcal{C}^r -differenzierbar, 21–23
- Δ_M , Diagonale in $M \times M$, **27**
- Diffeomorphismus, **23**
- Differential, **23**
 lokales, **23**
- Differentialtopologie, 21
- differenzierbare Familie, *siehe* Untermannigfaltigkeit
- differenzierbare Struktur, **22**
- Differenzierbarkeit, **20**, 23
 Konvention, 22
 an Stelle, **20**
 stetige, **21**
- Differenzierbarkeitsgrad, **21**
- Dimension
 einer Ebene, 28
 eines Geradenbüschels, 29
 einer Mannigfaltigkeit, 22
 einer Punktreihe, 29
- Dreieck, **28**, 29
- Dreiseit, **28**, 34
- Dualität, **34**
 differenzierbar, 34
- Einbettung, **23**
- Eindeutigkeit der diffb. Struktur stabiler Ebenen, 30
- Elementrelation (Fahnenmenge), 42
- Fahne, **27**
- Fahnenmenge, **27**, 42
- Faktorraum, diffb. Struktur, **25**
- Familie, *siehe* Untermannigfaltigkeit, differenzierbare Familie
- Ferngerade
 bei Schellhammer-Ebenen, *siehe dort*
 bei Schiebe-Ebenen, *siehe dort*
- Fernpunkt
 bei Schellhammer-Ebenen, *siehe dort*
 bei Schiebe-Ebenen, *siehe dort*
- Fixfahne, 35, 36, 41, 44
- Fourier-Reihe, 113–119
- Geradenbüschel
 Definition, **27**
 diffeomorph, 35
 Untermannigfaltigkeit, 29, 32, 39
- Geradenmenge, **27**
 bei 2-dim. Schellhammer-Ebenen, **76**
 bei 2-dim. Schiebe-Ebenen, **42**

- geradentreue Abbildung, **29**, 42, *siehe auch* Kollineation
- glatt, **22**, 59
- glatte Familie, *siehe* Untermannigfaltigkeit
- Immersion, **23**
- Inzidenzstruktur, 27, 41, 75
- Jacobi-Matrix, **20**
- Karte, **22**
- Kartengebiet, **22**
- Kartenwechsel, **22**
- Kategorie \mathcal{C}^r -diffb. Mfkten., **23**
- Kettenregel
 bezüglich Mannigfaltigkeiten, **24**
 in \mathbf{R}^n , **20**
- Klassifikation 2-dim. proj. Ebenen, 35–36
- kollinear, **27**
- Kollineation, **29**
 differenzierbare, **29**
 stetige, **29**
- konfluent, **27**
- Lie-Gruppe, 21, **25**, 30
 transitive Wirkung, 25
- linearer Raum, **27**
- lokale Repräsentation, **23**
- Mannigfaltigkeit, **22**
- Moulton-Ebene, 35, 36, 90
- N**, natürliche Zahlen, Konvention, 19
- parallel, **28**
- Parallelenabbildung, **28**, 59–60
- Parallelenaxiom, **28**
- Parallelschar, 44
- Perspektivität, **35**, 49
- planar, **41**, 42, 44
- Polarität, **34**, 45, 80
 differenzierbar, 34
- projektive Ebene
 2-dimensionale, 35–39
 Differenzierbarkeit, 38–39
- Klassifikation, 35–36
- differenzierbare, **28**, 31–34
 Grenzdimension, 33, 38
 kompakt, 34
 nicht-klassisch, 32
- duale, **34**
 differenzierbar, 34
- klassische, 31, 35, 36, 78, 91, 127
- Moulton-Ebene, *siehe dort*
- Schellhammer-Ebene, *siehe dort*
- Schiebe-Ebene, *siehe dort*
- schiefhyperbolische Ebene, 35
- Schiefparabel-Ebene, *siehe dort*
- selbstduale, **34**
- Shift-Ebene, *siehe* Schiebe-Ebene
- projektiver Abschluss, 31
- Punktmenge, **27**
 bei 2-dim. Schellhammer-Ebenen, **75**
 bei 2-dim. Schiebe-Ebenen, **42**
- Punktreihe
 Definition, **27**
 diffeomorph, 35
 Untermannigfaltigkeit, 29, 32, 39
- Satz
 über implizite Funktionen, **21**, 96, 97
 über implizite Funktionen bzgl. Mannigfaltigkeiten, **24**
 über reguläre Werte, **24**
 über Schnitt transverser Familien v. U.-Mfkten., **25**
 über die Umkehrfunktion, **21**, 46, 88, 93, 94
- Schellhammer-Ebene, 35, 36, 75–119
 2-dimensionale, Konstruktion, 75–78
 Atlas, 85–88, 93–94
 Definition, **75**
 diffb. stabile Teilebene, 112, 119
 differenzierbare, 81–91, 111, 112
 differenzierbare Struktur, 81–85, 92–94, 100–101
- Ferngerade, **76**, 77, 128
- Fernpunkt, **75**, 127
- Geradenbüschel, 78–80

- Geradenmenge, **76**
 Polarität, **80**
 Punktmenge, **75**
 Punktreihe, **78–80**
 Scheiben-Modell, **127–128**
 Schnitt von Geraden, **94–100**
 Schnitt transversal, **101–102**
 Standardgerade, **76**, **102**, **128**
 Ursprungsgerade, **76**, **102**, **128**
 Schellhammer-Funktion, **75**, **82**, **114–116**
 Schellhammer-Gruppe, **75**, **76**
 Schiebe-Ebene, **36**, **41–73**
 2-dimensionale, Konstruktion, **41–44**
 affine, **41**, **44**
 differenzierbar, **32**, **51–60**
 Auflösungsabbildung, **41**
 Ableitung, **46**
 Definition, **41**
 differenzierbare Struktur, **46–50**, **53–54**
 Fahnenmenge, **42**
 Ferngerade, **44**
 Fernpunkt, **44**
 Geradenmenge, **42**
 Polarität, **45**
 Punktmenge, **42**
 Standardgerade, **44**
 vertikale Gerade, **44**
 Schiebung, **42**
 Schiebungs-Gruppe, **41**, **46**
 bei 2-dimensionalen Ebenen, **44**
 Schiefparabel, **45**
 Schiefparabel-Ebene, **35**, **36**, **45**, **54**
 Schneiden, **27**, **39**
 differenzierbar, **34**, **38**, **39**
 selbstdual, **45**, **81**
 Shift, *siehe* Schiebung
 Shift-Ebene, *siehe* Schiebe-Ebene
 Shift-Gruppe, *siehe* Schiebungs-Gruppe
 Störfunktion, **51**, **52**
 stabile Ebene, differenzierbare, **28**, **59**,
 112, **119**
 Stabilisator, **25**
 Standardgerade
 bei Schellhammer-Ebenen, *siehe dort*
 bei Schiebe-Ebenen, *siehe dort*
 Steigungsdreieck, **42**
 Stelle
 kritische, **24**
 reguläre, **24**
 Submersion, **23**
 Tangentialraum, **22**
 -bündel, **22**
 Translationsebene
 affine, differenzierbar, **32**
 projektive, differenzierbar, **31**
 transvers, *siehe* Untermannigfaltigkeit
 transversal, **23**, **54**
 Untermannigfaltigkeit, **23**
 differenzierbare Familie, **25**, **55–59**,
 102–108, **110–111**
 transvers, **25**
 Urbild, **19**
 Ursprungsgerade
 bei Schellhammer-Ebenen, *siehe dort*
 Verbinden, **27**, **39**
 differenzierbar, **34**, **38**, **39**
 Verbindungsgerade, **27**
 vertikale Gerade
 bei Schiebe-Ebenen, *siehe dort*
 verträgliche diffb. Struktur, **23**, **47**
 Viereck, **28**
 Wert
 kritischer, **24**
 regulärer, **24**
 Wirkung
 durch Automorphismengruppe, **30**
 Definition, **25**
 reguläre, **25**, **41**, **44**, **75**
 transitive, **25**
 scharf einfach, *siehe* reguläre