

Laufende Wellenlösungen von Systemen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen am Beispiel von Mehrphasenströmungen in porösen Medien

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Oliver Hönig
aus Augsburg

Hauptberichter: Prof. Dr. Dr. Rudolf Hilfer
Mitberichter: Prof. Dr. Christian Rohde

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2012

Institut für Computerphysik, Universität Stuttgart, 2012

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	XI
Symbolverzeichnis	XIV
Zusammenfassung	XXIII
Summary	XXVI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Problemstellung	4
1.3 Gliederung der Arbeit	5
2 Grundlagen	7
2.1 Grundbegriffe bei Strömungen in porösen Medien	7
2.2 Einphasenströmungen in porösen Medien	9
2.3 Partielle Differentialgleichungen	9
2.4 Qualitative Beschreibung gewöhnlicher Differentialgleichungen: Dynamische Systeme	13
I Mehrphasenströmungsmodelle	18
3 DBRMMWBL-Modell	20
3.1 Grundlegende Gleichungen	20
3.2 Konstitutive Annahmen	21
3.2.1 Makroskopischer Kapillardruck	21
3.2.2 Relative Permeabilitäten	22
3.2.3 Residuale und effektive Sättigungen	23
3.2.4 Kritik	23

3.3	Umformungen	24
3.3.1	Reduzierte Form	24
3.3.2	Dimensionslose Gleichungen	25
3.3.3	Fraktionale Flussformulierung	26
3.4	Laufende Wellengleichung	26
4	Perkolationsmodell	28
4.1	Grundlegende Gleichungen	28
4.1.1	Variablendefinition	28
4.1.2	Erhaltungssätze	29
4.1.3	Konstitutivannahmen	30
4.1.4	Selbstkonsistente Schließbedingung	32
4.2	Näherungen	34
4.2.1	Vernachlässigbare Trägheit	34
4.2.2	Viskose Dominanz	34
4.2.3	Keine viskose Kopplung	35
4.2.4	Immobilie nichtperkolierende Phasen	35
4.2.5	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	36
4.2.6	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	36
4.3	Umformungen	37
4.3.1	Reduzierte Form	37
4.3.1.1	Volles System	37
4.3.1.2	Immobilie nichtperkolierende Phasen	40
4.3.1.3	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	43
4.3.1.4	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	44
4.3.2	Dimensionslose Gleichungen	46
4.3.2.1	Volles System	46
4.3.2.2	Immobilie nichtperkolierende Phasen	47
4.3.2.3	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	48
4.3.2.4	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	48
4.3.3	Fraktionale Flussgleichung	48
4.3.3.1	Volles System	49
4.3.3.2	Immobilie nichtperkolierende Phasen	52
4.3.3.3	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	54
4.3.3.4	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	56
4.4	Laufende Wellengleichung	57
4.4.1	Volles System	58

4.4.2	Immobilie nichtperkolierende Phasen	60
4.4.3	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	60
4.4.4	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	61
II	Laufende Wellenlösungen	63
5	Eine Gleichung	66
5.1	DBRMMWBL-Modell	66
5.1.1	Parametrisierungsmodelle	69
5.1.1.1	Brooks-Corey	70
5.1.1.2	Van Genuchten	72
5.1.2	Phasenportraits, Profile und Bifurkationen	74
5.1.3	Neuformulierung der räumlich unbeschränkten Lösung	78
5.1.4	Physikalische Beschränkung der Lösungsklassen durch Annahme der Stetigkeit des Wasserflusses	82
5.2	Perkolationsmodell	89
5.2.1	Phasenportraits, Profile und Bifurkationen	89
5.2.2	Neuformulierung der räumlich unbeschränkten Lösung	99
6	Systeme zweier Gleichungen	104
6.1	Allgemeine Gleichungen	105
6.2	Nichtgekoppelte Flussfunktionen	108
6.2.1	Burgersflüsse	110
6.3	Kein Massenaustauschterm	120
6.3.1	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	122
6.3.2	Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	133
7	Systeme dreier Gleichungen	144
7.1	Allgemeine Gleichungen	145
7.2	Kein Massenaustauschterm und Flussfunktionen aus dem Perkolationsmodell	149
7.2.1	Konkrete Fixpunktanalyse	152
7.2.2	Invariante Untermannigfaltigkeiten	160
7.2.3	Das primäre Bewässerungssystem	163
7.2.3.1	Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten und ihre Lösungen	165
7.2.3.2	Eindimensionale Untermannigfaltigkeiten und ihre Lösungen	177
7.2.3.3	Dreidimensionale Untermannigfaltigkeiten und ihre Lösungen	181

8 Numerische Lösungen	190
8.1 Algorithmus	190
8.2 Eine Gleichung	191
8.2.1 Implementierung	192
8.2.2 Ergebnisse	193
8.3 Systeme zweier Gleichungen	195
8.3.1 Nichtgekoppelte Flussfunktionen	195
8.3.1.1 Implementierung	195
8.3.1.2 Ergebnisse	197
8.3.2 Kein Massenaustauschterm	203
8.3.2.1 Implementierung	203
8.3.2.2 Ergebnisse	205
8.4 Systeme dreier Gleichungen	222
8.4.1 Kein Massenaustauschterm	223
8.4.1.1 Implementierung	223
8.4.1.2 Ergebnisse	224
Fazit und Ausblick	245
Literaturverzeichnis	248

Abbildungsverzeichnis

4.1	Funktionale Abhängigkeit der nichtperkolierenden Sättigungen von der Wassersättigung für immobile nichtperkolierende Sättigungen	41
4.2	Kapillardrucksfunktion und deren Ableitung für immobile nichtperkolierende Sättigungen	42
4.3	Kapillardrucksfunktion und deren Ableitung nach S_{w} und S_4 für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	43
4.4	Kapillardrucksfunktion und deren Ableitung nach S_{w} und S_2 für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	45
4.5	Fraktionale Flussfunktion, ihre Ableitung und Kapillarfunktion und ihre Ableitung für das Modell mit immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten	53
4.6	Fraktionale Flussfunktionen und fraktionale Mobilitäten für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	55
4.7	Fraktionale Flussfunktionen und fraktionale Mobilitäten für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	57
5.1	Fraktionale Flussfunktion, ihre Ableitung und Kapillarfunktion und ihre Ableitung nach Brooks und Corey mit $\lambda = 2$	71
5.2	Bifurkationen mit Van-Genuchten-Parameter n in der fraktionalen Flussfunktion, Kapillarfunktion und ihren Ableitungen für $S_{\text{w}} \rightarrow 1$	73
5.3	Phasenportraits im Modell nach Brooks und Corey	75
5.4	Die vier bezüglich des Phasenraums topologisch verschiedenen Sättigungsprofile	77
5.5	Fraktionale Flussfunktion und laufende Wellenlinie	80
5.6	Die Funktion $c_0(S_{\text{w}}, c)$ als Farbplot	81
5.7	Beispiele für laufende Wellenlinien	82
5.8	Die Funktion $c(S_{\text{w}}^{\ell}, S_{\text{w}}^{\text{r}})$ als Farbplot	83
5.9	Physikalischer Aufbau der Lösungsklasse a)	84
5.10	Sättigungsprofil im Brooks und Corey Modell und logarithmisches Erreichen der Randsättigungen	88

5.11	Phasenportraits für die primäre Bewässerung im Perkulationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Phasen	90
5.12	Phasenportraits für die sekundäre Bewässerung im Perkulationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Phasen	92
5.13	Profile aller vier Profilklassen für die primäre und sekundäre Bewässerung mit immobilen nichtperkolierenden Phasen	96
5.14	Maximale Sättigungsprofile der Klasse d) für die primäre und sekundäre Bewässerung mit immobilen nichtperkolierenden Phasen	98
5.15	Die Funktion $c_0(S_W, c)$ als Farbplot für die primäre und sekundäre Bewässerung mit immobilen nichtperkolierenden Phasen	100
5.16	Farbplots für $c(S_W^l, S_W^r)$ für die primäre und sekundäre Bewässerung mit immobilen nichtperkolierenden Phasen	102
6.1	Sättigungsprofil mit Terrassenpunkt für positiven Massenaustauschterm	114
6.2	Sättigungsprofil mit Unterschuss für positiven Massenaustauschterm	115
6.3	Sättigungsprofil mit Terrassenpunkt für negativen Massenaustauschterm	117
6.4	Sättigungsprofil mit Überschuss für negativen Massenaustauschterm	118
6.5	Klassifizierung der stationären Punkte für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	123
6.6	Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	125
6.7	Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 1.11, 1.34$ für physikalisch relevante Bewässerungen für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	127
6.8	Phasenportraits und Sättigungsprofile für die extremalen Überschuss- und der Terrassenpunktlösung für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	128
6.9	Flächen von $f_u(u, v)$ und $f_v(u, v)$ für die Überschuss- und Terrassenpunktlösung aus Abbildung 6.8 und deren laufende Wellenverbindungslinien	130
6.10	Phasenportrait (a) und Sättigungsprofile (b) für die sechs ausgezeichneten Systeme aus Tabelle 6.8	131
6.11	Klassifizierung der stationären Punkte für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	134
6.12	Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	135
6.13	Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 1.11, 1.34$ für physikalisch relevante Bewässerungen für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	137

6.14	Phasenportraits und Sättigungsprofile für die extremalen Überschuss- und der Terrassenpunktlösung für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	139
6.15	Flächen von $f_u(u, v)$ und $f_v(u, v)$ für die Terrassenpunktlösungen mit und ohne Überschuss aus Abbildung 6.14 und deren laufende Wellenverbindungs- linien	140
6.16	Phasenportrait und Sättigungsprofile für die vier ausgezeichneten Systeme aus Tabelle 6.12	141
7.1	Klassifizierung der stationären Punkte	153
7.2	Die stabilen sich um den Ursprung befindlichen und instabilen stationären Punkte, für die es Punkte auf dem jeweils anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v, k_w) -Wert haben	154
7.3	Konturflächen $k_u(u, v, w)$	156
7.4	Konturflächen $k_v(u, v, w)$	157
7.5	Konturflächen $k_w(u, v, w)$	159
7.6	Konturflächen $k_u(u, v, w) = 0$, $k_v(u, v, w) = 0$ und $k_w(u, v, w) = 0$ und deren Schnittpunkte für das primäre Bewässerungssystem	165
7.7	Fixpunkte und Definitionsbereich des gesamten primären Bewässerungssystems	166
7.8	Die zehn zweidimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeiten und deren Fixpunkte für das primäre Bewässerungssystem	167
7.9	Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(e)	169
7.10	Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(f)	170
7.11	Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(g)	171
7.12	Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(h)	173
7.13	Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(i)	174
7.14	Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(j)	175
7.15	Phasenportraits für die 15 eindimensionalen Bewässerungswellen des primären Bewässerungssystems	177
7.16	Sättigungsprofile der 15 verschiedenen eindimensionalen Bewässerungswellen des primären Bewässerungssystems	179

7.17	Fixpunkte und Definitionsbereich des für die Bewässerung interessanten Systems für das primäre Bewässerungssystem	181
7.18	Klassifizierung der Sättigungsprofile auf den sechs unterschiedlichen dreidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Tabelle 7.19 mit Parametern λ, μ der jeweiligen konvexen Hülle	184
7.19	Für jedes Teilsystem ein Sättigungsprofil mit einem Überschuss in einer Phase jeweils mit Variablen $(\lambda, \mu) = (0.8, 0.02)$	185
7.20	Für jedes Teilsystem ein Sättigungsprofil mit einem Überschuss in zwei Phasen jeweils mit Variablen $(\lambda, \mu) = (0.4, 0.4)$	186
7.21	Für jedes Teilsystem ein Sättigungsprofil mit einem Überschuss in einer Phase und einem doppelten Überschuss in einer anderen Phase jeweils mit Variablen $(\lambda, \mu) = (0.499, 0.499)$	187
7.22	Klassifizierung aller dreidimensionaler Sättigungsprofile mit (α, β) -Wert definiert in Gleichung (7.37)	188
8.1	Anfangsprofile, zeitliche Entwicklung der Profile und Endprofile für die maximale primäre und sekundäre Bewässerung für immobile nichtperkolierende Phasen	194
8.2	Charakteristiken für die maximale primäre und sekundäre Bewässerung für immobile nichtperkolierende Phasen	195
8.3	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Terrassenpunktlösung für positiven Massenaustauschterm	198
8.4	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Unterschusslösung für positiven Massenaustauschterm	199
8.5	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Terrassenpunktlösung für negativen Massenaustauschterm	200
8.6	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Überschusslösung für negativen Massenaustauschterm	202
8.7	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für den maximalen Überschuss in u für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Wasser	206
8.8	Fraktionale Flussfunktion und räumliche Ableitung des u -Flusses für die maximale Überschusslösung in u	207
8.9	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für den minimalen Überschuss in u für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Wasser	208

8.10	Fraktionale Flussfunktion und räumliche Ableitung des u -Flusses für die minimale Überschusslösung in u	209
8.11	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Terrassenpunktlösung in u für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Wasser	210
8.12	Fraktionale Flussfunktion und räumliche Ableitung des u -Flusses für die Terrassenpunktlösung in u	211
8.13	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für den maximalen Überschuss in v für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Öl	214
8.14	Fraktionale Flussfunktionen und räumliche Ableitung des u -Flusses und des v -Flusses für die maximale Überschusslösung in v	215
8.15	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für den minimalen Überschuss in v für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Öl	216
8.16	Fraktionale Flussfunktionen und räumliche Ableitung des u -Flusses und des v -Flusses für die minimale Überschusslösung in v	217
8.17	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Terrassenpunktlösung in v für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Öl	218
8.18	Fraktionale Flussfunktionen und räumliche Ableitung des u -Flusses und des v -Flusses für die Terrassenpunktlösung in v	219
8.19	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Terrassenpunktlösung in u für einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Öl	220
8.20	Fraktionale Flussfunktionen und räumliche Ableitung des u -Flusses und des v -Flusses für die Terrassenpunktlösung in v	221
8.21	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Lösung aus Abbildung 7.21(a)	226
8.22	Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$, $f_v(x, t)$ und $f_w(x, t)$ und räumliche Ableitung des u -Flusses, des v -Flusses und des w -Flusses für die Lösung aus Abbildung 7.21(a)	227
8.23	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Lösung aus Abbildung 7.21(b)	228
8.24	Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$, $f_v(x, t)$ und $f_w(x, t)$ und räumliche Ableitung des u -Flusses, des v -Flusses und des w -Flusses für die Lösung aus Abbildung 7.21(b)	229

8.25	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Lösung aus Abbildung 7.21(c)	230
8.26	Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$, $f_v(x, t)$ und $f_w(x, t)$ und räumliche Ableitung des u -Flusses, des v -Flusses und des w -Flusses für die Lösung aus Abbildung 7.21(c)	231
8.27	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Lösung aus Abbildung 7.21(d)	233
8.28	Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$, $f_v(x, t)$ und $f_w(x, t)$ und räumliche Ableitung des u -Flusses, des v -Flusses und des w -Flusses für die Lösung aus Abbildung 7.21(d)	234
8.29	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Lösung aus Abbildung 7.21(e)	235
8.30	Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$, $f_v(x, t)$ und $f_w(x, t)$ und räumliche Ableitung des u -Flusses, des v -Flusses und des w -Flusses für die Lösung aus Abbildung 7.21(e)	236
8.31	Anfangsprofil, zeitliche Entwicklung, Endprofil und Charakteristiken für die Lösung aus Abbildung 7.21(f)	237
8.32	Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$, $f_v(x, t)$ und $f_w(x, t)$ und räumliche Ableitung des u -Flusses, des v -Flusses und des w -Flusses für die Lösung aus Abbildung 7.21(f)	238
8.33	Anfangsprofil und Endprofil mit $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, $(u_r, v_r, w_r) = (0, 0, 0.25)$ und $(x_0^{u-v}, x_0^v) = (0, 20)$	241

Tabellenverzeichnis

4.1	Verwendete Modellparameter.	40
4.2	Die Grenz- und Anfangssättigungen der zwei Hauptbewässerungskurven. . .	40
5.1	Verwendete Daten für Abbildung 5.10.	88
5.2	Geschwindigkeiten, c_0 -Werte, die links- und rechtsseitigen Sättigungsgrenzwerte und die Profilklassen für die Abbildungen 5.13 und 5.14.	99
6.1	Tabelle zu den Abbildungen 6.1-6.4.	113
6.2	Tabelle zu den Teilbereichen in Abbildung 6.1	114
6.3	Tabelle zu den Teilbereichen in Abbildung 6.2	115
6.4	Tabelle zu den Teilbereichen in Abbildung 6.3	117
6.5	Tabelle zu den Teilbereichen in Abbildung 6.4	118
6.6	Wertebereiche der Funktionen k_u und k_v für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	126
6.7	Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte, Terrassen-, Unterschuss- und Überschusspunkte für Abbildungen 6.8	127
6.8	Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 6.10.	132
6.9	Verhalten der Sättigungsprofile mit Bifurkationsparameter λ für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser	132
6.10	Wertebereiche der Funktionen k_u und k_v für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	136
6.11	Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte und Terrassen- bzw. Überschusspunkte für Abbildungen 6.14.	138
6.12	Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 6.16.	142
6.13	Verhalten der Sättigungsprofile mit Bifurkationsparameter λ für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl	142

7.1	Werte der farbigen Konturflächen der Abbildungen in 7.3, 7.4 und 7.5.	155
7.2	Werte für das System aus Abbildung 7.6.	163
7.3	Werte, Typ, physikalische Erhaltung und Bewässerungsrelevanz der Fixpunkte.	164
7.4	Ebenengleichung, Richtungsvektoren, physikalische Erhaltung, Fixpunkte und Bewässerungsrelevanz der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.8.	168
7.5	Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.9.	169
7.6	Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.9.	169
7.7	Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.10.	170
7.8	Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.10.	170
7.9	Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.11.	171
7.10	Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.11.	171
7.11	Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.12.	173
7.12	Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.12.	173
7.13	Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.13.	174
7.14	Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.13.	174
7.15	Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.14.	175
7.16	Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.14.	175
7.17	Abbildung ihrer Sättigungsprofile, Abbildungen ihrer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.8, physikalische Erhaltung, Fixpunkte und Bewässerungsrelevanz der eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten. . .	178
7.18	Abbildung, physikalische Erhaltung, Fixpunkte und Ort der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.17.	182
7.19	Physikalische Erhaltung und Fixpunkte der dreidimensionalen invarianten Teilbereiche des Bewässerungsbereiches aus Abbildung 7.17.	182
8.1	Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen aus 8.1.	193
8.2	Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.3, 8.4, 8.5 und 8.6.	197

8.3	Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.7,8.9 und 8.11.	205
8.4	Bifurkationen mit Parameter Δ_v^u und Parameter $\kappa = 0.125$	212
8.5	Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.13,8.15,8.17 und 8.19.	213
8.6	Bifurkationen mit Parameter Δ_v^{u-v} mit Parameter $\kappa = 0.125$	222
8.7	Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.21, 8.23, 8.25, 8.27, 8.29 und 8.31.	225
8.8	Physikalische Erhaltung und Abstände der anfänglichen Wellen der dreidimen- sionalen invarianten Teilbereiche des Bewässerungsbereiches aus Abbildung 7.17.	241
8.9	Abbildung, physikalische Erhaltung und Abstände der anfänglichen Wellen der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.17 und Tabelle 7.4.	242
8.10	Abbildung ihrer Sättigungsprofile, Abbildungen ihrer zweidimensionalen Un- termannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.8 und Abstände der anfänglichen Wel- len der eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten.	243

Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung
a	Koeffizient
a_{ij}	Matrizelement
A	Matrix
\mathfrak{b}	Bifurkationsparameter
B	Vektor zur Definition der Flussrandbedingungen für den numerischen Algorithmus
c	laufende Wellengeschwindigkeit
c_0	Integrationskonstante für Systeme einer Gleichung
c^{BL}	maximale Geschwindigkeit einer Buckley-Leverett-Stoßwelle
c^{max}	maximale laufende Wellengeschwindigkeit
c_0^{max}	maximaler Wert der Integrationskonstante
\hat{c}	dimensionsbehaftete laufende Wellengeschwindigkeit
$c_0(\mathcal{N}_1), c_0(\mathcal{N}_2)$	Wert der Integrationskonstanten für die Trajektorie \mathcal{N}_1 bzw. \mathcal{N}_2
C	Zeitentwicklungsmatrix für den numerischen Algorithmus
$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$	Separatrix mit $c_0 = 0$ bzw. $c_0 = c - 1$
Ca_w	makroskopische Kapillarzahl
D	Kapillarfunktion
D_i	Kapillarfunktion in der i -Gleichung mit $i \in \{u, v, w\}$
\mathfrak{D}	Diskriminante einer partiellen Differentialgleichung
\mathcal{D}	ein Gebiet in \mathbb{R}^n
e_i	Eigenwerte mit $i \in \{1, \dots, 6\}$
E^s	lineare stabile Untermannigfaltigkeit
E^i	lineare instabile Untermannigfaltigkeit

Symbol	Beschreibung
E^z	lineare Zentrums Mannigfaltigkeit
f_i	fraktionale Flussfunktion für die i -Sättigung mit $i \in \{S_w, S_o, S_2, S_4, u, v, w\}$
\hat{F}	dimensionsbehaftete Körperkraft
\mathcal{F}	allgemeines Funktional
\hat{g}	dimensionsbehaftete Schwerkraftsbeschleunigung an der Erdoberfläche
h_i	Massenaustausch für die i -Sättigung mit $i \in \{u, v, w\}$
k_i	Integrationskonstante für Systeme mehrerer Gleichungen mit $i \in \{u, v, w\}$
\hat{k}	dimensionsbehaftete absolute Permeabilität
\hat{K}	dimensionsbehaftete hydraulische Leitfähigkeit
k_w, k_o	relative Permeabilität des Wassers bzw. des Öls
\hat{l}	dimensionsbehaftete makroskopische Länge
\mathcal{L}	Stoßwellenlinie
\mathcal{L}	Verbindungsline zweier Sattelpunkte
m	Ordnung einer Differentialgleichung
\hat{m}_i	dimensionsbehafteter Quellterm in der Impulsbilanz der Phase i
\hat{M}_i	dimensionsbehafteter Quellterm in der Massenbilanz der Phase i
M_o^w	Viskositätsverhältnis zwischen Wasser und Öl
n	Van-Genuchten-Parameter
n_ℓ, n_r	Wert der räumlichen Ableitung am linken bzw. rechten Rand (Neumann-Randbedingung)
N	Anzahl der Dimensionen eines dynamischen Systems
N_1, N_2	Die zwei Nullstellen des Eigenwertes e_1 des linearisierten eindimensionalen dynamischen Systems
$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$	Die Trajektorien, die durch N_1 bzw. N_2 verlaufen
N_{PDE}	Anzahl der partiellen Differentialgleichungen
N_{pts}	Anzahl der Gitterpunkte
P_w, P_o	Druck des Wassers bzw. des Öls
\hat{P}_w, \hat{P}_o	dimensionsbehafteter Druck des Wassers bzw. des Öls
P_1, P_3	Druck der perkolierenden Wasser- bzw. Ölphase

Symbol	Beschreibung
\hat{P}_1, \hat{P}_3	dimensionsbehafteter Druck der perkolierenden Wasser- bzw. Ölphase
p_0	ein Punkt im Raum
P	Projektion eines Punktes auf eine Ebene
\hat{P}_2^*, \hat{P}_4^*	dimensionsbehaftete Parameter für die Grenzflächenkräfte des Wassers bzw. des Öls
P_c	makroskopische Kapillardruckbeziehung
\hat{P}_c	dimensionsbehaftete makroskopische Kapillardruckbeziehung
P_{c2}, P_{c4}	der vom nichtperkolierenden Wasser bzw. Öl abhängige Teil der makroskopischen Kapillardrucksbeziehung
$\hat{P}_{c2}, \hat{P}_{c4}$	dimensionsbehafteter vom nichtperkolierenden Wasser bzw. Öl abhängiger Teil der makroskopischen Kapillardruckbeziehung
\hat{P}_0^*	dimensionsbehafteter Eindringdruck des Wassers
$\hat{P}_{02}^*, \hat{P}_{04}^*$	dimensionsbehaftete Verschiebungskonstante des vom nichtperkolierenden Wasser bzw. Öl abhängigen Teiles der makroskopischen Kapillardruckbeziehung
\hat{P}_b	dimensionsbehafteter Durchbruchdruck
q	Volumenstromdichte
\hat{q}	dimensionsbehaftete Volumenstromdichte
q_w, q_o	Volumenstromdichte des Wassers bzw. des Öls
\hat{q}_w, \hat{q}_o	dimensionsbehaftete Volumenstromdichte des Wassers bzw. des Öls
q_2, q_4	Volumenstromdichte des nichtperkolierenden Wassers bzw. des nichtperkolierenden Öls
\hat{q}_2, \hat{q}_4	dimensionsbehaftete Volumenstromdichte des nichtperkolierenden Wassers bzw. des nichtperkolierenden Öls
q_{tot}	gesamter Volumenstrom
\hat{q}_{tot}	dimensionsbehafteter gesamter Volumenstrom
q_u, q_v, q_w	Volumenstromdichte der u -, v - bzw. w -Sättigung
Q	Quellfunktionsvektor für den numerischen Algorithmus
R	Flussfunktionsvektor für den numerischen Algorithmus
\hat{R}_{ij}	dimensionsbehafteter viskoser Kopplungskoeffizient zwischen Phase i und j

Symbol	Beschreibung
\hat{R}	dimensionsbehaftete viskose Kopplungsmatrix
R_i^1	Verhältnis zwischen \hat{R}_{11} und \hat{R}_{ii} mit $i = 2, 3, 4$
\mathcal{R}^u	Menge der reellen Nullstellen einer Gleichung
S_e	effektive Wassersättigung im DBRMMWBL-Modell
$S_{\mathbb{W}}, S_{\mathbb{O}}$	Sättigung des Wassers bzw. des Öls
S_i	Sättigung der i -ten Phase
$S_{\mathbb{W}}^m$	Wassersättigung für den Wendepunkt der Kapillardruckbeziehung
$S_{\mathbb{W}}^{\text{BL}}$	Wassersättigung für die maximale Buckley-Leverett-Stoßwelle
$S_{\mathbb{W}0}$	anfängliche Wassersättigung
S_{40}, S_{20}	anfängliche Sättigung des nichtperkolierenden Wassers bzw. des nichtperkolierenden Öls
$S_{\mathbb{W} \text{ dr}}, S_{\mathbb{O} \text{ im}}$	residuale Wasser- bzw. Ölsättigung des DBRMMWBL-Modells
$S_{\mathbb{W}}^*, S_{\mathbb{O}}^*$	begrenzende Sättigung für Wasser bzw. für Öl
S_2^*, S_4^*	begrenzende Sättigung für nichtperkolierendes Wasser bzw. für nichtperkolierendes Öl
$S_{\mathbb{W}}^{\ell}, S_{\mathbb{W}}^{\text{r}}$	links- und rechtsseitiger Grenzwert der Wassersättigung
$S_2^{\ell}, S_2^{\text{r}}$	links- und rechtsseitiger Grenzwert der nichtperkolierenden Wassersättigung
$S_4^{\ell}, S_4^{\text{r}}$	links- und rechtsseitiger Grenzwert der nichtperkolierenden Ölsättigung
\mathcal{S}	Menge der stationären Punkte eines dynamischen Systems
S_0	ein stationärer Punkt eines dynamischen Systems
\mathcal{S}_r	Menge der stabilen stationären Punkte eines dynamischen Systems
\mathcal{S}_ℓ	Menge der instabilen stationären Punkte eines dynamischen Systems
\mathcal{S}_m	Menge der Sattelpunkte eines dynamischen Systems
$\mathcal{S}_m^-, \mathcal{S}_m^+$	Menge der zweidimensionalen Sattelpunkte mit dem ersten Eigenwert größer bzw. kleiner als Null
$\mathcal{S}_m^{--}, \mathcal{S}_m^{+-},$ $\mathcal{S}_m^{+-}, \mathcal{S}_m^{++},$ $\mathcal{S}_m^{++}, \mathcal{S}_m^{++}$	Menge der dreidimensionalen Sattelpunkte, die Vorzeichen zeigen die Vorzeichen der drei Eigenwerte.

Symbol	Beschreibung
\mathcal{S}_z	Menge der stationären Punkte eines dynamischen Systems mit Eigenwerten gleich Null
t	Zeit
\hat{t}	dimensionsbehaftete Zeit
\tilde{t}	mit der makroskopischen Kapillarzahl skalierte Zeit
t_0	Anfangszeitpunkt
T	Endzeitpunkt
u	abstrakte Sättigung für Wasser
\hat{u}	dimensionsbehaftete makroskopische Geschwindigkeit
\mathbf{u}	Variablenvektor für den numerischen Algorithmus oder eines allgemeinen dynamischen Systems
u_0	Anfangswert der u -Sättigung
u_m, u_n	Überschusspunkt bzw. Terrassenpunkt in der u -Sättigung
u_d	u -Wert des Mittelpunktes zwischen dem stabilen und instabilen Fixpunkt
u_ℓ, u_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der u -Sättigung
U	dynamische Systemvariable
U_0	U -Wert eines stationären Punktes
U_ℓ, U_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der U -Variablen
U_m	U -Wert eines Sattelpunktes
\mathbf{u}_{fix}	Fixpunkte eines allgemeinen dynamischen Systems
\mathbf{u}_0	Anfangswerte von \mathbf{u}
$\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r$	links- und rechtsseitige Randwerte (Dirichlet-Randbedingungen)
v	abstrakte Sättigung für nichtperkolierendes Wasser bzw. für nichtperkolierendes Öl oder Fließgeschwindigkeit
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$	Vektoren, die eine Ebene aufspannen
$v_{\mathbb{W}}, v_{\mathbb{O}}$	Fließgeschwindigkeit des Wassers bzw. des Öls
v_t	Gesamtgeschwindigkeit
\hat{v}	dimensionsbehaftete Fließgeschwindigkeit
$\hat{v}_{\mathbb{W}}, \hat{v}_{\mathbb{O}}$	dimensionsbehaftete Fließgeschwindigkeit des Wassers bzw. des Öls
\hat{v}_{tot}	dimensionsbehaftete Gesamtgeschwindigkeit

Symbol	Beschreibung
v_0	Anfangswert der v -Sättigung
v_ℓ, v_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der v -Sättigung
v_m, v_n	Überschusspunkt bzw. Terrassenpunkt in der v -Sättigung
v_d	v -Wert des Mittelpunktes zwischen dem stabilen und instabilen Fixpunkt
V	dynamische Systemvariable oder Volumen
V_0	V -Wert eines stationären Punktes
V_m	V -Wert eines Sattelpunktes
V_ℓ, V_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der V -Variablen
V_ϕ	Volumen des Porenraums
w	abstrakte Sättigung für nichtperkolierendes Öl
w_0	Anfangswert der w -Sättigung
w_ℓ, w_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der w -Sättigung
w_n, w_m	Überschusspunkt bzw. Terrassenpunkt in der w -Sättigung
w_d	w -Wert des Mittelpunktes zwischen dem stabilen und instabilen Fixpunkt
W	dynamische Systemvariable
W_0	W -Wert eines stationären Punktes
W_m	W -Wert eines Sattelpunktes
W_ℓ, W_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der W -Variablen
$W_{\text{loc}}^s, W_{\text{loc}}^i$	lokale stabile bzw. instabile Untermannigfaltigkeit
x	Ort
\hat{x}	dimensionsbehafteter Ort
\tilde{x}	mit der makroskopischen Kapillarzahl skaliertes Ort
x_ℓ, x_r	Position des linken bzw. rechten Randes eines Gebietes
\hat{x}_ℓ, \hat{x}_r	dimensionsbehaftete Position des linken bzw. rechten Randes eines Gebietes
x_0	Referenzpunkt der räumlichen Diskretisierung
x_m, x_n	Position des linken bzw. rechten Randes eines Wellenprofils
x_0^u	Mittelpunkt der u -Welle
x_0^{u-v}	Mittelpunkt der $u - v$ -Welle

Symbol	Beschreibung
x_0^v	Mittelpunkt der v -Welle
x_0^w	Mittelpunkt der w -Welle
X	dynamische Systemvariable
X_0	X -Wert eines stationären Punktes
X_ℓ, X_r	links- und rechtsseitiger Grenzwert der X -Variablen
y	laufende Wellenvariable
\hat{y}	dimensionsbehaftete laufende Wellenvariable
y_0	Startpunkt der Integration über die laufende Wellenvariable
y_s	Position eines Sattelpunktes
y_m, y_n	Position des linken bzw. rechten Randes eines Wellenprofils in der laufenden Wellenvariablen
Y	dynamische Systemvariable
Y_0	Y -Wert eines stationären Punktes
Z	dynamische Systemvariable
Z_0	Z -Wert eines stationären Punktes
α	Exponent für die Kapillarkräfte des Wassers oder Freiheitsgrad
$\hat{\alpha}$	dimensionsbehafteter Van-Genuchten-Parameter
β	Exponent für die Kapillarkräfte des Öls oder Freiheitsgrad
γ	Exponent für die Grenzflächenkräfte des Wassers
Γ	Vektor zur Definition von Funktionen auf dem Rand für den numerischen Algorithmus
$\tilde{\Gamma}$	Vektor zur Definition von Differentialgleichungen erster Ordnung auf dem Rand für den numerischen Algorithmus
δ	Exponent für die Grenzflächenkräfte des Öls
Δ_j^i	Distanz zwischen den Mittelpunkten der i - und j -Welle mit $i, j \in \{u - v, u, v, w\}$
$\Delta_{k_u}, \Delta_{k_v}$	Diskriminante des quadratischen Polynoms zur Berechnung der stationären Punkte für u bzw. v mit nichtgekoppelten Burgerflüssen
ϵ_{tol}	Genauigkeitsschwelle

Symbol	Beschreibung
η_2, η_4	Faktor zur Skalierung des Massenaustausches zwischen perkolierender und nichtperkolierender Phase von Wasser bzw. Öl
Θ	Heaviside-Sprungfunktion
κ	Steilheit der Tangenshyperbolikuswelle
λ	Brooks-Corey-Parameter: Porenverteilungsindex oder Freiheitsgrad
$\lambda_{\mathbb{W}}, \lambda_{\mathbb{O}}$	Mobilität des Wassers bzw. des Öls
λ_2, λ_4	Mobilität des nichtperkolierenden Wassers bzw. des Öls
λ_{ij}	fraktionale Mobilitäten mit $i, j \in \{\mathbb{W}, 2, 4\}$
$\hat{\Lambda}$	dimensionsbehaftete Mobilitätsmatrix
μ	Viskosität oder Freiheitsgrad
$\hat{\mu}$	dimensionsbehaftete Viskosität
$\mu_{\mathbb{W}}, \mu_{\mathbb{O}}$	Viskosität des Wassers bzw. des Öls
$\hat{\mu}_{\mathbb{W}}, \hat{\mu}_{\mathbb{O}}$	dimensionsbehaftete Viskosität des Wassers bzw. des Öls
π	Platzhalter der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$
π_0	Wert des Platzhalters der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$ bei $-\infty$
$\hat{\Pi}_a^*, \hat{\Pi}_b^*$	dimensionsbehaftete Parameter für die Kapillarkräfte des Wassers bzw. des Öls
$\hat{\rho}$	dimensionsbehaftete Dichte
$\hat{\rho}_{\mathbb{W}}, \hat{\rho}_{\mathbb{O}}$	dimensionsbehaftete Dichte des Wassers bzw. des Öls
σ_{sm}	Glättungsfaktor für den numerischen Algorithmus
σ	Platzhalter der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$
σ_0	Wert des Platzhalters der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$ bei $-\infty$
$\hat{\Sigma}$	dimensionsbehafteter Spannungstensor
τ_{sm}	Glättungsfaktor für den numerischen Algorithmus
τ	Platzhalter der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$
τ_0	Wert des Platzhalters der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$ bei $-\infty$
ϕ	Porosität
ϕ_i	Volumenanteil der i -ten Phase
Φ	Fluss eines dynamischen Systems
χ	Platzhalter der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$

Symbol	Beschreibung
χ_0	Wert des Platzhalters der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$ bei $-\infty$
ψ	Platzhalter der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$
ψ_0	Wert des Platzhalters der primären Phasen $u - v, v, 1 - u - w, w$ bei $-\infty$
ω	Orbit eines dynamischen Systems

Zusammenfassung

Mehrphasenströmungen in porösen Medien sind in einer Vielzahl von Anwendungen und natürlichen Prozessen anzutreffen. Obwohl die Anwendungen der Theorie der Mehrphasenströmungen in porösen Medien äußerst zahlreich und in den letzten hundert Jahren intensiv erforscht worden sind, ist das Verhalten auf makroskopischer Skala bis heute nicht verstanden. Darunter sind insbesondere die Hysterese und die residualen Fluidkonfigurationen zu zählen. Hilfer stellt in *Physical Review E*, Vol. 73, 016307, 2006 ein Modell vor, das die zwei Phasen in jeweils perkolierende und nichtperkolierende Phasen unterteilt. Dies geht auf die Beobachtung zurück, dass eine Phase entweder auf einem zusammenhängenden Gebiet oder aber als Tröpfchen, Blasen oder Ganglien auf einem durch die Porenmatrix und das andere Fluid isolierten Teilgebiet existieren kann und ihre Dynamik ganz entscheidend von dieser Unterscheidung abhängt. Seitdem konnten Doster und Hilfer erste vielversprechende Erkenntnisse über und Ergebnisse für das Modell finden. Darunter waren z.B. hyperbolische Ähnlichkeitslösungen, wie das Buckley-Leverett-Problem für immobile nichtperkolierende Phasen.

Eine andere Ähnlichkeitslösung, nämlich die der laufenden Wellen, soll hier in dieser Arbeit auf das Modell angewandt werden. Laufende Wellen zeichnen sich dadurch aus, dass die Sättigungsprofile sich in der Form nicht ändern und sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen. Sie bedient sich der Theorie der dynamischen Systeme, um eine qualitative Beschreibung zu ermöglichen. Laufende Wellen sind zum einen interessant, weil sie in verschiedenen Experimenten beobachtet wurden, zum anderen aber auch, weil sie gewisse Schwierigkeiten im Buckley-Leverett-Problem beheben können.

Das traditionelle und das in *Physical Review E*, Vol. 73, 016307, 2006 vorgeschlagene Modell wird in einer Raumdimension vorgestellt. Für das neue Modell werden dabei einige Näherungen besprochen, um Systeme einer, zweier oder dreier dimensionsloser fraktionaler Flussgleichungen zu erhalten. Die aus einem laufenden Wellenansatz dieser Systeme gewonnenen Gleichungen werden mit einer dynamischen Systembeschreibung besprochen. Zuletzt werden Lösungen gezeigt, die direkt aus den partiellen Differentialgleichungen durch einen numerischen Algorithmus berechnet werden können. Hierbei werden geeignete Anfangs- und Randwerte gesucht, die stabile laufende Wellen ermöglichen.

In *Transport in Porous Media*, Vol. 44, pp. 507-537, 2001 wurden von Brevdo et al. vier topologisch unterschiedliche laufende Wellenprofilklassen für das traditionelle Modell gefunden. In dieser Dissertation wird nun gezeigt, dass die Annahme, dass der Wasserfluss überall zu jeder Zeit stetig ist, zu Bedingungen führt, die die nichtdifferenzierbaren Wellenprofilklassen entweder auf ein bezüglich der Randwertsättigungen und der Geschwindigkeit eindeutiges Profil reduziert oder aber komplett ausschließt. Dies hängt vom Verhalten der Flussfunktionen und der Kapillarfunktionen ab. Bei den Parametrisierungsmodellen nach Brooks und Corey und nach Van Genuchten werden die nichtdifferenzierbaren Lösungsklassen ausgeschlossen. Die überall stetig differenzierbare Klasse besitzt die Eigenschaft, dass ihre Profile eindeutig durch die Randwertsättigungen und die Geschwindigkeiten bestimmt werden. Damit ist es in dieser Arbeit gelungen, alle qualitativen Informationen der laufenden Wellenlösung in nur einer Abbildung darzustellen, während Brevdo et al. für jede Geschwindigkeit ein Phasenportrait benötigen. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse können direkt auf das Perkolationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Sättigungen angewandt werden. Die Ergebnisse unterscheiden sich im Vergleich zum traditionellen Modell darin, dass primäre und sekundäre Bewässerungen unterschieden werden können, was zu verschiedenen Geschwindigkeiten führt. Desweiteren kann ein tieferes Verständnis der laufenden Wellenprozesse gewonnen werden, indem das Verhalten der nichtperkolierenden Phasen untersucht wird. Zuletzt ist es nun möglich, ein komplett trockenes Medium mit einer überall stetig differenzierbaren Welle zu bewässern.

Wenn die nichtperkolierenden Phasen mobil sein können, dann müssen zusätzliche Näherungen getroffen werden, um eine dynamische Systembeschreibung des laufenden Wellenansatzes zu ermöglichen. So muss die Kapillarität vereinfacht werden. Die Ergebnisse zeigen, dass es zu nichtmonotonomem Verhalten in allen vier Phasen kommen kann. Außerdem können sich Überschusslösungen in der Wassersättigung ergeben. Es werden für verschieden starke Näherungen Lösungen gezeigt, die die Auswirkungen einzelner Aspekte, wie die der gekoppelten Flüsse oder die des Massenaustausches, beleuchten. Die gekoppelten Flüsse spielen gerade bei den Überschusslösungen in der Wassersättigung eine herausragende Rolle. Die Massenaustauschsterme können je nachdem, ob sie als Quellen oder Senken dienen, Überschüsse oder Unterschüsse in den einzelnen Phasen zulassen. Da sie jedoch nur zwischen den perkolierenden und nichtperkolierenden Phasen einer Flüssigkeit vorkommen, lassen sie die Wassersättigungsprofile monoton. Mit Hilfe eines numerischen Algorithmus⁷ lassen sich geeignete Anfangs- und Randwerte finden, die in stabilen laufenden Wellenlösungen enden. Bei weniger restriktiven Annahmen kommen entweder ein oder zwei Freiheitsgrade hinzu. Dabei ist die Eindeutigkeit für gegebene Randwerte im Gegensatz zu den Lösungen für das traditionelle Modell nicht mehr gegeben. Dies geht auf die zusätzlichen Freiheitsgrade in den

Anfangsbedingungen dreier oder vierer Phasen zurück, die entstehen, indem man die Wellen der einzelnen Phasen relativ zueinander verschieben kann.

Summary

Multiphase flow in porous media is present in a variety of applications and natural processes. Although the applications of the theory of multiphase flow in porous media are very high in number and they have been subject to intense research over the last century, the macroscopic behaviour is far from being understood. Especially, the hysteresis and the residual fluid configurations on macroscopic scales are accountable for this shortcoming. In *Physical Review E*, Vol. 73, 016307, 2006, Hilfer presented a model that splits up each of the two fluid phases into a percolating and nonpercolating phase. This goes back to the observation that a fluid can exist either on a connected region or as droplets, bubbles or ganglia on a by the rock matrix and the other fluid isolated subregion and that its dynamics highly depend on that distinction. Since then, first promising results and insights about this model have been reached by Doster and Hilfer. These include e.g. hyperbolic similarity solutions such as the Buckley-Leverett problem for the limit of immobile nonpercolating fluid parts.

Applying a different similarity solution, namely the travelling waves, on this new proposed model is subject to this thesis. Travelling waves are saturation profiles which propagate with a constant velocity without changing their shape. This approach employs the theory of dynamical systems to enable a qualitative description of the solutions. Travelling waves are of interest not only because they are observed in many experiments, but also because they can resolve some problems present in the Buckley-Leverett theory.

In the first part of the thesis, the traditional and the newly in *Physical Review E*, Vol. 73, 016307, 2006 proposed model are introduced in one spatial dimension. Some approximations are implemented for the new model to obtain systems of one, two or three dimensionless fractional flow equations. They are consecutively discussed in a quantitative manner applying a dynamical system approach within the framework of a travelling wave ansatz in the second part of the thesis.

The first chapter of the second part starts by discussing travelling waves of the traditional model with Brooks and Corey and with Van Genuchten parameter functions. This was partly already done in *Transport in Porous Media*, Vol. 44, pp. 507-537, 2001 by Brevdo et al. for

the linear and Brooks and Corey parameter functions. They found four topological different profile classes, where three of them had kinks and only one is everywhere continuous differentiable. This thesis shows that if one assumes a permanent continuous water flux on the whole domain, then only the everywhere continuous differentiable profile class is valid under the parametrizations of Brooks and Corey and of Van Genuchten. It is noted that theoretical models with certain conditions could lead to profiles with kinks which are unique in their boundary saturations and their velocity. In this work, only the everywhere continuous differentiable profile class is therefore discussed in full detail. Moreover, considering only this class gives new opportunities to qualitatively describe all possible solutions, especially the unique correspondence between the boundary saturations and the velocity. These methods are applied on the limit of immobile nonpercolating phases of the percolation model. Three positive differences can be identified. First, it is possible now to distinguish between primary and secondary imbibition leading to significantly different velocities. Second, one gets insights into the behaviour of nonpercolating fluid parts during travelling wave processes. Third, everywhere continuous differentiable imbibitions into a completely dry medium are possible now.

The second and third chapter of the second part shows that a travelling wave approach is suitable to the new model when either one or two nonpercolating phases are present and mobile, but only under additional approximations. The capillarity need to be decoupled, otherwise a dynamical system cannot be formulated. Additionally, the decoupled capillarity coefficient is taken as a positive constant because it does not change the qualitative solution as long as there is no change in sign. The aspect of mass exchange and the aspects of coupled flux functions are discussed separately. Mass exchange depending on its sign can serve as a sink or source. That can lead to undershoot or overshoot solutions in all of the four phases, but it cannot lead to an overshoot or undershoot in water saturation because mass exchange only appears between percolating and nonpercolating phases of a fluid. Coupled flux functions instead give solutions which not only show overshoots in the phases, but also in the water saturation. It can be seen that in the most general case of systems of three equations, there are invariant lower dimensional submanifolds which help to structure the whole phase space. Moreover the systems of two equations can be found on them. In the single equation systems, there was a unique correspondence between the boundary saturations and the velocity. This is lost here because one or two degrees of freedom appear.

Finally, in the last chapter of the second part, solutions are shown that are directly carried out of the partial differential equations by a numerical algorithm. All profiles found in the previous part can be seen numerically and all of them appear stable. The additional degrees of freedom in the systems of two or three equations can be found in the initial conditions

where it is possible to shift the initial profiles relatively to each other. The reason for the water overshoots can be identified and described by the coupled fluxes.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Eine Vielzahl von Anwendungen und natürlichen Prozessen wird durch Mehrphasenströmungsmodellen in porösen Medien beschrieben. Sie reichen von älteren Anwendungen wie der Ölförderung [Engl 87] und der Altlastensanierung von kontaminierten Böden [Zhan 02] bis hin zu neuentstandenen Anwendungen wie der CO₂-Verpressung [Ebig 07] und dem Wassermanagement von Brennstoffzellen [Pasa 04]. Weitere Anwendungsgebiete können den Arbeiten [Bear 72, Sche 74, Dull 92, Helm 97] entnommen werden. Aus physikalischer Sicht können die Skalenwechsel, die bei den Mehrphasenströmungen in porösen Medien auftreten, Erkenntnisse über Mittlungs- und Homogenisierungsverfahren liefern, die bei anderen nichtlinearen Prozessen wertvoll sind [Dost 11c].

Obwohl die Anwendungen der Theorie der Mehrphasenströmungen in porösen Medien äußerst zahlreich und in den letzten hundert Jahren intensiv erforscht worden sind, ist das Verhalten auf makroskopischer Skala bis heute nicht verstanden [Hilf 96a, Anto 99, Babc 08, Dein 08, Naum 08].

Das am weitesten verbreitete makroskopische Modell für Mehrphasenströmungen in porösen Medien wird in dieser Arbeit als DBRMMWBL-Modell bezeichnet. Die Bezeichnung ergibt sich aus den Anfangsbuchstaben der Nachnamen der Personen, die zu diesem Modell etwas beigetragen haben: Darcy [Darc 56], Buckingham [Buck 07], Richards [Rich 31], Muskat und Meres [Musk 36], Wyckoff und Botset [Wyck 36] und Leverett [Leve 41]. Die Unbekannten sind die Sättigungen, die makroskopische Drücke und die Volumenströme der Fluide. Das Gleichungssystem setzt sich aus den Volumen-, Masse- und Impulserhaltungssätzen und gewissen Konstitutivannahmen zusammen. Die Konstitutivgleichungen bestehen aus der Kapillardrucksättigungsbeziehung und den relativen Permeabilitäten. Diese werden in dem Modell ausschließlich als Funktion der Sättigung angenommen. Es zeigt sich jedoch, dass sie von der Prozessgeschichte [Mual 73, Klou 92], von den Strömungsgeschwindigkeiten [Abra 75, Shen 92], von dynamischen Effekten [Hass 02, Tsak 07], von den Grenzflächen [Marl 82]

und der Verbundenheit der Fluide [Avra 95b, Avra 95a, Anto 99] abhängen. Dies führt dazu, dass die Konstitutivfunktionen stark hysteresebehaftet sind. Desweiteren gehen die residuellen Sättigungen als Konstanten in das DBRMMWBL-Modell ein, obwohl bereits in [Wyck 36] gezeigt wurde, dass diese bei verschiedenen Prozessen stark variieren können. Dies alles führt dazu, dass das Modell die wahre Natur der Mehrphasenströmungen in porösen Medien nicht wiedergeben kann und auf sehr einfache Problemstellungen beschränkt ist.

Wegen dieser Unzulänglichkeiten des DBRMMWBL-Modells wurde über die Jahre eine Vielzahl an Alternativen vorgeschlagen. Sie reichen von rein heuristischen Hysterese-Modellen [Mual 74] über Hinzufügen dynamischer Terme in den Parameterfunktionen [Hass 02] bis zum Einführen zusätzlicher Unbekannten wie Grenzflächendichten [Nies 08]. Den Hysterese-Modellen lastet das Problem an, dass man a priori die Prozesse, wie Be- und Entwässerung, kennen muss, um die Parameter zu bestimmen. Dies ist bei komplexen Problemen nicht möglich. Bei den Arbeiten von [Nies 08] sind die Gleichungssysteme von solch einer Komplexität, dass sie ohne extrem starke, häufig physikalisch unbegründbare Näherungen weder analytisch noch numerisch gelöst werden können. Damit verliert das Modell seine Aussagekraft.

Eine andere Alternative ist in den Arbeiten [Hilf 06b, Hilf 06a, Hilf 06c] vorgestellt worden. Die Idee ist, dass die zwei Phasen in jeweils perkolierende und nichtperkolierende Phasen unterteilt werden, weswegen das Modell hier Perkolationsmodell genannt wird. Es erweitert die früheren Artikel [Hilf 98, Hilf 00]. Diese Idee geht auf die Beobachtung zurück, dass eine Phase entweder auf einem zusammenhängenden Gebiet oder aber als Tröpfchen, Blasen oder Ganglien auf einem durch die Porenmatrix und das andere Fluid isolierten Teilgebiet existieren kann [Dias 86a, Dias 86b, Moge 98], und ihre Dynamik ganz entscheidend von dieser Unterscheidung abhängt [Avra 95b, Avra 95a, Anto 99]. Ein Zweiphasenmodell wird somit zu einem Vierphasenmodell. Es werden für jede Phase makroskopische Erhaltungssätze für Volumen, Masse und Impuls aufgestellt und mit geeigneten Konstitutivannahmen in ein System von zehn gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen überführt. Das Modell kommt ganz ohne mit Hysterese behafteten Kapillardrucksättigungsbeziehungen und relativen Permeabilitäten aus. Diese können jedoch unter gewissen Näherungen als Ergebnis hergeleitet werden [Hilf 06b].

Die neueren Arbeiten [Dost 11c, Dost 10, Dost 11b, Hilf 10] liefern erste Erkenntnisse und Ergebnisse über das Perkolationsmodell, sowohl auf physikalischer, wie auch auf mathematischer Seite. Dabei wurden zum einen numerische Algorithmen entwickelt und zum anderen Anfangs- und Randwertprobleme formuliert, für die analytische Ähnlichkeitslösungen gefunden werden konnten. Allen analytischen Ähnlichkeitslösungen liegt die Näherung der immobilen nichtperkolierenden Phasen zugrunde. Der erste Teil behandelt den hyperbolischen

Limes und hat die Ähnlichkeitsvariable Ort über Zeit. Im Zusammenhang mit Mehrphasenströmungen in porösen Medien wird er auch Buckley-Leverett-Problem genannt [Leve 41], nachdem Buckley und Leverett als erste den Kapillardruck vernachlässigt haben. Diese Annahme ist besonders in der Ölförderung, wo hohe Drücke auftreten, weit verbreitet. Der zweite Teil liegt dem diffusiven Limes zugrunde und hat die Ähnlichkeitsvariable Ort über die Wurzel der Zeit. Damit werden die Anfangs- und Randwertprobleme von McWhorter-Sunada [McWh 92] und von Philip [Phil 91] besprochen.

In dem Buckley-Leverett-Problem können unstetige Stoßwellen als Lösung vorkommen, die das Problem der schwachen Lösung und der Nichteindeutigkeit innehaben. Dies kann mit der verschwindenden Viskositätslösung, die einen laufenden Wellenansatz verwendet, behoben werden [Duij 01]. Die zweite Klasse von Lösungen des Buckley-Leverett-Problems, die der Verdünnungswellen, kann damit nicht besprochen werden. Da Verdünnungswellen jedoch stetig differenzierbar und damit eindeutig sind, ist die Tatsache, dass sie im Gegensatz zu Stoßwellen nicht als laufende Wellen darstellbar sind, kein Problem für einen laufenden Wellenansatz.

Das Untersuchen von laufenden Wellenlösungen ist ein wichtiger Beitrag für das mathematische Verständnis nichtlinearer diffusiver und konvektiver Prozesse [Volp 94, Gild 01], die von parabolischen partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Ihre Anwendungen finden sich unter anderem in der Fluidodynamik, der Plasmaphysik, der Biologie und der Chemie [Beki 09]. Der laufende Wellenansatz wurde erstmals in [Kolm 37] für die Fishers-Gleichung, die die Populationsdynamik von bestimmten Genen beschreibt, angewandt. Wenn, wie für nichtlineare parabolische partielle Differentialgleichungen, weder eine explizite Lösung, noch eine umfassende Theorie vorhanden ist, so versucht man zunächst Sonderfälle, d.h. Anfangs- und Randwertprobleme, zu finden, in denen die Komplexität des Problems reduziert werden kann [Gild 96]. Dies kann über Ähnlichkeitslösungen geschehen, wovon die bekannteste die laufende Wellenannahme ist. Sie besagt, dass sich ein Profil mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung fortbewegt. Dabei wird ein konstanter Fluss angenommen, welcher durch konstante Randwertbedingungen in den Sättigungen mathematisch implementiert wird. In [Bare 72] wurde dargelegt, dass diese Lösungen zusätzlich das asymptotische Verhalten einer umfassenderen Klasse von Anfangs- und Randwertproblemen sein können. Mit der laufenden Wellentransformation können die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt werden, für die es zwar auch keine explizite Lösung, aber mit den dynamischen Systemen eine Theorie gibt, die eine qualitative Beschreibung der globalen Lösung liefern kann [Perk 93]. Diese dynamischen Systeme sind an sich schon von großem mathematischen Interesse und haben ihrerseits spannende Anwendungen in dem Bereich der Physik, der Biologie und der Chemie [Jord 99]. Besonders bei

nichtlinearen Systemen höherer Ordnung existiert keine umfassende allgemeine Theorie, und dementsprechend kann jedes Einzelbeispiel neue Erkenntnisse liefern.

Aus Sicht der Physik sind die laufenden Wellenlösungen des Perkolationsmodells von Bedeutung, da es einige Phänomene gibt, die bis zum jetzigen Zeitpunkt nicht verstanden sind. So zeigen verschiedene Experimente [Geig 00, DiCa 00, DiCa 04, DiCa 07, DiCa 08], in denen eine gravitationskraftgetriebene Bewässerung einer mit Luft gefüllten Sandpackung stattfindet, nichtmonotone laufende Wellen. Die Arbeiten von [Elia 01, Elia 02] haben jedoch gezeigt, dass das DBRMMWBL-Modell in diesem Zusammenhang ausschließlich monotonen Verhalten darstellen kann. Daraufhin sind in verschiedenen Arbeiten [Cues 00, Nieb 05, Sand 08, Cuet 09a, Mike 10] Alternativen vorgestellt worden, die die Experimente nachbilden können. Allen ist gemeinsam, dass sie höhere Ordnungsterme in die partielle Differentialgleichung einführen, mit denen sich das komplexere Verhalten beschreiben lässt. Die physikalischen Erklärungen für diese Terme kommen zum einen aus dem Modell des dynamischen Kapillardrucks [Hass 93] und zum anderen aus der Theorie des Fließens eines dünnen Films auf einer schrägen Platte [Hupp 82]. Eine physikalisch befriedigende Erklärung können sie jedoch nicht liefern.

1.2 Problemstellung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist zum einen die Beschreibung der laufenden Wellenlösungen im DBRMMWBL-Modell [Brev 01] und zum anderen das Perkolationsmodell, das in [Hilf 06b, Hilf 06a, Hilf 06c] vorgestellt wurde und in [Dost 11c, Dost 10, Dost 11b, Hilf 10] erste Lösungen lieferte. Es sollen folgende Fragen untersucht werden:

- Inwieweit ist eine dynamische Systembeschreibung des laufenden Wellenansatzes des Modells möglich?
- Müssen zusätzliche Vereinfachungen getroffen werden, um eine dynamische Systembeschreibung zum Lösen der laufenden Wellengleichungen durchführen zu können?
- Können qualitativ unterschiedliche Lösungen im Vergleich zu den Lösungen im DBRMMWBL-Modell gefunden werden?
- Welche der verschiedenen Gleichungsterme, sprich Konvektion, Kapillarität und Massenaustausch, beeinflussen das Verhalten der laufenden Wellen?
- Sind die analytisch gefundenen laufenden Wellen stabil?

- Welche speziellen Anfangs- und Randwerte müssen gewählt werden, um laufende Wellen erzeugen zu können?

Es sei darauf hingewiesen, dass in dieser Arbeit ausschließlich Bewässerungswellen besprochen werden. Entwässerungswellen können jedoch auf die gleiche Art und Weise diskutiert werden.

1.3 Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen, denen ein Grundlagenkapitel vorangestellt ist. In diesem werden die Begriffe und die Gleichungen von Einphasenströmungen in porösen Medien, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen und die qualitative Beschreibung gewöhnlicher Differentialgleichungen durch die Theorie der dynamischen Systeme kurz im Hinblick auf ihre Verwendung in dieser Dissertation dargestellt.

Der erste Teil stellt zwei Mehrphasenströmungsmodelle vor. Beide werden hier auf eine Raumdimension beschränkt. Es werden ihre grundlegenden Gleichungen und Konstitutivannahmen erörtert. Danach werden ihre Gleichungen reduziert, entdimensionalisiert und in eine fraktionale Flussformulierung gebracht, mit der man einen laufenden Wellenansatz durchführen kann.

Das erste Kapitel des ersten Teils beschreibt das traditionelle und am weitesten verbreitete Modell für Mehrphasenströmungen in porösen Medien, das hier als DBRMMWBL-Modell bezeichnet wird. Dabei werden zusätzlich die Kritikpunkte genannt, die zur Entstehung weiterer Modelle geführt haben.

Das zweite Kapitel des ersten Teils beschreibt das Perkolationsmodell, das in den Arbeiten [Hilf 06a, Hilf 06b, Hilf 06c] eingeführt wurde. Es werden dabei einige Näherungen besprochen, um Systeme einer, zweier oder dreier fraktionaler Flussgleichungen zu erhalten.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt laufende Wellenlösungen für die im vorigen Teil hergeleiteten Gleichungen. Er ist in vier Kapitel unterteilt. Die ersten drei beschäftigen sich mit quasianalytischen Lösungen, d.h. mit Lösungen, die sich aus dem laufenden Wellenansatz im Rahmen einer qualitativen dynamischen Systembeschreibung gewinnen lassen. Das letzte Kapitel zeigt Lösungen, die direkt aus den partiellen Differentialgleichungen durch einen numerischen Algorithmus berechnet worden sind.

Im ersten Kapitel des zweiten Teils werden laufende Wellenlösungen für Systeme, die aus einer Gleichung bestehen, gefunden. Diese Gleichung beschreibt zum einen das DBRMMWBL-Modell und zum anderen die Näherung der immobilen nichtperkolierenden Phasen des Perkolationsmodells.

Im zweiten Kapitel des zweiten Teils werden laufende Wellenlösungen für Systeme, die aus zwei Gleichungen bestehen, gefunden. Diese Systeme beschreiben die Näherung des Perkolationsmodells, dass eine der nichtperkolierenden Phasen nicht existiert. Die Gleichungen können nicht ohne weitere Näherungen gelöst werden. Zunächst wird eine lineare Kapillarität angenommen. Dann wird zum einen ein entkoppelter Burgerfluss besprochen, um die möglichen Auswirkungen von Massenaustauschtermen zu untersuchen, und zum anderen der Massenaustauschterm entfernt, um gekoppelte Flüsse zu diskutieren.

Im dritten Kapitel des zweiten Teils werden laufende Wellenlösungen für Systeme, die aus drei Gleichungen bestehen, gefunden. Diese Systeme beschreiben das volle Perkolationsmodell. Es müssen jedoch Näherungen getroffen werden, damit sie gelöst werden können. Dabei wird eine lineare Kapillarität und nichtexistierender Massenaustausch angenommen. Damit können die Lösungen diskutiert werden, die sich aus den gekoppelten Flussfunktionen ergeben.

Das letzte Kapitel des zweiten Teils zeigt numerische Lösungen der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen und kann offene Fragen bezüglich Anfangs- und Randwertbedingungen, zusätzlicher Freiheitsgrade und Stabilität der Wellen des quasianalytischen Teils beantworten.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen besprochen, auf denen diese Arbeit aufbaut. Dabei werden im ersten Abschnitt grundlegende Begriffe und Konzepte von Strömungen in porösen Medien eingeführt. Im zweiten Abschnitt wird ein kurzer Überblick über Einphasenströmungen gegeben. Der dritte und vierte Abschnitt beschäftigt sich mit den mathematischen Grundlagen der partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen und deren qualitative Beschreibung durch die Theorie der dynamischen Systeme.

2.1 Grundbegriffe bei Strömungen in porösen Medien

Ein poröses Medium ist ein Medium, das aus einem Festkörper mit Hohlräumen besteht. Der Bereich des Festkörpers wird Skelett oder Matrix und der Bereich der Hohlräume wird Porenraum genannt. Wenn man an Strömungen in porösen Medien interessiert ist, so wird normalerweise nur der Porenraum betrachtet, der für Strömungen zugänglich ist. Damit definiert man die **Porosität** ϕ als Volumenanteil diesen Porenraums V_ϕ am Gesamtvolumen V

$$\phi = \frac{V_\phi}{V} \quad (2.1)$$

eines Gebietes.

Als eine **Phase** wird ein räumlicher Bereich bezeichnet, dessen physikalische und chemische Parameter homogen sind. Dabei wird normalerweise nicht nur zwischen verschiedenen Stoffen, sondern auch zwischen ihren verschiedenen Aggregatzuständen unterschieden. Desweiteren können noch abstraktere Unterscheidungen, wie z.B. bezüglich ihrer Konnektivität mit den Rändern, in Betracht gezogen werden. Dies wird noch bei der Definition des Perkolationsmodells von großer Bedeutung sein.

Bei Strömungen in porösen Medien können vier verschiedene **Skalen** unterschieden werden. Die kleinste Skala ist die Molekularskala, die sich im Nanometerbereich bewegt und bei der

einzelne Moleküle sichtbar sind. Die nächstgrössere ist die Porenskala, die den Millimeterbereich abdeckt und bei der man jede einzelne Pore sieht. Auf dieser Skala kann man die Strömungen klassisch mit den Navier-Stokes-Gleichungen auf der Porenraumgeometrie lösen. Dies ist jedoch sehr rechenintensiv und kann auf großen Gebieten nicht angewandt werden. Die nächste Skala ist die Laborskala, die sich auf Grössen von Zentimetern bis Metern bezieht. Hierbei wird über alle physikalischen Grössen gemittelt und es geht die exakte Beschreibung des Porenraums verloren. Diese Mittelung führt zu neuen Variablen, wie die der **Sättigung**. Sie ist definiert als der Volumenanteil einer Phase V_i an dem Porenraum V_ϕ , d.h.

$$S_i = \frac{V_i}{V_\phi} \quad (2.2)$$

Eine entscheidende Frage ist nun, auf welchen Volumina es Sinn macht, diese Mittelung durchzuführen. Dabei wird das Konzept eines **repräsentativen Elementarvolumens** eingeführt. Es bezeichnet das minimale Volumen, auf denen sich die Mittelwerte definieren lassen, so dass sie sich bei geringer Veränderung des Volumens auch nur geringfügig verändern. Die größte Skala ist die Feldskala, die die Bereiche Meter bis Kilometer betrachtet. Bei ihr werden nochmals alle Grössen gemittelt. Es wird meistens angenommen, dass sich die Physik der Labor- und Feldskala nicht unterscheidet.

Diese Arbeit wird sich ausschließlich mit der Laborskala befassen. Die Gleichungen auf dieser Skala werden aus der Theorie der **Kontinuumsmechanik** gewonnen. Sie ist eine phänomenologische Feldtheorie. Ihr liegt die Näherung zugrunde, dass die diskrete Struktur der Materie als Kontinuum angenommen wird, d.h. alle physikalischen Grössen werden als stetige Funktionen auf der Raumzeit betrachtet. Die Feldvariablen sind hierbei Dichten der physikalischen Variablen, wie Dichte und Impuls. Die Gleichungen werden zum einen aus den verschiedenen Erhaltungssätzen der Masse, des Impulses, des Drehimpulses und der Energie und zum anderen, falls die Gleichungen nicht ausreichen, um die zahlreichen physikalischen Variablen eindeutig zu bestimmen, aus Konstitutivannahmen, die häufig gewisse Materialeigenschaften beinhalten, gewonnen.

Wegen der Existenz einer Unzahl an Lehrbüchern, die sich mit Kontinuumsmechanik [Grev 03, Alte 94, Beck 75] und porösen Medien [Dull 92, Bear 72, Sche 74] beschäftigen, wird auf eine detailliertere Behandlung verzichtet.

2.2 Einphasenströmungen in porösen Medien

Im Jahre 1856 führte Henry Darcy [Darc 56] Experimente zum Fließverhalten eines Fluides in einer mit Sand gefüllten vertikalen Säule durch. Diese Sandpackung stellt ein homogenes isotropes poröses Medium dar. Er beobachtete, dass der Volumenfluss des Fluides proportional zum hydraulischen Potentialabfall ist, der sich aus dem hydrostatischen Druck und dem Gravitationspotential zusammensetzt. Damit lautet das eindimensionale **Darcy-Gesetz** in differentieller Form

$$\hat{q} = -\hat{K} \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial x} - \hat{\rho} \hat{g} \right), \quad (2.3)$$

dabei bezeichnet \hat{q} die Volumenstromdichte, \hat{P} den Druck, $\hat{\rho}$ die Dichte, \hat{g} die Schwerebeschleunigung und \hat{K} die hydraulische Leitfähigkeit als Proportionalitätskonstante. Sie kann normalerweise in einen mediums- und fluidabhängigen Teil zerlegt werden. Dabei wird die vom Medium abhängige Permeabilität \hat{k} durch die vom Fluid abhängige Viskosität μ geteilt.

Obwohl das Darcy-Gesetz empirisch aufgestellt wurde, kann es für einfache Geometrien durch Homogenisierung hergeleitet werden. Die zwei bekanntesten Modelle hierfür sind das gerade gleichförmige parallele Kapillarmodell und das Konzept der mittleren hydraulischen Radien. Über die Zeit sind jedoch auch noch kompliziertere Modelle entwickelt worden, um das Gesetz herzuleiten und die hydraulische Leitfähigkeit theoretisch zu bestimmen [Bear 72]. Wenn man das Darcy-Gesetz in die Massenerhaltung einsetzt, dann erhält man unter der Annahme der Inkompressibilität eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung, die für laminare Strömungen Gültigkeit besitzt.

Auch hier wird der Leser wieder für eine genauere Beschreibung auf die Literatur [Dull 92, Bear 72, Sche 74] verwiesen. Modelle für Mehrphasenströmungen werden ausführlich im ersten Teil dieser Arbeit diskutiert.

2.3 Partielle Differentialgleichungen

Die Gleichungen für Strömungen in porösen Medien werden wie bei allen kontinuumsmechanischen Gleichungen mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben. Deswegen soll hier eine kleine Einführung in den für diese Arbeit relevanten Bereich der partiellen Differenti-

algleichungen gegeben werden. Weitere Informationen können z.B. aus [Munz 05, Evan 98] entnommen werden.

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine von mehreren Variablen abhängige unbekannte Funktion $\mathbf{u}(\cdot)$, die partielle Ableitungen dieser Funktion beinhaltet. Diese Variablen sind in der Physik meistens die Zeit t und die Raumvariable x , wenn man sich wie in der gesamten Arbeit auf eindimensionale Probleme beschränkt. Lösungen für die unbekannte Funktion $\mathbf{u}(x, t)$ auf einem Gebiet $\mathcal{D} = [x_\ell, x_r] \times [0, T]$ zu finden, ist Gegenstand der Theorie der partielle Differentialgleichungen. Dabei ist die **Existenz** und **Eindeutigkeit** dieser Lösung in den meisten Fällen ein offenes Problem der Mathematik. Für einfache Spezialfälle ist diese Problematik jedoch zum Teil gelöst worden. Deswegen beschränkt sich dieser Abschnitt auf partiellen Differentialgleichungen, die den physikalischen Gleichungen dieser Arbeit sehr ähnlich sind.

Die **Ordnung** einer Differentialgleichung gibt die höchste Ordnung der vorkommenden Ableitungen an. In dieser Arbeit wird die Ordnung immer kleiner gleich 2 sein. Partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung für die Funktion $\mathbf{u}(x, t)$ haben folgende Form

$$\begin{aligned} a_{xx}(x, t, \mathbf{u}, \cdot) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + a_{xt}(x, t, \mathbf{u}, \cdot) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial t} + a_{tt}(x, t, \mathbf{u}, \cdot) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \\ + a_x(x, t, \mathbf{u}, \cdot) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + a_t(x, t, \mathbf{u}, \cdot) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + a(x, t, \mathbf{u}, \cdot) \mathbf{u} = \mathcal{F}(x, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei die $a(x, t, \mathbf{u}, \cdot)$ Koeffizientenfunktionen sind. Falls alle Koeffizientenfunktionen maximal von den Variablen x und t abhängig sind, dann spricht man von einer linearen partiellen Differentialgleichung. Falls alle a_{ij} , d.h. die Koeffizientenfunktionen der höchsten Ordnung, maximal von den Variablen x und t abhängig sind, dann spricht man von einer semilinearen partiellen Differentialgleichung. Falls alle a_{ij} maximal von den Variablen x und t und der Funktion \mathbf{u} abhängig sind, dann spricht man von einer **quasilinearen** partiellen Differentialgleichung. Ansonsten spricht man von einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung.

Wenn nun die Diskriminante $\mathfrak{D}(x, t, \mathbf{u})$ durch

$$\mathfrak{D}(x, t, \mathbf{u}) = a_{xt}(x, t, \mathbf{u})^2 - 4a_{xx}(x, t, \mathbf{u})a_{tt}(x, t, \mathbf{u}) \quad (2.5)$$

definiert wird, dann heisst die quasilineare partielle Differentialgleichung an der Stelle (x, t, \mathbf{u})

- **elliptisch**, falls $\mathfrak{D}(x, t, \mathbf{u}) < 0$,
- **parabolisch**, falls $\mathfrak{D}(x, t, \mathbf{u}) = 0$,
- **hyperbolisch**, falls $\mathfrak{D}(x, t, \mathbf{u}) > 0$.

Der Typ einer partiellen Differentialgleichung kann sich also über die Zeit und den Raum verändern. Elliptische partielle Differentialgleichungen sind z.B. die Laplace- und Poisson-Gleichung. Parabolische partielle Differentialgleichungen sind z.B. die Wärmeleitungs- und Black-Scholes-Gleichung. Ein Beispiel für eine hyperbolische partielle Differentialgleichung ist die lineare Wellengleichung. In dieser Arbeit sind alle partiellen Differentialgleichungen parabolisch.

Ohne **Anfangs-** und/oder **Randwertbedingungen** sind partielle Differentialgleichungen nicht eindeutig. Welche Bedingungen benötigt werden, hängt von dem Typ der partiellen Differentialgleichungen ab. Weil in dieser Arbeit nur parabolische partielle Differentialgleichungen vorkommen, beschränkt sich dieser Abschnitt darauf. Für parabolische partielle Differentialgleichungen benötigt man immer Anfangs- und Randwertbedingungen. Dabei sind die **Anfangswerte** zum Zeitpunkt $t = 0$ immer auf dem gesamten Gebiet gegeben

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \quad (2.6)$$

Die Randwerte können entweder über die **Dirichlet-Randbedingung**, d.h. über die Funktionswerte am Rand

$$\mathbf{u}(x_\ell, t) = \mathbf{u}_\ell(x), \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{u}(x_r, t) = \mathbf{u}_r(x), \quad (2.7b)$$

oder über die **Neumann-Randbedingung**, d.h. über die räumliche Ableitung der Funktion am Rand

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_\ell} = n_\ell(x), \quad (2.8a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_r} = n_r(x) \quad (2.8b)$$

gegeben werden. Alle partiellen Differentialgleichungen, die in dieser Arbeit gelöst werden, sind mit Anfangswertbedingungen und Dirichlet-Randwertbedingungen ausgestattet.

Wie bei den meisten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen können keine analytischen Lösungen für die Gleichungen dieser Arbeit gefunden werden, weswegen numerische Verfahren verwendet werden. Bei diesen wird der kontinuierliche Raum und die kontinuierliche Zeit über ein **Gitter diskretisiert**. Falls das Gitter äquidistant mit Schrittgrößen Δ_x

und Δ_t für Raum und Zeit ist, ergibt sich

$$\mathbf{u}_i^k = \mathbf{u}(x_\ell + i\Delta_x, k\Delta_t). \quad (2.9)$$

Desweiteren müssen die Differentialoperatoren diskretisiert werden. Dies geschieht hier über die Methode der **Finiten-Differenzen**. Bei der räumlichen Ableitung verwendet man den zentralen Differenzenquotient

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{\mathbf{u}(x_i + \Delta_x, t) - \mathbf{u}(x_i - \Delta_x, t)}{2\Delta_x}, \quad (2.10)$$

der bei $\Delta_x \rightarrow 0$ per Definition gegen die Ableitung geht. Bei der zeitlichen Ableitung verwendet man entweder den vorwärtsgerichteten Differenzenquotient

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right|_{t=t_k} = \frac{\mathbf{u}(x, t_k + \Delta_t) - \mathbf{u}(x, t_k)}{\Delta_t}, \quad (2.11)$$

was zu einem **expliziten** Verfahren führt, oder den rückwärtsgerichteten Differenzenquotient

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right|_{t=t_k} = \frac{\mathbf{u}(x, t_k) - \mathbf{u}(x, t_k - \Delta_t)}{\Delta_t}, \quad (2.12)$$

was zu einem **impliziten** Verfahren führt. Explizite Verfahren liefern ein iteratives Schema, wie man von Zeitpunkt k ausschließlich unter Verwendung von Informationen zum Zeitpunkt k auf Zeitpunkt $k + 1$ kommt. Implizite Verfahren liefern hingegen ein für jeden Zeitschritt k zu lösendes lineares Gleichungssystem. Es ist offensichtlich, dass implizite Verfahren rechenintensiver sind, da sie aber im Gegensatz zu den expliziten Verfahren uneingeschränkt stabil sind, werden sie hier in dieser Arbeit verwendet. Ein Verfahren ist **stabil**, wenn sich kleine Störungen in der Lösung durch das Verfahren nicht verstärken.

Numerische Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen sind immer mit Vorsicht bezüglich ihrer Genauigkeit zu genießen. Deswegen kann es sinnvoll sein, über **Ähnlichkeitstransformationen** die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen [Volp 94, Gild 01]. Damit können z.B. die Genauigkeiten der implementierten partiellen Differentialgleichungslöser getestet werden. In dieser Arbeit geschieht diese Transformation durch einen **laufenden Wellenansatz** $y = x - ct$, bei dem angenommen wird, dass sich ein Profil mit konstanter Geschwindigkeit c durch das Medium fortbewegt. Die resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen müssen zwar auch numerisch gelöst werden, womit auch deren Lösungen, wenn auch nicht in dem Ausmaß wie bei partiellen Differentialgleichungen, fehlerbehaftet sind, aber es existiert mit den dynamischen

Systemen ein Werkzeug, das eine präzise qualitative Beschreibung der Lösungen zulässt. Dies wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.4 Qualitative Beschreibung gewöhnlicher Differentialgleichungen: Dynamische Systeme

Auch wenn es eine breite Theorie zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt, es sei auf die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf verwiesen [Aulb 97], so existieren nur äußerst selten exakte analytische Lösungen. So kann man auch für die Gleichungen in dieser Arbeit keine exakten Lösungen finden. Es ist jedoch möglich, mit Hilfe der geometrischen Theorie der dynamischen Systeme eine qualitative Beschreibung der Gleichungen zu erreichen, ohne sie tatsächlich lösen zu müssen [Jord 99]. Diese besteht aus den invarianten Mengen und dem Grenzwertverhalten der Trajektorien im Phasenraum. Diese Theorie geht auf den Arbeiten von Henri Poincaré zurück [Perk 93].

Normalerweise ist bei den dynamischen Systemen die Variable der gewöhnlichen Differentialgleichungen die Zeit t . In dieser Arbeit wird diese Variable jedoch die laufende Wellenvariable $y = y(x, t) = x - ct$ sein. Man kann diese auf zwei Arten interpretieren. Entweder zeigt sie bei einem fest gewählten Zeitpunkt ein Profil über den ganzen Raum, das sich mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts verschiebt oder sie zeigt bei einem fest gewählten Ort, wie sich die physikalische Größe über die Zeit ändert. Somit kann y auch als negative Zeit interpretiert werden und alle Begriffe aus der Theorie der dynamischen Systeme machen Sinn, wobei einfach die Vorzeichen der dynamischen Systemvariable verändert werden müssen.

Ein N -dimensionales dynamisches System kann in folgende Form gebracht werden

$$\mathbf{u}' = \mathcal{F}(\mathbf{u}, t), \quad (2.13)$$

wobei $'$ die Ableitung nach t , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ den N -dimensionalen Variablenvektor und $\mathcal{F}(\mathbf{u}, t)$ ein Funktional bezeichnet. Es ist erst dann eindeutig, wenn eine **Anfangswertbedingung**

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.14)$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf kann dann unter der Voraussetzung der Lipschitz-Bedingung die **Existenz** und **Eindeutigkeit** der Lösung des Anfangswertproblems bewiesen werden [Aulb 97].

Falls das Funktional $\mathcal{F}(\mathbf{u}, t)$ aus Gleichung (2.13) nicht von der Variablen t explizit abhängt, d.h. $\mathcal{F}(\mathbf{u}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{u})$, dann wird das System als **autonomes** System, sonst als nichtautonomes System bezeichnet. In dieser Arbeit sind alle Systeme autonom. Falls das Funktional $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ eine lineare Abbildung mit A als $N \times N$ Matrix ist, dann wird das System als lineares dynamisches System, ansonsten wird es als **nichtlineares** dynamisches System bezeichnet. Für die linearen dynamischen Systeme existiert eine vollständige mathematische Theorie. Bei den nichtlinearen dynamischen Systemen, die in dieser Arbeit vorkommen, existiert dies gerade für höhere Dimensionen nicht. Dort existiert eine lokale Theorie, die die der linearen dynamischen Systeme entlehnt und damit derer ähnlich ist, und eine globale Theorie, die bis zum heutigen Tag Gegenstand der Forschung ist.

Obwohl in Gleichung (2.13) nur die Ableitung erster Ordnung vorkommt, können gewöhnliche Differentialgleichungen **höherer Ordnung** in ein dynamisches System überführt werden. Dabei werden bei einer Gleichung m -ter Ordnung

$$u^{(m)} = \mathcal{F}(u^{(m-1)}, \dots) \quad (2.15)$$

$m - 1$ Hilfsvariablen eingeführt und es entsteht ein dynamisches System mit m Dimensionen. Diese $m - 1$ Hilfsvariablen stehen für die Ableitungen mit Ordnung kleiner m . Das System nimmt dann folgende Form an

$$\begin{aligned} u'_m &= u_{m-1}, \\ &\vdots \\ u'_1 &= \mathcal{F}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ und $u_i = u^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Ein **Zustand** des Systems (2.13) zu einem Zeitpunkt t_0 wird mit $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t_0)$ bezeichnet. Die Menge aller Zustände nennt man **Phasenraum**. Der **Fluss** des dynamischen Systems

$$\Phi_t(\mathbf{u}) = \Phi(t, \mathbf{u}) \quad (2.17)$$

ist ein auf dem Phasenraum definierter Diffeomorphismus mit den Eigenschaften

$$\Phi_0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad (2.18a)$$

$$\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}(\mathbf{u}) = \Phi_{t_1+t_2}(\mathbf{u}), \quad (2.18b)$$

$$\Phi_t^{-1}(\mathbf{u}) = \Phi_{-t}(\mathbf{u}). \quad (2.18c)$$

Er beschreibt mit Anfangszustand $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t_0)$ eine Kurve

$$\omega(\mathbf{u}_0) = \{\Phi_t(\mathbf{u}_0) | t \in \mathbb{R}\} \quad (2.19)$$

im Phasenraum, die **Trajektorie** oder **Orbit** genannt wird. Es existieren zwei Teilmengen

$$\omega_+(\mathbf{u}_0) = \{\Phi_t(\mathbf{u}_0) | t \in \mathbb{R}^+\}, \quad (2.20a)$$

$$\omega_-(\mathbf{u}_0) = \{\Phi_t(\mathbf{u}_0) | t \in \mathbb{R}^-\}, \quad (2.20b)$$

die Vorwärts- und Rückwärtsorbit genannt werden. Trajektorien können sich nicht schneiden, da sonst die Eindeutigkeit der Lösungen verletzt wäre. Das **Phasenportrait** zeigt eine oder mehrere Trajektorien im Phasenraum und ist das wichtigste Werkzeug um das Verhalten von dynamischen Systemen darzustellen. Um das Verhalten eines dynamischen Systems anhand seiner Trajektorie eindeutig darzustellen, muss noch die Richtung angegeben werden, mit der die Kurve zeitlich abgelaufen wird. Dies kann durch Pfeile geschehen oder ist rein aus dem Kontext ersichtlich. Die Untersuchung, wie sich die Trajektorien im Grenzwert $t \rightarrow \pm\infty$ im Phasenraum verhalten, ist von entscheidendem Interesse, da diese Grenzwerte die rechts- und linksseitigen Randwerte in den physikalischen Variablen des Systems liefern. Dies liefert eine Fixpunktanalyse. Ein **Fixpunkt** \mathbf{u}_{fix} ist ein Zustand, der sich über die Zeit nicht ändert, d.h. $\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\text{fix}}) = 0$ und gleichbedeutend $\omega(\mathbf{u}_{\text{fix}}) = \mathbf{u}_{\text{fix}}$. Ein Orbit heisst **heterokliner** Orbit, falls

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\text{fix}}^-, \quad (2.21a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\text{fix}}^+ \quad (2.21b)$$

mit den zwei Fixpunkten $\mathbf{u}_{\text{fix}}^- \neq \mathbf{u}_{\text{fix}}^+$ gilt. Falls beide Fixpunkte identisch sind, spricht man von einem **homoklinen** Orbit. Bei den laufenden Wellenlösungen stellt der Fixpunkt $\mathbf{u}_{\text{fix}}^-$ den linken Randwert und $\mathbf{u}_{\text{fix}}^+$ den rechten Randwert des Sättigungsprofils dar.

Wie sich Trajektorien in der Nähe der Fixpunkte verhalten und welche Fixpunkte für $\mathbf{u}_{\text{fix}}^-$ bzw. $\mathbf{u}_{\text{fix}}^+$ in Frage kommen, kann mit einer **linearen Stabilitätsanalyse** beantwortet werden. Dabei wird eine Taylorentwicklung erster Ordnung des Funktionals $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ um den Fixpunkt \mathbf{u}_{fix} durchgeführt. Dies ergibt

$$\mathbf{u}' = D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\text{fix}})(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{fix}}), \quad (2.22)$$

wobei $D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\text{fix}})$ die Jakobimatrix von \mathcal{F} an der Stelle \mathbf{u}_{fix} ist. In einem linearen System ist die

Jakobimatrix gleich der Matrix A . Die Klassifizierung der Fixpunkte und damit das Verhalten der Trajektorien um diesen Fixpunkt wird nun von den Eigenwerten dieser Matrix bestimmt. Dies kann für höherdimensionale Matrizen ziemlich kompliziert werden. Glücklicherweise sind alle Eigenwerte der hier betrachteten Jakobimatrizen reell, was die Sache erheblich vereinfacht. Ein Fixpunkt ist demnach

- **stabil**, falls alle Eigenwerte negativ sind,
- **instabil**, falls alle Eigenwerte positiv sind,
- ein **Sattelpunkt**, falls es positive und negative Eigenwerte gibt.

Falls alle Eigenwerte ungleich Null sind, so heisst das System **hyperbolisch**. Falls mindestens ein Eigenwert gleich Null ist, wird das System nichthyperbolisch genannt. Man befindet sich dann nicht mehr auf einem isolierten Fixpunkt, sondern auf einer mehrdimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit. Dies kann zu zusätzlichen Problemen führen [Perk 93], die jedoch bei den untersuchten Gleichungen nicht auftauchen.

Die **stabilen, instabilen bzw. Zentrums-Untermannigfaltigkeiten** E^s, E^i bzw. E^z eines linearen Systems werden durch die Eigenvektoren der Eigenwerte, die kleiner, grösser bzw. gleich Null sind, aufgespannt. Alle diese Untermannigfaltigkeiten sind globale invariante Unterräume, d.h. $\omega(E) \subset E$ mit $E = E^s, E^i, E^z$. Diese weitreichende Aussage kann für die nichtlinearen Systeme nicht getroffen werden. Es lassen sich aber zumindestens lokale Aussagen treffen. Dafür definiert man die **lokale stabile und instabile Untermannigfaltigkeit**

$$W_{\text{loc}}^s(\mathbf{u}_{\text{fix}}, \Omega) = \{\mathbf{u}_0 \in \Omega : \omega_+(\mathbf{u}_0) \subset \Omega \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_{\text{fix}}\}, \quad (2.23a)$$

$$W_{\text{loc}}^i(\mathbf{u}_{\text{fix}}, \Omega) = \{\mathbf{u}_0 \in \Omega : \omega_-(\mathbf{u}_0) \subset \Omega \wedge \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_{\text{fix}}\} \quad (2.23b)$$

mit Fixpunkt \mathbf{u}_{fix} und Umgebung Ω . Unter der Voraussetzung, dass das System hyperbolisch ist, kann eine Umgebung Ω gefunden werden, so dass die lokale stabile Untermannigfaltigkeit $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{u}_{\text{fix}}, \Omega)$ die gleiche Dimension wie die linearisierte stabile Untermannigfaltigkeit E^s hat und zu dieser tangential steht. Das Gleiche gilt für die lokale instabile Untermannigfaltigkeit. Ähnliches kann, falls das System nichthyperbolisch ist, auch für die Zentrumsmannigfaltigkeit gezeigt werden [Perk 93], was jedoch hier nicht besprochen werden soll.

Wenn das autonome dynamische System nun zusätzlich von einem Parameter \mathbf{b} abhängt

$$\mathbf{u}' = \mathcal{F}_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}), \quad (2.24)$$

dann kann es zu sogenannten **Bifurkationen** kommen. Eine Bifurkation ist eine qualitative Veränderung des topologischen Verhaltens des Systems bei einer Veränderung des Bifurkationsparameters \mathbf{b} . Der Wert des Bifurkationsparameters, bei dem die Veränderung stattfindet, wird kritischer Punkt oder **Bifurkationspunkt** genannt. Eine qualitative Veränderung des topologischen Verhaltens eines Systems liegt dann vor, wenn es keinen Homöomorphismus gibt, der das eine System in das andere überführt. Falls ein Homöomorphismus vorliegt, dann sind die zwei Systeme **topologisch konjugiert**. Der Begriff der Bifurkation wird in dieser Arbeit auch weniger strikt für qualitative Veränderungen des Profilverhaltens, wie z.B. monoton im Vergleich zu nichtmonoton, verwendet, auch wenn beide Trajektorien topologisch konjugiert sind.

Teil I

Mehrphasenströmungsmodelle

Modelle für Mehrphasenströmungen in porösen Medien werden für verschiedenste Anwendungen benötigt. So werden z.B. in der Hydrologie Wasser und Luft und eventuell noch andere Phasen wie Öle oder andere verschmutzende Fremdkörper in der ungesättigten Bodenzone betrachtet. In der Erdölförderung werden üblicherweise Erdöl, Erdgas und Wasser oder Luft behandelt. In letzter Zeit sind neue Anwendungen wie z.B. CO₂-Speicherung oder Brennstoffzellen hinzugekommen.

Es wird zunächst das am weitesten verbreitete Modell besprochen, das hier in der Arbeit als DBRMMWBL-Modell bezeichnet wird. Die Bezeichnung ergibt sich aus den Anfangsbuchstaben der Nachnamen der Personen, die zu diesem Modell beigetragen haben. Den Anfang machte Darcy [Darc 56], indem er ein Gesetz für Einphasenströmungen gefunden hat. Buckingham [Buck 07] verallgemeinerte dieses Gesetz für Mehrphasenströmungen in der Art, dass die Permeabilitäten saturierungsabhängig wurden. Richards [Rich 31] formulierte die Gesetze erstmals in der Form von Differentialgleichungen unter der Annahme, dass eine der zwei Phasen keine Masse besitzt und unendlich mobil ist. Muskat und Meres [Musk 36] haben dann das Konzept der relativen Permeabilitäten, die vorher von Wyckoff und Botset [Wyck 36] gemessen wurden, und damit die Formulierung als Mehrphasensystem gleichberechtigter Phasen eingeführt. Leverett [Leve 41] implementierte zuletzt den makroskopischen Kapillardruck.

Das zweite Modell, das vorgestellt wird, ist ein in den Arbeiten [Hilf 06b, Hilf 06a, Hilf 06c] eingeführtes Zweiphasenmodell, das die zwei Phasen zusätzlich in jeweils perkolierende und nichtperkolierende Phasen unterteilt. Es erweitert die früheren Artikel [Hilf 98, Hilf 00]. Die neueren Arbeiten [Dost 11c, Dost 10, Dost 11b, Hilf 10] liefern erste Erkenntnisse und Ergebnisse über dieses Modell.

Obwohl die Modelle dreidimensional formuliert sind, werden sie hier wegen der Annahme der eindimensionalen laufenden Wellen nur eindimensional behandelt. In Experimenten ist die Annahme der Eindimensionalität z.B. bei porösen Säulen mit viel größerer Länge als Durchmesser und impermeablen Wänden gerechtfertigt. Es werden immer zwei Flüssigkeiten betrachtet und diese sind nicht mischbar, chemisch inert, inkompressibel und newtonisch. Die benetzende Flüssigkeit wird als Wasser und die nichtbenetzende Flüssigkeit als Öl bezeichnet. Das poröse Medium ist in der gesamten Arbeit makroskopisch homogen, isotrop und inkompressibel. Die hier betrachteten Längenskalen lassen einen kontinuumsmechanischen Ansatz zu, und es werden nur isotherme und statische oder quasistatische Prozesse betrachtet. Die Geschwindigkeiten sind langsam genug, damit der Fluss laminar ist. Es herrschen keine Körperkräfte, d.h. die Säule steht senkrecht zur Gravitationsrichtung. Im gesamten Kapitel werden dimensionsbehaftete Variablen mit $\hat{}$ gekennzeichnet.

3 DBRMMWBL-Modell

In diesem Kapitel werden für das DBRMMWBL-Modell zunächst die aus den Erhaltungssätzen stammenden Gleichungen vorgestellt und die konstitutiven Annahmen besprochen. Dann werden die Gleichungen dimensionslos gemacht und in eine fraktionale Flussformulierung gebracht. Zuletzt wird ausgehend von der dimensionslosen fraktionalen Flussgleichung ein laufender Wellenansatz durchgeführt.

3.1 Grundlegende Gleichungen

Das DBRMMWBL-Modell für Zweiphasenströmungen einer benetzenden Flüssigkeit Wasser \mathbb{W} und einer nichtbenetzenden Flüssigkeit Öl \mathbb{O} lautet nach [Hilf 96b] unter den oben genannten Annahmen

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_{\mathbb{W}} = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{v}_{\mathbb{W}}, \quad (3.1a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_{\mathbb{O}} = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{v}_{\mathbb{O}}, \quad (3.1b)$$

$$\hat{v}_{\mathbb{W}} = - \frac{\hat{k}k_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}})}{\hat{\mu}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{\mathbb{W}}, \quad (3.1c)$$

$$\hat{v}_{\mathbb{O}} = - \frac{\hat{k}k_{\mathbb{O}}(S_{\mathbb{W}})}{\hat{\mu}_{\mathbb{O}}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{\mathbb{O}}, \quad (3.1d)$$

$$S_{\mathbb{W}} + S_{\mathbb{O}} = 1, \quad (3.1e)$$

$$\hat{P}_{\mathbb{O}} - \hat{P}_{\mathbb{W}} = \hat{P}_c(S_{\mathbb{W}}), \quad (3.1f)$$

wobei die Parameter \hat{k} , $\hat{\mu}_i$ und ϕ mit $i \in \{\mathbb{W}, \mathbb{O}\}$ für die absolute Permeabilität, die Viskositäten und die Porosität stehen. Die Parameterfunktionen $\hat{k}_i(S_{\mathbb{W}})$ und $\hat{P}_c(S_{\mathbb{W}})$ sind die relativen Permeabilitäten und die makroskopische Kapillarfunktion. S_i bezeichnet die effektive Sättigung und \hat{v}_i und \hat{P}_i bezeichnen die Variablen Geschwindigkeiten und Druck, die von der Zeit \hat{t} und der Raumvariablen \hat{x} abhängen. Die Gleichungen (3.1a) und (3.1b) kommen aus dem Massenerhalt, die Gleichungen (3.1c) und (3.1d) folgen aus der Impulserhaltung

und sind Verallgemeinerungen des Darcy-Gesetzes, die Gleichung (3.1e) folgt aus dem Volumenerhalt und die Gleichung (3.1f) wird benötigt, um das System zu schließen. Die relativen Permeabilitäten, die makroskopische Kapillardruckschließbedingung und die effektiven Sättigungen müssen durch konstitutive Annahmen bestimmt werden. Dies wird in dem nächsten Abschnitt durchgeführt.

3.2 Konstitutive Annahmen

In den grundlegenden Gleichungen des vorigen Abschnittes wurden konstitutive Annahmen bezüglich der relativen Permeabilitäten, der makroskopische Kapillardruckschließbedingung und der effektiven Sättigungen getroffen, die nun hier besprochen werden. Zuletzt werden die Annahmen kritisch hinterfragt.

3.2.1 Makroskopischer Kapillardruck

Um das System (3.1) zu schließen, wird die sogenannte makroskopische Kapillardruckschließbedingung verwendet. Sie besagt, dass die makroskopische Druckdifferenz zwischen Öl und Wasser nur von der Wassersättigung abhängt. Es existieren zwei weitverbreitete Modelle, die die Beziehung beschreiben. Beide wurden empirisch gefunden, wobei das erste auch theoretisch durch Homogenisierung von Kapillarbündelmodellen mit gewissen Radienverteilungen [Dull 92] hergeleitet werden kann. Das erste Modell ist die Parametrisierung nach Brooks und Corey [Broo 64]

$$\hat{P}_c(S_w) = \hat{P}_0^* S_w^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad (3.2)$$

wobei \hat{P}_0^* und λ den Eindringdruck und den Porenverteilungsindex, der normalerweise Werte zwischen 1 und 4 annimmt, bezeichnen. Wenn man den Kapillardruck dimensionslos machen will, so teilt man ihn einfach durch seinen Eindringdruck \hat{P}_0^* und erhält

$$P_c(S_w) = S_w^{-\frac{1}{\lambda}}. \quad (3.3)$$

Das zweite Modell ist die vereinfachte Parametrisierung nach Van Genuchten [Genu 80]

$$\hat{P}_c(S_w) = \frac{1}{\hat{\alpha}} \left[S_w^{-\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.4)$$

Der Parameter n nimmt normalerweise Werte zwischen 1 und 10 an und der Parameter $\hat{\alpha}$ ist grösser Null. Um den Kapillardruck dimensionslos zu machen, benützt man den Wendepunkt \hat{P}_b der Kapillardrucksfunktion, der in [Hilf 96b] als Durchbruchdruck bezeichnet wird. Dafür benötigt man die Beziehung zwischen $\hat{\alpha}$ und \hat{P}_b . Diese ist gegeben durch

$$(S_{\text{w}}^{\text{m}}, \hat{P}_b) = \left(\left(\frac{3n-2}{4n-2} \right)^{-\frac{1-n}{n}}, \frac{1}{\hat{\alpha}} \left(\frac{n}{3n-2} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

Damit ist der dimensionslose Kapillardruck nach Van Genuchten

$$P_c(S_{\text{w}}) = \left(\frac{3n-2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left[S_{\text{w}}^{-\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.7)$$

Die Parameter dieser Modelle müssen experimentell bestimmt werden. Beide Modelle und deren Parameter stellen Materialeigenschaften dar. Dementsprechend gibt es Medien für die das eine Modell besser geeignet ist als das andere, so lassen sich z.B. poröse Medien die Kapillarbündelmodellen ähneln auch sehr gut mit der Brooks und Corey Parametrisierung annähern.

3.2.2 Relative Permeabilitäten

Wenn mehr als eine Phase in einem porösen Medium vorhanden ist, dann beeinflusst die Existenz der einen Phase das Fließverhalten der anderen. Dies wird mit den relativen Permeabilitäten ausgedrückt. Dabei wird wieder angenommen, dass diese Beziehung nur von der Wassersättigung abhängt. Es existieren wieder zwei weitverbreitete Modelle, die die Beziehung beschreiben. Das erste Modell ist die Parametrisierung nach Brooks und Corey [Broo 64]

$$k_{\text{w}}(S_{\text{w}}) = S_{\text{w}}^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}}, \quad (3.8a)$$

$$k_{\text{o}}(S_{\text{w}}) = (1 - S_{\text{w}})^2 \left(1 - S_{\text{w}}^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \right), \quad (3.8b)$$

wobei λ wie im vorigen Abschnitt den Porenverteilungsindex darstellt. Dabei wird die Kapillardrucksättigungsbeziehung 3.2 in das Modell von Burdine [Burd 53] eingesetzt, das eine Beziehung zwischen den relativen Permeabilitäten, dem Kapillardruck und den effektiven Sättigungen beschreibt.

Das zweite Modell ist die vereinfachte Parametrisierung nach Van Genuchten [Genu 80]

$$k_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}) = S_{\mathbb{W}}^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - S_{\mathbb{W}}^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \right]^2, \quad (3.9a)$$

$$k_{\mathbb{O}}(S_{\mathbb{W}}) = (1 - S_{\mathbb{W}})^{\frac{1}{2}} \left(1 - S_{\mathbb{W}}^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \right)^{2(1-\frac{1}{n})}. \quad (3.9b)$$

Auch der Parameter n wurde bereits im vorigen Abschnitt eingeführt. Dabei wird die Kapillardrucksättigungsbeziehung 3.4 in das Modell von Mualem [Mual 76] eingesetzt, welches eine Beziehung zwischen den relativen Permeabilitäten, dem Kapillardruck und den effektiven Sättigungen beschreibt.

Da die relativen Permeabilitäten aus der Kapillardrucksättigungsbeziehung gewonnen werden, gilt für sie das gleiche, wie schon im Abschnitt 3.2.1 erwähnt.

3.2.3 Residuale und effektive Sättigungen

Experimente zeigen, dass bei einem Austausch von einer Phase durch eine andere die anfangs vorhandene zumindestens auf kürzeren Zeitskalen nicht komplett aus dem Medium gebracht werden kann. Die Sättigung, die übrig bleibt, bezeichnet man als residuale Sättigung. Ihre Werte können je nach Prozess und Phase zwischen einigen und bis zu über 30 Prozent liegen. Im DBRMMWBL-Modell werden die residualen Sättigungen als Konstanten angenommen. Um die Gleichungen und Funktionen zu vereinfachen, wird nun anstatt der tatsächlichen Sättigung die effektive Sättigung

$$S_e = \frac{S_{\mathbb{W}} - S_{\mathbb{W}\text{dr}}}{1 - S_{\mathbb{W}\text{dr}} - S_{\mathbb{O}\text{im}}} \quad (3.10)$$

betrachtet, da diese immer Werte aus dem gesamten Bereich $[0, 1]$ annimmt. Hierbei stehen die Werte $S_{\mathbb{W}\text{dr}}$ und $S_{\mathbb{O}\text{im}}$ für die residuale Wasser- und Ölsättigung.

3.2.4 Kritik

Die im vorigen Abschnitt besprochenen konstitutiven Annahmen entsprechen bei weitem nicht dem Bild, das Experimente liefern.

Insbesondere die alleinige funktionale Abhängigkeit der Druckdifferenz und der relativen Permeabilitäten von der Wassersättigung ist eine zu große Vereinfachung. Dynamische Effekte [Calv 91, Dahl 05, Hass 02, Voge 08] und die durch die Prozessabhängigkeit, sprich dem

Unterschied zwischen Be- und Entwässerung, induzierte Hysterese [Lenh 91, Morr 65, Papa 08, Park 89] führen zur Erkenntnis, dass der makroskopische Kapillardruck und die relativen Parameter von vielen Variablen abhängen [Avra 95b, Bear 72, Dull 92].

Auch zeigen Experimente, dass die residualen Sättigungen keine Konstanten sondern prozessabhängige Variablen sind [Abra 75, Anto 99, Geel 97, Morr 88, Tabo 69]. Damit muss man schon vor dem zu berechnenden Prozess den resultierenden Prozess kennen, um die für die Rechnung benötigten prozessabhängigen Funktionen zu bestimmen. Desweiteren ist es nur schwer möglich, physikalische Situationen darzustellen, in denen zeitlich oder räumlich unterschiedliche Prozesse ablaufen. Für jede dieser zeitlichen oder räumlichen Bereiche müsste man die Druckdifferenz, die relativen Permeabilitäten und die residualen Sättigungen anders wählen.

Aus diesen Gründen ist das DBRMMWBL-Modell nur mit äußerster Vorsicht zu genießen und in ihrer Anwendung meist auf nur sehr simple Probleme eingeschränkt. Deswegen gab es über die letzten Jahre viele Versuche das Modell zu erweitern oder durch neue zu ersetzen. Eines dieser neuen Modelle wird im Kapitel 4 über das Perkolationsmodell vorgestellt.

Da es aber das mit Abstand einfachste und älteste Modell ist, ist es trotz seiner Unzulänglichkeiten weit verbreitet, weswegen es auch hier in dieser Arbeit behandelt wird.

3.3 Umformungen

Hier werden die grundlegenden Gleichungen aus Abschnitt 3.1 zunächst in die klassische reduzierte Form und anschließend in eine dimensionslose fraktionale Flussformulierung gebracht.

3.3.1 Reduzierte Form

Wenn man die Wassersättigung S_{w} und den Wasserdruck \hat{P}_{w} als die primären Unbekannten wählt, so führt dies zu den zwei Gleichungen

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{w}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\hat{k}k_{\text{w}}(S_{\text{w}})}{\hat{\mu}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{\text{w}} \right], \quad (3.11a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (1 - S_{\text{w}}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\hat{k}k_{\text{o}}(S_{\text{w}})}{\hat{\mu}_{\text{o}}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_{\text{c}}(S_{\text{w}}) + \hat{P}_{\text{w}}) \right]. \quad (3.11b)$$

Die Parameterfunktionen $\hat{P}_c(S_{\text{W}})$, $k_{\text{W}}(S_{\text{W}})$, $k_{\text{O}}(S_{\text{W}})$ sind, wie in Abschnitt 3.2 besprochen, zu bestimmen.

3.3.2 Dimensionslose Gleichungen

Analog zu [Hilf 96b] führt man die folgenden dimensionslosen Variablen ein

$$x = \frac{1}{\hat{l}} \hat{x}, \quad (3.12a)$$

$$v = \frac{1}{\hat{u}} \hat{v}, \quad (3.12b)$$

$$t = \frac{\hat{u}}{\hat{l}\phi} \hat{t}, \quad (3.12c)$$

$$P_{\text{W}} = \frac{1}{\hat{P}_{\text{b}}} \hat{P}_{\text{W}}, \quad (3.12d)$$

$$P_c(S_{\text{W}}) = \frac{1}{\hat{P}_{\text{b}}} \hat{P}_c(S_{\text{W}}), \quad (3.12e)$$

wobei \hat{l} eine makroskopische Länge, \hat{u} eine makroskopische Geschwindigkeit und \hat{P}_{b} der Durchbruchdruck, der durch den Wendepunkt der Kapillardruckskurve $\hat{P}_c(S_{\text{W}})$ definiert ist, ist. Falls die Kapillardruckskurve, wie bei der Parametrisierung von Brooks und Corey keinen Wendepunkt aufweist, dann wird \hat{P}_{b} als der Eindringdruck \hat{P}_0^* definiert. Hiermit lässt sich nun die dimensionslose Formulierung

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\text{W}} = \frac{1}{\text{Ca}_{\text{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_{\text{W}}(S_{\text{W}}) \frac{\partial}{\partial x} P_{\text{W}} \right], \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - S_{\text{W}}) = \frac{1}{\text{Ca}_{\text{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_{\text{O}}(S_{\text{W}}) M_{\text{O}}^{\text{W}} \frac{\partial}{\partial x} (P_c(S_{\text{W}}) + P_{\text{W}}) \right] \quad (3.13b)$$

gewinnen, wobei M_{O}^{W} das Viskositätsverhältnis zwischen Wasser und Öl darstellt. Die dimensionslose makroskopische Kapillarzahl

$$\text{Ca}_{\text{W}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{W}} \hat{u} \hat{l}}{\hat{k} \hat{P}_{\text{b}}} \quad (3.14)$$

gibt das Verhältnis zwischen dem makroskopischen viskosen Druckabfall und dem makroskopischen Kapillardruck wieder. Sie wurde erstmals in [Hilf 96b] diskutiert.

3.3.3 Fraktionale Flussformulierung

Definiert man eine fraktionale Flussfunktion

$$f(S_{\text{W}}) = \frac{k_{\text{W}}(S_{\text{W}})}{k_{\text{W}}(S_{\text{W}}) + M_{\text{O}}^{\text{W}} k_{\text{O}}(S_{\text{W}})} \quad (3.15)$$

und eine Kapillarfunktion

$$D(S_{\text{W}}) = -M_{\text{O}}^{\text{W}} k_{\text{O}}(S_{\text{W}}) f(S_{\text{W}}) \frac{\partial P_{\text{c}}(S_{\text{W}})}{\partial S_{\text{W}}}, \quad (3.16)$$

dann erhält man aus den Gleichungen (3.13) die fraktionale Flussformulierung

$$\frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial t} + \frac{v_t}{\text{Ca}_{\text{W}}} \frac{\partial f(S_{\text{W}})}{\partial S_{\text{W}}} \frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[D(S_{\text{W}}) \frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.17)$$

Hierbei wurde die Gesamtgeschwindigkeit $v_t = v_{\text{W}} + v_{\text{O}}$ eingeführt. Wenn nun noch \hat{u} und \hat{l} so gewählt werden, dass $v_t = \text{Ca}_{\text{W}}$, dann erhält man

$$\frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial t} + \frac{\partial f(S_{\text{W}})}{\partial S_{\text{W}}} \frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[D(S_{\text{W}}) \frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.18)$$

3.4 Laufende Wellengleichung

Wenn nun die Zeit- und Raumvariablen skaliert werden

$$\tilde{x} = \text{Ca}_{\text{W}} x, \quad (3.19a)$$

$$\tilde{t} = \text{Ca}_{\text{W}} t \quad (3.19b)$$

und man annimmt, dass sich ein gleichbleibendes Wellenprofil mit konstanter Geschwindigkeit c fortpflanzt, dann führt das Einführen der Ähnlichkeitsvariablen

$$y = \tilde{x} - c\tilde{t} \quad (3.20)$$

in der Gleichung (3.18) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left[\frac{\partial f(S_{\text{W}})}{\partial S_{\text{W}}} - c \right] S'_{\text{W}} - [D(S_{\text{W}}) S'_{\text{W}}]' = 0, \quad (3.21)$$

wobei ' die Ableitung nach y bezeichnet.

Lösungen für diese Gleichung werden in Abschnitt 5.1 gefunden.

4 Perkolationsmodell

In diesem Kapitel wird das zweite Modell vorgestellt. Es ist ein in den Arbeiten [Hilf 06b, Hilf 06a, Hilf 06c] vorgestelltes Zweiphasenmodell, das die zwei Phasen in jeweils perkolierende und nichtperkolierende Phasen weiter unterteilt. Es erweitert die früheren Artikel [Hilf 98, Hilf 00]. Dabei werden zunächst die grundlegenden Gleichungen und die konstitutiven Annahmen besprochen. Es werden wichtige Näherungen vorgestellt, die es ermöglichen, das komplizierte und umfangreiche Modell handhabbarer zu machen. Dann werden die Gleichungen für verschiedene Näherungen entdimensionalisiert und in eine fraktionale Flussformulierung gebracht. Zuletzt wird ausgehend von den dimensionslosen fraktionalen Flussgleichungen ein laufender Wellenansatz durchgeführt. Die resultierenden Systeme, die aus mehreren Gleichungen bestehen, können nicht in die Form eines dynamischen Systems gebracht werden, womit weitere Vereinfachungen notwendig werden, die in den nächsten Kapiteln besprochen werden.

4.1 Grundlegende Gleichungen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Gleichungen besprochen, die aus Masse- und Impulserhaltung, einigen Konstitutivannahmen und einer Schließbedingung bestehen. Es werden hier, wenn es der Übersichtlichkeit dienlich ist, die üblichen Abkürzungen $\hat{\partial}_t$ und $\hat{\partial}_x$ für die partielle zeitliche und räumliche Ableitung verwendet.

4.1.1 Variablendefinition

Das Perkolationsmodell behandelt das aus Wasser \mathbb{W} und Öl \mathbb{O} bestehende Zweiphasensystem als Vierphasensystem. Dabei werden jeweils zwischen perkolierenden und nichtperkolierenden Phasen unterschieden. Wenn eine Phase wegzusammenhängend mit dem Rand des Definitionsbereichs der Probe ist, dann wird sie perkolierend, ansonsten wird sie nichtperkolierend genannt. Damit setzt sich die Wassersättigung $S_{\mathbb{W}} = S_{\mathbb{W}}(\hat{x}, \hat{t})$ aus perkolierendem

Wasser $S_1 = S_1(\hat{x}, \hat{t})$ und nichtperkolierendem Wasser $S_2 = S_2(\hat{x}, \hat{t})$ und die Ölsättigung $S_0 = S_0(\hat{x}, \hat{t})$ aus perkolierendem Öl $S_3 = S_3(\hat{x}, \hat{t})$ und nichtperkolierendem Öl $S_4 = S_4(\hat{x}, \hat{t})$ zusammen. Alle Sättigungen sind Funktionen des Raums $\hat{x} \in [\hat{x}_\ell, \hat{x}_r] \subset \mathbb{R}[\text{m}]$ und der Zeit $\hat{t} \in \mathbb{R}^+[\text{s}]$. Der Volumenanteil der i -ten Phase wird mit $\phi_i = \phi_i(\hat{x}, \hat{t}) = \phi(\hat{x}, \hat{t})S_i(\hat{x}, \hat{t})$ und der des porösen Mediums mit $\phi_5 = \phi_5(\hat{x}, \hat{t}) = 1 - \phi(\hat{x}, \hat{t})$ bezeichnet, dabei ist die Porosität $\phi = \phi(\hat{x}, \hat{t})$ der Volumenanteil des Porenraums der Probe, der für eine Strömung zugänglich ist, d.h. wo eine Veränderung der Sättigung auftreten kann.

4.1.2 Erhaltungssätze

Wie in jeder kontinuumsmechanisch basierten Theorie liegen den Gleichungen des Perkulationsmodells Erhaltungssätze zugrunde, die hier kurz vorgestellt werden.

Aufgrund der Inkompressibilität bleibt das Gesamtvolumen erhalten

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1, \quad (4.1a)$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = 1. \quad (4.1b)$$

Die Massenerhaltung für Phase $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ lautet in differentieller Form

$$\hat{\partial}_t \phi_i \hat{\rho}_i + \hat{\partial}_x \phi_i \hat{\rho}_i \hat{v}_i = \hat{M}_i, \quad (4.2)$$

hierbei ist $\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_i(\hat{x}, \hat{t})$ und $\hat{v}_i = \hat{v}_i(\hat{x}, \hat{t})$ die Dichte und die Fließgeschwindigkeit der i -ten Phase. Der Massenaustauschterm \hat{M}_i der i -ten Phase mit allen anderen Phasen muss konstitutiv im nächsten Abschnitt bestimmt werden.

Die durch den Massenerhalt ergänzte Impulserhaltung für Phase $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ lautet in differentieller Form

$$\phi_i \hat{\rho}_i \hat{D}_t^i \hat{v}_i - \phi_i \hat{\partial}_x \hat{\Sigma}_i - \phi_i \hat{F}^i = \hat{m}_i - \hat{v}_i \hat{M}_i. \quad (4.3)$$

Die Flächenkraftdichte $\hat{\Sigma}_i$ und die Körperkraftdichte \hat{F}_i der i -ten Phase und die Impulsübertragungsdichte \hat{m}_i aller Phasen auf die Phase i müssen konstitutiv im nächsten Abschnitt bestimmt werden. Desweiteren bezeichnet $\hat{D}_t^i = \hat{D}^i / \hat{D}_t = \hat{\partial}_t + \hat{v}_i \hat{\partial}_x$ die materielle Ableitung der i -ten Phase.

4.1.3 Konstitutivannahmen

Wie schon anfangs beschrieben, werden in dieser Arbeit ausschließlich makroskopisch homogene Medien betrachtet, womit die Porosität

$$\phi(\hat{x}, \hat{t}) = \phi \quad (4.4)$$

eine Konstante ist.

Desweiteren werden nur inkompressible Fluide behandelt, so dass die Dichten

$$\hat{\rho}_1(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{\rho}_w, \quad (4.5a)$$

$$\hat{\rho}_2(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{\rho}_w, \quad (4.5b)$$

$$\hat{\rho}_3(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{\rho}_o, \quad (4.5c)$$

$$\hat{\rho}_4(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{\rho}_o \quad (4.5d)$$

ebenso Konstanten sind.

Massenaustausch kann nur zwischen den zwei verschiedenen Wasser- beziehungsweise zwischen den zwei verschiedenen Ölphasen stattfinden. Dabei tauschen die perkolierenden und nichtperkolierenden Phasen Masse durch Aufbrechen oder Vereinen von Tropfen, Ganglien oder Blasen aus. Beim Aufbrechen kann perkolierendes Fluid zu nichtperkolierendem Fluid werden und beim Vereinen kann nichtperkolierendes Fluid zu perkolierendem Fluid werden. Nachdem diese Vorgänge von der Dynamik des Prozesses abhängen, hängen auch die Massenaustauschterme aus (4.2) von der zeitlichen Veränderung der Wassersättigung ab. In den Arbeiten [Hilf 06b] wurden sie definiert durch

$$\hat{M}_1 = -\hat{M}_2 = \eta_2 \phi \hat{\rho}_w \left(\frac{S_2 - S_2^*}{S_w^* - S_w} \right) \hat{\partial}_t S_w, \quad (4.6a)$$

$$\hat{M}_3 = -\hat{M}_4 = \eta_4 \phi \hat{\rho}_o \left(\frac{S_4 - S_4^*}{S_o^* - S_o} \right) \hat{\partial}_t S_o, \quad (4.6b)$$

wobei η_2, η_4 zu bestimmende Parameter sind. Die Parameter $S_2^*, S_4^*, S_w^*, S_o^*$ stellen begrenzte Sättigungen für die Phasen S_2, S_4, S_w, S_o dar und werden folgendermassen definiert

$$S_2^* = S_{\text{W dr}}(1 - \Theta(\hat{\partial}_t S_{\text{W}})), \quad (4.7a)$$

$$S_4^* = S_{\text{O im}}(1 - \Theta(\hat{\partial}_t S_{\text{O}})), \quad (4.7b)$$

$$S_{\text{W}}^* = (1 - S_{\text{O im}})\Theta(\hat{\partial}_t S_{\text{W}}) + S_{\text{W dr}}(1 - \Theta(\hat{\partial}_t S_{\text{W}})), \quad (4.7c)$$

$$S_{\text{O}}^* = 1 - S_{\text{W}}^* = S_{\text{O im}}(1 - \Theta(\hat{\partial}_t S_{\text{O}})) + (1 - S_{\text{W dr}})\Theta(\hat{\partial}_t S_{\text{O}}), \quad (4.7d)$$

dabei stellen $S_{\text{W dr}}$ und $S_{\text{O im}}$ begrenzende Sättigungen für die Sättigungen der nichtperkolierenden Phasen dar. Es wurde die Heaviside-Sprungfunktion $\Theta(x)$ eingeführt, welche man mit der Vorzeichenfunktion $\text{sgn}(x)$ als

$$\Theta(x) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(x) + 1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

definieren kann.

Die Spannungstensoren der perkolierenden Phasen können analog zum DBRMMWBL-Modell durch

$$\hat{\Sigma}_1 = -\hat{P}_1, \quad (4.9a)$$

$$\hat{\Sigma}_3 = -\hat{P}_3 \quad (4.9b)$$

bestimmt werden, wobei \hat{P}_1, \hat{P}_3 die Drücke der perkolierenden Phasen sind. Für die Spannungstensoren der nichtperkolierenden Phasen muss ein anderer Ansatz gewählt werden, da sich die Kräfte nicht frei in den nichtperkolierenden Phasen bewegen können. In [Hilf 06b] wird angenommen, dass sich die Spannungen der nichtperkolierenden Phasen aus dem Druck der umschließenden Phasen und der Energiedichte, die in der Grenzfläche mit der umschließenden Flüssigkeit vorhanden ist, zusammensetzen. Dies führt zu

$$\hat{\Sigma}_2 = -\hat{P}_3 + \gamma \hat{P}_2^* S_2^{\gamma-1}, \quad (4.10a)$$

$$\hat{\Sigma}_4 = -\hat{P}_1 + \delta \hat{P}_4^* S_4^{\delta-1}, \quad (4.10b)$$

wobei die Parameter $\hat{P}_2^*, \hat{P}_4^*, \gamma, \delta$ zu bestimmen sind.

Die Körperkräfte sind unter Ausschluss der Schwerkraft durch die nur auf die nichtperkolie-

renden Phasen wirkenden Kapillarkräfte gegeben

$$\hat{F}_1 = 0, \quad (4.11a)$$

$$\hat{F}_2 = \hat{\Pi}_a^* \hat{\partial}_{\hat{x}} S_1^{-\alpha}, \quad (4.11b)$$

$$\hat{F}_3 = 0, \quad (4.11c)$$

$$\hat{F}_4 = \hat{\Pi}_b^* \hat{\partial}_{\hat{x}} S_3^{-\beta}, \quad (4.11d)$$

wobei die Parameter $\hat{\Pi}_a^*$, $\hat{\Pi}_b^*$, α , β zu bestimmen sind.

Die Impulsübertragungsdichte \hat{m}_i wurde in den Arbeiten [Hilf06] durch eine lineare Kopplung

$$\hat{m}_1 = \hat{R}_{13}(\hat{v}_3 - \hat{v}_1) + \hat{R}_{14}(\hat{v}_4 - \hat{v}_1) - \hat{R}_{15}\hat{v}_1, \quad (4.12a)$$

$$\hat{m}_2 = \hat{R}_{23}(\hat{v}_3 - \hat{v}_2) + \hat{R}_{24}(\hat{v}_4 - \hat{v}_2) - \hat{R}_{25}\hat{v}_2, \quad (4.12b)$$

$$\hat{m}_3 = \hat{R}_{31}(\hat{v}_1 - \hat{v}_3) + \hat{R}_{32}(\hat{v}_2 - \hat{v}_3) - \hat{R}_{35}\hat{v}_3, \quad (4.12c)$$

$$\hat{m}_4 = \hat{R}_{41}(\hat{v}_1 - \hat{v}_4) + \hat{R}_{42}(\hat{v}_2 - \hat{v}_4) - \hat{R}_{45}\hat{v}_4 \quad (4.12d)$$

mit Widerstandskoeffizienten \hat{R}_{ij} modelliert. Dabei wurde schon benützt, dass die Geschwindigkeit des porösen Mediums \hat{v}_5 gleich Null ist und dass die perkolierenden und nichtperkolierenden Phasen eines Fluides keine Grenzfläche miteinander haben und somit $\hat{R}_{12} = \hat{R}_{34} = 0$ gilt.

4.1.4 Selbstkonsistente Schließbedingung

Das System besteht momentan aus vier Massenerhaltungsgleichungen (4.2), aus vier Impulserhaltungsgleichungen (4.3) und aus einer Volumenerhaltungsgleichung (4.1a). Diesen neun Gleichungen stehen jedoch zehn Variablen, darunter vier Sättigungen S_i und vier Geschwindigkeiten \hat{v}_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ und zwei Drücke P_1, P_3 , gegenüber. Damit ist das System

nicht geschlossen. In der Arbeit [Hilf 09] wurde eine selbstkonsistente Schließbedingung als

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\frac{\hat{R}_{13}}{\phi_1} + \frac{\hat{R}_{14}}{\phi_1} + \frac{\hat{R}_{15}}{\phi_1} + \frac{\hat{R}_{31}}{\phi_3} - \frac{\hat{R}_{41}}{\phi_4} + \frac{\hat{M}_1}{\phi_1} \right) \hat{v}_1 + \hat{\rho}_{\text{W}} \hat{D}_i^1 \hat{v}_1 + \\
& + \left(-\frac{\hat{R}_{23}}{\phi_{21}} - \frac{\hat{R}_{24}}{\phi_2} - \frac{\hat{R}_{25}}{\phi_2} + \frac{\hat{R}_{32}}{\phi_3} - \frac{\hat{R}_{42}}{\phi_4} + \frac{\hat{M}_1}{\phi_2} \right) \hat{v}_2 + \hat{\rho}_{\text{W}} \hat{D}_i^2 \hat{v}_2 + \\
& + \left(-\frac{\hat{R}_{13}}{\phi_1} + \frac{\hat{R}_{23}}{\phi_2} - \frac{\hat{R}_{31}}{\phi_3} - \frac{\hat{R}_{32}}{\phi_3} - \frac{\hat{R}_{35}}{\phi_3} - \frac{\hat{M}_3}{\phi_3} \right) \hat{v}_3 + \hat{\rho}_{\text{O}} \hat{D}_i^3 \hat{v}_3 + \\
& + \left(-\frac{\hat{R}_{14}}{\phi_1} + \frac{\hat{R}_{24}}{\phi_2} + \frac{\hat{R}_{41}}{\phi_4} + \frac{\hat{R}_{42}}{\phi_4} + \frac{\hat{R}_{45}}{\phi_4} + \frac{\hat{M}_3}{\phi_4} \right) \hat{v}_4 + \hat{\rho}_{\text{O}} \hat{D}_i^4 \hat{v}_4, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

eingeführt. Sie folgt, wenn man den Grenzwert der verschwindenden Geschwindigkeiten annimmt. Wenn man nun die Impulserhaltungen der zweiten und dritten Phase addiert und davon die Impulserhaltung der ersten und vierten Phase subtrahiert, dann erhält man mit Hilfe der Gleichung (4.13) für den Gradienten des Druckunterschiedes

$$\hat{\partial}_x(\hat{P}_3 - \hat{P}_1) = \frac{1}{2} \hat{\partial}_x \left(\hat{\Pi}_a^* S_1^{-\alpha} - \hat{\Pi}_b^* S_3^{-\beta} + \gamma \hat{P}_2^* S_2^{\gamma-1} - \delta \hat{P}_4^* S_4^{\delta-1} \right). \tag{4.14}$$

Diese Gleichung folgt auch unter der Annahme, dass die funktionale Abhängigkeit des Druckunterschiedes sich auf die der Sättigungen beschränkt. Dies wird in vielen Experimenten beobachtet. Wenn nun diese Gleichung integriert wird und man den Druckunterschied als makroskopischen Kapillardruck bezeichnet, dann ergibt sich

$$\hat{P}_c(S_{\text{W}}, S_2, S_4) = \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2) - \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4), \tag{4.15a}$$

$$\hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2) = \frac{1}{2} \left(\hat{\Pi}_a^* (S_{\text{W}} - S_2)^{-\alpha} + \gamma \hat{P}_2^* S_2^{\gamma-1} \right) + \hat{P}_{02}^*, \tag{4.15b}$$

$$\hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4) = \frac{1}{2} \left(\hat{\Pi}_b^* (1 - S_{\text{W}} - S_4)^{-\beta} + \delta \hat{P}_4^* S_4^{\delta-1} \right) + \hat{P}_{04}^* \tag{4.15c}$$

mit $\hat{P}_{02}^*, \hat{P}_{04}^*$ als zusätzlichen Parametern. Hierbei wurde der Kapillardruck \hat{P}_c in einen vom nichtperkolierenden Wasser abhängigen \hat{P}_{c2} und in einen vom nichtperkolierenden Öl abhängigen \hat{P}_{c4} partiellen Kapillardruck aufgespalten.

Der Unterschied zum DBRMMWBL-Modell ist nun, dass der hier definierte makroskopische Kapillardruck ein Ergebnis des Modells und nicht eine nötige prozessabhängige Eingabe des Modells ist. Er weist keine Hysterese auf und die benötigten Parameter $\hat{\Pi}_a^*, \hat{\Pi}_b^*, \hat{P}_2^*, \hat{P}_4^*, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \hat{P}_0^*$ zeigen keine Prozessabhängigkeit, sondern sind reine Materialparameter.

4.2 Näherungen

Das im vorigen Abschnitt vorgestellte Modell besteht aus zehn stark gekoppelten partiellen differentialalgebraischen Gleichungen. Diese analytisch zu lösen, ist unmöglich. Deswegen werden hier verschiedene Näherungen eingeführt, die das System wesentlich vereinfachen.

4.2.1 Vernachlässigbare Trägheit

Die Näherung der vernachlässigbaren Trägheit, d.h.

$$\hat{D}_i^i \hat{v}_i = 0 \quad (4.16)$$

mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, beruht auf den geringen Fließgeschwindigkeiten. Sie wird auch in dem DBRMMWBL-Modell verwendet.

4.2.2 Viskose Dominanz

Die Näherung wurde das erste Mal in [Dost 11a] verwendet. Typischerweise sind die viskosen Kopplungskoeffizienten \hat{R}_{ij} von der Größenordnung $10^8 \text{kgm}^{-3} \text{s}^{-1}$, während der Impulsaustausch durch Massenaustausch Werte von $\hat{M}_i \approx 10^3 \text{kgm}^{-3} \text{s}^{-1}$ besitzt, wenn man annimmt, dass $|S_{\text{w}} - S_{\text{w}}^*| > 10^{-4}$ und $\partial_t S_{\text{w}} < 1 \text{s}^{-1}$. Damit ist der Impulsaustausch durch viskose Kopplung um mehrere Größenordnungen größer als der durch Massenaustausch. Dies führt zu

$$\bigcup_{i \in \{3,4,5\}} \hat{R}_{1i} \gg \hat{M}_1, \quad (4.17a)$$

$$\bigcup_{i \in \{3,4,5\}} \hat{R}_{2i} \gg \hat{M}_1, \quad (4.17b)$$

$$\bigcup_{i \in \{1,2,5\}} \hat{R}_{3i} \gg \hat{M}_3, \quad (4.17c)$$

$$\bigcup_{i \in \{1,2,5\}} \hat{R}_{4i} \gg \hat{M}_3. \quad (4.17d)$$

4.2.3 Keine viskose Kopplung

Bei den relativen Permeabilitäten des DBRMMWBL-Modell wird angenommen, dass die Poren immer entweder mit Wasser oder Öl gefüllt sind und somit die Phasen nicht miteinander wechselwirken. So kann man auf ähnliche Weise in diesem Modell annehmen, dass es keine viskose Kopplung zwischen den einzelnen Phasen gibt, beziehungsweise die viskosen Kopplungskoeffizienten der Phasen mit dem porösen Medium viel größer als die der Phasen mit den anderen Phasen sind

$$\bigcap_{i,j \in \{1,2,3,4\}} \hat{R}_{i5} \gg \hat{R}_{ij}. \quad (4.18)$$

Auf makroskopischen Skalen kann eine starke Kopplung der nichtperkolierenden Phasen mit dem porösen Medium auch existieren, obwohl es auf der Porenskala keine Grenzflächen zwischen ihnen gibt, da es zum Beispiel durch die Porenraumgeometrie zu einem Zurückhalten einer Blase kommen kann.

4.2.4 Immobile nichtperkolierende Phasen

Wenn man wie in [Hilf 10] davon ausgeht, dass die Kraft, die nötig ist, um Kontaktlinien zu verschieben, viel größer ist als die Kraft, die nötig ist, um ein Fluid entlang einer Kontaktfläche zu bewegen, dann ist unter der Annahme, dass die nichtperkolierenden Phasen eine deutlich höhere Kontaktliniendichte als die perkolierenden Phasen aufweisen, die Geschwindigkeit der nichtperkolierenden Phasen nahe Null. Diese Immobilität kann in erster Näherung durch

$$\bigcap_{(i,j) \in \{1,2,3,4,5\}^2 \setminus \{(2,5), (4,5)\}} \hat{R}_{25} \gg \hat{R}_{ij}, \quad (4.19a)$$

$$\bigcap_{(i,j) \in \{1,2,3,4,5\}^2 \setminus \{(2,5), (4,5)\}} \hat{R}_{45} \gg \hat{R}_{ij}. \quad (4.19b)$$

dargestellt werden. Desweiteren wird davon ausgegangen, dass die Massenaustauschterme die starke Kopplung der nichtperkolierenden Phasen an das poröse Medium nicht ausgleichen können

$$\hat{R}_{25} \gg \hat{M}_1, \quad (4.20a)$$

$$\hat{R}_{45} \gg \hat{M}_3, \quad (4.20b)$$

was bei Annahme der viskosen Dominanz aus dem letzten Abschnitt automatisch erfüllt ist.

Wenn man nun diese Annahmen in die Impulsbilanzen einsetzt, so ergibt sich

$$\bigcap_{\substack{i \in \{1,3\} \\ j \in \{2,4\}}} \hat{v}_i \gg \hat{v}_j, \quad (4.21)$$

und die Grenzwerte

$$\bigcap_{i \in \{2,4\}} \lim_{\hat{R}_{i5} \rightarrow \infty} \hat{v}_i = 0. \quad (4.22)$$

4.2.5 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser

Wenn man sich auf Bewässerungen konzentriert und annimmt, dass keine anfängliche nicht-perkolierende Wassersättigung vorhanden ist, was z.B. bei einer primären Bewässerung der Fall ist, dann bleibt die nichtperkolierende Wassersättigung nicht existent

$$S_2(\hat{x}, \hat{t}) = 0 \quad \forall \hat{x}, \hat{t} \quad (4.23)$$

und Wasser kommt einzig in perkolierender Form vor. Dies ist der Fall, weil der Massenaustauschterm \hat{M}_2 für Bewässerungen, sprich $\hat{\partial}_t S_{\text{W}} > 0$, so beschaffen ist, dass nichtperkolierendes Wasser vernichtet, aber nicht erschaffen werden kann.

Falls es zu nichtmonotonen Bewässerungen kommen kann, kann man auch alternativ annehmen, dass der Wassermassenaustauschparameter $\eta_2 = 0$ oder die begrenzende Sättigung $S_2^* = 0$ ist. Somit kann auch kein nichtperkolierendes Wasser aus perkolierendem Wasser generiert werden. Dies kann bei bestimmten Porenraumgeometrien und Benetzungseigenschaften der Fall sein.

4.2.6 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl

Wenn man annimmt dass anfänglich kein nichtperkolierendes Öl vorhanden ist und der Öl-massenaustauschparameter $\eta_4 = 0$ oder die begrenzende Sättigung $S_4^* = 0$ ist, dann kann kein nichtperkolierendes Öl aus perkolierendem Öl entstehen und Öl ist einzig in perkolierender

Form vorhanden. Dies kann bei bestimmten Porenraumgeometrien und Benetzungseigenschaften der Fall sein. Dies führt dann zu

$$S_4(\hat{x}, \hat{t}) = 0 \quad \forall \hat{x}, \hat{t}. \quad (4.24)$$

Hier muss im Gegensatz zum nichtperkolierenden Wasser immer $\eta_4 = 0$ oder $S_4^* = 0$ gesetzt werden, da der Massenaustauschterm \hat{M}_4 für Bewässerungen eine Produktion von nichtperkolierendem Öl vorsieht.

4.3 Umformungen

Hier werden die grundlegenden Gleichungen aus Abschnitt 4.1 mit den Näherungen aus 4.2 jeweils für das volle System und den Näherungen der immobilen nichtperkolierenden Phasen, des einzig in perkolierender Form vorhandenen Wassers und des einzig in perkolierender Form vorhandenen Öls zunächst in eine reduzierte Form und anschließend in eine dimensionslose fraktionale Flussformulierung gebracht. Zuletzt wird ein laufender Wellenansatz durchgeführt.

4.3.1 Reduzierte Form

In diesem Abschnitt werden mit Hilfe der vorigen Näherungen die Erhaltungssätze in eine stark an die Gleichung (3.11) erinnernde Form gebracht.

4.3.1.1 Volles System

Wenn man wie im DBRMMWBL-Modell die Näherung der vernachlässigbaren Trägheit 4.2.1 verwendet, dann erhält man Impulserhaltungen, die nicht mehr von der zeitlichen Veränderung abhängig und linear in der Geschwindigkeit sind. Somit können sie nach den Geschwindigkeiten aufgelöst werden, was zu einer Verallgemeinerung des Darcy-Gesetzes führt, das man dann in die Massenbilanzen einsetzen kann.

Die rechte Seite der Impulserhaltungen lautet damit nach [Dost 11a]

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_1 - \hat{M}_1 \hat{v}_1 \\ \hat{m}_2 + \hat{M}_1 \hat{v}_2 \\ \hat{m}_3 - \hat{M}_3 \hat{v}_3 \\ \hat{m}_4 + \hat{M}_3 \hat{v}_4 \end{pmatrix} = -\hat{R} \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

mit der viskosen Widerstandsmatrix \hat{R} definiert durch

$$\hat{R}(S_{\text{W}}, S_2, S_4, \hat{\partial}_t S_{\text{W}}) = \begin{pmatrix} \hat{R}_{11} & 0 & -\hat{R}_{13} & -\hat{R}_{14} \\ 0 & \hat{R}_{22} & -\hat{R}_{23} & -\hat{R}_{24} \\ -\hat{R}_{31} & -\hat{R}_{32} & \hat{R}_{33} & 0 \\ -\hat{R}_{41} & -\hat{R}_{42} & 0 & \hat{R}_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

wobei

$$\hat{R}_{11}(S_{\text{W}}, S_2, \hat{\partial}_t S_{\text{W}}) = \hat{R}_{15} + \hat{R}_{13} + \hat{R}_{14} + \hat{M}_1, \quad (4.27a)$$

$$\hat{R}_{22}(S_{\text{W}}, S_2, \hat{\partial}_t S_{\text{W}}) = \hat{R}_{25} + \hat{R}_{23} + \hat{R}_{24} - \hat{M}_1, \quad (4.27b)$$

$$\hat{R}_{33}(S_{\text{W}}, S_4, \hat{\partial}_t S_{\text{W}}) = \hat{R}_{35} + \hat{R}_{31} + \hat{R}_{32} + \hat{M}_3, \quad (4.27c)$$

$$\hat{R}_{44}(S_{\text{W}}, S_4, \hat{\partial}_t S_{\text{W}}) = \hat{R}_{45} + \hat{R}_{41} + \hat{R}_{42} - \hat{M}_3 \quad (4.27d)$$

verwendet wurde. Damit kann man den Geschwindigkeitsvektor $(v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ gleich der linken Seite der Impulsgleichungen (4.3) multipliziert mit der negativen inversen viskosen Widerstandsmatrix $-\hat{R}^{-1}$ setzen. Multipliziert mit der jeweiligen Phasenvolumendichte ϕ_i ergibt sich für die Volumenflüsse

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \\ \hat{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \hat{v}_1 \\ \phi_2 \hat{v}_2 \\ \phi_3 \hat{v}_3 \\ \phi_4 \hat{v}_4 \end{pmatrix} = \hat{\Lambda} \begin{pmatrix} \hat{\partial}_x \hat{\Sigma}_1 + \hat{F}_1 \\ \hat{\partial}_x \hat{\Sigma}_2 + \hat{F}_2 \\ \hat{\partial}_x \hat{\Sigma}_3 + \hat{F}_3 \\ \hat{\partial}_x \hat{\Sigma}_4 + \hat{F}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

dabei wurde die Mobilitätsmatrix $\hat{\Lambda}$ mit Komponenten

$$\hat{\lambda}_{ij}(S_{\text{W}}, S_2, S_4, \hat{\partial}_t S_{\text{W}}) = \phi^2 S_i S_j \hat{R}_{ij}^{-1} \quad (4.29)$$

eingeführt.

Mit der Annahme der viskosen Dominanz 4.2.2 entfallen durch die Vernachlässigung der Massenaustauschterme sämtliche Abhängigkeiten in \hat{R} . Damit ist \hat{R} eine Parametermatrix und $\hat{\Lambda}$ nicht mehr von der Sättigungsänderungsrate abhängig. Wenn man nun zusätzlich annimmt, dass keine viskose Kopplung 4.2.3 existiert, dann wird die viskose Widerstandsmatrix und die Mobilitätsmatrix zu Diagonalmatrizen und die Volumenflüsse vereinfachen sich zu

$$\hat{q}_i = \frac{\phi^2 S_i^2}{\hat{R}_{ii}} \left(\hat{\partial}_{\hat{x}} \hat{\Sigma}_i + \hat{F}_i \right). \quad (4.30)$$

Durch Einsetzen der Konstitutivannahmen ergibt sich für die Flüsse

$$\hat{q}_{\text{W}} = -\frac{\phi^2 (S_{\text{W}} - S_2)^2}{\hat{R}_{11}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_3 + 2 \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2), \quad (4.31a)$$

$$\hat{q}_{\text{O}} = -\frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 - \frac{\phi^2 (1 - S_{\text{W}} - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_3 + 2 \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4), \quad (4.31b)$$

$$\hat{q}_2 = -\frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_3 + 2 \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2), \quad (4.31c)$$

$$\hat{q}_4 = -\frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 + 2 \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4), \quad (4.31d)$$

mit $\hat{q}_{\text{W}} = \hat{q}_1 + \hat{q}_2$ und $\hat{q}_{\text{O}} = \hat{q}_3 + \hat{q}_4$, und man kann aus den Erhaltungsgleichungen das zu (3.1) analoge System

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_{\text{W}} = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{q}_{\text{W}}, \quad (4.32a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_{\text{O}} = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{q}_{\text{O}}, \quad (4.32b)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_2 = -\frac{\hat{M}_1}{\hat{\rho}_{\text{W}}} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{q}_2, \quad (4.32c)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_4 = -\frac{\hat{M}_3}{\hat{\rho}_{\text{O}}} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{q}_4, \quad (4.32d)$$

$$S_{\text{W}} + S_{\text{O}} = 1, \quad (4.32e)$$

$$\hat{P}_3 - \hat{P}_1 = \hat{P}_{\text{c}}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) = \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2) - \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4), \quad (4.32f)$$

generieren.

Wenn nun S_{W}, S_2, S_4 und \hat{P}_1 als die primären Variablen bestimmt werden, dann ergibt sich

Parameter	η_2	η_4	Π_a^*	Π_b^*	P_2^*	P_4^*	α	β	γ	δ	S_{Oim}	S_{Wdr}	R_3^1
Wert	4	3	1.6	0.025	2.5	0.4	0.52	0.9	1.5	3.5	0.19	0.15	2

Tabelle 4.1: Verwendete Modellparameter.

ähnlich wie in Abschnitt 3.3.1

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{W}} = & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(\frac{\phi^2 (S_{\text{W}} - S_2)^2}{\hat{R}_{11}} + \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2) - \right. \\ & \left. - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.33a)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} (1 - S_{\text{W}}) = & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(\frac{\phi^2 (1 - S_{\text{W}} - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} + \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 + \frac{\phi^2 (1 - S_{\text{W}} - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\phi^2 (1 - S_{\text{W}} - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} + 2 \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.33b)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} S_2 = & -\phi \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{W}}^* - S_{\text{W}}} \frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c2}(S_{\text{W}}, S_2) - \right. \\ & \left. - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.33c)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} S_4 = -\phi \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{W}}^* - S_{\text{W}}} \frac{\partial S_{\text{W}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 - 2 \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4) \right], \quad (4.33d)$$

wobei die in den eckigen Klammern stehenden Terme die in Abhängigkeit der primären Variablen befindlichen Flüsse sind.

4.3.1.2 Immobiler nichtperkolierende Phasen

Wenn man neben den Annahmen aus Abschnitt 4.3.1.1 annimmt, dass die nichtperkolierenden Phasen, wie in Abschnitt 4.2.4 besprochen, immobil sind, dann ergibt sich für die Flüsse

Parameter	S_2^*	S_4^*	S_{W}^*	S_{20}	S_{40}	$S_{\text{W}0}$
primär	0	S_{Oim}	$1 - S_{\text{Oim}}$	0	0	0
sekundär	0	S_{Oim}	$1 - S_{\text{Oim}}$	S_{Wdr}	0	S_{Wdr}

Tabelle 4.2: Die Grenz- und Anfangssättigungen der zwei Hauptbewässerungskurven.

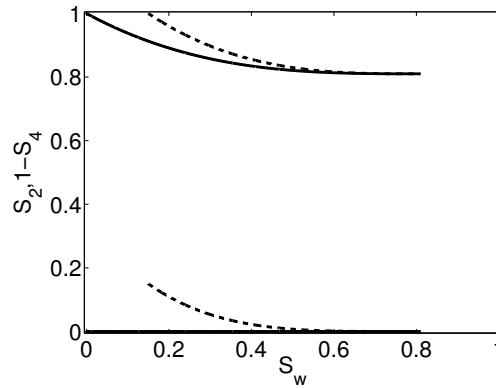


Abbildung 4.1: Funktionale Abhängigkeit der nichtperkolierenden Sättigungen von der Wassersättigung aus den Gleichungen (4.35) mit Parametern aus den Tabellen 4.1 und 4.2. Die durchgezogene Linien zeigen die primäre Bewässerung und die gestrichelte Linien zeigen die sekundäre Bewässerung. Beide Kurven sind von links nach rechts zu lesen.

$$\hat{q}_W = -\frac{\phi^2 (S_W - S_2)^2}{\hat{R}_{11}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1, \quad (4.34a)$$

$$\hat{q}_O = -\frac{\phi^2 (1 - S_W - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_3, \quad (4.34b)$$

$$\hat{q}_2 = 0, \quad (4.34c)$$

$$\hat{q}_4 = 0. \quad (4.34d)$$

Damit können dann die Gleichungen (4.32c) und (4.32d) wie in [Hilf 06b] zu

$$S_2(S_W) = S_2^* + (S_{20} - S_2^*) \left(\frac{S_W^* - S_W}{S_W^* - S_{W0}} \right)^{\eta_2}, \quad (4.35a)$$

$$S_4(S_W) = S_4^* + (S_{40} - S_4^*) \left(\frac{S_W - S_W^*}{S_{W0} - S_W^*} \right)^{\eta_4}. \quad (4.35b)$$

integriert werden, damit sind die nichtperkolierenden Phasen S_2, S_4 keine unabhängigen Variablen mehr, sondern Funktionen der Wassersättigung. Die Grenzsättigungen S_2^*, S_4^*, S_W^* wurden bereits in Abschnitt 4.1.3 erörtert. Die Werte S_{20}, S_{40}, S_{W0} stellen die Anfangsbedingungen eines Prozesses für S_2, S_4, S_W dar. Wird nun ausschließlich bewässert, so sind die sechs Parameter Konstanten und nehmen für die zwei Hauptbewässerungen die Werte aus Tabelle 4.2 an.

Die funktionale Abhängigkeit der nichtperkolierenden Sättigungen von der Wassersättigung ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die durchgezogene Linien zeigen die primäre Bewässerung

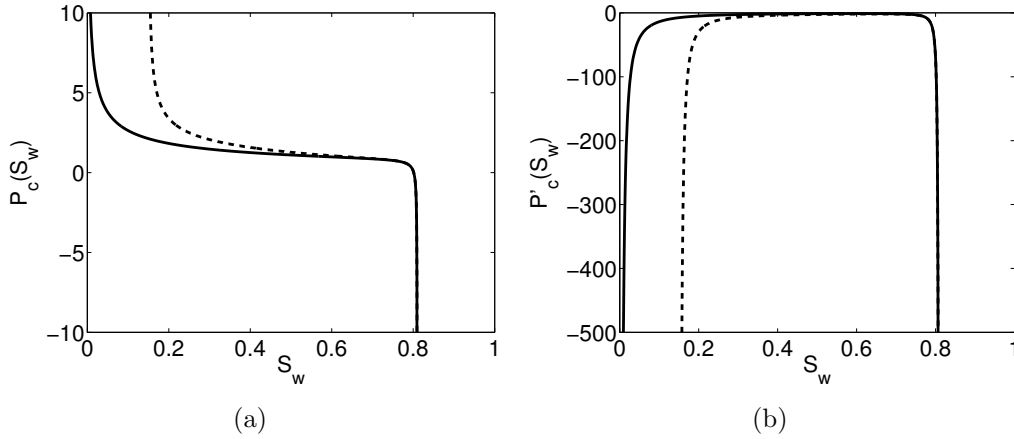


Abbildung 4.2: Kapillardrucksfunktion (a) aus (4.36) und deren Ableitung (b) mit Parametern aus den Tabellen 4.1 und 4.2 und $P_{02}^* = P_{04}^* = 0$. Die durchgezogene Linie zeigt die primäre Bewässerung und die gestrichelte Linie zeigt die sekundäre Bewässerung. Alle Kurven sind von links nach rechts zu lesen.

und die gestrichelte Linien zeigen die sekundäre Bewässerung. Beide Kurven sind von links nach rechts zu lesen. Bei der primären Bewässerung sind anfangs weder nichtperkolierendes Wasser, noch nichtperkolierendes Öl vorhanden. Mit zunehmender Wassersättigung wird nichtperkolierendes Öl bis zum Maximalwert der residualen Ölsättigung S_{Oim} erzeugt, wobei die Produktionsrate abnimmt. Die nichtperkolierende Wassersättigung bleibt bei Null. Bei der sekundären Bewässerung ist anfangs die nichtperkolierende Wassersättigung gleich der residualen Wassersättigung S_{Wdr} . Nichtperkolierendes Öl ist nicht vorhanden. Mit zunehmender Wassersättigung wird nichtperkolierendes Öl bis zum Maximalwert der residualen Ölsättigung S_{Oim} erzeugt. Die nichtperkolierende Wassersättigung wird vernichtet, bis nichts mehr vorhanden ist. Beide Produktionsraten nehmen mit zunehmender Wassersättigung ab.

Der Kapillardruck ist auch nur von der Wassersättigung abhängig

$$\begin{aligned} \hat{P}_c(S_w) = & \frac{1}{2} \left(\Pi_a^* (S_w - S_2(S_w))^{-\alpha} - \Pi_b^* (1 - S_w - S_4(S_w))^{-\beta} + \right. \\ & \left. + \gamma P_2^* S_2(S_w)^{\gamma-1} - \delta P_4^* S_4(S_w)^{\delta-1} \right) + \hat{P}_{02}^* - \hat{P}_{04}^*. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Er und seine Ableitung sind in Abbildung 4.2 für die Hauptbewässerungen dargestellt. Die durchgezogene Linien zeigen die primäre Bewässerung und die gestrichelte Linien zeigen die sekundäre Bewässerung. Beide Kurven sind von links nach rechts zu lesen. Bei der primären Bewässerung ist der Kapillardruck zuallererst unendlich groß und nimmt stark ab. Bei $(S_w, \hat{P}_c(S_w)) = (0.61, 0.97)$ erreicht er einen Wendepunkt. Daraufhin nimmt der Kapillardruck wieder stärker ab bis er bei der maximalen Wassersättigung unendlich ne-

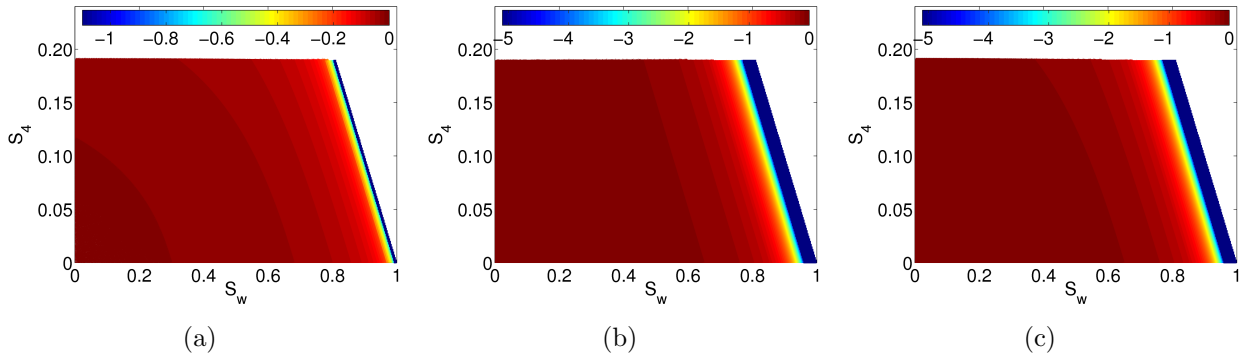


Abbildung 4.3: Kapillardrucksfunktion (a) aus (4.38) und deren Ableitung nach S_{W} (b) und S_4 (c) mit Parametern aus Tabelle 4.1 und $P_{04}^* = 0$. Auf den dunkelblauen Flächen sind die Werte der jeweiligen Funktion kleiner als der minimale Wert der Farbskala. Alle drei Funktionen gehen gegen $-\infty$, wenn die Wassersättigung gegen $1 - S_4$ geht.

gativ ist. Bei der sekundären Bewässerung startet die Wassersättigung bei der residuellen Wassersättigung S_{Oim} . Der Kapillardruck ist unendlich groß und nimmt stark ab. Bei $(S_{\text{W}}, \hat{P}_c(S_{\text{W}})) = (0.66, 0.95)$ erreicht er einen Wendepunkt. Daraufhin nimmt der Kapillardruck wieder stärker ab, bis er bei der maximalen Wassersättigung unendlich negativ ist.

Wenn nun S_{W} und \hat{P}_1 als die primären Variablen bestimmt werden, dann ergibt sich

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{W}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 (S_{\text{W}} - S_2)^2}{\hat{R}_{11}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 \right], \quad (4.37a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (1 - S_{\text{W}}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 (1 - S_{\text{W}} - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 + \hat{P}_c(S_{\text{W}})) \right]. \quad (4.37b)$$

4.3.1.3 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser

Wenn man neben den Annahmen aus Abschnitt 4.3.1.1 annimmt, dass Wasser einzig in perkolierender Form, wie in Abschnitt 4.2.5 besprochen, vorhanden ist, dann reduziert sich der Kapillardruck auf

$$\hat{P}_c(S_{\text{W}}, S_4) = \hat{P}_{c4}(S_{\text{W}}, S_4) = -\frac{1}{2} (\Pi_{\text{b}}^* (1 - S_{\text{W}} - S_4)^{-\beta} + \delta P_4^* S_4^{\delta-1}) + P_{04}^*. \quad (4.38)$$

Er und seine Ableitungen sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Der Kapillardruck und seine Ableitungen sind überall negativ und gehen gegen $-\infty$, wenn die Wassersättigung gegen

$1 - S_4$ geht, und gegen 0, wenn die Wassersättigung gegen 0 geht. Der Kapillardruck ist negativer für größere nichtperkolierende Ölsättigungen.

Die Flüsse lauten

$$\hat{q}_W = -\frac{\phi^2 S_W^2}{\hat{R}_{11}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1, \quad (4.39a)$$

$$\hat{q}_O = -\frac{\phi^2 (1 - S_W - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_3 - \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 + 2\hat{P}_c(S_W, S_4)), \quad (4.39b)$$

$$\hat{q}_4 = 0, \quad (4.39c)$$

$$\hat{q}_4 = -\frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 + 2\hat{P}_c(S_W, S_4)). \quad (4.39d)$$

Wenn nun S_W, S_4 und \hat{P}_1 als die primären Variablen bestimmt werden, dann ergibt sich

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_W = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 S_W^2}{\hat{R}_{11}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 \right], \quad (4.40a)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (1 - S_W) &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(\frac{\phi^2 (1 - S_W - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} + \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\phi^2 (1 - S_W - S_4)^2}{\hat{R}_{33}} + 2 \frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_c(S_W, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.40b)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_4 = -\phi \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_W^* - S_W} \frac{\partial S_W}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 S_4^2}{\hat{R}_{44}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 + 2\hat{P}_c(S_W, S_4)) \right], \quad (4.40c)$$

wobei die in den eckigen Klammern stehenden Terme die in Abhängigkeit der primären Variablen befindlichen Flüsse sind.

4.3.1.4 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl

Wenn man neben den Annahmen aus Abschnitt 4.3.1.1 annimmt, dass Öl einzig in perkolierender Form, wie in Abschnitt 4.2.6 besprochen, vorhanden ist, dann reduziert sich der Kapillardruck auf

$$\hat{P}_c(S_W, S_2) = P_{c2}(S_W, S) = \frac{1}{2} \left(\Pi_a^*(S_W - S_2)^{-\alpha} + \gamma P_2^* S_2^{\gamma-1} \right) + P_{02}^*. \quad (4.41)$$

Er und seine Ableitungen sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Der Kapillardruck ist überall größer 0.9 und gehen gegen ∞ , wenn die Wassersättigung gegen die nichtperkolierende Wassersättigung geht. Der Kapillardruck ist positiver für größere nichtperkolierende Wassersättigungen. Die Ableitung des Kapillardrucks nach S_W ist immer negativ und geht gegen $-\infty$,

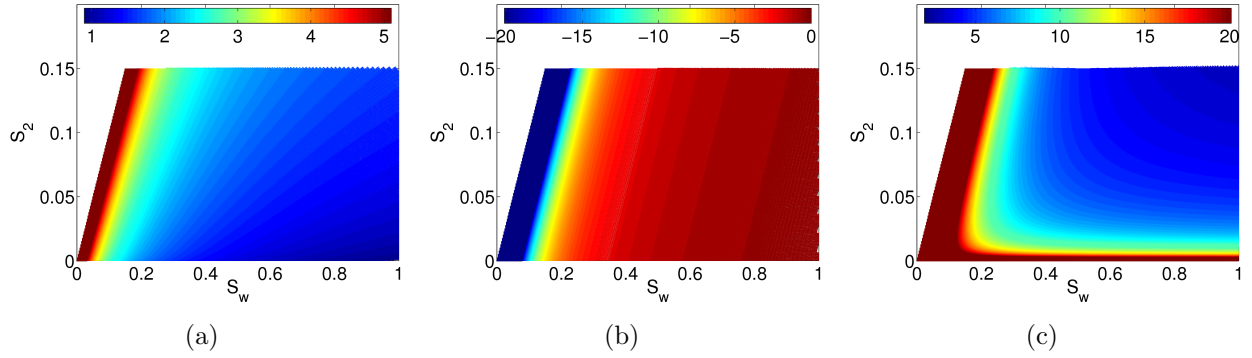


Abbildung 4.4: Kapillardrucksfunktion (a) aus (4.41) und deren Ableitung nach S_w (b) und S_2 (c) mit Parametern aus Tabelle 4.1 und $P_{02}^* = 0$. Auf der dunkelblauen Fläche in (b) sind die Werte der jeweiligen Funktion kleiner als der minimale Wert der Farbskala. Auf den dunkelroten Flächen in (a),(c) sind die Werte der jeweiligen Funktion grösser als der maximale Wert der Farbskala. Wenn die Wassersättigung gegen die nichtperkolierende Wassersättigung geht, dann gehen die Funktionen gegen ∞ in (a),(c) und gegen $-\infty$ in (b).

wenn die Wassersättigung gegen die nichtperkolierende Wassersättigung geht. Die Ableitung des Kapillardrucks nach S_2 ist immer größer 2 und geht gegen ∞ , wenn die Wassersättigung gegen die nichtperkolierende Wassersättigung geht.

Die Flüsse lauten

$$\hat{q}_w = - \left(\frac{\phi^2 (S_w - S_2)^2}{\hat{R}_{11}} + \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 + \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_c(S_w, S_2), \quad (4.42a)$$

$$\hat{q}_0 = - \frac{\phi^2 (1 - S_w)^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_3, \quad (4.42b)$$

$$\hat{q}_2 = - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 - \hat{P}_c(S_w, S_2)), \quad (4.42c)$$

$$\hat{q}_4 = 0. \quad (4.42d)$$

Wenn nun S_{w}, S_2 und \hat{P}_1 als die primären Variablen bestimmt werden, dann ergibt sich

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_{\text{w}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(\frac{\phi^2 (S_{\text{w}} - S_2)^2}{\hat{R}_{11}} + \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_1 - \frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{P}_c(S_{\text{w}}, S_2) \right], \quad (4.43a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (1 - S_{\text{w}}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 (1 - S_{\text{w}})^2}{\hat{R}_{33}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 + \hat{P}_c(S_{\text{w}}, S_2)) \right], \quad (4.43b)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \hat{t}} S_2 = -\phi \eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\text{w}}^* - S_{\text{w}}} \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\phi^2 S_2^2}{\hat{R}_{22}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{P}_1 - \hat{P}_c(S_{\text{w}}, S_2)) \right], \quad (4.43c)$$

wobei die in den eckigen Klammern stehenden Terme die in Abhängigkeit der primären Variablen befindlichen Flüsse sind.

4.3.2 Dimensionslose Gleichungen

In diesem Abschnitt werden die reduzierten Gleichungen dimensionslos gemacht.

4.3.2.1 Volles System

Nun führt man die dimensionslosen Variablen ein

$$x = \frac{1}{\bar{l}} \hat{x}, \quad (4.44a)$$

$$q_{\text{w}} = \frac{1}{\phi^2 \hat{u}} \hat{q}_{\text{w}}, \quad (4.44b)$$

$$q_{\text{0}} = \frac{1}{\phi^2 \hat{u}} \hat{q}_{\text{0}}, \quad (4.44c)$$

$$q_2 = \frac{1}{\phi^2 \hat{u}} \hat{q}_2, \quad (4.44d)$$

$$q_4 = \frac{1}{\phi^2 \hat{u}} \hat{q}_4, \quad (4.44e)$$

$$t = \frac{\hat{u}}{\bar{l} \phi} \hat{t}, \quad (4.44f)$$

$$P_1 = \frac{1}{\hat{P}_{\text{b}}} \hat{P}_1, \quad (4.44g)$$

$$P_c(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = P_{c2}(S_{\text{w}}, S_2) - P_{c4}(S_{\text{w}}, S_4), \quad (4.44h)$$

$$P_{c2}(S_{\text{w}}, S_2) = \frac{1}{\hat{P}_{\text{b}}} \hat{P}_{c2}(S_{\text{w}}, S_2), \quad (4.44i)$$

$$P_{c4}(S_{\text{w}}, S_4) = \frac{1}{\hat{P}_{\text{b}}} \hat{P}_{c4}(S_{\text{w}}, S_4), \quad (4.44j)$$

wobei \hat{l} eine makroskopische Länge, \hat{u} eine makroskopische Geschwindigkeit und \hat{P}_b einen ausgezeichneten Druck wie den Eindring- oder Durchbruchdruck definiert. Hiermit lässt sich nun aus (4.33) die dimensionslose Formulierung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_w = \frac{1}{Ca_w} \frac{\partial}{\partial x} & \left[((S_w - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2) \frac{\partial}{\partial x} P_1 - R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} P_{c2}(S_w, S_2) - \right. \\ & \left. - R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_w, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (1 - S_w) = \frac{1}{Ca_w} \frac{\partial}{\partial x} & \left[(R_3^1 (1 - S_w - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2) \frac{\partial}{\partial x} P_1 + \right. \\ & + R_3^1 (1 - S_w - S_4)^2 \frac{\partial}{\partial x} P_{c2}(S_w, S_2) + \\ & \left. + (R_3^1 (1 - S_w - S_4)^2 + 2R_4^1 S_4^2) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_w, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.45b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_2 = -\eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_w^* - S_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{Ca_w} \frac{\partial}{\partial x} & \left[R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} P_1 - R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} P_{c2}(S_w, S_2) - \right. \\ & \left. - R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_w, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.45c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_4 = -\eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_w^* - S_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{Ca_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[R_4^1 S_4^2 \frac{\partial}{\partial x} P_1 - 2R_2^1 S_4^2 \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_w, S_4) \right] \quad (4.45d)$$

gewinnen, wobei R_2^1, R_3^1, R_4^1 die Verhältnisse zwischen \hat{R}_{11} und $\hat{R}_{22}, \hat{R}_{33}, \hat{R}_{44}$ darstellen. Die dimensionslose makroskopische Kapillarzahl

$$Ca_w = \frac{\hat{R}_{11} \hat{u} \hat{l}}{\phi^2 \hat{P}_b}. \quad (4.46)$$

gibt das Verhältnis zwischen dem makroskopischen viskosen Druckabfall und dem makroskopischen Kapillardruck wieder. Sie ist identisch mit der makroskopischen Kapillarzahl aus (3.14), wenn $\hat{R}_{11} = \hat{\mu}_w / \phi^2 \hat{k}$.

4.3.2.2 Immobile nichtperkolierende Phasen

Wenn man die dimensionslosen Variablen aus (4.44) einführt, dann lässt sich aus (4.37) die dimensionslose Formulierung

$$\frac{\partial}{\partial t} S_w = \frac{1}{Ca_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[(S_w - S_2(S_w))^2 \frac{\partial}{\partial x} P_1 \right], \quad (4.47a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - S_w) = \frac{1}{Ca_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[R_3^1 (1 - S_w - S_4(S_w))^2 \frac{\partial}{\partial x} (P_c(S_w) + P_1) \right] \quad (4.47b)$$

gewinnen. Die dimensionslose makroskopische Kapillarzahl wurde in (4.46) definiert.

4.3.2.3 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser

Wenn man die dimensionslosen Variablen aus (4.44) einführt, dann lässt sich aus (4.40) die dimensionslose Formulierung

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\text{w}} = \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[S_{\text{w}}^2 \frac{\partial}{\partial x} P_1 \right], \quad (4.48a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (1 - S_{\text{w}}) = \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} & \left[(R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2) \frac{\partial}{\partial x} P_1 \right. \\ & \left. + (R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + 2R_4^1 S_4^2) \frac{\partial}{\partial x} P_c(S_{\text{w}}, S_4) \right], \end{aligned} \quad (4.48b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_4 = -\eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{w}}^* - S_{\text{w}}} \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[R_4^1 S_4^2 \frac{\partial}{\partial x} (P_1 + 2P_c(S_{\text{w}}, S_4)) \right] \quad (4.48c)$$

gewinnen. Die dimensionslose makroskopische Kapillarzahl wurde in (4.46) definiert.

4.3.2.4 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl

Wenn man die dimensionslosen Variablen aus (4.44) einführt, dann lässt sich aus (4.43) die dimensionslose Formulierung

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\text{w}} = \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[((S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2) \frac{\partial}{\partial x} P_1 - R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} P_c(S_{\text{w}}, S_2) \right], \quad (4.49a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - S_{\text{w}}) = \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[R_3^1 (1 - S_{\text{w}})^2 \frac{\partial}{\partial x} (P_1 + P_c(S_{\text{w}}, S_2)) \right], \quad (4.49b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_2 = -\eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\text{w}}^* - S_{\text{w}}} \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[R_2^1 S_2^2 \frac{\partial}{\partial x} (P_1 - P_c(S_{\text{w}}, S_2)) \right] \quad (4.49c)$$

gewinnen. Die dimensionslose makroskopische Kapillarzahl wurde in (4.46) definiert.

4.3.3 Fraktionale Flussgleichung

Die dimensionslosen reduzierten Gleichungen können nun in eine fraktionale Flussformulierung gebracht werden.

4.3.3.1 Volles System

Es werden fraktionale Flussfunktionen

$$f_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = \frac{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.50a)$$

$$f_2(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = \frac{R_2^1 S_2^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.50b)$$

$$f_4(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = \frac{R_4^1 S_4^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2} \quad (4.50c)$$

und fraktionale Mobilitäten

$$\lambda_{\text{w}2}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = -\frac{R_3^1 (S_{\text{w}} - S_2)^2 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + 2R_2^1 R_3^1 S_2^2 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_2^1 R_4^1 S_2^2 S_4^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.51a)$$

$$\lambda_{\text{w}4}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = \frac{R_3^1 (S_{\text{w}} - S_2)^2 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + 2R_4^1 (S_{\text{w}} - S_2)^2 S_4^2 + R_2^1 R_4^1 S_2^2 S_4^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.51b)$$

$$\lambda_{22}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = -\frac{R_2^1 S_2^2 ((S_{\text{w}} - S_2)^2 + 2R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2)}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.51c)$$

$$\lambda_{24}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = \frac{R_2^1 S_2^2 (R_4^1 S_4^2 - (S_{\text{w}} - S_2)^2)}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.51d)$$

$$\lambda_{42}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = \frac{R_4^1 S_4^2 (R_2^1 S_2^2 - R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2)}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.51e)$$

$$\lambda_{44}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) = -\frac{R_4^1 S_4^2 (2(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2)}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2} \quad (4.51f)$$

definiert.

Damit erhält man die fraktionale Flussformulierung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} S_{\mathbb{W}} + \frac{q_{\text{tot}}}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} f_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{\mathbb{W}2}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c2}(S_{\mathbb{W}}, S_2) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{\mathbb{W}4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.52a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} S_2 + \eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial t} S_{\mathbb{W}} + \frac{q_{\text{tot}}}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} f_2(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{22}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{24}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.52b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} S_4 + \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial t} S_{\mathbb{W}} + \frac{q_{\text{tot}}}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} f_4(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{42}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\mathbb{W}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{44}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.52c)$$

Hierbei wurde der Gesamtfluss $q_{\text{tot}} = q_{\mathbb{W}} + q_{\mathbb{O}}$ eingeführt. Wenn nun noch \hat{u} and \hat{l} so gewählt

werden, dass $q_{\text{tot}} = \text{Ca}_{\text{w}}$, dann erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{w}} + \frac{\partial}{\partial x} f_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{\text{w}2}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c2}(S_{\text{w}}, S_2) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{\text{w}4}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\text{w}}, S_4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.53a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} S_2 + \eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\text{w}}^* - S_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{w}} + \frac{\partial}{\partial x} f_2(S_{\text{w}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{22}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{24}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.53b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} S_4 + \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{w}}^* - S_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{w}} + \frac{\partial}{\partial x} f_4(S_{\text{w}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{42}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Ca}_{\text{w}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{44}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial x} P_{c4}(S_{\text{w}}, S_2, S_4) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.53c)$$

Wenn nun die Zeit- und Raumvariablen nochmals skaliert werden

$$\tilde{x} = \text{Ca}_{\text{w}} x, \quad (4.54a)$$

$$\tilde{t} = \text{Ca}_{\text{w}} t, \quad (4.54b)$$

dann führt das zuletzt zu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_{\text{W}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_{\text{W}2}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_{\text{c}2}(S_{\text{W}}, S_2) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_{\text{W}4}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_{\text{c}4}(S_{\text{W}}, S_4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.55\text{a})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_2 + \eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\text{W}}^* - S_{\text{W}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_{\text{W}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_2(S_{\text{W}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_{22}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_{\text{c}4}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_{24}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_{\text{c}4}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.55\text{b})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_4 + \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{W}}^* - S_{\text{W}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_{\text{W}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_4(S_{\text{W}}, S_2, S_4) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_{42}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_{\text{c}4}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_{44}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_{\text{c}4}(S_{\text{W}}, S_2, S_4) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.55\text{c})$$

4.3.3.2 Immobiler nichtperkolierende Phasen

Ausgehend von dem dimensionslosen Gleichungssystem der immobilen nichtperkolierenden Phasen (4.47) definiert man eine fraktionale Flussfunktion

$$f(S_{\text{W}}) = \frac{(S_{\text{W}} - S_2(S_{\text{W}}))^2}{(S_{\text{W}} - S_2(S_{\text{W}}))^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{W}} - S_4(S_{\text{W}}))^2} \quad (4.56)$$

und eine dimensionslose Kapillarfunktion

$$D(S_{\text{W}}) = -R_3^1 \frac{(S_{\text{W}} - S_2(S_{\text{W}}))^2 (1 - S_{\text{W}} - S_4(S_{\text{W}}))^2}{(S_{\text{W}} - S_2(S_{\text{W}}))^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{W}} - S_4(S_{\text{W}}))^2} \frac{\partial P_{\text{c}}(S_{\text{W}})}{\partial S_{\text{W}}}, \quad (4.57)$$

die in Abbildung 4.5 für die primäre Bewässerung und die sekundäre Bewässerung dargestellt sind. Die fraktionale Flussfunktion zeigt ein konvex-konkaves Verhalten mit einem Wendepunkt. Dementsprechend besitzt ihre Ableitung eine Glockenform mit einem Maximum. Die primäre Bewässerung und die sekundäre Bewässerung unterscheiden sich nur geringfügig, indem das Maximum der Ableitung für die sekundäre Bewässerung größer ist. Die Kapillar-

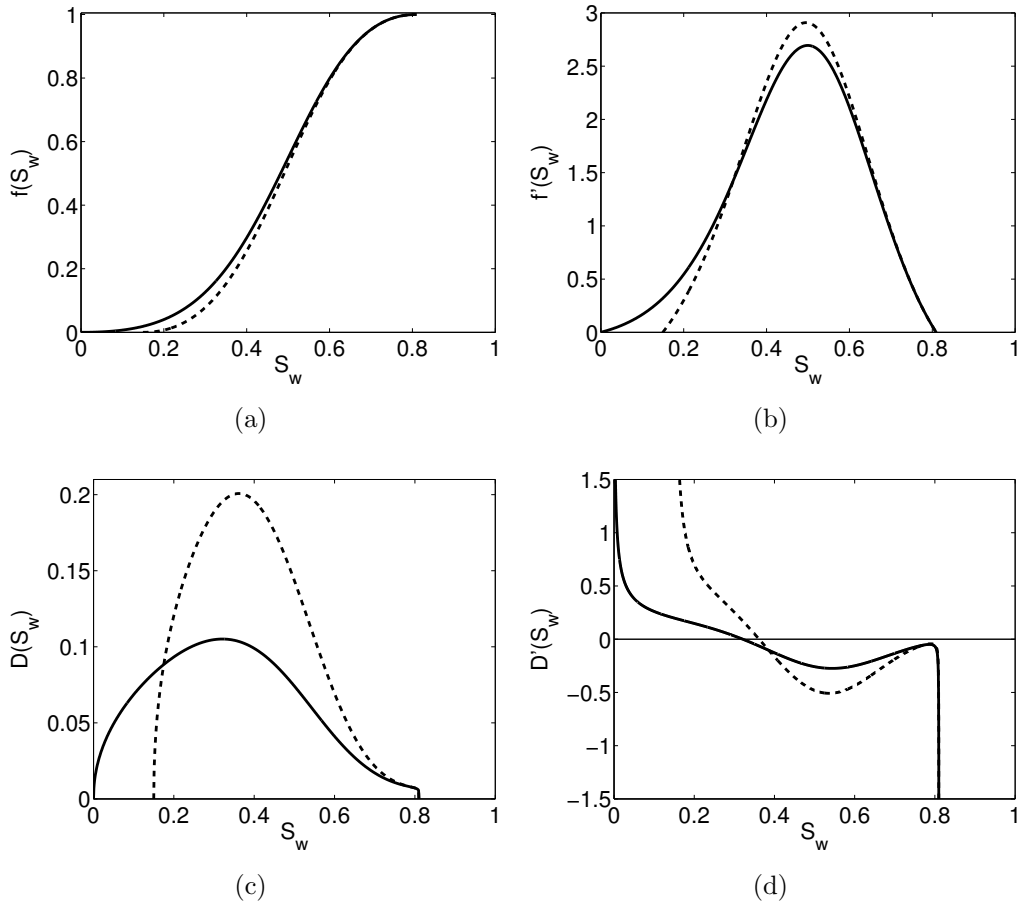


Abbildung 4.5: Fraktionale Flussfunktion $f(S_w)$ (a), ihre Ableitung $f'(S_w)$ (b) und Kapillarfunktion $D(S_w)$ (c) und ihre Ableitung $D'(S_w)$ (d) für das Modell mit immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten mit Parametern aus den Tabellen 4.1 und 4.2. Die durchgezogene Linie zeigt die primäre Bewässerung und die gestrichelte Linie zeigt die sekundäre Bewässerung.

funktion besitzt ein Maximum, das bei der sekundären Bewässerung deutlich größer ist. Sie hat zwei Nullstellen bei dem maximalen und minimalen Wassersättigungswert. Die Ableitung der Kapillarfunktion geht gegen ∞ , wenn die Wassersättigung minimal wird, und gegen $-\infty$, wenn die Wassersättigung maximal wird.

Damit erhält man nach geeigneter Wahl für \hat{u} und \hat{l} , nämlich so dass $q_{\text{tot}} = C_{aw}$, und der Zeit- und Raumskalierung von (4.54) die dimensionslose fraktionale Flussformulierung

$$\frac{\partial S_w}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial f(S_w)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[D(S_w) \frac{\partial S_w}{\partial \tilde{x}} \right] = 0. \quad (4.58)$$

4.3.3.3 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser

Ausgehend von dem dimensionslosen Gleichungssystem des einzig in perkolierender Form vorhandenen Wassers (4.48) definiert man die fraktionalen Flussfunktionen

$$f_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_4) = \frac{S_{\text{w}}^2}{S_{\text{w}}^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.59a)$$

$$f_4(S_{\text{w}}, S_4) = \frac{R_4^1 S_4^2}{S_{\text{w}}^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2} \quad (4.59b)$$

und die dimensionslosen fraktionalen Mobilitäten

$$\lambda_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_4) = -\frac{S_{\text{w}}^2 (R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + 2R_4^1 S_4^2)}{S_{\text{w}}^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}, \quad (4.60a)$$

$$\lambda_2(S_{\text{w}}, S_4) = \frac{R_4^1 S_4^2 (2S_{\text{w}}^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2)}{S_{\text{w}}^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}} - S_4)^2 + R_4^1 S_4^2}. \quad (4.60b)$$

Die fraktionalen Mobilitäten unterscheiden sich von der Kapillarfunktion durch den fehlenden Kapillardrucksableitungsterm, da diesmal der Kapillardruck nicht mehr nur von der Wassersättigung abhängt.

In Abbildung 4.6 sind die fraktionalen Flussfunktionen $f_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_4)$, $f_4(S_{\text{w}}, S_4)$ und die fraktionalen Mobilitäten $\lambda_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_4)$, $\lambda_4(S_{\text{w}}, S_4)$ für $R_3^1 = R_4^1 = 1$ dargestellt. Die fraktionale Flussfunktion für Wasser nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. Sie hängt kaum von der nichtperkolierenden Ölsättigung ab, wobei mehr nichtperkolierende Ölsättigung zu einem niedrigeren Wert in f_{w} führt. Desweiteren zeigt f_{w} in Bezug auf die Wassersättigung das gleiche konvex-konkave Verhalten wie für den Fall der immobilen nichtperkolierenden Phasen. Die fraktionale Flussfunktion für nichtperkolierendes Öl nimmt Werte zwischen 0 und 0.1 an. In Bezug auf die Wassersättigung zeigt sie eine Glockenform mit einem Maximum bei Sättigung 50% und mit Minima bei minimaler und maximaler Wassersättigung. Sie besitzt ein konvex ansteigendes Verhalten in Bezug auf die nichtperkolierenden Ölsättigung. Die fraktionale Mobilität des Wassers besitzt Werte aus $(-0.25, 0)$. In Bezug auf die Wassersättigung zeigt sie eine negative Glockenform mit einem Minimum bei mittleren Wassersättigungen und Maxima bei minimaler und maximaler Wassersättigung. Bei zunehmender nichtperkolierenden Ölsättigung nimmt ihr Wert leicht zu. Dies geschieht hauptsächlich bei hohen Wassersättigungen. Die fraktionale Mobilität des nichtperkolierenden Öls hat Werte in $(0, 0.07)$ und erreicht ein Maximum bei maximal Wasser- und nichtperkolierender Ölsättigung.

Nach geeigneter Wahl für \hat{u} und \hat{l} , nämlich so dass $q_{\text{tot}} = C_{\text{aw}}$, und der Zeit- und Raumska-

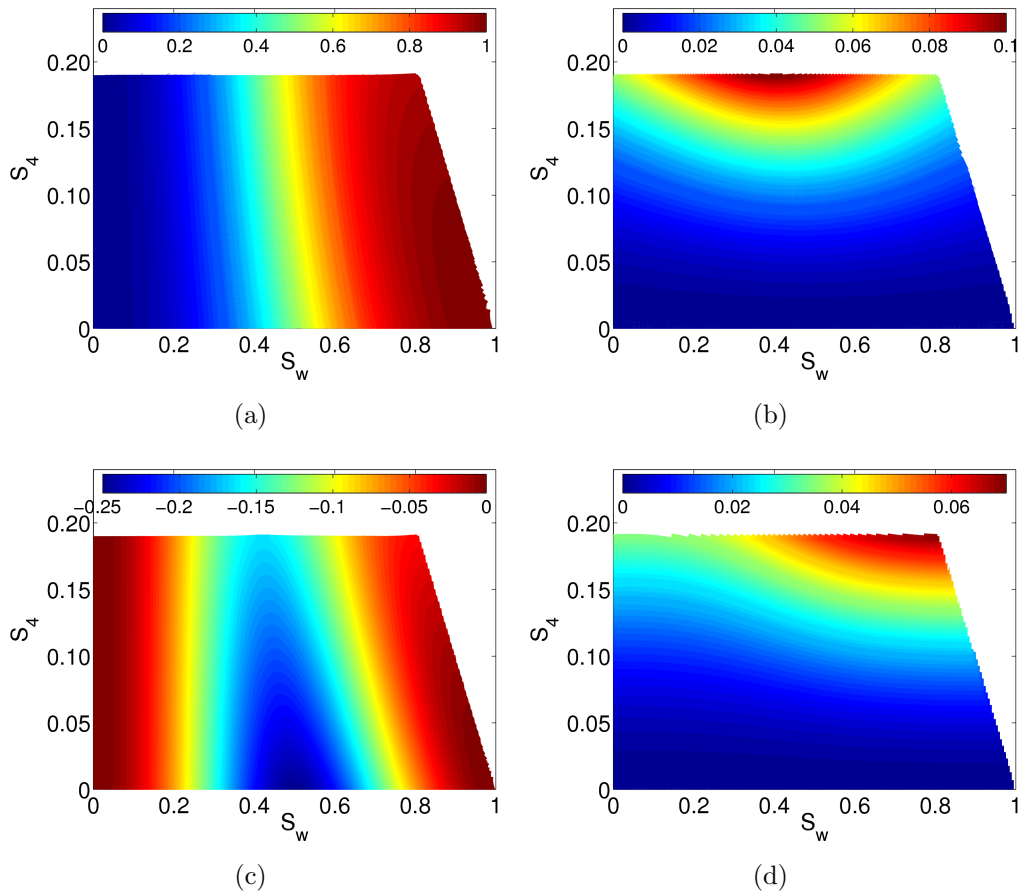


Abbildung 4.6: Fraktionale Flussfunktionen $f_W(S_W, S_4)$ (a) und $f_4(S_W, S_4)$ (b) und fraktionale Mobilitäten $\lambda_W(S_W, S_4)$ (c) und $\lambda_4(S_W, S_4)$ (d) für $R_3^1 = R_4^1 = 1$.

lierung von (4.54) erhält man die fraktionale Flussformulierung

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_W + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_W(S_W, S_4) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_W(S_W, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_c(S_W, S_4) \right] = 0, \quad (4.61a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_4 + \eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_W^* - S_W} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_W + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_4(S_W, S_4) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_4(S_W, S_4) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_c(S_W, S_4) \right] = 0. \quad (4.61b)$$

4.3.3.4 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl

Ausgehend von dem dimensionslosen Gleichungssystem des einzig in perkolierender Form vorhandenen Öls (4.49) definiert man die fraktionalen Flussfunktionen

$$f_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_2) = \frac{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}})^2}, \quad (4.62a)$$

$$f_2(S_{\text{w}}, S_2) = \frac{R_2^1 S_2^2}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}})^2} \quad (4.62b)$$

und dimensionslose fraktionale Mobilitäten

$$\lambda_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_2) = -\frac{R_3^1 (1 - S_{\text{w}})^2 ((S_{\text{w}} - S_2)^2 + 2R_2^1 S_2^2)}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_3^1 (1 - S_{\text{w}})^2}, \quad (4.63a)$$

$$\lambda_2(S_{\text{w}}, S_2) = -\frac{R_2^1 S_2^2 ((S_{\text{w}} - S_2)^2 + 2R_3^1 (1 - S_{\text{w}})^2)}{(S_{\text{w}} - S_2)^2 + R_2^1 S_2^2 + R_2^1 (1 - S_{\text{w}})^2} \quad (4.63b)$$

Die fraktionalen Mobilitäten unterscheiden sich von der Kapillarfunktion durch den fehlenden Kapillardrucksableitungsterm, da diesmal der Kapillardruck nicht mehr nur von der Wassersättigung abhängt.

In Abbildung 4.7 sind die fraktionalen Flussfunktionen $f_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_2)$, $f_2(S_{\text{w}}, S_2)$ und die fraktionalen Mobilitäten $\lambda_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_2)$, $\lambda_2(S_{\text{w}}, S_2)$ für $R_3^1 = R_4^1 = 1$ dargestellt. Die fraktionale Flussfunktion für Wasser nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. Sie hängt kaum von der nichtperkolierenden Wassersättigung ab. Desweiteren zeigt f_{w} in Bezug auf die Wassersättigung das gleiche konvex-konkave Verhalten wie für den Fall der immobilen nichtperkolierenden Phasen. Die fraktionale Flussfunktion für nichtperkolierendes Wasser nimmt Werte zwischen 0 und 0.06 an. In Bezug auf die Wassersättigung zeigt sie eine Glockenform mit einem Maximum bei mittlerer Sättigung und mit Minima bei minimaler und maximaler Wassersättigung. Sie besitzt ein konvexes ansteigendes Verhalten in Bezug auf die nichtperkolierenden Wassersättigung. Die fraktionale Mobilität des Wassers besitzt Werte aus $(-0.13, 0)$. In Bezug auf die Wassersättigung zeigt sie eine negative Glockenform mit einem Minimum bei mittleren Wassersättigungen und Maxima bei minimaler und maximaler Wassersättigung. Bei zunehmender nichtperkolierender Wassersättigung nimmt ihr Wert leicht ab. Dies geschieht hauptsächlich bei niedrigen Wassersättigungen. Die fraktionale Mobilität des nichtperkolierenden Wassers hat Werte in $(-0.05, 0)$ und erreicht ein Minimum bei minimaler Wasser- und maximaler nichtperkolierender Wassersättigung.

Nach geeigneter Wahl für \hat{u} und \hat{l} , nämlich so dass $q_{\text{tot}} = \text{Ca}_{\text{w}}$, und der Zeit- und Raumska-

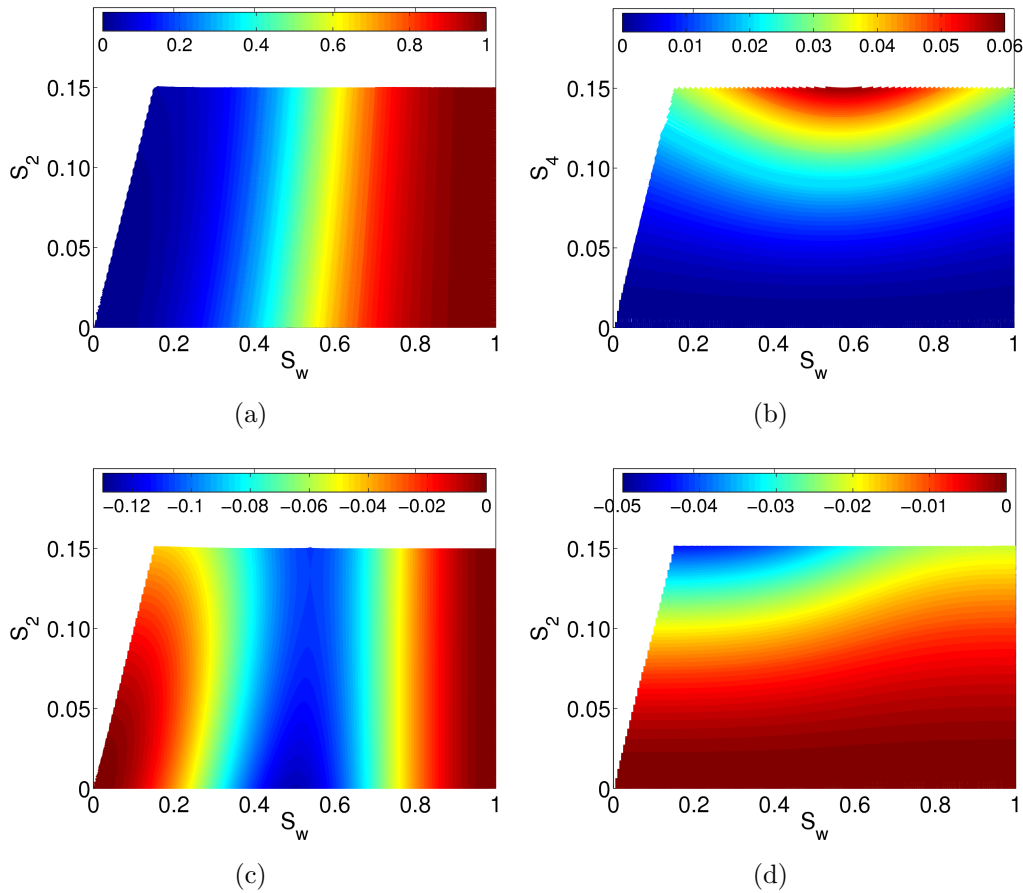


Abbildung 4.7: Fraktionale Flussfunktionen $f_w(S_w, S_2)$ (a) und $f_2(S_w, S_2)$ (b) und fraktionale Mobilitäten $\lambda_w(S_w, S_2)$ (c) und $\lambda_2(S_w, S_2)$ (d) für $R_2^1 = R_3^1 = 1$.

lierung von (4.54) erhält man die fraktionale Flussformulierung

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_w + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_w(S_w, S_2) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_w(S_w, S_2) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_c(S_w, S_2) \right] = 0, \quad (4.64a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_2 + \eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_w^* - S_w} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} S_w + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_2(S_w, S_2) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\lambda_2(S_w, S_2) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} P_c(S_w, S_2) \right] = 0 \quad (4.64b)$$

4.4 Laufende Wellengleichung

Mit der Annahme, dass das Profil mit einer konstanten Geschwindigkeit c propagiert, können die partiellen Differentialgleichungen der fraktionalen Flussformulierungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen vereinfacht werden. Die resultierende Systeme, die aus mehreren Gleichungen bestehen, können nicht in die Form eines dynamischen Systems gebracht werden.

4.4.1 Volles System

Wenn nun eine laufende Wellenvariable $y = \tilde{x} - c\tilde{t}$ eingeführt wird, dann ergibt sich aus dem Gleichungssystem (4.55) folgendes laufende Wellensystem

$$\begin{aligned} & -cS'_{\mathbb{W}} + f'_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) - [\lambda_{\mathbb{W}2}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)P'_{c2}(S_{\mathbb{W}}, S_2)]' - \\ & - [\lambda_{\mathbb{W}4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)P'_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_4)]' = 0, \end{aligned} \quad (4.65a)$$

$$\begin{aligned} & -cS'_2 - c\eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} S'_{\mathbb{W}} + f'_2(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) - [\lambda_{22}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)P'_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)]' - \\ & - [\lambda_{24}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)P'_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)]' = 0, \end{aligned} \quad (4.65b)$$

$$\begin{aligned} & -cS'_4 - c\eta_4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} S'_{\mathbb{W}} + f'_4(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4) - [\lambda_{42}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)P'_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)]' - \\ & - [\lambda_{44}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)P'_{c4}(S_{\mathbb{W}}, S_2, S_4)]' = 0, \end{aligned} \quad (4.65c)$$

wobei ' die Ableitung nach y bezeichnet.

Nach Ausdifferenzieren und ineinander Einsetzen ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
& \left(c\eta^4 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} - \frac{\partial f_4}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \left(c\eta^2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} - \frac{\partial f_2}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(c - \frac{\partial f_{\mathbb{W}}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \left(c\eta^2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} - \frac{\partial f_2}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \right) \right) S'_w - \\
& - \left(\frac{\partial f_4}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial S_2} - c \right) - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\frac{\partial f_{\mathbb{W}}}{\partial S_2} + \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \left(c - \frac{\partial f_2}{\partial S_2} \right) \right) \right) S'_2 - \\
& - \left(\frac{\partial f_4}{\partial S_4} - c - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial f_2}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\frac{\partial f_{\mathbb{W}}}{\partial S_4} + \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial f_2}{\partial S_4} \right) \right) S'_4 - \\
& - \left(\left(\frac{\partial \lambda_{42}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \left(\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \right) (S'_{\mathbb{W}})^2 - \\
& - \left(\left(\frac{\partial \lambda_{42}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}2}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_2} \right) \right) (S'_2)^2 - \\
& - \left(\left(\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}4}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_4} \right) \right) (S'_4)^2 - \\
& - \left(\left(\frac{\partial \lambda_{42}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_2} + \left(\frac{\partial \lambda_{42}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \left(\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_2} + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}2}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}4}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \right) S'_{\mathbb{W}} S'_2 - \\
& - \left(\left(\frac{\partial \lambda_{42}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \left(\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_4} + \left(\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}2}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_4} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}4}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) \right) S'_{\mathbb{W}} S'_4 - \\
& - \left(\left(\frac{\partial \lambda_{42}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_2} + \left(\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_4} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{22}\lambda_{44} - \lambda_{24}\lambda_{42}}{\lambda_{\mathbb{W}4}\lambda_{22} - \lambda_{\mathbb{W}2}\lambda_{24}} \left(\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}2}}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial S_4} \right) \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_2} + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}4}}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}2}}{\lambda_{22}} \frac{\partial \lambda_{24}}{\partial S_2} \right) \frac{\partial P_{c4}}{\partial S_4} \right) \right) S'_2 S'_4 \\
& = 0, \tag{4.66}
\end{aligned}$$

wobei die funktionellen Abhängigkeiten weggelassen wurden. Diese Gleichung kann analytisch nicht gelöst werden.

Das Gleichungssystem (4.65) kann nicht in die Form der Gleichung (2.13) überführt werden.

Damit ist es unmöglich, einen dynamischen Systemansatz zu verfolgen. Deswegen müssen weitere Vereinfachungen getroffen werden, bzw. die einzelnen Bestandteile, wie Massenaustauschterm oder Flussterm, isoliert betrachtet werden. Dies wird in Kapitel 7 geschehen.

4.4.2 Immobile nichtperkolierende Phasen

Ausgehend von dem Abschnitt 4.3.3.2 kann eine laufende Wellenvariable $y = \tilde{x} - c\tilde{t}$ eingeführt werden, womit die Gleichung (4.58) zu der Wellengleichung

$$\left[\frac{\partial f(S_{\text{w}})}{\partial S_{\text{w}}} - c \right] S'_{\text{w}} - [D(S_{\text{w}})S'_{\text{w}}]' = 0 \quad (4.67)$$

wird. Sie ist identisch zur Gleichung (5.1) des DBRMMWBL-Modells. Die Lösungen dieser Gleichung können analog zum DBRMMWBL-Modell diskutiert werden. Dies geschieht in Abschnitt 5.2.

4.4.3 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser

Ausgehend von dem Abschnitt 4.3.3.3 kann eine laufende Wellenvariable $y = \tilde{x} - c\tilde{t}$ eingeführt werden, womit die Gleichungen (4.61) zu den Wellengleichungen

$$-cS'_{\text{w}} + f'_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_4) - [\lambda_{\text{w}}(S_{\text{w}}, S_4)P'_c(S_{\text{w}}, S_4)]' = 0, \quad (4.68a)$$

$$-cS'_4 - c\eta_2 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{w}}^* - S_{\text{w}}} S'_{\text{w}} + f'_4(S_{\text{w}}, S_4) - [\lambda_4(S_{\text{w}}, S_4)P'_c(S_{\text{w}}, S_4)]' = 0 \quad (4.68b)$$

wird.

Nach Ausdifferenzieren und ineinander Einsetzen ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
& \left(-c + \frac{\partial f_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} + \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} c \eta_2 \frac{S_4 - S_4^*}{S_{\text{W}}^* - S_{\text{W}}} - \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} \frac{\partial f_4(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \right) S_{\text{W}}' + \\
& + \left(\frac{\partial f_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} + \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} c - \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} \frac{\partial f_4(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} \right) S_4' + \\
& + \left(\frac{\partial \lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} - \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} \frac{\partial \lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \right) (S_{\text{W}}')^2 + \\
& + \left(\frac{\partial \lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} \frac{\partial \lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} \right) (S_4')^2 + \\
& + \left(\frac{\partial \lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} + \frac{\partial \lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} \frac{\partial \lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} - \frac{\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_4)}{\lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)} \frac{\partial \lambda_4(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_4} \frac{\partial P_c(S_{\text{W}}, S_4)}{\partial S_{\text{W}}} \right) S_{\text{W}}' S_4' = 0.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Diese Gleichung kann analytisch nicht gelöst werden.

Das Gleichungssystem (4.68) kann nicht in die Form der Gleichung (2.13) überführt werden. Damit ist es unmöglich, einen dynamischen Systemansatz zu verfolgen. Deswegen müssen weitere Vereinfachungen getroffen werden, bzw. die einzelnen Bestandteile, wie Massenaustauschterm oder Flussterm, isoliert betrachtet werden. Dies wird in Kapitel 6 geschehen.

4.4.4 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl

Ausgehend von dem Abschnitt 4.3.3.4 kann eine laufende Wellenvariable $y = \tilde{x} - c\tilde{t}$ eingeführt werden, womit die Gleichungen (4.64) zu den Wellengleichungen

$$-cS_{\text{W}}' + f_{\text{W}}'(S_{\text{W}}, S_2) - [\lambda_{\text{W}}(S_{\text{W}}, S_2)P_c'(S_{\text{W}}, S_2)]' = 0, \tag{4.70a}$$

$$-cS_2' - c\eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\text{W}}^* - S_{\text{W}}} S_{\text{W}}' + f_2'(S_{\text{W}}, S_2) - [\lambda_2(S_{\text{W}}, S_2)P_c'(S_{\text{W}}, S_2)]' = 0 \tag{4.70b}$$

wird.

Nach Ausdifferenzieren und ineinander Einsetzen ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
& \left(-c + \frac{\partial f_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} + \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} c \eta_2 \frac{S_2 - S_2^*}{S_{\mathbb{W}}^* - S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} \frac{\partial f_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) S'_{\mathbb{W}} + \\
& + \left(\frac{\partial f_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} + \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} c - \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} \frac{\partial f_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} \right) S'_2 + \\
& + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} \frac{\partial \lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) (S'_{\mathbb{W}})^2 + \\
& + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} \frac{\partial \lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} \right) (S'_2)^2 + \\
& + \left(\frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} + \frac{\partial \lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} \frac{\partial \lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} - \frac{\lambda_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)} \frac{\partial \lambda_2(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_2} \frac{\partial P_c(S_{\mathbb{W}}, S_2)}{\partial S_{\mathbb{W}}} \right) S'_{\mathbb{W}} S'_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Diese Gleichung kann analytisch nicht gelöst werden.

Das Gleichungssystem (4.70) kann nicht in die Form der Gleichung (2.13) überführt werden. Damit ist es unmöglich, einen dynamischen Systemansatz zu verfolgen. Deswegen müssen weitere Vereinfachungen getroffen werden, bzw. die einzelnen Bestandteile, wie Massenaustauschterm oder Flussterm, isoliert betrachtet werden. Dies wird in Kapitel 6 geschehen.

Teil II

Laufende Wellenlösungen

In diesem Teil der Dissertation, der den Hauptteil der Arbeit darstellt, werden laufende Wellenlösungen der verschiedenen Mehrphasenströmungsmodelle und ihre Näherungen diskutiert. Als laufende Wellen werden Sättigungsprofile bezeichnet, die sich in der Form nicht ändern und sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen. Sie stellen eine der am weitesten verbreiteten Ähnlichkeitslösungen dar und vereinfachen die partiellen Differentialgleichungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese können bis zu einem gewissen Grad analytisch, häufig zumindest quasianalytisch mit Hilfe eines dynamischen Systemansatzes, diskutiert werden. So wurde in [Brev 01] ein laufender Wellenansatz für das DBRMMWBL-Modell mit linearer Parametrisierung erörtert. Zusätzlich wurden Ergebnisse für eine Parametrisierung nach Brooks und Corey gezeigt. In dieser Arbeit werden zudem Lösungen für Parametrisierungen nach Van Genuchten behandelt. [Brev 01] enthält mehrere topologisch unterschiedliche Profilklassen. Es wird erörtert, inwieweit diese physikalisch zulässig sind. Desweiteren wird der laufende Wellenansatz auf verschiedene Näherungen des Perkolationsmodells angewendet, was zu Systemen mehrerer Gleichungen führt.

Die komplexere Struktur der Systeme mehrerer Gleichungen macht es im Gegensatz zum DBRMMWBL-Modell möglich, nichtmonotone Profile zu erzeugen, welche in verschiedenen Experimenten [Geig 00, DiCa 00, DiCa 04, DiCa 07, DiCa 08] beobachtet werden konnten. Im Vergleich zu den Systemen einer Gleichung treten bei Systemen mehrerer Gleichungen Freiheitsgrade auf, d.h. Geschwindigkeiten und Randwertsättigungen führen nicht mehr zu eindeutigen Lösungen. Es wird gezeigt, dass dies an den in den Anfangsbedingungen der partiellen Differentialgleichungen versteckten Freiheitsgraden liegt, die ja in einer laufenden Wellenlösung nicht zu sehen sind. Desweiteren können die niedrigerdimensionalen Systeme als invariante Teilmengen der höherdimensionalen Systeme identifiziert werden.

Dieser Teil ist nach Anzahl der Gleichungen und Art der Diskussion gegliedert. So werden in den ersten drei Kapiteln Systeme mit einer, zwei und drei fraktionalen Flussgleichungen quasianalytisch durch einen laufenden Wellenansatz besprochen. Im letzten Kapitel werden die zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen der Systeme mit einer, zwei und drei fraktionalen Flussgleichungen mit Hilfe eines numerischen Algorithmus' gelöst. Dieser Algorithmus verwendet ein adaptives mobiles Gitter für die Raumdiskretisierung und geht auf die Arbeiten [Zege 92, Blom 94, Dam 06] zurück. Dabei können die quasianalytischen Lösungen verifiziert und deren Stabilität untersucht werden.

Im Kapitel über Systeme mit einer Gleichung werden das klassische DBRMMWBL-Modell und die Näherung der immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten des Perkolationsmodells diskutiert. Dieser Abschnitt geht zu einem großen Teil auf [Brev 01] zurück. Das Kapitel über Systeme mit zwei Gleichungen diskutiert Näherungen des Perkolationsmodells, bei de-

nen jeweils eine Flüssigkeit einzig in perkolierender Form vorhanden ist. Im Kapitel über Systeme dreier Gleichungen wird das Perkolationsmodell mit frei beweglichen nichtperkolierenden Flüssigkeiten besprochen. Im vorigen Teil der Arbeit über Mehrphasenströmungen wurde das Perkolationsmodell in eine dimensionslose fraktionale Formulierung gebracht. Leider sind die laufenden Wellensysteme zweier oder dreier Gleichungen mit einem dynamischen Systemansatz nicht diskutierbar. Deswegen werden hier allgemeinere Gleichungen diskutiert, in denen die Näherungen des Perkolationsmodells als Spezialfall enthalten sind. Für diese allgemeinen Gleichungen werden Näherungen getroffen, bis laufende Wellenlösungen mit einem dynamischen Systemansatz gefunden werden können. Die komplizierten zweiten Ordnungsterme, die aus den Kapillar- und Oberflächenkräften resultieren, werden vereinfacht, da sie, falls ihre Vorzeichen nicht variieren, nichts an der globalen Lösung verändern. Bei den Systemen zweier Gleichungen werden zum einen die Massenaustauschterme, indem die Flussfunktionen als nichtgekoppelt angenommen werden, und zum anderen die Flussterme näher untersucht, indem die Massenaustauschterme vernachlässigt werden. Für die Systeme dreier Gleichungen werden nur die Flussterme näher untersucht, indem die Massenaustauschterme vernachlässigt werden. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass in dieser Arbeit ausschließlich Bewässerungswellen untersucht werden.

5 Eine Gleichung

In diesem Kapitel werden laufende Wellenlösungen einerseits des klassischen DBRMMWBL-Modells für die zwei wichtigsten Parametrisierungsmodelle für den Kapillardruck und die relativen Permeabilitäten nach Brooks und Corey und nach Van Genuchten und andererseits des Perkolationsmodells mit immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten untersucht. Dazu wird analog zu [Brev 01] aus dem laufenden Wellenansatz ein dynamisches System gewonnen und diskutiert. Es werden verschiedene topologische Profilklassen identifiziert. Die überall stetig differenzierbaren Profile kann man mit einer neuartigen Formulierung diskutieren, die es ermöglicht, mit einer Abbildung alle Charakteristiken der laufenden Wellenlösungen eines Modells darzustellen. Desweiteren wird die physikalische Zulässigkeit der verschiedenen topologischen Profilklassen untersucht. Das DBRMMWBL-Modell nach Brooks und Corey und nach Van Genuchten weist nur kleine Unterschiede auf. Das Perkolationsmodell führt zu mehreren Verbesserungen im Vergleich zu dem DBRMMWBL-Modell. Erstens können nun auch stetig differenzierbare Wellen, die ein komplett trockenes Medium füllen, erzeugt werden. Zweitens kann man zwischen der primären und sekundären Bewässerung unterscheiden, was zu erheblichen Geschwindigkeitsunterschieden führt. Drittens kann das Verhalten der nichtperkolierenden Flüssigkeitsanteile erörtert werden.

5.1 DBRMMWBL-Modell

Die laufende Wellengleichung für das DBRMMWBL-Modell lautet nach Kapitel 3

$$\left[\frac{\partial f(S_{\text{w}})}{\partial S_{\text{w}}} - c \right] S'_{\text{w}} - [D(S_{\text{w}})S'_{\text{w}}]' = 0 \quad (5.1)$$

mit der fraktionalen Flussfunktion

$$f(S_{\text{w}}) = \frac{k_{\text{w}}(S_{\text{w}})}{k_{\text{w}}(S_{\text{w}}) + M_{\text{O}}^{\text{w}} k_{\text{O}}(S_{\text{w}})} \quad (5.2)$$

und der Kapillarfunktion

$$D(S_w) = -M_0^w k_0(S_w) f(S_w) \frac{\partial P_c(S_w)}{\partial S_w}. \quad (5.3)$$

Wenn nun (5.1) von einem y_0 bis y integriert wird, dann erhält man

$$S_w'(y) = \frac{1}{D(S_w(y))} [f(S_w(y)) - cS_w(y) + c_0] \quad (5.4)$$

mit

$$c_0 = cS_w(y_0) - f(S_w(y_0)) + D(S_w(y_0))S_w'(y_0) \quad (5.5)$$

als Integrationskonstante.

Die Gleichung (5.4) beschreibt ein System mit zwei Parametern c und c_0 , welche über die Randwertbedingungen eindeutig bestimmt werden können. Falls man an einem durch c und c_0 eindeutig bestimmten Sättigungsprofil interessiert ist, so wird die Gleichung (5.4) einfach numerisch mit Anfangspunkt $S_w(y_0)$ integriert.

Um eine qualitative Beschreibung der globalen Struktur der verschiedenen Lösungen aus der Gleichung (5.4) zu erreichen, wird ein geometrischer dynamischer Systemansatz gewählt. Dabei formuliert man die Gleichung (5.1) in ein zweidimensionales dynamisches System erster Ordnung

$$Y' = X, \quad (5.6a)$$

$$X' = \frac{1}{D(X)} \left[\left(\frac{\partial f(X)}{\partial X} - c \right) Y - \frac{\partial D(X)}{\partial X} Y^2 \right] \quad (5.6b)$$

um. Dabei wurde S_w in X und S_w' in Y umbenannt. Die Menge der stationären Punkte

$$\mathcal{S} = \{(X, 0) | 0 < X < 1\} \quad (5.7)$$

bildet eine offene Teilmenge der X -Achse. Die Stabilität des System (5.6) an einem stationären Punkt $S_0 = (X_0, 0) \in \mathcal{S}$ wird durch die Vorzeichen der Eigenwerte des linearisierten Systems bestimmt. Das linearisierte System lautet

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_{22}(X_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

mit

$$a_{22}(X_0) = \frac{f'(X_0) - c}{D(X_0)}. \quad (5.9)$$

Die Eigenwerte sind 0 und $e_1(X_0) = a_{22}(X_0)$, damit stellt (5.6) ein entartetes System dar. Die Kapillarfunktion $D(X)$ wird im folgenden immer eine nicht negative Funktion sein. Damit können die stationären Punkte S_0 folgendermaßen klassifiziert werden

$$S_0 \text{ ist } \begin{cases} \text{stabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_r = \{(X_0, 0) | f'(X_0) < c\}, \\ \text{instabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_\ell = \{(X_0, 0) | f'(X_0) > c\}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Dabei stellen die Mengen \mathcal{S}_r und \mathcal{S}_ℓ die stabilen und instabilen stationären Punkte dar, ihre Indizes r und l wurden so benannt, da die instabilen Punkte den linksseitigen Grenzwert der Sättigung und die stabilen Punkte den rechtsseitigen Grenzwert der Sättigung darstellen. Desweiteren gilt $\mathcal{S} = \mathcal{S}_r \cup \mathcal{S}_\ell \cup \mathcal{S}_z$, wobei

$$\mathcal{S}_z = \{(X_0, 0) | f'(X_0) = c\} \quad (5.11)$$

die Menge der stationären Punkte bezeichnet, deren beide Eigenwerte Null sind. Es kann keine Sattelpunkte geben, da nur ein von Null verschiedener Eigenwert zur Verfügung steht.

Die Gleichung (5.4) wird zu

$$Y_{c_0}(X) = \frac{f(X) - cX + c_0}{D(X)} \quad (5.12)$$

und beschreibt die Trajektorien im Phasenraum (X, Y) mit Scharparameter c_0 .

Da die Funktion $D(X)$ bei $X \in \{0, 1\}$ zwei Nullstellen besitzt, werden dort die Trajektorien singulär.

Das Verhalten der Trajektorien für $X \rightarrow 0^+$ wird durch

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} Y_{c_0}(X) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{c_0}{D(X)} = \text{sgn}(c_0)\infty \quad (5.13)$$

bestimmt. Somit existiert eine Separatrixkurve $\mathcal{C}_0(X) = Y_0(X)$, die das Verhalten des rechtsseitigen Grenzwertes $X \rightarrow 0^+$ bestimmt. Trajektorien mit positivem c_0 -Wert gehen gegen ∞ und Trajektorien mit negativem c_0 -Wert gehen gegen $-\infty$ für $X \rightarrow 0^+$.

Das Verhalten der Trajektorien für $X \rightarrow 1^-$ wird durch

$$\lim_{X \rightarrow 1^-} Y_{c_0}(X) = \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{1 - c + c_0}{D(X)} = \operatorname{sgn}(1 - c + c_0)\infty \quad (5.14)$$

bestimmt. Somit existiert eine Separatrixkurve $\mathcal{C}_1(X) = Y_{c-1}(X)$, die das Verhalten des linksseitigen Grenzwertes $X \rightarrow 1^-$ bestimmt. Trajektorien mit c_0 -Wert kleiner $c - 1$ gehen gegen ∞ und Trajektorien mit c_0 -Wert größer $c - 1$ gehen gegen $-\infty$ für $X \rightarrow 1^-$. Beide Separatrixkurven fallen zusammen, falls $c = 1$.

Die Separatrixkurven $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ nehmen genau dann einen endlichen Wert in ihrem jeweiligen Limes an, wenn

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{f'(X) - c}{D'(X)} \quad \text{bzw.} \quad (5.15a)$$

$$\lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{f'(X) - c}{D'(X)} \quad (5.15b)$$

konvergiert. Die Flussfunktionen sind in den meisten Parametrisierungsmodellen konvex-konkave Funktionen, für die $f'(0) = f'(1) = 0$ gilt. Die Ableitung der Kapillarfunktionen bei $X = 0, 1$ kann jedoch je nach Modell divergieren oder gegen Null konvergieren.

Falls die Gleichungen (5.15) divergieren, dann folgt

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_0(X) = -\infty, \quad (5.16a)$$

$$\lim_{X \rightarrow 1^-} \mathcal{C}_1(X) = +\infty. \quad (5.16b)$$

Dementsprechend zeigen alle Trajektorien singuläres Verhalten, wenn die Wassersättigung minimal oder maximal wird.

5.1.1 Parametrisierungsmodelle

Hier werden die zwei wichtigsten Parametrisierungsmodelle kurz vorgestellt.

5.1.1.1 Brooks-Corey

Die Parametrisierung nach Brooks und Corey lautete in Abschnitt 3.2

$$k_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}) = S_{\mathbb{W}}^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}}, \quad (5.17a)$$

$$k_{\mathbb{O}}(S_{\mathbb{W}}) = (1 - S_{\mathbb{W}})^2 \left(1 - S_{\mathbb{W}}^{\frac{2+\lambda}{\lambda}}\right), \quad (5.17b)$$

$$\hat{P}_c(S_{\mathbb{W}}) = \hat{P}_0^* S_{\mathbb{W}}^{-\frac{1}{\lambda}}. \quad (5.17c)$$

In diesem Abschnitt wird der Porenverteilungsindex λ gleich 2 gesetzt, wobei alle $\lambda \in [1, 4]$ die qualitativ gleichen Ergebnisse liefern. Daraus ergibt sich mit $X = S_{\mathbb{W}}$ und dimensionslosem Kapillardruck

$$k_{\mathbb{W}}(X) = X^4, \quad (5.18a)$$

$$k_{\mathbb{O}}(X) = (1 - X)^2(1 - X^2), \quad (5.18b)$$

$$P_c(X) = X^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.18c)$$

Wenn nun beispielhaft wie in [Brev 01] ein Viskositätsverhältnis zwischen Wasser und Öl von 2 : 1 angenommen wird, erhält man für die fraktionale Flussfunktion und die Kapillarfunktion

$$f(X) = \frac{X^4}{-X^4 + 4X^3 - 4X + 2}, \quad (5.19a)$$

$$D(X) = \frac{(1 - X)^2(1 - X^2)X^{\frac{5}{2}}}{-X^4 + 4X^3 - 4X + 2}. \quad (5.19b)$$

In Abbildung 5.1 sind die fraktionale Flussfunktion $f(X)$ und ihre Ableitung $f'(X)$ und die Kapillarfunktion $D(X)$ und ihre Ableitung $D'(X)$ nach Brooks und Corey mit $\lambda = 2$ dargestellt. Man sieht, dass die fraktionale Flussfunktion eine streng monoton wachsende Funktion mit einem Wendepunkt ist. Sie besitzt eine konvex-konkave Struktur mit $f'(0) = f'(1) = 0$. Die Ableitung der fraktionalen Flussfunktion und die Kapillarfunktion haben jeweils zwei Nullstellen bei $X \in \{0, 1\}$ und ein Maximum bei $(X, f'(X)) = (0.64, 3.48)$ bzw. $(X, D(X)) = (0.58, 0.09)$. Die Ableitung der Kapillarfunktion hat drei Nullstellen bei $X = 0, 0.58, 1$, ein Maximum bei $(X, D'(X)) = (0.43, 0.23)$ und ein Minimum bei $(X, D'(X)) = (0.71, -0.42)$.

Für $c \in (0, 3.48)$ hat der Eigenwert e_1 aus (5.9) zwei Nullstellen $N_1 \leq N_2$. Zwischen den Nullstellen ist er positiv und außerhalb ist er negativ. Damit ergibt sich für die stationären

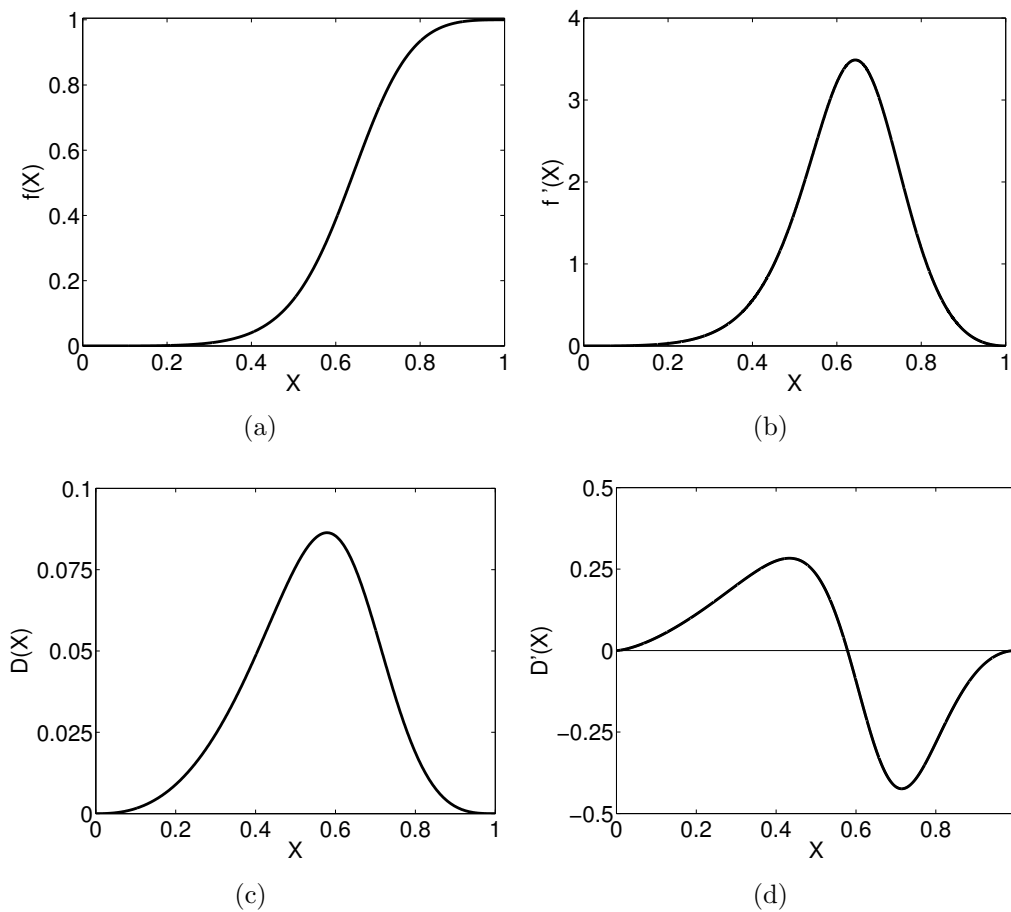


Abbildung 5.1: Fraktionale Flussfunktion $f(X)$, ihre Ableitung $f'(X)$ und Kapillarfunktion $D(X)$ und ihre Ableitung $D'(X)$ nach Brooks und Corey mit $\lambda = 2$.

Punkte

$$\mathcal{S}_z = \{(N_1, 0), (N_2, 0)\}, \quad (5.20a)$$

$$\mathcal{S}_r = \{(X_0, 0) | X_0 \in (0, N_1) \cup (N_2, 1)\}, \quad (5.20b)$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(X_0, 0) | X_0 \in (N_1, N_2)\}. \quad (5.20c)$$

Für $c = 3.48$ existiert genau eine Nullstelle, damit ist \mathcal{S}_ℓ leer, \mathcal{S}_z enthält diese eine Nullstelle und \mathcal{S}_r enthält den Rest von \mathcal{S} . Für $c > 3.48$ existiert keine Nullstelle mehr, e_1 ist überall negativ und somit gilt $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}$.

Nachdem $f'(X)$, $D(X)$ und $D'(X)$ bei $X = 0, 1$ gleich Null sind, divergieren die Grenzwerte für die Separatrizen \mathcal{C}_0 und \mathcal{C}_1 in (5.15), und es gilt (5.16). Damit ergibt sich für \mathcal{C}_0 und \mathcal{C}_1

das Randverhalten

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_0(X) = -\infty, \quad (5.21a)$$

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_1(X) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } c > 1, \\ -\infty, & \text{falls } c < 1, \end{cases} \quad (5.21b)$$

$$\lim_{X \rightarrow 1^-} \mathcal{C}_0(X) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } c < 1, \\ -\infty, & \text{falls } c > 1, \end{cases} \quad (5.21c)$$

$$\lim_{X \rightarrow 1^-} \mathcal{C}_1(X) = +\infty. \quad (5.21d)$$

Bei $c = 1$ sind die beiden Separatrizen identisch und verhalten sich wie in (5.21a) und (5.21d).

5.1.1.2 Van Genuchten

Die vereinfachte Parametrisierung nach Van Genuchten lautet nach Abschnitt 3.2

$$k_{\mathbb{W}}(S_{\mathbb{W}}) = S_{\mathbb{W}}^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - S_{\mathbb{W}}^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \right]^2, \quad (5.22a)$$

$$k_{\mathbb{D}}(S_{\mathbb{W}}) = (1 - S_{\mathbb{W}})^{\frac{1}{2}} \left(1 - S_{\mathbb{W}}^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \right)^{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}, \quad (5.22b)$$

$$\hat{P}_c(S_{\mathbb{W}}) = \frac{1}{\hat{\alpha}} \left[S_{\mathbb{W}}^{-\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (5.22c)$$

mit Parameter $1 < n < 10$. Der dimensionslose Kapillardruck wird aus Gleichung (3.7) entnommen. Im Gegensatz zu Brooks und Corey, wo die fraktionale Flussfunktion und die Kapillarfunktion für alle λ das gleiche Verhalten aufweisen, gibt es in der Van-Genuchten-Parametrisierung einige Bifurkationen.

In Abbildung 5.2 sind die fraktionale Flussfunktion $f(S_{\mathbb{W}})$ und die Kapillarfunktion $D(S_{\mathbb{W}})$ und das logarithmische Erreichen des Grenzwertes $S_{\mathbb{W}} \rightarrow 1$ ihrer Ableitungen $f'(S_{\mathbb{W}}), D'(S_{\mathbb{W}})$ für verschiedene n bei Viskositätsverhältnis zwischen Wasser und Öl von 2 : 1 dargestellt.

Der Abbildung 5.2(a) kann man folgendes Verhalten für die Flussfunktion entnehmen:

$$f(S_{\mathbb{W}}) \text{ ist } \begin{cases} \text{konvex, falls} & n < 1.156, \\ \text{konvex-konkav-konvex, falls} & 1.156 < n < 1.33, \\ \text{konvex-konkav, falls} & n > 1.33. \end{cases} \quad (5.23)$$

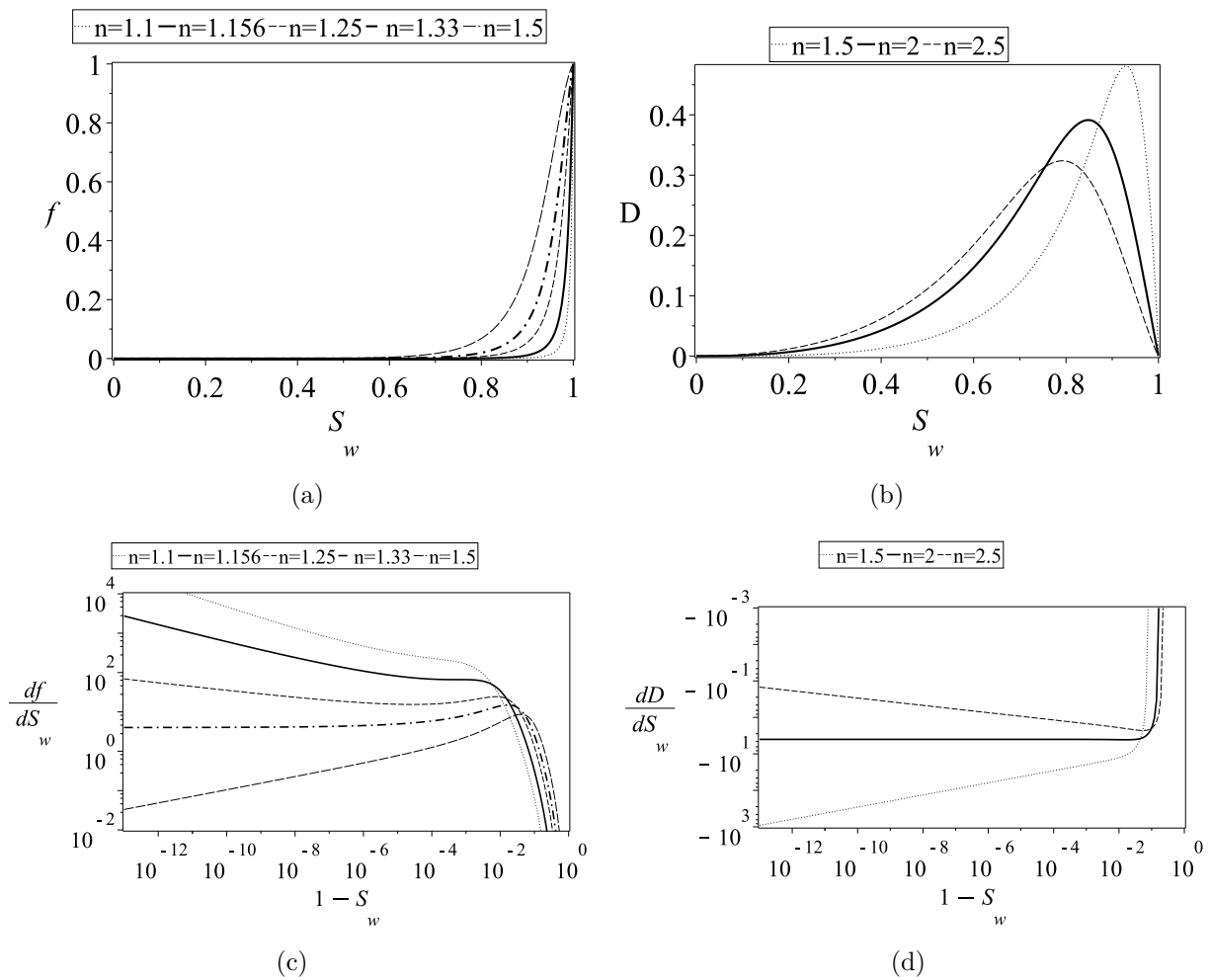


Abbildung 5.2: Bifurkationen mit Van-Genuchten-Parameter n in der fraktionalen Flussfunktion, Kapillarfunktion und ihren Ableitungen für $S_w \rightarrow 1$.

Die Abbildung 5.2(c) zeigt für das Grenzverhalten der Ableitung der Flussfunktion

$$\lim_{S_w \rightarrow 0^+} f'(S_w) = 0, \quad (5.24a)$$

$$\lim_{S_w \rightarrow 1^-} f'(S_w) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } n < 1.33, \\ 4, & \text{falls } n = 1.33, \\ 0, & \text{falls } n > 1.33. \end{cases} \quad (5.24b)$$

Das unterschiedliche Verhalten der Kapillarfunktion für variable Parameter n wird nicht in der Abbildung 5.2(b) deutlich, sondern erst in ihrer Ableitung. So sieht man für das

Grenzverhalten der Ableitung der Kapillarfunktion in Abbildung 5.2(d)

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 0^+} D'(S_{\text{W}}) = 0, \quad (5.25a)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 1^-} D'(S_{\text{W}}) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } n < 2, \\ -4, & \text{falls } n = 2, \\ 0, & \text{falls } n > 2. \end{cases} \quad (5.25b)$$

Zusammengefasst ergibt sich für das Grenzverhalten der Separatrizen

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = -\infty, \quad (5.26a)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_1(S_{\text{W}}) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } c > 1, \\ -\infty, & \text{falls } c < 1, \end{cases} \quad (5.26b)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 1^-} \mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } c < 1, \\ -\infty, & \text{falls } c > 1, \end{cases} \quad (5.26c)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 1^-} \mathcal{C}_1(S_{\text{W}}) = \begin{cases} -0, & \text{falls } n < 1.33, \\ -0, & \text{falls } n = 1.33 \quad \wedge c > 4, \\ +0, & \text{falls } n = 1.33 \quad \wedge c < 4, \\ +0, & \text{falls } 1.33 < n < 2, \\ c/4, & \text{falls } n = 2, \\ +\infty, & \text{falls } n > 2. \end{cases} \quad (5.26d)$$

Bei $c = 1$ sind die beiden Separatrizen identisch und verhalten sich wie in (5.26a) und (5.26d). Damit und mit (5.23) sieht man, dass die Separatrix für $n < 1.33$ immer negativ ist. Für $n > 1.33$ hat sie eine Nullstelle in $S_{\text{W}} \in (0, 1)$.

Im Rest des Kapitels wird das Parametrisierungsmodell nach Brooks und Corey verwendet. Falls das komplexere Verhalten des Van-Genuchten-Parametrisierungsmodell signifikante Unterschiede in den Lösungen verursacht, so wird dies an der entsprechenden Stelle erwähnt.

5.1.2 Phasenportraits, Profile und Bifurkationen

Dieser Abschnitt beleuchtet die Phasenportraits, Profile und Bifurkationen für das Parametrisierungsmodell nach Brooks und Corey mit $\lambda = 2$ bei einem Viskositätsverhältnis zwischen Wasser und Öl von 2 : 1 aus Abschnitt 5.1.1.1.

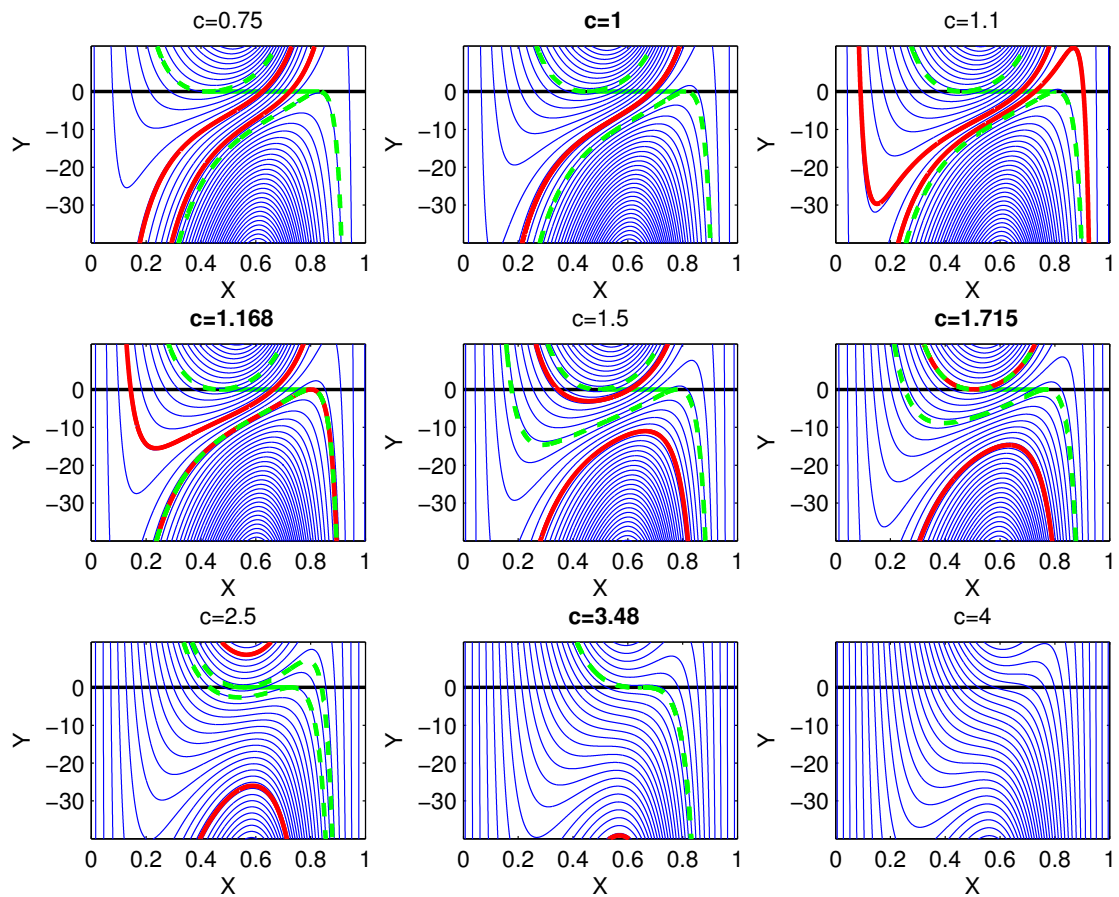


Abbildung 5.3: Phasenportraits für die Geschwindigkeiten $c = 0.75, 1, 1.1, 1.168, 1.5, 1.715, 2.5, 3.48, 4$ im Modell nach Brooks und Corey. Die blauen Linien zeigen einzelne Trajektorien. Bei $Y = 0$ geben die schwarzen Linien die stabilen stationären Punkte \mathcal{S}_r und die grünen Linien die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_l an. Die roten Linien zeigen die beiden Separatrizen. Die grün gestrichelten Linien begrenzen die Trajektorien, die durch die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_l verlaufen. Bei den Phasenportraits mit fett geschriebenen Geschwindigkeiten finden Bifurkationen statt.

Abbildung 5.3 zeigt neun Phasenportraits für die Geschwindigkeiten $c = 0.75, 1, 1.1, 1.168, 1.5, 1.715, 2.5, 3.48, 4$. Die schwarze Linie bei $Y = 0$ gibt die stabilen stationären Punkte \mathcal{S}_r und die grüne Linie bei $Y = 0$ gibt die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_ℓ an. Die blauen Linien zeigen einzelne Trajektorien Y_{c_0} für ausgewählte c_0 . Die roten Linien zeigen die beiden Separatrizen \mathcal{C}_0 und \mathcal{C}_1 , wobei sie bei $c = 1$ zusammenfallen. Die grün gestrichelten Linien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 beschreiben die Trajektorien, die durch die stationären Punkte \mathcal{S}_z aus (5.11a) gehen, d.h. sie begrenzen die Trajektorien, die durch die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_ℓ verlaufen. Ihre c_0 -Werte werden als $c_0(\mathcal{N}_1) > c_0(\mathcal{N}_2)$ bezeichnet. Da für eine Bewässerung die Wassersättigung entlang des Wellenprofils abnehmen muss, befinden sich ihre Trajektorien immer unterhalb der X -Achse, wo Y negativ ist.

Es gibt vier Bifurkationen bei $c = 1, 1.168, 1.715, 3.48$, welche in der Abbildung durch die fette Schrift gekennzeichnet sind. Bei $c = 1$ überlagern sich die beiden Separatrizen. Für kleinere Geschwindigkeiten liegt \mathcal{C}_0 oberhalb von \mathcal{C}_1 und für größere Geschwindigkeiten liegt \mathcal{C}_0 unterhalb von \mathcal{C}_1 . Bei $c = 1.168$ überschreitet die Separatrix \mathcal{C}_0 die Trajektorie \mathcal{N}_2 . Bei $c = 1.715$ überschreitet die Separatrix \mathcal{C}_1 die Trajektorie \mathcal{N}_1 . Bei $c = 3.48$ verschwinden die Trajektorien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 . Damit können die Trajektorien dadurch klassifiziert werden, welche Profile sie erzeugen. Dabei kann es vorkommen, dass eine Trajektorie zwei Bewässerungsprofile erzeugt, nämlich genau dann, wenn $c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), \min\{c - 1, c_0(\mathcal{N}_1)\})$.

Abbildung 5.4 zeigt die vier unterschiedlichen Sättigungsprofile in Bezug auf deren Topologie im Phasenraum. Profil a) geht von $X_\ell = 1$ nach $X_r = 0$, wobei die Steigung an diesen Punkten jeweils gleich $-\infty$ ist. Im Phasenportrait wird es als homokliner Orbit des Punktes $(0, -1, 0)$ auf der Poincarésphäre dargestellt. Die Poincarésphäre dient zur näheren Untersuchung des Verhaltens der Trajektorien an ihren Singularitäten im Phasenraum. Weitere Informationen zur Poincarésphäre können [Perk 93] entnommen werden. Profil b) geht von $X_\ell = 1$ nach $X_r > 0$, wobei die Steigung bei X_ℓ gleich $-\infty$ ist. Im Phasenportrait wird es als heterokliner Orbit, der den Punkt $(0, -1, 0)$ und den zu $(X_r, 0)$ gehörenden Punkt auf der Poincarésphäre verbindet, dargestellt. Profil c) geht von $X_\ell < 1$ nach $X_r = 0$, wobei die Steigung bei X_r gleich $-\infty$ ist. Im Phasenportrait wird es als heterokliner Orbit, der den zu $(X_\ell, 0)$ gehörenden Punkt und den Punkt $(0, -1, 0)$ auf der Poincarésphäre verbindet, dargestellt. Profil d) geht von $X_\ell < 1$ nach $X_r > 0$. Im Phasenportrait wird es als heterokliner Orbit, der den zu $(X_\ell, 0)$ gehörenden Punkt und den zu $(X_r, 0)$ gehörenden Punkt auf der Poincarésphäre verbindet, dargestellt. Das letzte Profil ist das einzige Profil, das auf $y \in \mathbb{R}$ definiert und überall stetig differenzierbar ist. Bei den Profilklassen b) und d) können noch Unterklassen gebildet werden, da es, falls der Scharparameter c_0 der Trajektorie gegen 0^+ geht, eine Region gibt, in der $Y(X)$ große negative Zahlen annimmt, um dann kurz vor $X = 0$ gegen Null zu tendieren. Damit erscheint der Übergang von b) nach a) für $c > 1.168$ bzw. von d) nach

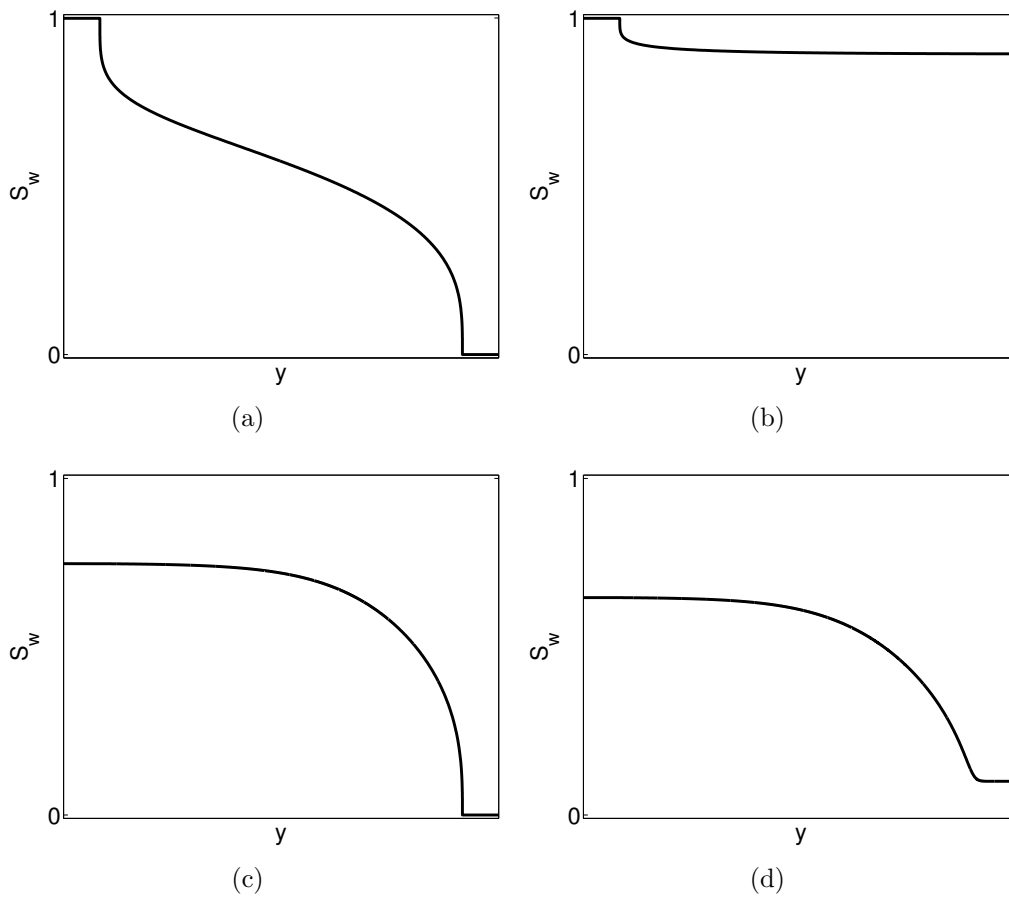


Abbildung 5.4: Die vier bezüglich des Phasenraums topologisch verschiedenen Sättigungsprofile. Hier ist $c = 1$ und für a) $c_0 = -1$, b) und c) $c_0 = -0.1$ und d) $c_0 = 0.1$. Profil d) ist das einzige überall stetig differenzierbare Profil.

c) für $c < 1.168$, spricht der Übergang von positivem zu negativem c_0 , im Sättigungsprofil fließend. Diese feinere Unterscheidung wird in dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt.

Die Trajektorien Y_{c_0} können nun in den jeweiligen von c abhängigen Phasenportraits cha-

rakterisiert werden:

$$c \in (0, 1) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bc)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c - 1), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{c)} \quad \text{mit } c_0 \in (c - 1, 0), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} \quad \text{mit } c_0 \in (0, c_0(\mathcal{N}_1)), \end{array} \right. \quad (5.27a)$$

$$c \in (1, 1.168) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bc)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), 0), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} \quad \text{mit } c_0 \in (0, c - 1), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} \quad \text{mit } c_0 \in (c - 1, c_0(\mathcal{N}_1)), \end{array} \right. \quad (5.27b)$$

$$c \in (1.168, 1.715) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, 0), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (0, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c - 1), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} \quad \text{mit } c_0 \in (c - 1, c_0(\mathcal{N}_1)), \end{array} \right. \quad (5.27c)$$

$$c \in (1.715, 3.48) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, 0), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (0, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c_0(\mathcal{N}_1)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_1), c - 1), \end{array} \right. \quad (5.27d)$$

$$c \in (3.48, \infty) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, 0), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (0, c - 1). \end{array} \right. \quad (5.27e)$$

Mit bc) bzw. bd) ist gemeint, dass eine einzige Trajektorie zwei verschiedene Profilklassen, nämlich b) und c) bzw. b) und d), erzeugen kann.

Die Phasenportraits für die Van-Genuchten-Parametrisierung weisen hauptsächlich in den Separatrizen Unterschiede auf. Die vier topologisch unterschiedlichen Sättigungsprofile sind jedoch identisch.

5.1.3 Neuformulierung der räumlich unbeschränkten Lösung

Die Lösungsklasse d), die im vorigen Abschnitt besprochen wurde, ist die einzige, die auf ganz \mathbb{R} definiert und überall stetig differenzierbar ist. Wegen dieser Eigenschaften beschränken sich viele Autoren [Cuet 09b, Gild 01, Volp 94] von vornherein auf diese Klasse, indem sie die

Annahme treffen, dass $S_{\mathbb{W}}(y)$ überall definiert ist und

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} S'_{\mathbb{W}}(y) = 0 \quad (5.28)$$

gilt. Wegen ihrer Wichtigkeit soll sie in diesem Abschnitt auf verschiedene Arten betrachtet werden, die dazu dienen können, gewisse physikalische und mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge klarer darzustellen und somit besser zu verstehen.

Aus den Gleichungen (5.28), (5.4) und (5.5) folgt

$$cS_{\mathbb{W}}^{\ell} - c_0 = f(S_{\mathbb{W}}^{\ell}), \quad (5.29a)$$

$$cS_{\mathbb{W}}^r - c_0 = f(S_{\mathbb{W}}^r), \quad (5.29b)$$

woraus für die Geschwindigkeit

$$c(S_{\mathbb{W}}^{\ell}, S_{\mathbb{W}}^r) = \frac{f(S_{\mathbb{W}}^{\ell}) - f(S_{\mathbb{W}}^r)}{S_{\mathbb{W}}^{\ell} - S_{\mathbb{W}}^r} \quad (5.30)$$

folgt. Dies ist nichts anderes als die Rankine-Hugoniot-Bedingung für die Geschwindigkeit einer Stoßwelle und ist im Einklang mit dem Zusammenhang zwischen Stoßwellen und laufenden Wellen. Man kann (5.29) allgemeiner schreiben als

$$cS_{\mathbb{W}} - c_0 = f(S_{\mathbb{W}}) \Leftrightarrow S'_{\mathbb{W}} = 0 \Leftrightarrow S_{\mathbb{W}} \text{ ist stationär.} \quad (5.31)$$

Daraus wird eine Funktion c_0 in Abhängigkeit der Geschwindigkeit und der stationären Punkte definiert:

$$c_0(S_{\mathbb{W}}, c) = cS_{\mathbb{W}} - f(S_{\mathbb{W}}). \quad (5.32)$$

Sie koppelt die Randsättigungen $S_{\mathbb{W}}^{\ell}$ und $S_{\mathbb{W}}^r$ und die Geschwindigkeit c . Meistens ist man nämlich nicht an dem genauen Profil interessiert, da dieses aus den Gleichungen folgend sowieso monoton fallend sein muss, sondern an allen möglichen Randsättigungen $S_{\mathbb{W}}^{\ell}$ und $S_{\mathbb{W}}^r$ und Geschwindigkeiten c . Die linke Seite der Gleichung (5.31) beschreibt eine Linie $\mathcal{L}(S_{\mathbb{W}})$ mit Variable $S_{\mathbb{W}}$, Steigung c und y-Achsenabschnitt $-c_0$. Die rechte Seite beschreibt die fraktionale Flussfunktion $f(S_{\mathbb{W}})$. Wann immer sich $\mathcal{L}(S_{\mathbb{W}})$ und $f(S_{\mathbb{W}})$ schneiden, ist das dazugehörige $S_{\mathbb{W}}$ eine stationäre Sättigung. Ihre Stabilität wird durch

$$\frac{\partial}{\partial S_{\mathbb{W}}} c_0(S_{\mathbb{W}}, c) = c - f'(S_{\mathbb{W}}) \begin{cases} < 0 & S_{\mathbb{W}} \text{ is stabil} \\ > 0 & S_{\mathbb{W}} \text{ is instabil} \end{cases} \quad (5.33)$$

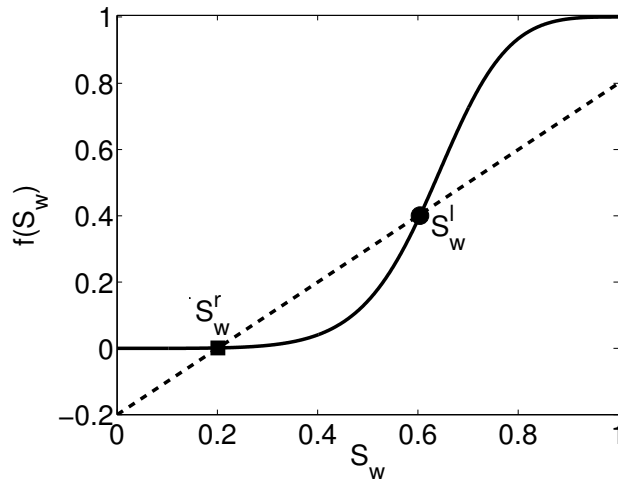


Abbildung 5.5: $\mathcal{L}(S_{\text{w}}) = S_{\text{w}} - 0.2$ (gestrichelte Linie), $f(S_{\text{w}})$ (durchgezogene Linie) und ihre Schnittpunkte bei S_{w}^{r} (Quadrat) und S_{w}^{l} (Kreis) für das Brooks und Corey Modell mit $\lambda = 2$

beschrieben. Dies bedeutet, dass ein Schnittpunkt ein stabiler stationärer Punkt und somit ein mögliches S_{w}^{r} ist, wenn die Steigung von \mathcal{L} größer als die Steigung von f ist, und ein instabiler stationärer Punkt und somit ein mögliches S_{w}^{l} ist, wenn die Steigung von \mathcal{L} kleiner als die Steigung von f ist. Es folgt, dass damit die Linie \mathcal{L} oberhalb der fraktionalen Flussfunktion für alle Sättigungen zwischen S_{w}^{r} und S_{w}^{l} liegt. Dies ist wieder mit dem Ansatz nach Buckley und Leverett identisch. In Abbildung 5.5 ist dieser Sachverhalt für das Brooks und Corey Modell mit $\lambda = 2$ und Parametern $c = 1$ und $c_0 = 0.2$ dargestellt. Die dazugehörigen Randsättigungen lauten $S_{\text{w}}^{\text{r}} = 0.19$ und $S_{\text{w}}^{\text{l}} = 0.63$.

Daraus folgt, dass die maximale Geschwindigkeit $c^{\text{max}} = \max_{S_{\text{w}} \in (0,1)} f'(S_{\text{w}})$ ist. Die dazugehörige Sättigung S_{w}^{m} ist der einzige Wendepunkt von $f(S_{\text{w}})$. Der maximale c_0 -Wert ist dann $c_0^{\text{max}} = f'(S_{\text{w}}^{\text{m}})S_{\text{w}}^{\text{m}} - f(S_{\text{w}}^{\text{m}})$. Die maximale Randsättigung wird durch $S_{\text{w}}^{\text{BL}} = \{S_{\text{w}} | c^{\text{BL}} = f(S_{\text{w}})/S_{\text{w}} \text{ maximal}\}$ definiert.

Die Abbildung 5.6 zeigt die Funktion $c_0(S_{\text{w}}, c)$ als Farbplot. Die horizontal schraffierte Fläche steht für alle möglichen S_{w}^{l} und die vertikal schraffierte Fläche steht für alle möglichen S_{w}^{r} . Auf den Linien E, A und F ist die Ableitung $\partial c_0(S_{\text{w}}, c)/\partial S_{\text{w}}$ gleich Null. Zwischen den Linien E, A, F und der S_{w} -Achse ist die Ableitung negativ, so dass sie die instabilen Punkte darstellen. Nachdem für die Punkte, die zwischen C, F und der S_{w} -Achse liegen, keine zusätzlichen Schnittpunkte von \mathcal{L} und f existieren, müssen die möglichen linken Grenzsättigungen S_{w}^{l} auf die Punkte zwischen E, A und C eingeschränkt werden. Außerhalb des Gebiets begrenzt durch die Linien E, A, F und der S_{w} -Achse ist die Ableitung positiv, aber nur für Punkte auf der vertikal schraffierten Fläche können Punkte auf der horizontal schraffierten Fläche mit den gleichen (c, c_0) -Werten gefunden werden, die gleichzeitig kleiner

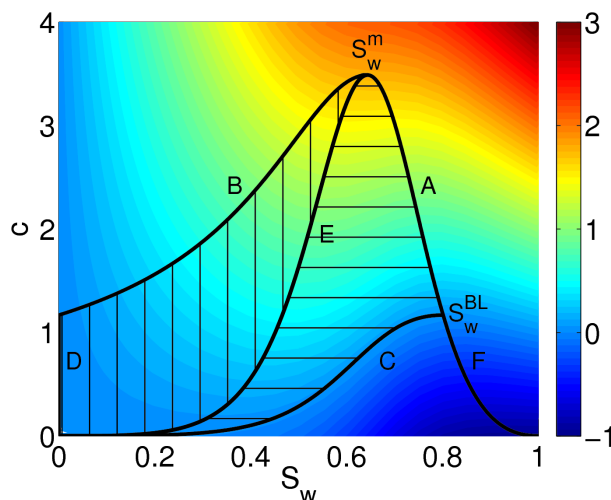


Abbildung 5.6: Die Funktion $c_0(S_w, c)$ als Farbplot. Die horizontal schraffierte Fläche zeigt alle möglichen S_w^l und die vertikal schraffierte Fläche zeigt alle möglichen S_w^r . Auf den Linien E, A und F ist die Ableitung $\partial c_0(S_w, c)/\partial S_w$ gleich Null, innerhalb der Linien ist die Ableitung negativ, außerhalb ist sie positiv. Linie E repräsentiert die Wellen mit konstanter Sättigung. Die Sättigung S_w^{BL} steht für die größtmögliche linke Randsättigung. Die Welle mit der höchsten Geschwindigkeit hat konstante Sättigung S_w^m .

sind.

Es lassen sich drei Grenzregime finden

- (i) Laufende Wellen von C nach D mit Randsättigungen $(S_w^l, S_w^r) \in \{(S_w^l, 0) | S_w^l \in (0, S_w^{BL})\}$ und Geschwindigkeit $c = f'(S_w^l)/S_w^l$. Dies sind die maximalen Bewässerungswellen in ein komplett trockenes poröses Medium.
- (ii) Laufende Wellen von A nach B mit Randsättigungen $(S_w^l, S_w^r) \in \{(S_w^l, S_w^r) | S_w^l \in (S_w^m, S_w^{BL}) \cup S_w^r \in (0, S_w^m)\}$ und mit Geschwindigkeit $c = (f(S_w^l) - f(S_w^r))/(S_w^l S_w^r)$. Dies sind die maximalen Bewässerungswellen in ein anfangs mit S_w^r gefülltes poröses Medium.
- (iii) Linie E repräsentiert die laufenden Wellen mit $S_w^l = S_w^r \in (0, S_w^m)$ und Geschwindigkeit $c = f'(S_w^l)$. Dies sind die Wellen mit konstanter Sättigung.

In Abbildung 5.7 sind Beispiele für Grenzregime (i) und (ii) gezeigt. Bei 5.7(a) reichen die Profile von der minimalen Welle $S_w^l = S_w^r = c = 0$ bis zur maximalen Welle mit $S_w^l = S_w^{BL}, S_w^r = 0^+, c = c^{BL}$. Bei 5.7(b) reichen die Profile von der schnellsten Welle $S_w^l = S_w^r = S_w^m, c = c^{\max}$ bis zur maximalen Welle mit $S_w^l = S_w^{BL}, S_w^r = 0^+, c = c^{BL}$.

Die Abbildung 5.8 zeigt die Geschwindigkeitsfunktion c in Abhängigkeit der Randsättigungen S_w^l, S_w^r nach Gleichung (5.30). Jeder Punkt darauf steht für eine Welle mit dazugehörigen

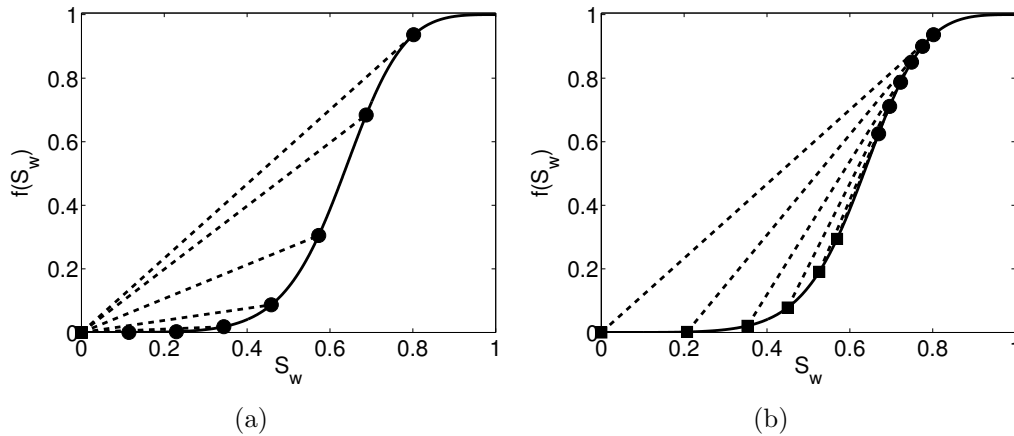


Abbildung 5.7: Beispiele für laufende Wellenlinien $\mathcal{L}(S_w)$ (gestrichelte Linien) und ihre Schnittpunkte mit der Flussfunktion (durchgezogene Linie) bei S_w^r (Quadrat) und S_w^ℓ (Kreis) für laufende Wellen (i) in Abbildung (a) und laufende Wellen (ii) in Abbildung (b).

Geschwindigkeiten und Randsättigungen. Die drei Kanten der farbigen Fläche stehen für die drei Grenzregime. Die Ecken stehen für die Welle mit konstanter Sättigung $S_w = 0$, für die schnellste Welle mit konstanter Sättigung S_w^m und für die Welle in ein trockenes poröses Medium mit größtmöglicher linker Randsättigung S_w^{BL} . Falls man $c(S_w^\ell, S_w^r)$ in den (S_w^ℓ, c) -Raum projiziert, so erhält man die horizontal schraffierte Fläche der Abbildung 5.6. Falls man $c(S_w^\ell, S_w^r)$ in den (S_w^r, c) -Raum projiziert, so erhält man die vertikal schraffierte Fläche der Abbildung 5.6.

Mit diesen Abbildungen kann man nun alle globalen Informationen S_w^ℓ, S_w^r, c in nur einer Abbildung darstellen. Die wichtigen Informationen, wie die maximale Geschwindigkeit c^{\max} oder die maximale linke Randsättigung S_w^{BL} , können leicht in dieser Abbildung abgelesen werden. Dies erleichtert den Vergleich verschiedener Modelle, da man nicht mehr für jede Geschwindigkeit ein eigenes Phasenportrait zeichnen muss. Diese Art der Darstellung kann auch für das Buckley-Leverett Limit und damit für Stoßwellenlösungen benutzt werden.

5.1.4 Physikalische Beschränkung der Lösungsklassen durch Annahme der Stetigkeit des Wasserflusses

In den vorigen Abschnitten wurden aus der fraktionalen Flussgleichung (3.17) durch Umformung in den laufenden Wellenansatz vier verschiedene Lösungsklassen gefunden. Hier soll nun geklärt werden, ob alle auf mathematischem Weg gefundenen Lösungen physikalisch zulässig sind. Die Klassen a), b) und c) können nur dann vorkommen, wenn die Kapillarfunk-

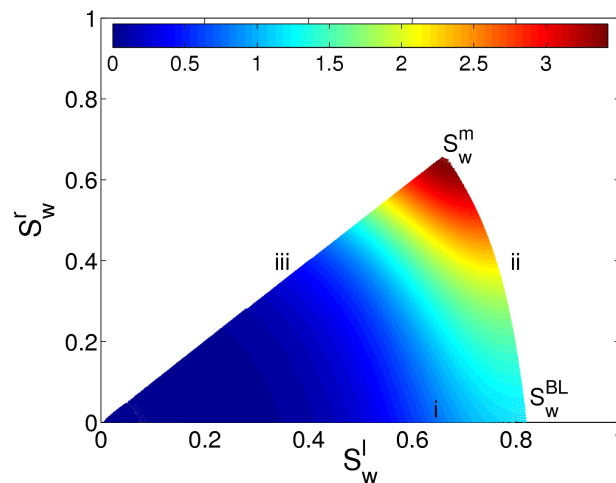


Abbildung 5.8: Die Funktion $c(S_{\mathbb{W}}^{\ell}, S_{\mathbb{W}}^r)$ als Farbplot. Die drei Kanten der farbigen Fläche stehen für die drei Grenzregime. Die Ecken stehen für die Welle mit konstanter Sättigung $S_{\mathbb{W}} = 0$, für die schnellste Welle mit konstanter Sättigung $S_{\mathbb{W}}^m$ und für die Welle in ein trockenes poröses Medium mit größtmöglicher linker Randsättigung $S_{\mathbb{W}}^{\text{BL}}$.

tion $D(S_{\mathbb{W}})$ Nullstellen bei $S_{\mathbb{W}} = 0, 1$ besitzt. Häufig wird aber $D(S_{\mathbb{W}})$ einfachheitshalber als Konstante angenommen. Dies ist in einem flussgetriebenen System für $0 < S_{\mathbb{W}} < 1$ zulässig, da die Kapillarkräfte, die wie eine Diffusion wirken, die globale Lösung, d.h. Randwertsättigungen und Geschwindigkeit, qualitativ nicht verändern, solange es zu keinem Vorzeichenwechsel kommt. Dies ist hier der Fall, da $D(S_{\mathbb{W}})$ überall nicht negativ ist. Außerdem sind alle Lösungen fragwürdig, die von dem expliziten Grenzverhalten der Funktionen abhängen, wenn die Wassersättigung minimal oder maximal wird, da die im DBRMMWBL-Modell verwendeten Funktionen Fitfunktionen sind, die an die Experimente in einem Wassersättigungsbereich angepasst werden, der so weit von den extremalen Wassersättigungen entfernt ist, dass das Grenzverhalten nur begrenzt vertrauenswürdig ist. Zu guter Letzt werden Experimente niemals genau genug sein, um klären zu können, ob Sättigungsprofile an einigen Stellen nichtdifferenzierbar sind. Im Folgenden wird gezeigt, dass man durch die Annahme der Stetigkeit des Wasserflusses einerseits die fehlende Eindeutigkeit der Lösungsklassen a), b) und c) herstellen kann und andererseits Bedingungen an die fraktionalen Flussfunktionen und Kapillarfunktionen stellen muss, damit diese überhaupt vorkommen können.

In Abbildung 5.9 ist die Lösungsklasse a) in ihrem physikalischen Aufbau dargestellt. Es wird ein eindimensionales, horizontales und makroskopisch homogenes poröses Medium $x \in [x_{\ell}, x_r]$ zu den Zeitpunkten $\hat{t} \in [0, T)$ betrachtet. Es ist anfangs komplett mit inkompressiblem Öl, das mit Wasser nicht mischbar ist, gefüllt, d.h. $S_{\mathbb{W}}(x, 0) = 0$. Inkompressibles Wasser wird nun am linken Rand mit konstanter Flussrate injiziert, so dass das poröse Medium danach komplett mit Wasser gefüllt ist, d.h. $S_{\mathbb{W}}(x, T) = 1$. Der Gesamtfluss q_{tot} ist zeitlich

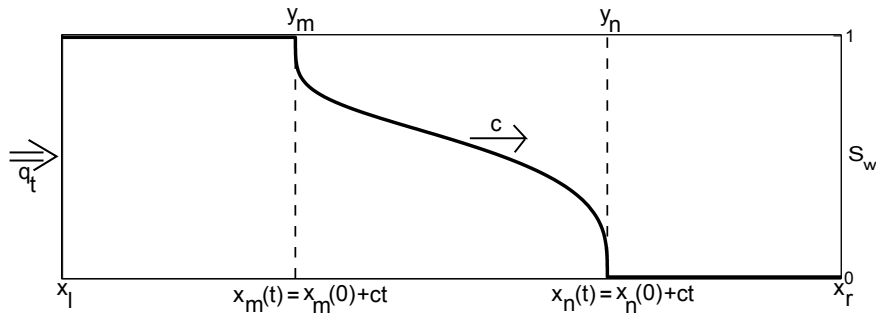


Abbildung 5.9: Physikalischer Aufbau der Lösungsklasse a)

und wegen der Inkompressibilität auch räumlich konstant. Es wird nun angenommen, dass sich nach einiger Zeit $t_0 > 0$ eine laufende Welle der Profilkategorie a) herausgebildet hat und mit konstanter Geschwindigkeit $c > 0$ propagiert. Nach Umformung $t = \hat{t} - t_0$ existieren

$$x_m(t) = x_m(0) + ct \in (x_\ell, x_r), \quad (5.34a)$$

$$x_n(t) = x_n(0) + ct \in (x_\ell, x_r) \quad \forall t \in [0, T - t_0] \quad (5.34b)$$

mit

$$\lim_{x \searrow x_m(t)} \frac{\partial}{\partial x} S_{\mathbb{W}}(x, t) = -\infty, \quad (5.35a)$$

$$\lim_{x \nearrow x_n(t)} \frac{\partial}{\partial x} S_{\mathbb{W}}(x, t) = -\infty. \quad (5.35b)$$

Zwischen $x_m(t)$ und $x_n(t)$ befindet sich die Wasserfront, dort verändert sich die Sättigung räumlich ($\partial S_{\mathbb{W}}(x, t)/\partial x \neq 0$), während sie außerhalb konstant ist. Die auf dem ganzen porösen Medium definierte laufende Welle ist streng genommen aus drei laufenden Wellen zusammengesetzt, die sich alle mit Geschwindigkeit c fortbewegen:

- (i) Die Welle ist auf $[x_\ell, x_m(t)]$ definiert und hat konstante Sättigung $S_{\mathbb{W}} = 1$.
- (ii) Die Welle ist auf $(x_m(t), x_n(t))$ definiert und stellt die Wasserfront dar.
- (iii) Die Welle ist auf $[x_n(t), x_r]$ definiert und hat konstante Sättigung $S_{\mathbb{W}} = 0$.

An ihren Grenzen werden sie nun über die Annahme der Wasserflusstetigkeit aneinander gekoppelt. Dies führt zu den Bedingungen

$$\lim_{x \searrow x_m(t)} q(x, t) = \lim_{x \nearrow x_m(t)} q(x, t), \quad (5.36a)$$

$$\lim_{x \nearrow x_n(t)} q(x, t) = \lim_{x \searrow x_n(t)} q(x, t), \quad (5.36b)$$

wobei der Wasserfluss durch

$$q(x, t) = f(S_{\text{W}}(x, t)) - D(S_{\text{W}}(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} S_{\text{W}}(x, t) \quad (5.37)$$

definiert ist. In der Darstellung mit der Ähnlichkeitsvariable

$$y(x, t) = x - ct \quad (5.38)$$

werden die Positionen der Grenzen der Welle ii) stationär, da

$$y_m = y_m(x, t) = y(x_m(t), t) = x_m(0), \quad (5.39a)$$

$$y_n = y_n(x, t) = y(x_n(t), t) = x_n(0). \quad (5.39b)$$

Der Wasserfluss wird zu

$$q(y) = f(S_{\text{W}}(y)) - D(S_{\text{W}}(y)) S'_{\text{W}}(y) \quad (5.40)$$

und damit folgt aus (5.4)

$$q(y) = cS_{\text{W}}(y) - c_0. \quad (5.41)$$

Die rechte Seite der Bedingungen (5.36) wird mit (5.39) zu

$$\lim_{y \nearrow y_m} q(y) = 1, \quad (5.42a)$$

$$\lim_{y \searrow y_n} q(y) = 0, \quad (5.42b)$$

da Welle (i) bzw. (iii) den konstanten Wasserfluss 1 bzw. 0 hat. Mit (5.39) und (5.41) wird die linke Seite der Bedingungen (5.36) zu

$$\lim_{y \searrow y_m} q(y) = c - c_0, \quad (5.43a)$$

$$\lim_{y \nearrow y_n} q(y) = -c_0. \quad (5.43b)$$

Durch Gleichsetzen von (5.42) und (5.43) ergibt sich ein eindeutiges System mit Parametern

$$c = 1, \quad (5.44a)$$

$$c_0 = 0. \quad (5.44b)$$

Dieses System wird von der Separatrix \mathcal{C}_0 für $c = 1$ beschrieben. Also kann ein Profil der Lösungsklasse a) unter Annahme der Wasserflusstetigkeit nur von der Separatrix \mathcal{C}_0 für die Geschwindigkeit $c = 1$ erzeugt werden. Damit ist die Eindeutigkeit zwischen Randwertsättigungen und der Geschwindigkeit hergestellt. Der vorige Abschnitt hat gezeigt, dass eine laufende Welle als Gerade in der Flussfunktionsabbildung dargestellt werden kann, wobei jeder Schnittpunkt der Geraden und der Flussfunktion ein stationärer Punkt ist und die Steigung der Geraden die Geschwindigkeit ist. Die Gerade der Separatrix \mathcal{C}_0 für $c = 1$ verbindet nun den Punkt $(0, 0)$ mit dem Punkt $(1, 1)$ in der Flussfunktionsabbildung. Für ein Sättigungsprofil, das von $S_{\text{W}} = 0$ nach $S_{\text{W}} = 1$ geht, dürfen dazwischen keine stationären Punkte vorhanden sein. Deswegen darf die Gerade die Flussfunktion nicht mehr schneiden. Dies schließt alle konvex-konkaven Parametrisierungen nach Brooks und Corey und alle Van-Genuchten-Parametrisierungen mit $n > 1.33$ aus. Für Parametrisierungen nach Van Genuchten mit $n < 1.33$ ist diese Bedingung erfüllt. Um am Anfang und Ende der Welle die Nichtdifferenzierbarkeiten zu erreichen, muss $\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 0,1} \mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = -\infty$ gelten. Die Bedingung an das Grenzwertverhalten nach $S_{\text{W}} \rightarrow 0$ ist für alle Parametrisierungen erfüllt, die Bedingung an das Grenzwertverhalten nach $S_{\text{W}} \rightarrow 1$ ist jedoch weder bei Brooks und Corey noch bei Van Genuchten erfüllt. Somit ist die Lösungsklasse a) als Ergebnis des DBRMMWBL-Modells mit Parametrisierungen nach Brooks und Corey und Van Genuchten unter Annahme der Wasserflusstetigkeit auszuschließen. Falls in einem anderen Modell die Separatrix \mathcal{C}_0 für $c = 1$ ein Profil der Klasse a) erzeugt, dann ist dies die einzige Lösung dieser Klasse.

Wenn man sich nun Profil b) zuwendet, so folgt mit der gleichen Argumentation wie bei Profil a) aus (5.42a) und (5.43a)

$$c_0 = c - 1. \quad (5.45)$$

Also muss die Trajektorie gleich der Separatrix \mathcal{C}_1 für beliebige Geschwindigkeiten sein. Damit gibt es für Geschwindigkeiten $c \in (1, f'(1))$ nur maximal ein Profil der Klasse b) unter Annahme der Wasserflusstetigkeit. Damit die Separatrix \mathcal{C}_1 ein Bewässerungsprofil der Klasse b) erzeugt, muss erstens die laufende Wellengerade, die die Punkte $(S_{\text{W}}^r, f(S_{\text{W}}^r))$ und $(1, 1)$ verbindet, dazwischen oberhalb der fraktionalen Flussfunktion liegen, und zweitens muss wegen der Nichtdifferenzierbarkeit $\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 1} \mathcal{C}_1(S_{\text{W}}) = -\infty$ gelten. Der erste Punkt ist nur für Van Genuchten mit $n < 1.156$ und der zweite Punkt ist weder bei Brooks und Corey noch bei Van Genuchten erfüllt. Somit ist die Lösungsklasse b) als Ergebnis des DBRMMWBL-Modells mit Parametrisierungen nach Brooks und Corey und Van Genuchten unter Annahme der Wasserflusstetigkeit auszuschließen. Falls in einem anderen Modell die Separatrix \mathcal{C}_1 für die Geschwindigkeiten $c \in (1, f'(1))$ ein Profil der Klasse b) erzeugt, dann ist dies die einzige

Lösung für diese Geschwindigkeit dieser Klasse.

Für Profil c) folgt mit der gleichen Argumentation wie bei Profil a) und b) aus (5.42b) und (5.43b)

$$c_0 = 0. \quad (5.46)$$

Also muss die Trajektorie gleich der Separatrix \mathcal{C}_0 für Geschwindigkeiten $c \in (0, c^{\text{BL}})$ sein. Die Geschwindigkeit c^{BL} ist definiert als die Geschwindigkeit, für die $c_0(\mathcal{N}_1) = 0$ gilt bzw. $c = \max\{f(S_{\text{W}})/S_{\text{W}}\}$. Sie ist die maximale Geschwindigkeit einer Buckley und Leverett Stoßwelle. In diesem Bereich liegt die laufende Wellengerade immer oberhalb der fraktionalen Flussfunktion. Wegen der Nichtdifferentierbarkeit bei $S_{\text{W}} = 0$ muss $\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow 0} \mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = -\infty$ gelten. Dies ist für alle Parametrisierungen nach Brooks und Corey und Van Genuchten gegeben. Damit ist die Profilkategorie c) eine zulässige Lösung des DBRMMWBL-Modells. Diese Lösungen können jedoch auch stetig durch den Grenzwert von $c_0 \searrow 0$ aus den Profilen d) erzeugt werden. Dieser Übergang findet auf Skalen statt, die jenseits der Kontinuumsannahme der makroskopischen Gleichungen liegen. Also kann zwischen Profil c) und d) physikalisch nicht unterschieden werden und damit sind keine zusätzlichen Informationen in Profilkategorie c) enthalten.

Die einzigen zusätzlichen Annahmen, die in diesem Abschnitt im Gegensatz zu [Brev 01] getroffen wurden, waren, dass man erstens eine Wasserfront nicht isoliert betrachten darf und dass man zweitens die Ränder der Front mit der Annahme der Wasserflusstetigkeit an das physikalische System koppeln sollte. Die Ergebnisse stehen in vollem Einklang mit der Buckley und Leverett Theorie und deren Zusammenhang zwischen Stoßwellen und laufenden Wellenlösungen, der durch die verschwindende Viskositätslösung gegeben ist [Duij 10].

Die oben beschriebenen Probleme treten für die Lösungskategorie d) nicht auf, da sie auf ganz \mathbb{R} definiert ist und somit eine einzige Welle und nicht miteinander gekoppelte Wellen darstellt. Man muss sich jedoch fragen, ob dies zulässig ist, da in der Realität das zu betrachtende poröse Medium räumlich beschränkt ist. In Abbildung 5.10 ist ein Wellenprofil mit den Parametern aus Tabelle 5.1 im Brooks und Corey Modell und das logarithmische Erreichen der Randsättigungen gezeigt. Man sieht, dass die Sättigungsgrenzwerte

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} S_{\text{W}}(y) = S_{\text{W}}^{\ell}, \quad (5.47a)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} S_{\text{W}}(y) = S_{\text{W}}^{\text{r}} \quad (5.47b)$$

exponentiell schnell erreicht werden. Die physikalisch erkennbare Wasserfront, die hier durch

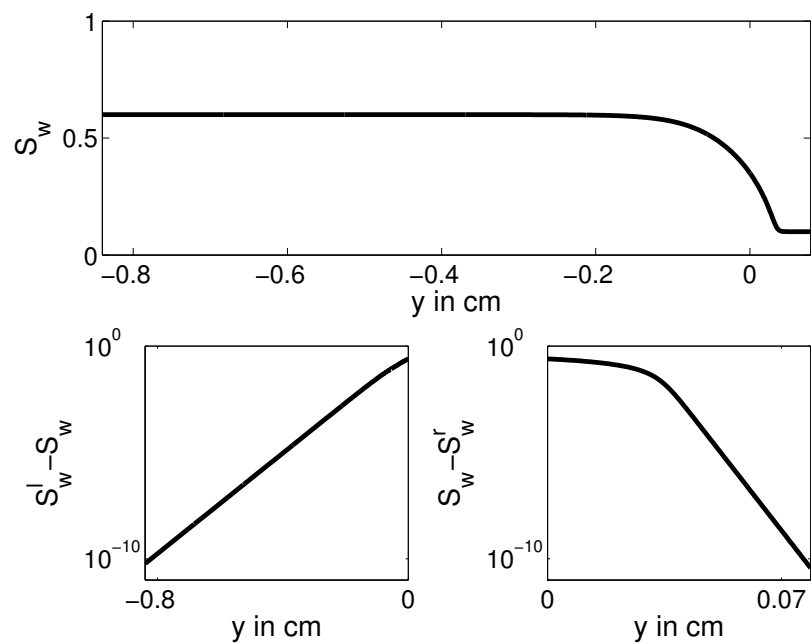


Abbildung 5.10: Sättigungsprofil mit Daten aus Tabelle 5.1 im Modell nach Brooks und Corey und logarithmisches Erreichen der Randsättigungen.

Parameter	Wert	Einheit
S_{W}^{l}	0.60	-
S_{W}^{r}	0.10	-
\hat{c}	0.0022	m/s
$\hat{\mu}_{\text{W}}$	0.002	kg/ms
$\hat{\mu}_{\text{O}}$	0.001	kg/ms
\hat{q}_{tot}	0.001	m/s
\hat{P}_0^*	700	kgm/s ²
\hat{k}	0.3	10 ⁻¹⁰ m ²
ϕ	0.35	-

Tabelle 5.1: Verwendete Daten für Abbildung 5.10.

$S_{\text{w}}^{\ell} - 10^{-10} > S_{\text{w}}(y) > S_{\text{w}}^{\text{r}} + 10^{-10}$ definiert ist, spielt sich auf einem Bereich der Länge 9mm ab. Damit ist diese Kritik entkräftigt und Klasse d) ist physikalisch zulässig.

5.2 Perkulationsmodell

In diesem Kapitel werden die Lösungen des laufenden Wellenansatzes (4.67) für die Näherung der immobilen nichtperkolierenden Phasen des Perkulationsmodells besprochen. Dies erfolgt analog zu dem DBRMMWBL-Modell in Kapitel 5.1. In diesem Modell wird nun zwischen primärer und sekundärer Bewässerung unterschieden. Dies führt zwar zu keinem qualitativen Unterschied, die Geschwindigkeiten jedoch weisen große Unterschiede auf. Mit Hilfe der Neuformulierung der räumlich unbeschränkten Lösung aus Abschnitt 5.1.3 können Erkenntnisse über das Verhalten der nichtperkolierenden Flüssigkeiten gewonnen werden. Außerdem existieren hier räumlich unbeschränkte laufende Wellen, deren rechtsseitige Randwertsättigung gleich Null ist.

5.2.1 Phasenportraits, Profile und Bifurkationen

Dieser Abschnitt beleuchtet die Phasenportraits, Profile und Bifurkationen für die zwei Hauptbewässerungskurven mit Parametern aus Tabelle 4.2 mit dem Parametersatz aus Tabelle 4.1.

In Abbildung 4.5 sind die fraktionale Flussfunktion $f(S_{\text{w}})$, ihre Ableitung $f'(S_{\text{w}})$ und die Kapillarfunktion $D(S_{\text{w}})$ für das Modell mit immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten mit Parametern aus den Tabellen 4.1 und 4.2 dargestellt. Die durchgezogene Linie zeigt die primäre Bewässerung und die gestrichelte Linie zeigt die sekundäre Bewässerung. Man sieht, dass die fraktionale Flussfunktion eine streng monoton steigende Funktion mit einem Wendepunkt ist. Sie besitzt eine konvex-konkave Struktur mit $f'(0) = f'(1) = 0$. Die Ableitung der fraktionalen Flussfunktion und die Kapillarfunktion haben jeweils zwei Nullstellen bei $S_{\text{w}} = S_{\text{w}_{\text{dr}}}, 1 - S_{\text{O}_{\text{im}}}$ und Maxima für die primäre Bewässerung bei $(S_{\text{w}}, f'(S_{\text{w}})) = (0.50, 2.69)$ bzw. $(S_{\text{w}}, D(S_{\text{w}})) = (0.32, 0.11)$ und für die sekundäre Bewässerung bei $(S_{\text{w}}, f'(S_{\text{w}})) = (0.50, 2.90)$ bzw. $(S_{\text{w}}, D(S_{\text{w}})) = (0.36, 0.20)$.

Für $c \in (0, 2.69)$ für die primäre Bewässerung bzw. für $c \in (0, 2.90)$ für die sekundäre Bewässerung hat der Eigenwert e_1 zwei Nullstellen $N_1 \leq N_2$. Zwischen den Nullstellen ist er

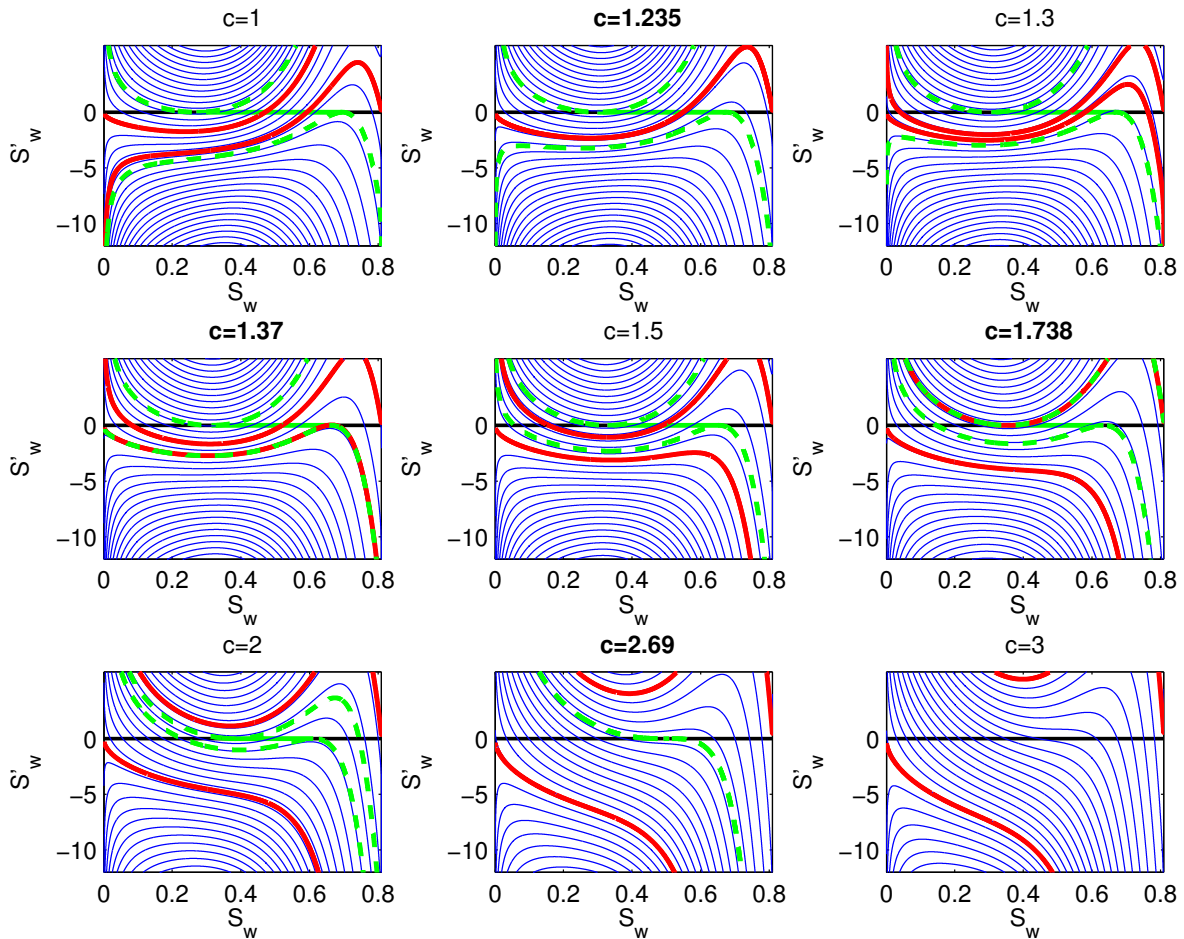


Abbildung 5.11: Phasenportraits für Geschwindigkeiten $c = 1, 1.235, 1.3, 1.37, 1.5, 1.738, 2, 2.69, 3$ für die primäre Bewässerung im Perkulationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Phasen und Parametern aus Tabellen 4.1 und 4.2. Die blauen Linien zeigen einzelne Trajektorien. Bei $Y = 0$ geben die schwarzen Linien die stabilen stationären Punkte S_r und die grünen Linien die instabilen stationären Punkte S_l an. Die roten Linien zeigen die beiden Separatrizen. Die grün gestrichelten Linien begrenzen die Trajektorien, die durch die instabilen stationären Punkte S_l verlaufen. Bei den Phasenportraits mit fett geschriebenen Geschwindigkeiten finden Bifurkationen statt.

positiv und außerhalb ist er negativ. Damit ergibt sich für die stationären Punkte

$$\mathcal{S}_z = \{(N_1, 0), (N_2, 0)\}, \quad (5.48a)$$

$$\mathcal{S}_r = \{(S_{\text{W}0}, 0) | S_{\text{W}0} \in (S_{\text{W} \text{dr}}, N_1) \cup (N_2, 1 - S_{\text{O} \text{im}})\}, \quad (5.48b)$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(S_{\text{W}0}, 0) | S_{\text{W}0} \in (N_1, N_2)\}. \quad (5.48c)$$

Für $c = 2.69$ bzw. 2.90 existiert genau eine Nullstelle, damit ist \mathcal{S}_ℓ leer, \mathcal{S}_z enthält diese eine Nullstelle und \mathcal{S}_r enthält den Rest von \mathcal{S} . Für $c > 2.69$ bzw. 2.90 existiert keine Nullstelle mehr, e_1 ist überall negativ und somit gilt $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}$.

Im Gegensatz zu Abschnitt 5.1.2 wird hier die tatsächliche und nicht die effektive Wassersättigung betrachtet. Die Wassersättigung S_{W} ist nicht mehr zwischen 0 und 1, sondern zwischen $S_{\text{W} \text{dr}}$ und $1 - S_{\text{O} \text{im}}$. Deswegen lauten die Separatrizen

$$\mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = Y_{cS_{\text{W} \text{dr}}}(S_{\text{W}}), \quad (5.49a)$$

$$\mathcal{C}_1(S_{\text{W}}) = Y_{c(1-S_{\text{O} \text{im}})-f(1-S_{\text{O} \text{im}})}(S_{\text{W}}). \quad (5.49b)$$

Ein zweiter Unterschied zu Abschnitt 5.1.2 ist die Tatsache, dass die Ableitung der Kapillarfunktion $D'(S_{\text{W}})$ bei $S_{\text{W}} = S_{\text{W} \text{dr}}, 1 - S_{\text{O} \text{im}}$ nicht gleich Null ist, sondern divergiert. Deswegen ergibt sich im Gegensatz zum DBRMMWBL-Modell, wo die Separatrizen immer singulär bei $S_{\text{W}} = 0, 1$ sind, für \mathcal{C}_0 und \mathcal{C}_1 das Randverhalten

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow S_{\text{W} \text{dr}}^+} \mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = 0, \quad (5.50a)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow S_{\text{W} \text{dr}}^+} \mathcal{C}_1(S_{\text{W}}) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } c > 1.235 \text{ bzw. } 1.515, \\ -\infty, & \text{falls } c < 1.235 \text{ bzw. } 1.515, \end{cases} \quad (5.50b)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow (1-S_{\text{O} \text{im}})^-} \mathcal{C}_0(S_{\text{W}}) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } c < 1.235 \text{ bzw. } 1.515, \\ -\infty, & \text{falls } c > 1.235 \text{ bzw. } 1.515, \end{cases} \quad (5.50c)$$

$$\lim_{S_{\text{W}} \rightarrow (1-S_{\text{O} \text{im}})^-} \mathcal{C}_1(S_{\text{W}}) = 0. \quad (5.50d)$$

Die Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen für die primäre bzw. sekundäre Bewässerung jeweils neun Phasenportraits für die Geschwindigkeiten $c = 1, 1.235, 1.3, 1.37, 1.5, 1.738, 2, 2.69, 3$ bzw. $c = 1, 1.515, 1.65, 1.78, 1.81, 1.84, 2.2, 2.9, 3$. Die schwarze Linie bei $Y = 0$ gibt die stabilen stationären Punkte \mathcal{S}_r und die grüne Linie bei $Y = 0$ gibt die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_ℓ an. Die blauen Linien zeigen einzelne Trajektorien Y_{c_0} für ausgewählte c_0 . Die roten Linien zeigen die beiden Separatrizen $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$, wobei sie bei $c = 1.235$ bzw. $c = 1.515$ zusam-

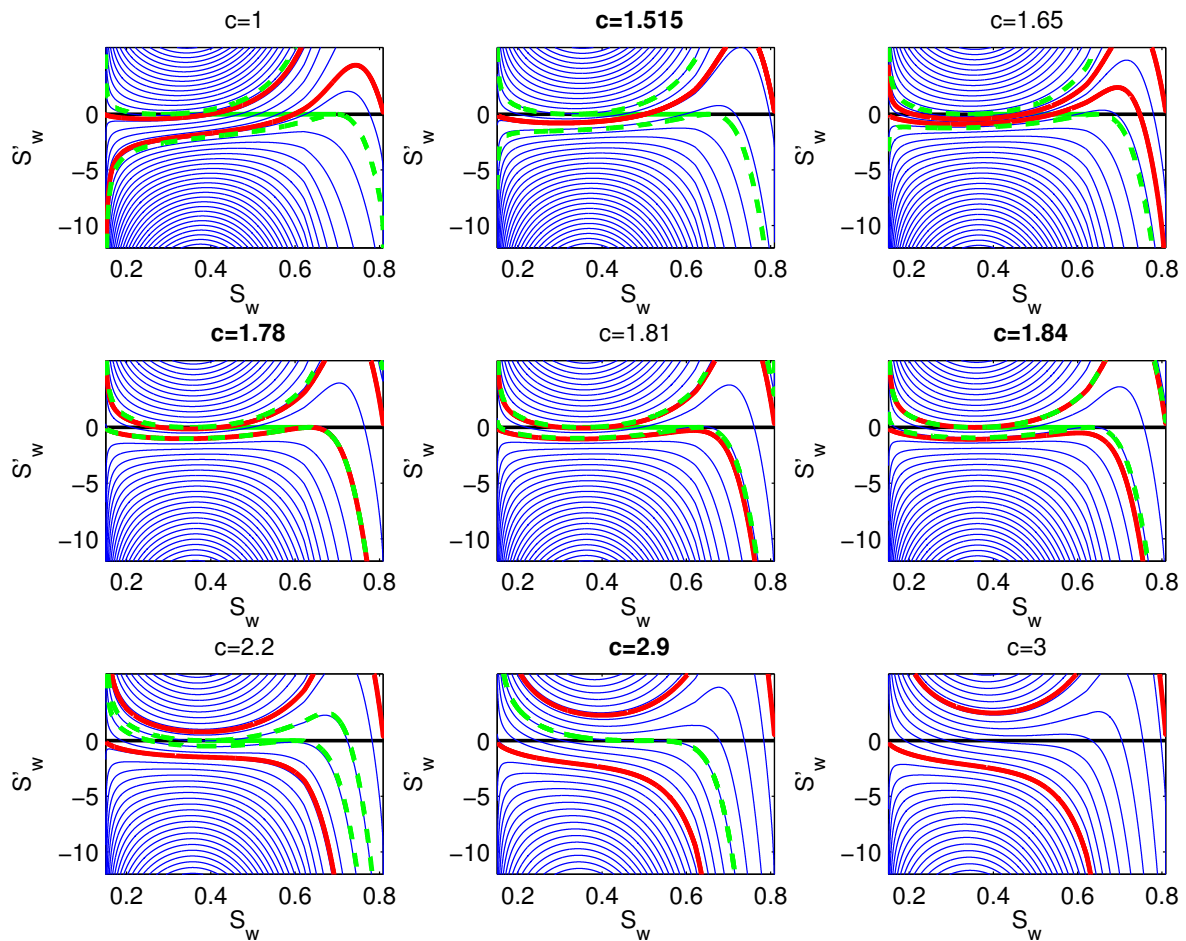


Abbildung 5.12: Phasenportraits für Geschwindigkeiten $c = 1, 1.515, 1.65, 1.78, 1.81, 1.84, 2.2, 2.9, 3$ für die sekundäre Bewässerung im Perkolationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Phasen und Parametern aus Tabellen 4.1 und 4.2. Die blauen Linien zeigen einzelne Trajektorien. Bei $Y = 0$ geben die schwarzen Linien die stabilen stationären Punkte \mathcal{S}_r und die grünen Linien die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_ℓ an. Die roten Linien zeigen die beiden Separatrizen. Die grün gestrichelten Linien begrenzen die Trajektorien, die durch die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_ℓ verlaufen. Bei den Phasenportraits mit fett geschriebenen Geschwindigkeiten finden Bifurkationen statt.

menfallen. Die grün gestrichelten Linien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 beschreiben die Trajektorien, die durch die stationären Punkte \mathcal{S}_z aus (5.48a) gehen, d.h. sie begrenzen die Trajektorien, die durch die instabilen stationären Punkte \mathcal{S}_ℓ verlaufen. Ihr c_0 -Werte werden als $c_0(\mathcal{N}_1) > c_0(\mathcal{N}_2)$ bezeichnet.

Es gibt jeweils vier Bifurkationen bei $c = 1.235, 1.37, 1.738, 2.69$ bzw. $c = 1.515, 1.78, 1.84, 2.9$, welche in den Abbildungen durch die fette Schrift gekennzeichnet sind. Bei $c = 1.235$ bzw. $c = 1.515$ überschreiten sich die beiden Separatrizen. Für kleinere Geschwindigkeiten liegt \mathcal{C}_0 oberhalb von \mathcal{C}_1 und für größere Geschwindigkeiten liegt \mathcal{C}_0 unterhalb von \mathcal{C}_1 . Bei $c = 1.37$ bzw. $c = 1.78$ überschreitet die Separatrix \mathcal{C}_0 die Trajektorie \mathcal{N}_2 . Bei $c = 1.738$ bzw. $c = 1.84$ überschreitet die Separatrix \mathcal{C}_1 die Trajektorie \mathcal{N}_1 . Bei $c = 2.69$ bzw. $c = 2.9$ verschwinden die Trajektorien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 . Damit können die Trajektorien danach klassifiziert werden, welche Profile sie erzeugen. Dabei kann es vorkommen, dass eine Trajektorie zwei Profile erzeugt, nämlich genau dann, wenn $c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), \min\{c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c_0(\mathcal{N}_1)\})$.

Die Trajektorien Y_{c_0} können nun in den jeweiligen von c abhängigen Phasenportraits cha-

rakterisiert werden. Bei der primären Bewässerung gilt

$$c \in (0, 1.235) \begin{cases} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} & \text{mit } c_0 \in (-\infty, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bc)} & \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{c)} & \text{mit } c_0 \in (c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} & \text{mit } c_0 \in (c/S_{\text{Wdr}}, c_0(\mathcal{N}_1)), \end{cases} \quad (5.51a)$$

$$c \in (1.235, 1.37) \begin{cases} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} & \text{mit } c_0 \in (-\infty, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bc)} & \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} & \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} & \text{mit } c_0 \in (c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c_0(\mathcal{N}_1)), \end{cases} \quad (5.51b)$$

$$c \in (1.37, 1.738) \begin{cases} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} & \text{mit } c_0 \in (-\infty, c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} & \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} & \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} & \text{mit } c_0 \in (c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c_0(\mathcal{N}_1)), \end{cases} \quad (5.51c)$$

$$c \in (1.738, 2.69) \begin{cases} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} & \text{mit } c_0 \in (-\infty, c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} & \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} & \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c_0(\mathcal{N}_1)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} & \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_1), c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \end{cases} \quad (5.51d)$$

$$c \in (2.69, \infty) \begin{cases} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} & \text{mit } c_0 \in (-\infty, c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} & \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})). \end{cases} \quad (5.51e)$$

Bei der sekundären Bewässerung gilt

$$c \in (0, 1.515) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bc)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{c)} \quad \text{mit } c_0 \in (c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} \quad \text{mit } c_0 \in (c/S_{\text{Wdr}}, c_0(\mathcal{N}_1)), \end{array} \right. \quad (5.52a)$$

$$c \in (1.515, 1.78) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bc)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} \quad \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} \quad \text{mit } c_0 \in (c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c_0(\mathcal{N}_1)), \end{array} \right. \quad (5.52b)$$

$$c \in (1.78, 1.84) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{d)} \quad \text{mit } c_0 \in (c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}}), c_0(\mathcal{N}_1)), \end{array} \right. \quad (5.52c)$$

$$c \in (1.84, 2.9) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c_0(\mathcal{N}_2)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{bd)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_2), c_0(\mathcal{N}_1)), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (c_0(\mathcal{N}_1), c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})), \end{array} \right. \quad (5.52d)$$

$$c \in (2.9, \infty) \left\{ \begin{array}{l} Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{a)} \quad \text{mit } c_0 \in (-\infty, c/S_{\text{Wdr}}), \\ Y_{c_0} \text{ erzeugt } \mathbf{b)} \quad \text{mit } c_0 \in (cS_{\text{Wdr}}, c(1 - S_{\text{Oim}}) - f(1 - S_{\text{Oim}})). \end{array} \right. \quad (5.52e)$$

Topologisch gesehen sind die vier Profilklassen im Perkolationsmodell mit immobilen nicht-perkolierenden Phasen mit denen von Brooks und Corey identisch. Ein wesentlicher Unterschied neben den nichtperkolierenden Phasen ist die Tatsache, dass es nun Profile gibt, in denen die effektive Wassersättigung stetig differenzierbar gegen Null gehen. Diese Profile werden von der Separatrix \mathcal{C}_0 erzeugt, die im Gegensatz zu den Modellen von Brooks und Corey und von Van Genuchten gegen Null und nicht gegen $-\infty$ geht, wenn die effektive Wassersättigung gegen Null geht.

In Abbildung 5.13 sind insgesamt acht beispielhafte Profile gezeigt. Die vier linken Profile wurden für die primäre Bewässerung und die vier rechten Profile für die sekundäre Bewässe-

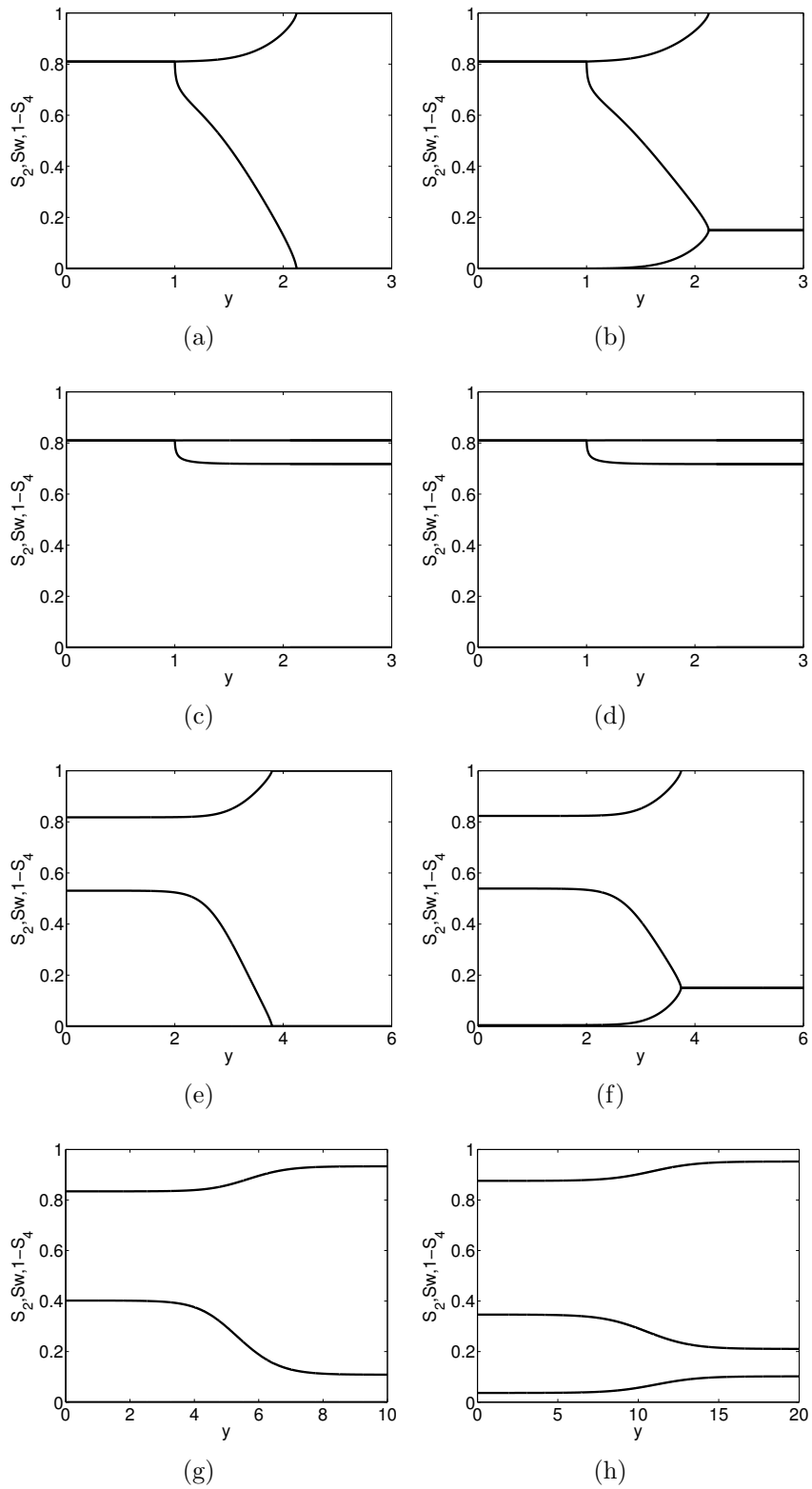


Abbildung 5.13: Profile für die primäre (a),(c),(e),(g) und sekundäre (b),(d),(f),(h) Bewässerung aller vier Profilklassen mit Daten aus Tabelle 5.2.

zung berechnet. Die erste Zeile zeigt Profilklasse a), die zweite Zeile Profilklasse b), die dritte Zeile Profilklasse c) und die vierte Zeile zeigt Profilklasse d). Ihre Daten sind in der Tabelle 5.2 angegeben. Dabei haben alle die gleiche Geschwindigkeit $c = 1$. Sie unterscheiden sich aber durch ihre unterschiedliche c_0 -Werte und damit durch ihre Randsättigungen.

Abbildung 5.13(a) zeigt ein Profil der Klasse a) für die primäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein vorher komplett mit perkolierendem Öl gefülltes Medium. Dabei steigt die Wassersättigung auf den maximalen Wert $1 - S_{\text{Oim}}$ an und es wird nichtperkolierendes Öl bis zum maximalen Wert erzeugt.

Abbildung 5.13(b) zeigt ein Profil der Klasse a) für die sekundäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das ausschließlich mit maximalem nichtperkolierendem Wasser und maximalem perkolierendem Öl gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den maximalen Wert $1 - S_{\text{Oim}}$ an und es wird nichtperkolierendes Wasser bis zum extremalen Wert erzeugt und das gesamte nichtperkolierende Öl abgebaut.

Abbildung 5.13(c) zeigt ein Profil der Klasse b) für die primäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das mit maximalem nichtperkolierendem Öl und zu 72% mit perkolierendem Wasser gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den maximalen Wert $1 - S_{\text{Oim}}$ an. Die nichtperkolierenden Phasen verändern sich nicht.

Abbildung 5.13(d) zeigt ein Profil der Klasse b) für die sekundäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das mit maximalem nichtperkolierendem Öl und zu 72% mit perkolierendem Wasser gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den maximalen Wert $1 - S_{\text{Oim}}$ an. Die nichtperkolierenden Phasen verändern sich nicht. Hier ist kein Unterschied zwischen primärer und sekundärer Bewässerung zu erkennen. Dies liegt daran, dass die nichtperkolierenden Phasen im Wassersättigungsbereich von $(0.7, 0.81)$ für die primäre und sekundäre Bewässerung identisch sind.

Abbildung 5.13(e) zeigt ein Profil der Klasse c) für die primäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein vorher komplett mit perkolierendem Öl gefülltes Medium. Dabei steigt die Wassersättigung auf den Wert 0.53 an und es wird nichtperkolierendes Öl bis zum Wert 0.18 erzeugt.

Abbildung 5.13(f) zeigt ein Profil der Klasse c) für die sekundäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das ausschließlich mit maximalem nichtperkolierendem Wasser und maximalem perkolierendem Öl gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den Wert 0.54 an und es wird nichtperkolierendes Öl bis zum Wert 0.18 erzeugt und fast das gesamte nichtperkolierende Wasser bis zum Wert 0.01 abgebaut.

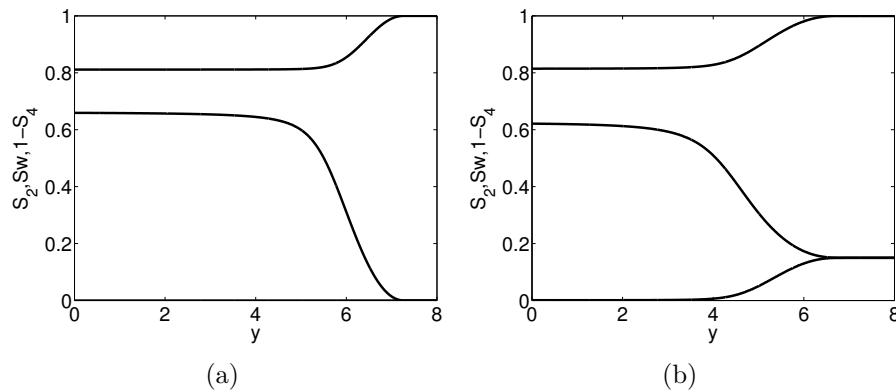


Abbildung 5.14: Maximale Sättigungsprofile der Klasse d) für die primäre und sekundäre Bewässerung mit Daten aus Tabelle 5.2.

Abbildung 5.13(g) zeigt ein Profil der Klasse d) für die primäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das mit 82% mit perkolierendem Öl, mit 7% nichtperkolierendem Öl und zu 11% mit perkolierendem Wasser gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den Wert 0.40 an. Es wird nichtperkolierendes Öl bis zum Wert 0.17 erzeugt.

Abbildung 5.13(h) zeigt ein Profil der Klasse d) für die sekundäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das zu 74% mit perkolierendem Öl, zu 5% mit nichtperkolierendem Öl, zu 11% mit perkolierendem Wasser und zu 10% mit nichtperkolierendem Wasser gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den Wert 0.35 an. Es wird nichtperkolierendes Öl bis zum Wert 0.12 erzeugt und nichtperkolierendes Wasser bis zum Wert 0.04 abgebaut.

Die maximalen Profile für die primäre und sekundäre Bewässerung der Klasse d) sind in Abbildung 5.14 dargestellt. Ihre Daten sind in Tabelle 5.2 enthalten. Sie werden im Phasenportrait jeweils von der Separatrix \mathcal{C}_0 erzeugt.

Abbildung 5.14(a) zeigt das maximale Profil der Klasse d) für die primäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das zu 100% mit perkolierendem Öl gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den Wert 0.66 an. Es wird nichtperkolierendes Öl bis zum maximalen Wert von 0.19 erzeugt. Die Geschwindigkeit beträgt hierbei $c = 1.37$.

Abbildung 5.14(b) zeigt das maximale Profil der Klasse d) für die sekundäre Bewässerung. Eine Wasserwelle bewässert ein Medium, das zu 85% mit perkolierendem Öl und zu 15% mit nichtperkolierendem Wasser gefüllt ist. Dabei steigt die Wassersättigung auf den Wert 0.64 an. Es wird nichtperkolierendes Öl bis zum maximalen Wert von 0.19 erzeugt und das komplette nichtperkolierende Wasser abgebaut. Die Geschwindigkeit beträgt $c = 1.78$.

Abb.	c	c_0	S_{W}^{ℓ}	S_{W}^{r}	S_2^{ℓ}	S_2^{r}	S_4^{ℓ}	S_4^{r}	Profilklasse
5.13(a)	1	-0.3	0.81	0	0	0	0.19	0	a)
5.13(b)	1	-0.3	0.81	0.15	0	0.15	0.19	0	a)
5.13(c)	1	-0.25	0.81	0.72	0	0	0.19	0.19	b)
5.13(d)	1	-0.25	0.81	0.72	0	0	0.19	0.19	b)
5.13(e)	1	-0.1	0.53	0	0	0	0.18	0	c)
5.13(f)	1	-0.1	0.54	0.15	0.01	0.15	0.18	0	c)
5.13(g)	1	0.1	0.40	0.11	0	0	0.17	0.07	d)
5.13(h)	1	0.2	0.35	0.21	0.04	0.10	0.12	0.05	d)
5.14(a)	1.37	0	0.66	0	0	0	0.19	0	d)
5.14(b)	1.78	0.26	0.64	0.15	0	0.15	0.19	0	d)

Tabelle 5.2: Geschwindigkeiten, c_0 -Werte, die links- und rechtsseitigen Sättigungsgrenzwerte und die Profilklassen für die Abbildungen 5.13 und 5.14.

Dies verdeutlicht den Unterschied zwischen primärer und sekundärer Bewässerung und damit die Wichtigkeit, perkolierende und nichtperkolierende Phasen mit einzubeziehen. Die Geschwindigkeit bei der sekundären Bewässerung ist um signifikante 30% höher als bei der primären Bewässerung.

Wenn man nun wieder annimmt, dass der Wasserfluss stetig sein muss, dann kann man, wie in Abschnitt 5.1.4 beschrieben, Lösungsklassen a) und b) ausschließen. Im Gegensatz zu dem DBRMMWBL-Modell ist nun auch Lösungsklasse c) nicht zulässig, da die Separatrix \mathcal{C}_0 im Perkolationsmodell gegen Null und nicht gegen $-\infty$ geht, falls die Wassersättigung minimal wird. Die Separatrix \mathcal{C}_0 erzeugt hier ein überall stetig differenzierbares Profil.

5.2.2 Neuformulierung der räumlich unbeschränkten Lösung

Wie im Abschnitt 5.1.3 diskutiert, ist die Lösungsklasse d) die einzige von physikalischem Interesse, da nur sie die Flussstetigkeit über die ganze Domäne garantiert. Es werden wieder die Funktionen

$$c_0(S_{\text{W}}, c) = cS_{\text{W}} - f(S_{\text{W}}), \quad (5.53a)$$

$$c(S_{\text{W}}^{\ell}, S_{\text{W}}^{\text{r}}) = \frac{f(S_{\text{W}}^{\ell}) - f(S_{\text{W}}^{\text{r}})}{S_{\text{W}}^{\ell} - S_{\text{W}}^{\text{r}}} \quad (5.53b)$$

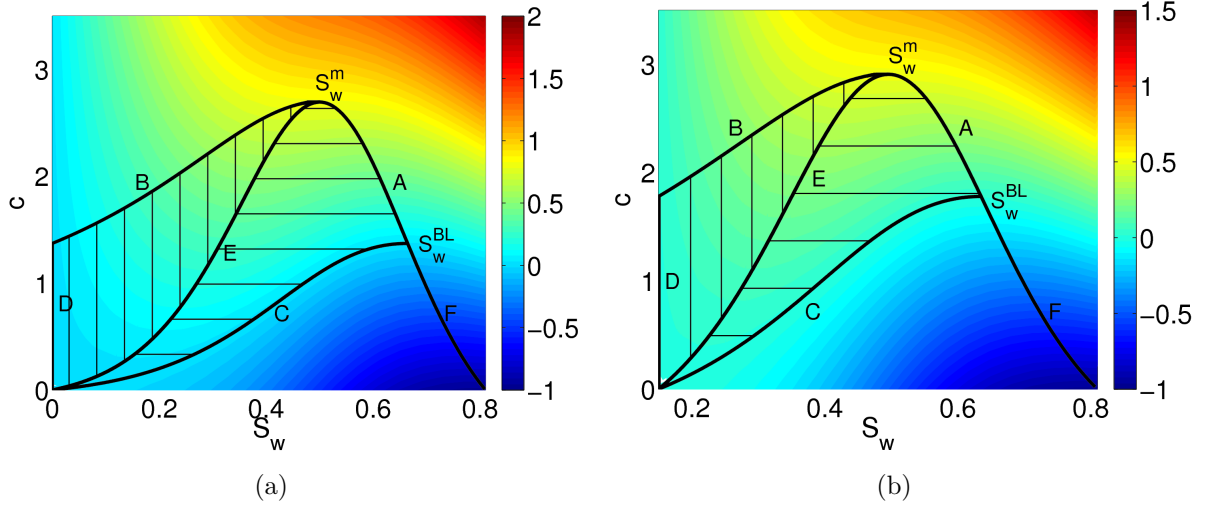


Abbildung 5.15: Die Funktion $c_0(S_w, c)$ als Farbplot für die primäre (a) und sekundäre (b) Bewässerung. Die horizontal schraffierte Flächen zeigen alle möglichen S_w^ℓ und die vertikal schraffierten Flächen zeigen alle möglichen S_w^r . Auf den Linien E, A und F ist die Ableitung $\partial c_0(S_w, c)/\partial S_w$ gleich Null, innerhalb der Linien ist die Ableitung negativ, außerhalb ist sie positiv. Linie E repräsentiert die Wellen mit konstanter Sättigung. Die Sättigung S_w^{BL} steht für die größtmögliche linke Randsättigung. Die Welle mit der höchsten Geschwindigkeit hat konstante Sättigung S_w^m .

definiert, mit denen man die globale Informationen S_w^ℓ, S_w^r, c in nur einer Abbildung darstellen kann. Zusätzlich kann die Geschwindigkeit als Funktion der nichtperkolierenden Randsättigungen aufgefasst werden:

$$c(S_2^\ell, S_2^r) = c(S_2^{-1}(S_2^\ell), S_2^{-1}(S_2^r)) = c(S_w^\ell, S_w^r), \quad (5.54a)$$

$$c(S_4^\ell, S_4^r) = c(S_4^{-1}(S_4^\ell), S_4^{-1}(S_4^r)) = c(S_w^\ell, S_w^r), \quad (5.54b)$$

da die nichtperkolierenden Phasen bijektive Funktionen der Wassersättigung sind.

Die Abbildung 5.15 zeigt die Funktion $c_0(S_w, c)$ nach Gleichung (5.53b) als Farbplot für die primäre und sekundäre Bewässerung. Die horizontal schraffierte Flächen stehen für alle möglichen S_w^ℓ und die vertikal schraffierte Fläche steht für alle möglichen S_w^r . Auf den Linien E, A und F ist die Ableitung $\partial c_0(S_w, c)/\partial S_w$ gleich Null. Zwischen den Linien E, A, F und der S_w -Achse ist die Ableitung negativ, so dass sie die instabilen Punkte darstellen. Nachdem für die Punkte, die zwischen C, F und der S_w -Achse liegen, keine zusätzlichen Schnittpunkte von \mathcal{L} und f existieren, müssen die möglichen linken Grenzsättigungen S_w^ℓ auf die Punkte zwischen E, A und C eingeschränkt werden. Außerhalb dem Gebiet begrenzt durch die Linien E, A, F und der S_w -Achse ist die Ableitung positiv, aber nur für Punkte

auf der vertikal schraffierten Fläche können Punkte auf der horizontal schraffierten Fläche mit den gleichen (c, c_0) -Werten gefunden werden, die gleichzeitig kleiner sind. Es ist sofort zu sehen, dass die sekundäre Bewässerung schnellere Profile erzeugt. Die ausgezeichneten Sättigungen S_{W}^{m} sind hingegen identisch. Die maximale Sättigung S_{W}^{BL} nach einer Welle in ein komplett trockenes Medium ist bei der sekundären Bewässerung um 2% niedriger als bei der primären Bewässerung, obwohl bereits 15% Wasser anfangs vorhanden ist.

Die Abbildung 5.16 zeigt die Geschwindigkeitsfunktion c in Abhängigkeit der Randsättigungen $S_{\text{W}}^{\ell}, S_{\text{W}}^{\text{r}}$ nach Gleichung (5.53a) und in Abhängigkeit der nichtperkolierenden Randsättigungen $S_2^{\ell}, S_2^{\text{r}}$ bzw. $S_4^{\ell}, S_4^{\text{r}}$ nach Gleichung (5.54) für die primäre und sekundäre Bewässerung. Jeder Punkt darauf steht für eine Welle mit dazugehörigen Geschwindigkeiten und Randsättigungen. Die drei Kanten der farbigen Fläche stehen für die drei Grenzregime. Die Ecken stehen für die Welle mit konstanter Sättigung $(S_{\text{W}}, S_2, S_4) = (0, 0, 0)$ für die primäre und $(S_{\text{W}}, S_2, S_4) = (S_{\text{W dr}}, S_{\text{W dr}}, 0)$ für die sekundäre Bewässerung, für die schnellste Welle mit konstanter Sättigung $S_{\text{W}}^{\text{m}}, S_2^{\text{m}} = S_2(S_{\text{W}}^{\text{m}}), S_4^{\text{m}} = S_4(S_{\text{W}}^{\text{m}})$ und für die Welle in ein trockenes poröses Medium mit größtmöglicher linker Randsättigung $S_{\text{W}}^{\text{BL}}, S_2^{\text{BL}} = S_2(S_{\text{W}}^{\text{BL}}), S_4^{\text{BL}} = S_4(S_{\text{W}}^{\text{BL}})$. Falls man $c(S_{\text{W}}^{\ell}, S_{\text{W}}^{\text{r}})$ in den (S_{W}^{ℓ}, c) -Raum projiziert, so erhält man die horizontal schraffierte Fläche der Abbildung 5.15. Falls man $c(S_{\text{W}}^{\ell}, S_{\text{W}}^{\text{r}})$ in den $(S_{\text{W}}^{\text{r}}, c)$ -Raum projiziert, so erhält man die vertikal schraffierte Fläche der Abbildung 5.15.

Abbildungen 5.16(a), 5.16(b) zeigen kleine Unterschiede in den Sättigungen und größere Unterschiede in den Geschwindigkeiten. Dies kann in dem DBRMMWBL-Modell in Abbildung 5.8 nicht dargestellt werden, da es die effektiven Sättigungen betrachtet.

Zusätzlich können nun Aussagen über die nichtperkolierenden Phasen getroffen werden. Bei Abbildung 5.16(c) ist zu beachten, dass bei der primären Bewässerung natürlich keine anfängliche nichtperkolierende Wassersättigung vorhanden sein kann und somit die rechtsseitige nichtperkolierenden Wasserrandsättigungen S_2^{r} gleich Null sind. Da bei einer Bewässerung keine nichtperkolierende Wassersättigung entsteht, sind auch die linksseitigen nichtperkolierenden Wasserrandsättigungen S_2^{ℓ} gleich Null. Bei der sekundären Bewässerung in Abbildung 5.16(d) sieht man, dass sich das nichtperkolierende Wasser spiegelverkehrt zu der Wassersättigung verhält. Für vorgegebene anfängliche nichtperkolierende Wassersättigung erhöht sich die Geschwindigkeit für minimale sich hinter der Front befindliche nichtperkolierende Wassersättigung. Für vorgegebene sich hinter der Front befindliche nichtperkolierende Wassersättigung erhöht sich die Geschwindigkeit für minimale anfängliche nichtperkolierende Wassersättigung. Insgesamt führen also höhere Veränderungen in der nichtperkolierenden Wassersättigung zu niedrigeren Geschwindigkeiten. Höhere Verhältnisse zwischen nichtperkolierender und perkolierender Wassersättigung gehen mit niedrigeren Geschwindigkeiten

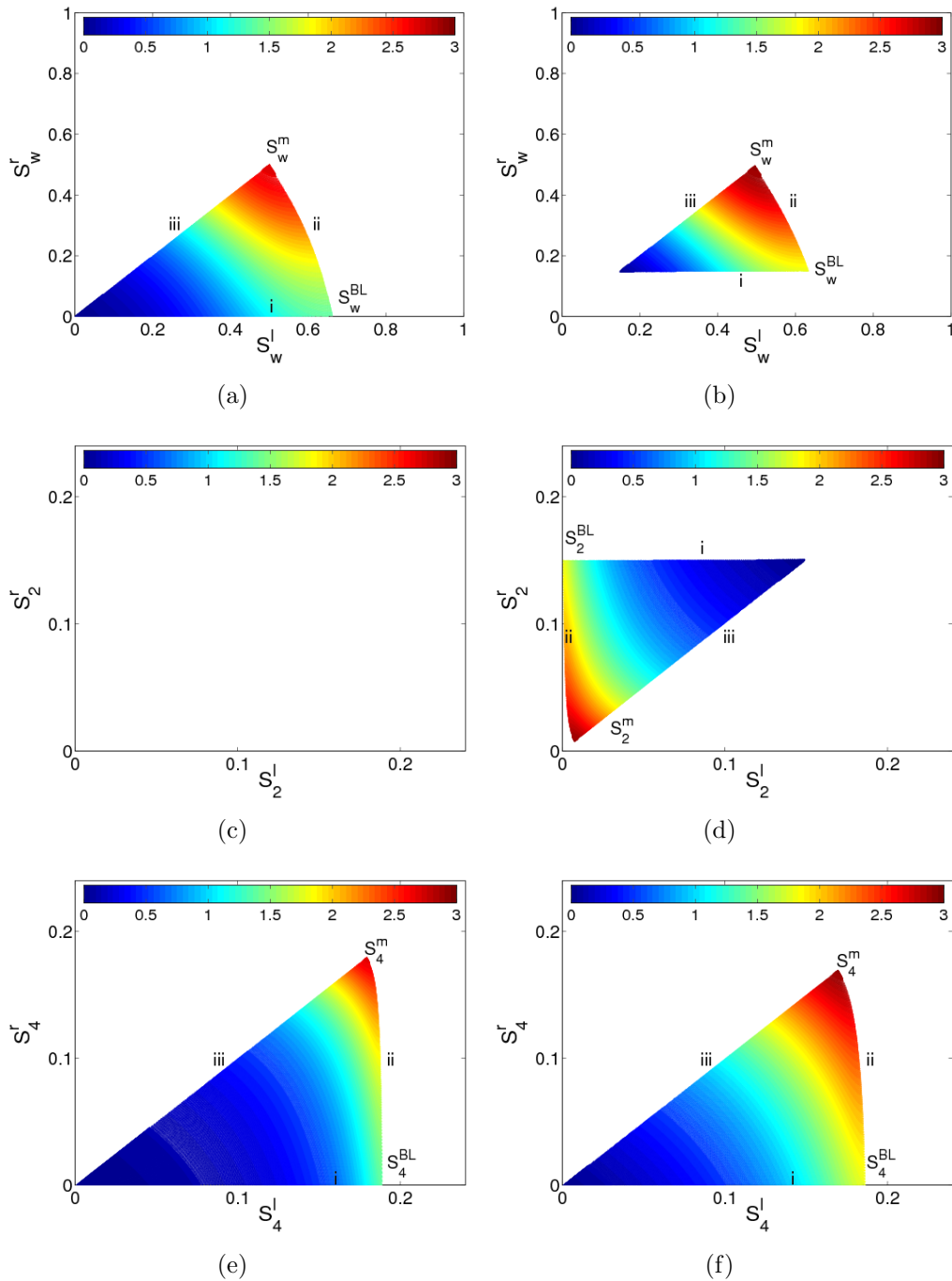


Abbildung 5.16: Farbplots für $c(S_{\mathbb{W}}^{\ell}, S_{\mathbb{W}}^r)$ für die primäre (a) und sekundäre (b) Bewässerung, für $c(S_2^{\ell}, S_2^r)$ für die primäre (c) und sekundäre (d) Bewässerung und für $c(S_4^{\ell}, S_4^r)$ für die primäre (e) und sekundäre (f) Bewässerung. Die drei Kanten der farbigen Flächen stehen für die drei Grenzregime definiert in Abschnitt 5.1.3. Die Ecken stehen für die Welle mit konstanter Sättigung $S_{\mathbb{W}} = 0$, für die schnellste Welle mit konstanter Sättigung $S_{\mathbb{W}}^m$ und für die Welle in ein trockenes poröses Medium mit größtmöglicher linker Randsättigung $S_{\mathbb{W}}^{\text{BL}}$.

einher. Aus physikalischer Sicht macht dies Sinn, da angenommen wurde, dass die nichtperkolierenden Phasen immobil sind und nur durch den Massenaustausch mit perkolierendem Wasser wieder mobilisiert werden können. Ein erhöhter Massenaustausch reduziert also die Geschwindigkeit. Ein geringer Anteil an nichtperkolierendem Wasser, der während der Bewässerung nicht mobilisiert wird, ist jedoch für hohe Geschwindigkeiten förderlich, da die Geschwindigkeit für sekundäre Bewässerungen bis zu 30% schneller ist als für primäre Bewässerungen. Dies kann dadurch erklärt werden, dass dieses nichtperkolierende Wasser einen Porenraum besetzt, der über eine sehr niedrige Durchlässigkeit verfügt, und somit die Wasserdurchlässigkeit des porösen Mediums erhöht.

In den Abbildungen 5.16(e), 5.16(f) sieht man, dass sich das Verhalten des nichtperkolierenden Öls bei der primären und sekundären Bewässerung qualitativ kaum unterscheidet. Die Abbildungen weisen auch eine große Ähnlichkeit mit den Abbildungen zur Wassersättigung auf. Dies zeigt die Korrelation zwischen Wasser und nichtperkolierendem Öl, die von dem Massenaustausch herrührt. Bei einer Bewässerung, d.h. beim Anstieg der Wassersättigung, wird nichtperkolierendes Öl erzeugt. Für vorgegebene anfängliche nichtperkolierende Ölsättigung erhöht sich die Geschwindigkeit für maximale sich hinter der Front befindliche nichtperkolierende Ölsättigung. Für vorgegebene sich hinter der Front befindliche nichtperkolierende Ölsättigung erhöht sich die Geschwindigkeit für maximal anfängliche nichtperkolierende Ölsättigung. Ein große Menge an nichtperkolierendem Öl, das einen Porenraum besetzt, der über eine sehr niedrige Durchlässigkeit verfügt, kann die Durchlässigkeit des porösen Mediums erhöhen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Perkolationsmodell unter der Näherung der immobilen nichtperkolierenden Phasen auf die exakt gleiche Weise erörtert werden kann wie das DBRMMWBL-Modell. Es liefert auch sehr ähnliche Lösungen, hat jedoch drei positiv zu erwähnende Vorteile. Der Unterschied besteht zum einen darin, dass es für jede mögliche Geschwindigkeit ein stetig differenzierbares Profil mit rechtem Wassersättigungsrandwert Null gibt. Es wird von der Separatrix \mathcal{C}_0 erzeugt. Dies war beim DBRMMWBL-Modell nicht der Fall. Im Grenzwert $S_{\text{w}}^{\text{r}} = 0$ war das Profil immer nichtdifferenzierbar, weil die Ableitung gegen $-\infty$ für $S_{\text{w}}^{\text{r}} = 0$ ging. Desweiteren arbeitet das Perkolationsmodell nicht mit effektiven Sättigungen und kann damit sich verändernde residuale Sättigungen besser handhaben. Es wurde gezeigt, dass dies zu unterschiedlichen Geschwindigkeiten führt. Zuletzt kann nun auch das Verhalten nichtperkolierender Phasen untersucht werden, was zu einem besseren Verständnis von laufenden Wellen führt. Beide Modelle können jedoch nur monotone Profile erzeugen. Deswegen werden in den nächsten zwei Kapiteln komplexere Modelle, sprich weniger restriktive Näherungen des Perkolationsmodells betrachtet, die zu nichtmonotonom Verhalten führen können.

6 Systeme zweier Gleichungen

In diesem Kapitel werden laufende Wellenlösungen des Perkolationsmodells untersucht, wobei jeweils eine Flüssigkeit nur in perkolierender Form vorhanden ist. Die Abschnitte 4.4.3 und 4.4.4 haben gezeigt, dass es nicht möglich ist, einen dynamischen Systemansatz zu verfolgen. Deswegen werden allgemeinere Systeme zweier Gleichungen betrachtet, die das Perkolationsmodell zweier Gleichungen als Spezialfall beinhalten. Es werden Vereinfachungen getroffen, um einen dynamischen Systemansatz zum Lösen der Systeme zweier laufender Wellengleichungen zu ermöglichen. Zuerst werden die Kapillarfunktionen als positive Konstanten angenommen. Vereinfachungen der Kapillarfunktionen werden sehr häufig getroffen, so werden diese z.B. bei der Ölförderung mit dem Buckley-Leverett-Ansatz [Lake 89] komplett vernachlässigt und bei der verschwindenden Viskositätslösung [Duij 10] als kleine positive Konstante gewählt. Zusätzlich werden entweder die Flussfunktionen entkoppelt oder die Massenaustauschtermen vernachlässigt, um jeweils die einzelnen Aspekte zu beleuchten. Diese vereinfachten Systeme werden dann eingehend mit einem laufenden Wellenansatz untersucht.

Es treten einige Neuerungen im Vergleich zu den Lösungen von einer laufenden Wellengleichung auf. Erstens sind erstmals nichtmonotone Profile möglich. Die Ursachen hierfür können in den Massenaustauschtermen oder den gekoppelten Flussfunktionen liegen, wobei Überschussprofile der Wassersättigung nur durch gekoppelte Flussfunktionen erzeugt werden können. Zweitens tritt ein zusätzlicher Freiheitsgrad auf, der die Eindeutigkeit der Lösungen für festgewählte Geschwindigkeiten und Randsättigungen aufhebt.

Die Variablen S_w und S_2 bzw. S_4 werden hier umbenannt in u und v , um klarzumachen, dass es sich hierbei um abstrakte physikalische Variablen handelt, die wegen der Verallgemeinerungen und Vereinfachungen nur begrenzt etwas mit den physikalischen Variablen des Perkolationsmodells zu tun haben. Trotzdem werden die Begriffe Bewässerung und Entwässerung einfachheitshalber für ansteigende und abfallende u -Wellen verwendet. Beim Überführen des Systems in ein abstraktes mathematisches dynamisches System werden die Variablen groß geschrieben, um diesen Unterschied deutlich zu machen.

6.1 Allgemeine Gleichungen

Es werden hier allgemeinere Systeme zweier fraktionaler Flussgleichungen betrachtet, die sich mit Hilfe von einem dynamischen Systemansatz erörtern lassen. Sie beschreiben ein System mit drei Phasen $0 \leq u, v, 1 - u - v \leq 1$. Dadurch können auch einzelne Aspekte, wie Massenaustausch und Flussanteile, isoliert voneinander betrachtet werden.

Desweiteren wurde in Kapitel 5 dargelegt, dass ausschließlich die Lösungen der Klasse d), d.h. die, deren rechts- und linksseitige Grenzwerte der Ableitung der Sättigung gegen Null gehen, physikalisch relevant sind. Die Neumann-Randbedingung für die zwei Sättigungen u, v , die von der Zeit t und einer räumlichen Variablen x abhängen, lauten daher für alle Zeiten t

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = 0, \quad (6.1a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v'(x) = 0. \quad (6.1b)$$

Das dimensionslose allgemeine System zweier fraktionaler Flussgleichungen soll nun folgendermaßen angenommen werden

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left[f_u(u, v) - D_u(u, v) \frac{\partial}{\partial x} u \right] = 0, \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left[f_v(u, v) - D_v(u, v) \frac{\partial}{\partial x} v \right] = -h_v(u, v, \frac{\partial}{\partial t} u, \frac{\partial}{\partial t} v) \frac{\partial}{\partial t} u. \quad (6.2b)$$

Die Funktionen $f_u(u, v), f_v(u, v)$ sind die fraktionalen Flussfunktionen, die Kapillarfunktionen $D_u(u, v), D_v(u, v)$ verhalten sich wie diffusive Funktionen und die Funktion $h_v(u, v, \frac{\partial}{\partial t} u, \frac{\partial}{\partial t} v)$ stellt den Massenaustauschterm dar. Dies ist eine Verallgemeinerung der Systeme, die aus dem Perkulationsmodell gewonnen wurden.

Das Einführen der Ähnlichkeitsvariable $y = x - ct$ führt zu

$$-cu + [f_u(u, v) - D_u(u, v)u']' = 0, \quad (6.3a)$$

$$-cv + [f_v(u, v) - D_v(u, v)v']' = ch_v(u, v, u', v')u'. \quad (6.3b)$$

Daraus kann folgendes dynamische System gewonnen werden

$$U' = X, \quad (6.4a)$$

$$V' = Y, \quad (6.4b)$$

$$\begin{aligned} X' = & D_u(U, V)^{-1}(-cX + \frac{\partial f_u(U, V)}{\partial U}X + \frac{\partial f_u(U, V)}{\partial V}Y + \\ & + \frac{\partial D_u(U, V)}{\partial U}(U, V)X^2 - \frac{\partial D_u(U, V)}{\partial V}XY), \end{aligned} \quad (6.4c)$$

$$\begin{aligned} Y' = & D_v(U, V)^{-1}(-cY - ch_v(U, V, X, Y)X + \frac{\partial f_v(U, V)}{\partial V}Y + \frac{\partial f_v(U, V)}{\partial U}X + \\ & + \frac{\partial D_v(U, V)}{\partial V}(U, V)Y^2 - \frac{\partial D_v(U, V)}{\partial U}YX). \end{aligned} \quad (6.4d)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die stationären Punkte des Systems $(U_0, V_0, 0, 0)$ mit beliebigen U_0 und V_0 sind. Linearisiert man um diese Punkte, so erhält man

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{33}(U_0, V_0) & a_{34}(U_0, V_0) \\ 0 & 0 & a_{43}(U_0, V_0) & a_{44}(U_0, V_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \\ X \\ Y \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

mit folgenden Matrixelementen

$$a_{33}(U_0, V_0) = D_u(U_0, V_0)^{-1} \left(\frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial U_0} - c \right), \quad (6.6a)$$

$$a_{34}(U_0, V_0) = D_u(U_0, V_0)^{-1} \left(\frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial V_0} \right), \quad (6.6b)$$

$$a_{43}(U_0, V_0) = D_v(U_0, V_0)^{-1} \left(\frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial U_0} - ch_v(U_0, V_0, 0, 0) \right), \quad (6.6c)$$

$$a_{44}(U_0, V_0) = D_v(U_0, V_0)^{-1} \left(\frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial V_0} - c \right). \quad (6.6d)$$

Das linearisierte System hat folgende Eigenwerte

$$e_1 = 0, \quad (6.7a)$$

$$e_2 = 0, \quad (6.7b)$$

$$e_3(U_0, V_0) = \frac{1}{2} \left[- \left(a_{33}^2(U_0, V_0) - 2a_{33}(U_0, V_0)a_{44}(U_0, V_0) + 4a_{34}(U_0, V_0)a_{43}(U_0, V_0) + a_{44}^2(U_0, V_0) \right)^{-1} + a_{33}(U_0, V_0) + a_{44}(U_0, V_0) \right], \quad (6.7c)$$

$$e_4(U_0, V_0) = \frac{1}{2} \left[\left(a_{33}^2(U_0, V_0) - 2a_{33}(U_0, V_0)a_{44}(U_0, V_0) + 4a_{34}(U_0, V_0)a_{43}(U_0, V_0) + a_{44}^2(U_0, V_0) \right)^{-1} + a_{33}(U_0, V_0) + a_{44}(U_0, V_0) \right]. \quad (6.7d)$$

Die Vorzeichen der Eigenwerte entscheiden über den Typ der stationären Punkte. Sind beide von Null unterschiedlichen Eigenwerte e_3 und e_4 positiv, so ist der dazugehörige Punkt instabil, sind sie beide negativ, so ist er stabil und haben sie unterschiedliche Vorzeichen, so ist er ein Sattelpunkt. Im Gegensatz zu einer fraktionalen Flussgleichung aus Kapitel 5 sind hier Sattelpunkte möglich. Dies ist eine Grundvoraussetzung um nichtmonotones und damit Überschussverhalten zu erhalten.

Das dynamische System (6.4) ist zu kompliziert, um es vollständig und detailliert zu erörtern. Deswegen werden in den nächsten Abschnitten Vereinfachungen getroffen, die es ermöglichen, alle Lösungen des vereinfachten Systems zu finden und die Einzelteile der Gleichungen genauer zu untersuchen. Mit dem daraus gewonnenen Wissen sollte es möglich sein in einer weiterführenden Arbeit alle Lösungen des dynamischen Systems (6.4) zu finden.

Die Funktionen $D_u(u, v)$ und $D_v(u, v)$ sind üblicherweise positiv für alle $u, v \in (0, 1)$. Damit sind die Vorzeichen von (6.7) und die Klassifizierung der stationären Punkte unabhängig von $D_u(u, v)$ und $D_v(u, v)$. Außerdem hat Kapitel 5 gezeigt, dass in der Lösungsklasse d) die Funktion D nicht das globale Verhalten ändert. Deswegen werden in allen folgenden Abschnitten $D_u(u, v)$ und $D_v(u, v)$ als positive Konstanten D_u, D_v angesehen und der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt. Diese zwei Konstanten stellen die Stellschrauben der verschwindenden Viskositätslösung des Buckley und Leverett Grenzwertes dar. Wenn D_u und D_v gegen Null gehen, dann erhält man so eindeutige Stoßwellen.

6.2 Nichtgekoppelte Flussfunktionen

In diesem Abschnitt soll angenommen werden, dass die zwei Flussfunktionen nichtgekoppelt sind, d.h.

$$f_u(u, v) = f_u(u), \quad (6.8a)$$

$$f_v(u, v) = f_v(v). \quad (6.8b)$$

Desweiteren ist wie im Perkolationsmodell der Massenaustauschterm in der v -Gleichung ausschließlich von v abhängig, d.h.

$$h_v(u, v, u', v') = h_v(v). \quad (6.9)$$

Damit erhält man folgende laufende Wellengleichungen

$$-cu' + [f_u(u) - u']' = 0, \quad (6.10a)$$

$$-cv' + [f_v(v) - v']' = ch_v(v)u'. \quad (6.10b)$$

Man sieht, dass die erste Gleichung nur von u abhängt. Da die Gleichung nur aus Ableitungen besteht, kann die Gleichung von einem fixierten y_0 bis zu einem beliebigen y integriert werden

$$u' = f_u(u) - cu + k_u, \quad (6.11a)$$

$$k_u = -f_u(u_0) + cu_0, \quad (6.11b)$$

wobei $u_0 = u(y_0)$ und k_u die Integrationskonstante darstellt. Dieses Teilsystem unterscheidet sich nicht von den Gleichungen (5.4) und (5.5). Das dynamische System lautet damit

$$U' = f_u(U) - cU + k_u, \quad (6.12a)$$

$$V' = Y, \quad (6.12b)$$

$$Y' = (f'_v(V) - c)Y - ch_v(V)(f_u(U) - cU + k_u). \quad (6.12c)$$

Seine stationären Punkte sind

$$S_0 = (U_0, V_0, Y_0) \in \{(U, V, 0) | U \in \mathcal{R}^u\}, \quad (6.13)$$

wobei \mathcal{R}^u die Menge der reellen Nullstellen der Gleichung

$$f_u(U) - cU + k_u = 0 \quad (6.14)$$

ist. Das linearisierte System an den stationären Punkten S_0 lautet

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u(U_0) - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -ch_v(V_0)(f'_u(U_0) - c) & 0 & f'_v(V_0) - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \\ Y \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

und seine Eigenwerte sind

$$e_1 = 0, \quad (6.16a)$$

$$e_2(U_0) = f'_u(U_0) - c, \quad (6.16b)$$

$$e_3(V_0) = f'_v(V_0) - c. \quad (6.16c)$$

Damit ergibt sich folgende Klassifizierung der stationären Punkte

$$S_0 \text{ ist } \begin{cases} \text{stabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_r, \\ \text{instabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_\ell, \\ \text{Sattelpunkt, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^- \cup \mathcal{S}_m^+ \end{cases} \quad (6.17)$$

mit

$$\mathcal{S}_r = \{(U_0, V_0, 0) | f'_u(U_0) < c \wedge f'_v(V_0) < c\}, \quad (6.18a)$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(U_0, V_0, 0) | f'_u(U_0) > c \wedge f'_v(V_0) > c\}, \quad (6.18b)$$

$$\mathcal{S}_m^+ = \{(U_0, V_0, 0) | f'_u(U_0) > c \wedge f'_v(V_0) < c\}, \quad (6.18c)$$

$$\mathcal{S}_m^- = \{(U_0, V_0, 0) | f'_u(U_0) < c \wedge f'_v(V_0) > c\}. \quad (6.18d)$$

Hier existieren nun im Vergleich zu Kapitel 5 Sattelpunkte. Diese haben stabile und instabile Untermannigfaltigkeiten, die häufig die Trajektorien im Phasenraum, die die selben stabilen und instabilen Fixpunkte haben, begrenzen. Somit identifizieren die Sattelpunkte extremale Lösungen für gegebene Randwerte und Geschwindigkeiten. In Kapitel 5 waren diese immer eindeutig.

Um weiter zu diskutieren, müssen nun die Flussfunktionen explizit gewählt werden.

6.2.1 Burgersflüsse

Da in diesem Abschnitt der Einfluss des Massenaustauschterms im Vordergrund steht, wird der einfachst mögliche nichtlineare Fluss, namentlich der Burgersfluss, ausgewählt. Somit ergibt sich für die Flüsse

$$f_u(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad (6.19a)$$

$$f_v(v) = \frac{1}{2}v^2. \quad (6.19b)$$

Damit erhält man folgende laufende Wellengleichungen

$$(u - c)u' - u'' = 0, \quad (6.20a)$$

$$(v - c)v' - v'' = ch_v(v)u'. \quad (6.20b)$$

Integration von $y_0 = -\infty$ bis zu einem beliebigen y liefert

$$u' = \frac{1}{2}u^2 - cu + k_u, \quad (6.21a)$$

$$k_u = -\frac{1}{2}u_0^2 + cu_0, \quad (6.21b)$$

wobei $u_0 = u(-\infty)$ und k_u die Integrationskonstante darstellt. Das dynamische System lautet

$$U' = \frac{1}{2}U^2 - cU + k_u, \quad (6.22a)$$

$$V' = Y, \quad (6.22b)$$

$$Y' = (V - c)Y - ch_v(V) \left(\frac{1}{2}U^2 - cU + k_u \right). \quad (6.22c)$$

Seine stationären Punkte sind

$$S_0 = (U_0, V_0, Y_0) \in \left\{ (U, V, 0) \mid U = c \pm \sqrt{\Delta_{k_u}} \right\}, \quad (6.23)$$

wobei

$$\Delta_{k_u} = c^2 - 2k_u \quad (6.24)$$

die Diskriminante von dem quadratischen Polynom

$$\frac{1}{2}U^2 - cU + k_u \quad (6.25)$$

ist. Das linearisierte System an den stationären Punkten S_0 lautet

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\Delta_{k_u}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{ch}_v(V_0)(\pm\sqrt{\Delta_{k_u}}) & 0 & V_0 - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \\ Y \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

und seine Eigenwerte sind

$$e_1 = 0, \quad (6.27a)$$

$$e_2(U_0) = \pm\sqrt{\Delta_{k_u}}, \quad (6.27b)$$

$$e_3(V_0) = V_0 - c. \quad (6.27c)$$

Damit kann man die Mengen der stationären Punkte aus (6.28) weiter konkretisieren

$$\mathcal{S}_r = \{(U_0, V_0, 0) | U_0 = c - \sqrt{\Delta_{k_u}} \wedge V_0 < c\}, \quad (6.28a)$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(U_0, V_0, 0) | U_0 = c + \sqrt{\Delta_{k_u}} \wedge V_0 > c\}, \quad (6.28b)$$

$$\mathcal{S}_m^+ = \{(U_0, V_0, 0) | U_0 = c + \sqrt{\Delta_{k_u}} \wedge V_0 < c\}, \quad (6.28c)$$

$$\mathcal{S}_m^- = \{(U_0, V_0, 0) | U_0 = c - \sqrt{\Delta_{k_u}} \wedge V_0 > c\}. \quad (6.28d)$$

Man sieht an Gleichung (6.22a), dass die U -Welle nicht von V abhängt und in monotoner Weise den instabilen Punkt und damit den linksseitigen Randwert $U_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} U(y) = c + \sqrt{\Delta_{k_u}}$ mit dem stabilen Punkt und damit den rechtsseitigen Randwert $U_r = \lim_{y \rightarrow \infty} U(y) = c - \sqrt{\Delta_{k_u}}$ verbindet. Damit kann die Verbindung

$$c = \frac{U_\ell + U_r}{2} \quad (6.29)$$

zwischen Wellengeschwindigkeit und Randsättigungen gewonnen werden. Aus der Tatsache, dass U eine nichtnegative reelle Zahl sein soll, folgt, dass

$$k_u \in \left[0, \frac{c^2}{2}\right]. \quad (6.30)$$

Somit gilt

$$\Delta_{k_u} \in [0, c^2], \quad (6.31a)$$

$$U_\ell \in [c, 2c], \quad (6.31b)$$

$$U_r \in [0, c]. \quad (6.31c)$$

Wenn die Sättigungen kleiner gleich Eins sein sollen, so folgt für die Geschwindigkeit

$$c \leq \frac{1}{2}. \quad (6.32)$$

Wenn man die V -Welle diskutieren will, sollte man die Menge der Sattelpunkte \mathcal{S}_m genauer betrachten. Sie stellen extremale Lösungen dar. Hier besteht die Sattelpunktmenge aus zwei Teilmengen \mathcal{S}_m^- und \mathcal{S}_m^+ . Bei \mathcal{S}_m^- befindet sich die U -Welle im linksseitigen Grenzwert und bei \mathcal{S}_m^+ befindet sich die U -Welle im rechtsseitigen Grenzwert. Bei beiden ist $U' = 0$ und damit verschwindet der Massenaustauschterm in (6.20b). Deswegen kann bei \mathcal{S}_m^- für $y \in (-\infty, y_s)$ und bei \mathcal{S}_m^+ für $y \in (y_s, \infty)$ die Gleichung (6.20b) mit $U' = 0$ integriert werden, wenn y_s die Position des Sattelpunktes angibt. Die Diskussion erfolgt analog zu der von der U -Welle. Die Integration liefert

$$V' = \frac{1}{2}V^2 - cV + k_v, \quad (6.33a)$$

$$k_v = -\frac{1}{2}V_0^2 + cV_0, \quad (6.33b)$$

wobei $V_0 = V(-\infty)$ für \mathcal{S}_m^- bzw. $V_0 = V(\infty)$ für \mathcal{S}_m^+ ist und k_v die Integrationskonstante darstellt. Damit gilt für die stationären Punkte

$$V_0 = c \pm \sqrt{\Delta_{k_v}}, \quad (6.34)$$

wenn

$$\Delta_{k_v} = c^2 - 2k_v \quad (6.35)$$

die Diskriminante von dem quadratischen Polynom

$$\frac{1}{2}V^2 - cV + k_v \quad (6.36)$$

ist. Daraus folgt für die Sattelpunkte

$$\mathcal{S}_m^- = \{(U_0, V_0, 0) | U_0 = c - \sqrt{\Delta_{k_u}} \wedge V_0 = c + \sqrt{\Delta_{k_v}}\}, \quad (6.37a)$$

$$\mathcal{S}_m^+ = \{(U_0, V_0, 0) | U_0 = c + \sqrt{\Delta_{k_u}} \wedge V_0 = c - \sqrt{\Delta_{k_v}}\}. \quad (6.37b)$$

Für \mathcal{S}_m^- ist der rechtsseitige Grenzwert bei $(c - \sqrt{\Delta_{k_u}}, c - \sqrt{\Delta_{k_v}})$ und für \mathcal{S}_m^+ ist der linksseitige Grenzwert bei $(c + \sqrt{\Delta_{k_u}}, c + \sqrt{\Delta_{k_v}})$. Das bedeutet, dass für \mathcal{S}_m^- eine ansteigende V -Welle vor der U -Welle läuft, die unabhängig von dem Massenaustausch und damit von der U -Welle ist. Für \mathcal{S}_m^+ läuft eine ansteigende V -Welle hinter der U -Welle, die unabhängig von dem Massenaustausch und damit von der U -Welle ist.

Desweiteren existiert eine V -Welle, die von dem Massenaustauschterm getrieben wird und damit parallel zur U -Welle läuft.

Um diese nun genau zu besprechen, muss man die Funktion $h_v(V)$ explizit bestimmen. Es sollen hier nur komplett positive oder komplett negative lineare Funktionen

$$h_v(V) = 1 - V \quad (6.38a)$$

$$h_v(V) = V - 1 \quad (6.38b)$$

betrachtet werden, die dem Massenaustauschterm für nichtperkolierendes Wasser aus Abschnitt 4.4.4 bzw. dem Massenaustauschterm für nichtperkolierendes Öl aus Abschnitt 4.4.3 ähneln.

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 bzw. 6.3 und 6.4 sind für die Massenaustauschfunktionen (6.38a) bzw. (6.38b) jeweils beispielhaft zwei ausgezeichnete Sättigungsprofile gezeichnet, die die unterschiedlichen topologischen Profile verdeutlichen. Die Sättigungsprofile zeigen jeweils eine U -Welle als durchgezogene Linie und eine V -Welle als gestrichelte Linie. Die Parameter der Abbildungen sind in Tabelle 6.1 angegeben.

In den Tabellen 6.2-6.5 wird das Verhalten des V -Systems der Abbildungen 6.1-6.4 genauer

Abb.	c	U_ℓ	U_m	U_r	V_ℓ	V_m	V_r	k_u	$h_v(V)$
6.1	0.4	0.5	0.5	0.3	0.76	0.69	0.11	0.0750	$1 - V$
6.2	0.4	0.5	0.49	0.3	0.8	0.01	0.26	0.0750	$1 - V$
6.3	0.4	0.5	0.5	0.3	0.54	0.26	0	0.0750	$V - 1$
6.4	0.2	0.25	0.15	0.15	0.21	0.36	0.03	0.0187	$V - 1$

Tabelle 6.1: Tabelle zu den Abbildungen 6.1-6.4.

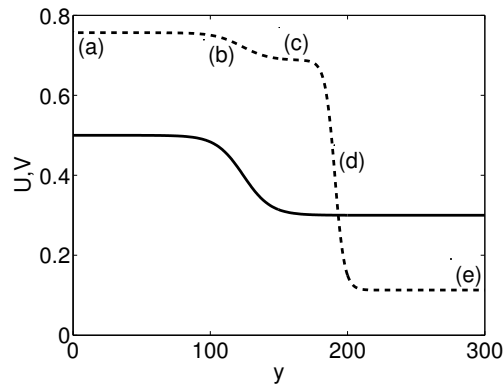


Abbildung 6.1: Sättigungsprofil von U (durchgezogene Linie) und V (gestrichelte Linie) für ein System für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^- mit Bedingungen aus Tabelle 6.1. Die Buchstaben zeigen die Punkte aus Tabelle 6.2.

anhand dem Betrachten der Einzelteile von (6.22c) untersucht. Dabei stellen die Einzelbuchstaben ausgezeichnete Punkte dar, während die Doppelbuchstaben Intervalle zwischen den zu den Einzelbuchstaben gehörigen Punkten darstellen. Der Flussterm ist der erste Teil der Gleichung, nämlich $(V - c)V'$, und der Massenaustauschterm ist der zweite Teil der Gleichung, nämlich $-ch_v(V)U'$. Die $+$ -Zeichen bedeuten, dass der jeweilige Term positiv ist, die $-$ -Zeichen, dass er negativ ist, die 0, dass er wegfällt, und die Klammern, dass er im Betrag sehr klein ist. Alle Tabellen zeigen, dass vier verschiedene Teilbereiche in den V -Wellen identifiziert werden können, die zwischen fünf ausgezeichneten Punkten liegen. Für einen ausgezeichneten Punkt gilt entweder $V'' = 0$ oder $V' = 0$, d.h. der Punkt ist ein Maximum,

Bereich	V''	V'	$(V - c)$	$-c$	$(1 - V)$	U'	Flussterm	Massenaustauschterm
(a)	0	0	+	-	+	0	0	0
(ab)	-	-	+	-	+	-	-	+
(b)	0	-	+	-	+	-	-	+
(bc)	+	-	+	-	+	-	-	+
(c)	0	0	+	-	+	(-)	0	(+)
(cd)	-	-	+	-	+	(-)	-	(+)
(d)	0	-	0	-	+	(-)	0	(+)
(de)	+	-	-	-	+	(-)	+	(+)
(e)	0	0	-	-	+	0	0	0

Tabelle 6.2: Tabelle zu den Teilbereichen für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^- und Massenaustauschterm $h_v(V) = 1 - V$, wie in Abbildung 6.1. Einzelne Buchstaben stellen Punkte dar und zwei Buchstaben stellen Intervalle dar, die die zu den Einzelbuchstaben korrespondierenden Punkte verbinden.

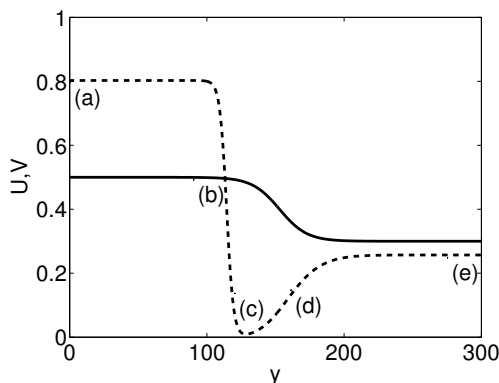


Abbildung 6.2: Sättigungsprofil von U (durchgezogene Linie) und V (gestrichelte Linie) für ein System für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^+ mit Bedingungen aus Tabelle 6.1. Die Buchstaben zeigen die Punkte aus Tabelle 6.3.

ein Minimum, ein Wendepunkt oder ein Terrassenpunkt. Somit ändert sich im Übergang von einem Teilintervall in das andere das Steigungs- oder Krümmungsverhalten.

Abbildung 6.1 zeigt ein Sättigungsprofil für eine V -Welle, deren Sattelpunkt \mathcal{S}_m^- für das System mit Massenaustauschterm (6.38a) ein Terrassenpunkt ist. Damit besteht die V -Welle aus zwei ansteigenden Wellen. Wie vorher schon beschrieben, ist die vordere Front unabhängig von der U -Welle, während die hintere Front nur durch die parallel laufende U -Welle hervorgerufen wird. Die zunehmende U -Sättigung bewirkt auch ein Zunehmen in V .

Tabelle 6.2 zeigt, dass die V -Welle ausgehend vom linken Grenzwert (a) mit $V'' = V' = 0$

Bereich	V''	V'	$(V - c)$	$-c$	$(1 - V)$	U'	Flussterm	Massenaustauschterm
(a)	0	0	+	-	+	0	0	0
(ab)	-	-	+	-	+	(-)	-	(+)
(b)	0	-	0	-	+	(-)	0	(+)
(bc)	+	-	-	-	+	(-)	+	(+)
(c)	+	0	-	-	+	(-)	0	(+)
(cd)	+	+	-	-	+	-	-	+
(d)	0	+	-	-	+	-	-	+
(de)	-	+	-	-	+	-	-	+
(e)	0	0	-	-	+	0	0	0

Tabelle 6.3: Tabelle zu den Teilbereichen für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^+ und Massenaustauschterm $h_v(V) = 1 - V$, wie in Abbildung 6.2. Einzelne Buchstaben stellen Punkte dar und zwei Buchstaben stellen Intervalle dar, die die zu den Einzelbuchstaben korrespondierenden Punkte verbinden.

zunächst abnimmt und zwar immer stärker. Der Flussterm ist negativ und der Massenaustauschterm ist in geringerem Maße positiv, womit die Krümmung negativ ist. Mit dem Erreichen der U -Front wird U' immer negativer bis sich Massenaustauschterm und Flussterm aufheben und es zu einem Wendepunkt (b) kommt. Dort ändert V'' das Vorzeichen, womit V' immer kleiner im Betrag wird. Nachdem die U -Front nunmehr vorüber ist, wird U' auch immer kleiner im Betrag. Dies geht solange, bis sich Fluss- und Massenaustauschterm wieder aufheben und extrem klein sind. An dieser Stelle befindet sich ein Terrassenpunkt (c), wo V'' wieder das Vorzeichen ändert. Nun sind wieder Ableitung und zweite Ableitung negativ. Der Massenaustauschterm hat nunmehr keine Bedeutung, da U' nahe Null ist. Der Flussterm wird nun aber Null, wenn $V = c$ ist. Dort befindet sich der nächste Wendepunkt (d). Die zweite Ableitung wird positiv und die erste Ableitung tendiert immer mehr gegen Null. Der Flussterm wird somit immer kleiner, bis V' und V'' im rechten Grenzwert (e) verschwinden.

Abbildung 6.2 zeigt ein Sättigungsprofil für eine V -Welle, deren Sattelpunkt \mathcal{S}_m^+ für das System mit Massenaustauschterm (6.38a) einen Unterschuss darstellt, womit die V -Welle aus einer leichten abfallende Welle gefolgt von einer stärkeren ansteigenden Welle besteht. Wie vorher schon beschrieben, ist die sich hinter der U -Front befindliche Front unabhängig von der U -Welle, während die abfallende Front nur durch die parallel laufende U -Welle hervorgerufen wird. Die zunehmende U -Sättigung bewirkt ein Abnehmen in V .

Tabelle 6.3 zeigt, dass die V -Welle ausgehend vom linken Grenzwert (a) mit $V'' = V' = 0$ zunächst abnimmt und zwar immer stärker. Der Flussterm ist negativ und der Massenaustauschterm ist positiv, aber im ersten Teil vernachlässigbar. Damit ist die Krümmung negativ. Mit dem Erreichen von $V = c$ wird der Flussterm gleich Null und es kommt zu einem Wendepunkt (b). Dort ändert der Flussterm und V'' das Vorzeichen, womit V' immer kleiner im Betrag wird, bis die Ableitung im Unterschuss (c) gleich Null wird. Hier ändert V' das Vorzeichen und V nimmt ab jetzt zu. Deswegen ändert der Flussterm wieder sein Vorzeichen und ist ab jetzt negativ. Nachdem die U -Front nun erreicht ist, bewirkt das stark fallende U' einen stark steigenden positiven Massenaustauschterm, bis er sich mit dem negativen Flussterm aufhebt. Dies führt zu Wendepunkt (d). Dort ändert V'' sein Vorzeichen und ist von nun an negativ. Damit verringert sich die erste Ableitung und damit der Flussterm zunehmend. Nachdem auch die U -Front vorbei ist, geht der Massenaustauschterm auch gegen Null. Somit verschwinden V' und V'' im rechten Grenzwert (e).

Abbildung 6.3 zeigt ein Sättigungsprofil für eine V -Welle, deren Sattelpunkt \mathcal{S}_m^+ für das System mit Massenaustauschterm (6.38b) ein Terrassenpunkt ist. Damit besteht die V -Welle aus zwei ansteigenden Wellen. Wie vorher schon beschrieben, ist die hintere Front unab-

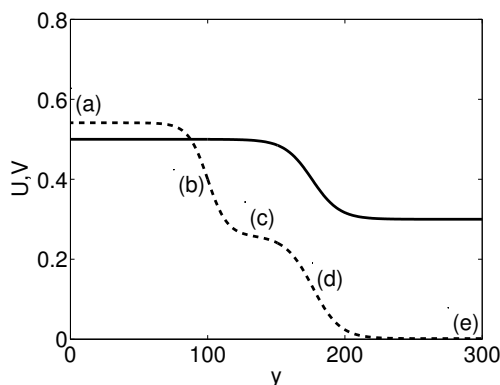


Abbildung 6.3: Sättigungsprofil von U (durchgezogene Linie) und V (gestrichelte Linie) für ein System für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^+ mit Bedingungen aus Tabelle 6.1. Die Buchstaben zeigen die Punkte aus Tabelle 6.4.

hängig von der U -Welle, während die vordere Front nur durch die parallel laufende U -Welle hervorgerufen wird. Die zunehmende U -Sättigung bewirkt auch ein Zunehmen in V .

Tabelle 6.4 zeigt, dass die V -Welle ausgehend vom linken Grenzwert (a) mit $V'' = V' = 0$ zunächst abnimmt und zwar immer stärker. Der Flussterm ist negativ. Der Massenaustauschterm ist auch negativ, aber im ersten Teil vernachlässigbar. Damit ist die Krümmung negativ. Mit dem Erreichen von $V = c$ wird der Flussterm gleich Null und es kommt zu einem Wendepunkt (b). Dort ändert der Flussterm und V'' das Vorzeichen, womit V' immer kleiner im Betrag wird. Nun ist der Flussterm positiv ansteigend bis er sich mit dem negativen

Bereich	V''	V'	$(V - c)$	$-c$	$(V - 1)$	U'	Flussterm	Massenaustauschterm
(a)	0	0	+	-	-	0	0	0
(ab)	-	-	+	-	-	(-)	-	(-)
(b)	0	-	0	-	-	(-)	0	(-)
(bc)	+	-	-	-	-	(-)	+	(-)
(c)	0	0	-	-	-	(-)	0	(-)
(cd)	-	-	-	-	-	-	+	-
(d)	0	-	-	-	-	-	+	-
(de)	+	-	-	-	-	-	+	-
(e)	0	0	-	-	-	0	0	0

Tabelle 6.4: Tabelle zu den Teilbereichen für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^+ und Massenaustauschterm $h_v(V) = V - 1$, wie in Abbildung 6.3. Einzelne Buchstaben stellen Punkte dar und zwei Buchstaben stellen Intervalle dar, die die zu den Einzelbuchstaben korrespondierenden Punkte verbinden.

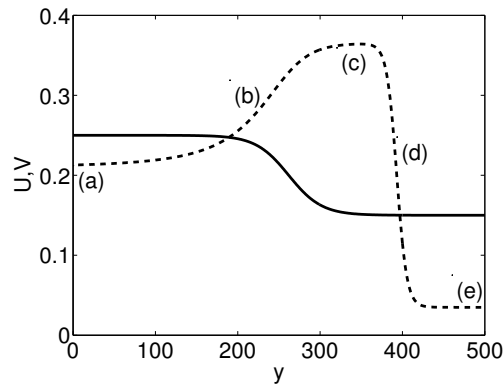


Abbildung 6.4: Sättigungsprofil von U (durchgezogene Linie) und V (gestrichelte Linie) für ein System für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^- mit Bedingungen aus Tabelle 6.1. Die Buchstaben zeigen die Punkte aus Tabelle 6.5.

Massenaustauschterm im Terrassenpunkt (c) aufhebt. Dort ist V' und V'' gleich Null. Die zweite Ableitung ändert ihr Vorzeichen und ist nun negativ, woraufhin die erste Ableitung wieder stärker abnimmt, was zu einem ansteigenden Flussterm führt. Mit dem Erreichen der U -Front wird U' immer negativer, was einen stärker werdenden negativen Massenaustauschterm bewirkt bis er sich mit dem Flussterm aufhebt, so dass Wendepunkt (d) erreicht ist. Dort ändert V'' sein Vorzeichen zu positiv, womit die Ableitung von V immer weniger negativ und der Flussterm immer weniger positiv ist. Nachdem die U -Front vorüber ist und U' immer kleiner wird, ist auch der Massenaustauschterm immer weniger negativ bis V' und V'' im rechten Grenzwert (e) verschwinden.

Bereich	V''	V'	$(V - c)$	$-c$	$(V - 1)$	U'	Flussterm	Massenaustauschterm
(a)	0	0	+	-	-	0	0	0
(ab)	+	+	+	-	-	-	+	-
(b)	0	+	+	-	-	-	+	-
(bc)	-	+	+	-	-	-	+	-
(c)	-	0	+	-	-	(-)	0	(-)
(cd)	-	-	+	-	-	(-)	-	(-)
(d)	0	-	0	-	-	(-)	0	(-)
(de)	+	-	-	-	-	(-)	+	(-)
(e)	0	0	-	-	-	0	0	0

Tabelle 6.5: Tabelle zu den Teilbereichen für Sattelpunkt \mathcal{S}_m^- und Massenaustauschterm $h_V(V) = V - 1$, wie in Abbildung 6.4. Einzelne Buchstaben stellen Punkte dar und zwei Buchstaben stellen Intervalle dar, die die zu den Einzelbuchstaben korrespondierenden Punkte verbinden.

Abbildung 6.4 zeigt ein Sättigungsprofil für eine V -Welle, deren Sattelpunkt \mathcal{S}_m^- für das System mit Massenaustauschterm (6.38b) einen Überschuss darstellt, womit die V -Welle aus einer ansteigenden Welle gefolgt von einer schwächeren abfallenden Welle besteht. Wie vorher schon beschrieben, ist die sich vor der U -Front befindliche Front unabhängig von der U -Welle, während die abfallende Front nur durch die parallel laufende U -Welle hervorgerufen wird. Die zunehmende U -Sättigung bewirkt ein Abnehmen in V .

Tabelle 6.5 zeigt, dass die V -Welle ausgehend vom linken Grenzwert (a) mit $V'' = V' = 0$ zunächst zunimmt und zwar immer stärker. Der Flussterm ist positiv und der Massenaustauschterm ist in geringerer Masse negativ, womit die Krümmung positiv ist. Mit dem Erreichen der U -Front wird U' immer negativer bis sich Massenaustauschterm und Flussterm aufheben und es zu einem Wendepunkt (b) kommt. Dort ändert V'' das Vorzeichen, womit V' immer kleiner im Betrag wird bis es zum Überschuss (c) kommt, wo die Ableitung ihr Vorzeichen zum Negativen ändert. Damit wird der Flussterm negativ. Nachdem die U -Welle vorüber ist, spielt der Massenaustauschterm keine Rolle mehr. Der Flussterm und damit V'' wird Null, wenn $V = c$ ist. Dort befindet sich der nächste Wendepunkt (d). Die zweite Ableitung wird positiv und die erste Ableitung tendiert immer mehr gegen Null. Der Flussterm wird immer kleiner bis V' und V'' im rechten Grenzwert (e) verschwinden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass mit einem rein positiven Massenaustauschterm, wie in Abschnitt 4.4.4 für einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl, die V -Welle entweder aus zwei ansteigenden Wellen oder aus einer abfallenden Welle gefolgt von einer größeren ansteigenden Welle besteht, je nachdem ob der zugehörige V -Wert des Sattelpunktes und damit des Terrassen- bzw. des Unterschusspunktes größer oder kleiner als c ist. Bei der Terrassenpunktlösung ist die vordere ansteigende Front und bei der Unterschusslösung ist die hintere ansteigende Front von V unabhängig von U , während bei der Terrassenpunktlösung die hintere ansteigende Front und bei der Unterschusslösung die vordere abfallende Front von V von der U -Front verursacht wird und parallel dazu abläuft.

Für einen rein negativen Massenaustauschterm, wie aus Abschnitt 4.4.3 für einzig in perkolierender Form vorhandenes Wasser, erhält man eine V -Welle, die entweder aus zwei ansteigenden Wellen oder aus einer ansteigenden Welle gefolgt von einer kleineren abfallenden Welle besteht, je nachdem ob der zugehörige V -Wert des Sattelpunktes und damit des Terrassen- bzw. des Überschusspunktes kleiner oder größer als c ist. Bei der Terrassenpunktlösung ist die ansteigende Front und bei der Überschusslösung ist die vordere ansteigende Front von V unabhängig von U , während bei der Terrassenpunktlösung die vordere zunehmende Front und bei der Überschusslösung die hintere abfallende Front von V von der U -Front verursacht wird und parallel dazu abläuft.

In dem numerischen Teil der Arbeit wird näher darauf eingegangen, ob und wie diese Profile überhaupt zustande kommen können.

6.3 Kein Massenaustauschterm

In diesem Abschnitt soll nun ein anderer Aspekt beleuchtet werden, nämlich der der gekoppelten Flüsse. Dazu werden die Massenaustauschterme vernachlässigt

$$h_u(u, v, u', v') = 0, \quad (6.39a)$$

$$h_v(u, v, u', v') = 0. \quad (6.39b)$$

Damit ergeben sich folgende Wellengleichungen

$$-cu' + [f_u(u, v) - u']' = 0, \quad (6.40a)$$

$$-cv' + [f_v(u, v) - v']' = 0. \quad (6.40b)$$

Beide Gleichungen können von einem festen y_0 bis zu einem beliebigen y integriert werden

$$u' = f_u(u, v) - cu + k_u, \quad (6.41a)$$

$$v' = f_v(u, v) - cv + k_v, \quad (6.41b)$$

$$k_u = -f_u(u_0, v_0) + cu_0, \quad (6.41c)$$

$$k_v = -f_v(u_0, v_0) + cv_0, \quad (6.41d)$$

wobei $u_0 = u(y_0)$ und $v_0 = v(y_0)$ sind und k_u und k_v die Integrationskonstanten darstellen.

Das dynamische System lautet

$$U' = f_u(U, V) - cU + k_u, \quad (6.42a)$$

$$V' = f_v(U, V) - cV + k_v. \quad (6.42b)$$

Seine stationären Punkte sind

$$S_0 = (U_0, V_0) \in \{(U, V) | f_u(U, V) - cU + k_u = 0 \wedge f_v(U, V) - cV + k_v = 0\}. \quad (6.43)$$

Das linearisierte System an den stationären Punkten S_0 lautet

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial U} - c & \frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial V} \\ \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial U} & \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial V} - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

und seine Eigenwerte sind

$$e_1(U_0, V_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial U} + \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial V} - 2c + \sqrt{\left(\frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial U} - \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial V} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial V} \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial U}} \right), \quad (6.45a)$$

$$e_2(U_0, V_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial U} + \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial V} - 2c - \sqrt{\left(\frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial U} - \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial V} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_u(U_0, V_0)}{\partial V} \frac{\partial f_v(U_0, V_0)}{\partial U}} \right). \quad (6.45b)$$

Damit ergibt sich folgende Klassifizierung der stationären Punkte

$$S_0 \text{ ist } \begin{cases} \text{stabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_r, \\ \text{instabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_\ell, \\ \text{Sattelpunkt, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^- \cup \mathcal{S}_m^+ \end{cases} \quad (6.46)$$

mit

$$\mathcal{S}_r = \{(U_0, V_0) | e_1(U_0, V_0) < 0 \wedge e_2(U_0, V_0) < 0\}, \quad (6.47a)$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(U_0, V_0) | e_1(U_0, V_0) > 0 \wedge e_2(U_0, V_0) > 0\}, \quad (6.47b)$$

$$\mathcal{S}_m^+ = \{(U_0, V_0) | e_1(U_0, V_0) > 0 \wedge e_2(U_0, V_0) < 0\}, \quad (6.47c)$$

$$\mathcal{S}_m^- = \{(U_0, V_0) | e_1(U_0, V_0) < 0 \wedge e_2(U_0, V_0) > 0\}. \quad (6.47d)$$

Nachdem nun bekannt ist, welche Punkte stabil, instabil oder Sattelpunkte sind, müssen sie jetzt miteinander verbunden werden, um Lösungen zu erzeugen. Dies kann durch die Funktionen

$$k_u(u, v) = -f_u(u, v) + cu, \quad (6.48a)$$

$$k_v(u, v) = -f_v(u, v) + cv \quad (6.48b)$$

geschehen, denn damit gilt

$$k_u(u, v) = k_u \Leftrightarrow u'(u, v) = 0, \quad (6.49a)$$

$$k_v(u, v) = k_v \Leftrightarrow v'(u, v) = 0. \quad (6.49b)$$

In einem stationären Punkt (u, v) , d.h. $u'(u, v) = 0, v'(u, v) = 0$, sind die Funktionen $k_u(u, v)$ und $k_v(u, v)$ mit den Integrationskonstanten k_u und k_v identisch. Somit haben alle stationären Punkte, die zu dem selben System gehören, identische Werte in den Funktionen $k_u(u, v)$ und $k_v(u, v)$.

Um weiter fortfahren zu können, müssen nun explizit die Flussfunktionen bestimmt werden. Dabei werden in den nächsten zwei Abschnitten die Flussfunktionen herangezogen, die aus den Systemen zweier fraktionaler Flussgleichungen des Perkolationsmodells mit den Näherungen des einzig in perkulierender Form vorhandenen Wassers bzw. Öls aus Abschnitten 4.3.3.3 bzw. 4.3.3.4 gewonnen wurden.

6.3.1 Einzig in perkulierender Form vorhandenes Wasser

Wenn angenommen wird, dass Wasser einzig in perkulierender Form existiert, dann werden die Gleichungen (4.62) zu

$$f_u(u, v) = \frac{u^2}{u^2 + R_3^1(1 - u - v)^2 + R_4^1v^2}, \quad (6.50a)$$

$$f_v(u, v) = \frac{R_4^1v^2}{u^2 + R_3^1(1 - u - v)^2 + R_4^1v^2} \quad (6.50b)$$

mit $u = S_w$ und $v = S_4$. Es wird ab hier von $R_3^1 = R_4^1 = 1$ ausgegangen. Damit sind alle Viskositäten identisch. Bei unterschiedlichen Viskositäten würden sich die Phasenportraits verzerren, die Topologie würde jedoch erhalten bleiben. Desweiteren wird die Beschränkung

$$u + v \leq 1 \quad (6.51)$$

angenommen, um den Volumenerhalt zu gewährleisten.

Damit können die Eigenwerte der stationären Punkte in (6.45) berechnet werden. Die nach (6.46) folgende Klassifizierung der stationären Punkte ist in Abbildung 6.5 für die Geschwindigkeiten $c = 0.02, 0.5, 1.11, 2, 2.08, 2.22$ dargestellt. Die schwarzen Flächen kennzeichnen die instabilen Punkte und damit die linksseitigen Randwertsättigungen. Die hellgrauen Flächen

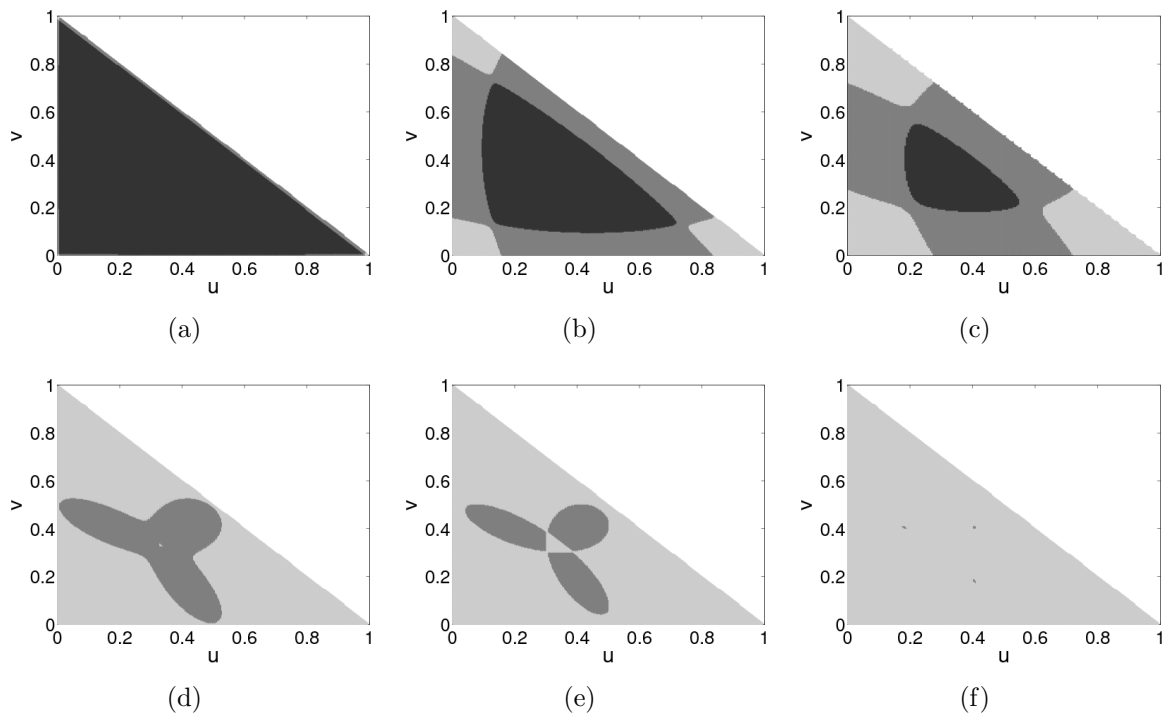


Abbildung 6.5: Klassifizierung der stationären Punkte für Geschwindigkeiten $c = 0.02, 0.5, 1.11, 2, 2.08, 2.22$ in stabil (hellgrau), instabil (schwarz) und Sattelpunkt (dunkelgrau). Bei $c = 0$ ist der gesamte Definitionsbereich instabil und für $c > 2.22$ ist der Definitionsbereich stabil. Bei $c = 2$ verschwindet die instabile Region, damit existieren mögliche Systeme nur für Geschwindigkeiten $0 < c < 2$. In diesem Bereich nimmt die instabile Region ab und die drei sich in den Ecken befindlichen stabilen Bereiche nehmen zu.

zeigen die stabilen Punkte und damit die rechtsseitigen Randwertsättigungen. Und die dunkelgrauen Flächen stellen die Sattelpunkte dar. Bei $c = 0$ ist der gesamte Definitionsbereich instabil. Bei Geschwindigkeiten $0 < c < 2$ existieren ein mit zunehmender Geschwindigkeit schrumpfender instabiler Bereich im Zentrum, drei voneinander getrennte sich in den Definitionsbereichen befindende stabile Bereiche, die mit zunehmender Geschwindigkeit anwachsen, und ein Sattelpunktbereich, der den instabilen von dem stabilen Bereich trennt. Bei Geschwindigkeit $c = 2$ verschwindet der instabile Bereich und für Geschwindigkeiten $2 < c < 2.08$ existiert ein dreiblättriger Sattelpunktbereich, der von einem stabilen Bereich umgeben ist. Desweiteren verliert der Sattelpunktbereich den Kontakt mit dem Rand des Definitionsbereichs. Für Geschwindigkeit $c = 2.015$ entsteht in der Mitte des Sattelpunktbereichs ein zusätzlicher stabiler Bereich der mit zunehmender Geschwindigkeit anschwillt, bis er bei Geschwindigkeit $c = 2.08$ den zusammenhängenden Sattelpunktbereich in drei Einzelbereiche aufbricht. Bei weiter zunehmender Geschwindigkeit werden die drei Sattelpunktbereiche immer kleiner, bis sie bei Geschwindigkeit $c = 2.22$ verschwunden sind, so

dass für Geschwindigkeit $c > 2.22$ der Definitionsbereich komplett stabil ist.

Für die möglichen Systeme bedeutet dies, dass nur Geschwindigkeiten im Bereich von $0 < c < 2$ möglich sind. Von den drei stabilen Bereichen stehen die zwei linken für Bewässerungen und der rechte für Entwässerungen.

Nachdem nun die stabilen und instabilen Punkte und somit die möglichen rechts- und linksseitigen Randsättigungen bekannt sind, müssen diese über die Konstanten k_u und k_v miteinander verbunden werden. Dabei ist nicht gesagt, dass jeder stabile oder instabile Punkt zu einer physikalisch relevanten laufenden Welle führt.

In Abbildung 6.6 sind Farbplots für die Funktionen $k_u(u, v)$, $k_v(u, v)$ für Geschwindigkeiten $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$ gezeigt. In den rechten oberen Ecken befinden sich die zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der verschiedenen Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.5 an. Die schraffierten Flächen geben die Regionen auf den stabilen bzw. instabilen Bereichen an, für deren Punkte es Punkte auf dem jeweiligen anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v) -Wert haben, und dementsprechend zu demselben System gehören. Punkte auf den stabilen bzw. instabilen Bereichen, die nicht schraffiert sind, gehören zu Trajektorien, die den Definitionsbereich verlassen und somit nicht physikalisch sind.

Die stabilen Bereiche müssen für jede Geschwindigkeit eingeschränkt werden. Für Geschwindigkeiten $0 < c < 1.11$ befinden sich die schraffierten Flächen in den Ecken der stabilen Bereiche, ab $c > 1.11$ verlieren sie Kontakt mit den Ecken und ab $c > 1.34$ verlieren sie Kontakt mit den Seiten. Damit kann es keine Wellen geben, die schneller als $c > 1.11$ sind und anfangs komplett mit einer Phase gefüllt sind. Ab Geschwindigkeiten $c > 1.34$ müssen sogar alle drei Phasen anfangs vorhanden sein. Somit ist die Geschwindigkeit einer primären Bewässerung durch $c = 1.11$ beschränkt.

Die schraffierten instabilen Bereiche liegen für $c < 1$ in den Ecken des instabilen Bereichs und decken weder den gesamten Bereich ab, noch überschneiden sie sich. Ab $c > 1$ fangen sie an, sich zu überschneiden. Ab $c > 1.11$ berühren die schraffierten Flächen die gegenüberliegenden Seiten des instabilen Bereichs und decken ihn komplett ab. Ab $c > 1.34$ decken alle drei schraffierten Flächen den gesamten instabilen Bereich ab.

In Tabelle 6.6 sind die Wertebereiche der Funktionen k_u und k_v auf den links unten (l.u.), links oben (l.o.) und rechts unten (r.u.) befindlichen stabilen, auf den instabilen und auf den reduzierten Teilbereichen für die Geschwindigkeiten $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$ gegeben. Dort sieht man, dass sich für $c = 0.7$ die (k_u, k_v) -Werte der verschiedenen reduzierten Bereiche nicht überschneiden. Bei $c = 1$ gibt es genau einen gemeinsamen Wert $(k_u, k_v) = (0, 0)$ und für

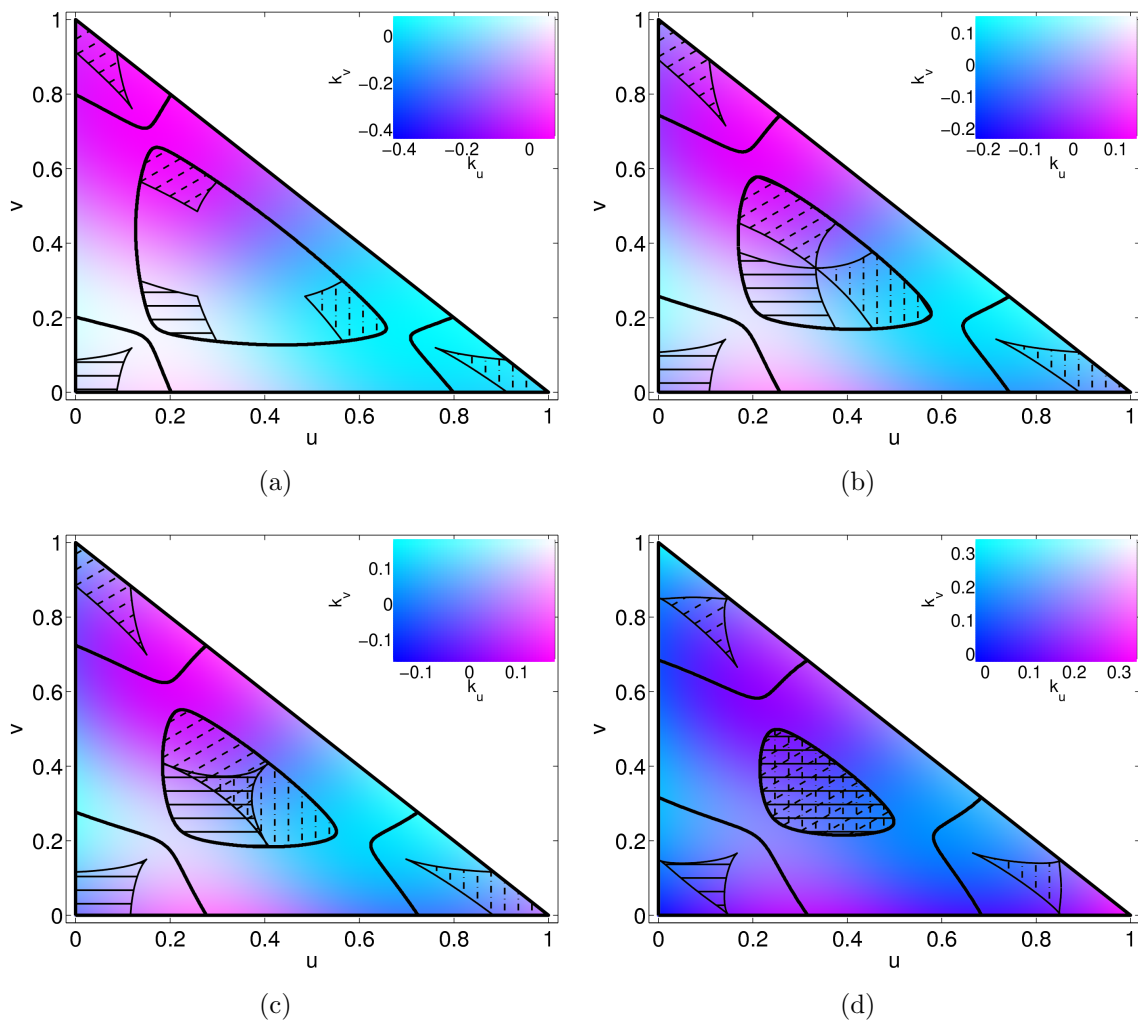


Abbildung 6.6: Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$ mit zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.5 an. Die schraffierten Flächen geben die Regionen auf den stabilen bzw. instabilen Bereichen an, für deren Punkte es Punkte auf dem jeweiligen anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v) -Wert haben. Stabile bzw. instabile Punkte, die nicht schraffiert sind, gehören zu Trajektorien, die den Definitionsbereich verlassen und somit nicht physikalisch sind.

$c = 1.34$ überschneiden sie sich komplett. Ab $c = 1.11$ sind die Maxima der verschiedenen reduzierten Bereiche gleich und ab $c = 1.34$ sind die Minima der verschiedenen reduzierten Bereiche gleich. Die reduzierten Wertebereiche von k_u und k_v sind links unten immer gleich. Desweiteren gleichen sich die reduzierten Wertebereiche von k_u links oben mit denen von k_v rechts unten und die reduzierten Wertebereiche von k_v links oben gleichen sich mit denen von k_u rechts unten. Zusätzlich sind bis $c = 1.11$ links oben die reduzierten Wertebereiche von k_v doppelt so groß wie die von k_u , während rechts unten die reduzierten Wertebereiche

c	0.7	1	1.11	1.34
stabil k_u	(-0.43, 0.08)	(-0.22, 0.15)	(-0.15, 0.18)	(-0.02, 0.34)
stabil k_v	(-0.43, 0.08)	(-0.22, 0.15)	(-0.15, 0.18)	(-0.02, 0.34)
stabil l.u. k_u	(0, 0.08)	(0, 0.15)	(0, 0.18)	(0, 0.25)
stabil l.u. k_v	(0, 0.08)	(0, 0.15)	(0, 0.18)	(0, 0.25)
stabil l.o. k_u	(0, 0.08)	(0, 0.15)	(0, 0.18)	(0, 0.34)
stabil l.o. k_v	(-0.43, -0.3)	(-0.22, 0)	(-0.15, 0.12)	(-0.02, 0.25)
stabil r.u. k_u	(-0.43, -0.3)	(-0.22, 0)	(-0.15, 0.12)	(-0.02, 0.25)
stabil r.u. k_v	(0, 0.08)	(0, 0.15)	(0, 0.18)	(0, 0.34)
instabil k_u	(-0.42, 0.06)	(-0.21, 0.11)	(-0.12, 0.12)	(0, 0.17)
instabil k_v	(-0.42, 0.06)	(-0.21, 0.11)	(-0.12, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert l.u. k_u	(0, 0.06)	(0, 0.11)	(0, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert l.u. k_v	(0, 0.06)	(0, 0.11)	(0, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert l.o. k_u	(0, 0.06)	(0, 0.11)	(0, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert l.o. k_v	(-0.42, -0.3)	(-0.21, 0)	(-0.12, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert r.u. k_u	(-0.42, -0.3)	(-0.21, 0)	(-0.12, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert r.u. k_v	(0, 0.06)	(0, 0.11)	(0, 0.12)	(0, 0.17)

Tabelle 6.6: Wertebereiche der Funktionen k_u und k_v auf den links unten (l.u.), links oben (l.o.) und rechts unten (r.u.) befindlichen stabilen, auf den instabilen und auf den reduzierten Teilbereichen für die Geschwindigkeiten $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$.

von k_u doppelt so groß wie die von k_v sind.

Nachdem sich diese Arbeit auf Bewässerungssysteme beschränkt, wird der rechte stabile Bereich ab sofort nicht mehr betrachtet. Desweiteren sind nichtperkolierende Sättigungen über 0.5 unrealistisch, woraufhin der linke obere Bereich aus physikalischen Gründen auch ignoriert wird. Somit werden Systeme betrachtet, die die horizontal durchgezogen schraffierte Flächen in Abbildung 6.6 verbinden.

Abbildung 6.7 zeigt zwei Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 1.11, 1.34$ für physikalisch relevante Bewässerungen mit zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.6 an. Die schwarzen dünnen Linien geben die Bewässerungsstabilitätsbereiche an. Für $c = 1.11$ sind zusätzlich die Fixpunkte für das Bewässerungssystem mit $(k_u, k_v) = (0, 0)$ abgebildet, welches im Folgenden eingehend besprochen wird. Der Kreis steht für den stabilen, der Diamant für den instabilen und die Quadrate für die Sattelpunkte.

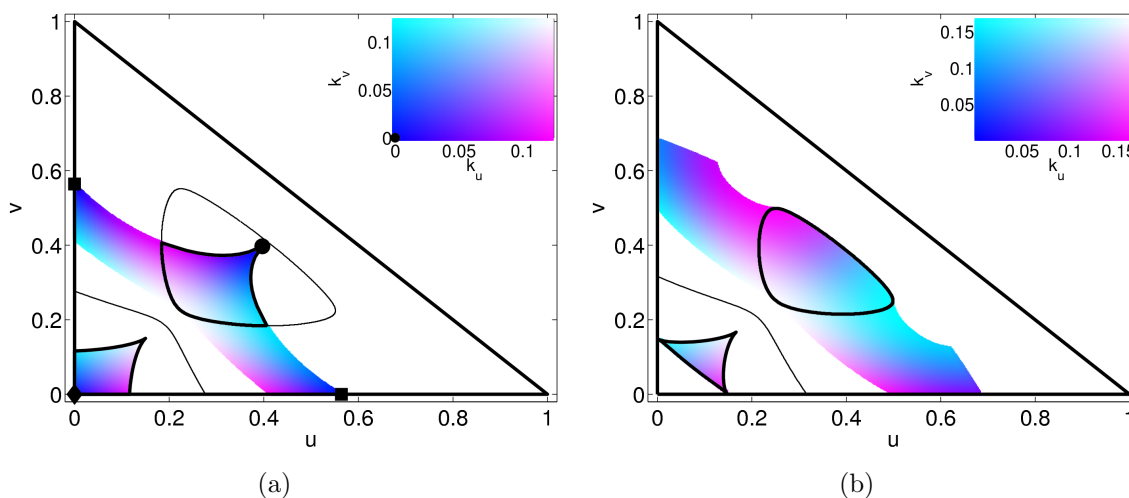


Abbildung 6.7: Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 1.11, 1.34$ für physikalisch relevante Bewässerungen mit zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der reduzierten Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.6 an. Die schwarzen dünnen Linien geben die ganzen Stabilitätsbereiche an. Für $c = 1.11$ sind zusätzlich die Fixpunkte für das Bewässerungssystem mit $(k_u, k_v) = (0, 0)$ abgebildet, welches im Folgenden eingehend besprochen wird. Der Kreis steht für den stabilen, der Diamant für den instabilen und die Quadrate für die Sattelpunkte. Für jedes mögliche Wertepaar (k_u, k_v) existieren ein stabiler, ein instabiler und zwei Sattelpunkte.

Es ist zu sehen, dass für jedes mögliche Wertepaar (k_u, k_v) ein stabiler, ein instabiler und zwei Sattelpunkte existieren.

Nun wird ein explizites Beispiel für die Geschwindigkeit und die (k_u, k_v) -Werte gewählt. Es stellt die schnellsten und größten Bewässerungswellen in einem anfänglich trockenen Medium dar. Dies führt für physikalische Bewässerungen zu eindeutigen links- und rechtsseitigen Sättigungsrandwerten. Die Werte werden aus Tabelle 6.7 gewonnen. Im Fall einer Gleichung aus Kapitel 5 gibt es für festgewählte Randwertsättigungen und Geschwindigkeiten immer eine eindeutige laufende Welle. Hier ist dies jedoch nicht der Fall. So werden zunächst zwei interessante laufende Wellen, eine mit einem Überschuss in u und die andere mit einem Terrassenpunkt in u , näher betrachtet. Überschuss- und Terrassenpunktlösungen in v werden

Abb.	c	k_u	k_v	(u_ℓ, v_ℓ)	(u_r, v_r)	(u_n, v_n)	(u_m, v_m)
6.8(a)	1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.38, 0.37)	(0.56, 0)
6.8(b)	1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.37, 0.32)	—

Tabelle 6.7: Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte, Terrassen-, Unterschuss- und Überschusspunkte für Abbildungen 6.8.

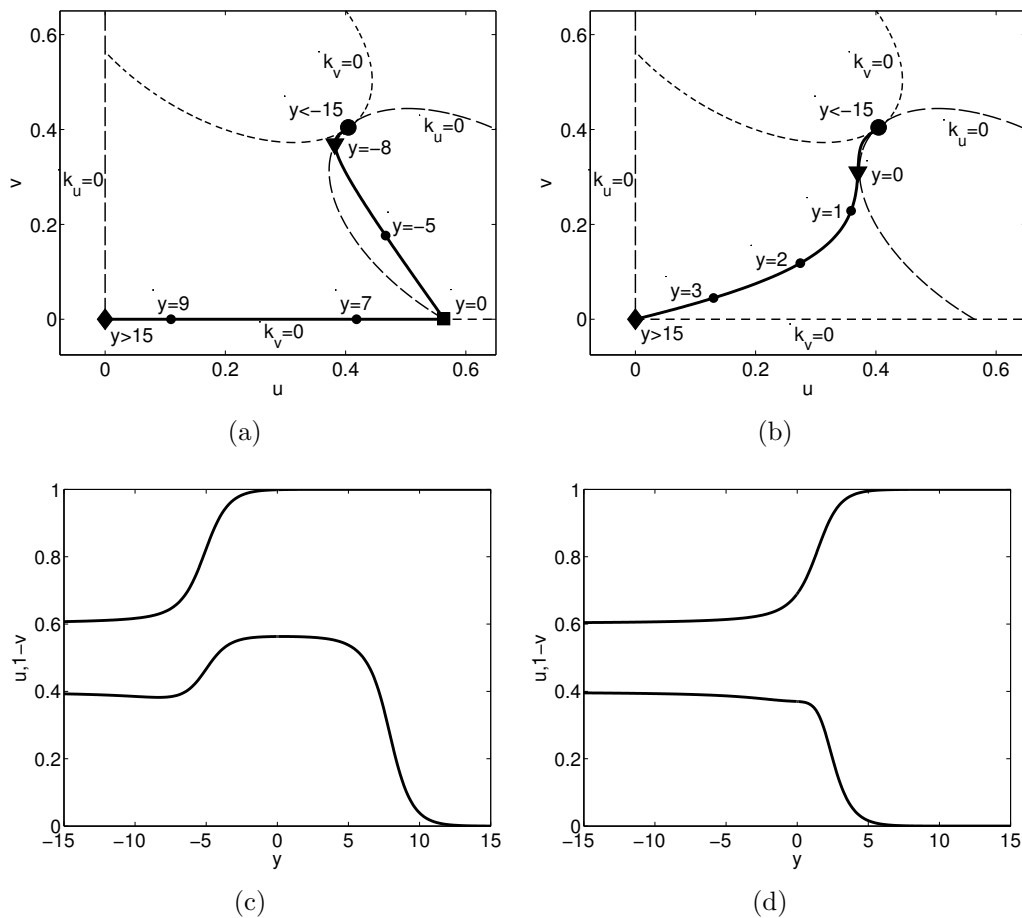


Abbildung 6.8: Phasenportraits und Sättigungsprofile für die extremalen Überschuss- (a),(c) und der Terrassenpunktlösung (b),(d) in u mit Werten aus Tabelle 6.7 mit Trajektorien (fett), Höhenlinien von $k_u(u, v) = 0$ (leicht gestrichelt) und von $k_v(u, v) = 0$ (stark gestrichelt), instabilen Fixpunkten (Kreisen), stabilen Fixpunkten (Diamanten), Sattelpunkten (Quadraten) und lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkten (Dreiecken). Die kleinen Kreise geben einige ausgesuchte y -Werte an, die zeigen, wo sich der jeweilige Punkt auf der Trajektorie im dazugehörigen Sättigungsprofil befindet. Trajektorien können die Höhenlinien von $k_u(u, v) = 0$ bzw. $k_v(u, v) = 0$ nur vertikal bzw. horizontal berühren, da dort $u' = 0$ bzw. $v' = 0$ gilt.

aufgrund der Symmetrie in u und v nicht genauer untersucht. Zuletzt werden alle möglichen laufenden Wellen klassifiziert.

In Abbildung 6.8 sieht man die Phasenportraits und Sättigungsprofile für die extremale Überschuss- und die Terrassenpunktlösung in u mit Werten aus Tabelle 6.7. Die Trajektorien sind mit fetten Linien und die Höhenlinien von $k_u = 0$ und $k_v = 0$ sind mit schwach bzw. stark gestrichelten Linien dargestellt. Kreise zeigen die instabilen Fixpunkte, Diamanten zeigen die stabilen Fixpunkte, Quadrate zeigen die Sattelpunkte und Dreiecke zeigen die

lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkte. Die kleinen Kreise geben einige ausgesuchte y -Werte an, die zeigen, wo sich der jeweilige Punkt auf der Trajektorie im dazugehörigen Sättigungsprofil befindet. In den Sättigungsprofilen wird nicht u und v , sondern u und $1 - v$ gezeichnet, weil v mit der nichtperkolierenden Ölsättigung identifiziert werden kann.

Das Phasenportrait 6.8(a) zeigt, dass die Trajektorie zunächst aus dem instabilen Punkt (u_ℓ, v_ℓ) in Richtung stabiler Punkt (u_r, v_r) läuft. Wenn sie jedoch den Sattelpunkt (u_m, v_m) annähernd erreichen will, so muss sie einmal die k_u -Höhenlinie schneiden. Bei dem Schnittpunkt (u_n, v_n) der Trajektorie mit der Höhenlinie von $k_u(u, v)$ ist $u' = 0$. Deswegen schneidet die Trajektorie sie vertikal. Dieser Punkt stellt ein lokales Minimum in u dar. Daraufhin steigt u an, bis sie am Sattelpunkt ihr Maximum erreicht. Die Trajektorie erreicht ihn nahezu parallel zum linearisierten stabilen Unterraum und verlässt ihn dann auch nahezu parallel zum linearisierten instabilen Unterraum von (u_m, v_m) . Dann läuft die Trajektorie nahezu als Gerade parallel zur u -Achse, d.h. ohne dass sich v noch verändert, in den stabilen Punkt (u_r, v_r) .

Das Phasenportrait 6.8(b) zeigt wieder, dass die Trajektorie zunächst aus dem instabilen Punkt (u_ℓ, v_ℓ) in Richtung stabiler Punkt (u_r, v_r) läuft. Nun wandert sie nach unten und berührt vertikal die k_u -Höhenlinie an ihrem Minimum in v . Dies ist ein Terrassenpunkt (u_n, v_n) in u . Daraufhin macht die Trajektorie einen Bogen und wandert dann direkt und gleichmäßig in u und v zum stabilen Punkt (u_r, v_r) .

Das Sättigungsprofil 6.8(c) zeigt einen Überschuss mit nachlaufendem lokalem Minimum in u , somit besteht die u -Welle aus drei Teilwellen, einer großen Hauptbewässerungswelle, gefolgt von einer Entwässerung, gefolgt von einer kleinen Bewässerung. Die v -Welle hingegen ist monoton fallend und läuft parallel zur u -Entwässerung.

Im Sättigungsprofil 6.8(d) besteht die u -Welle aus zwei Teilwellen, einer großen Hauptbewässerungswelle gefolgt von einer kleineren Bewässerung. Die v -Welle hingegen ist monoton fallend und läuft parallel zur u -Hauptbewässerung.

Wie in Abschnitt 5.1.3 in Abbildung 5.5 diskutiert, kann man die laufenden Wellen für eine Gleichung als Gerade darstellen, die die Flussfunktionen an den links- und rechtsseitigen Randwertsättigungen schneidet. Dabei ist die Steigung der Geraden gleich der Wellengeschwindigkeit. Dies ist auch hier für Lösungen zweier Gleichungen möglich, wobei diesmal die Steigungen der Linien in u -Richtung für f_u und in v -Richtung für f_v gleich der Wellengeschwindigkeit ist.

Die Abbildungen 6.9 zeigen die Flächen von $f_u(u, v)$ und $f_v(u, v)$ für die Überschuss- und Terrassenpunktlösung aus Abbildung 6.8 und Tabelle 6.7 und deren laufende Wellenver-

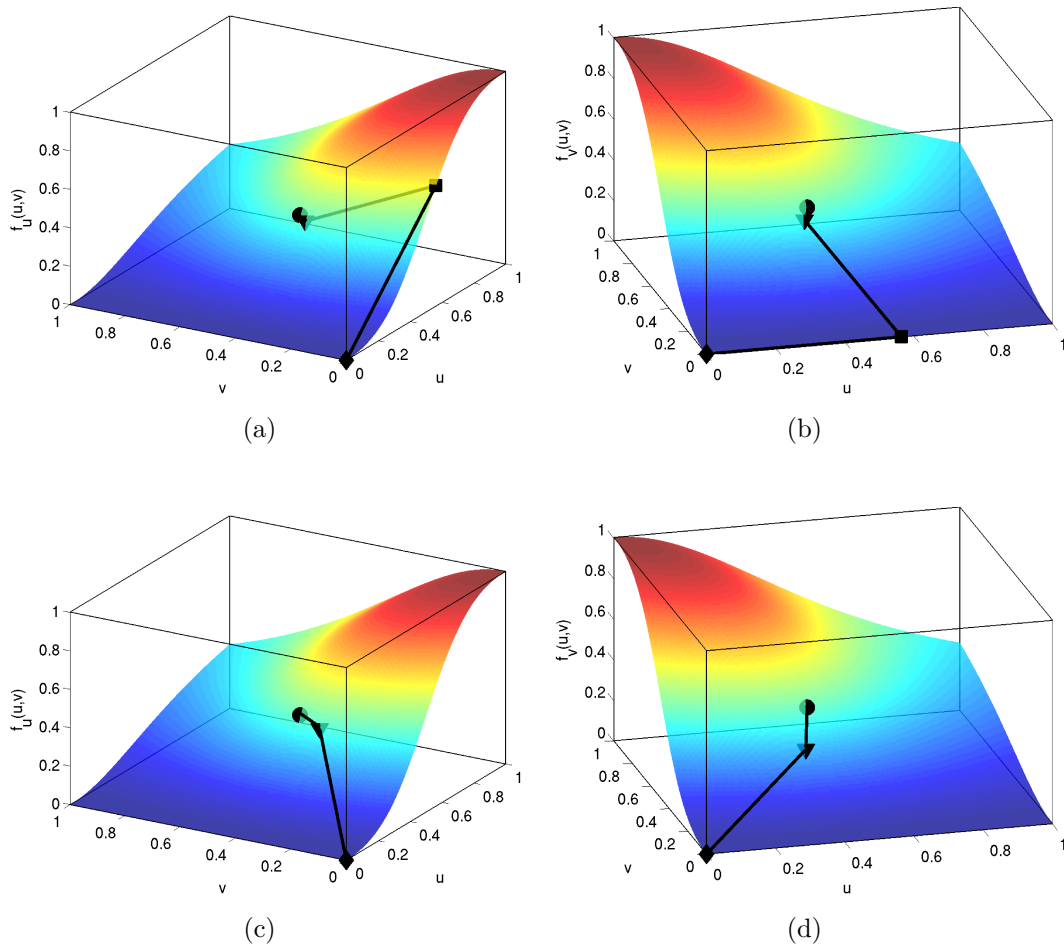


Abbildung 6.9: Flächen von $f_u(u, v)$ (a),(c) und $f_v(u, v)$ (b),(d) für die Überschuss- (a),(b) und Terrassenpunktlösung (c),(d) aus Abbildung 6.8 und Tabelle 6.7 und deren laufende Wellenverbindungslinien mit den instabilen Fixpunkten (Kreisen), stabilen Fixpunkten (Diamanten), Sattelpunkten (Quadraten) und lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkten (Dreiecken). Bei lokalen Bewässerungen sind die Linien überhalb der Fläche und bei lokalen Entwässerungen unterhalb. Die Steigungen der Linien in u -Richtung für f_u und in v -Richtung für f_v sind gleich der Wellengeschwindigkeit $c = 1.11$.

bindungslinien. Dabei werden die instabilen Fixpunkte als Kreise, die stabilen Fixpunkte als Diamanten, die Sattelpunkte als Quadrate und die lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkte als Dreiecke dargestellt. Bei lokalen Bewässerungen sind die Linien überhalb der Fläche und bei lokalen Entwässerungen unterhalb.

In Abbildung 6.9(a) ist klar zu erkennen, dass die u -Welle in 6.8(a) vom rechtsseitigen Randwert aus gesehen zuerst stark bewässert, dann entwässert und dann nochmal ein wenig bewässert. In Abbildung 6.9(b) sieht man, dass die v -Welle in 6.8(a) vom rechtsseitigen Randwert aus drei Teilbewässerungen besteht. In Abbildung 6.9(c) und in Abbildung 6.9(d) ist klar zu

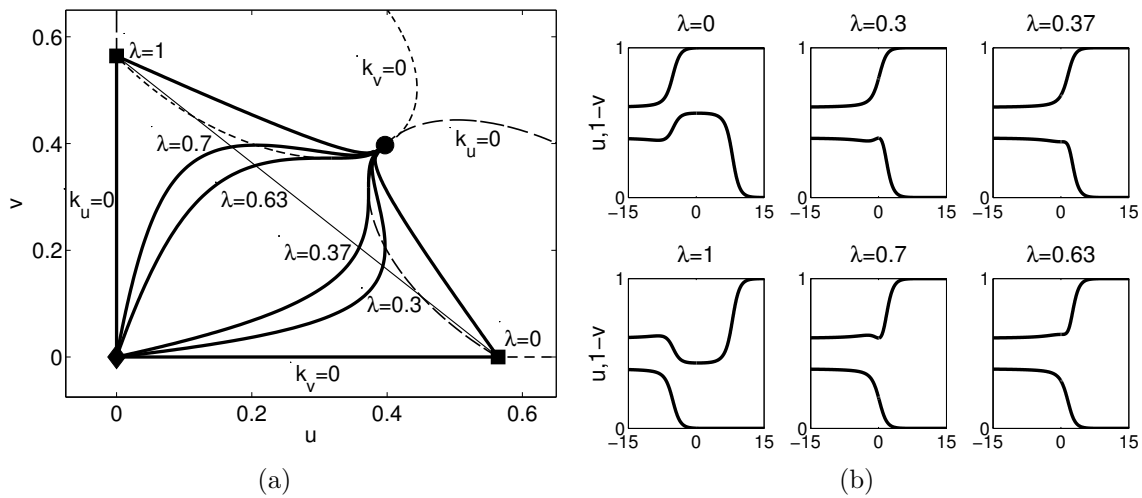


Abbildung 6.10: Phasenportrait (a) und Sättigungsprofile (b) für die sechs ausgezeichneten Systeme aus Tabelle 6.8. Die fetten Linien sind die Trajektorien mit zugehörigem λ -Wert, der als Parameter der konvexen Hülle der zwei Sattelpunkte, die als dünne Linie dargestellt ist, definiert ist. Der Kreis zeigt den instabilen Fixpunkt, der Diamant zeigt den stabilen Fixpunkt und die Quadrate zeigen die Sattelpunkte. Die Höhenlinien von $k_u = 0$ und $k_v = 0$ sind schwach bzw. stark gestrichelt dargestellt. Bei jeder dieser Trajektorien ändert sich das Verhalten der Sättigungsprofile, so wie in Tabelle 6.9 gezeigt.

erkennen, dass die u -Welle bzw. die v -Welle in 6.8(b) aus zwei Bewässerungswellen besteht.

Nach diesen zwei Beispielen ist es nun möglich, alle Lösungen für fest vorgegebene Geschwindigkeiten und k_u - und k_v -Werte zu bestimmen. Die Verbindungslinie $\mathcal{L}(\lambda)$, sprich die konvexe Hülle, zwischen den zwei Sattelpunkten wird von jeder Trajektorie genau einmal geschnitten und so kann man mit dem λ -Wert des Schnittpunktes alle möglichen Trajektorien eindeutig benennen. Sie kann so parametrisiert werden, dass $\mathcal{L}(0)$ gleich dem Sattelpunkt des maximalen u -Überschusses und $\mathcal{L}(1)$ gleich dem Sattelpunkt des maximalen v -Überschusses ist.

Für die Werte aus Tabelle 6.8 sind in Abbildung 6.10 die Sättigungsprofile und Trajektorien im Phasenraum für sechs ausgezeichnete Systeme dargestellt. Die fetten Linien sind die Trajektorien mit zugehörigem Parameter λ . Der Kreis zeigt den instabilen Fixpunkt, der Diamant zeigt den stabilen Fixpunkt und die Quadrate zeigen die Sattelpunkte. Die Höhenlinien von $k_u = 0$ und $k_v = 0$ sind schwach bzw. stark gestrichelt dargestellt.

Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ ist die maximale Überschusslösung in u , die Trajektorie mit $\lambda = 0.3$ ist die minimale Überschusslösung in u , die Trajektorie mit $\lambda = 0.37$ ist die Terrassenpunktlösung in u , die Trajektorie mit $\lambda = 0.63$ ist die Terrassenpunktlösung in v , die Trajektorie mit $\lambda = 0.7$ ist die minimale Überschusslösung in v und die Trajektorie mit $\lambda = 1$ ist die maximale Überschusslösung in v . Hier ist nochmal die Symmetrie in u und v deutlich zu

c	k_u	k_v	(u_ℓ, v_ℓ)	(u_r, v_r)	(u_m, v_m)	λ
1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.56, 0)	0
1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.4, 0.21)	0.3
1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.37, 0.32)	0.37
1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.32, 0.37)	0.63
1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0.21, 0.4)	0.7
1.11	0	0	(0.4, 0.4)	(0, 0)	(0, 0.56)	1

Tabelle 6.8: Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 6.10.

erkennen. Der λ -Wert dient als Parameter für Bifurkationen im topologischen Verhalten der Sättigungen u und v , wie es in Tabelle 6.9 dargestellt ist. So bestehen die Trajektorien mit $\lambda \in (0, 0.3)$ aus einer monoton fallenden Welle in v und einer Überschusswelle in u , die ein globales Maximum und ein lokales Minimum aufweist. Die Trajektorien mit $\lambda \in (0.3, 0.37)$ bestehen aus einer monoton fallenden Welle in v und einer nichtmonotonen Welle in u , die ein lokales Maximum und ein lokales Minimum aufweist. Die Trajektorien mit $\lambda \in (0.37, 0.63)$ bestehen aus monoton fallenden Wellen in u und v . Die Trajektorien mit $\lambda \in (0.63, 0.7)$ bestehen aus einer monoton fallenden Welle in u und einer nichtmonotonen Welle in v , die ein lokales Maximum und ein lokales Minimum aufweist. Die Trajektorien mit $\lambda \in (0.7, 1)$ bestehen aus einer monoton fallenden Welle in u und einer Überschusswelle in v , die ein globales Maximum und ein lokales Minimum aufweist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass im Vergleich zu Abschnitt 5 das System nicht mehr über seine Geschwindigkeit und seine linken und rechten Randwertsättigungen eindeutig bestimmt ist. Es existiert ein zusätzlicher Freiheitsgrad. Dieser erlaubt auch nichtmonotones Verhalten und damit Überschusslösungen in jeweils einer Sättigung. Die Frage ist nun, ob dieser Freiheitsgrad physikalisch gültig ist und eine physikalische Bedeutung hat. Diese Frage

λ	(0, 0.3)	(0.3, 0.37)	(0.37, 0.63)	(0.63, 0.7)	(0.7, 1)
monoton fallend in u	nein	nein	ja	ja	ja
monoton fallend in v	ja	ja	ja	nein	nein
Überschuss in u	ja	nein	nein	nein	nein
Überschuss in v	nein	nein	nein	nein	ja

Tabelle 6.9: Verhalten der Sättigungsprofile mit Bifurkationsparameter λ .

wird später im Kapitel 8 über numerische Lösungen beantwortet.

6.3.2 Einzig in perkolierender Form vorhandenes Öl

Wenn angenommen wird, dass Öl einzig in perkolierender Form existiert, dann werden die Gleichungen (4.62) zu

$$f_u(u, v) = \frac{(u - v)^2 + R_2^1 v^2}{(u - v)^2 + R_2^1 v^2 + R_3^1 (1 - u)^2}, \quad (6.52a)$$

$$f_v(u, v) = \frac{R_2^1 v^2}{(u - v)^2 + R_2^1 v^2 + R_3^1 (1 - u)^2} \quad (6.52b)$$

mit $u = S_w$ und $v = S_2$. Es wird ab hier von $R_2^1 = R_3^1 = 1$ ausgegangen. Damit sind alle Viskositäten identisch. Bei unterschiedlichen Viskositäten würden sich die Phasenportraits verzerren, die Topologie würde jedoch erhalten bleiben. Desweiteren wird die Beschränkung

$$u \geq v \quad (6.53)$$

angenommen, damit die perkolierende Wassersättigung nicht negativ werden kann.

Damit können die Eigenwerte der stationären Punkte in (6.45) berechnet werden. Die nach (6.46) folgende Klassifizierung der stationären Punkte ist in Abbildung 6.11 für die Geschwindigkeiten $c = 0.02, 0.5, 1.11, 2, 2.08, 2.22$ dargestellt. Die schwarzen Flächen kennzeichnen die instabilen Punkte und damit die linksseitigen Randwertsättigungen. Die hellgrauen Flächen zeigen die stabilen Punkte und damit die rechtsseitigen Randwertsättigungen. Und die dunkelgrauen Flächen stellen die Sattelpunkte dar. Bei $c = 0$ ist der gesamte Definitionsbereich instabil. Bei Geschwindigkeiten $0 < c < 2$ existieren ein mit zunehmender Geschwindigkeit schrumpfender instabiler Bereich im Zentrum, drei voneinander getrennte sich in den Definitionsbereichen befindende stabile Bereiche, die mit zunehmender Geschwindigkeit anwachsen, und ein Sattelpunktbereich, der den instabilen von dem stabilen Bereich trennt. Bei Geschwindigkeit $c = 2$ verschwindet der instabile Bereich und für Geschwindigkeiten $2 < c < 2.08$ existiert ein dreiblättriger Sattelpunktbereich, der von einem stabilen Bereich umgeben ist. Desweiteren verliert der Sattelpunktbereich den Kontakt mit dem Rand des Definitionsbereichs. Für Geschwindigkeit $c = 2.015$ entsteht in der Mitte des Sattelpunktbereichs ein zusätzlicher stabiler Bereich der mit zunehmender Geschwindigkeit anschwillt, bis er bei Geschwindigkeit $c = 2.08$ den zusammenhängenden Sattelpunktbereich in drei Einzelbereiche aufbricht. Bei weiter zunehmender Geschwindigkeit werden die drei Sattelpunktbereiche immer kleiner, bis sie bei Geschwindigkeit $c = 2.22$ verschwunden sind, so

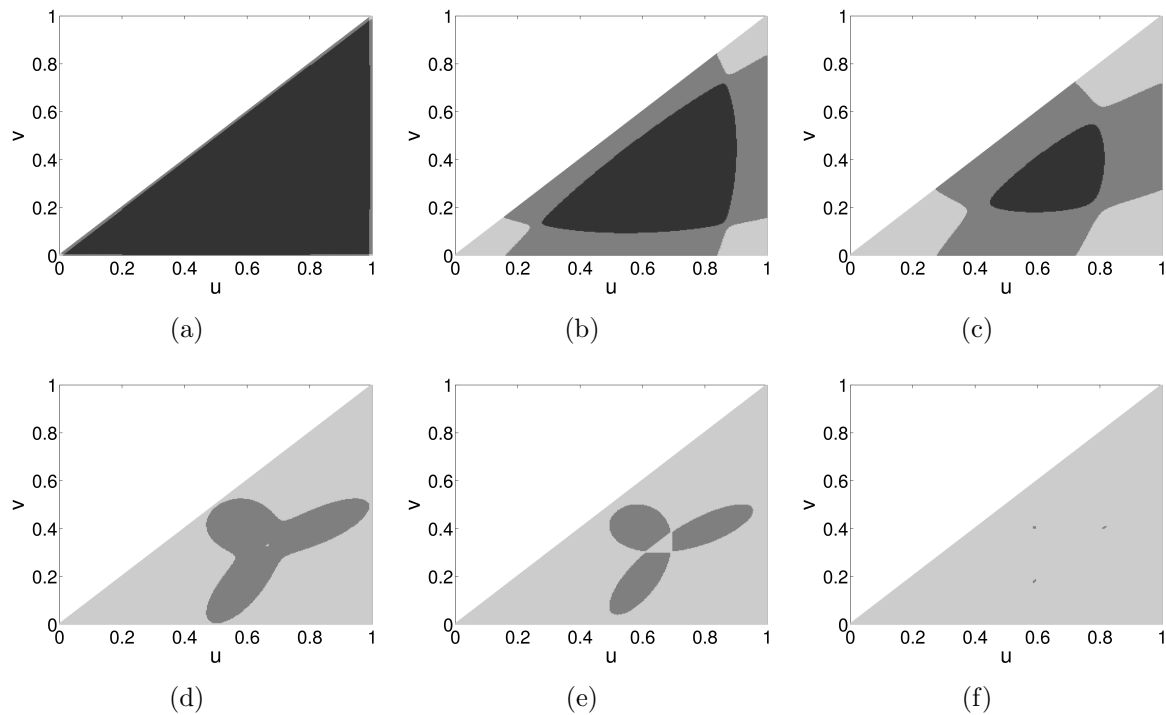


Abbildung 6.11: Klassifizierung der stationären Punkte für Geschwindigkeiten $c = 0.02, 0.5, 1.11, 2, 2.08, 2.22$ in stabil (hellgrau), instabil (schwarz) und Sattelpunkt (dunkelgrau). Bei $c = 0$ ist der gesamte Definitionsbereich instabil und für $c > 2.22$ ist der Definitionsbereich stabil. Bei $c = 2$ verschwindet die instabile Region, damit existieren mögliche Systeme nur für Geschwindigkeiten $0 < c < 2$. In diesem Bereich nimmt die instabile Region ab und die drei sich in den Ecken befindlichen stabilen Bereiche nehmen zu.

dass für Geschwindigkeit $c > 2.22$ der Definitionsbereich komplett stabil ist.

Für die möglichen Systeme bedeutet dies, dass nur Geschwindigkeiten im Bereich von $0 < c < 2$ möglich sind. Von den drei stabilen Bereichen steht der linke für Bewässerungen und die zwei rechten für Entwässerungen.

Nachdem nun die stabilen und instabilen Punkte und somit die möglichen rechts- und linksseitigen Randsättigungen bekannt sind, müssen diese über die Konstanten k_u und k_v miteinander verbunden werden. Dabei ist nicht gesagt, dass jeder stabile oder instabile Punkt zu einer physikalisch relevanten laufenden Welle führt.

In Abbildung 6.12 sind Farbplots für die Funktionen $k_u(u, v), k_v(u, v)$ für Geschwindigkeiten $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$ gezeigt. In den linken oberen Ecken befinden sich die zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der verschiedenen Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.11 an. Die schraffierten Flächen geben die Regionen auf den stabilen bzw. instabilen Bereichen an, für deren Punkte

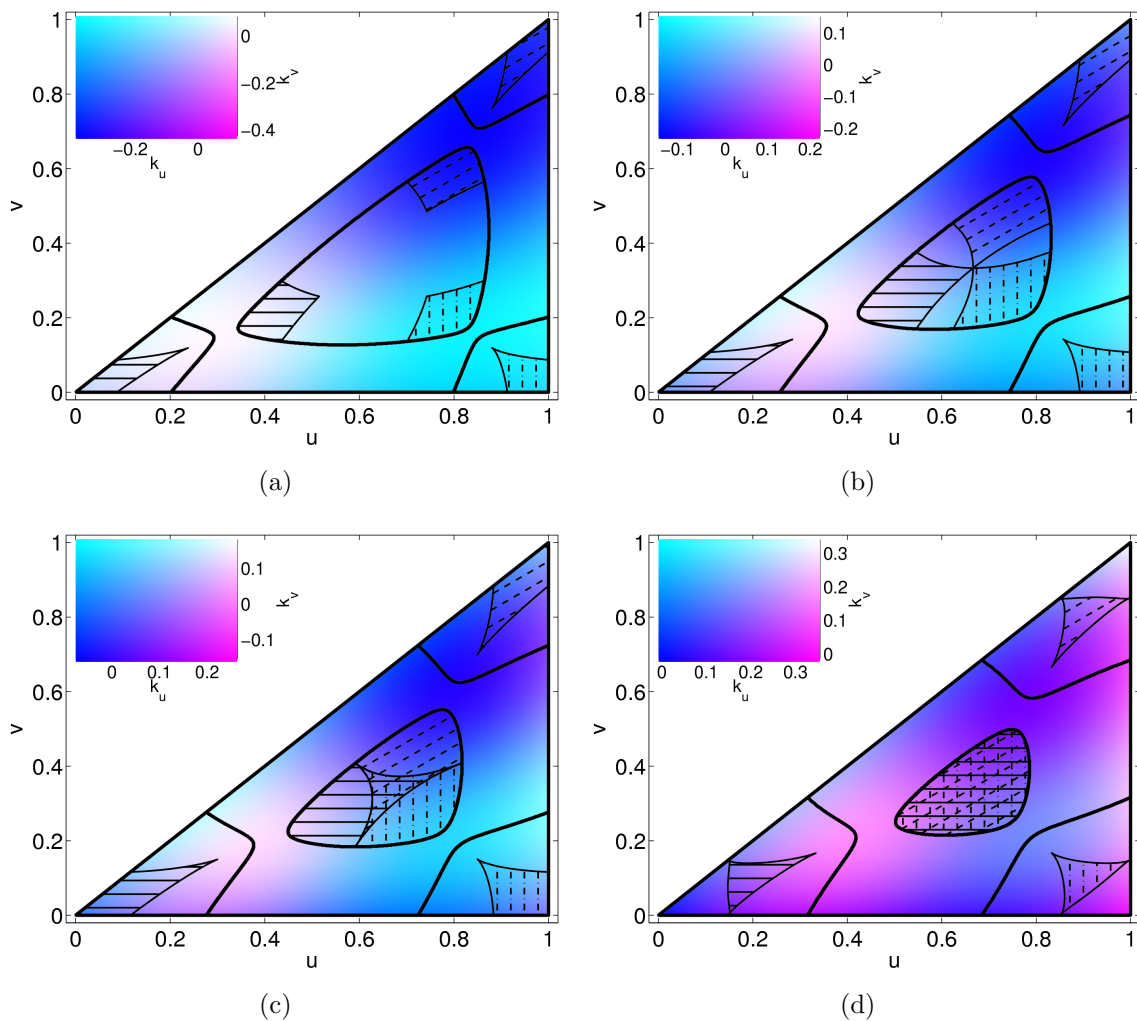


Abbildung 6.12: Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$ mit zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.11 an. Die schraffierten Flächen geben die Regionen auf den stabilen bzw. instabilen Bereichen an, für deren Punkte es Punkte auf dem jeweiligen anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v) -Wert haben. Stabile bzw. instabile Punkte, die nicht schraffiert sind, gehören zu Trajektorien, die den Definitionsbereich verlassen und somit nicht physikalisch sind.

es Punkte auf dem jeweiligen anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v) -Wert haben, und dementsprechend zu demselben System gehören. Punkte auf den stabilen bzw. instabilen Bereichen, die nicht schraffiert sind, gehören zu Trajektorien, die den Definitionsbereich verlassen und somit nicht physikalisch sind.

Die stabilen Bereiche müssen für jede Geschwindigkeit eingeschränkt werden. Für Geschwindigkeiten $0 < c < 1.11$ befinden sich die schraffierten Flächen in den Ecken der stabilen Bereiche, ab $c > 1.11$ verlieren sie Kontakt mit den Ecken und ab $c > 1.34$ verlieren sie

c	0.7	1	1.11	1.34
stabil k_u	(-0.38, 0.13)	(-0.15, 0.22)	(-0.07, 0.26)	(0, 0.36)
stabil k_v	(-0.43, 0.08)	(-0.22, 0.15)	(-0.15, 0.18)	(0, 0.34)
stabil l.u. k_u	(0, 0.13)	(0, 0.22)	(0, 0.26)	(0, 0.36)
stabil l.u. k_v	(0, 0.08)	(0, 0.15)	(0, 0.18)	(0, 0.25)
stabil r.o. k_u	(-0.38, -0.3)	(-0.15, 0)	(-0.07, 0.12)	(0.09, 0.34)
stabil r.o. k_v	(-0.43, -0.3)	(-0.22, 0)	(-0.15, 0.12)	(0, 0.34)
stabil r.u. k_u	(-0.38, -0.3)	(-0.15, 0)	(-0.07, 0.12)	(0.09, 0.34)
stabil r.u. k_v	(0, 0.08)	(0, 0.15)	(0, 0.18)	(0, 0.34)
instabil k_u	(-0.36, 0.12)	(-0.11, 0.21)	(0, 0.25)	(0.17, 0.34)
instabil k_v	(-0.42, 0.06)	(-0.21, 0.11)	(-0.12, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert l.u. k_u	(0, 0.12)	(0, 0.21)	(0, 0.25)	(0.17, 0.34)
reduziert l.u. k_v	(0, 0.06)	(0, 0.11)	(0, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert r.o. k_u	(-0.36, -0.3)	(-0.11, 0)	(0, 0.12)	(0.17, 0.34)
reduziert r.o. k_v	(-0.42, -0.3)	(-0.21, 0)	(-0.12, 0.12)	(0, 0.17)
reduziert r.u. k_u	(-0.36, -0.3)	(-0.11, 0)	(0, 0.12)	(0.17, 0.34)
reduziert r.u. k_v	(0, 0.06)	(0, 0.11)	(0, 0.12)	(0, 0.17)

Tabelle 6.10: Wertebereiche der Funktionen k_u und k_v auf den links unten (l.u.), rechts oben (r.o.) und rechts unten (r.u.) befindlichen stabilen, auf den instabilen und auf den reduzierten Teilbereichen für die Geschwindigkeiten $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$.

Kontakt mit den Seiten. Damit kann es keine Wellen geben, die schneller als $c > 1.11$ sind und anfangs komplett mit einer Phase gefüllt sind. Ab Geschwindigkeiten $c > 1.34$ müssen sogar alle drei Phasen anfangs vorhanden sein. Somit ist die Geschwindigkeit einer primären Bewässerung durch $c = 1.11$ beschränkt.

Die schraffierten instabilen Bereiche liegen für $c < 1$ in den Ecken des instabilen Bereichs und decken weder den gesamten Bereich ab, noch überschneiden sie sich. Ab $c > 1$ fangen sie an, sich zu überschneiden. Ab $c > 1.11$ berühren die schraffierten Flächen die gegenüberliegenden Seiten des instabilen Bereichs und decken ihn komplett ab. Ab $c > 1.34$ decken alle drei schraffierten Flächen den gesamten instabilen Bereich ab.

In Tabelle 6.10 sind die Wertebereiche der Funktionen k_u und k_v auf den links unten (l.u.), rechts oben (r.o.) und rechts unten (r.u.) befindlichen stabilen, auf den instabilen und auf den reduzierten Teilbereichen für die Geschwindigkeiten $c = 0.7, 1, 1.11, 1.34$ gegeben. Dort sieht man, dass sich für $c = 0.7$ die (k_u, k_v) -Werte der verschiedenen reduzierten Bereiche

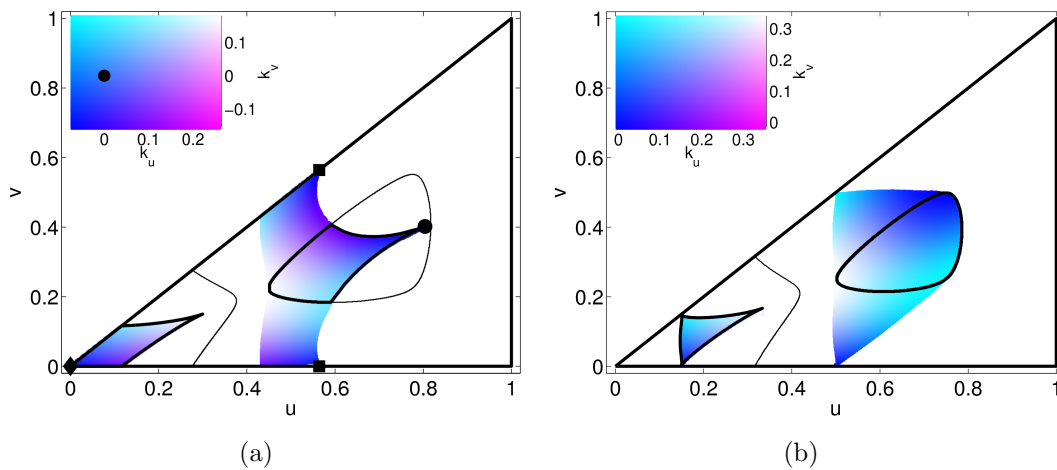


Abbildung 6.13: Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 1.11, 1.34$ für physikalisch relevante Bewässerungen mit zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der reduzierten Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.12 an. Die schwarzen dünnen Linien geben die ganzen Stabilitätsbereiche an. Für $c = 1.11$ sind zusätzlich die Fixpunkte für das Bewässerungssystem mit $(k_u, k_v) = (0, 0)$ abgebildet, welches im Folgenden eingehend besprochen wird. Der Kreis steht für den stabilen, der Diamant für den instabilen und die Quadrate für die Sattelpunkte. Für jedes mögliche Wertepaar (k_u, k_v) existieren ein stabiler, ein instabiler und zwei Sattelpunkte.

nicht überschneiden. Bei $c = 1$ gibt es genau einen gemeinsamen Wert $(k_u, k_v) = (0, 0)$ und für $c = 1.34$ überschneiden sie sich komplett. Die reduzierten Wertebereiche von k_u rechts oben gleichen denen von rechts unten und die reduzierten Wertebereiche von k_v links unten gleichen sich mit denen von rechts unten. Die reduzierten Wertebereiche von k_u und von k_v sind rechts unten gleich groß. Zusätzlich sind bis $c = 1.11$ links unten die reduzierten Wertebereiche von k_u doppelt so groß wie die von k_v , während rechts oben die reduzierten Wertebereiche von k_v doppelt so groß wie die von k_u sind.

Nachdem sich diese Arbeit auf Bewässerungssysteme beschränkt, werden die rechten stabilen Bereiche ab sofort nicht mehr betrachtet. Somit werden Systeme betrachtet, die die horizontal durchgezogen schraffierte Flächen in Abbildung 6.12 verbinden.

Abbildung 6.13 zeigt zwei Farbplots für die Funktionen $(k_u, k_v)(u, v)$ für $c = 1.11, 1.34$ für physikalisch relevante Bewässerungen mit zweidimensionalen Farbschemas für (k_u, k_v) . Die schwarzen fetten Linien geben die Grenzen des Definitionsbereichs und der Stabilitätsbereiche aus Abbildung 6.12 an. Die schwarzen dünnen Linien geben die Bewässerungsstabilitätsbereiche an. Für $c = 1.11$ sind zusätzlich die Fixpunkte für das Bewässerungssystem mit $(k_u, k_v) = (0, 0)$ abgebildet, welches im Folgenden eingehend besprochen wird. Der Kreis

steht für den stabilen, der Diamant für den instabilen und die Quadrate für die Sattelpunkte. Es ist zu sehen, dass für jedes mögliche Wertepaar (k_u, k_v) ein stabiler, ein instabiler und zwei Sattelpunkte existieren.

Nun wird ein explizites Beispiel für die Geschwindigkeit und die (k_u, k_v) -Werte gewählt. Es stellt die schnellsten und größten Bewässerungswellen in einem anfänglich trockenen Medium dar. Dies führt für physikalische Bewässerungen zu eindeutigen links- und rechtsseitigen Sättigungsrandwerten. Die Werte werden aus Tabelle 6.11 gewonnen. Im Fall einer Gleichung aus Kapitel 5 gibt es für festgewählte Randwertsättigungen und Geschwindigkeiten immer eine eindeutige laufende Welle. Hier ist dies jedoch nicht der Fall. So werden zunächst zwei interessante laufende Wellen genauer untersucht. Beide haben einen Terrassenpunkt in u und eine hat zusätzlich einen Überschuss in v .

In Abbildung 6.14 sieht man die Phasenportraits und Sättigungsprofile für Terrassenpunkt-lösungen in u mit und ohne extremalen Überschuss in v mit Werten aus Tabelle 6.11. Die Trajektorien sind mit fetten Linien und die Höhenlinien von $k_u(u, v) = 0$ und $k_v(u, v) = 0$ sind mit schwach bzw. stark gestrichelten Linien dargestellt. Kreise zeigen die instabilen Fixpunkte, Diamanten zeigen die stabilen Fixpunkte, Quadrate zeigen die Sattelpunkte und Dreiecke zeigen die lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkte. Die kleinen Kreise geben einige ausgesuchte y -Werte an, die zeigen, wo sich der jeweilige Punkt auf der Trajektorie im dazugehörigen Sättigungsprofil befindet.

Das Phasenportrait 6.14(a) zeigt, dass die Trajektorie zunächst aus dem instabilen Punkt (u_ℓ, v_ℓ) in Richtung stabiler Punkt (u_r, v_r) läuft. Wenn sie jedoch den Sattelpunkt (u_m, v_m) annähernd erreichen will, so muss sie einmal die k_v -Höhenlinie schneiden. Bei dem Schnittpunkt (u_n, v_n) der Trajektorie mit der Höhenlinie von $k_v(u, v)$ ist $v' = 0$. Deswegen schneidet die Trajektorie sie horizontal. Dieser Punkt stellt ein lokales Minimum in v dar. Daraufhin steigt v an, bis sie am Sattelpunkt ihr Maximum erreicht. Die Trajektorie erreicht ihn nahezu parallel zum stabilen Unterraum und verlässt ihn dann auch nahezu parallel zum instabilen Unterraum bei (u_m, v_m) . Dann läuft die Trajektorie nahezu als Gerade parallel zur Winkelhalbierenden in den stabilen Punkt (u_r, v_r) , dabei nehmen u und v zu gleichen Teilen ab.

Abb.	c	k_u	k_v	(u_ℓ, v_ℓ)	(u_r, v_r)	(u_n, v_n)	(u_m, v_m)
6.14(c)	1.11	0	0	(0.8, 0.4)	(0, 0)	(0.38, 0.75)	(0.56, 0.56)
6.14(d)	1.11	0	0	(0.8, 0.4)	(0, 0)	—	(0.56, 0)

Tabelle 6.11: Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte und Terrassen- bzw. Überschusspunkte für Abbildungen 6.14.

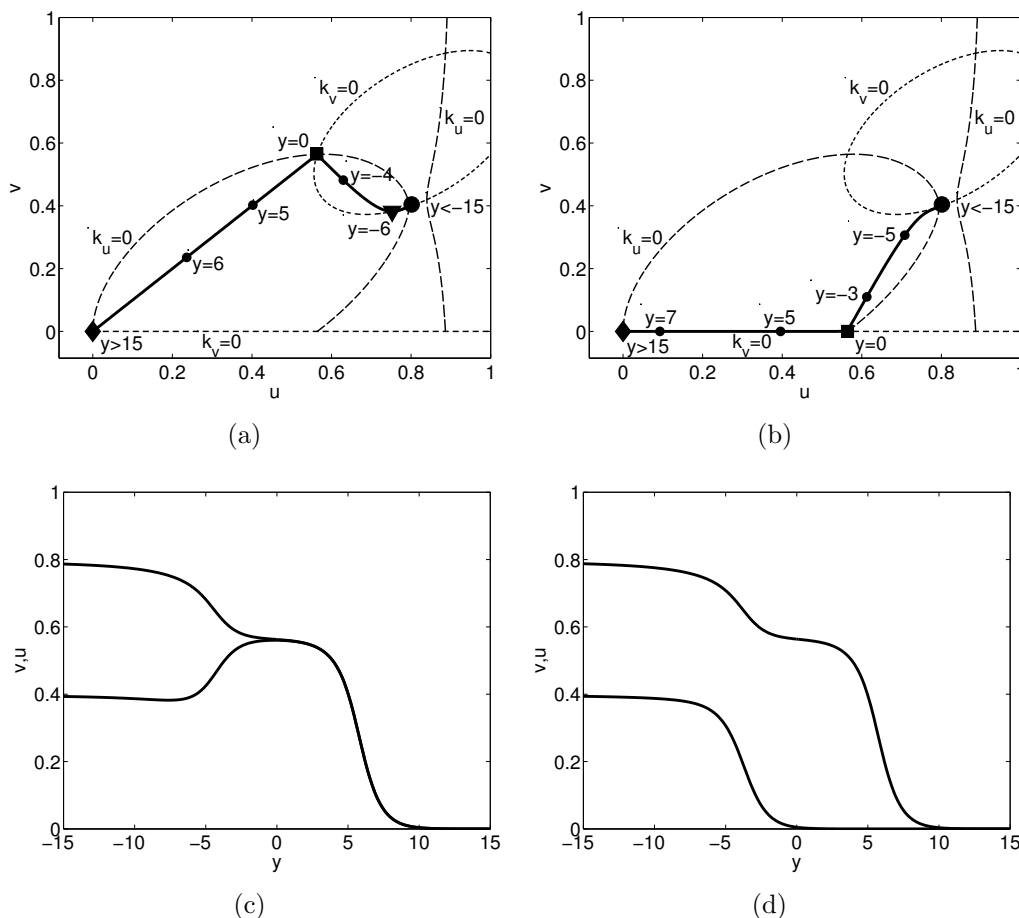


Abbildung 6.14: Phasenportraits und Sättigungsprofile für Terrassenpunktlösungen in u mit extremalen Überschuss in v (a),(c) und ohne (b),(d) mit Werten aus Tabelle 6.11 mit Trajektorien (fett), Höhenlinien von $k_u(u, v) = 0$ (leicht gestrichelt) und von $k_v(u, v) = 0$ (stark gestrichelt), instabilen Fixpunkten (Kreisen), stabilen Fixpunkten (Diamanten), Sattelpunkten (Quadraten) und lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkten (Dreiecken). Die kleinen Kreise geben einige ausgesuchte y -Werte an, die zeigen, wo sich der jeweilige Punkt auf der Trajektorie im dazugehörigen Sättigungsprofil befindet.

Das Phasenportrait 6.14(b) zeigt wieder, dass die Trajektorie zunächst aus dem instabilen Punkt (u_ℓ, v_ℓ) in Richtung stabiler Punkt (u_r, v_r) läuft. Nun wandert sie nach unten direkt zum Sattelpunkt. Dieser steht für einen Terrassenpunkt in u . Daraufhin wandert die Trajektorie als Gerade parallel zur u -Achse, so dass sich v nicht mehr ändert, zum stabilen Punkt (u_r, v_r) .

Das Sättigungsprofil 6.14(c) zeigt einen Überschuss mit nachlaufendem lokalem Minimum in v , somit besteht die v -Welle aus drei Teilwellen, einer großen Hauptbewässerungswelle, gefolgt von einer Entwässerung, gefolgt von einer kleinen Bewässerung. Die u -Welle hingegen ist monoton fallend und zeigt einen Terrassenpunkt, der mit dem Überschuss in v

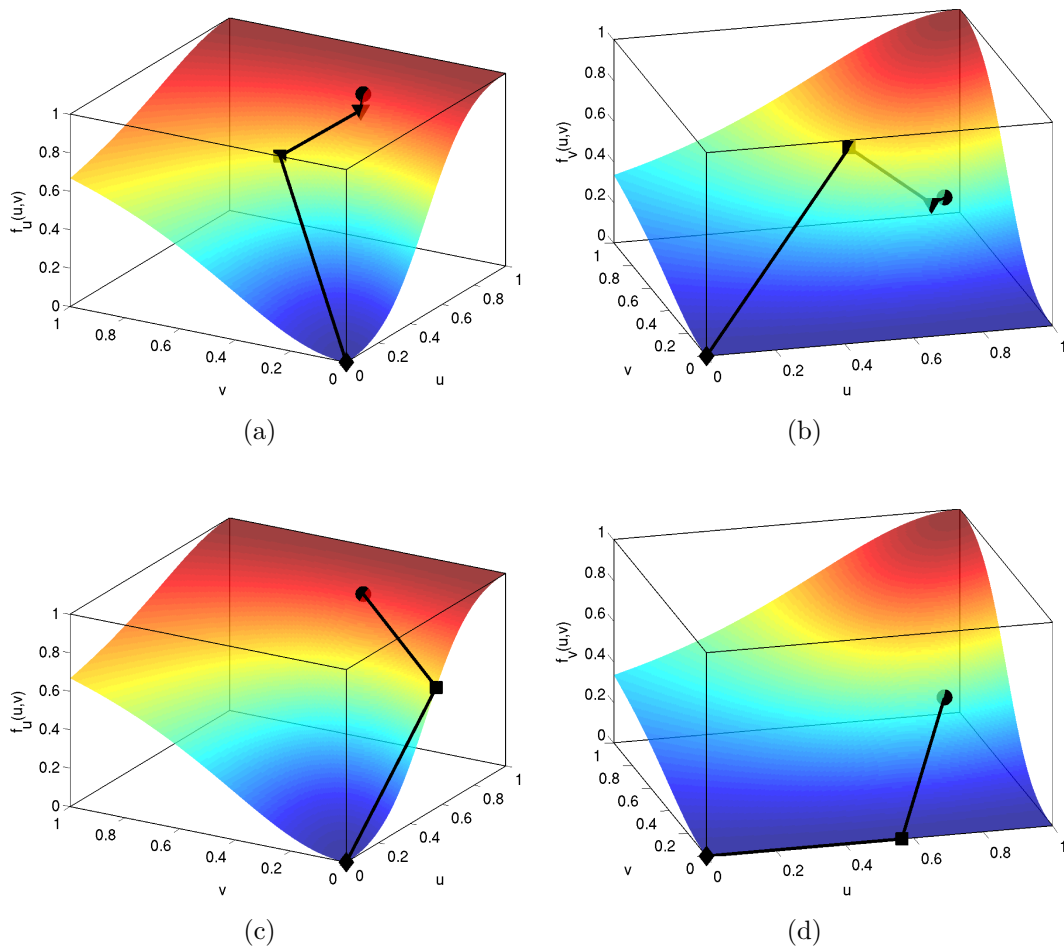


Abbildung 6.15: Flächen von $f_u(u, v)$ (a),(c) und $f_v(u, v)$ (b),(d) für die Terrassenpunktlösungen mit Überschuss (a),(b) und ohne (c),(d) aus Abbildung 6.14 und Tabelle 6.11 und deren laufende Wellenverbindungslinien mit den instabilen Fixpunkten (Kreisen), stabilen Fixpunkten (Diamanten), Sattelpunkten (Quadraten) und lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkten (Dreiecken). Bei lokalen Bewässerungen sind die Linien überhalb der Fläche und bei lokalen Entwässerungen unterhalb. Die Steigungen der Linien in u -Richtung für f_u und in v -Richtung für f_v sind gleich der Wellengeschwindigkeit $c = 1.11$.

zusammenfällt.

Im Sättigungsprofil 6.14(d) besteht die u -Welle aus zwei Bewässerungswellen. Die v -Welle hingegen ist monoton fallend und läuft parallel zur hinteren u -Bewässerung.

Wie in Abschnitt 5.1.3 in Abbildung 5.5 diskutiert, kann man die laufenden Wellen für eine Gleichung als Gerade darstellen, die die Flussfunktionen an den links- und rechtsseitigen Randwertsättigungen schneidet. Dabei ist die Steigung der Geraden gleich der Wellengeschwindigkeit. Dies ist auch hier für Lösungen zweier Gleichungen möglich, wobei diesmal

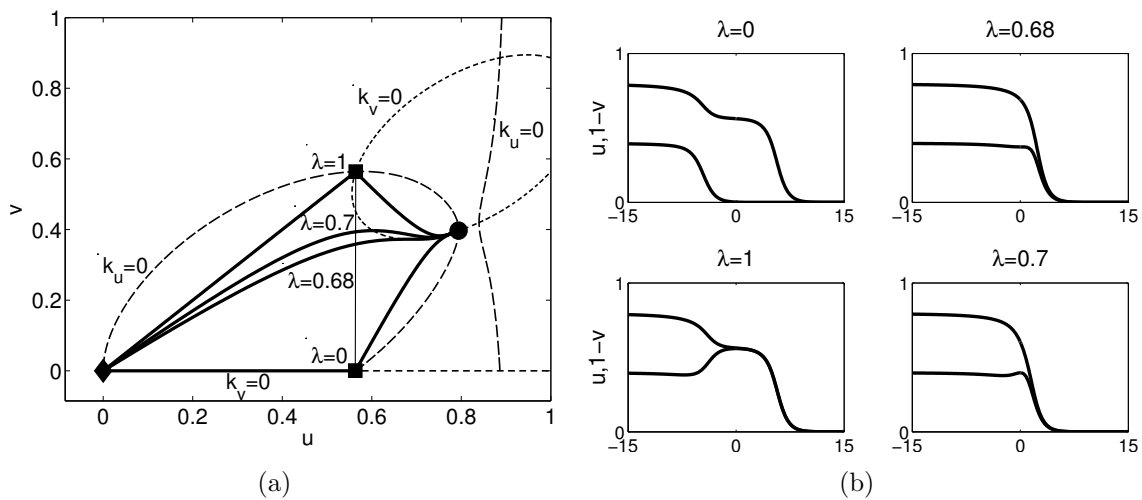


Abbildung 6.16: Phasenportrait (a) und Sättigungsprofile (b) für die vier ausgezeichneten Systeme aus Tabelle 6.12. Die fetten Linien sind die Trajektorien mit zugehörigem λ -Wert, der als Parameter der konvexen Hülle der zwei Sattelpunkte, die als dünne Linie dargestellt ist, definiert ist. Der Kreis zeigt den instabilen Fixpunkt, der Diamant zeigt den stabilen Fixpunkt und die Quadrate zeigen die Sattelpunkte. Die Höhenlinien von $k_u = 0$ und $k_v = 0$ sind schwach bzw. stark gestrichelt dargestellt. Bei jeder dieser Trajektorien ändert sich das Verhalten der Sättigungsprofile, so wie in Tabelle 6.13 gezeigt.

die Steigungen der Linien in u -Richtung für f_u und in v -Richtung für f_v gleich der Wellengeschwindigkeit ist.

Die Abbildungen 6.15 zeigen die Flächen von $f_u(u, v)$ und $f_v(u, v)$ für die Terrassenpunktlösungen mit und ohne Überschuss aus Abbildung 6.14 und Tabelle 6.11 und deren laufende Wellenverbindungslien. Dabei werden die instabilen Fixpunkte als Kreise, die stabilen Fixpunkte als Diamanten, die Sattelpunkte als Quadrate und die lokalen Unterschuss- bzw. Terrassenpunkte als Dreiecke dargestellt. Bei lokalen Bewässerungen sind die Linien überhalb der Fläche und bei lokalen Entwässerungen unterhalb.

In Abbildung 6.15(a) ist klar zu erkennen, dass die u -Welle aus drei Teilbewässerungen besteht. In Abbildung 6.15(b) sieht man, dass die v -Welle in Abbildung 6.14(a) vom rechtsseitigen Randwert aus gesehen zuerst stark bewässert, dann entwässert und dann nochmal ein wenig bewässert. In den Abbildungen 6.15(c) und 6.15(d) sieht man, dass die u - und v -Welle in 6.14(b) aus jeweils zwei Bewässerungen besteht.

Nach diesen zwei Beispielen ist es nun möglich, alle Lösungen für fest vorgegebene Geschwindigkeiten und k_u - und k_v -Werte zu bestimmen. Die Verbindungslinie $\mathcal{L}(\lambda)$, sprich die konvexe Hülle, zwischen den zwei Sattelpunkten wird von jeder Trajektorie genau einmal geschnitten und so kann man mit dem λ -Wert des Schnittpunktes alle möglichen Trajektorien eindeutig

c	k_u	k_v	(u_ℓ, v_ℓ)	(u_r, v_r)	(u_m, v_m)	λ
1.11	0	0	(0.8, 0.4)	(0, 0)	(0.56, 0)	0
1.11	0	0	(0.8, 0.4)	(0, 0)	(0.69, 0.37)	0.68
1.11	0	0	(0.8, 0.4)	(0, 0)	(0.6, 0.4)	0.7
1.11	0	0	(0.8, 0.4)	(0, 0)	(0.56, 0.56)	1

Tabelle 6.12: Geschwindigkeiten, k_u - und k_v -Werte, links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 6.16.

benennen. Sie kann so parametrisiert werden, dass $\mathfrak{L}(0)$ gleich dem Sattelpunkt des maximalen u -Überschusses und $\mathfrak{L}(1)$ gleich dem Sattelpunkt des maximalen v -Überschusses ist.

Für die Werte aus Tabelle 6.12 sind in Abbildung 6.16 die Sättigungsprofile und Trajektorien im Phasenraum für vier ausgezeichnete Systeme dargestellt. Die fetten Linien sind die Trajektorien mit zugehörigem Parameter λ . Der Kreis zeigt den instabilen Fixpunkt, der Diamant zeigt den stabilen Fixpunkt und die Quadrate zeigen die Sattelpunkte. Die Höhenlinien von $k_u = 0$ und $k_v = 0$ sind schwach bzw. stark gestrichelt dargestellt.

Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ ist die Terrassenpunktlösung in u ohne Überschuss in v , die Trajektorie mit $\lambda = 0.68$ ist die Terrassenpunktlösung in v , die Trajektorie mit $\lambda = 0.7$ ist die minimale Überschusslösung in v und die Trajektorie mit $\lambda = 1$ ist die maximale Überschusslösung in v mit Terrassenpunkt in u . Der λ -Wert dient als Parameter für Bifurkationen im topologischen Verhalten der Sättigungen u und v , wie es in Tabelle 6.13 dargestellt ist. So bestehen die Sättigungsprofile mit $\lambda \in (0, 0.68)$ aus monoton fallenden Wellen in u und v . Die Sättigungsprofile mit $\lambda \in (0.68, 0.7)$ bestehen aus einer monoton fallenden Welle in u und einer nichtmonotonen Welle in v und die Sättigungsprofile mit $\lambda \in (0.7, 1)$ bestehen aus einer monoton fallenden Welle in u und einer Überschusswelle in v , die ein globales Maximum und ein lokales Minimum aufweist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass im Vergleich zu Abschnitt 5 das System nicht mehr

λ	(0, 0.68)	(0.68, 0.7)	(0.7, 1)
monoton fallend in u	ja	ja	ja
monoton fallend in v	ja	nein	nein
Überschuss in u	nein	nein	nein
Überschuss in v	nein	nein	ja

Tabelle 6.13: Verhalten der Sättigungsprofile mit Bifurkationsparameter λ .

über seine Geschwindigkeit und seine linken und rechten Randwertsättigungen eindeutig bestimmt ist. Es existiert ein zusätzlicher Freiheitsgrad. Dieser erlaubt auch nichtmonotones Verhalten und sogar Überschusslösungen in v . Die Frage ist nun, ob dieser Freiheitsgrad physikalisch gültig ist und eine physikalische Bedeutung hat. Dieser Frage wird später im Kapitel 8 über numerische Lösungen beantwortet.

7 Systeme dreier Gleichungen

In diesem Kapitel werden laufende Wellenlösungen des vollen Perkulationsmodells mit den Näherungen aus Abschnitt 4.4.1 untersucht. Dort ist gezeigt, dass es nicht möglich ist, einen dynamischen Systemansatz zu verfolgen. Deswegen werden allgemeinere Systeme dreier Gleichungen betrachtet, die das volle Perkulationsmodell als Spezialfall beinhalten. Es werden Vereinfachungen getroffen, um einen dynamischen Systemansatz zum Lösen der Systeme dreier laufender Wellengleichungen zu ermöglichen. Erstens werden die Kapillarfunktionen als positive Konstanten angenommen. Vereinfachungen der Kapillarfunktionen werden sehr häufig getroffen, so werden diese z.B. bei der Ölförderung mit dem Buckley-Leverett-Ansatz [Lake 89] komplett vernachlässigt und bei den verschwindenden Viskositätslösungen [Duij 10] als kleine positive Konstanten gewählt. Zweitens werden die Massenaustauschterm vernachlässigt. Da das vorgegebene Problem flussgetrieben ist, ist es möglich, dass der Flussterm den Massenaustauschterm dominiert. Dieses vereinfachte System wird dann eingehend mit einem laufenden Wellenansatz untersucht.

Es werden alle niedriger dimensional invarianten Untermannigfaltigkeiten identifiziert und besprochen. Diese dienen zur Aufteilung des Phasenraums, womit sie das Diskutieren aller Lösungen deutlich vereinfachen. Die Lösungen der Systeme zweier Gleichungen ohne Massenaustauschterm lassen sich als zweidimensionale invariante Untermannigfaltigkeiten finden. Damit stellen die Systeme in diesem Kapitel eine Verallgemeinerung der Systeme zweier Gleichungen ohne Massenaustauschterm dar. Die Lösungen beinhalten nicht nur einfache nichtmonotone Profile wie in dem Kapitel über zwei Gleichungen, sondern auch komplexere Profile wie doppelte Überschüsse. Desweiteren existiert nicht nur ein Freiheitsgrad, sondern zwei, was die Eindeutigkeit der Lösungen für festgewählte Geschwindigkeiten und Randsättigungen aufhebt.

Die Variablen S_w , S_2 und S_4 werden hier umbenannt in u , v und w , um klarzumachen, dass es sich hierbei um abstrakte physikalische Variablen handelt, die wegen der Verallgemeinerungen und Vereinfachungen nur begrenzt etwas mit den physikalischen Variablen des Perkulationsmodells zu tun haben. Trotzdem werden die Begriffe Bewässerung und Entwässerung einfachheitshalber für ansteigende und abfallende u -Wellen verwendet. Beim Überführen des

Systems in ein abstraktes mathematisches dynamisches System werden die Variablen groß geschrieben, um diesen Unterschied deutlich zu machen.

7.1 Allgemeine Gleichungen

Es werden hier allgemeinere Systeme dreier fraktionaler Flussgleichungen betrachtet, die sich mit Hilfe von einem dynamischen Systemansatz erörtern lassen. Sie beschreiben ein System mit vier Phasen $0 \leq u, v, w, 1 - u - w \leq 1$. Dadurch können auch einzelne Aspekte, wie Massenaustausch und Flussanteile, isoliert voneinander betrachtet werden, wobei in dieser Arbeit ausschließlich die Flussanteile untersucht werden sollen. Den Sättigungen soll noch zusätzlich folgende Beschränkung auferlegt sein

$$u \geq v, \quad (7.1)$$

damit sie die physikalischen Beschränkungen aus dem Perkolationsmodell erfüllen, wenn $u = S_w, v = S_2, w = S_4$ gilt.

Desweiteren wurde in Kapitel 5 dargelegt, dass ausschließlich die Lösungen der Klasse d), d.h. die, deren rechts- und linksseitiger Grenzwert der Ableitung der Sättigung gegen Null geht, physikalisch relevant sind. Die Neumann-Randbedingung für die drei Sättigungen u, v, w , die von der Zeit t und einer räumlichen Variablen x abhängen, lauten daher für alle Zeiten t

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = 0, \quad (7.2a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v'(x) = 0, \quad (7.2b)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w'(x) = 0. \quad (7.2c)$$

Das dimensionslose allgemeine System dreier fraktionaler Flussgleichungen soll nun folgendermaßen angenommen werden

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left[f_u(u, v, w) - D_u(u, v, w) \frac{\partial}{\partial x} u \right] = 0, \quad (7.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left[f_v(u, v, w) - D_v(u, v, w) \frac{\partial}{\partial x} v \right] = -h_v(u, v, w, \frac{\partial}{\partial t} u, \frac{\partial}{\partial t} v, \frac{\partial}{\partial t} w) \frac{\partial}{\partial t} u, \quad (7.3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial x} \left[f_w(u, v, w) - D_w(u, v, w) \frac{\partial}{\partial x} w \right] = -h_w(u, v, w, \frac{\partial}{\partial t} u, \frac{\partial}{\partial t} v, \frac{\partial}{\partial t} w) \frac{\partial}{\partial t} u. \quad (7.3c)$$

Die Funktionen $f_u(u, v, w), f_v(u, v, w), f_w(u, v, w)$ sind die fraktionalen Flussfunktionen, die

Kapillarfunktionen $D_u(u, v, w)$, $D_v(u, v, w)$, $D_w(u, v, w)$ verhalten sich wie diffusive Funktionen und die Funktionen $h_v(u, v, w, \frac{\partial}{\partial t}u, \frac{\partial}{\partial t}v, \frac{\partial}{\partial t}w)$, $h_w(u, v, w, \frac{\partial}{\partial t}u, \frac{\partial}{\partial t}v, \frac{\partial}{\partial t}w)$ sind Massenaustauschterme. Dies ist eine Verallgemeinerung der Systeme, die aus dem Perkolationsmodell gewonnen wurden.

Das Einführen der Ähnlichkeitsvariable $y = x - ct$ führt zu

$$-cu + [f_u(u, v, w) - D_u(u, v, w)u']' = 0, \quad (7.4a)$$

$$-cv + [f_v(u, v, w) - D_v(u, v, w)v']' = ch_v(u, v, w, u', v', w')u', \quad (7.4b)$$

$$-cw + [f_w(u, v, w) - D_w(u, v, w)w']' = ch_w(u, v, w, u', v', w')u'. \quad (7.4c)$$

Daraus kann folgendes dynamische System gewonnen werden.

$$U' = X, \quad (7.5a)$$

$$V' = Y, \quad (7.5b)$$

$$W' = Z, \quad (7.5c)$$

$$X' = D_u(U, V, W)^{-1} \left(-cX + \frac{\partial f_u(U, V, W)}{\partial U} X + \frac{\partial f_u(U, V, W)}{\partial V} Y + \frac{\partial f_u(U, V, W)}{\partial W} Z - \frac{\partial D_u(U, V, W)}{\partial U} X^2 - \frac{\partial D_u(U, V, W)}{\partial V} XY - \frac{\partial D_u(U, V, W)}{\partial W} XZ \right), \quad (7.5d)$$

$$Y' = D_v(U, V, W)^{-1} \left(-cY - ch_v(U, V, W, X, Y, Z)X + \frac{\partial f_v(U, V, W)}{\partial U} X + \frac{\partial f_v(U, V, W)}{\partial V} Y + \frac{\partial f_v(U, V, W)}{\partial W} Z - \frac{\partial D_v(U, V, W)}{\partial U} XY - \frac{\partial D_v(U, V, W)}{\partial V} Y^2 - \frac{\partial D_v(U, V, W)}{\partial W} YZ \right), \quad (7.5e)$$

$$Z' = D_w(U, V, W)^{-1} \left(-cZ - ch_w(U, V, W, X, Y, Z)Z + \frac{\partial f_w(U, V, W)}{\partial U} X + \frac{\partial f_w(U, V, W)}{\partial V} Y + \frac{\partial f_w(U, V, W)}{\partial W} Z - \frac{\partial D_w(U, V, W)}{\partial U} XZ - \frac{\partial D_w(U, V, W)}{\partial V} YZ - \frac{\partial D_w(U, V, W)}{\partial W} Z^2 \right). \quad (7.5f)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die stationären Punkte des Systems $(U_0, V_0, W_0, 0, 0, 0)$ mit belie-

bigen U_0, V_0, W_0 sind. Linearisiert man um diese Punkte, so erhält man

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ W' \\ X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(U_0, V_0, W_0) & a_{45}(U_0, V_0, W_0) & a_{46}(U_0, V_0, W_0) \\ 0 & 0 & 0 & a_{54}(U_0, V_0, W_0) & a_{55}(U_0, V_0, W_0) & a_{56}(U_0, V_0, W_0) \\ 0 & 0 & 0 & a_{64}(U_0, V_0, W_0) & a_{65}(U_0, V_0, W_0) & a_{66}(U_0, V_0, W_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \\ W - W_0 \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

mit folgenden Matrixelementen

$$a_{44}(U, V, W) = D_u(U, V, W)^{-1} \left(-c + \frac{\partial f_u(U, V, W)}{\partial U} \right), \quad (7.7a)$$

$$a_{45}(U, V, W) = D_u(U, V, W)^{-1} \left(\frac{\partial f_u(U, V, W)}{\partial V} \right), \quad (7.7b)$$

$$a_{46}(U, V, W) = D_u(U, V, W)^{-1} \left(\frac{\partial f_u(U, V, W)}{\partial W} \right), \quad (7.7c)$$

$$a_{54}(U, V, W) = D_v(U, V, W)^{-1} \left(-ch_v(U, V, W, 0, 0, 0) + \frac{\partial f_v(U, V, W)}{\partial U} \right), \quad (7.7d)$$

$$a_{55}(U, V, W) = D_v(U, V, W)^{-1} \left(-c + \frac{\partial f_v(U, V, W)}{\partial V} \right), \quad (7.7e)$$

$$a_{56}(U, V, W) = D_v(U, V, W)^{-1} \left(\frac{\partial f_v(U, V, W)}{\partial W} \right), \quad (7.7f)$$

$$a_{64}(U, V, W) = D_w(U, V, W)^{-1} \left(-ch_w(U, V, W, 0, 0, 0) + \frac{\partial f_w(U, V, W)}{\partial U} \right), \quad (7.7g)$$

$$a_{65}(U, V, W) = D_w(U, V, W)^{-1} \left(\frac{\partial f_w(U, V, W)}{\partial V} \right), \quad (7.7h)$$

$$a_{66}(U, V, W) = D_w(U, V, W)^{-1} \left(-c + \frac{\partial f_w(U, V, W)}{\partial W} \right). \quad (7.7i)$$

Das linearisierte System hat sechs Eigenwerte, drei sind gleich Null und drei sind Funktionen

von (U_0, V_0, W_0)

$$e_1 = 0, \quad (7.8a)$$

$$e_2 = 0, \quad (7.8b)$$

$$e_3 = 0, \quad (7.8c)$$

$$e_4(U_0, V_0, W_0), \quad (7.8d)$$

$$e_5(U_0, V_0, W_0), \quad (7.8e)$$

$$e_6(U_0, V_0, W_0) \quad (7.8f)$$

und können numerisch gerechnet werden. Die Vorzeichen der Eigenwerte entscheiden über den Typ der stationären Punkte. Sind die drei von Null unterschiedlichen Eigenwerte e_4, e_5, e_6 positiv, so ist der dazugehörige Punkt instabil, sind die drei negativ, so ist er stabil und haben sie unterschiedliche Vorzeichen, so ist er ein Sattelpunkt. Im Gegensatz zu einer fraktionierten Flussgleichung aus Kapitel 5 sind also hier Sattelpunkte möglich. Dies ist eine Grundvoraussetzung um nichtmonotones und damit Überschussverhalten zu erhalten. Im Gegensatz zu den Sattelpunkten aus Kapitel 6, die zwei von Null verschiedene Eigenwerte haben, haben die Sattelpunkte hier drei Eigenwerte, damit lassen sich die Sattelpunkte nochmals in zwei Teilmengen aufspalten. Die eine hat einen zweidimensionalen stabilen und einen eindimensional instabilen Unterraum und die andere hat einen eindimensionalen stabilen und einen zweidimensional instabilen Unterraum. Daraus ergibt sich zusätzliche Komplexität. In den Profilen aus Kapitel 6 gab es maximal ein Extremum, hier können zwei Extrema auftreten.

Das dynamische System (7.5) ist zu kompliziert, um es vollständig und detailliert zu erörtern. Deswegen werden in den nächsten Abschnitten Vereinfachungen getroffen, die es ermöglichen, alle Lösungen des vereinfachten Systems zu finden. Mit dem daraus gewonnen Wissen sollte es möglich sein in einer weiterführenden Arbeit alle Lösungen des dynamischen Systems (7.5) zu finden.

Die Funktionen $D_u(u, v, w), D_v(u, v, w), D_w(u, v, w)$ sind üblicherweise positiv für alle $u, v, w \in (0, 1)$, damit sind die Vorzeichen von (7.8) und damit die Klassifizierung der stationären Punkte unabhängig von $D_u(u, v, w), D_v(u, v, w), D_w(u, v, w)$. Außerdem hat Kapitel 5 gezeigt, dass in der Lösungsklasse d) die Funktion D das globale Verhalten nicht ändert. Deswegen werden in allen folgenden Abschnitten $D_u(u, v, w), D_v(u, v, w), D_w(u, v, w)$ als positive Konstanten D_u, D_v, D_w angesehen und der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt. Diese drei Konstanten stellen die Stellschrauben der verschwindenden Viskositätslösung des Buckley und Leverett Grenzwertes dar. Wenn D_u, D_v, D_w gegen Null gehen, dann erhält man so eindeutige Stoßwellen.

7.2 Kein Massenaustauschterm und Flussfunktionen aus dem Perkolationsmodell

In diesem Abschnitt soll der Aspekt der gekoppelten Flüsse erörtert werden. Dazu werden die Massenaustauschterme vernachlässigt

$$h_v(u, v, w, u', v', w') = 0, \quad (7.9a)$$

$$h_w(u, v, w, u', v', w') = 0. \quad (7.9b)$$

Damit ergeben sich folgende Wellengleichungen

$$-cu' + [f_u(u, v, w) - u']' = 0, \quad (7.10a)$$

$$-cv' + [f_v(u, v, w) - v']' = 0, \quad (7.10b)$$

$$-cw' + [f_w(u, v, w) - w']' = 0. \quad (7.10c)$$

Die drei Gleichungen können von einem festen y_0 bis zu einem beliebigen y integriert werden

$$u' = f_u(u, v, w) - cu + k_u, \quad (7.11a)$$

$$v' = f_v(u, v, w) - cv + k_v, \quad (7.11b)$$

$$w' = f_w(u, v, w) - cw + k_w, \quad (7.11c)$$

$$k_u = -f_u(u_0, v_0, w_0) + cu_0, \quad (7.11d)$$

$$k_v = -f_v(u_0, v_0, w_0) + cv_0, \quad (7.11e)$$

$$k_w = -f_w(u_0, v_0, w_0) + cw_0, \quad (7.11f)$$

wobei $u_0 = u(y_0)$, $v_0 = v(y_0)$ und $w_0 = w(y_0)$ sind und k_u, k_v, k_w die Integrationskonstanten darstellen.

Das dynamische System lautet

$$U' = f_u(U, V, W) - cU + k_u, \quad (7.12a)$$

$$V' = f_v(U, V, W) - cV + k_v, \quad (7.12b)$$

$$W' = f_w(U, V, W) - cW + k_w. \quad (7.12c)$$

Seine stationären Punkte sind

$$S_0 = (U_0, V_0, W_0) \in \{(U, V, W) | f_u(U, V, W) - cU + k_u = 0 \wedge \\ \wedge f_v(U, V, W) - cV + k_v = 0 \wedge f_w(U, V, W) - cW + k_w = 0\}. \quad (7.13)$$

Das linearisierte System an den stationären Punkten S_0 lautet

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_u(U_0, V_0, W_0)}{\partial U} - c & \frac{\partial f_u(U_0, V_0, W_0)}{\partial V} & \frac{\partial f_u(U_0, V_0, W_0)}{\partial W} \\ \frac{\partial f_v(U_0, V_0, W_0)}{\partial U} & \frac{\partial f_v(U_0, V_0, W_0)}{\partial V} - c & \frac{\partial f_v(U_0, V_0, W_0)}{\partial W} \\ \frac{\partial f_w(U_0, V_0, W_0)}{\partial U} & \frac{\partial f_w(U_0, V_0, W_0)}{\partial V} & \frac{\partial f_w(U_0, V_0, W_0)}{\partial W} - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \\ W - W_0 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

und seine Eigenwerte $e_1(U_0, V_0, W_0)$, $e_2(U_0, V_0, W_0)$, $e_3(U_0, V_0, W_0)$ können numerisch bestimmt werden. Damit ergibt sich folgende Klassifizierung der stationären Punkte

$$S_0 \text{ ist } \begin{cases} \text{stabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_r, \\ \text{instabil, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_\ell, \\ \text{Sattelpunkt, falls} & S_0 \in \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^+ \cup \mathcal{S}_m^-, \end{cases} \quad (7.15)$$

wobei mit

$$\mathcal{S}_r = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) < 0\}, \quad (7.16a)$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) > 0\}, \quad (7.16b)$$

$$\mathcal{S}_m^+ = \mathcal{S}_m^{++-} \cup \mathcal{S}_m^{+-+} \cup \mathcal{S}_m^{-++}, \quad (7.16c)$$

$$\mathcal{S}_m^- = \mathcal{S}_m^{--+} \cup \mathcal{S}_m^{-+-} \cup \mathcal{S}_m^{+--}, \quad (7.16d)$$

die stabilen Punkte \mathcal{S}_r , die instabilen Punkte \mathcal{S}_ℓ und die Sattelpunkte mit zweidimensionaler stabiler Untermannigfaltigkeit \mathcal{S}_m^+ bzw. mit eindimensionaler stabiler Untermannigfaltigkeit \mathcal{S}_m^- definiert sind. Desweiteren setzen sich die Sattelpunkt mengen \mathcal{S}_m^+ und \mathcal{S}_m^- aus den Teil-

mengen

$$\mathcal{S}_m^{++-} = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) < 0\}, \quad (7.17a)$$

$$\mathcal{S}_m^{+-+} = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) > 0\}, \quad (7.17b)$$

$$\mathcal{S}_m^{-++} = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) > 0\}, \quad (7.17c)$$

$$\mathcal{S}_m^{--+} = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) > 0\}, \quad (7.17d)$$

$$\mathcal{S}_m^{+--} = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) < 0\}, \quad (7.17e)$$

$$\mathcal{S}_m^{+--} = \{(U_0, V_0, W_0) | e_1(U_0, V_0, W_0) > 0 \wedge e_2(U_0, V_0, W_0) < 0 \wedge e_3(U_0, V_0, W_0) > 0\}. \quad (7.17f)$$

zusammen.

Nachdem nun bekannt ist, welche Punkte stabil, instabil oder Sattelpunkte sind, müssen sie nun miteinander verbunden werden, um Lösungen zu erzeugen. Dies kann durch die Funktionen

$$k_u(u, v, w) = -f_u(u, v, w) + cu, \quad (7.18a)$$

$$k_v(u, v, w) = -f_v(u, v, w) + cv, \quad (7.18b)$$

$$k_w(u, v, w) = -f_w(u, v, w) + cw \quad (7.18c)$$

geschehen, denn damit gilt

$$k_u(u, v, w) = k_u \Leftrightarrow u'(u, v, w) = 0, \quad (7.19a)$$

$$k_v(u, v, w) = k_v \Leftrightarrow v'(u, v, w) = 0, \quad (7.19b)$$

$$k_w(u, v, w) = k_w \Leftrightarrow w'(u, v, w) = 0. \quad (7.19c)$$

In einem stationären Punkt (u, v, w) , d.h. $u'(u, v, w) = 0, v'(u, v, w) = 0, w'(u, v, w) = 0$, sind die Funktionen $k_u(u, v, w), k_v(u, v, w), k_w(u, v, w)$ mit den Integrationskonstanten k_u, k_v, k_w identisch. Somit haben alle stationären Punkte, die zu dem selben System gehören, identische Werte in den Funktionen $k_u(u, v, w), k_v(u, v, w), k_w(u, v, w)$.

Um weiter fortfahren zu können, müssen nun explizit die Flussfunktionen bestimmt werden. Dabei werden im nächsten Abschnitt die Flussfunktionen des vollen Perkulationsmodells aus

Abschnitt 4.3.3.1 herangezogen

7.2.1 Konkrete Fixpunktanalyse

Hier werden die aus dem System dreier fraktionaler Flussgleichungen des Perkolationsmodells aus Abschnitt 4.3.3.1

$$f_u(u, v, w) = \frac{(u - v)^2 + R_2^1 v^2}{(u - v)^2 + R_2^1 v^2 + R_3^1 (1 - u - w)^2 + R_4^1 w^2}, \quad (7.20a)$$

$$f_v(u, v, w) = \frac{R_2^1 v^2}{(u - v)^2 + R_2^1 v^2 + R_3^1 (1 - u - w)^2 + R_4^1 w^2}, \quad (7.20b)$$

$$f_w(u, v, w) = \frac{R_4^1 w^2}{(u - v)^2 + R_2^1 v^2 + R_3^1 (1 - u - w)^2 + R_4^1 w^2}. \quad (7.20c)$$

mit $u = S_w$, $v = S_2$ und $w = S_4$ benützt. Es wird ab hier von $R_2^1 = R_3^1 = R_4^1 = 1$ ausgegangen. Damit sind alle Viskositäten identisch. Bei unterschiedlichen Viskositäten würden sich die Phasenportraits verzerren, die Topologie würde jedoch erhalten bleiben.

Damit können die Eigenwerte von (7.14) numerisch berechnet werden. Die nach (7.15) folgende Klassifizierung der stationären Punkte ist in Abbildung 7.1 für die Geschwindigkeiten $c = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 1.98, 2, 2.25, 2.41$ dargestellt. Für Geschwindigkeiten $c \leq 2$, d.h. in Abbildungen 7.1(a)-(e) kennzeichnen die roten Bereiche die instabilen Punkte und damit die linksseitigen Randwertsättigungen und die grünen Bereiche die stabilen Punkte und damit die rechtsseitigen Randwertsättigungen. Der Rest des zulässigen Raumes stellt die Sattelpunkte dar. Für $c \geq 2$, d.h. in Abbildungen 7.1(f)-(h) sind die Sattelpunkte blau dargestellt, der Rest des zulässigen Raumes stellt die stabilen Punkte dar. Bei Geschwindigkeiten $0 < c < 2$ existieren ein mit zunehmender Geschwindigkeit schrumpfender instabiler Bereich im Zentrum, vier voneinander getrennte in den Definitionsbereichen befindende stabile Bereiche, die mit zunehmender Geschwindigkeit anwachsen, und ein Sattelpunktbereich, der den instabilen von dem stabilen Bereich trennt. Bei Geschwindigkeit $c = 2$ verschwindet der instabile Bereich und für Geschwindigkeiten $2 < c < 2.25$ existieren ein zusammenhängender Sattelpunktbereich, der von einem stabilen Bereich umgeben ist. Bei Geschwindigkeit $c = 2.25$ bricht der zusammenhängende Bereich in sechs Einzelräume auf, gleichzeitig verschwinden die Berührflächen mit den (u, v) -, (u, w) - und (v, w) -Ebenen. Bei weiter zunehmender Geschwindigkeit werden die sechs Sattelpunktbereiche immer kleiner bis sie bei Geschwindigkeit $c = 2.41$ verschwunden sind, so dass für Geschwindigkeit $c > 2.41$ der Definitionsbereich komplett stabil ist.

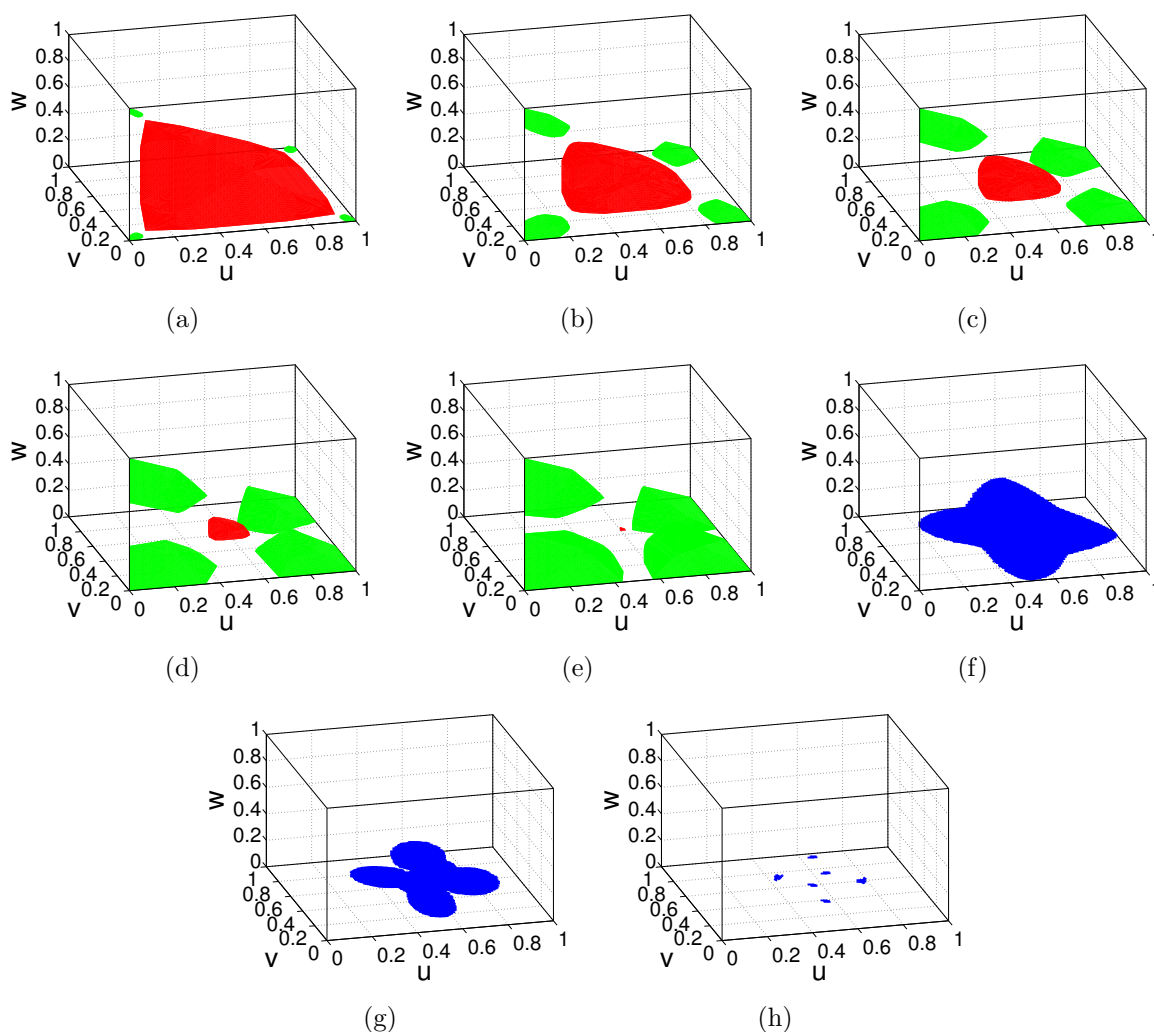


Abbildung 7.1: Klassifizierung der stationären Punkte für Geschwindigkeiten $c = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 1.98, 2, 2.25, 2.41$ in stabil, instabil und Sattelpunkt. Für Abbildung (a)-(e) stellen die grünen bzw. roten Bereiche die stabilen bzw. instabilen Punkte dar, der Rest ist der Sattelpunktbereich. In Abbildung (f)-(h) stellen die blauen Bereiche die Sattelpunkte dar, der Rest ist stabil. Bei $c = 0$ ist der gesamte Definitionsbereich instabil und für $c > 2.41$ ist der Definitionsbereich stabil. Bei $c = 2$ verschwindet die instabile Region, womit mögliche Systeme nur für Geschwindigkeiten $0 < c < 2$ existieren. In diesem Bereich nimmt die instabile Region ab und die vier sich in den Ecken befindlichen stabilen Bereiche nehmen zu.

Für die möglichen Systeme bedeutet dies, dass nur Geschwindigkeiten im Bereich von $0 < c < 2$ möglich sind. Von den vier stabilen Bereichen stehen die am Ursprung und die in der Ecke $(0, 0, 1)$ befindlichen Bereiche für Bewässerungen und die in der Ecke $(1, 0, 0)$ und die in der Ecke $(1, 1, 0)$ befindlichen Bereiche für Entwässerungen. Nachdem sich diese Arbeit auf Bewässerungssysteme beschränkt, werden die zwei rechten stabilen Bereiche ab sofort nicht mehr betrachtet. Desweiteren sind Systeme mit nichtperkolierendem Wasser größer als 50%

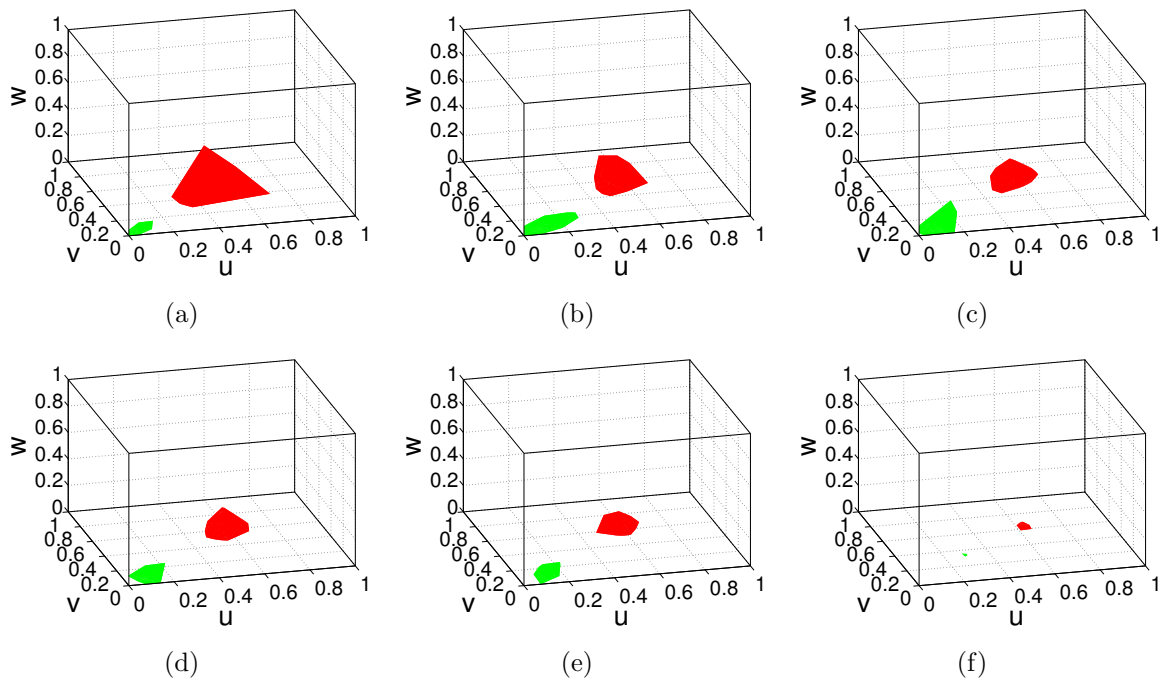


Abbildung 7.2: Die stabilen sich um den Ursprung befindlichen (grünen) und instabilen (roten) stationären Punkte, für die es Punkte auf dem jeweils anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v, k_w) -Wert haben, für Geschwindigkeiten $c = 0.5, 1, 1.1, 1.16, 1.3, 1.7$.

physikalisch unrealistisch, womit auch der Bereich um die Ecke $(0, 0, 1)$ ausgeschlossen wird. Also werden nur Systeme betrachtet, die Punkte auf dem im Zentrum liegenden instabilen Bereich mit Punkten auf dem am Ursprung liegenden stabilen Bereich verbinden.

In Abbildung 7.2 sind die stabilen und instabilen Fixpunkte, für die es Punkte auf dem jeweils anderen Stabilitätsbereich gibt, die den selben (k_u, k_v, k_w) -Wert haben, für die Geschwindigkeiten $c = 0.5, 1, 1.1, 1.16, 1.3, 1.7$ dargestellt. Nur diese Punkte können durch Trajektorien verbunden werden, die physikalische Bewässerungswellen erzeugen. Die roten Flächen kennzeichnen die instabilen Punkte und damit die linksseitigen Randsättigungen. Die grünen Flächen zeigen die stabilen Punkte und damit die rechtsseitigen Randsättigungen.

Ab $c = 1.11$ gibt es keine Bewässerungswelle in ein anfänglich komplett mit perkolierendem Öl gefüllten Medium mehr. Ab $c = 1.16$ gibt es keine Bewässerungswelle in ein anfänglich trockenes Medium mehr. Ab Geschwindigkeit $c = 1.3$ gibt es nur noch Bewässerungswellen in ein Medium, das mit allen vier Sättigungen gefüllt ist. Ab $c > 1.7$ existieren keine Bewässerungswellen mehr.

Nachdem nun die stabilen und instabilen Punkte und somit die möglichen rechts und linksseitigen Randsättigungen bekannt sind, müssen diese über die Konstanten k_u, k_v, k_w mitein-

Abbildung	c	grün	rot	cyan	blau	schwarz
7.3(a)	0.1	0	0.001	0.002	0.003	0.004
7.3(b)	0.5	0	0.04	0.065	0.09	0.15
7.3(c)	1.1	0	0.12	0.17	0.255	0.4
7.3(d)	1.16	0	0.15	0.19	0.275	0.5
7.3(e)	1.3	0	0.17	0.22	0.33	0.5
7.3(f)	1.7	0	0.19	0.245	0.35	0.51
7.4(a)	0.1	0	0.0005	0.001	0.002	0.003
7.4(b)	0.5	0	0.018	0.065	0.09	0.12
7.4(c)	1.1	0	0.08	0.2	0.3	0.5
7.4(d)	1.16	0	0.09	0.2	0.3	0.5
7.4(e)	1.3	0	0.115	0.2	0.3	0.5
7.4(f)	1.7	0	0.11	0.19	0.3	0.5
7.5(a)	0.1	0	0.0005	0.001	0.002	0.003
7.5(b)	0.5	0	0.018	0.065	0.09	0.12
7.5(c)	1.1	0	0.08	0.2	0.3	0.5
7.5(d)	1.16	0	0.09	0.2	0.3	0.5
7.5(e)	1.3	0	0.115	0.2	0.3	0.5
7.5(f)	1.7	0	0.11	0.13	0.3	0.5

Tabelle 7.1: Werte der farbigen Konturflächen der Abbildungen in 7.3, 7.4 und 7.5.

ander verbunden werden. Dabei ist nicht gesagt, dass jeder stabile oder instabile Punkt zu einer Bewässerungslösung führt.

In den Abbildungen 7.3, 7.4 und 7.5 sind jeweils für die Geschwindigkeiten $c = 0.1, 0.5, 1.1, 1.16, 1.3, 1.7$ und jeweils für die Werte aus Tabelle 7.1 fünf Konturflächen für $k_u(u, v, w)$, $k_v(u, v, w)$ und $k_w(u, v, w)$ gezeichnet. Damit kann man sehen, wie sich die Konturflächen in Abhängigkeit ihres Wertes und der Geschwindigkeit verändern.

In Abbildung 7.3(a) sieht man für $c = 0.1$ zwei Röhren, die sich in den Ecken $(0, 0, 0)$ und $(0, 0, 1)$ befinden und mit zunehmenden k_u -Wert immer kleiner werden, bis sie für $k_u(u, v, w) > 0.004$ verschwinden.

In Abbildung 7.3(b) sieht man mit $c = 0.5$ für $k_u(u, v, w) < 0.04$ eine zusammenhängende offene Röhre. Bei $k_u(u, v, w) = 0.04$ reißt diese Röhre in zwei Teile bis der untere Teil bei $k_u(u, v, w) = 0.065$ verschwindet. Mit zunehmenden k_u -Wert wird die Fläche mehr und mehr

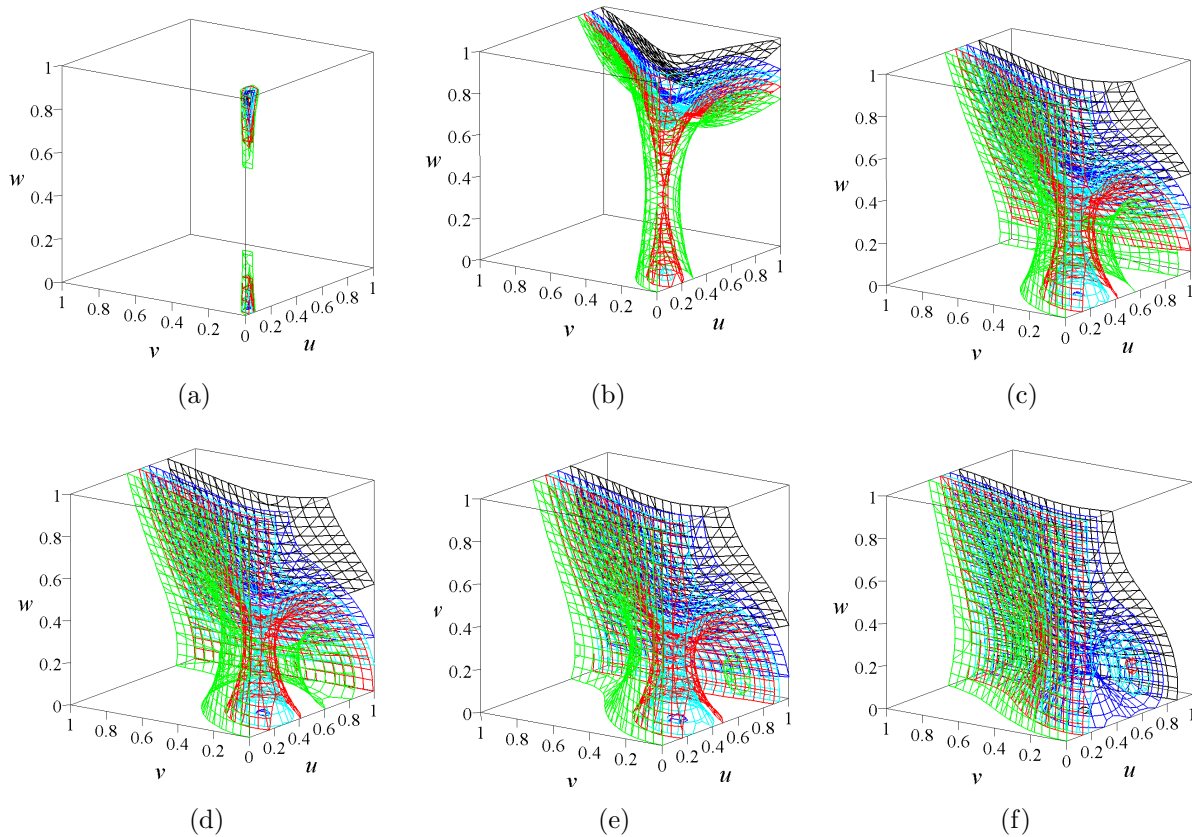


Abbildung 7.3: Konturflächen $k_u(u, v, w)$ für $c = 0.1, 0.5, 1.1, 1.16, 1.3, 1.7$ mit Werten aus Tabelle 7.1.

zu einer leicht geschwungenen Ebene auf der rechten oberen Kante.

In Abbildung 7.3(c) sieht man mit $c = 1.1$ für $k_u(u, v, w) < 0.17$ eine zusammenhängende Fläche, die zwei röhrenförmige Öffnungen bei $(0.3, 0.2, 0)$ und $(0.7, 0, 0.2)$ hat. Bei $k_u(u, v, w) > 0.17$ reisst die Röhre in Richtung $(0.3, 0.2, 0)$ in zwei Teile auf, bis der untere Teil bei $k_u(u, v, w) = 0.255$ verschwindet. Mit zunehmendem k_u -Wert wird die Fläche mehr und mehr zu einer leicht geschwungenen Ebene auf der rechten oberen Kante.

In Abbildung 7.3(d) sieht man mit $c = 1.16$ für $k_u(u, v, w) < 0.19$ eine zusammenhängende Fläche, die zwei röhrenförmige Öffnungen bei $(0.3, 0.2, 0)$ und $(0.7, 0, 0.2)$ hat. Bei $k_u(u, v, w) > 0.19$ reisst die Röhre in Richtung $(0.3, 0.2, 0)$ in zwei Teile auf, bis der untere Teil bei $k_u(u, v, w) = 0.275$ verschwindet. Mit zunehmendem k_u -Wert wird die Fläche mehr und mehr zu einer leicht geschwungenen Ebene auf der rechten oberen Kante.

In Abbildung 7.3(e) sieht man mit $c = 1.3$ für $k_u(u, v, w) < 0.17$ eine leicht geschwungene Ebene quer durch den Würfel und zusätzlich eine Halbkugel bei $(0.7, 0, 0.2)$. Ab $k_u(u, v, w) > 0.17$ existiert eine zusammenhängende Fläche, die zwei röhrenförmige Öffnungen bei $(0.3, 0.2, 0)$

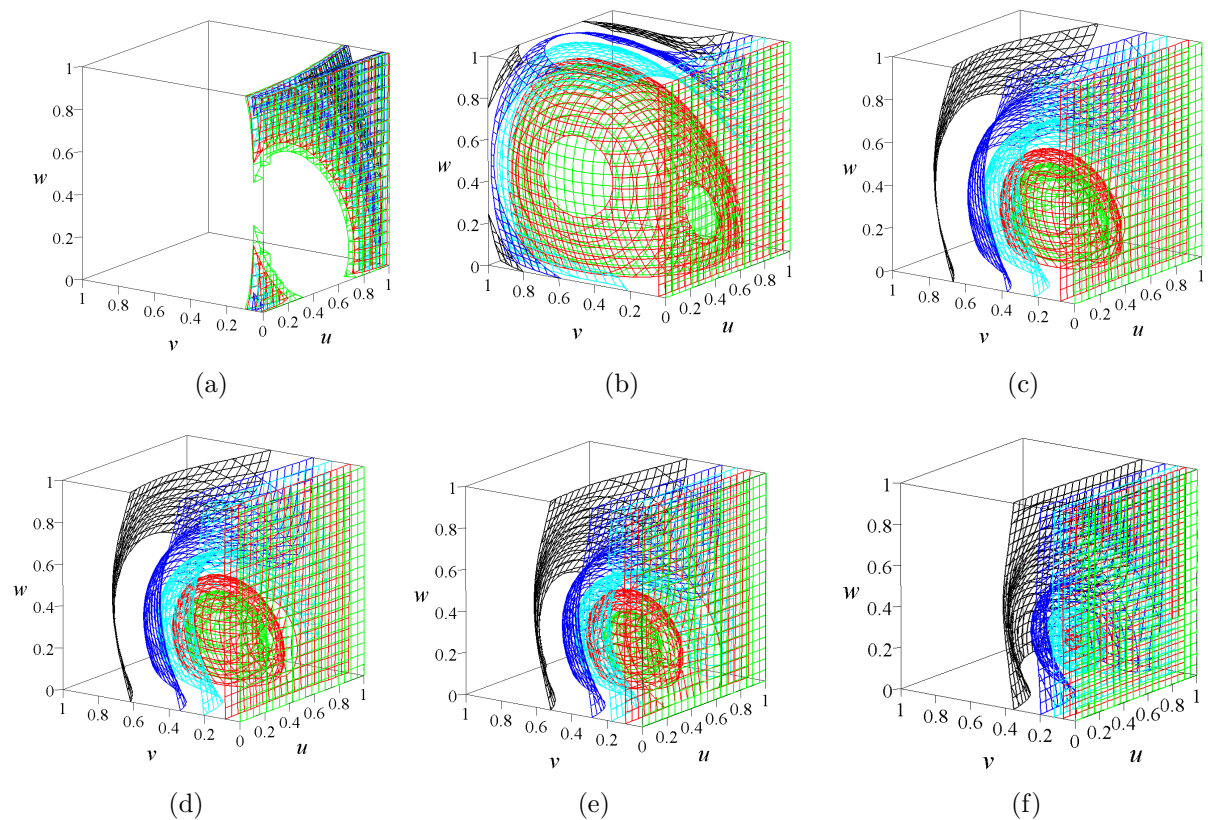


Abbildung 7.4: Konturflächen $k_v(u, v, w)$ für $c = 0.1, 0.5, 1.1, 1.16, 1.3, 1.7$ mit Werten aus Tabelle 7.1.

und $(0.7, 0, 0.2)$ hat. Bei $k_u(u, v, w) > 0.22$ reißt die Röhre in Richtung $(0.3, 0.2, 0)$ in zwei Teile auf, bis der untere Teil bei $k_u(u, v, w) = 0.33$ verschwindet. Mit zunehmendem k_u -Wert wird die Fläche mehr und mehr zu einer leicht geschwungenen Ebene auf der rechten oberen Kante.

In Abbildung 7.3(f) sieht man mit $c = 1.7$ für $k_u(u, v, w) < 0.19$ eine leicht geschwungene Ebene quer durch den Würfel. Ab $k_u(u, v, w) > 0.19$ kommt zusätzlich eine Halbkugel bei $(0.7, 0, 0.2)$ hinzu. Bei $k_u(u, v, w) = 0.245$ vereinigen sich beide Teilflächen. Ab $k_u(u, v, w) = 0.35$ entsteht eine röhrenförmige Öffnung bei $(0.3, 0.2, 0)$, die bei $k_u(u, v, w) = 0.51$ verschwindet. Mit zunehmendem k_u -Wert wird die Fläche mehr und mehr zu einer leicht geschwungenen Ebene auf der rechten oberen Kante.

In Abbildung 7.4(a) sieht man für $c = 0.1$ eine einmal gefaltete Ebene bei $v = 0.05$ mit einem ellipsenförmigen Loch mit Zentrum $(0.5, 0.05, 0.3)$. Das Loch wird immer größer, bis bei $k_v(u, v, w) > 0.004$ die Ebene ganz verschwindet.

In Abbildung 7.4(b) sieht man mit $c = 0.5$ für $k_v(u, v, w) < 0.018$ eine Ebene bei $v = 0.01$

und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_v(u, v, w) = 0.018$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_v -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_v(u, v, w) = 0.12$ nur noch eine leicht geschwungene Ebene auf der rechten oberen Kante übrig bleibt.

In Abbildung 7.4(c) sieht man mit $c = 1.1$ für $k_v(u, v, w) < 0.08$ eine Ebene bei $v = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_v(u, v, w) = 0.08$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_v -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_v(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $v = 0.7$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.4(d) sieht man mit $c = 1.16$ für $k_v(u, v, w) < 0.09$ eine Ebene bei $v = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_v(u, v, w) = 0.09$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_v -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_v(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $v = 0.65$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.4(e) sieht man mit $c = 1.3$ für $k_v(u, v, w) < 0.115$ eine Ebene bei $v = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_v(u, v, w) = 0.115$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_v -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_v(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $v = 0.6$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.4(f) sieht man mit $c = 1.7$ für $k_v(u, v, w) < 0.11$ eine Ebene bei $v = 0.01$. Ab $k_v(u, v, w) > 0.11$ sieht man eine Ebene bei $v = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Ab $k_u(u, v, w) > 0.19$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_v -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_v(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $v = 0.4$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.5(a) sieht man für $c = 0.1$ eine einmal gefaltete Ebene bei $w = 0.05$ mit einem ellipsenförmigen Loch mit Zentrum $(0.5, 0.3, 0.05)$. Das Loch wird immer größer, bis bei $k_w(u, v, w) > 0.004$ die Ebene ganz verschwindet.

In Abbildung 7.5(b) sieht man mit $c = 0.5$ für $k_w(u, v, w) < 0.018$ eine Ebene bei $w = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_w(u, v, w) = 0.018$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_w -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_w(u, v, w) = 0.12$ nur noch drei leicht geschwungene Flächen in den oberen hinteren drei Kanten übrig bleiben.

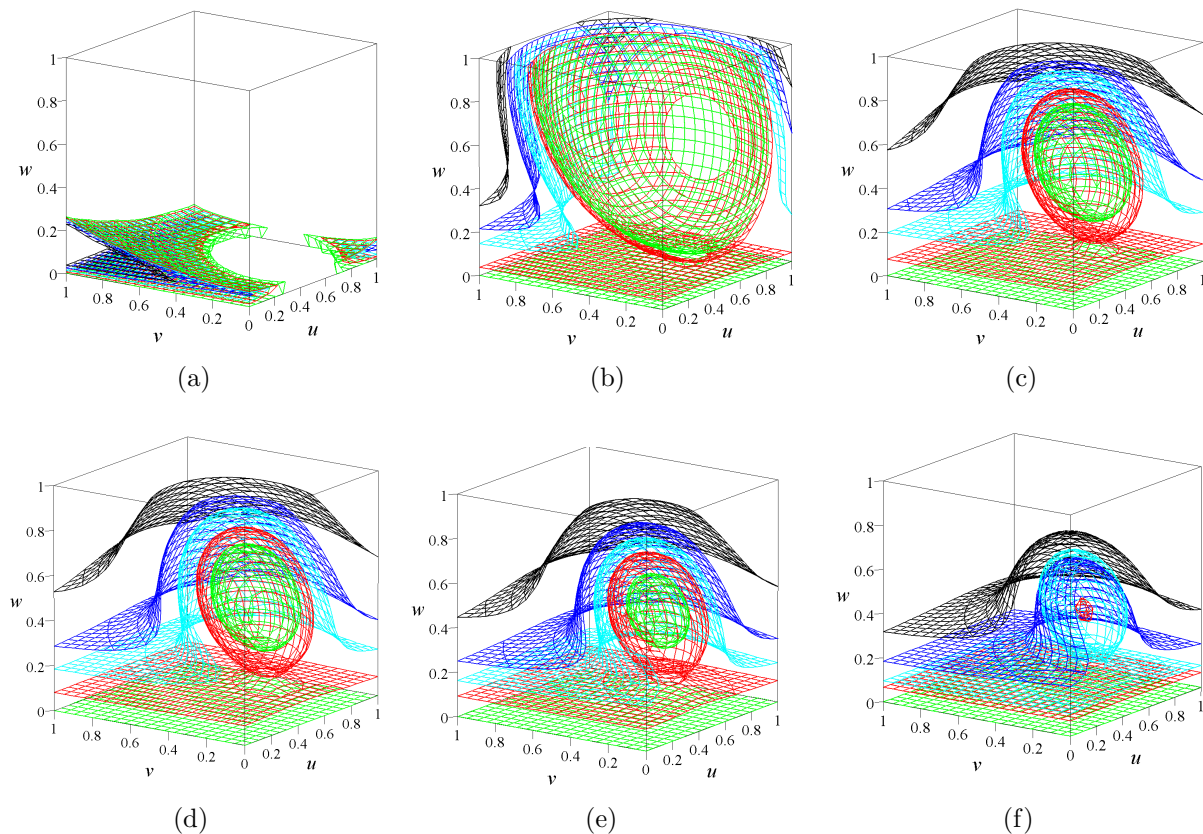


Abbildung 7.5: Konturflächen $k_w(u, v, w)$ für $c = 0.1, 0.5, 1.1, 1.16, 1.3, 1.7$ mit Werten aus Tabelle 7.1.

In Abbildung 7.5(c) sieht man mit $c = 1.1$ für $k_w(u, v, w) < 0.08$ eine Ebene bei $w = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_w(u, v, w) = 0.08$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_w -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_w(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $w = 0.8$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.5(d) sieht man mit $c = 1.16$ für $k_w(u, v, w) < 0.09$ eine Ebene bei $w = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_w(u, v, w) = 0.09$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_w -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_w(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $w = 0.8$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.5(e) sieht man mit $c = 1.3$ für $k_w(u, v, w) < 0.115$ eine Ebene bei $w = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Bei $k_w(u, v, w) = 0.115$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_w -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_w(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $w = 0.7$ übrig bleibt.

In Abbildung 7.5(f) sieht man mit $c = 1.7$ für $k_w(u, v, w) < 0.11$ eine Ebene bei $w = 0.01$. Ab $k_w(u, v, w) > 0.11$ sieht man eine Ebene bei $w = 0.01$ und eine Kugel im Zentrum des Würfels. Ab $k_w(u, v, w) > 0.19$ vereinen sich Kugel und Ebene zu einer zusammenhängenden Fläche. Sie wird mit zunehmendem k_w -Wert immer größer, so dass große Teile davon aus dem Würfel verschwinden, bis bei $k_w(u, v, w) = 0.5$ nur noch eine geschwungene Ebene bei $w = 0.5$ übrig bleibt.

7.2.2 Invariante Untermannigfaltigkeiten

Bevor ein konkretes System mit festgewählter Geschwindigkeit und festgewählten Integrationskonstanten besprochen wird, ist es außerordentlich hilfreich, sich mit möglichen globalen linearen invarianten Untermannigfaltigkeiten zu beschäftigen. Invarianz bedeutet hier, dass die Trajektorien aller Punkte der invarianten Untermannigfaltigkeit komplett auf ihr enthalten sind. Trajektorien können sie somit nicht verlassen. Diese invarianten Untermannigfaltigkeiten haben zwei interessante Eigenschaften. Erstens kann man auf ihnen die niedrigerdimensionalen Systeme der vorigen Kapitel wiederfinden, womit man sieht, dass das System dreier Gleichungen eine Verallgemeinerung der anderen Systeme darstellt. Zweitens begrenzen die Untermannigfaltigkeiten in natürlicher Weise die Trajektorien, die ein ähnliches Verhalten aufweisen. Dies macht es möglich, den gesamten Phasenraum in kleine Teilräume aufzuspalten, was die Komplexität des Systems deutlich handhabbarer macht und in den folgenden Abschnitten geschehen wird.

Die Beschränkung auf $R_2^1 = R_3^1 = R_4^1 = 1$ wird zunächst aufgehoben, um möglichst allgemeine Aussagen treffen zu können. In allen vorigen Kapiteln wurden die primären Variablen als $u = S_w, v = S_2, w = S_4$ gewählt, die eigentlichen physikalischen Variablen sind jedoch $u - v = S_1, v = S_2, 1 - u - w = S_3, w = S_4$. Die Invarianzen basieren auf gewissen Symmetrien und diese Symmetrien liegen in den fraktionalen Flussfunktionen dieser physikalischen Variablen

$$f_\pi(u, v, w) = \frac{R_\pi^1 \pi^2}{\sum_\sigma R_\sigma^1 \sigma^2} \quad (7.21)$$

mit $\pi \in \{0, u - v, v, 1 - u - w, w\}, \sigma \in \{0, u - v, v, 1 - u - w, w\}$,

dabei stellt R_π^1 das Verhältnis zwischen den Widerstandskoeffizienten von $u - v$ und π dar. Die Null wurde aufgenommen, um ein möglichst allgemeines Gesetz formulieren zu können. Dabei wird R_0^1 gleich Null gesetzt. Damit ergibt sich für das dynamische System dieser

Variablen

$$\pi' = f_\pi(u, v, w) - c\pi + k_\pi \quad \text{mit } \pi \in \{0, u - v, v, 1 - u - w, w\}, \quad (7.22a)$$

$$k_\pi = -f_\pi(u_0, v_0, w_0) + c\pi_0 \quad \text{mit } \pi_0 \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\} \quad (7.22b)$$

mit $u_0 = u(y_0)$, $v_0 = v(y_0)$, $w_0 = w(y_0)$. Wenn man die Gleichung (7.22b) über alle π summiert, so ergibt sich folgende nützliche Beziehung

$$\sum_{\pi} k_\pi = c - 1 \quad \text{mit } \pi \in \{0, u - v, v, 1 - u - w, w\}, \quad (7.23)$$

wobei $k_0 = 0$.

Wenn nun ein Variablenpärchen $(\pi_0, \sigma_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^2$ so gewählt wird, dass

$$R_\pi^1 \pi_0 = R_\sigma^1 \sigma_0, \quad (7.24)$$

dann folgt mit Hilfe der Gleichung (7.22a), dass

$$R_\pi^1 f_\pi |_{\pi_0, \sigma_0} = R_\sigma^1 f_\sigma |_{\pi_0, \sigma_0} \quad (7.25)$$

und mit Hilfe der Gleichung (7.22b), dass

$$R_\pi^1 k_\pi = R_\sigma^1 k_\sigma. \quad (7.26)$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (7.22a) für die Ableitung ihrer Differenzen

$$(R_\pi^1 \pi - R_\sigma^1 \sigma)' = 0. \quad (7.27)$$

Daraus folgt, dass Gleichung (7.24) eine globale zweidimensionale lineare invariante Untermannigfaltigkeit darstellt. Davon gibt es maximal $\binom{5}{2} = 10$.

Wenn nun ein Variablentripel $(\pi_0, \sigma_0, \tau_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^3$ so gewählt wird, dass

$$R_\pi^1 \pi_0 = R_\sigma^1 \sigma_0 = R_\tau^1 \tau_0, \quad (7.28)$$

dann folgt mit analoger Argumentation, dass

$$(R_\pi^1 \pi - R_\sigma^1 \sigma)' = (R_\pi^1 \pi - R_\tau^1 \tau)' = (R_\sigma^1 \sigma - R_\tau^1 \tau)' = 0. \quad (7.29)$$

Daraus folgt, dass Gleichung (7.28) eine eindimensionale globale lineare invariante Untermannigfaltigkeit darstellt. Davon gibt es maximal $\binom{5}{3} = 10$. Desweiteren kann man zwei Variablenpärchen $(\pi_0, \sigma_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^2$ und $(\tau_0, \chi_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^2 / \{\pi_0, \sigma_0\}$ wählen, so dass

$$R_\pi^1 \pi_0 = R_\sigma^1 \sigma_0, \quad (7.30a)$$

$$R_\tau^1 \tau_0 = R_\chi^1 \chi_0. \quad (7.30b)$$

Dies liefert

$$(R_\pi^1 \pi - R_\sigma^1 \sigma)' = (R_\tau^1 \tau - R_\chi^1 \chi)' = 0. \quad (7.31)$$

Daraus folgt, dass Gleichungen (7.30) eine eindimensionale globale lineare invariante Untermannigfaltigkeit darstellt. Davon gibt es maximal $\binom{4}{2} \binom{2}{2} / 2 = 3$. Zuletzt kann man eine Variable $\pi_0 \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}$ und ein Variablenpärchen $(\sigma_0, \tau_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^2 / \{\pi_0\}$ wählen, so dass

$$R_\pi^1 \pi_0 = 0, \quad (7.32a)$$

$$R_\sigma^1 \sigma_0 = R_\tau^1 \tau_0. \quad (7.32b)$$

Das führt zu

$$(R_\pi^1 \pi)' = (R_\sigma^1 \sigma - R_\tau^1 \tau)' = 0. \quad (7.33)$$

Daraus folgt, dass Gleichungen (7.32) eine eindimensionale globale lineare invariante Untermannigfaltigkeit darstellt. Davon gibt es maximal $\binom{4}{1} \binom{3}{2} = 12$. Dies macht insgesamt 25 eindimensionale invariante Untermannigfaltigkeiten.

Mit ähnlicher Argumentation können auch die nulldimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeiten, die gleichzeitig die Fixpunkte darstellen, gefunden werden. Dabei benötigt man entweder ein Variablenquadrupel $(\pi_0, \sigma_0, \tau_0, \chi_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^4$ mit

$$R_\pi^1 \pi_0 = R_\sigma^1 \sigma_0 = R_\tau^1 \tau_0 = R_\chi^1 \chi_0 \quad (7.34)$$

oder ein Variablentripel $(\pi_0, \sigma_0, \tau_0) \in \{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\}^3$ mit einem Variablenpär-

chen $(\chi_0, \psi_0) \in (\{0, u_0 - v_0, v_0, 1 - u_0 - w_0, w_0\} / \{\pi_0, \sigma_0, \tau_0\})^2$, das

$$R_\pi^1 \pi_0 = R_\sigma^1 \sigma_0 = R_\tau^1 \tau_0 \wedge R_\chi^1 \chi_0 = R_\psi^1 \psi_0 \quad (7.35)$$

erfüllt. Davon gibt es maximal $\binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 5 + 10 = 15$. Die Variablenquadrupel stehen für stabile und instabile Fixpunkte, während die Variablen-tripel mit Variablen-pärchen für Sattelpunkte stehen.

Diese globalen linearen Untermannigfaltigkeiten stimmen mit den lokalen stabilen bzw. instabilen linearisierten Untermannigfaltigkeiten der Sattelpunkte überein und spalten den Phasenraum in bestimmte Teilbereiche auf. Es ist hier anzumerken, dass selbst wenn die lokalen stabilen bzw. instabilen linearisierten Untermannigfaltigkeiten der Sattelpunkte keine globalen Untermannigfaltigkeiten darstellen, so teilen sie trotzdem den Phasenraum auf. Diese dreidimensionalen Teilbereiche sind invariant, d.h. eine Trajektorie wird niemals diesen Bereich verlassen.

7.2.3 Das primäre Bewässerungssystem

Nun soll das konkrete System mit Parametern aus Tabelle 7.2 betrachtet werden. Es zeichnet sich durch seine größtmögliche Einfachheit und Symmetrie aus. Es steht für eine Bewässerung in ein anfangs komplett mit perkolierendem Öl gefülltem Medium, deswegen wird es hier primäres Bewässerungssystem genannt. Seine Geschwindigkeit wird der Einfachheit halber gleich Eins gesetzt. In diesem Abschnitt wird in den Beschreibungen verstärkt auf die primären physikalischen Variablen S_1, S_2, S_3, S_4 zurückgegriffen, um die Symmetrien hervorzuheben und das Verständnis zu erleichtern.

In Abbildung 7.6 sind die Konturflächen $k_u(u, v, w) = 0$ als grüne Fläche, $k_v(u, v, w) = 0$ als rote Fläche und $k_w(u, v, w) = 0$ als blaue Fläche und deren Schnittpunkte für die Geschwindigkeit $c = 1$ dargestellt. Die Schnittpunkte sind gleichzeitig die Fixpunkte des Systems. Sie sind in Tabelle 7.3 angegeben. Es existieren vier stabile Fixpunkte, die als Diamanten dargestellt sind, ein instabiler Fixpunkt, der als Kugel dargestellt ist, und zehn Sattelpunkte, die als Würfel dargestellt sind.

c	k_u	k_v	k_w	R_2^1	R_3^1	R_4^1
1	0	0	0	1	1	1

Tabelle 7.2: Werte für das System aus Abbildung 7.6.

	Fixpunkt	Typ	physikalische Erhaltung	Bew.rel.
i	(0, 0, 0)	stabil \mathcal{S}_r	$S_1 = 0, S_2 = 0, S_4 = 0, S_1 = S_2 = S_4$	ja
ii	(1, 0, 0)	stabil \mathcal{S}_r	$S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0, S_2 = S_3 = S_4$	nein
iii	(1, 1, 0)	stabil \mathcal{S}_r	$S_1 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0, S_1 = S_3 = S_4$	nein
iv	(0, 0, 1)	stabil \mathcal{S}_r	$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_1 = S_2 = S_3$	nein
v	(0.5, 0.25, 0.25)	instabil \mathcal{S}_ℓ	$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$	ja
vi	(0, 0, 0.5)	Sattel \mathcal{S}_m^+	$S_1 = 0, S_2 = 0, S_1 = S_2, S_3 = S_4$	ja
vii	(0.5, 0, 0)	Sattel \mathcal{S}_m^+	$S_2 = 0, S_4 = 0, S_1 = S_3, S_2 = S_4$	ja
viii	(0.5, 0.5, 0)	Sattel \mathcal{S}_m^+	$S_1 = 0, S_4 = 0, S_1 = S_4, S_2 = S_3$	ja
ix	(0.5, 0, 0.5)	Sattel \mathcal{S}_m^+	$S_2 = 0, S_3 = 0, S_1 = S_4, S_2 = S_3$	nein
x	(0.5, 0.5, 0.5)	Sattel \mathcal{S}_m^+	$S_1 = 0, S_3 = 0, S_1 = S_3, S_2 = S_4$	nein
xi	(1, 0.5, 0)	Sattel \mathcal{S}_m^+	$S_3 = 0, S_4 = 0, S_1 = S_2, S_3 = S_4$	nein
xii	(0.33, 0, 0.33)	Sattel \mathcal{S}_m^-	$S_2 = 0, S_1 = S_3 = S_4$	ja
xiii	(0.33, 0.33, 0.33)	Sattel \mathcal{S}_m^-	$S_1 = 0, S_2 = S_3 = S_4$	ja
xiv	(0.67, 0.33, 0)	Sattel \mathcal{S}_m^-	$S_4 = 0, S_1 = S_2 = S_3$	ja
xv	(0.67, 0.33, 0.33)	Sattel \mathcal{S}_m^-	$S_3 = 0, S_1 = S_2 = S_4$	nein

Tabelle 7.3: Werte, Typ, physikalische Erhaltung und Bewässerungsrelevanz der Fixpunkte.

Abbildung 7.7 zeigt den Definitionsbereich und die Fixpunkte des Systems aus Tabelle 7.2. Die vier Diamanten in den Ecken sind die stabilen Fixpunkte und die im Zentrum befindliche Kugel ist der instabile Fixpunkt. Die zehn Würfel sind die Sattelpunkte. Die vier sich auf den Seiten des Definitionsbereich befindlichen Sattelpunkte stammen aus \mathcal{S}_m^- . Die Seiten stellen die dazugehörigen zweidimensionalen instabilen Untermannigfaltigkeiten dar. Die dazugehörige stabile eindimensionale Untermannigfaltigkeit zeigt aus der Richtung des instabilen Fixpunktes. Die sechs sich auf den Kanten des Definitionsbereich befindlichen Sattelpunkte stammen aus \mathcal{S}_m^+ . Die Kanten stellen die dazugehörigen eindimensionalen instabilen Untermannigfaltigkeiten dar. Die dazugehörige stabile zweidimensionale Untermannigfaltigkeit wird von den zwei Vektoren aufgespannt, die den Punkt mit den zwei Sattelpunkten, die sich auf den angrenzenden Seiten befinden, verbinden.

Mit den Parametern aus Tabelle 7.2 gibt es jeweils die maximale Anzahl linearer invarianter Untermannigfaltigkeiten.

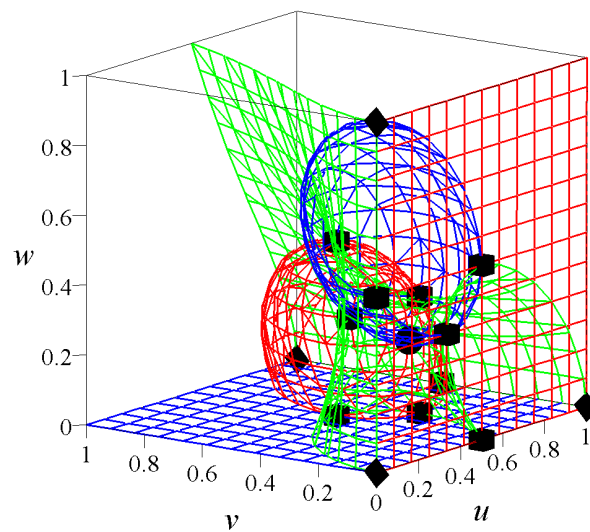


Abbildung 7.6: Konturflächen $k_u(u, v, w) = 0$ (grün), $k_v(u, v, w) = 0$ (rot) und $k_w(u, v, w) = 0$ (blau) und deren Schnittpunkte (schwarz) des Systems mit Werten aus Tabelle 7.2. Es existieren vier stabile Fixpunkte (Diamanten), ein instabiler Fixpunkt (Kugel) und zehn Sattelpunkte (Würfel).

7.2.3.1 Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten und ihre Lösungen

In Abbildung 7.8 sind alle zehn zweidimensionalen linearen invarianten Untermannigfaltigkeiten und die sich auf ihnen befindenden Fixpunkte dargestellt, wobei wieder die Kugeln bzw. die Diamanten die instabilen bzw. stabilen Fixpunkte und die Würfel die Sattelpunkte sind. Ihre Ebenengleichung, ihre Richtungsvektoren, ihre physikalische Erhaltung, d.h. welche der primären physikalischen Variablen $0, S_1, S_2, S_3, S_4$ identisch sind, und ihre Fixpunkte sind in Tabelle 7.4 angegeben.

Es können zwei verschiedene Klassen unterschieden werden. Bei der ersten Klasse, die in Abbildungen 7.8(a)-7.8(d) dargestellt ist, ist eine der physikalischen Variablen S_1, S_2, S_3, S_4 nicht vorhanden. Auf jeder dieser Ebenen existieren vier Sattelpunkte und drei stabile Fixpunkte des vollen Systems. Von den vier Sattelpunkten stammen drei aus der Teilmenge \mathcal{S}_m^+ und einer aus \mathcal{S}_m^- . Der im Zentrum der anderen Punkte befindliche Sattelpunkt, der aus \mathcal{S}_m^- stammt, dient auf der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit als instabiler Fixpunkt, die anderen drei dienen als Sattelpunkte. Der instabile Fixpunkt hat die Eigenschaft, dass alle drei vorhandenen Sättigungen zu gleichen Teilen existieren. Alle vier auf ihre Untermannigfaltigkeiten beschränkte Systeme können als Systeme zweier Gleichungen formuliert werden. Das System ist auf einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck beschränkt und besteht aus einem instabilen Punkt im Zentrum, drei stabilen Punkten in den Ecken und drei Sattelpunkten auf den Kanten. So sind die Systeme in Abbildung 7.8(b) bzw. 7.8(d) mit den Systemen aus den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 mit den Vereinfachungen des einzig in

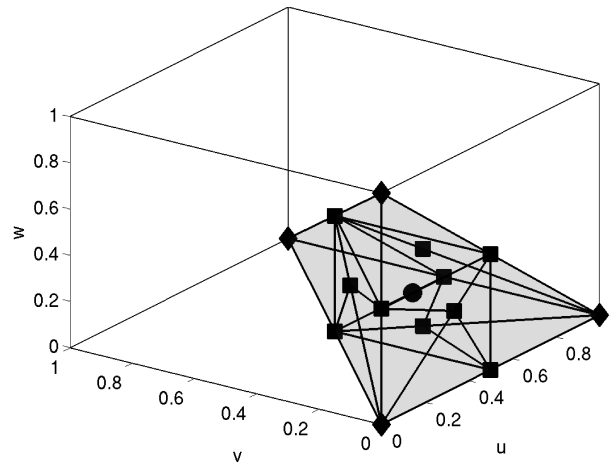


Abbildung 7.7: Fixpunkte und Definitionsbereich (grau) des gesamten Systems mit Parametern aus Tabelle 7.2. Es existieren vier stabile Fixpunkte (Diamanten), ein instabiler Fixpunkt (Kugel) und zehn Sattelpunkte (Würfel). Die vier sich auf den Seiten des Definitionsbereich befindlichen Sattelpunkte stammen aus \mathcal{S}_m^- . Die Seiten stellen die dazugehörigen zweidimensionalen instabilen Untermannigfaltigkeiten dar. Die dazugehörige stabile eindimensionale Untermannigfaltigkeit zeigt aus der Richtung des instabilen Fixpunktes. Die sechs sich auf den Kanten des Definitionsbereich befindlichen Sattelpunkte stammen aus \mathcal{S}_m^+ . Die Kanten stellen die dazugehörigen eindimensionalen instabilen Untermannigfaltigkeiten dar. Die dazugehörige stabile zweidimensionale Untermannigfaltigkeit wird von den zwei Vektoren aufgespannt, die den Punkt mit den zwei Sattelpunkten, die sich auf den angrenzenden Seiten befinden, verbinden.

perkolierender Form vorhandenen Wassers bzw. des einzig in perkolierender Form vorhandenen Öls identisch. Das System aus der Abbildung 7.8(a) ist als System zweier Gleichungen identisch mit dem System aus 7.8(b), da es unter den getroffenen Vereinfachungen keinen Unterschied macht, ob die Wassersättigung komplett aus perkolierendem oder nichtperkolierendem Wasser besteht, da beide die selbe Mobilität aufweisen und keine Masse austauschen. Das System aus Abbildung 7.8(c) wurde im Zweigleichungskapitel 6 nicht besprochen, da es nur Bewässerungen zulässt, die anfänglich komplett mit nichtperkolierendem Öl gefüllt sind. Dies ist physikalisch unmöglich.

Bei der zweiten Klasse, die in Abbildungen 7.8(e)-7.8(j) dargestellt ist, sind zwei der physikalischen Variablen S_1, S_2, S_3, S_4 identisch. Auf jeder dieser Ebenen existieren vier Sattelpunkte, zwei stabile Fixpunkte und ein instabiler Fixpunkt des vollen Systems. Von den vier Sattelpunkten stammen zwei aus der Teilmenge \mathcal{S}_m^+ und zwei aus \mathcal{S}_m^- . Der einzige relativ zu den anderen sich in einer Ecke befindliche Sattelpunkt, der aus \mathcal{S}_m^+ stammt, dient auf der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit als stabiler Fixpunkt, die anderen drei dienen als Sattelpunkte. Damit besteht das zweidimensionale System wie in der ersten Klasse aus einem

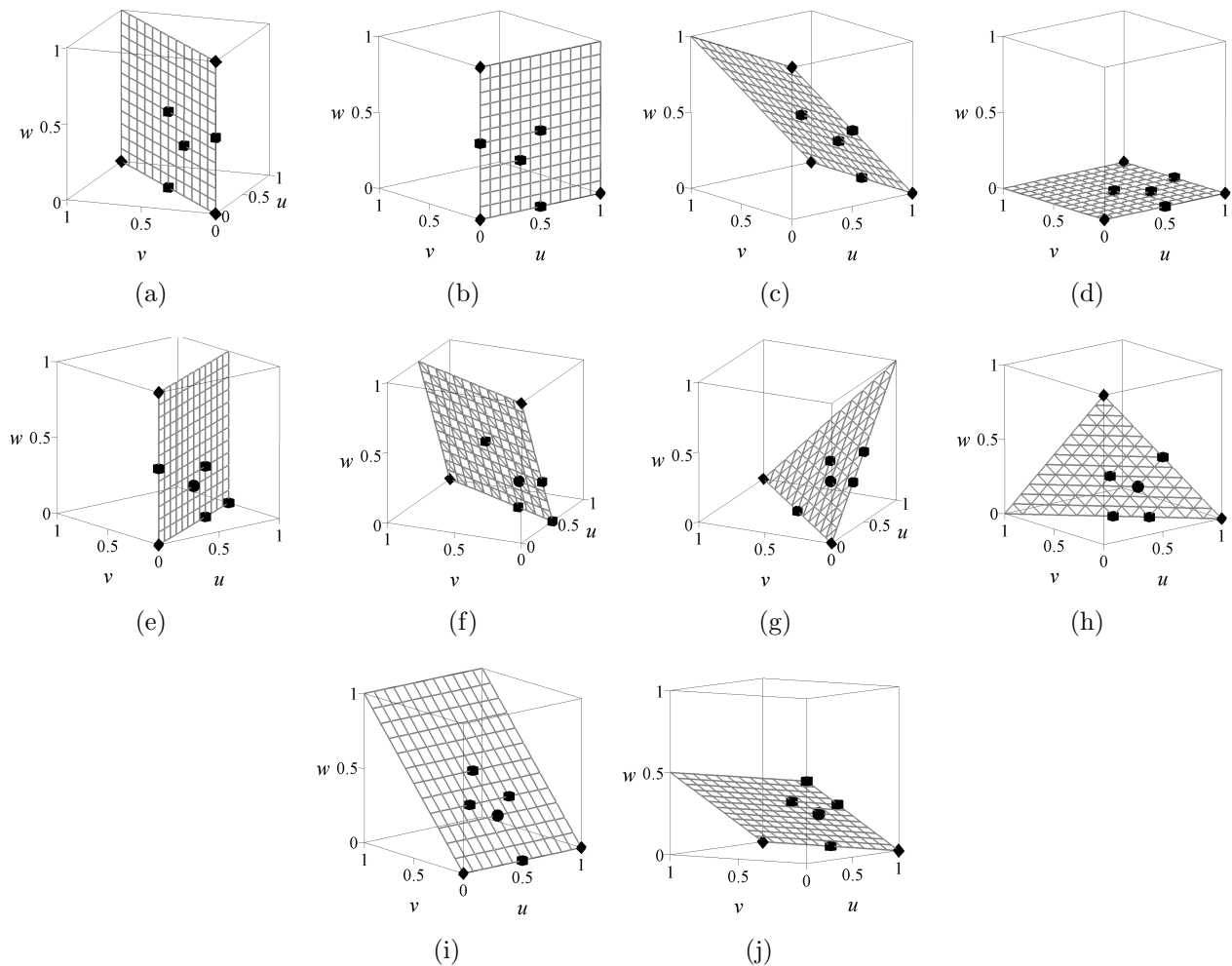


Abbildung 7.8: Die zehn zweidimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeiten und deren Fixpunkte mit Werten aus Tabelle 7.4. Es sind die stabilen (Diamanten) und instabilen (Kugeln) Fixpunkte und die Sattelpunkte (Würfel) gezeigt. Bei Abbildungen 7.8(a)-(d) existieren drei stabile Fixpunkte und vier Sattelpunkte, wobei der im Zentrum liegende sich wie ein instabiler Fixpunkt verhält. Bei Abbildungen 7.8(e)-(j) existieren zwei stabile Fixpunkte, ein instabiler Fixpunkt und vier Sattelpunkte, wobei der in der Ecke liegende sich wie ein stabiler Fixpunkt verhält.

instabilen Punkt im Zentrum, drei stabilen Punkten in den Ecken und drei Sattelpunkten auf den Kanten. Die Systeme aus den Abbildungen 7.8(e), 7.8(i) und 7.8(j) sind wie bei der ersten Klasse auf ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck beschränkt. Die Systeme aus den Abbildungen 7.8(g) und 7.8(h) sind auf ein gleichseitiges Dreieck beschränkt. Das System aus 7.8(f) ist auf ein gleichschenkliges Dreieck beschränkt. Nun werden die Phasenportraits und Sättigungsprofile der zweiten Klasse der zweidimensionalen Teilsysteme, d.h. die aus Abbildung 7.8(e)-7.8(j), genauer untersucht. Dies geschieht in der gleichen Art und Weise wie in den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 über einzig in perkulierender Form vorhande-

Abb.	Gleichung	Richt.vektoren	phys. Erhalt.	Fixpunkte	Bew.rel.
7.8(a)	$u - v = 0$	$(0, 0, 1)$ $\sqrt{2}^{-1}(1, 1, 0)$	$S_1 = 0$	i,iii,iv,vi,viii,x,xiii	ja
7.8(b)	$v = 0$	$(1, 0, 0)$ $(0, 0, 1)$	$S_2 = 0$	i,ii,iv,vi,vii,ix,xii	ja
7.8(c)	$u + w = 1$	$(0, 1, 0)$ $\sqrt{2}^{-1}(1, 0, -1)$	$S_3 = 0$	ii,iii,iv,ix,x,xi,xv	nein
7.8(d)	$w = 0$	$(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$	$S_4 = 0$	i,ii,iii,vii,viii,xi,xiv	ja
7.8(e)	$u - 2v = 0$	$(0, 0, 1)$ $\sqrt{5}^{-1}(2, 1, 0)$	$S_1 = S_2$	i,iv,v,vi,xi,xiv,xv	ja
7.8(f)	$2u - v + w = 1$	$\sqrt{5}^{-1}(1, 2, 0)$ $\sqrt{5}^{-1}(1, 0, -2)$	$S_1 = S_3$	iii,iv,v,vii,x,xii,xiv	nein
7.8(g)	$u - v - w = 0$	$\sqrt{2}^{-1}(1, 1, 0)$ $\sqrt{2}^{-1}(1, 0, 1)$	$S_1 = S_4$	i,iii,v,viii,ix,xii,xv	ja
7.8(h)	$u + v + w = 1$	$\sqrt{2}^{-1}(1, -1, 0)$ $\sqrt{2}^{-1}(1, 0, -1)$	$S_2 = S_3$	ii,iv,v,viii,ix,xiii,xiv	nein
7.8(i)	$-v + w = 0$	$(1, 0, 0)$ $\sqrt{2}^{-1}(0, 1, 1)$	$S_2 = S_4$	i,ii,v,vii,x,xiii,xv	ja
7.8(j)	$u + 2w = 1$	$(0, 1, 0)$ $\sqrt{5}^{-1}(2, 0, -1)$	$S_3 = S_4$	ii,iii,v,vi,xi,xii,xiii	ja

Tabelle 7.4: Ebenengleichung, Richtungsvektoren, physikalische Erhaltung, Fixpunkte und Bewässerungsrelevanz der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.8.

nes Wasser oder Öl. Es gibt einen instabilen Fixpunkt, der hier identisch mit dem instabilen Fixpunkt des dreidimensionalen Systems ist. Es existiert ein stabiler Fixpunkt, der entweder auch gleichzeitig der stabile Fixpunkt des dreidimensionalen Systems ist, oder, falls kein stabiler Fixpunkt des dreidimensionalen Systems für eine plausible Bewässerung zur Verfügung steht, gleich einem Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^+ ist. Und es gibt zwei Sattelpunkte, die entweder, falls kein stabiler Fixpunkt des dreidimensionalen Systems für eine plausible Bewässerung zur Verfügung steht, aus \mathcal{S}_m^- sind oder gleich einem Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^+ und einem Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^- sind. Diese zwei Sattelpunkte sind mit einer dünnen Linie $\mathfrak{L}(\lambda)$ verbunden. Sie kann so parametrisiert werden, dass $\mathfrak{L}(0)$ gleich dem einen Sattelpunkt und $\mathfrak{L}(1)$ gleich dem anderen Sattelpunkt ist. Nachdem jede Trajektorie diese Linie genau einmal schneidet, kann man mit

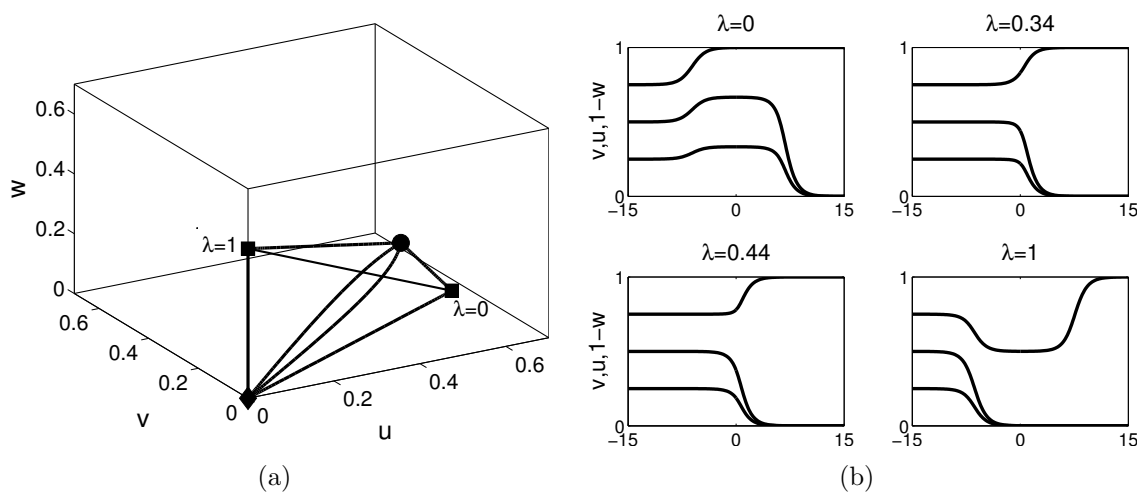


Abbildung 7.9: Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(e). Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien parametrisiert mit der konvexen Hülle zweier Sattelpunkte, dargestellt als dünne Linie.

(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	(u_m, v_m, w_m)	λ
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	$(0.67, 0.33, 0)$	0
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	—	0.34
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	—	0.44
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0.5)$	1

Tabelle 7.5: Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.9.

dem λ -Wert des Schnittpunktes alle möglichen Trajektorien eindeutig benennen. Der λ -Wert dient als Parameter für Bifurkationen im topologischen Verhalten der Sättigungen u, v, w . Für jedes der sechs zweidimensionalen Teilsysteme werden im Folgenden die Phasenportraits und Sättigungsprofile ihrer Bifurkationstrajektorien dargestellt. Dazu gibt es Tabellen, die diese Trajektorien und Bifurkationen beschreiben.

λ	m. fall. u	m. fall. v	m. fall. w	Über. u	Über. v	Über. w
$(0, 0.34)$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$(0.34, 0.44)$	ja	ja	ja	nein	nein	nein
$(0.44, 1)$	ja	ja	nein	nein	nein	ja

Tabelle 7.6: Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.9.

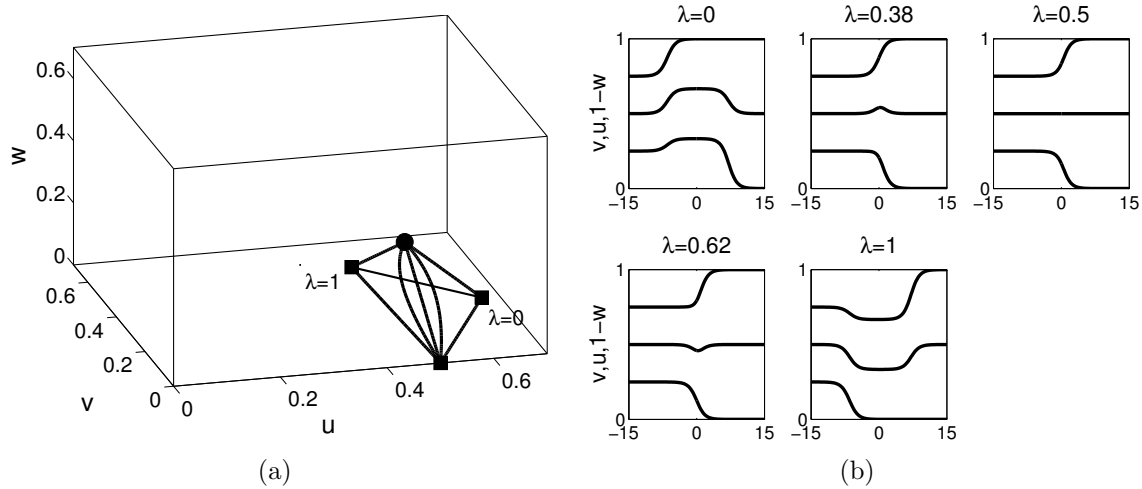


Abbildung 7.10: Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(f). Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien parametrisiert mit der konvexen Hülle zweier Sattelpunkte, dargestellt als dünne Linie.

(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	(u_m, v_m, w_m)	λ
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0, 0)$	$(0.67, 0, 0)$	0
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0, 0)$	$(0.54, 0.19, 0.11)$	0.38
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0, 0)$	—	0.5
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0, 0)$	$(0.46, 0.11, 0.19)$	0.62
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0, 0)$	$(0.33, 0, 0.33)$	1

Tabelle 7.7: Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.10.

In Abbildung 7.9 sind die Phasenportraits und Sättigungsprofile bestimmter Trajektorien aus Tabelle 7.5 des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(e) dargestellt. Seine Bifurkationen stehen in Tabelle 7.6. Hier gilt immer, dass $S_1 = S_2$, d.h. dass die Wassersättigung zu

λ	m. fall. u	m. fall. v	m. fall. w	Über. u	Über. v	Über. w
$(0, 0.38)$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$(0.38, 0.5)$	nein	ja	ja	ja	nein	nein
$(0.5, 0.62)$	nein	ja	ja	nein	nein	nein
$(0.62, 1)$	nein	ja	nein	nein	nein	ja

Tabelle 7.8: Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.10.

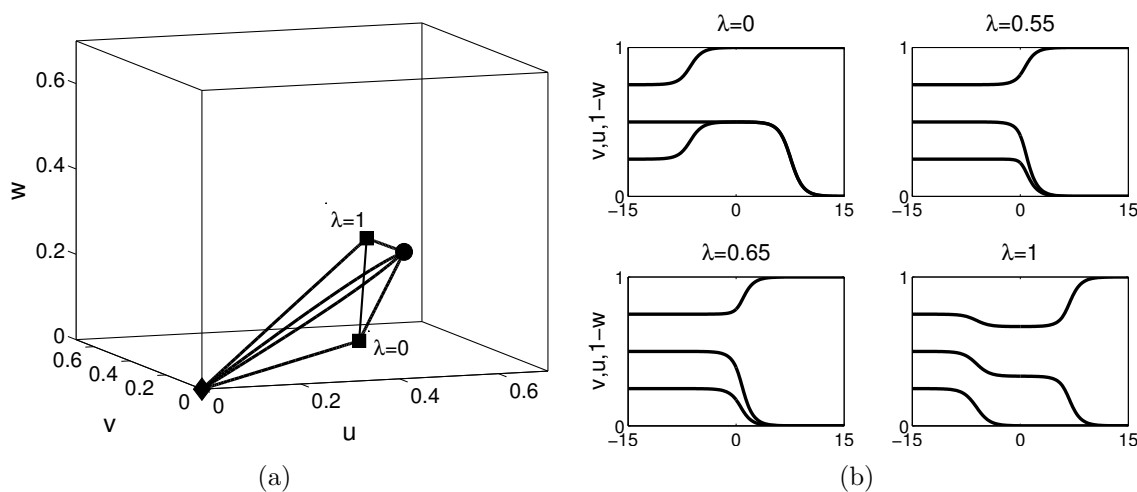


Abbildung 7.11: Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(g). Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien parametrisiert mit der konvexen Hülle zweier Sattelpunkte, dargestellt als dünne Linie.

(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	(u_m, v_m, w_m)	λ
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	$(0.5, 0.5, 0)$	0
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	–	0.55
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	–	0.65
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	$(0.33, 0, 0.33)$	1

Tabelle 7.9: Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.11.

gleichen Teilen aus perkolierendem und nichtperkolierendem Wasser besteht. Die Anfangsättigung ist $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, die Endsättigung ist $(u_r, v_r, w_r) = (0, 0, 0)$ und die beiden Sattelpunkte sind $(u_m, v_m, w_m) \in \{(0.67, 0.33, 0), (0, 0, 0.5)\}$. Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ erzeugt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in u steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.34$ zeigt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in u steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.44$ erzeugt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in w steht. Die

λ	m. fall. u	m. fall. v	m. fall. w	Über. u	Über. v	Über. w
$(0, 0.55)$	ja	nein	ja	nein	ja	nein
$(0.55, 0.65)$	ja	ja	ja	nein	nein	nein
$(0.65, 1)$	ja	ja	nein	nein	nein	ja

Tabelle 7.10: Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.11.

Trajektorie mit $\lambda = 1$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in w steht. Sie stellen die Bifurkationstrajektorien dar, so gibt es für $\lambda \in (0, 0.34)$ einen Überschuss in u , für $\lambda \in (0.34, 0.44)$ sind alle Wellen monoton fallend und für $\lambda \in (0.44, 1)$ gibt es einen Überschuss in w .

In Abbildung 7.10 sind die Phasenportraits und Sättigungsprofile bestimmter Trajektorien aus Tabelle 7.7 des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(f) dargestellt. Seine Bifurkationen stehen in Tabelle 7.8. Hier gilt immer, dass $S_1 = S_3$, d.h. dass die perkolierenden Phasen zu jeder Zeit die gleichen Sättigungen aufweisen. Die Anfangssättigung ist $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, die Endsättigung ist $(u_r, v_r, w_r) = (0.5, 0, 0)$ und die beiden Sattelpunkte sind $(u_m, v_m, w_m) \in \{(0.67, 0, 0), (0.33, 0, 0.33)\}$. Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in u und v steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.38$ erzeugt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in v steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.5$ zeigt eine Welle, die konstant in u ist. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.62$ erzeugt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in w steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 1$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in w und einen maximalen Unterschuss in u steht. Sie stellen die Bifurkationstrajektorien dar, so gibt es für $\lambda \in (0, 0.38)$ einen Überschuss in u und v , für $\lambda \in (0.38, 0.5)$ einen Überschuss in u , für $\lambda \in (0.5, 0.62)$ gibt es einen Unterschuss in u und für $\lambda \in (0.62, 1)$ gibt es einen Unterschuss in u und einen Überschuss in w . Die Wellen sind strenggenommen keine Bewässerungen, da die Anfangs- und Endwassersättigung identisch ist. Trotzdem werden sie hier besprochen, da sie das komplexe Verhalten zeigen, wenn man Wasser in perkolierend und nichtperkolierend aufspaltet. Weil sich die nichtperkolierenden Phasen ändern, können nun Über- und Unterschüsse in der Wassersättigung entstehen.

In Abbildung 7.11 sind die Phasenportraits und Sättigungsprofile bestimmter Trajektorien aus Tabelle 7.9 des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(g) dargestellt. Seine Bifurkationen stehen in Tabelle 7.10. Hier gilt immer, dass $S_1 = S_4$, d.h. dass die Sättigung des perkolierenden Wassers zu jeder Zeit mit der Sättigung des nichtperkolierenden Öls identisch ist. Die Anfangssättigung ist $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, die Endsättigung ist $(u_r, v_r, w_r) = (0, 0, 0)$ und die beiden Sattelpunkte sind $(u_m, v_m, w_m) \in \{(0.5, 0.5, 0), (0.33, 0, 0.33)\}$. Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ erzeugt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in v steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.55$ zeigt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in v steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.65$ erzeugt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in w steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 1$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in w und einen Terrassenpunkt in u steht. Sie stellen die Bifurkationstrajektorien dar, so gibt es für $\lambda \in (0, 0.55)$ einen Überschuss in v , für $\lambda \in (0.55, 0.65)$ sind alle Wellen monoton fallend und für $\lambda \in (0.65, 1)$ gibt es einen Überschuss in w .

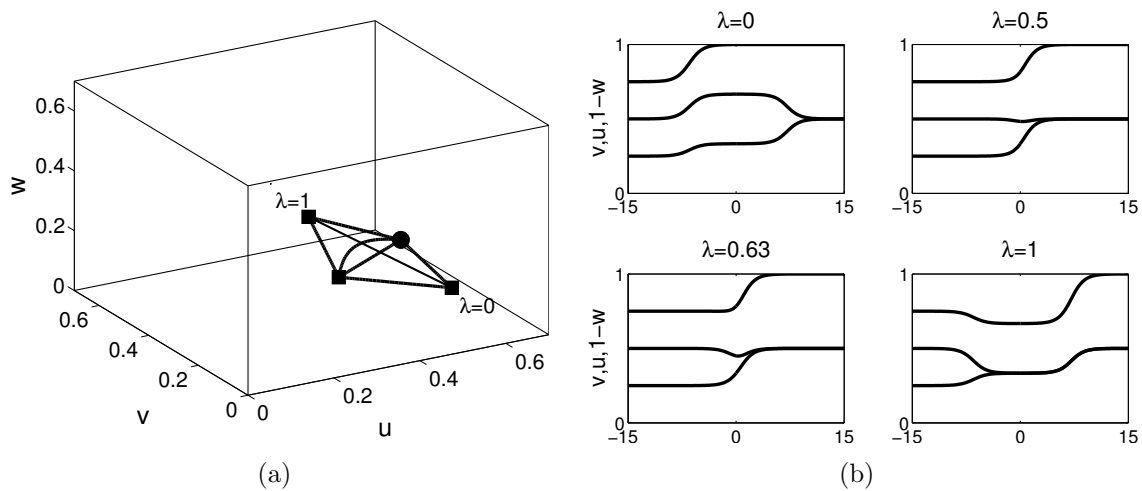


Abbildung 7.12: Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(h). Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien parametrisiert mit der konvexen Hülle zweier Sattelpunkte, dargestellt als dünne Linie.

(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	(u_m, v_m, w_m)	λ
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0.5, 0)$	$(0.67, 0.33, 0)$	0
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0.5, 0)$	—	0.5
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0.5, 0)$	—	0.63
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0.5, 0.5, 0)$	$(0.33, 0.33, 0.33)$	1

Tabelle 7.11: Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.12.

In Abbildung 7.12 sind die Phasenportraits und Sättigungsprofile bestimmter Trajektorien aus Tabelle 7.11 des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(h) dargestellt. Seine Bifurkationen stehen in Tabelle 7.12. Hier gilt immer, dass $S_2 = S_3$, d.h. dass die Sättigung des nichtperkolierenden Wassers zu jeder Zeit mit der Sättigung des perkolierenden Öls identisch ist. Die Anfangssättigung ist $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, die End-sättigung ist $(u_r, v_r, w_r) = (0.5, 0.5, 0)$ und die beiden Sattelpunkte sind $(u_m, v_m, w_m) \in$

λ	m. fall. u	m. fall. v	m. fall. w	Über. u	Über. v	Über. w
$(0, 0.5)$	nein	m. steigend	ja	ja	nein	nein
$(0.5, 0.63)$	nein	m. steigend	ja	nein	nein	nein
$(0.63, 1)$	nein	m. steigend	nein	nein	nein	ja

Tabelle 7.12: Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.12.

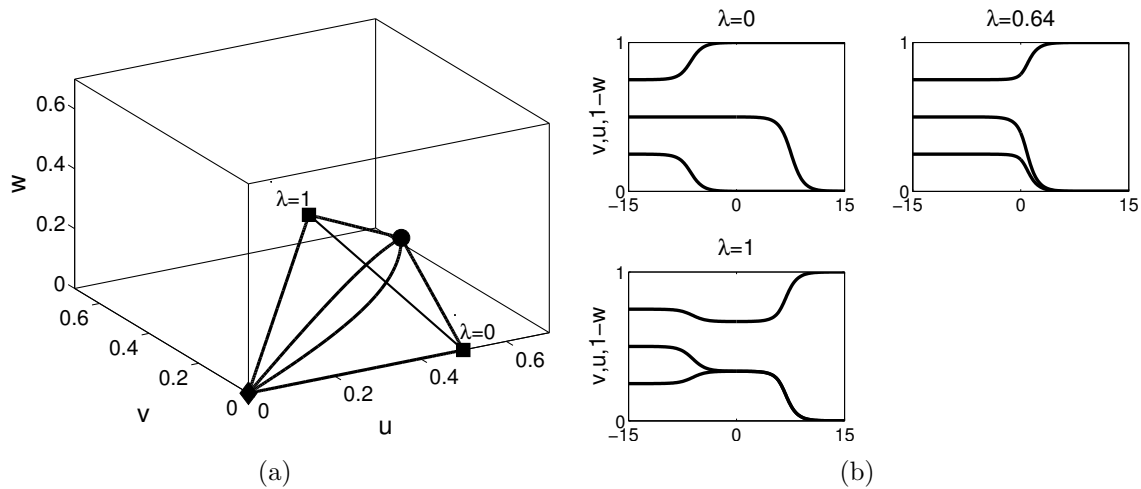


Abbildung 7.13: Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(i). Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien parametrisiert mit der konvexen Hülle zweier Sattelpunkte, dargestellt als dünne Linie.

(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	(u_m, v_m, w_m)	λ
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	$(0.5, 0, 0)$	0
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	—	0.64
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0)$	$(0.33, 0.33, 0.33)$	1

Tabelle 7.13: Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.13.

$\{(0.67, 0.33, 0), (0.33, 0.33, 0.33)\}$. Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in u und für einen steigenden Terrassenpunkt in v steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.5$ erzeugt eine Welle, die für eine konstante u -Sättigung steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.63$ zeigt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in w steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 1$ erzeugt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in w , einen maximalen Unterschuss in u und einem Terrassenpunkt in v steht. Sie stellen die Bifurkationstrajektorien dar, so gibt es für $\lambda \in (0, 0.5)$ einen Überschuss in u , für $\lambda \in (0.5, 0.63)$ einen Unterschuss in u und für $\lambda \in (0.63, 1)$ gibt es einen Unterschuss in u und einen Überschuss in w . Die Wel-

λ	m. fall. u	m. fall. v	m. fall. w	Über. u	Über. v	Über. w
$(0, 0.64)$	ja	ja	m. steigend	nein	nein	nein
$(0.64, 1)$	ja	nein	m. steigend	nein	ja	nein

Tabelle 7.14: Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.13.

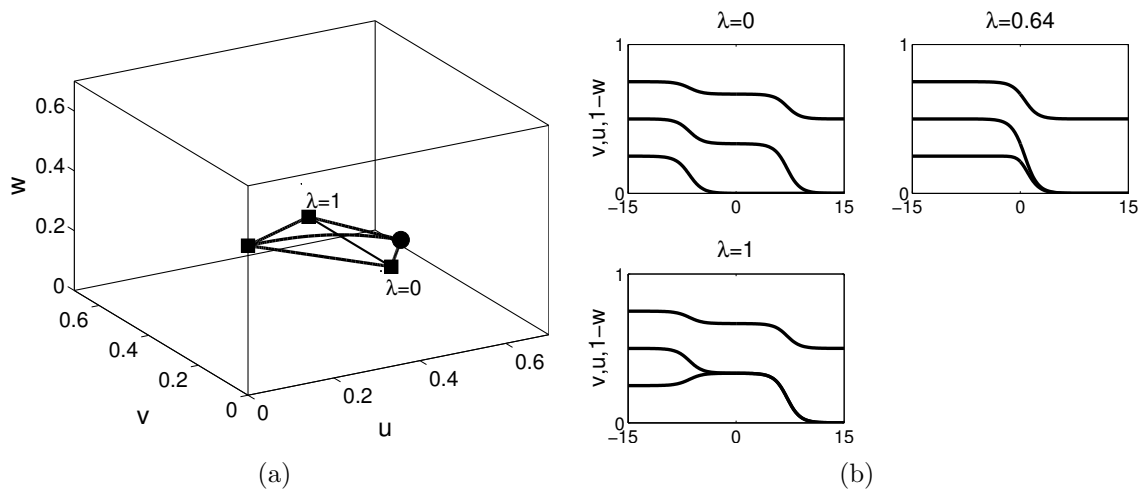


Abbildung 7.14: Phasenportraits und Sättigungsprofile des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(j). Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien parametrisiert mit der konvexen Hülle zweier Sattelpunkte, dargestellt als dünne Linie.

(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	(u_m, v_m, w_m)	λ
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0.5)$	$(0.33, 0, 0.33)$	0
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0.5)$	—	0.64
$(0.5, 0.25, 0.25)$	$(0, 0, 0.5)$	$(0.33, 0.33, 0.33)$	1

Tabelle 7.15: Links- und rechtsseitige Randwerte, Überschuss bzw. Terrassenpunkte und λ -Werte für die Trajektorien und Sättigungsprofile in Abbildung 7.14.

len sind streng genommen keine Bewässerungen, da die Anfangs- und Endwassersättigung identisch ist. Trotzdem werden sie hier besprochen, da sie das komplexe Verhalten zeigen, wenn man Wasser in perkolierend und nichtperkolierend aufspaltet. Weil sich die nichtperkolierenden Phasen ändern, können nun Über- und Unterschüsse in der Wassersättigung entstehen.

In Abbildung 7.13 sind die Phasenportraits und Sättigungsprofile bestimmter Trajektorien aus Tabelle 7.13 des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(i) dargestellt. Seine

λ	m. fall. u	m. fall. v	m. fall. w	Über. u	Über. v	Über. w
$(0, 0.64)$	ja	ja	ja	nein	nein	nein
$(0.64, 1)$	ja	nein	nein	nein	ja	ja

Tabelle 7.16: Bifurkationen mit Parameter λ für Abbildung 7.14.

Bifurkationen stehen in Tabelle 7.14. Hier gilt immer, dass $S_2 = S_4$, d.h. dass die nichtperkolierenden Sättigungen gleich sind. Die Anfangssättigung ist $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, die Endsättigung ist $(u_r, v_r, w_r) = (0, 0, 0)$ und die beiden Sattelpunkte sind $(u_m, v_m, w_m) \in \{(0.5, 0, 0), (0.33, 0.33, 0.33)\}$. Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ zeigt eine Welle, die für eine zu den parallel laufenden monotonen v - und w -Wellen nach vorne verschobene monotone u -Welle steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.64$ erzeugt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in v und w steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 1$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in v und w und einen Terrassenpunkt in u steht. Sie stellen die Bifurkationstrajektorien dar, so sind die Wellen für $\lambda \in (0, 0.64)$ monoton fallend und für $\lambda \in (0.64, 1)$ gibt es einen Überschuss in v und w .

In Abbildung 7.14 sind die Phasenportraits und Sättigungsprofile bestimmter Trajektorien aus Tabelle 7.15 des zweidimensionalen Systems aus Abbildung 7.8(j) dargestellt. Seine Bifurkationen stehen in Tabelle 7.16. Hier gilt immer, dass $S_3 = S_4$, d.h. dass die Ölsättigung zu gleichen Teilen aus perkolierendem und nichtperkolierendem Öl besteht. Die Anfangssättigung ist $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25)$, die Endsättigung ist $(u_r, v_r, w_r) = (0, 0, 0.5)$ und die beiden Sattelpunkte sind $(u_m, v_m, w_m) \in \{(0.33, 0, 0.33), (0.33, 0.33, 0.33)\}$. Die Trajektorie mit $\lambda = 0$ zeigt eine Welle, die für einen Terrassenpunkt in u und w steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 0.64$ erzeugt eine Welle, die für einen minimalen Überschuss in v steht. Die Trajektorie mit $\lambda = 1$ zeigt eine Welle, die für einen maximalen Überschuss in v und einen Terrassenpunkt in u und w steht. Sie stellen die Bifurkationstrajektorien dar, so sind die Wellen für $\lambda \in (0, 0.64)$ monoton und für $\lambda \in (0.64, 1)$ gibt es einen Überschuss in v .

Zusammenfassend gibt es also drei unterschiedliche zweidimensionale Bewässerungssysteme, wovon es wiederum drei verschiedene gibt. Bei den ersten ist eine der drei Sättigungen S_1, S_2, S_4 nicht vorhanden. Das Medium ist anfangs komplett mit perkolierendem Öl gefüllt. Nach der Welle existieren die drei vorhandenen Sättigungen zu gleichen Teilen. Bei den zweiten Systemen sind zwei der drei Sättigungen S_1, S_2, S_4 identisch. Das Medium ist anfangs komplett mit perkolierendem Öl gefüllt. Nach der Welle existieren die vier Sättigungen zu gleichen Teilen. Bei den dritten Systemen ist eine der drei Sättigungen S_1, S_2, S_4 identisch mit S_3 . Das Medium ist anfangs zur Hälfte mit perkolierendem Öl und einer der anderen drei Phasen gefüllt. Nach der Welle existieren die vier Sättigungen zu gleichen Teilen. Davon sind jedoch die zwei Wellen, bei denen das Medium anfangs zur Hälfte mit perkolierendem oder nichtperkolierendem Wasser gefüllt ist, streng genommen keine Bewässerungswelle, da die Wassersättigung vor und nach der Welle identisch ist. Also hat man insgesamt sieben verschiedene Randbedingungen, die eine echte zweidimensionale Bewässerungswelle mit Geschwindigkeit $c = 1$ und $k_u = k_v = k_w = 0$ zulassen. Jede dieser Randbedingungen hat wieder einen Freiheitsgrad, der verschiedene Profile zulässt.

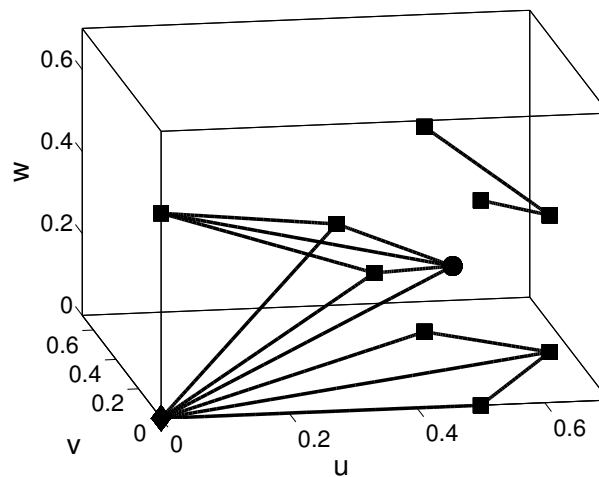


Abbildung 7.15: Phasenportraits für die 15 eindimensionalen Bewässerungswellen. Diamanten, Kugeln und Würfel zeigen stabile und instabile Fixpunkte und Sattelpunkte. Die fetten Linien sind Trajektorien.

7.2.3.2 Eindimensionale Untermannigfaltigkeiten und ihre Lösungen

In Tabelle 7.17 sind die 25 eindimensionalen linearen invarianten Untermannigfaltigkeiten dargestellt, wovon 15 eine Bewässerungsrelevanz besitzen. Sie sind Schnittgeraden der zwei-dimensionalen invarianten Ebenen aus Abbildung 7.8. Die Phasenportraits und ihre Sättigungsprofile sind in Abbildung 7.15 und 7.16 dargestellt. Desweiteren liegen auf jeder dieser Geraden drei Fixpunkte. Es existieren vier verschiedene Klassen.

Bei der ersten Klasse existieren nur zwei der vier Sättigungen. Damit gibt es sechs Geraden, wobei nur zwei eine Bewässerungsrelevanz besitzen. Es befinden sich zwei stabile Fixpunkte und ein Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^+ auf der Geraden. Die stabilen Fixpunkte sind natürlich auch stabil auf der Geraden, der Sattelpunkt dient als instabiler Fixpunkt. Im Phasenportrait 7.15 sieht man die zwei Linien auf der (u, v) -Ebene, wie sie den Ursprung mit den Punkten $(0.5, 0, 0)$ und $(0.5, 0.5, 0)$ verbinden.

Die zwei Wellen sind in Abbildung 7.16(a) und 7.16(b) gezeigt. Sie bewässern ein komplett trockenes Medium entweder zur Hälfte mit nichtperkolierendem oder perkolierendem Wasser. Wie schon vorher beschrieben, unterscheiden sich perkolierende und nichtperkolierende Phasen unter den getroffenen Vereinfachungen und Parametern nicht. Deswegen ist die Wasserwelle mit perkolierendem oder nichtperkolierendem Wasser identisch. Dieses System ist nichts anderes als ein Eingleichungssystem mit den zwei Sättigungen Wasser und Öl.

Bei der zweiten Klasse existieren drei der vier Sättigungen, wovon zusätzlich zwei identisch sind. Damit gibt es zwölf Geraden, wobei neun eine Bewässerungsrelevanz besitzen. Es befindet sich ein stabiler Fixpunkt, ein Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^+ und ein Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^-

Abb.	Abb. 2dim	phys. Erhalt.	Fixpunkte	Bew.rel.
-	7.8(a),7.8(b)	$S_1 = 0, S_2 = 0$	i,iv, vi	nein
-	7.8(a),7.8(c)	$S_1 = 0, S_3 = 0$	iii,iv, x	nein
7.16(a)	7.8(a),7.8(d)	$S_1 = 0, S_4 = 0$	i,iii,viii	ja
-	7.8(b),7.8(c)	$S_2 = 0, S_3 = 0$	ii,iv,ix	nein
7.16(b)	7.8(b),7.8(d)	$S_2 = 0, S_4 = 0$	i,ii,vii	ja
-	7.8(c),7.8(d)	$S_3 = 0, S_4 = 0$	ii,iii,xi	nein
-	7.8(a),7.8(h)	$S_1 = 0, S_2 = S_3$	iv,viii,xiii	nein
7.16(c)	7.8(a),7.8(i)	$S_1 = 0, S_2 = S_4$	i,x,xiii	ja
7.16(d)	7.8(a),7.8(j)	$S_1 = 0, S_3 = S_4$	iii,vi,xiii	ja
-	7.8(b),7.8(f)	$S_2 = 0, S_1 = S_3$	iv,vii,xii	nein
7.16(e)	7.8(b),7.8(g)	$S_2 = 0, S_1 = S_4$	i,ix,xii	ja
7.16(f)	7.8(b),7.8(j)	$S_2 = 0, S_3 = S_4$	ii,vi,xii	ja
-	7.8(c),7.8(e)	$S_3 = 0, S_1 = S_2$	iv,xi,xv	nein
7.16(g)	7.8(c),7.8(g)	$S_3 = 0, S_1 = S_4$	iii,ix,xv	ja
7.16(h)	7.8(c),7.8(i)	$S_3 = 0, S_2 = S_4$	ii,x,xv	ja
7.16(i)	7.8(d),7.8(e)	$S_4 = 0, S_1 = S_2$	i,xi,xiv	ja
7.16(j)	7.8(d),7.8(f)	$S_4 = 0, S_1 = S_3$	iii,vii,xiv	ja
7.16(k)	7.8(d),7.8(h)	$S_4 = 0, S_2 = S_3$	ii,viii,xiv	ja
-	7.8(e),7.8(f),7.8(h)	$S_1 = S_2 = S_3$	iv,v,xiv	nein
7.16(l)	7.8(f), 7.8(g),7.8(j)	$S_1 = S_3 = S_4$	iii,v,xii	ja
7.16(m)	7.8(e), 7.8(g),7.8(i)	$S_1 = S_2 = S_4$	i,v,xv	ja
7.16(n)	7.8(h),7.8(i),7.8(j)	$S_2 = S_3 = S_4$	ii,v,xiii	ja
7.16(o)	7.8(e),7.8(j)	$S_1 = S_2, S_3 = S_4$	v,vi,xi	ja
-	7.8(f),7.8(i)	$S_1 = S_3, S_2 = S_4$	v,vii,x	nein
-	7.8(g),7.8(h)	$S_1 = S_4, S_2 = S_3$	v,viii,ix	nein

Tabelle 7.17: Abbildung ihrer Sättigungsprofile, Abbildungen ihrer zweidimensionalen Untermanigfaltigkeiten aus Abbildung 7.8, physikalische Erhaltung, Fixpunkte und Bewässerungsrelevanz der eindimensionalen Untermanigfaltigkeiten.

auf der Geraden. Der stabile Fixpunkt bleibt stabil auf der Geraden, der Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^+ dient als stabiler Fixpunkt und der Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^- ist instabil auf der Geraden. Im Phasenportrait 7.15 sieht man die ersten zwei Linien, wie sie den instabilen Fixpunkt mit dem Ursprung und dem Punkt auf der w -Achse verbinden. Die nächsten zwei Linien

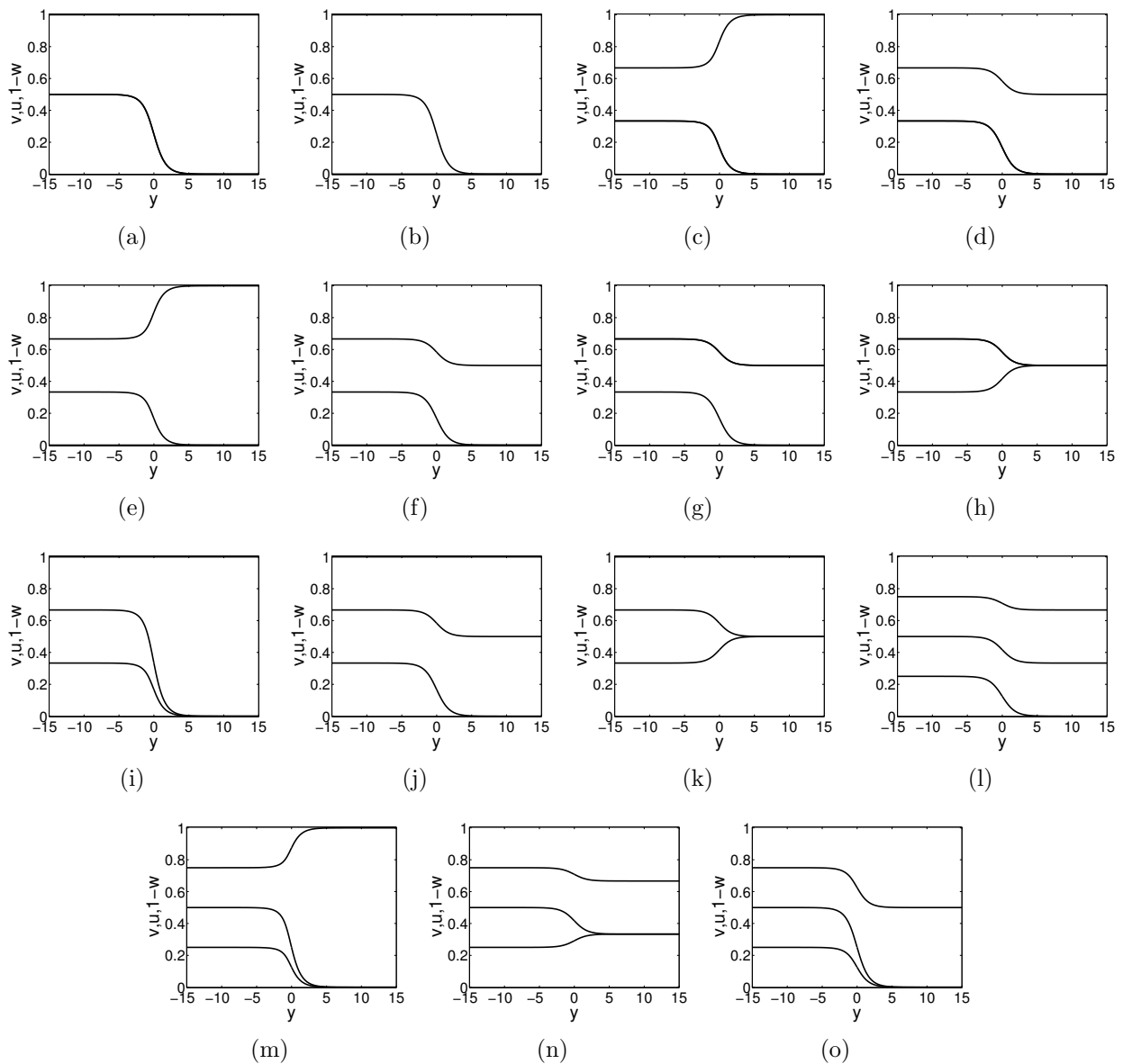


Abbildung 7.16: Sättigungsprofile der 15 verschiedenen eindimensionalen Bewässerungswellen.

verbinden den Punkt $(0.33, 0, 0.33)$ mit dem Ursprung und dem Punkt auf der w -Achse. Desweiteren verbinden die zwei folgenden Linien den Punkt $(0.67, 0.33, 0.33)$ mit den Punkten $(0.5, 0, 0.5)$ und $(0.5, 0.5, 0.5)$. Die letzten drei Linien verbinden auf der (u, v) -Ebene den Punkt $(0.67, 0.33, 0)$ mit dem Ursprung und den Punkten $(0.5, 0, 0)$ und $(0.5, 0.5, 0)$.

Die neun Wellen sind in Abbildungen 7.16(c) bis 7.16(k) gezeigt.

In Abbildungen 7.16(c) und 7.16(d) existiert kein perkolierendes Wasser und das nichtperkolierende Öl ist mit dem nichtperkolierenden Wasser oder perkolierenden Öl identisch. Die Welle füllt das trockene Medium, das entweder komplett mit perkolierendem Öl oder zur Hälfte

te mit perkolierendem und nichtperkolierendem Öl gefüllt ist, zu einem Drittel mit nichtperkolierendem Wasser. Die übrigen zwei Drittel bestehen jeweils zur Hälfte aus perkolierendem und nichtperkolierendem Öl.

In Abbildungen 7.16(e) und 7.16(f) existiert kein nichtperkolierendes Wasser und das nichtperkolierende Öl ist mit dem perkolierenden Wasser oder Öl identisch. Die Welle füllt das trockene Medium, das entweder komplett mit perkolierendem Öl oder zur Hälfte mit perkolierendem und nichtperkolierendem Öl gefüllt ist, zu einem Drittel mit perkolierendem Wasser. Die übrigen zwei Drittel bestehen jeweils zur Hälfte aus perkolierendem und nichtperkolierendem Öl. Auch hier erkennt man die Symmetrie in den perkolierenden und nichtperkolierenden Wasserlösungen.

In Abbildungen 7.16(g) und 7.16(h) existiert kein perkolierendes Öl und das nichtperkolierende Öl ist mit dem perkolierenden oder nichtperkolierenden Wasser identisch. Die Welle füllt das zur Hälfte mit nichtperkolierendem Öl und perkolierendem oder nichtperkolierendem Wasser gefüllten Medium zu je einem Drittel mit perkolierendem und nichtperkolierendem Wasser und nichtperkolierendem Öl.

In Abbildungen 7.16(i), 7.16(j) und 7.16(k) existiert kein nichtperkolierendes Öl. Entweder sind die Wasserphasen identisch oder die perkolierenden Phasen sind identisch oder das nichtperkolierende Wasser gleicht dem perkolierenden Öl. Das Medium ist entweder komplett trocken oder es ist zur Hälfte mit perkolierendem Öl und perkolierendem oder nichtperkolierendem Wasser gefüllt. Die Welle füllt es zu je einem Drittel mit perkolierendem und nichtperkolierendem Wasser und perkolierendem Öl.

Bei der dritten Klasse sind drei der vier Sättigungen identisch. Damit gibt es vier Geraden, wobei drei eine Bewässerungsrelevanz besitzen. Es befindet sich ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt und ein Sattelpunkt aus \mathcal{S}_m^- auf der Geraden. Der stabile und instabile Fixpunkt bleibt stabil bzw. instabil auf der Geraden, der Sattelpunkt dient als stabiler Fixpunkt. Im Phasenportrait 7.15 sieht man die drei Linien, wie sie den instabilen Fixpunkt mit dem Punkt $(0.33, 0, 0.33)$, dem Ursprung und dem Punkt $(0.33, 0.33, 0.33)$ verbinden.

In Abbildung 7.16(l) sind die Ölphasen mit dem perkolierenden Wasser identisch. Das Medium ist anfangs mit je einem Drittel dieser Phasen gefüllt. Nach der Welle existieren alle vier Phasen zu gleichen Teilen. In Abbildung 7.16(m) sind die Wasserphasen mit dem nichtperkolierenden Öl identisch. Das Medium ist anfangs komplett trocken. Nach der Welle existieren alle vier Phasen zu gleichen Teilen. In Abbildung 7.16(n) sind die Ölphasen mit dem nichtperkolierenden Wasser identisch. Das Medium ist anfangs mit je einem Drittel dieser Phasen gefüllt. Nach der Welle existieren alle vier Phasen zu gleichen Teilen.

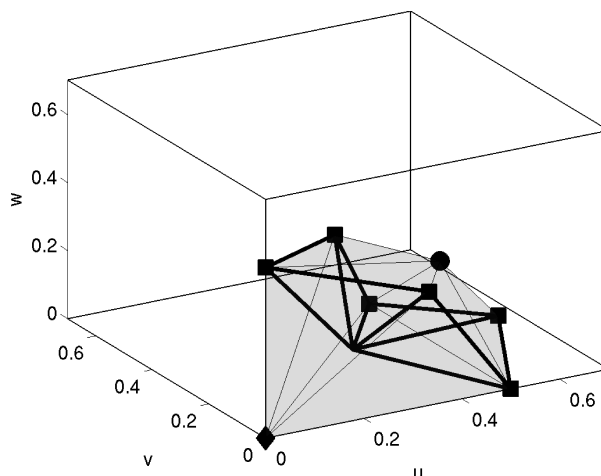


Abbildung 7.17: Fixpunkte und Definitionsbereich (grau) des für die Bewässerung interessanten Systems mit Parametern aus Tabelle 7.2. Es sind ein stabiler (Diamant) und ein instabiler (Kugel) Fixpunkt und sechs Sattelpunkte (Würfel) zu sehen. Die Ränder der konvexen Hüllen der Teilsysteme aus Tabelle 7.19 sind als fette schwarze Linien dargestellt. Jede Trajektorie, die den instabilen mit dem stabilen Fixpunkt verbindet, schneidet diese konvexen Hüllen genau einmal.

Bei der vierten Klasse sind jeweils zwei der vier Sättigungen identisch. Damit gibt es drei Geraden, wobei eine Bewässerungsrelevanz besitzt. Es befindet sich ein instabiler Fixpunkt und zwei Sattelpunkte aus \mathcal{S}_m^+ auf der Geraden. Der instabile Fixpunkt bleibt instabil auf der Geraden, die Sattelpunkte dienen als stabile Fixpunkte. Im Phasenportrait 7.15 sieht man die Linie, wie sie den instabilen Fixpunkt mit dem Punkt auf der w -Achse verbindet.

In Abbildung 7.16(o) sind jeweils die Wasser und Ölphasen identisch. Das Medium ist anfangs jeweils zur Hälfte mit den Ölphasen gefüllt. Nach der Welle existieren alle vier Phasen zu gleichen Teilen.

7.2.3.3 Dreidimensionale Untermannigfaltigkeiten und ihre Lösungen

Nachdem die ein und zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten und deren Bewässerungssysteme besprochen wurden, ist es nun möglich, die dreidimensionalen Untermannigfaltigkeiten zu besprechen.

Abbildung 7.17 zeigt die Fixpunkte und den Definitionsbereich des für die Bewässerung interessanten Systems mit Parametern aus Tabelle 7.2. Alle zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten, die dabei als Begrenzungen eine Rolle spielen, sind in Tabelle 7.18 aufgelistet. So wird der Bewässerungsbereich von den Untermannigfaltigkeiten aus Abbildungen 7.8(a), 7.8(f), 7.8(b), 7.8(h), 7.8(d) und 7.8(j) begrenzt. Daraus folgt, dass zu jeder Zeit einer

Abb.	phys. Erhalt.	Fixpunkte	Ort
7.8(a)	$S_1 = 0$	i,vi,viii,xiii	Rand links hinten
7.8(f)	$S_1 = S_3$	v,vii,xii,xiv	Rand rechts vorne
7.8(b)	$S_2 = 0$	i,vi,vii,xii	Rand links vorne
7.8(h)	$S_2 = S_3$	v,viii,xiii,xiv	Rand rechts hinten
7.8(d)	$S_4 = 0$	i,vii,viii,xiv	Rand unten
7.8(j)	$S_4 = S_3$	v,vi,xii,xiii	Rand oben
7.8(e)	$S_1 = S_2$	i,v,vi,xiv	innen von links vorne nach rechts hinten
7.8(g)	$S_1 = S_4$	i,v,viii,xii	innen von oben vorne nach hinten unten
7.8(i)	$S_2 = S_4$	i,v,vii,xiii	innen von unten vorne nach hinten oben

Tabelle 7.18: Abbildung, physikalische Erhaltung, Fixpunkte und Ort der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.17.

	phys. Erhalt.	Fixpunkte
a	$0 < S_1 < S_2 < S_4 < S_3$	i,v,vi,xiii
b	$0 < S_1 < S_4 < S_2 < S_3$	i,v,viii,xiii
c	$0 < S_2 < S_1 < S_4 < S_3$	i,v,vi,xii
d	$0 < S_2 < S_4 < S_1 < S_3$	i,v,vii,xii
e	$0 < S_4 < S_1 < S_2 < S_3$	i,v,viii,xiv
f	$0 < S_4 < S_2 < S_1 < S_3$	i,v,vii,xiv

Tabelle 7.19: Physikalische Erhaltung und Fixpunkte der dreidimensionalen invarianten Teilbereiche des Bewässerungsbereiches aus Abbildung 7.17.

Bewässerung die Sättigung von perkolierendem und nichtperkolierendem Wasser und nichtperkolierendem Öl kleiner gleich der perkolierenden Ölsättigung ist. Desweiteren existieren im Inneren begrenzende Ebenen aus Abbildungen 7.8(e), 7.8(g) und 7.8(i), die den Bereich in insgesamt sechs invariante dreidimensionale Teilbereiche teilt. Tabelle 7.19 gibt die physikalische Erhaltung und die Fixpunkte der dreidimensionalen invarianten Teilbereiche des Bewässerungsbereiches aus Abbildung 7.17 an. Die Teilbereiche sind konvexe Hüllen mit den Fixpunkten als Ecken, wobei die Punkte $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ und $(u, v, w) = (0.5, 0.25, 0.25)$ als stabile und instabile Fixpunkte immer dabei sind. Die anderen zwei Ecken sind Sattelpunkte. Die Trajektorien können diese Teilbereiche nicht verlassen. Damit gilt für jede Welle eine der sechs physikalischen Erhaltungen in Tabelle 7.19. Die Trajektorien können somit für jeden Teilbereich getrennt erörtert werden.

Um die Trajektorien eindeutig zu bestimmen, müssen wie bei den zweidimensionalen Systemen Untermannigfaltigkeiten gefunden werden, die von jeder Trajektorie genau einmal geschnitten werden. Bei den zweidimensionalen Systemen ist dies eine eindimensionale konvexe Hülle, d.h. eine Verbindungslinie der zwei Sattelpunkte. Diesmal ist dies eine zweidimensionale konvexe Hülle mit drei Ecken, wovon zwei Sattelpunkte sind und der dritte auf der Verbindungslinie des stabilen und instabilen Fixpunktes liegt. Einfachheitshalber wird er hier durch den Mittelpunkt $(u_d, v_d, w_d) = (0.25, 0.125, 0.125)$ bestimmt. Damit wird jede Trajektorie in ihrem jeweiligen Teilbereich durch zwei Variablen (λ, μ) definiert. Für diese gilt

$$\lambda(u_n, v_n, w_n) + \mu(u_m, v_m, w_m) + (1 - \lambda - \mu)(u_d, v_d, w_d) = (u_0, v_0, w_0), \quad (7.36)$$

mit $0 \leq \lambda, \mu, (1 - \lambda - \mu) \leq 1$. Die Punkte (u_n, v_n, w_n) und (u_m, v_m, w_m) stellen die zwei Sattelpunkte dar und (u_0, v_0, w_0) ist der Schnittpunkt der Trajektorie mit der konvexen Hülle der drei Punkte $(u_n, v_n, w_n), (u_m, v_m, w_m), (u_d, v_d, w_d)$. Die Ränder der konvexen Hüllen der Teilsysteme sind in Abbildung 7.17 als fette Linien dargestellt.

In Abbildung 7.18 ist die Klassifizierung der Trajektorien auf den sechs unterschiedlichen dreidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Tabelle 7.19 mit Parametern λ, μ der jeweiligen konvexen Hülle dargestellt. Der Ursprung steht immer für den Punkt (u_d, v_d, w_d) und die Eckpunkte stehen für die durch römische Zahlen in Tabelle 7.3 gekennzeichneten Sattelpunkte. Die horizontal schwarz, die diagonal dunkelgrau und die vertikal hellgrau schraffierten Flächen zeigen die Überschussregionen in S_1, S_2, S_4 . Auf den fett schraffierten Flächen existieren doppelte Überschüsse. Die graue Fläche zeigt Überschüsse in der Wassersättigung.

Beispiele unterschiedlicher Profilklassen sind in Abbildungen 7.20, 7.19 und 7.21 gezeigt. Dabei nehmen die Variablen (λ, μ) jeweils die Werte $(0.4, 0.4)$, $(0.8, 0.02)$ bzw. $(0.499, 0.499)$ an.

In Abbildung 7.18(a) ist die Klassifizierung für das Teilgebiet a angegeben, d.h. es gilt überall $0 < S_1 < S_2 < S_4 < S_3$. Es können vier Bereiche identifiziert werden. Der erste Bereich befindet sich um den Ursprung. Dort sind alle Wellen monoton fallend und damit topologisch äquivalent zu Abbildung 7.16(m). Der zweite Bereich ist vertikal hellgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_4 . Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.19(a) dargestellt. Der dritte Bereich ist vertikal hellgrau und diagonal dunkelgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 und S_4 . Dies wird in Abbildung 7.20(a) gezeigt. Der vierte Bereich ist vertikal hellgrau und diagonal dunkelgrau fett schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_4 und ein doppelter Überschuss in S_2 . Dabei unterscheidet

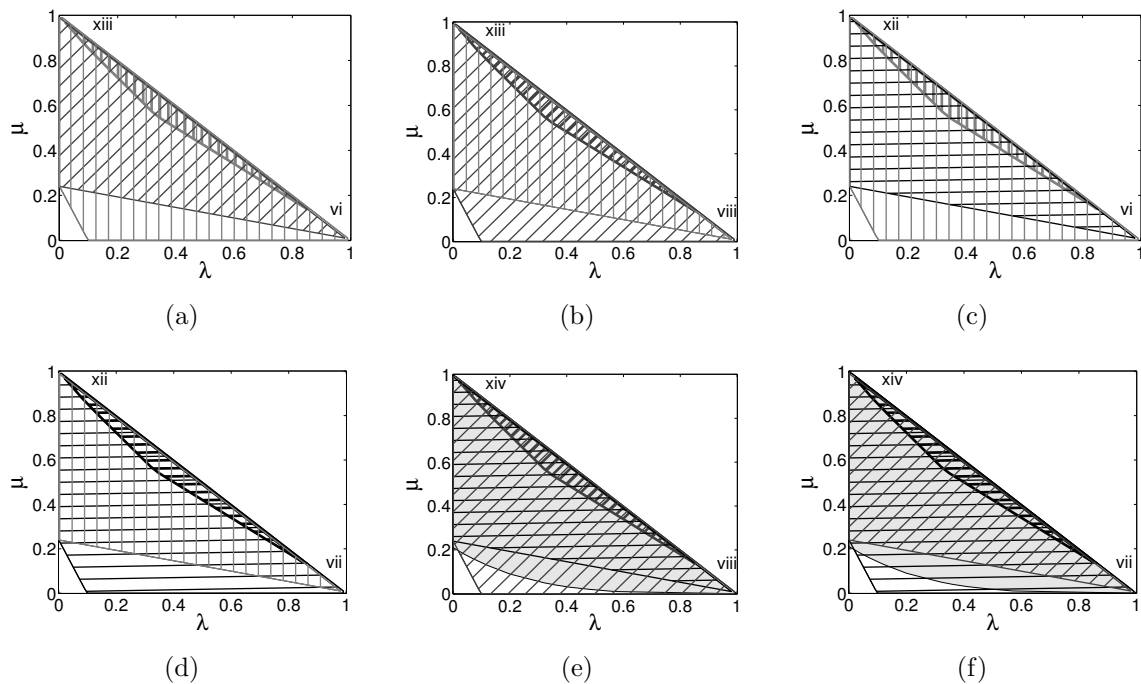


Abbildung 7.18: Klassifizierung der Sättigungsprofile auf den sechs unterschiedlichen dreidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Tabelle 7.19 mit Parametern λ, μ der jeweiligen konvexen Hülle. Der Ursprung steht immer für den Punkt (u_d, v_d, w_d) und die Eckpunkte stehen für die durch römische Zahlen in Tabelle 7.3 gekennzeichneten Sattelpunkte. Die horizontal schwarz, die diagonal dunkelgrau und die vertikal hellgrau schraffierten Flächen zeigen die Überschussregionen in S_1, S_2, S_4 . Auf den fett schraffierten Flächen existieren doppelte Überschüsse. Die graue Fläche zeigt Überschüsse in der Wassersättigung.

sich ein doppelter Überschuss vom einfachen Überschuss durch seine zwei Wendepunkte im Sättigungsprofil links vom Maximum. Das Profil ist in Abbildung 7.21(a) dargestellt.

In Abbildung 7.18(b) ist die Klassifizierung für das Teilgebiet b angegeben, d.h. es gilt überall $0 < S_1 < S_4 < S_2 < S_3$. Es können vier Bereiche identifiziert werden. Der erste Bereich befindet sich um den Ursprung. Dort sind alle Wellen monoton fallend und damit topologisch äquivalent zu Abbildung 7.16(m). Der zweite Bereich ist diagonal dunkelgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 . Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.19(b) dargestellt. Der dritte Bereich ist diagonal dunkelgrau und vertikal hellgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 und S_4 . Dies wird in Abbildung 7.20(b) gezeigt. Der vierte Bereich ist diagonal dunkelgrau und vertikal hellgrau fett schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 und ein doppelter Überschuss in S_4 . Das Profil ist in Abbildung 7.21(b) dargestellt.

In Abbildung 7.18(c) ist die Klassifizierung für das Teilgebiet c angegeben, d.h. es gilt überall

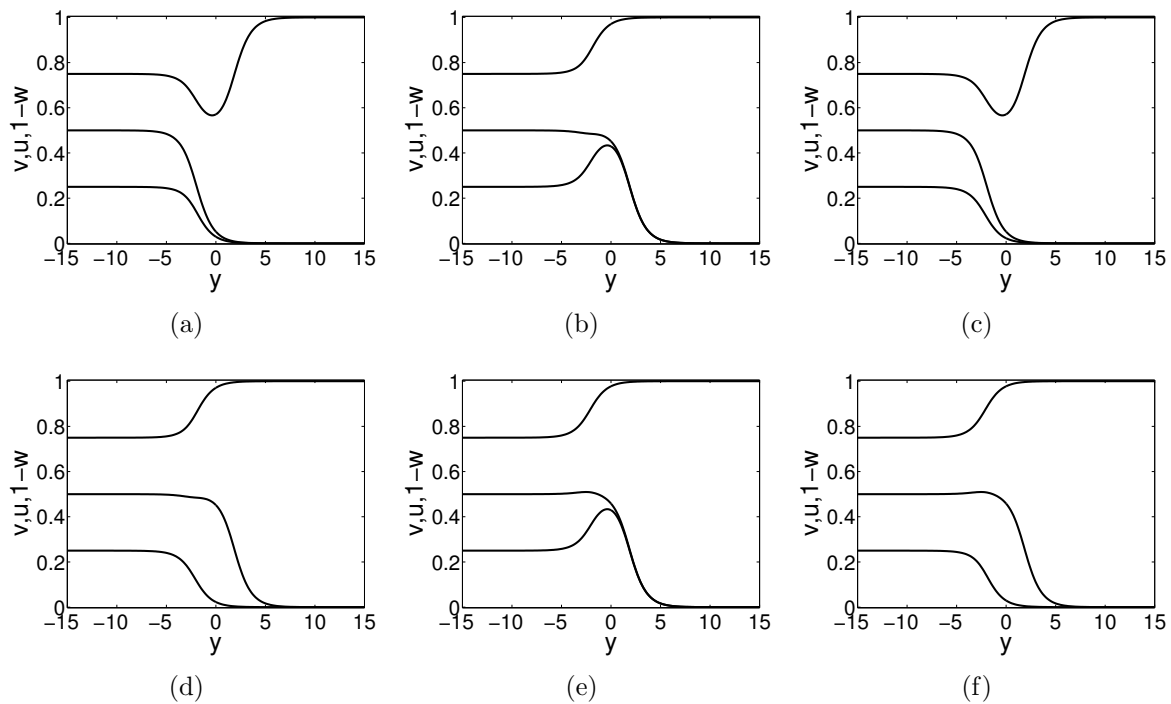


Abbildung 7.19: Für jedes Teilsystem ein Sättigungsprofil mit einem Überschuss in einer Phase jeweils mit Variablen $(\lambda, \mu) = (0.8, 0.02)$.

$0 < S_2 < S_1 < S_4 < S_3$. Es können vier Bereiche identifiziert werden. Der erste Bereich befindet sich um den Ursprung. Dort sind alle Wellen monoton fallend und damit topologisch äquivalent zu Abbildung 7.16(m). Der zweite Bereich ist vertikal hellgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_4 . Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.19(c) dargestellt. Der dritte Bereich ist vertikal hellgrau und horizontal schwarz schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 und S_4 . Dies wird in Abbildung 7.20(c) gezeigt. Der vierte Bereich ist vertikal hellgrau fett und horizontal schwarz schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 und ein doppelter Überschuss in S_4 . Das Profil ist in Abbildung 7.21(c) dargestellt.

In Abbildung 7.18(d) ist die Klassifizierung für das Teilgebiet d angegeben, d.h. es gilt überall $0 < S_2 < S_4 < S_1 < S_3$. Es können vier Bereiche identifiziert werden. Der erste Bereich befindet sich um den Ursprung. Dort sind alle Wellen monoton fallend und damit topologisch äquivalent zu Abbildung 7.16(m). Der zweite Bereich ist horizontal schwarz schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 . Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.19(d) dargestellt. Der dritte Bereich ist horizontal schwarz und vertikal hellgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 und S_4 . Dies wird in Abbildung 7.20(d) gezeigt. Der vierte Bereich ist horizontal schwarz fett und vertikal hellgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_4 und ein doppelter Überschuss in S_1 . Das Profil ist in Abbildung 7.21(d)

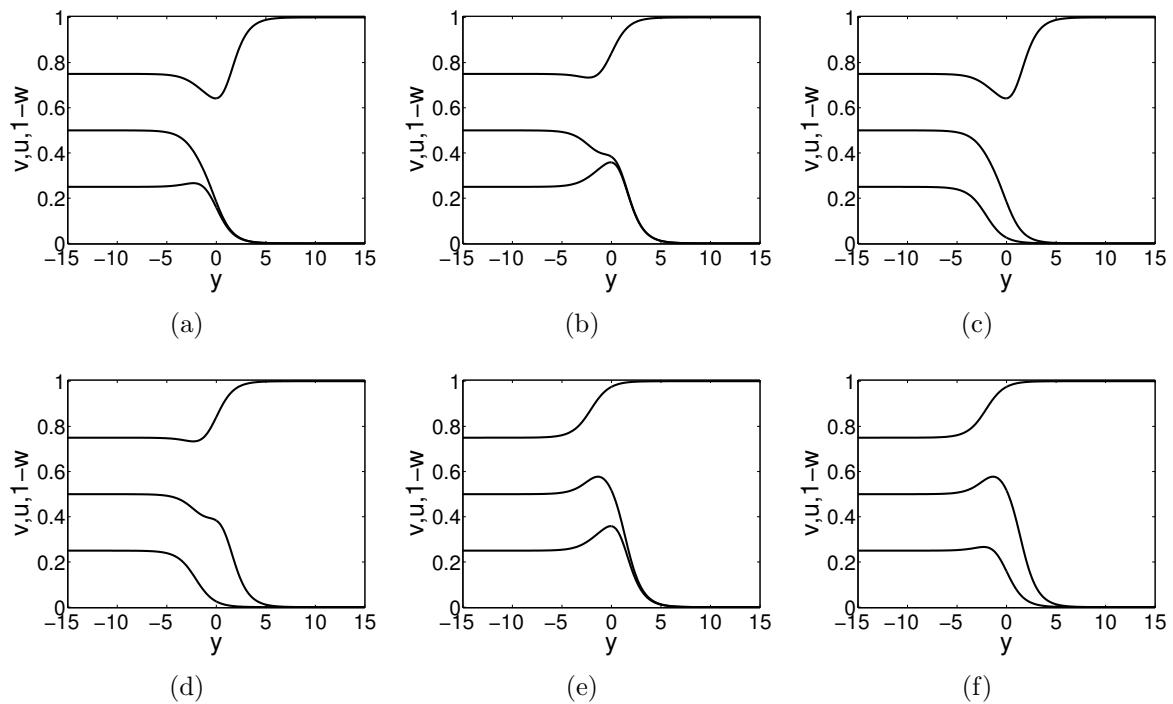


Abbildung 7.20: Für jedes Teilsystem ein Sättigungsprofil mit einem Überschuss in zwei Phasen jeweils mit Variablen $(\lambda, \mu) = (0.4, 0.4)$.

dargestellt.

In Abbildung 7.18(e) ist die Klassifizierung für das Teilgebiet e angegeben, d.h. es gilt überall $0 < S_4 < S_1 < S_2 < S_3$. Es können fünf Bereiche identifiziert werden. Der erste Bereich befindet sich um den Ursprung. Dort sind alle Wellen monoton fallend und damit topologisch äquivalent zu Abbildung 7.16(m). Der zweite Bereich ist diagonal dunkelgrau schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 , der jedoch nicht ausreichend ist, die abnehmende perkolierende Wassersättigung zu ersetzen. Der dritte Bereich ist diagonal dunkelgrau schraffiert und hat einen grauen Hintergrund. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 , der mit einem Überschuss in der Wassersättigung einhergeht. Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.19(e) dargestellt. Der vierte Bereich ist diagonal dunkelgrau und horizontal schwarz schraffiert und hat einen grauen Hintergrund. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 und S_2 und damit ein Überschuss in der Wassersättigung. Dies wird in Abbildung 7.20(e) gezeigt. Der fünfte Bereich ist diagonal dunkelgrau fett und horizontal schwarz schraffiert und hat einen grauen Hintergrund. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 und ein doppelter Überschuss in S_2 und damit ein Überschuss in der Wassersättigung. Das Profil ist in Abbildung 7.21(e) dargestellt.

In Abbildung 7.18(f) ist die Klassifizierung für das Teilgebiet e angegeben, d.h. es gilt überall

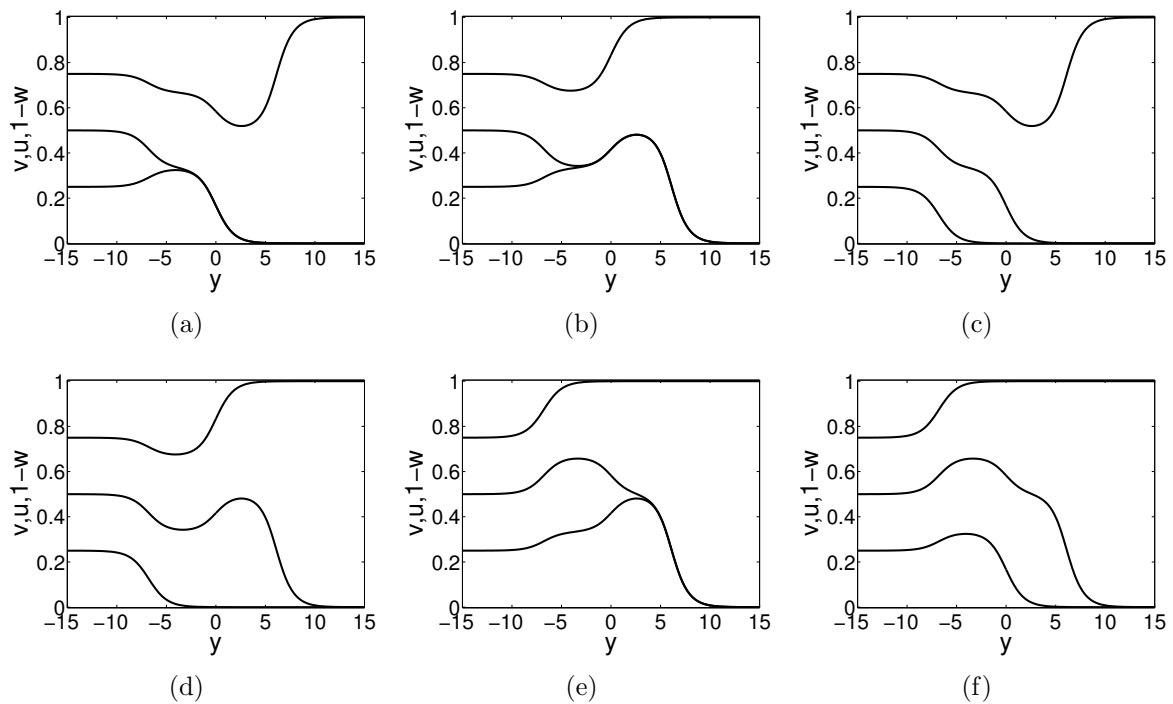


Abbildung 7.21: Für jedes Teilsystem ein Sättigungsprofil mit einem Überschuss in einer Phase und einem doppelten Überschuss in einer anderen Phase jeweils mit Variablen $(\lambda, \mu) = (0.499, 0.499)$.

$0 < S_4 < S_2 < S_1 < S_3$. Es können fünf Bereiche identifiziert werden. Der erste Bereich befindet sich um den Ursprung. Dort sind alle Wellen monoton fallend und damit topologisch äquivalent zu Abbildung 7.16(m). Der zweite Bereich ist horizontal schwarz schraffiert. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 , der jedoch nicht ausreichend ist, die abnehmende nichtperkolierende Wassersättigung zu ersetzen. Der dritte Bereich ist horizontal schwarz schraffiert und hat einen grauen Hintergrund. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 , der mit einem Überschuss in der Wassersättigung einhergeht. Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.19(f) dargestellt. Der vierte Bereich ist horizontal schwarz und diagonal dunkelgrau schraffiert und hat einen grauen Hintergrund. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_1 und S_2 und damit ein Überschuss in der Wassersättigung. Dies wird in Abbildung 7.20(f) gezeigt. Der fünfte Bereich ist horizontal schwarz fett und diagonal dunkelgrau schraffiert und hat einen grauen Hintergrund. Dort existiert ein einfacher Überschuss in S_2 und ein doppelter Überschuss in S_1 und damit ein Überschuss in der Wassersättigung. Das Profil ist in Abbildung 7.21(f) dargestellt.

Es existiert eine Symmetrie, die mit den Begrenzungen der Teilsysteme $0 < S_i < S_j < S_k < S_3$ mit $i, j, k = 1, 2, 3$ einhergeht. Die kleinste Sättigung S_i ist immer monoton. Die mittlere Sättigung S_j kann einen einfachen Überschuss, von 0.25 bis maximal 0.33 aufweisen. Die

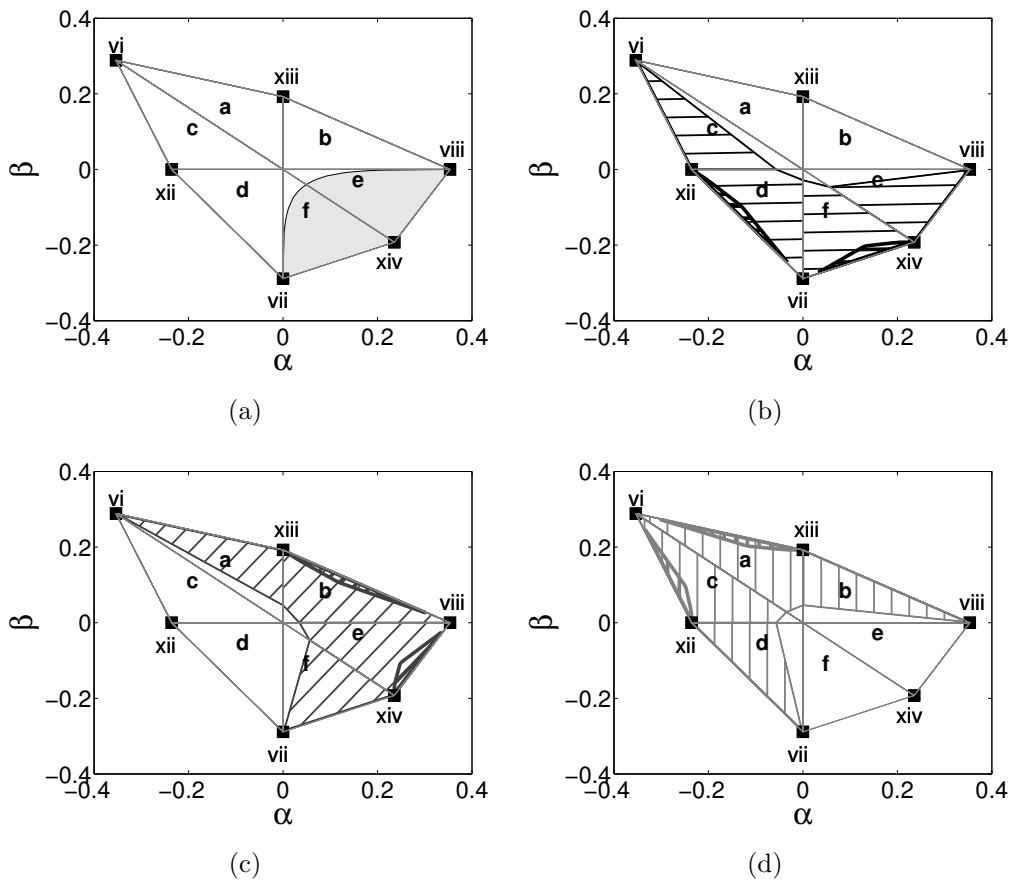


Abbildung 7.22: Klassifizierung aller dreidimensionalen Sättigungsprofile mit (α, β) -Wert definiert in Gleichung (7.37). Der Ursprung steht für den Punkt (u_d, v_d, w_d) und die Eckpunkte stehen für die durch römische Zahlen in Tabelle 7.3 gekennzeichneten Sattelpunkte. Die Dreiecke stehen für die durch lateinische Buchstaben gekennzeichneten dreidimensionalen invarianten Teilbereiche aus Tabelle 7.19. Die horizontal schwarz, die diagonal dunkelgrau und die vertikal hellgrau schraffierten Flächen zeigen die Überschussregionen in S_1, S_2, S_4 . Auf den fett schraffierten Flächen existieren doppelte Überschüsse. Die graue Fläche zeigt Überschüsse in der Wassersättigung.

größte Sättigung S_k kann einen doppelten Überschuss, von 0.25 auf zunächst 0.33 und dann maximal auf 0.5 aufweisen.

Die Wassersättigung kann damit einen extremalen Überschuss von 0.5 auf 0.67 oder einen extremalen Unterschuss von 0.5 auf 0.33 haben. Der Überschuss kann mit einer Welle oder mit zwei Wellen stattfinden. Zusätzlich gibt es in der Wassersättigung Terrassenlösungen. Doppelte Überschüsse werden in der Wassersättigung nicht beobachtet.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass je näher man im Zentrum ist, desto monotoner und einfacher ist das Verhalten. Je weiter nach außen man kommt, desto komplizierter werden

die Profile.

Wenn man nicht nur für die jeweiligen Teilsysteme, sondern für das ganze System zwei Variablen finden will, so projiziert man die konvexen Hüllen der Teilsysteme auf die Ebene, die durch den Mittelpunkt (u_d, v_d, w_d) geht und senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen dem stabilen und instabilen Fixpunkt steht. Diese Ebene wird z.B. von den Vektoren $\mathbf{v}_1 = \sqrt{2}^{-1}(0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = \sqrt{3}^{-1}(-1, 1, 1)$ aufgespannt. Damit kann man jeder Trajektorie beschrieben durch ihren Schnittpunkt (u_0, v_0, w_0) mit der jeweiligen konvexen Hülle des Teilsystems aus Tabelle 7.19 zwei Variablen (α, β) zuordnen, so dass

$$P_{(u_d, v_d, w_d), \sqrt{6}^{-1}(2, 1, 1)}(u_0, v_0, w_0) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + (u_d, v_d, w_d), \quad (7.37)$$

wobei $P_{p_0, n}$ die Projektion auf die Ebene mit Punkt p_0 und Normalen n darstellt.

Die Klassifizierung für das Gesamtsystem ist in Abbildung 7.22 dargestellt. Der Ursprung steht für den Punkt (u_d, v_d, w_d) und die Eckpunkte stehen für die durch römische Zahlen in Tabelle 7.3 gekennzeichneten Sattelpunkte. Die Dreiecke stehen für die durch lateinische Buchstaben gekennzeichneten dreidimensionalen invarianten Teilbereiche aus Tabelle 7.19. Die horizontal schwarz, die diagonal dunkelgrau und die vertikal hellgrau schraffierten Flächen zeigen die Überschussregionen in S_1, S_2, S_4 . Auf den fett schraffierten Flächen existieren doppelte Überschüsse. Die graue Fläche zeigt Überschüsse in der Wassersättigung. Die drei Diagonalen, die gleichzeitig die Teilbereiche begrenzen, stehen für die drei invarianten zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten $S_1 = S_2$, $S_1 = S_4$ und $S_2 = S_4$, die in den Abbildungen 7.8(e), 7.8(g) und 7.8(i) dargestellt sind. Die äußeren Begrenzungslinien sind eindimensionale Systeme, die die jeweiligen Fixpunkte verbinden. Die anderen zweidimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeiten aus Tabelle 7.18 sind in der Abbildung nicht zu sehen. Sie sind mehr oder weniger hinter den äußeren Begrenzungslinien versteckt. Dies ist kein Nachteil, da diese Systeme andere links- und rechtsseitige Randwerte aufweisen. Alle Systeme, die $(0.5, 0.25, 0.25)$ mit $(0, 0, 0)$ verbinden, sind auf Abbildung 7.22 repräsentiert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das dreidimensionale System über zwei zusätzliche Freiheitsgrade verfügt. Diese erlauben nichtmonotones Verhalten und komplexe Überschusslösungen in der Wassersättigung. Desweiteren lassen sich alle denkbaren niedriger dimensionalen Systeme im dreidimensionalen System als invariante Untermannigfaltigkeiten finden. Die physikalische Gültigkeit und Bedeutung der Freiheitsgrade werden im Kapitel 8 über numerische Lösungen beantwortet.

8 Numerische Lösungen

Dieses Kapitel präsentiert numerische Lösungen für die partiellen Differentialgleichungen, die dem laufenden Wellenansatz zugrunde liegen. Damit können die quasianalytischen Lösungen des laufenden Wellenansatzes überprüft werden. Der verwendete Algorithmus [Blom 94, Zege 10] lässt nur lineare räumliche zweite Ordnungsterme zu, womit die Kapillarfunktion als Konstante vereinfacht werden muss. Dies ist bei den Systemen zweier und dreier Gleichungen schon geschehen. Bei der Gleichung der immobilen nichtperkolierenden Phasen verursacht dies nur kleine Veränderungen in den Lösungen. Die Randwerte der Sättigungen und die Geschwindigkeiten sind davon nicht betroffen.

Es können alle Profile qualitativ und quantitativ als laufende Wellen erzeugt werden. Dies deutet darauf hin, dass alle gefundenen laufenden Wellen stabil sind. Desweiteren wird gezeigt, dass die auftretenden Freiheitsgrade in den Anfangsbedingungen der partiellen Differentialgleichungen versteckt sind, da man bei mehr als zwei Phasen die Anfangsprofile jeder Phase räumlich zueinander verschieben kann. Zuletzt wird mit Hilfe der Flussfunktionen und Massenaustauschterme besprochen, wie nichtmonotone Profile entstehen können.

Im ersten Unterkapitel wird der verwendete numerische Algorithmus vorgestellt. In den darauffolgenden Unterkapiteln werden nacheinander die Differentialgleichungen einer, zweier und dreier Gleichungen diskutiert, die in den vorigen Kapiteln quasianalytisch diskutiert wurden.

8.1 Algorithmus

Der hier verwendete Algorithmus basiert auf einem Löser für allgemeine Systeme gekoppelter, nichtlinearer Differentialgleichungen [Blom 94, Zege 10]. Seine nachfolgende Beschreibung ist [Dost 11c] entlehnt. Der Algorithmus ist in Fortran programmiert. Die räumliche Diskretisierung besteht aus einem adaptiv verzerrten Gitter und die räumlichen Ableitungen werden

durch finite Differenzen gelöst. Die Zeitintegration wird durch den öffentlich frei zugänglichen Löser DASSL [Petz 83] durchgeführt, wobei dieser aus einem variablen implizierten Euler-Schema besteht.

Mit dem Löser können allgemeine Systeme von N_{PDE} nichtlinearer Gleichungen der Form

$$C \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + Q \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} R \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \quad (8.1)$$

gelöst werden, wobei C eine $N_{\text{PDE}} \times N_{\text{PDE}}$ Matrix und Q und R N_{PDE} -Vektoren sind, die für Quell- und Flussterme stehen. Der Variablenvektor \mathbf{u} ist N_{PDE} -dimensional und hängt von Ort $x \in [x_\ell, x_r]$ und Zeit $t > 0$ ab.

Der Löser behandelt die Randbedingungen über die Gleichungen

$$B_j(x, t)R_j = \tilde{\Gamma}_j \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \Gamma_j \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \quad \forall j = 1, \dots, N_{\text{PDE}}. \quad (8.2)$$

Dabei bezeichnet R_j die j -te Komponente des Flussvektors R . Mit den Funktionen B_j bzw. Γ_j können Flussrandbedingungen bzw. Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen implementiert werden. Die Funktionen $\tilde{\Gamma}_j$ ermöglichen das Lösen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Alle Bestandteile der Gleichungen werden am linken und rechten Rand ausgewertet. Wenn nun noch die Anfangsbedingungen in \mathbf{u} vom Benutzer angegeben werden, dann ist das Anfangs- und Randwertproblem eindeutig bestimmt.

Der Löser kann Systeme behandeln, die zeitlich linear und von erster Ordnung und räumlich von maximal zweiter Ordnung mit linearem zweiten Ordnungs- und beliebigem ersten Ordnungsterm sind.

Der Algorithmus besitzt insgesamt drei numerische Parameter, einen zeitlichen ϵ_{tol} , der die Genauigkeit der Zeitintegration angibt [Petz83], und zwei räumliche Parameter τ_{sm} und σ_{sm} , die die Verzerrung des adaptiven Gitters regeln. Nähere Informationen können aus [Blom 94, Dost 11c] entnommen werden.

8.2 Eine Gleichung

In diesem Abschnitt wird die fraktionale Flussgleichung (4.58) des Perkulationsmodells mit immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten numerisch untersucht. Dabei werden im ersten Unterabschnitt die Gleichung und die Anfangs- und Randbedingungen in den numerischen

Löser implementiert. Im zweiten Unterabschnitt werden die Ergebnisse und die Vergleiche zu den quasianalytischen Lösungen dargestellt.

8.2.1 Implementierung

Die fraktionale Flussgleichung (4.58) des Perkolationsmodells mit immobilen nichtperkolierenden Flüssigkeiten kann in folgende Form gebracht werden

$$\frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(S_{\text{w}}) \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial x} - f(S_{\text{w}}) \right], \quad (8.3)$$

wenn $x = \tilde{x}$ und $t = \tilde{t}$. Die fraktionale Flussfunktion f und die Kapillarfunktion D sind in (4.56) und (4.57) definiert.

Wie oben beschrieben, darf der räumliche zweite Ordnungsterm nur linear vorkommen. Dies ist hier jedoch wegen der Nichtlinearität von D nicht gegeben. Nachdem in Abschnitt 5.1.4 die Lösungsklassen auf die eine mit am Rand verschwindenden Ableitungen der Sättigung beschränkt werden, kann hier D als positive Konstante angenommen werden, ohne die globale Lösung zu verändern. Der Einfachheit halber wird sie gleich Eins gesetzt.

Mit $\mathbf{u} = S_{\text{w}}$ folgt damit für die Funktionen des Algorithmus aus (8.1)

$$C \left(x, t, S_{\text{w}}, \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial x} \right) = 1, \quad (8.4a)$$

$$Q \left(x, t, S_{\text{w}}, \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial x} \right) = 0, \quad (8.4b)$$

$$R \left(x, t, S_{\text{w}}, \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial x} \right) = \frac{\partial S_{\text{w}}}{\partial x} - f(S_{\text{w}}). \quad (8.4c)$$

Die links und rechtsseitigen Randwerte der quasianalytischen Lösungen

$$S_{\text{w}}^{\ell} = \lim_{y \rightarrow -\infty} S_{\text{w}}(y), \quad (8.5a)$$

$$S_{\text{w}}^{\text{r}} = \lim_{y \rightarrow \infty} S_{\text{w}}(y) \quad (8.5b)$$

werden als Dirichlet-Randbedingungen durch die Randbedingungsfunktionen aus (8.2) folgendermaßen

$$B \left(x_\ell, t, S_{\mathbb{W}}(x_\ell, t), \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = 0, \quad (8.6a)$$

$$B \left(x_r, t, S_{\mathbb{W}}(x_r, t), \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = 0, \quad (8.6b)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_\ell, t, S_{\mathbb{W}}(x_\ell, t), \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell}, \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial t} \Big|_{x=x_\ell} \right) = 0, \quad (8.6c)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_r, t, S_{\mathbb{W}}(x_r, t), \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial x} \Big|_{x=x_r}, \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial t} \Big|_{x=x_r} \right) = 0, \quad (8.6d)$$

$$\Gamma \left(x_\ell, t, S_{\mathbb{W}}(x_\ell, t), \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = S_{\mathbb{W}}(x_\ell, t) - S_{\mathbb{W}}^\ell, \quad (8.6e)$$

$$\Gamma \left(x_r, t, S_{\mathbb{W}}(x_r, t), \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = S_{\mathbb{W}}(x_r, t) - S_{\mathbb{W}}^r \quad (8.6f)$$

modelliert.

Die Anfangsbedingungen werden hier durch Tangenshyperbolicusfunktionen dargestellt

$$S_{\mathbb{W}}(x, 0) = \frac{S_{\mathbb{W}}^\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_n))) + \frac{S_{\mathbb{W}}^r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_n))), \quad (8.7)$$

wobei x_n die Position des Mittelpunktes der Welle und κ die Steilheit der Welle angibt. Diese Anfangsbedingungen ähneln bereits den klassischen laufenden Wellenprofilen.

8.2.2 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des numerischen Lösers mit den quasianalytischen Ergebnissen aus Abschnitt 5.2.1 verglichen.

Weil im Abschnitt 5.1.4 die Lösungsklassen auf die Lösungsklasse d) beschränkt wurden, soll hier auch nur diese überprüft werden. Die anderen Lösungsklassen lassen sich mit diesem Programm nicht überprüfen, da sie Singularitäten bei $S_{\mathbb{W}} = 0$ und $S_{\mathbb{W}} = 1$ benötigen, die

Abb.	$S_{\mathbb{W}}^\ell$	$S_{\mathbb{W}}^r$	κ	x_n
8.1(a)	0.66	0	1	0
8.1(d)	0.64	0.15	1	0

Tabelle 8.1: Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen aus 8.1.

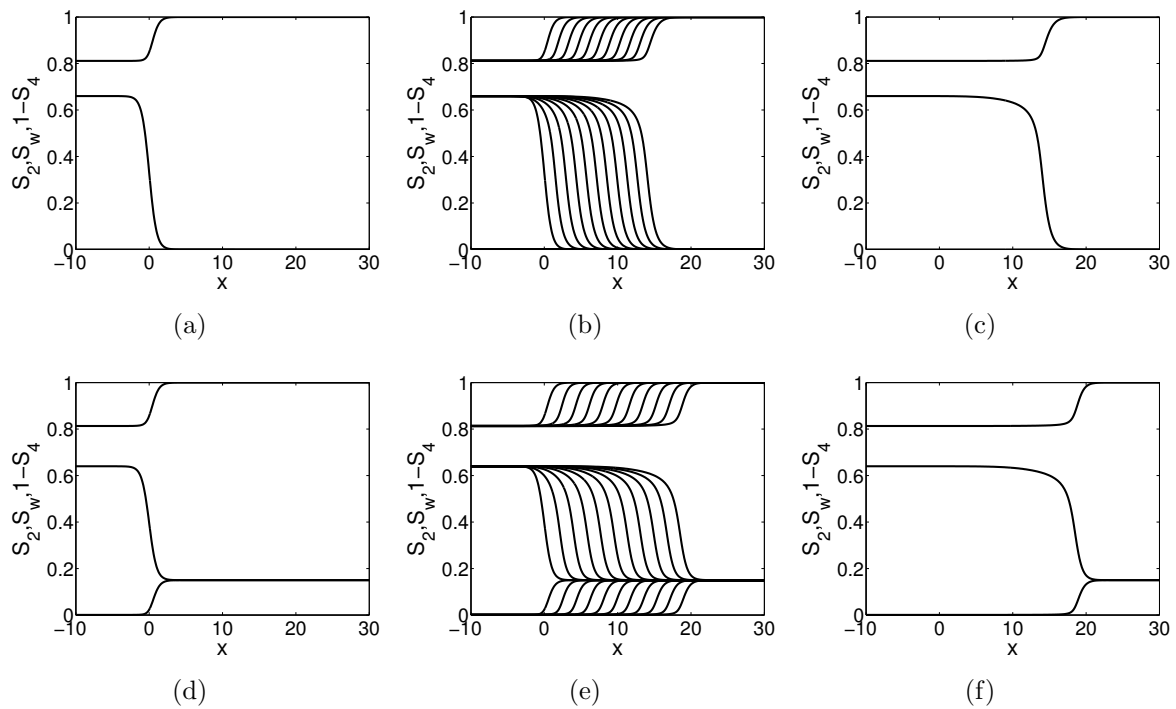


Abbildung 8.1: Anfangsprofile (a,d), zeitliche Entwicklung der Profile (b,e) und Endprofile (c),(f) nach $t = 10$ für die maximale primäre (oben) und sekundäre (unten) Bewässerung.

mit einem vom numerischen Programm geforderten maximal linearen Diffusionsterm nicht darstellbar sind.

Abbildung 8.1 zeigt numerische Lösungen für die gleichen Randwerte wie in Abbildung 5.14, die die maximale primäre und sekundäre Bewässerung darstellen. Die Sättigungen der nicht-perkolierenden Phasen sind Funktionen abhängig von der Variablen S_w und den Parametern aus Tabelle 4.2. Abbildungen 8.1(a) und 8.1(d) zeigen die Anfangsprofile mit Parametern aus Tabelle 8.1. Abbildungen 8.1(b) und 8.1(e) zeigen die zeitliche Entwicklung der Profile mit Zeitschritt $t = 1$. Abbildungen 8.1(c) und 8.1(f) zeigen die Profile nach $t = 10$. Abbildung 8.2 zeigt die Charakteristiken der primären und sekundären Bewässerungen.

Man sieht, dass sich mit den Anfangs und Randbedingungen eine laufende Welle ausbildet. Diese Welle hat die gleiche Geschwindigkeit, wie in dem quasianalytischen Abschnitt vorhergesagt wurde, nämlich für die primäre Bewässerung gleich 1.37 und für die sekundäre Bewässerung gleich 1.78. Die Profile ähneln sich, sind aber nicht identisch. Dies liegt an der Diffusion. Bei der numerischen Lösung ist die Diffusion zu einer Konstante gleich Eins vereinfacht und zusätzlich kommt noch eine künstliche numerische Diffusion hinzu.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die numerischen mit den quasianalytischen Ergeb-

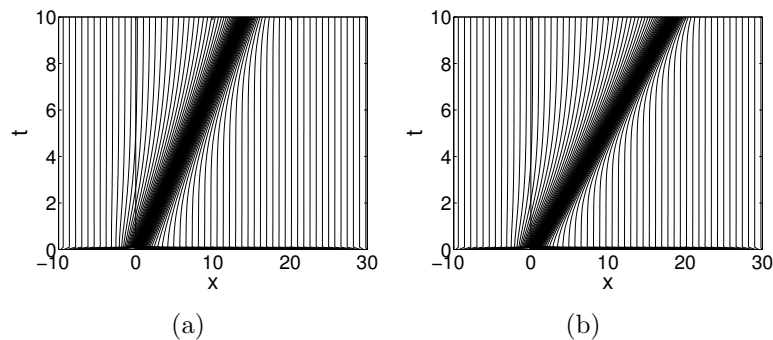


Abbildung 8.2: Charakteristiken für die maximale primäre (a) und sekundäre (b) Bewässerung nissen sehr gut übereinstimmen.

8.3 Systeme zweier Gleichungen

In diesem Abschnitt werden Systeme zweier fraktionaler Flussgleichungen (6.2) numerisch untersucht, zunächst mit den Vereinfachungen der entkoppelten Flüsse aus Abschnitt 6.2, um den Massenaustauschterm näher zu untersuchen, und dann mit den Vereinfachungen des nichtexistierenden Massenaustauschterms aus Abschnitt 6.3, um die gekoppelten Flüsse zu untersuchen. In ihren ersten Unterabschnitten werden die Gleichungen und die Anfangs- und Randbedingungen in den numerischen Löser implementiert. In ihren zweiten Unterabschnitten werden die Ergebnisse und die Vergleiche zu den quasianalytischen Lösungen dargestellt.

8.3.1 Nichtgekoppelte Flussfunktionen

8.3.1.1 Implementierung

Die fraktionalen Flussgleichungen (6.2) der allgemeinen Systeme zweier Gleichungen können mit den Annahmen aus Abschnitt 6.2 in folgende Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - f_u(u) \right], \quad (8.8a)$$

$$h_v(v) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - f_v(v) \right] \quad (8.8b)$$

gebracht werden. Die fraktionalen Flussfunktionen f_u und f_v sind in (6.19) und die Massenaustauschfunktion h_v ist in (6.38) definiert.

Mit $\mathbf{u} = (u, v)^T$ folgt damit für die Funktionen des Algorithmus aus (8.1)

$$C \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_v(v) & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.9a)$$

$$Q \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.9b)$$

$$R \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_u(u), \frac{\partial v}{\partial x} - f_v(v) \right)^T. \quad (8.9c)$$

Die links und rechtsseitigen Randwerte der quasianalytischen Lösungen

$$u_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} u(y), \quad (8.10a)$$

$$u_r = \lim_{y \rightarrow \infty} u(y), \quad (8.10b)$$

$$v_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} v(y), \quad (8.10c)$$

$$v_r = \lim_{y \rightarrow \infty} v(y). \quad (8.10d)$$

werden als Dirichlet-Randbedingungen durch die Randbedingungsfunktionen aus (8.2) folgendermaßen

$$B \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.11a)$$

$$B \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.11b)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.11c)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{x=x_r} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.11d)$$

$$\Gamma \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (u(x_\ell, t) - u_\ell, v(x_\ell, t) - v_\ell)^T, \quad (8.11e)$$

$$\Gamma \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = (u(x_r, t) - u_r, v(x_r, t) - v_r)^T. \quad (8.11f)$$

modelliert.

Die Anfangsbedingungen werden hier durch Tangenshyperbolicusfunktionen dargestellt

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} \frac{u_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^u))) + \frac{u_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^u))) \\ \frac{v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^v))) + \frac{v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^v))) \end{pmatrix}, \quad (8.12)$$

Abb.	$h_v(v)$	(u_ℓ, u_r)	(v_ℓ, v_r)	κ	x_0^u	x_0^v
8.3	$1 - v$	(0.5, 0.3)	(0.76, 0.11)	0.125	-100	0
8.4	$1 - v$	(0.5, 0.3)	(0.8, 0.26)	0.125	0	-100
8.5	$v - 1$	(0.5, 0.3)	(0.54, 0)	0.125	0	-100
8.6	$v - 1$	(0.25, 0.15)	(0.21, 0.03)	0.125	-200	0

Tabelle 8.2: Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.3, 8.4, 8.5 und 8.6.

wobei x_0^u und x_0^v die Positionen der Mittelpunkte der Wellen von u bzw. v und κ die Steilheit der beiden Wellen angibt.

8.3.1.2 Ergebnisse

Hier werden die quasianalytischen Ergebnisse der nichtgekoppelten Burgersflüsse aus dem Abschnitt 6.2.1 numerisch erzeugt. Dabei werden die Profile aus den Abbildungen 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 und Tabelle 6.1 nachgebildet.

In Abbildung 8.3 ist die Terrassenpunktlösung in v aus Abbildung 6.1 gezeigt. Die durchgezogenen Linien stehen für u und die gestrichelten Linien stehen für v . Sie besteht aus vier Teilabbildungen. Die Abbildung 8.3(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.2. Dabei haben die beiden Wellen das selbe Profil, die u -Welle ist jedoch um 100 nach links verschoben. Die Abbildung 8.3(b) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 100$ bis Zeitpunkt $t = 1000$ und Abbildung 8.3(d) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.3(c) zeigt das Profil nach $t = 1000$.

Die Abbildungen 8.3(b) und 8.3(d) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 500$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 0.4$ fortbewegt. Das Profil in 8.3(c) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil aus Abbildung 6.1 überein.

Die Abbildungen 8.3(b) und 8.3(d) beleuchten auch, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Abbildung 8.3(d) zeigt zwei Hauptcharakteristiken, wobei die linke für die u -Front und die rechte für die v -Front steht. Desweiteren ist eine sehr kleine Charakteristik zu sehen zwischen $t = 0$ und $t = 300$, die die linke mit der rechten Charakteristik verbindet. Die linke Charakteristik hat immer die gleiche Steigung, womit die u -Front immer die gleiche Geschwindigkeit hat. Die rechte Charakteristik hat, bis sie sich mit der kleineren Charakteristik vereint, eine geringere Steigung

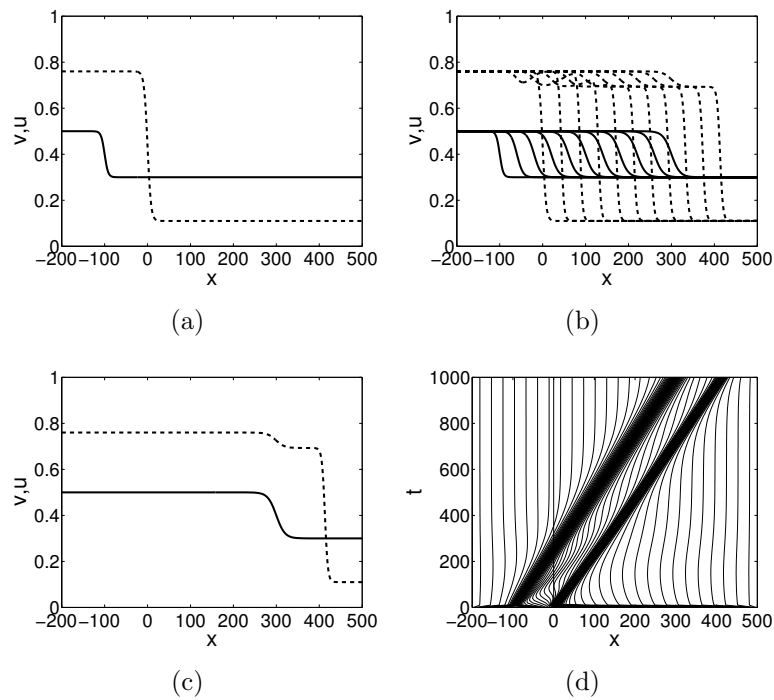


Abbildung 8.3: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 100$, Profil (c) nach $t = 1000$ und Charakteristiken (d) für $t \in (0, 1000)$ für die Terrassenpunktlösung in v mit $h_v(v) = 1 - v$.

als danach, wonach sie zuerst schneller ist und danach die gleiche Geschwindigkeit wie die u -Front hat. Die kleinere Charakteristik ist flacher und somit ist die Geschwindigkeit dieser Welle schneller als die der anderen. Diese kleine Charakteristik entsteht an der Stelle, an der die v -Sättigung konstant ist, sich die u -Sättigung aber ändert. Durch die Änderung der u -Sättigung wird der Massenaustauschterm aktiviert und dient für $h_v(v) = 1 - v$ als Senke, d.h. es wird v -Sättigung vernichtet und es entsteht ein Tal in dem v -Profil. Dieses Tal vergrößert sich durch den stetigen Einfluss des Massenaustauschterms und wandert mit einer schnelleren Geschwindigkeit als die primäre v -Front bis sie diese trifft. Dann ist das Profil stationär und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit voran. Im Endprofil sieht man, dass der Abstand zwischen den zwei Hauptfronten im Vergleich zum Anfangsprofil von 100 auf 120 zugenommen hat.

In Abbildung 8.4 ist die Unterschusslösung in v aus Abbildung 6.2 gezeigt. Die durchgezogenen Linien stehen für u und die gestrichelten Linien stehen für v . Sie besteht aus vier Teilabbildungen. Die Abbildung 8.4(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.2. Dabei haben die beiden Wellen das selbe Profil, die v -Welle ist jedoch um 100 nach links verschoben. Die Abbildung 8.4(b) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 100$ bis Zeitpunkt $t = 1000$ und Abbildung 8.4(d) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen

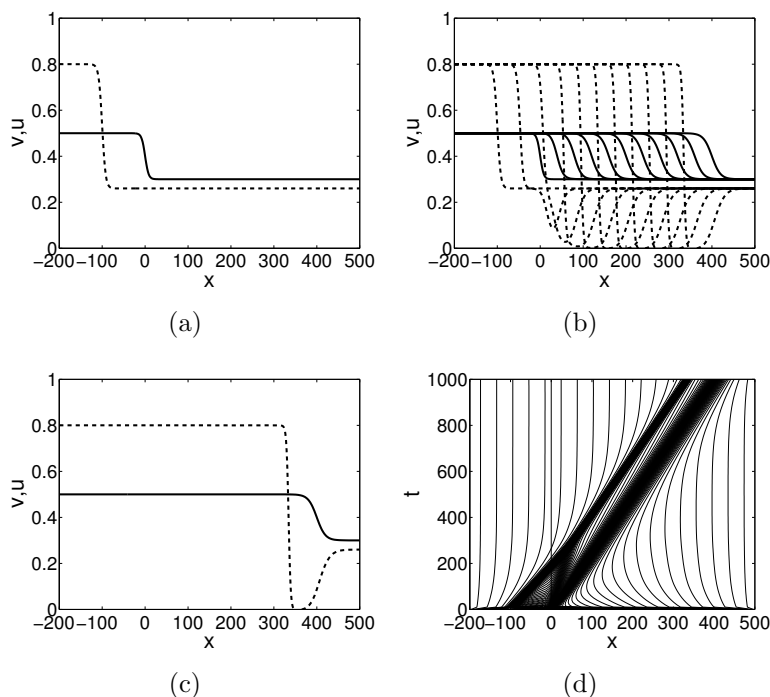


Abbildung 8.4: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 100$, Profil (c) nach $t = 1000$ und Charakteristiken (d) für $t \in (0, 1000)$ für die Unterschusslösung in v mit $h_v(v) = 1 - v$.

Charakteristiken. Abbildung 8.4(c) zeigt das Profil nach $t = 1000$.

Die Abbildungen 8.4(b) und 8.4(d) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 400$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 0.4$ fortbewegt. Das Profil in 8.4(c) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil aus Abbildung 6.2 überein.

Die Abbildungen 8.4(b) und 8.4(d) beleuchten auch, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Abbildung 8.4(d) zeigt zwei Hauptcharakteristiken, wobei die linke für die v -Front und die rechte für die u -Front steht. Desweiteren ist eine kleinere Charakteristik zu sehen zwischen $t = 0$ und $t = 300$, die die rechte mit der linken Charakteristik verbindet. Die rechte Charakteristik hat immer die gleiche Steigung, womit die u -Front immer die gleiche Geschwindigkeit hat. Die linke Charakteristik hat, bis sie sich mit der kleineren Charakteristik vereint, eine geringere Steigung als danach, wonach sie zuerst schneller ist und danach die gleiche Geschwindigkeit wie die u -Front hat. Die kleinere Charakteristik ist viel steiler und somit ist die Geschwindigkeit dieser Welle viel langsamer als die der anderen. Diese kleine Charakteristik entsteht an der Stelle, an der die v -Sättigung konstant ist, sich die u -Sättigung aber ändert. Durch die Änderung der u -Sättigung wird der Massenaustauschterm aktiviert und dient für $h_v(v) = 1 - v$ als Senke, d.h.

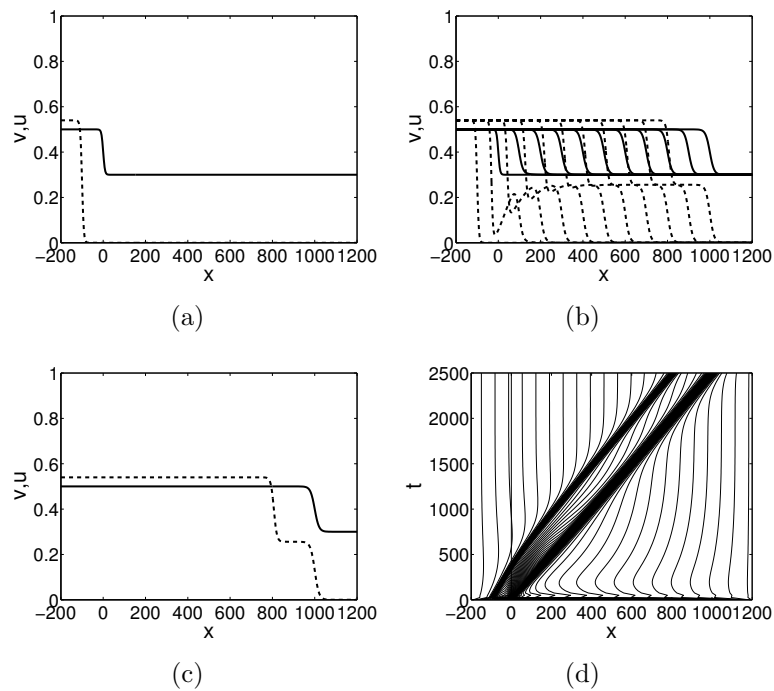


Abbildung 8.5: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 250$, Profil (c) nach $t = 2500$ und Charakteristiken (d) für $t \in (0, 2500)$ für die Terrassenpunktlösung in v mit $h_v(v) = v - 1$.

es wird v -Sättigung vernichtet und es entsteht ein Tal in dem v -Profil. Dieses Tal vergrößert sich durch den stetigen Einfluss des Massenaustauschterms und wird zum Zeitpunkt $t = 300$ von der schnelleren primären v -Front eingeholt. Dann ist das Profil stationär und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit voran. Im Endprofil sieht man, dass der Abstand zwischen den zwei Hauptfronten im Vergleich zum Anfangsprofil von 100 auf 70 abgenommen hat.

In Abbildung 8.5 ist die Terrassenpunktlösung in v aus Abbildung 6.3 gezeigt. Die durchgezogenen Linien stehen für u und die gestrichelten Linien stehen für v . Sie besteht aus vier Teilabbildungen. Die Abbildung 8.5(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.2. Dabei haben die beiden Wellen, das selbe Profil, die v -Welle ist jedoch um 100 nach links verschoben. Die Abbildung 8.5(b) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 250$ bis Zeitpunkt $t = 2500$ und Abbildung 8.5(d) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.5(c) zeigt das Profil nach $t = 2500$.

Die Abbildungen 8.5(b) und 8.5(d) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 1250$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 0.4$ fortbewegt. Das Profil in 8.5(c) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil aus Abbildung 6.3 überein.

Die Abbildungen 8.5(b) und 8.5(d) beleuchten auch, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Abbildung 8.5(d) zeigt zwei Hauptcharakteristiken, wobei die linke für die v -Front und die rechte für die u -Front steht. Desweiteren ist eine kleinere Charakteristik zu sehen zwischen $t = 0$ und $t = 750$, die die rechte mit der linken Charakteristik verbindet. Die rechte Charakteristik hat immer die gleiche Steigung, womit die u -Front immer die gleiche Geschwindigkeit hat. Die linke Charakteristik hat, bis sie sich mit der kleineren Charakteristik vereint, eine größere Steigung als danach, wonach sie zuerst langsamer ist und danach die gleiche Geschwindigkeit wie die u -Front hat. Die kleinere Charakteristik ist steiler und somit ist die Geschwindigkeit dieser Welle langsamer als die der anderen. Diese kleine Charakteristik entsteht an der Stelle, an der die v -Sättigung konstant ist, sich die u -Sättigung aber ändert. Durch die Änderung der u -Sättigung wird der Massenaustauschterm aktiviert und dient für $h_v(v) = v - 1$ als Quelle, d.h. es wird v -Sättigung produziert und es entsteht ein Hügel in dem v -Profil. Dieser Hügel vergrößert sich durch den stetigen Einfluss des Massenaustauschterms und wird von der schnelleren primären v -Front eingeholt bis sie sich zu einer Treppe vereint haben. Dann ist das Profil stationär und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit voran. Im Endprofil sieht man, dass der Abstand zwischen den zwei Hauptfronten im Vergleich zum Anfangsprofil von 100 auf 190 zugenommen hat.

In Abbildung 8.6 ist die Überschusslösung in v aus Abbildung 6.4 gezeigt. Die durchgezogenen Linien stehen für u und die gestrichelten Linien stehen für v . Sie besteht aus vier Teilabbildungen. Die Abbildung 8.4(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.2. Dabei haben die beiden Wellen das selbe Profil, die u -Welle ist jedoch um 200 nach links verschoben. Die Abbildung 8.6(b) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 200$ bis Zeitpunkt $t = 2000$ und Abbildung 8.6(d) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.6(c) zeigt das Profil nach $t = 2000$.

Die Abbildungen 8.6(b) und 8.6(d) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 1200$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 0.2$ fortbewegt. Das Profil in 8.6(c) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil aus Abbildung 6.4 überein.

Die Abbildungen 8.6(b) und 8.6(d) beleuchten auch, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Abbildung 8.6(d) zeigt zwei Hauptcharakteristiken, wobei die rechte für die v -Front und die linke für die u -Front steht. Desweiteren ist eine kleinere Charakteristik zu sehen zwischen $t = 0$ und $t = 1100$, die die linke mit der rechten Charakteristik verbindet. Die linke Charakteristik hat immer die gleiche Steigung, womit die u -Front immer die gleiche Geschwindigkeit hat. Die rechte Cha-

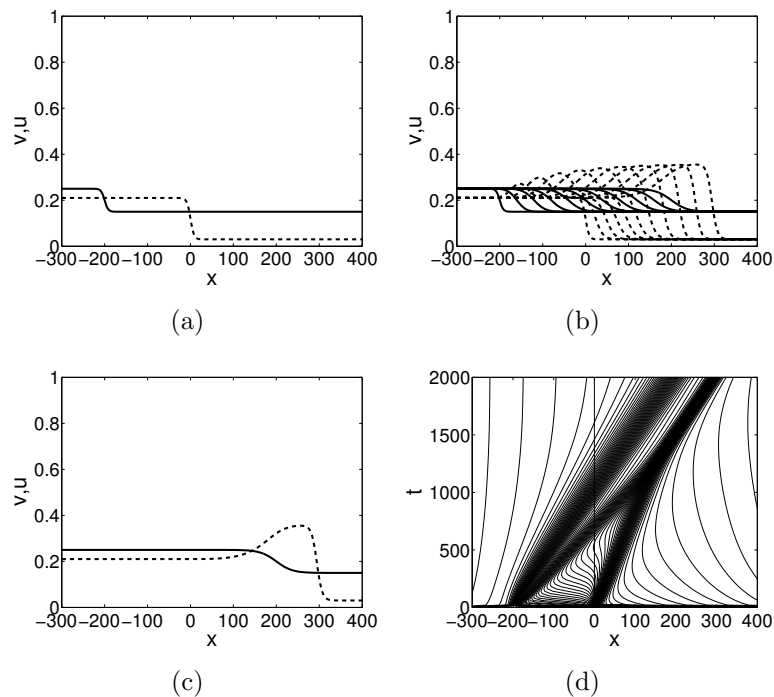


Abbildung 8.6: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 200$, Profil (c) nach $t = 2000$ und Charakteristiken (d) für $t \in (0, 2000)$ für die Überschusslösung in v mit $h_v(v) = 1 - v$.

Charakteristik hat, bis sie sich mit der kleineren Charakteristik vereint, eine größere Steigung als danach, wonach sie zuerst langsamer ist und danach die gleiche Geschwindigkeit wie die u -Front hat. Die kleinere Charakteristik ist flacher und somit ist die Geschwindigkeit dieser Welle schneller als die der anderen. Diese kleine Charakteristik entsteht an der Stelle, an der die v -Sättigung konstant ist, sich die u -Sättigung aber ändert. Durch die Änderung der u -Sättigung wird der Massenaustauschterm aktiviert und dient für $h_v(v) = v - 1$ als Quelle, d.h. es wird v -Sättigung produziert und es entsteht ein Überschuss im v -Profil. Dieser Überschuss vergrößert sich durch den stetigen Einfluss des Massenaustauschterms und wandert mit einer schnelleren Geschwindigkeit als die primäre v -Front bis sie diese trifft. Dann ist das Profil stationär und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit voran. Im Endprofil sieht man, dass der Abstand zwischen den zwei Hauptfronten im Vergleich zum Anfangsprofil von 200 auf 100 abgenommen hat.

Alle quasianalytischen Profile können also numerisch nachgebildet werden und es ist möglich zu erklären, wie sie entstehen.

8.3.2 Kein Massenaustauschterm

8.3.2.1 Implementierung

Die fraktionalen Flussgleichungen (6.2) der allgemeinen Systeme zweier Gleichungen können mit den Annahmen aus Abschnitt 6.3 in folgende Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - f_u(u, v) \right], \quad (8.13a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - f_v(u, v) \right] \quad (8.13b)$$

gebracht werden. Die fraktionalen Flussfunktionen f_u und f_v sind in (6.50) bzw. in (6.52) definiert.

Mit $\mathbf{u} = (u, v)^T$ folgt damit für die Funktionen des Algorithmus aus (8.1)

$$C \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.14a)$$

$$Q \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.14b)$$

$$R \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_u(u, v), \frac{\partial v}{\partial x} - f_v(u, v) \right)^T. \quad (8.14c)$$

Die links und rechtsseitigen Randwerte der quasianalytischen Lösungen

$$u_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} u(y), \quad (8.15a)$$

$$u_r = \lim_{y \rightarrow \infty} u(y), \quad (8.15b)$$

$$v_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} v(y), \quad (8.15c)$$

$$v_r = \lim_{y \rightarrow \infty} v(y) \quad (8.15d)$$

werden als Dirichlet-Randbedingungen durch die Randbedingungsfunktionen aus (8.2) fol-

gendermaßen

$$\mathbf{B} \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.16a)$$

$$\mathbf{B} \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.16b)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.16c)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{x=x_r} \right) = (0, 0)^T, \quad (8.16d)$$

$$\Gamma \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (u(x_\ell, t) - u_\ell, v(x_\ell, t) - v_\ell)^T, \quad (8.16e)$$

$$\Gamma \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = (u(x_r, t) - u_r, v(x_r, t) - v_r)^T \quad (8.16f)$$

modelliert.

Die Anfangsbedingungen für den Abschnitt des nichtexistierenden Wassers 6.3.1 werden hier durch Tangenshyperbolikusfunktionen dargestellt

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} \frac{u_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^u))) + \frac{u_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^u))) \\ \frac{v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^v))) + \frac{v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^v))) \end{pmatrix}, \quad (8.17)$$

wobei x_0^u und x_0^v die Positionen der Mittelpunkte der Wellen von u bzw. v und κ die Steilheit der beiden Wellen angibt.

Die Anfangsbedingungen für den Abschnitt des nichtexistierenden Öls 6.3.2, wo $v < u$ gilt, werden hier durch

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} \frac{u_\ell - v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^{u-v}))) + \frac{u_r - v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^{u-v}))) + \\ + \frac{v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^v))) + \frac{v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^v))) \\ \frac{v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^v))) + \frac{v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^v))) \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

dargestellt, wobei x_0^{u-v} und x_0^v die Positionen der Mittelpunkte der Wellen von $u - v$ bzw. v und κ die Steilheit der beiden Wellen angibt. Damit besteht die u -Welle aus einer Superposition zweier Tangenshyperbolikusfunktionen. Damit ist sichergestellt, dass $u > v$.

Abb.	(u_ℓ, u_r)	(v_ℓ, v_r)	κ	x_0^u	x_0^v
8.7	(0.397, 0.397)	(0, 0)	0.125	25	0
8.9	(0.397, 0.397)	(0, 0)	0.125	2.125	0
8.11	(0.397, 0.397)	(0, 0)	0.125	1.25	0

Tabelle 8.3: Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.7, 8.9 und 8.11.

8.3.2.2 Ergebnisse

Hier werden die quasianalytischen Ergebnisse aus den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 numerisch erzeugt. Dabei werden die Profile aus den Abbildungen 6.10 bzw. 6.16 und Tabellen 6.8 bzw. 6.12 herangezogen.

Einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Wasser: Zuerst werden die Ergebnisse aus Abschnitt 6.3.1 besprochen. Dort ist Wasser nur in nichtperkolierender Form vorhanden. Die Variable u steht für die Wassersättigung und v steht für die Sättigung des nichtperkolierenden Öls. Wie schon erwähnt, ist dieses Problem symmetrisch in u und v , weswegen hier nur die Profile mit nichttrivialem Verhalten in u betrachtet werden. Die Profile in v können analog diskutiert werden.

In Abschnitt 6.3.1 gibt es für die festen Randwerte aus Tabelle 6.8 drei ausgezeichnete Profile, die mit den Bifurkationsparameterwerten $\lambda = 0, 0.3, 0.37$ identifiziert werden können. Sie stehen für einen maximalen Überschuss in u , für einen minimalen Überschuss in u und für einen Terrassenpunkt in u . Diese drei Profile werden nun hier mit dem numerischen Programm erzeugt.

In Abbildung 8.7 ist die maximale Überschusslösung in u gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.7(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.3. Dabei haben die beiden Wellen das selbe Profil, die u -Welle ist jedoch um 25 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.7(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.7(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.7(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.7(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.7(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.7(e) und 8.7(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 30$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.7(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein,

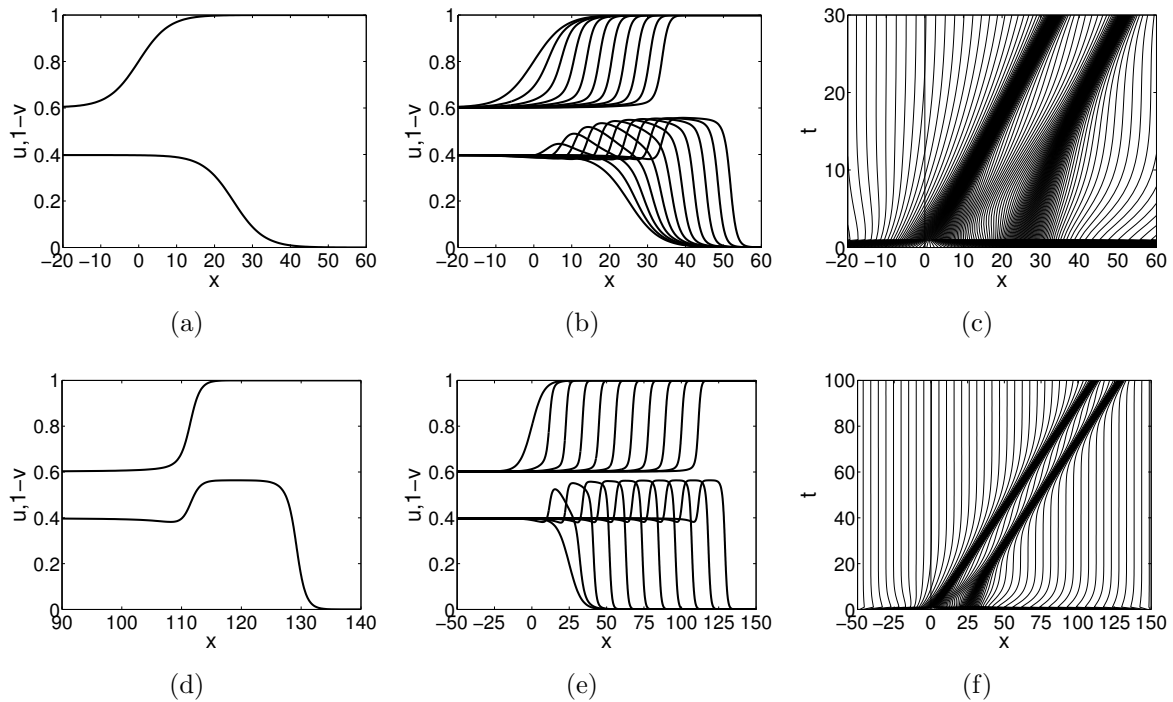


Abbildung 8.7: Anfangsprofil (a), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 3$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für den maximalen Überschuss in u .

d.h. der Überschuss und der nachlaufende Unterschuss sind qualitativ und quantitativ identisch.

Die Abbildungen 8.7(b) und 8.7(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet und können insbesondere mit Hilfe der Abbildung 8.8 erklären, wie ein Überschuss entsteht. Abbildung 8.7(c) zeigt zwei Hauptcharakteristiken, wobei die linke für die v -Front und die rechte für die u -Front steht. Desweiteren ist eine kleinere Charakteristik zu sehen zwischen $t = 0$ und $t = 20$, die die linke mit der rechten Charakteristik verbindet. Die linke Charakteristik hat immer die gleiche Steigung, womit die v -Front immer die gleiche Geschwindigkeit hat. Die rechte Charakteristik hat, bis sie sich mit der kleineren Charakteristik vereint, eine größere Steigung als danach, wonach sie zuerst langsamer ist und danach die gleiche Geschwindigkeit wie die v -Front hat. Die kleinere Charakteristik ist flacher und somit ist die Geschwindigkeit dieser Welle schneller als die der anderen. Diese kleine Charakteristik ist der Schlüssel zu den Überschusslösungen. Sie entsteht an der Stelle, an der die u -Sättigung konstant ist, sich die v -Sättigung aber ändert. Die Veränderung der v -Sättigung bewirkt ein Ansteigen der u -Sättigung. Dieser Hügel ist schneller als der Rest der Welle. Irgendwann trifft er auf die eigentliche u -Front. Der Überschuss

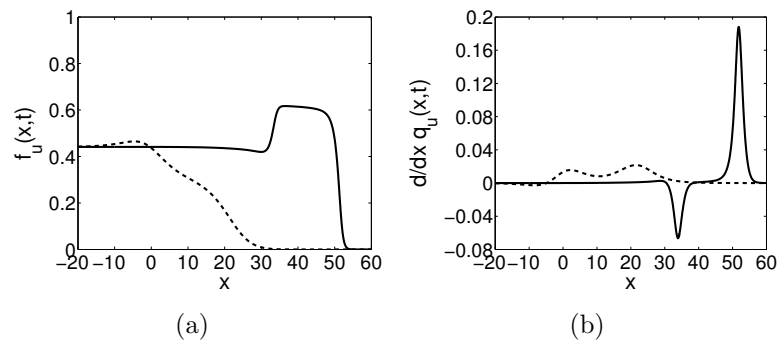


Abbildung 8.8: Fraktionale Flussfunktion $f_u(x, t)$ (a) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die maximale Überschusslösung in u .

steigt solange an, bis die Hauptfront so hoch ist, dass sie die gleiche Geschwindigkeit hat als v . Dann ist das Profil stationär und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit voran. Im Endprofil sieht man, dass der Abstand zwischen den zwei Hauptfronten im Vergleich zum Anfangsprofil von 25 auf 20 abgenommen hat. Dies ist im Einklang mit dem Massenerhalt. Die u -Sättigung, die anfangs auf 25 Breite verteilt ist, ist nun auf 20 verteilt, damit muss es zwangsläufig auf diesem Gebiet zu einer höheren Sättigung kommen.

In Abbildung 8.8 sieht man für die maximale Überschusslösung die Flussfunktion f_u und die Ableitung

$$\frac{d}{dx} q_u(x, t) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} u(x, t) - f_u(x, t) \right) \quad (8.19)$$

des u -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13a) ist diese gleich der zeitlichen Ableitung der u -Sättigung. Man sieht bei $\frac{d}{dx} q_u(x, 0)$ zwei Maxima und ein Minimum. Im Bereich um das Minimum ist $\frac{d}{dx} q_u(x, 0)$ negativ, dies bewirkt den nachlaufenden Unterschuss der Lösung. Das erste Maxima verursacht den Hügel, der sich in der kleinen Charakteristik aus 8.7(c) gezeigt hat. Diese beiden Extrema haben ihren Ursprung in der Veränderung der v -Sättigung durch die v -Front. Das zweite Maximum steht für die eigentliche u -Front. Zum Zeitpunkt $t = 30$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Man sieht ein kleines positives Maximum, das für den Unterschuss steht, ein negatives Minimum, das für die Entwässerungsfront in u steht, und ein großes positives Maximum, das für die Hauptbewässerungsfront in u steht. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Die Funktion $f_u(x, 30)$ hat eine große Ähnlichkeit mit dem Sättigungsprofil, weil für eine laufende Welle mit Parameter $k_u = 0$ und

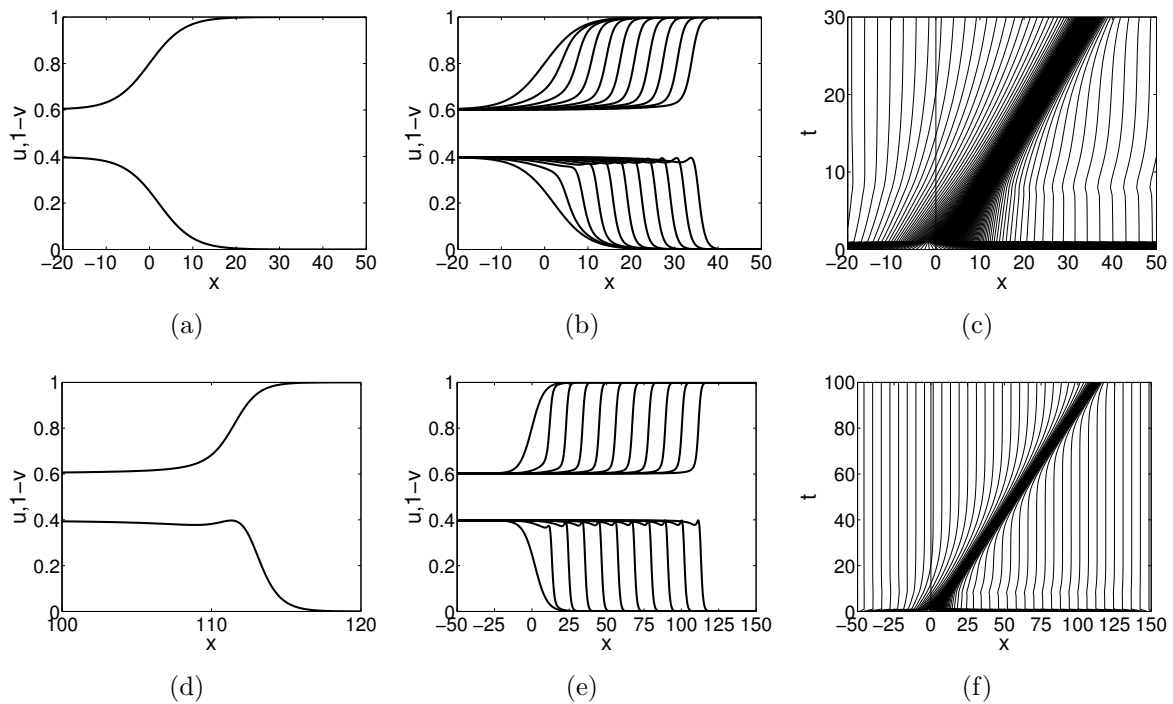


Abbildung 8.9: Anfangsprofil (a), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 3$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für den minimalen Überschuss in u .

fixiertem Zeitpunkt t nach (6.41a)

$$f_u(x, t) = cu(x, t) - \frac{d}{dx}u(x, t) \quad (8.20)$$

gilt. Nachdem die räumliche Ableitung von u fast überall klein im Vergleich zu u ist, unterscheiden sich die Flussfunktion und die Sättigung nur durch ein multiplikatives Skalar, das hier mit $c = 1.11$ nahe an der Eins ist.

In Abbildung 8.9 ist die minimale Überschusslösung in u gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.9(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.3. Dabei haben die beiden Wellen das selbe Profil, die u -Welle ist jedoch um 2.125 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.9(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.9(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.9(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.9(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.9(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.9(e) und 8.9(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 30$ ein Profil heraus-

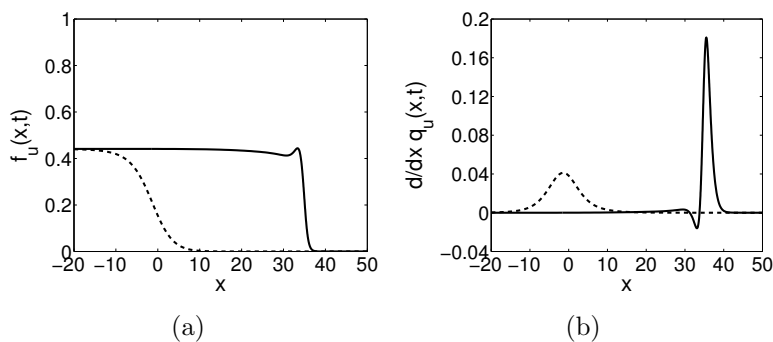


Abbildung 8.10: Fraktionale Flussfunktion $f_u(x,t)$ (a) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die minimale Überschusslösung in u .

gebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.9(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein, d.h. der Überschuss und der nachlaufende Unterschuss sind qualitativ und quantitativ identisch.

Die Abbildungen 8.9(b) und 8.9(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Das Verhalten unterscheidet sich von der maximalen Überschusslösung. Die u -Front staucht sich zusammen und dabei entsteht an der sich vor der v -Front befindlichen vorderen u -Front ein Überschuss. Er ist viel geringer als bei der maximalen Überschusslösung, da sich das Gebiet zwischen den beiden Fronten hier nur sehr viel geringer stauchen kann. Der Abstand verringert sich hier von 2.125 auf 1.7.

In Abbildung 8.10 sieht man für die minimale Überschusslösung in u die Flussfunktion f_u und die in (8.19) definierte Ableitung des u -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13a) ist diese gleich der zeitlichen Ableitung der u -Sättigung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x,0)$ ist eine überall positive Glocke, welche zu einer Stauchung führt. Im Laufe der Zeit formt sich jedoch die Funktion um, zu einer Funktion, wie es zum Zeitpunkt $t = 30$ dargestellt ist. Dort befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem bis auf eine Translation stationärem Zustand. Man sieht ein kleines positives Maximum, das für den Unterschuss steht, ein negatives Minimum, das für die Entwässerungsfront in u steht, und ein großes positives Maximum, das für die Hauptbewässerungsfront in u steht. Der positive Bereich zwischen $-\infty$ und der ersten Nullstelle und der negative Bereich zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle sind gerade so groß, dass der Überschuss der linken Randsättigung gleicht. Auch hier gleicht das fraktionale Flussprofil zum Zeitpunkt $t = 30$ dem Sättigungsprofil in u . Die Begründung ist die gleiche wie bei der maximalen Überschusslösung.

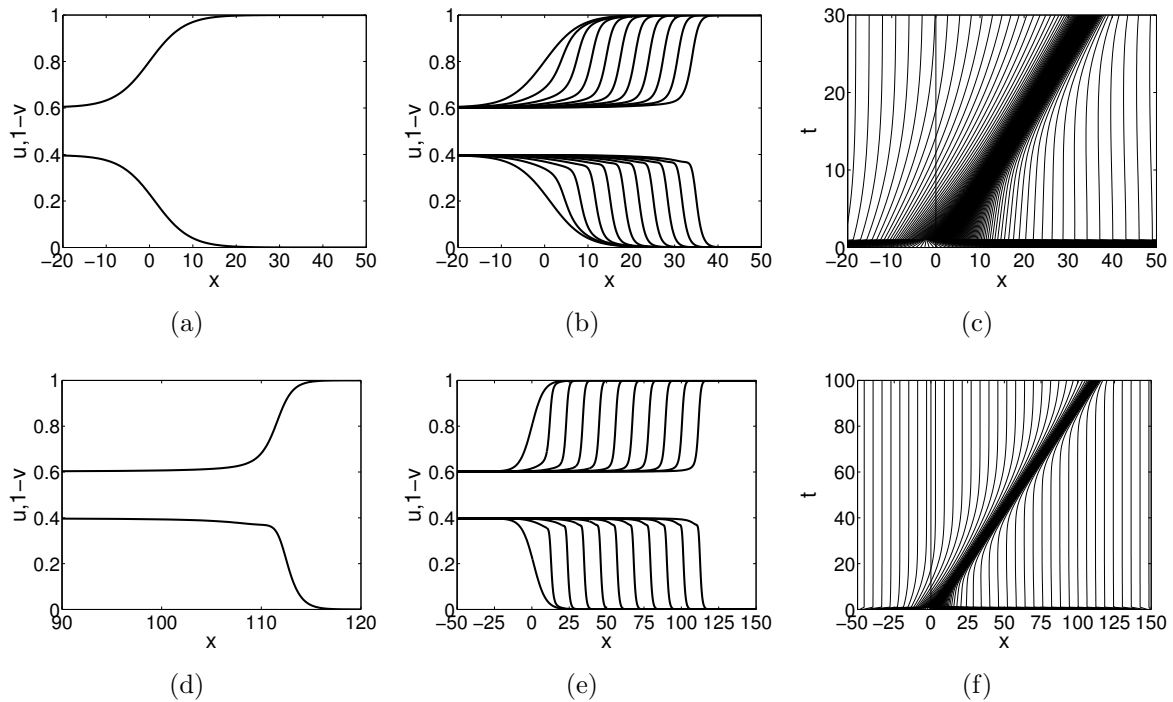


Abbildung 8.11: Anfangsprofil (a), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 3$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Terrassenpunktlösung in u .

In Abbildung 8.11 ist die Terrassenpunktlösung in u gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.11(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.3. Dabei haben die beiden Wellen das selbe Profil, die u -Welle ist jedoch um 1.25 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.11(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.11(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.11(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.11(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.11(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.11(e) und 8.11(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 30$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.11(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein, d.h. der Terrassenpunkt ist qualitativ und quantitativ identisch.

Die Abbildungen 8.11(b) und 8.11(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Man sieht hier wieder eine leichte Stauchung, aber kein nichtmonotones Verhalten mehr. Der Bereich, in dem sich v verändert, während u gleich bleibt, ist zu klein, um nichtmonotones Verhalten auszulösen.

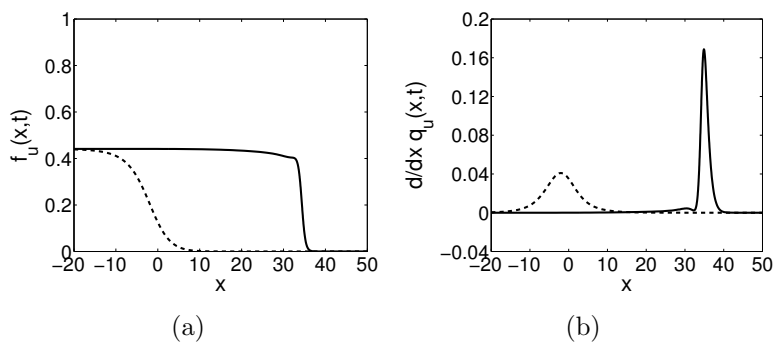


Abbildung 8.12: Fraktionale Flussfunktion $f_u(x,t)$ (a) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die Terrassenpunktlösung in u .

In Abbildung 8.12 sieht man für die Terrassenpunktlösung in u die Flussfunktion f_u und die in (8.19) definierte Ableitung des u -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13a) ist diese gleich der zeitlichen Ableitung der u -Sättigung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x,0)$ unterscheidet sich kaum von der positiven Glocke aus der minimalen Überschusslösung. Es führt wieder zu einer Stauchung. Über die Zeit ändert sich die Funktion, aber nicht so stark wie in den anderen Lösungen. Sie bleibt dauerhaft positiv und berührt nur kurz bei dem Terrassenpunkt die x -Achse, ohne sie zu schneiden. Zum Zeitpunkt $t = 30$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähnelt das fraktionale Flussprofil zum Zeitpunkt $t = 30$ dem Sättigungsprofil in u .

Alle quasianalytischen Profile können also numerisch nachgebildet werden und es ist möglich zu erklären, wie eine Überschusslösung entsteht.

Zuletzt wird der Bedeutung des in dem quasianalytischen Teil gefundenen Freiheitsgrades λ untersucht. Man sieht sofort, dass der Freiheitsgrad λ mit dem Abstand

$$\Delta_v^u = x_0^u - x_0^v \quad (8.21)$$

zusammenhängt, der die zwei Anfangswellen in u und v trennt. Es kann folgende Funktionalität zwischen λ und Δ_v^u unabhängig von κ gefunden werden

$$\lambda_\kappa(\Delta_v^u) = 1 - \lambda_\kappa(-\Delta_v^u), \quad (8.22a)$$

$$\lambda_\kappa(0) = 0.5, \quad (8.22b)$$

$$\lambda_\kappa(\infty) = 0. \quad (8.22c)$$

Δ_v^u	$(2.215, \infty)$	$(1.25, 2.215)$	$(-1.25, 1.25)$	$(-2.215, -1.25)$	$(-\infty, -2.215)$
m. fall. in u	nein	nein	ja	ja	ja
m. fall. in v	ja	ja	ja	nein	nein
Über. in u	ja	nein	nein	nein	nein
Über. in v	nein	nein	nein	nein	ja

Tabelle 8.4: Bifurkationen mit Parameter Δ_v^u und Parameter $\kappa = 0.125$.

Desweiteren ergeben sich für $\kappa = 0.125$ folgende Zusammenhänge

$$\lambda_{0.125}(1.25) = 0.37, \quad (8.23a)$$

$$\lambda_{0.125}(2.215) = 0.3. \quad (8.23b)$$

Damit können die Bifurkationen in Tabelle 6.9 äquivalent mit dem Parameter Δ_v^u formuliert werden. Dies ist in Tabelle 8.6 dargestellt.

Physikalisch können diese Verschiebungen durch kleine, im Modell nicht berücksichtigte Heterogenitäten im porösen Medium verursacht werden, die eine der Sättigungen kurzzeitig schneller fließen lassen und somit nach vorne verschieben.

Einzig in nichtperkolierender Form vorhandenes Öl Nun werden die Ergebnisse aus Abschnitt 6.3.2 besprochen. Dort ist Öl nur in nichtperkolierender Form vorhanden. Die Variable u steht für die Wassersättigung und v steht für die Sättigung des nichtperkolierenden Wassers. Deswegen muss u immer größer gleich v sein. Dies ist in den Anfangsprofilen berücksichtigt, wonach sich das anfängliche u Profil aus einer Superposition der v -Welle und der $u - v$ -Welle, sprich der perkolierenden Wasserwelle, zusammensetzt.

In Abschnitt 6.3.2 gibt es für die festen Randwerte aus Tabelle 6.12 vier ausgezeichnete Profile, die mit den Bifurkationsparameterwerten $\lambda = 0, 0.68, 0.7, 1$ identifiziert werden können. Sie stehen für einen Terrassenpunkt in u , für einen Terrassenpunkt in v , für einen minimalen Überschuss in v und für einen maximalen Überschuss in v . Diese vier Profile werden nun hier mit dem numerischen Programm erzeugt.

In Abbildung 8.13 ist die maximale Überschusslösung in v gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.13(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.5. Dabei besteht die u -Welle aus zwei Wellen. Die erste Welle ist die der $u - v$ -Sättigung und hat ihren Mittelpunkt bei $x = 0$, während die zweite die der v -Sättigung um 25 nach

Abb.	(u_ℓ, u_r)	(v_ℓ, v_r)	κ	x_0^{u-v}	x_0^v
8.13	(0.794, 0.397)	(0, 0)	0.125	0	25
8.15	(0.794, 0.397)	(0, 0)	0.125	0	2.2
8.17	(0.794, 0.397)	(0, 0)	0.125	0	1.4
8.19	(0.794, 0.397)	(0, 0)	0.125	25	0

Tabelle 8.5: Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.13, 8.15, 8.17 und 8.19.

rechts verschoben ist. Die Abbildung 8.13(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.13(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.13(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.13(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.13(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.13(e) und 8.13(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 30$ ein Profil herausbildet, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.13(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein, d.h. der Überschuss und der nachlaufende Unterschuss sind qualitativ und quantitativ identisch.

Die Abbildungen 8.13(b) und 8.13(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Dieses Profil hat einen Überschuss in v und einen Terrassenpunkt in u . Die linke Charakteristik steht für die $u - v$ -Front und die rechte Charakteristik steht für die v -Front, die zunächst steil anfängt und dann, wenn die mittlere Charakteristik sie trifft, flacher wird. Die mittlere Charakteristik stellt die Einflüsse der einen Front auf die jeweils andere Front dar. Sie fängt bei der $u - v$ -Front an und ist sehr schnell, dies zeigt die extrem schnell ansteigende v -Sättigung durch die Änderung der $u - v$ -Sättigung. Desweiteren steigt die u -Sättigung dort an, wo sich die v -Front befindet. Die u -Sättigung entwickelt sich mehr und mehr zu einer Treppe. Bis sich die mittlere Charakteristik und die rechte Charakteristik treffen und der v -Überschuss gleich der u -Treppe ist. Zusammenfassend wurde die v -Welle gestaucht, was einen Überschuss ausgelöst hat, und die Teile der u -Welle sind wegen der beschleunigenden Wirkung der v -Welle schneller geflossen, so dass sich die zwei Fronten noch klarer ausgebildet haben.

In Abbildung 8.14 sieht man für die maximale Überschusslösung in v die Flussfunktionen f_u

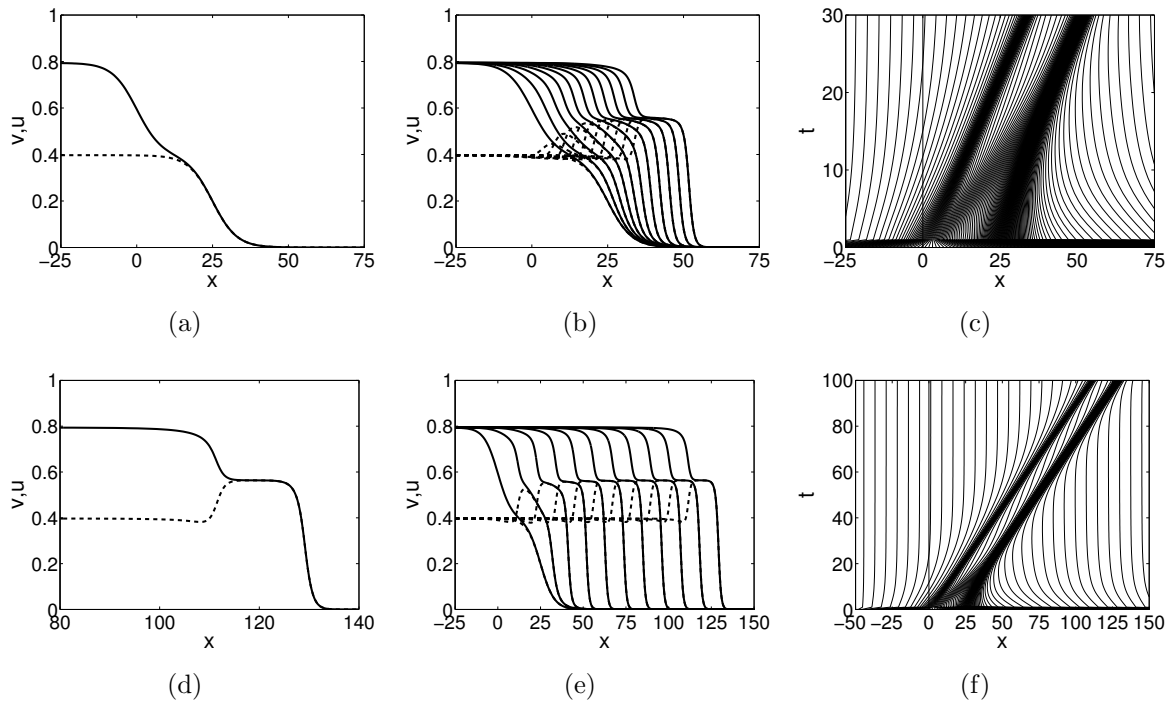


Abbildung 8.13: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 3$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für den maximalen Überschuss in v .

und f_v und die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}q_u(x, t) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx}u(x, t) - f_u(x, t) \right), \quad (8.24a)$$

$$\frac{d}{dx}q_v(x, t) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx}v(x, t) - f_v(x, t) \right) \quad (8.24b)$$

des u - und v -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13) sind diese gleich der zeitlichen Ableitung der u - bzw. v -Sättigung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist positiv mit zwei Glocken. Die erste steht für die u -Front und bewirkt eine Stauchung der Front. Die zweite wird durch die v -Front verursacht und bewirkt eine zusätzliche Stauchung, die zu einer lokal ansteigenden Sättigung führt. Sie steigt solange an, bis sie sich mit der ersten Front zu einer zweistufigen Treppenfunktion verbunden hat, was an dem Profil von $\frac{d}{dx}q_u(x, 30)$ zu sehen ist. Bei $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ sieht man ein negatives Minimum gefolgt von zwei positiven Maxima. Das Minimum und das erste Maximum werden durch die $u - v$ -Front verursacht. Das Minimum steht für den kleinen nachlaufenden Unterschuss. Das erste Maxima bewirkt einen stark ansteigenden Überschuss. Die zweite bewirkt eine leichte Stauchung der v -Front. Bei $t = 30$

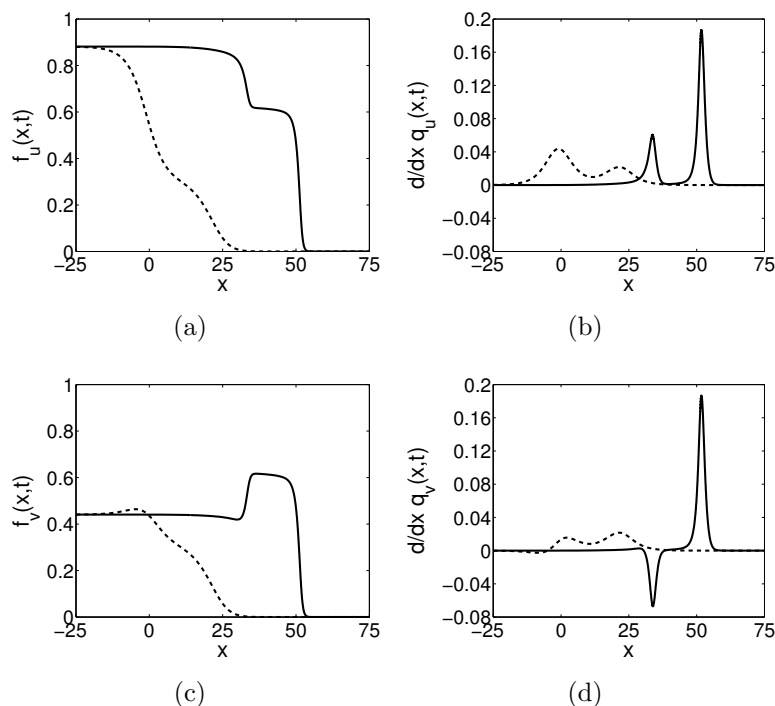


Abbildung 8.14: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a) und $f_v(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) und des v -Flusses (d) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die maximale Überschusslösung in v .

weist die Flussfunktion ein kleines positives Maximum gefolgt von einem negativen Minimum, gefolgt von einem großen positiven Maximum auf. Dies steht für den schon erörterten Überschuss mit nachlaufendem Unterschuss. Die Funktionen $f_u(x, 30)$ und $f_v(x, 30)$ weisen wieder eine große Ähnlichkeit mit den Sättigungsprofilen auf.

In Abbildung 8.15 ist die minimale Überschusslösung in v gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.15(a) beleuchtet das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.5. Dabei besteht die u -Welle aus zwei Wellen. Die erste Welle ist die der $u - v$ -Sättigung und hat ihren Mittelpunkt bei $x = 0$, während die zweite die der v -Sättigung um 2.2 nach rechts verschoben ist. Die Abbildung 8.15(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.15(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. In Abbildung 8.15(d) ist das Profil nach $t = 100$ zu sehen. Die Abbildung 8.15(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.15(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.15(e) und 8.15(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 30$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.15(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein,

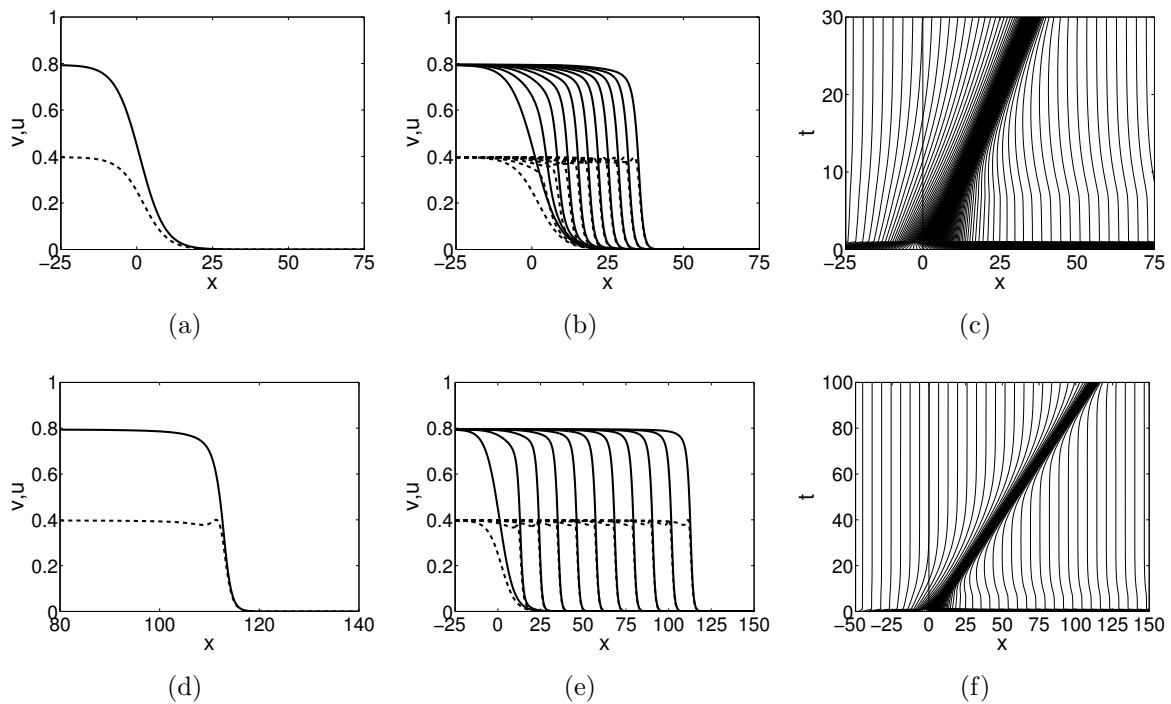


Abbildung 8.15: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 30$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die minimale Überschusslösung in v .

d.h. der Überschuss und der nachlaufende Unterschuss sind qualitativ und quantitativ identisch.

Die Abbildungen 8.15(b) und 8.15(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Dabei sieht man, dass die u -Front sich nur ein wenig staucht. Die v -Front staucht sich zusammen und dabei entsteht an der sich vor der $u - v$ -Front befindlichen vorderen v -Front ein sehr kleiner Überschuss.

In Abbildung 8.16 sieht man für die minimale Überschusslösung in v die Flussfunktionen f_u und f_v und die Ableitungen aus (8.24) des u - und v -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13) ist diese gleich der zeitlichen Ableitung der u - und v -Sättigung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine überall positive Glocke, welche zu einer Stauchung führt. Über die Zeit ändert sich nur Höhe und Breite der Glocke. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ ist eine überall positive Glocke, welche zu einer Stauchung führt. Im Laufe der Zeit formt sich jedoch die Funktion zu einer Funktion um, wie es zum Zeitpunkt $t = 30$ dargestellt ist. Dort befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem bis auf eine Translation stationärem Zu-

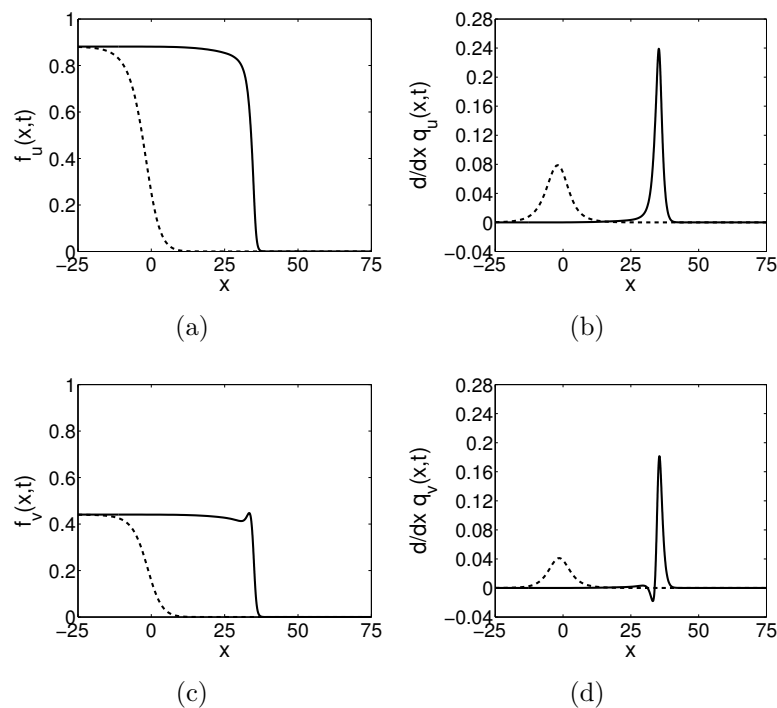


Abbildung 8.16: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a) und $f_v(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) und des v -Flusses (d) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die minimale Überschusslösung in v .

stand. Man sieht ein kleines positives Maximum, das für den Unterschuss steht, ein negatives Minimum, das für die Entwässerungsfront in v steht, und ein großes positives Maximum, das für die Hauptbewässerungsfront in v steht. Der positive Bereich zwischen $-\infty$ und der ersten Nullstelle und der negative Bereich zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle sind gerade so groß, dass der Überschuss der linken Randsättigung gleicht. Auch hier gleichen sich die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 30$ den Sättigungsprofilen.

In Abbildung 8.17 ist die Terrassenpunktlösung in v gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.17(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.5. Dabei besteht die u -Welle aus zwei Wellen. Die erste Welle ist die der $u - v$ -Sättigung und hat ihren Mittelpunkt bei $x = 0$, während die zweite die der v -Sättigung um 1.4 nach rechts verschoben ist. Die Abbildung 8.17(b) beleuchtet die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.17(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. In Abbildung 8.17(d) ist das Profil nach $t = 100$ zu sehen. Die Abbildung 8.17(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.17(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.17(e) und 8.17(f) zeigen ganz klar, dass nach $t = 30$ sich ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit

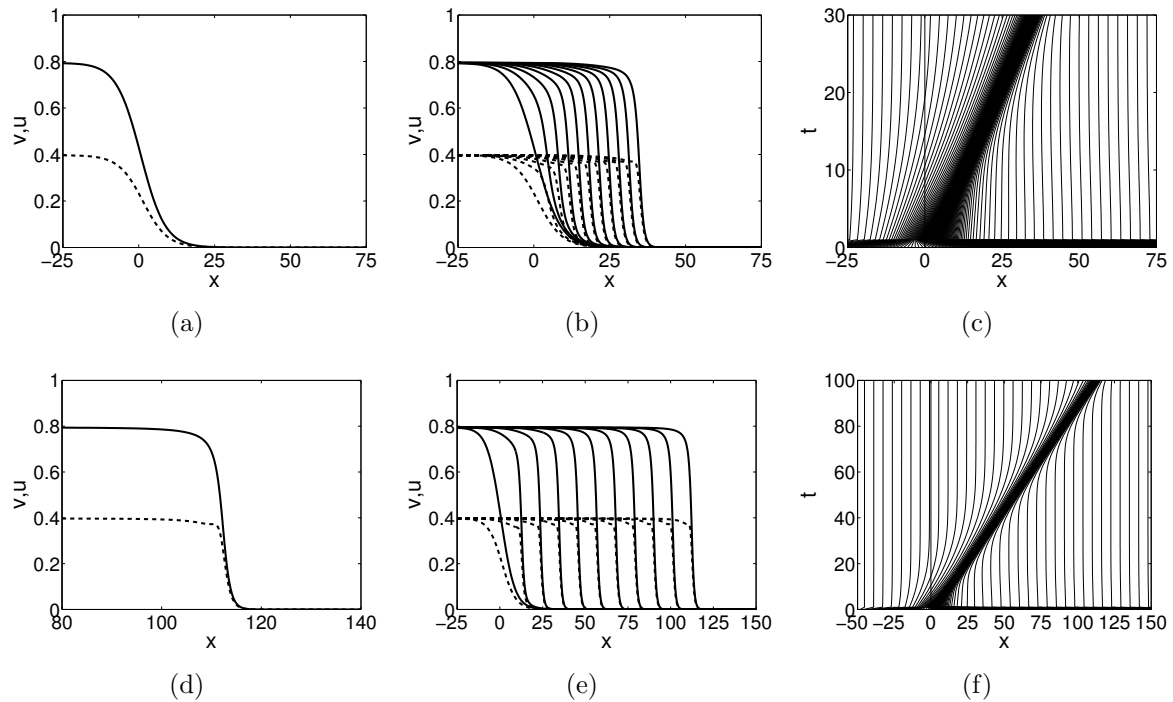


Abbildung 8.17: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 3$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Terrassenpunktlösung in v .

$c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.17(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein, d.h. der Terrassenpunkt ist qualitativ und quantitativ identisch.

Die Abbildungen 8.17(b) und 8.17(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Dabei sieht man, dass die u - und v -Front sich nur ein wenig staucht. Der Bereich, in dem sich u verändert, während v gleich bleibt, ist zu klein, um nichtmonotones Verhalten auszulösen. Deswegen kann nur eine Treppe entstehen.

In Abbildung 8.18 sieht man für die Terrassenpunktlösung in v die Flussfunktionen f_u und f_v und die Ableitungen aus (8.24) des u - und v -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13) ist diese gleich der zeitlichen Ableitung der u - und v -Sättigung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine überall positive Glocke, welche zu einer Stauchung führt. Über die Zeit ändert sich nur Höhe und Breite der Glocke. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ unterscheidet sich kaum von der positiven Glocke aus der minimalen Überschusslösung. Es führt wieder zu einer Stauchung. Über die Zeit ändert sich die Funktion, aber nicht so stark wie in den anderen Lösungen. Sie bleibt dauerhaft positiv und berührt nur kurz bei dem Terrassenpunkt die x -Achse,

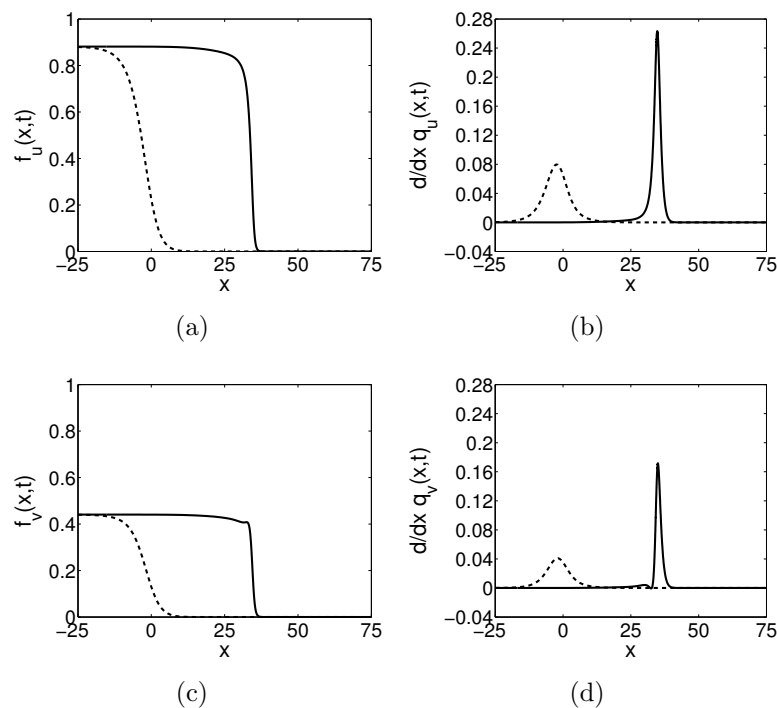


Abbildung 8.18: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a) und $f_v(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) und des v -Flusses (d) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die Terrassenpunktlösung in v .

ohne sie zu schneiden. Zum Zeitpunkt $t = 30$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 30$ den Sättigungsprofilen.

In Abbildung 8.19 ist die Terrassenpunktlösung in u gezeigt. Sie besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.19(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.5. Dabei besteht die u -Welle aus zwei Wellen. Die erste Welle ist die der v -Sättigung und hat ihren Mittelpunkt bei $x = 0$, während die zweite die der $u - v$ -Sättigung um 25 nach rechts verschoben ist. Die Abbildung 8.19(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 3$ bis Zeitpunkt $t = 30$ und Abbildung 8.19(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.19(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.19(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.19(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.19(e) und 8.19(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 30$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1.11$ fortbewegt. Das Profil in 8.19(d) stimmt exakt mit dem quasianalytischen Profil überein, d.h. der Terrassenpunkt ist qualitativ und quantitativ identisch.

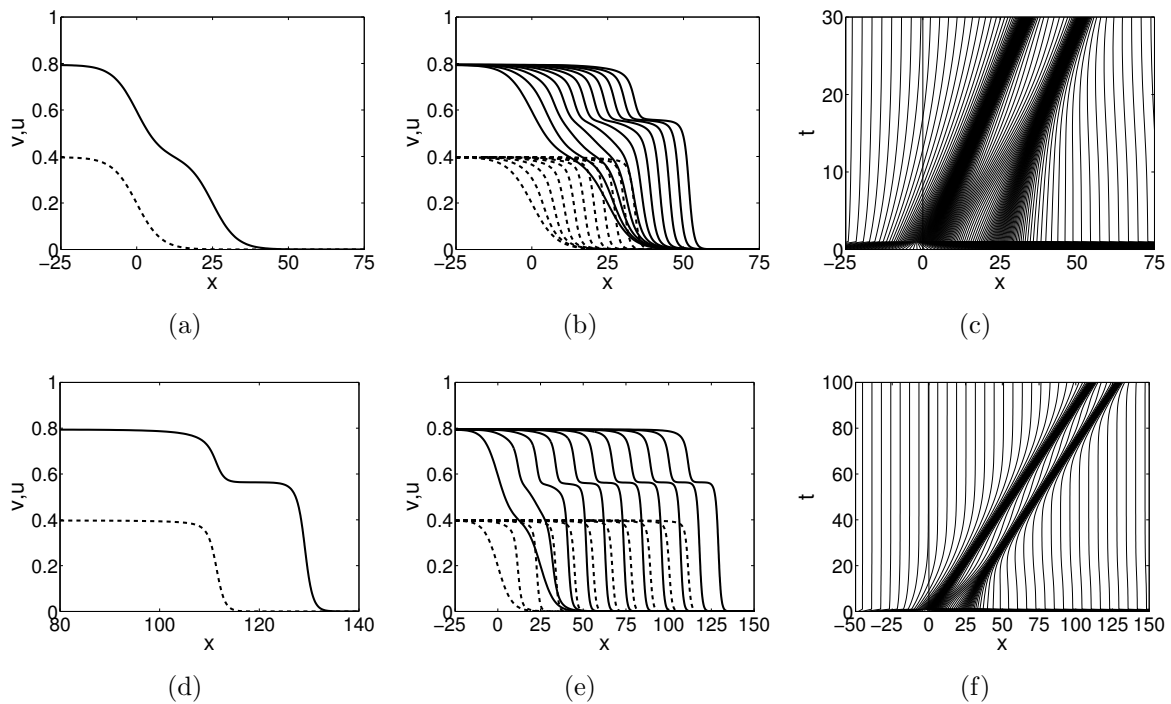


Abbildung 8.19: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen) und v (gestrichelt), anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 3$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 30)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Terrassenpunktlösung in u .

Die Abbildungen 8.19(b) und 8.19(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Die v -Front bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit und nur einer kleinen Stauchung fort. Der Teil der u -Front, der sich vor der v -Front befindet, wird beschleunigt, womit sich eine schnellere Teilfront ausbildet. Dies führt zu einem Treppemuster.

In Abbildung 8.20 sieht man für die Terrassenpunktlösung in u die Flussfunktionen f_u und f_v und die Ableitungen aus (8.24) des u -Flusses und v -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 30$ als durchgezogene Linie. Nach Gleichung (8.13) ist diese gleich der zeitlichen Ableitung der u - und v -Sättigung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit zwei positiven Maxima. Das linke Maxima wird von der v -Front verursacht und bewirkt ein Ansteigen von u . Dies führt zu einer Terrassenpunktlösung. Über die Zeit separieren sich die zwei Maxima zu zwei positiven Glocken. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ ist eine überall positive Glocke, welche zu einer Stauchung führt. Über die Zeit ändert sich nur Höhe und Breite der Glocke. Zum Zeitpunkt $t = 30$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie

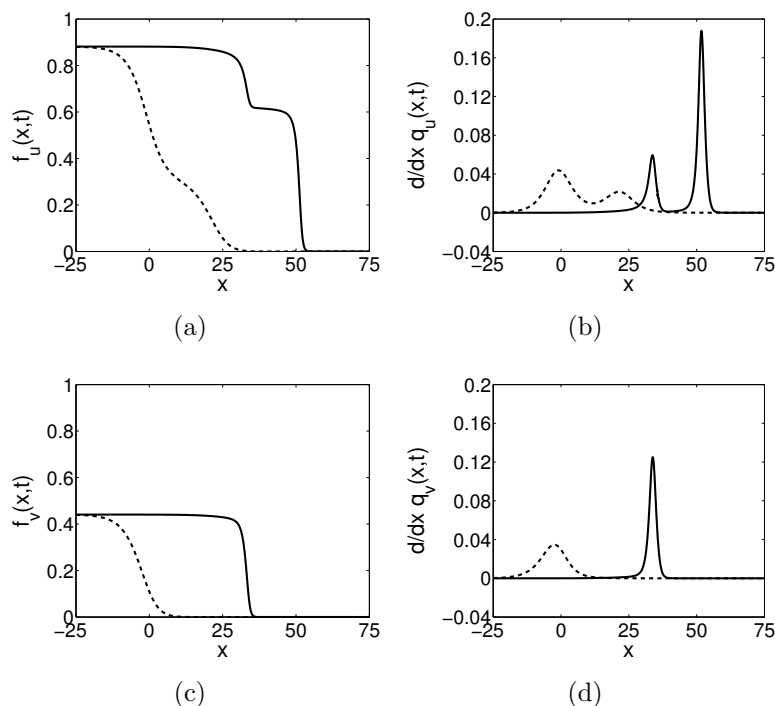


Abbildung 8.20: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a) und $f_v(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (b) und des v -Flusses (d) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 30$ (durchgezogen) für die Terrassenpunktlösung in v .

bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 30$ den Sättigungsprofilen.

Alle quasianalytischen Profile können also numerisch nachgebildet werden.

Zuletzt wird die Bedeutung des in dem quasianalytischen Teil gefundenen Freiheitsgrades λ diskutiert. Man sieht sofort, dass der Freiheitsgrad λ aus den quasianalytischen Lösungen mit dem Abstand

$$\Delta_v^{u-v} = x_0^{u-v} - x_0^v \quad (8.25)$$

zusammenhängt, der die zwei Anfangswellen in $u - v$ und v trennt. Es kann folgende Funktionalität zwischen λ und Δ_v^{u-v} unabhängig von κ gefunden werden

$$\lambda_\kappa(\Delta_v^{u-v}) = 1 - \lambda_\kappa(-\Delta_v^{u-v}), \quad (8.26a)$$

$$\lambda_\kappa(0) = 0.5, \quad (8.26b)$$

$$\lambda_\kappa(-\infty) = 1, \quad (8.26c)$$

λ	$(-1.4, \infty)$	$(-2.2, -1.4)$	$(-\infty, -2.2)$
monoton fallend in u	ja	ja	ja
monoton fallend in v	ja	nein	nein
Überschuss in u	nein	nein	nein
Überschuss in v	nein	nein	ja

Tabelle 8.6: Bifurkationen mit Parameter Δ_v^{u-v} mit Parameter $\kappa = 0.125$

Desweiteren ergibt sich für $\kappa = 0.125$

$$\lambda_{0.125}(-1.2) = 0.68, \quad (8.27a)$$

$$\lambda_{0.125}(-2.2) = 0.7. \quad (8.27b)$$

Damit können die Bifurkationen in Tabelle 6.9 äquivalent mit dem Parameter Δ_v^{u-v} formuliert werden. Dies ist in Tabelle 8.6 dargestellt.

Physikalisch können diese Verschiebungen durch kleine, im Modell nicht berücksichtigte Heterogenitäten im porösen Medium verursacht werden, die eine der Sättigungen kurzzeitig schneller fließen lassen und somit nach vorne verschieben.

8.4 Systeme dreier Gleichungen

In diesem Abschnitt werden Systeme dreier fraktionaler Flussgleichungen (7.3) numerisch untersucht. Dabei wird die Näherung der nichtexistierenden Massenaustauschtermen aus Abschnitt 7.2 verwendet, um die gekoppelten Flüsse zu untersuchen. Im ersten Unterabschnitt werden die Gleichungen und die Anfangs- und Randbedingungen in den numerischen Löser implementiert. Im zweiten Unterabschnitt werden die Ergebnisse und die Vergleiche zu den quasianalytischen Lösungen dargestellt.

8.4.1 Kein Massenaustauschterm

8.4.1.1 Implementierung

Die fraktionalen Flussgleichungen (7.3) der allgemeinen Systeme dreier Gleichungen können mit den Annahmen aus Abschnitt 7.2 in folgende Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - f_u(u, v, w) \right], \quad (8.28a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - f_v(u, v, w) \right], \quad (8.28b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - f_w(u, v, w) \right] \quad (8.28c)$$

gebracht werden. Die fraktionalen Flussfunktionen f_u, f_v, f_w sind in (7.20) definiert.

Mit $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ folgt damit für die Funktionen des Algorithmus aus (8.1)

$$C \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.29a)$$

$$Q \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = (0, 0, 0)^T, \quad (8.29b)$$

$$R \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_u(u, v, w), \frac{\partial v}{\partial x} - f_v(u, v, w), \frac{\partial w}{\partial x} - f_w(u, v, w) \right)^T. \quad (8.29c)$$

Die links und rechtsseitigen Randwerte der quasianalytischen Lösungen

$$u_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} u(y), \quad (8.30a)$$

$$u_r = \lim_{y \rightarrow \infty} u(y), \quad (8.30b)$$

$$v_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} v(y), \quad (8.30c)$$

$$v_r = \lim_{y \rightarrow \infty} v(y), \quad (8.30d)$$

$$w_\ell = \lim_{y \rightarrow -\infty} w(y), \quad (8.30e)$$

$$w_r = \lim_{y \rightarrow \infty} w(y) \quad (8.30f)$$

werden als Dirichlet-Randbedingungen durch die Randbedingungsfunktionen aus (8.2) folgendermaßen

$$\mathbf{B} \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (0, 0, 0)^T, \quad (8.31a)$$

$$\mathbf{B} \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = (0, 0, 0)^T, \quad (8.31b)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (0, 0, 0)^T, \quad (8.31c)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{x=x_r} \right) = (0, 0, 0)^T, \quad (8.31d)$$

$$\Gamma \left(x_\ell, t, \mathbf{u}(x_\ell, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} \right) = (u(x_\ell, t) - u_\ell, v(x_\ell, t) - v_\ell, w(x_\ell, t) - w_\ell)^T, \quad (8.31e)$$

$$\Gamma \left(x_r, t, \mathbf{u}(x_r, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \right) = (u(x_r, t) - u_r, v(x_r, t) - v_r, w(x_r, t) - w_r)^T \quad (8.31f)$$

modelliert.

Die Anfangsbedingungen werden hier durch Tangenshyperbolikusfunktionen dargestellt

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} \frac{u_\ell - v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^{u-v}))) + \frac{u_r - v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^{u-v}))) + \\ + \frac{v_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^v))) + \frac{v_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^v))) \\ \frac{w_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^w))) + \frac{w_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^w))) \\ \frac{w_\ell}{2} (1 - \tanh(\kappa(x - x_0^w))) + \frac{w_r}{2} (1 + \tanh(\kappa(x - x_0^w))) \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

wobei x_0^{u-v} , x_0^v , x_0^w die Positionen der Mittelpunkte der Wellen von $u - v$, v und w und κ die Steilheit der drei Wellen angibt. Damit besteht die u -Welle aus einer Superposition zweier Tangenshyperbolikusfunktionen. Damit ist sichergestellt, dass $u > v$.

8.4.1.2 Ergebnisse

Im Kapitel 7 über drei Gleichungen wurden insgesamt 59 Profile gezeigt. Alle ihre numerischen Lösungen hier darzustellen, würde den Rahmen der Arbeit sprengen, deswegen beschränkt sich dieser Abschnitt zum einen auf das Entstehen der interessantesten dreidimensionalen Profile, nämlich denen aus Abbildung 7.21, und zum anderen auf die physikalische Bedeutung der zwei Freiheitsgrade.

Die sechs interessantesten dreidimensionalen Profile aus Abbildung 7.21 sind in den Abbildungen 8.21, 8.23, 8.25, 8.27, 8.29 und 8.31 abgebildet. Ihre Rahmenbedingungen sind in

Abb.	(u_ℓ, v_ℓ, w_ℓ)	(u_r, v_r, w_r)	κ	x_0^{u-v}	x_0^v	x_0^w
8.21	(0.5, 0.25, 0.25)	(0, 0, 0)	0.5	0	20	40
8.23	(0.5, 0.25, 0.25)	(0, 0, 0)	0.5	0	40	20
8.25	(0.5, 0.25, 0.25)	(0, 0, 0)	0.5	20	0	40
8.27	(0.5, 0.25, 0.25)	(0, 0, 0)	0.5	40	0	20
8.29	(0.5, 0.25, 0.25)	(0, 0, 0)	0.5	20	40	0
8.31	(0.5, 0.25, 0.25)	(0, 0, 0)	0.5	40	20	0

Tabelle 8.7: Randwerte und Parameter für die Anfangsbedingungen für die Abbildungen 8.21, 8.23, 8.25, 8.27, 8.29 und 8.31.

Tabelle 8.7 dargestellt.

Das anfängliche u -Profil ist wieder aus einer Superposition der $u - v$ -Welle und der v -Welle zusammengesetzt, damit immer $u > v$ gilt. Außerdem wurde im quasianalytischen Teil ersichtlich, dass die grundlegenden Wasservariablen nicht u und v , sondern $u - v$ und v sind. Alle Invarianzen und Symmetrien liegen den Variablen $u - v, v, 1 - u - w, w$ zugrunde.

In Abbildung 8.21 ist die Lösung aus Abbildung 7.21(a) gezeigt, dabei ist das u -Profil mit einer durchgezogenen Linie, das v -Profil mit einer gestrichelten Linie und das $1 - w$ -Profil mit einer gestrichpunkteten Linie dargestellt. Die Lösung besteht aus einem doppelten Überschuss in w , einem einfachen Überschuss in v und einer Terrasse in u . Die Abbildung besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.21(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.7. Dabei haben die $u - v, v$ - und w -Welle das selbe Profil. Die u -Welle ist aus der v -Welle und der $u - v$ -Welle zusammengesetzt. Die v -Welle ist um 20 und die w -Welle um 40 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.21(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 4$ bis Zeitpunkt $t = 40$ und Abbildung 8.21(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.21(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.21(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.21(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.21(e) und 8.21(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 40$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1$ fortbewegt. Das Profil in 8.21(d) stimmt mit dem quasianalytischen Profil überein.

Die Abbildungen 8.21(b) und 8.21(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Alle drei Wellen starten langsamer als in ihrem stationären Profil. Die linke Charakteristik ist die $u - v$ -Welle, die mittlere ist

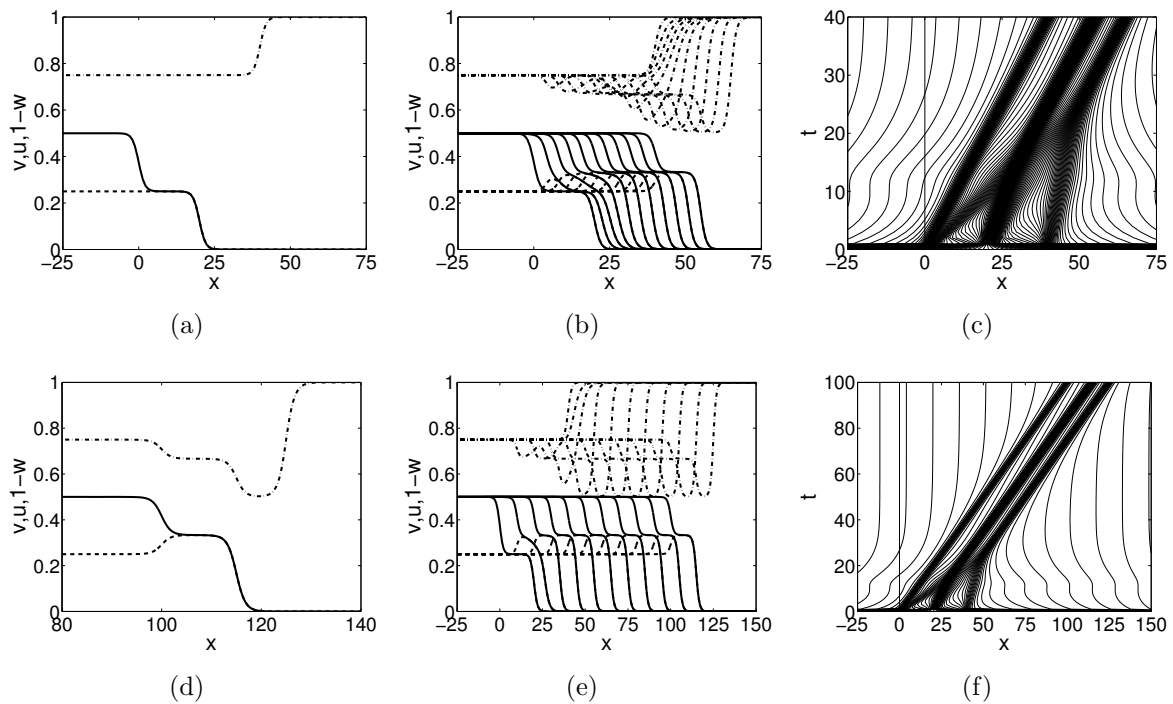


Abbildung 8.21: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1-w$ gestrichpunktet, anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 4$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 40)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Lösung aus Abbildung 7.21(a).

die v -Welle und die rechte ist die w -Welle. Man sieht, dass die $u-v$ -Front jeweils einen Überschuss in v und w bewirkt, der deutlich schneller ist als die anderen Wellen. Das Ansteigen der v -Sättigung bewirkt natürlich auch ein Ansteigen der u -Sättigung, da die v -Sättigung Teil der u -Sättigung ist. Nach kurzer Zeit trifft der Überschuss in v auf die Hauptfront in v . Es bildet sich eine stabile Überschusslösung in v und eine Treppenzlösung in u aus, wobei die Höhe des Überschusses gleich die der Treppe ist, d.h. die gesamte u -Sättigung besteht aus v . Danach laufen beide Wellen schneller als zuvor. Neben dem Überschuss in w , der durch die $u-v$ -Front verursacht wird, entsteht ein zweiter Überschuss bei der v -Front. Er verbindet sich nach $t = 30$ mit der w -Hauptfront. Daraufhin nimmt auch die w -Welle an Fahrt auf. Dann laufen alle drei Wellen mit der gleichen Geschwindigkeit $c = 1$.

In Abbildung 8.22 sieht man die Flussfunktionen f_u , f_v und f_w und die Ableitungen des u -, v - und w -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 40$ als durchgezogene Linie. Jede ist gleich der zeitlichen Ableitung ihrer Sättigung und ist wie in Gleichung (8.24) definiert. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit zwei positiven Maxima. Das rechte Maximum wird von der v -Front verursacht und bewirkt ein Aufstauen und damit ein Ansteigen von u . Das linke Maximum zeigt die $u-v$ -Front. Dies führt zu

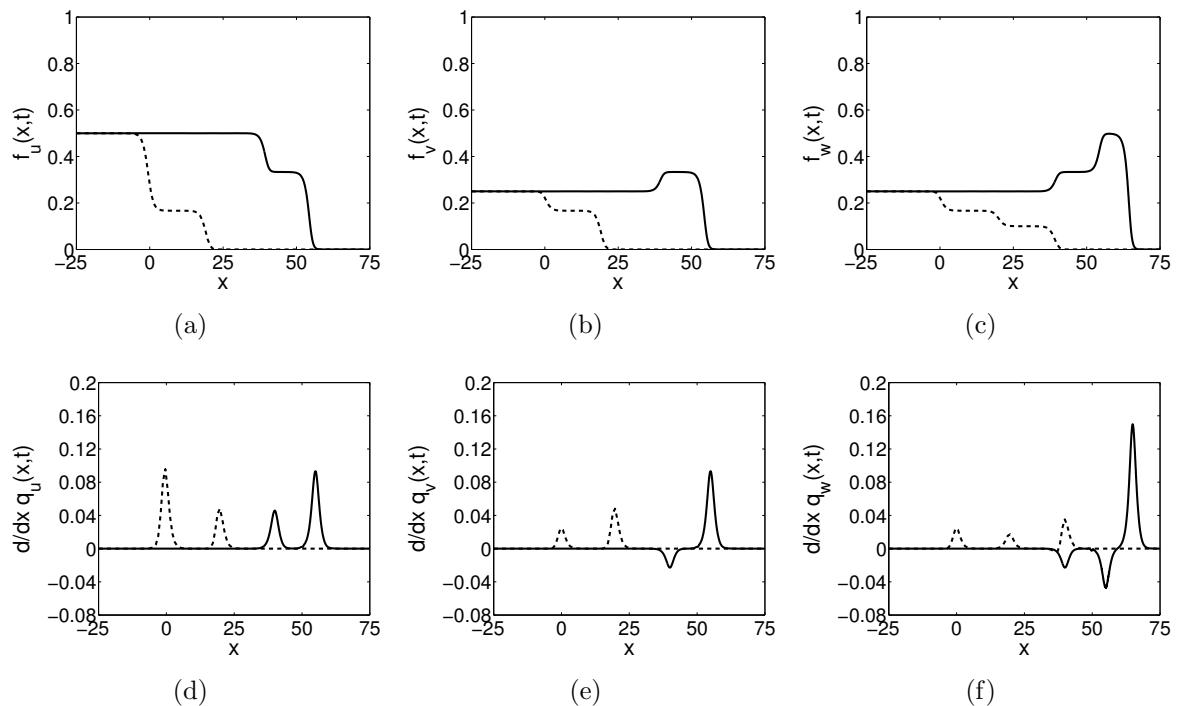


Abbildung 8.22: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x,t)$ (a), $f_v(x,t)$ (b) und $f_w(x,t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (d), des v -Flusses (e) und des w -Flusses (f) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 40$ (durchgezogen) für die Lösung aus Abbildung 7.21(a).

einer Terrassenpunktlösung. Über die Zeit ändert sich nur die Höhe der beide Maxima. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x,0)$ hat zwei positive Maxima. Das erste Maximum wird durch die $u-v$ -Front verursacht und bewirkt einen Überschuss. Im stationären Profil hat $\frac{d}{dx}q_v(x,0)$ eine negative und eine positive Glocke, was für eine stabile Überschusslösung steht. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_w(x,0)$ besitzt zunächst drei positive Maxima. Die ersten zwei sind von der $u-v$ - und v -Front verursacht und bewirken einen doppelten Überschuss. Bei $x = 40$ ist ein weiteres Maximum, das für die Hauptfront steht. Im stationären Profil gibt es zwei negative Minima gefolgt von einem positiven Maximum. Dies steht für den doppelten Überschuss. Zum Zeitpunkt $t = 40$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 40$ den Sättigungsprofilen. Der doppelte Überschuss in w ging natürlich mit einem Aufstauen einher. Dies wird durch den reduzierten Abstand zwischen der v - und w -Front deutlich. Er reduziert sich von 40 auf 25.

In Abbildung 8.23 ist die Lösung aus Abbildung 7.21(b) gezeigt, dabei ist das u -Profil mit einer durchgezogenen Linie, das v -Profil mit einer gestrichelten Linie und das $1-w$ -Profil

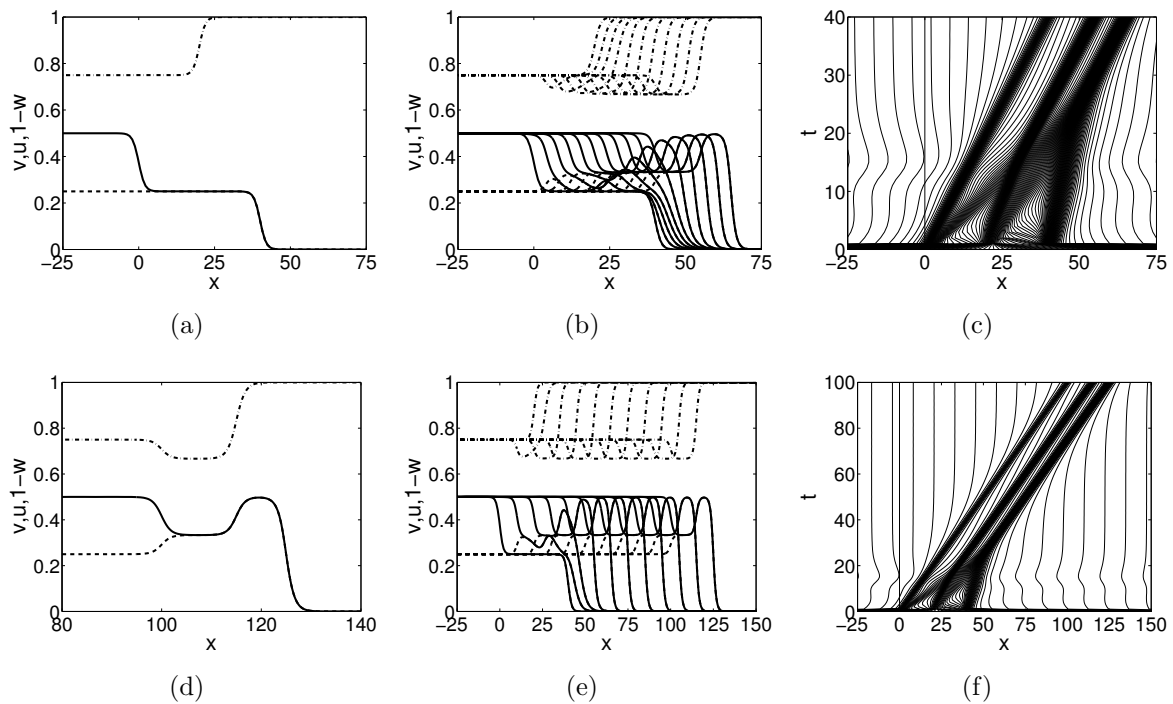


Abbildung 8.23: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1-w$ gestrichpunktet, anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 4$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 40)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Lösung aus Abbildung 7.21(b).

mit einer gestrichpunkteten Linie dargestellt. Die Lösung besteht aus einem doppelten Überschuss in v , einem einfachen Überschuss in w und einem Unterschuss in u . Die Abbildung besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.23(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.7. Dabei haben die $u-v$, v - und w -Welle das selbe Profil. Die u -Welle ist aus der v -Welle und der $u-v$ -Welle zusammengesetzt. Die v -Welle ist um 40 und die w -Welle um 20 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.23(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 4$ bis Zeitpunkt $t = 40$ und Abbildung 8.23(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.23(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.23(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.23(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.23(e) und 8.23(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 40$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1$ fortbewegt. Das Profil in 8.23(d) stimmt mit dem quasianalytischen Profil überein.

Die Abbildungen 8.23(b) und 8.23(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Alle drei Wellen starten langsamer

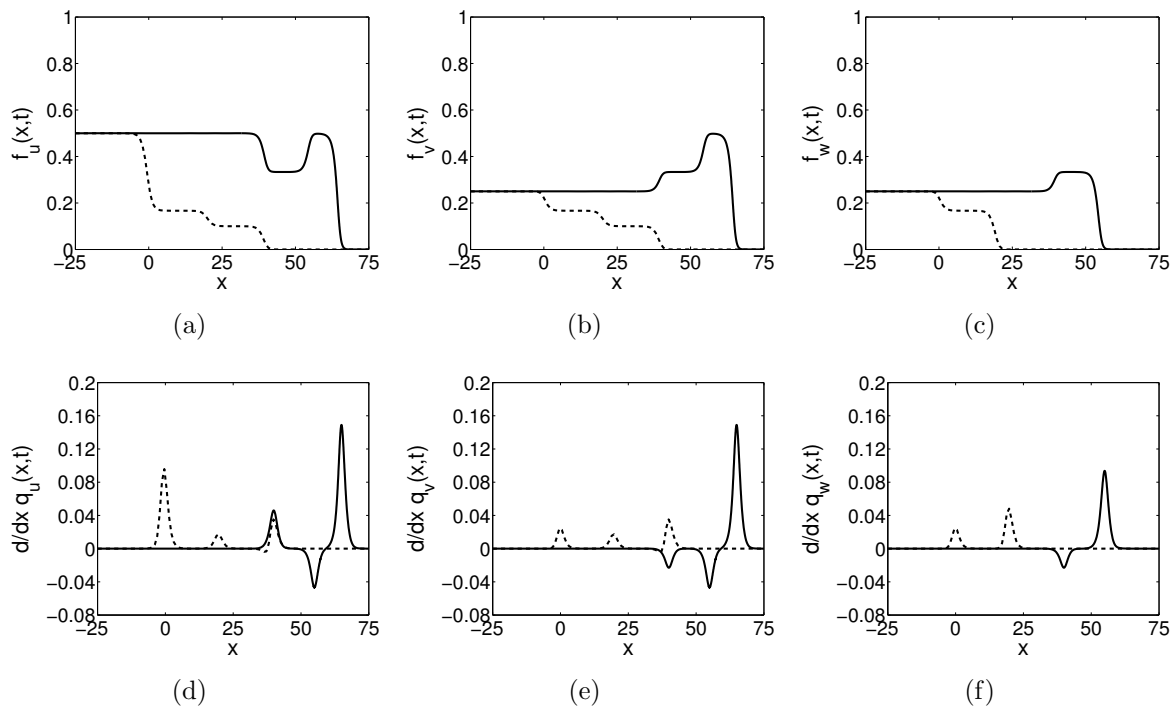


Abbildung 8.24: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a), $f_v(x, t)$ (b) und $f_w(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (d), des v -Flusses (e) und des w -Flusses (f) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 40$ (durchgezogen) für die Lösung aus Abbildung 7.21(b).

als in ihrem stationären Profil. Die linke Charakteristik ist die $u - v$ -Welle, die mittlere ist die w -Welle und die rechte ist die v -Welle. Man sieht, dass die $u - v$ -Front jeweils einen Überschuss in v und w bewirkt, der deutlich schneller ist als die anderen Wellen. Desweiteren bewirkt die v -Front ein Ansteigen der u -Sättigung. Nach kurzer Zeit trifft der Überschuss in w auf die Hauptfront in w . Die w -Front bewirkt auch ein Ansteigen der u - und v -Sättigung. Durch das zweifache Ansteigen der v -Sättigung entsteht ein doppelter Überschuss in v . Die Sättigung in u zieht parallel mit dem Anstieg in v mit, dabei entsteht eine Unterschusslösung, dort ist die u -Sättigung gleich der v -Sättigung. Alle drei Wellen wurden insgesamt beschleunigt und laufen mit der gleichen Geschwindigkeit $c = 1$.

In Abbildung 8.24 sieht man die Flussfunktionen f_u , f_v und f_w und die Ableitungen des u -, v - und w -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 40$ als durchgezogene Linie. Jede ist gleich der zeitlichen Ableitung ihrer Sättigung und ist wie in Gleichung (8.24) definiert. Die Funktion $\frac{d}{dx} q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit drei positiven Glocken. Das rechte Maximum wird von der v -Front und das mittlere Maximum wird von der w -Front verursacht. Über die Zeit entstehen ein positives Maximum gefolgt von einem negativen Minimum gefolgt von einem positiven Maximum. Dies steht für eine

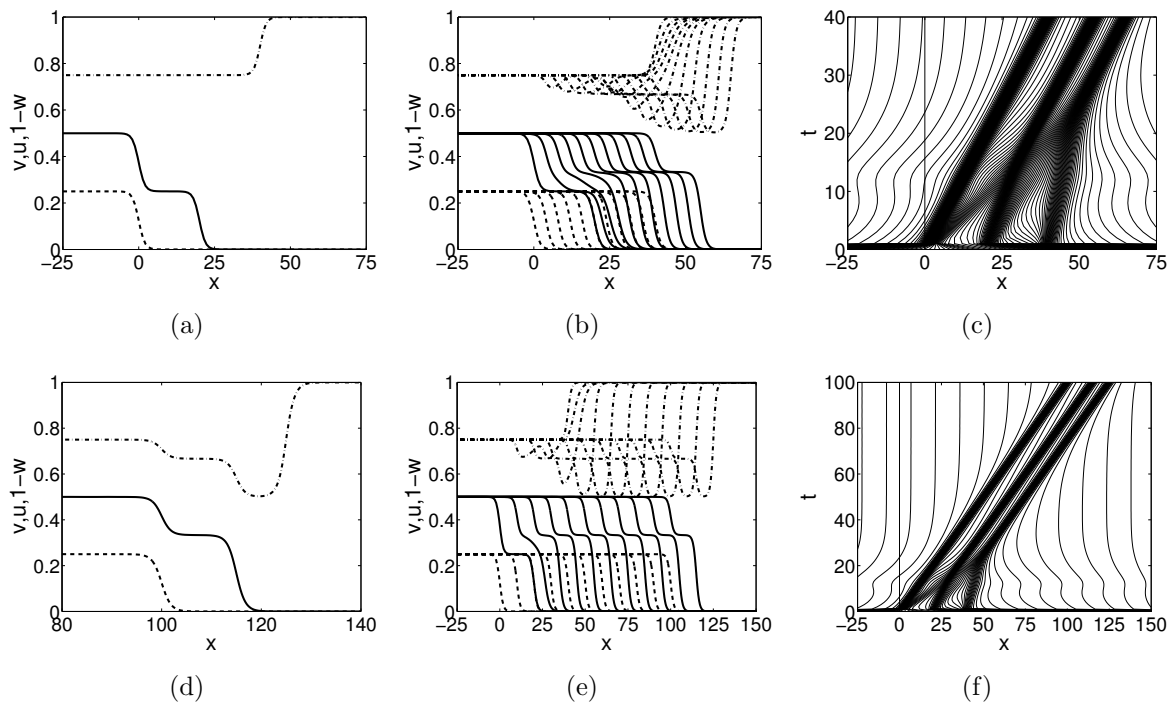


Abbildung 8.25: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1-w$ gestrichpunktet, anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 4$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 40)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Lösung aus Abbildung 7.21(c).

Unterschusslösung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ hat drei positive Maxima. Das linke Maximum wird durch die $u-v$ -Front und das mittlere von der w -Front verursacht. Sie bewirken einen doppelten Überschuss. Im stationären Profil hat $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ zwei negative gefolgt von einer positiven Glocke. Dies zeigt, dass der doppelte Überschuss stabil ist. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_w(x, 0)$ besitzt zunächst zwei positive Maxima. Sie entstehen durch den Einfluss von $u-v$ und der Hauptfront in w . Dies bewirkt insgesamt einen Überschuss. Im stationären Profil gibt es ein Minimum gefolgt von einem Maximum. Dies steht für einen stabilen Überschuss. Zum Zeitpunkt $t = 40$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 40$ den Sättigungsprofilen. Der doppelte Überschuss in w ging natürlich mit einem Aufstauen einher. Dies wird durch den reduzierten Abstand zwischen der v - und w -Front deutlich. Er reduziert sich von 20 auf 10.

In Abbildung 8.25 ist die Lösung aus Abbildung 7.21(c) gezeigt, dabei ist das u -Profil mit einer durchgezogenen Linie, das v -Profil mit einer gestrichelten Linie und das $1-w$ -Profil mit einer gestrichpunkteten Linie dargestellt. Die Lösung besteht aus einem doppelten Über-

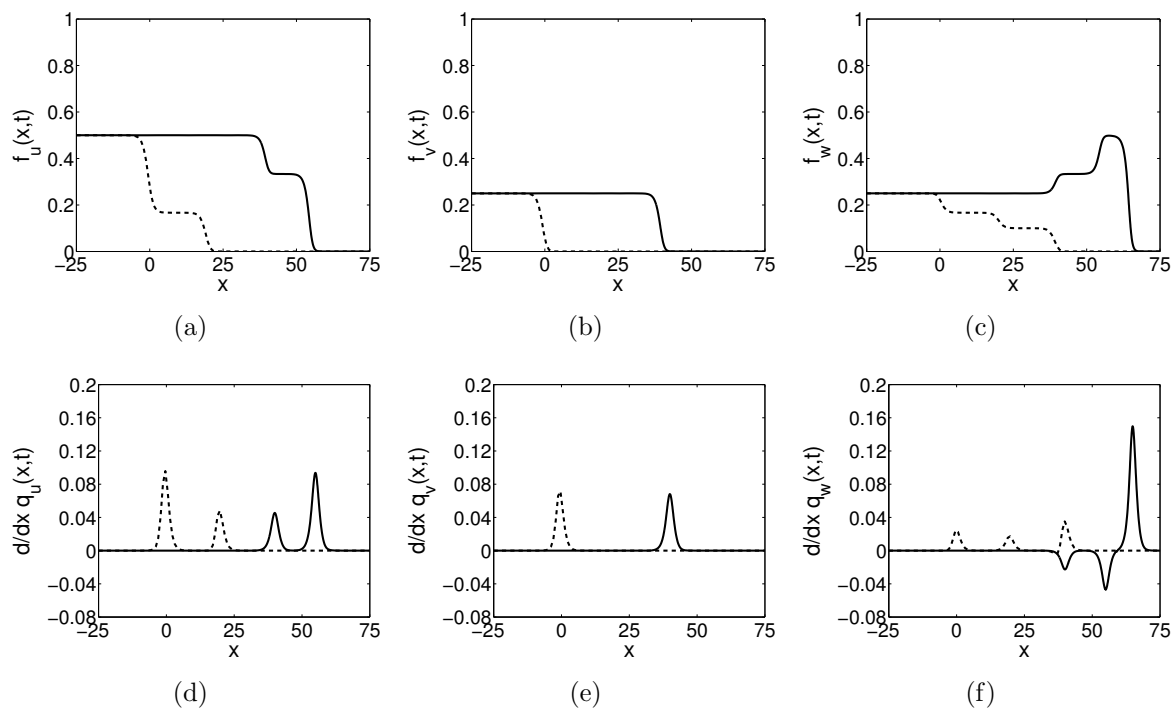


Abbildung 8.26: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x,t)$ (a), $f_v(x,t)$ (b) und $f_w(x,t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (d), des v -Flusses (e) und des w -Flusses (f) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 40$ (durchgezogen) für die Lösung aus Abbildung 7.21(c).

schuss in w , einem einfachen Überschuss in $u - v$ und einer Terrasse in u . Die Abbildung besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.25(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.7. Dabei haben die $u - v$, v - und w -Welle das selbe Profil. Die u -Welle ist aus der v -Welle und der $u - v$ -Welle zusammengesetzt. Die $u - v$ -Welle ist um 20 und die w -Welle um 40 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.25(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 4$ bis Zeitpunkt $t = 40$ und Abbildung 8.25(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.25(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.25(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.25(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.25(e) und 8.25(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 40$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1$ fortbewegt. Das Profil in 8.25(d) stimmt mit dem quasianalytischen Profil überein.

Die Abbildungen 8.25(b) und 8.25(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Die linke Charakteristik ist die v -Welle, die mittlere ist die $u - v$ -Welle und die rechte ist die w -Welle. Die v -Welle, die hinter den anderen startet, bewegt sich von Anfang an mit Geschwindigkeit $c = 1$ vorwärts und

verändert sich nicht. Dies liegt daran, dass sich im Bereich hinter ihrer Front die u - und w -Sättigungen nicht mehr verändern. Die v -Front bewirkt ein durch Aufstauen verursachtes Ansteigen der u -Sättigung. Dieser Einfluss bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit vorwärts. Dies führt zu einem Terrassenprofil und einem Beschleunigen auf $c = 1$. Die $u - v$ - und v -Front erzwingen einen doppelten Überschuss in w , der die anfangs langsame w -Welle auf $c = 1$ beschleunigt.

In Abbildung 8.26 sieht man die Flussfunktionen f_u , f_v und f_w und die Ableitungen des u -, v - und w -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 40$ als durchgezogene Linie. Jede ist gleich der zeitlichen Ableitung ihrer Sättigung und ist wie in Gleichung (8.24) definiert. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit zwei positiven Maxima. Das linke Maximum wird von der v -Front verursacht. Über die Zeit verändern die zwei Maxima nur ihre Höhe. Zwei Maxima stehen für eine Terrassenlösung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ hat ein positives Maximum. Dies steht für ein klassisches monotonen Verhalten und es ändert sich über die Zeit auch nicht. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_w(x, 0)$ besitzt zunächst drei positive Maxima. Die ersten zwei Maxima werden durch die $u - v$ - und v -Front verursacht und bewirken den doppelten Überschuss. Im stationären Profil gibt es zwei Minima gefolgt von einem Maximum, was für einen stabilen doppelten Überschuss steht. Zum Zeitpunkt $t = 40$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 40$ den Sättigungsprofilen. Die Terrassenlösung in u entsteht durch das zusätzliche Abfließen wegen der Veränderung in v . Dies sieht man auch daran, dass sich der Abstand der Hauptfronten von u und v von 10 auf 18 erhöht hat. Das für den doppelten Überschuss benötigte Aufstauen in w ist im kleiner werdenden Abstand der Fronten von v und w sichtbar. Er verringert sich von 40 auf 30.

In Abbildung 8.27 ist die Lösung aus Abbildung 7.21(d) gezeigt, dabei ist das u -Profil mit einer durchgezogenen Linie, das v -Profil mit einer gestrichelten Linie und das $1 - w$ -Profil mit einer gestrichpunkteten Linie dargestellt. Die Lösung besteht aus einem doppelten Überschuss in $u - v$, einem einfachen Überschuss in w und einem Unterschuss in u . Die Abbildung besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.27(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.7. Dabei haben die $u - v$, v - und w -Welle das selbe Profil. Die u -Welle ist aus der v -Welle und der $u - v$ -Welle zusammengesetzt. Die $u - v$ -Welle ist um 40 und die w -Welle um 20 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.27(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 4$ bis Zeitpunkt $t = 40$ und Abbildung 8.27(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.27(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.27(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt

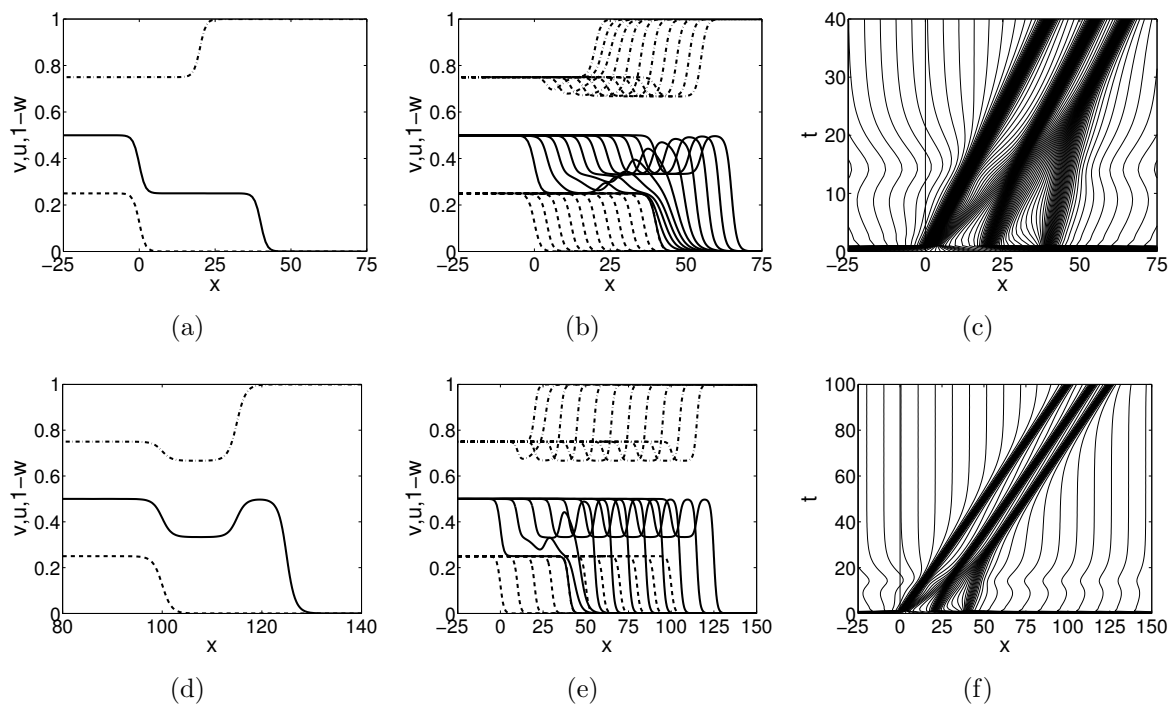


Abbildung 8.27: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1 - w$ gestrichpunktet, anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 4$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 40)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Lösung aus Abbildung 7.21(d).

$t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.27(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.27(e) und 8.27(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 40$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1$ fortbewegt. Das Profil in 8.27(d) stimmt mit dem quasianalytischen Profil überein.

Die Abbildungen 8.27(b) und 8.27(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Die linke Charakteristik ist die v -Welle, die mittlere ist die w -Welle und die rechte ist die $u - v$ -Welle. Die v -Welle, die hinter den anderen startet, bewegt sich von Anfang an mit Geschwindigkeit $c = 1$ vorwärts und verändert sich nicht. Dies liegt daran, dass sich im Bereich hinter ihrer Front die u - und w -Sättigungen nicht mehr verändern. Die v -Front bewirkt ein Ansteigen der u und w -Sättigung. Dabei entsteht ein Überschuss in w . Desweiteren entsteht wegen der w -Front ein durch Aufstauen entstandener Überschuss in u . Die u -Front wird insgesamt durch die v - und w -Einflüsse beschleunigt und bildet ein Unterschussprofil aus. Hierbei besteht die u -Sättigung komplett aus $u - v$, das in dieser Sättigung einen doppelten Überschuss aufweist. Die w -Front wird durch ihren Überschuss leicht auf $c = 1$ beschleunigt.

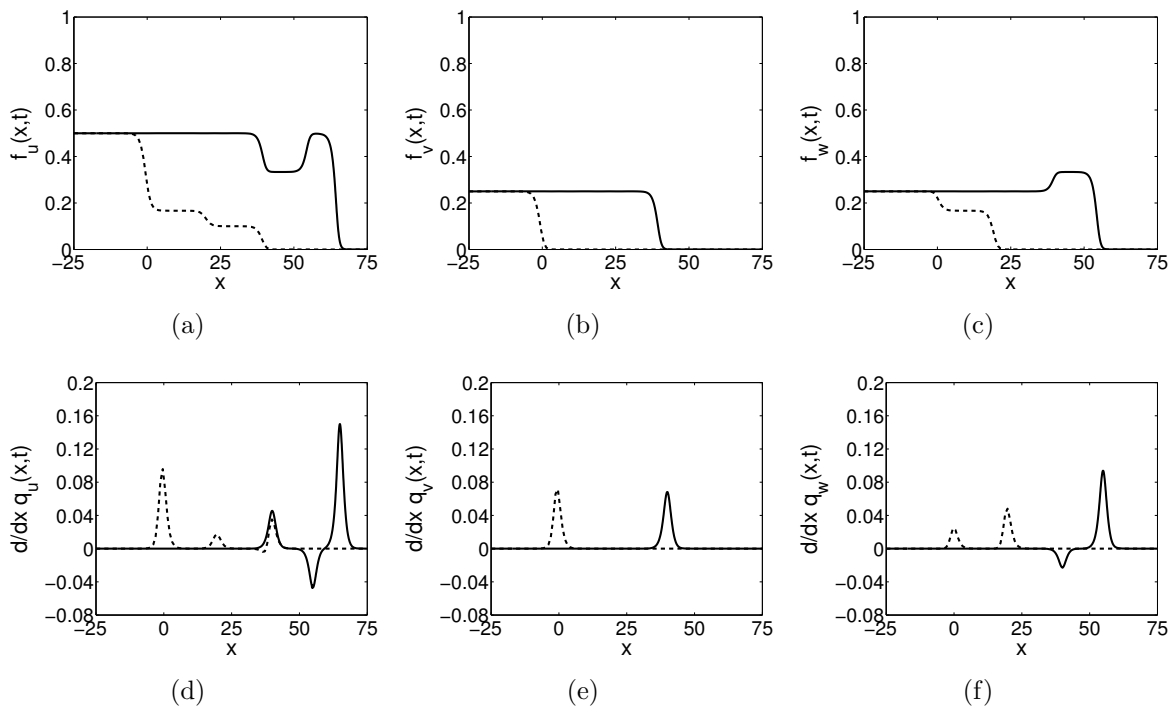


Abbildung 8.28: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a), $f_v(x, t)$ (b) und $f_w(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (d), des v -Flusses (e) und des w -Flusses (f) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 40$ (durchgezogen) für die Lösung aus Abbildung 7.21(d).

In Abbildung 8.28 sieht man die Flussfunktionen f_u , f_v und f_w und die Ableitungen des u -, v - und w -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 40$ als durchgezogene Linie. Jede ist gleich der zeitlichen Ableitung ihrer Sättigung und ist wie in Gleichung 8.24 definiert. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit drei positiven Maxima. Das linke Maximum ist dem v -Einfluss geschuldet und bewirkt einen Anstieg. Genauso bewirkt das rechte Maxima, das durch die w -Front entsteht, einen Anstieg in u . Über die Zeit entstehen ein positives Maximum gefolgt von einem negativen Minimum gefolgt von einem positiven Maximum. Dies steht für eine Unterschusslösung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ hat ein positives Maximum. Dies steht für ein klassisches monotonen Verhalten und es ändert sich über die Zeit auch nicht. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_w(x, 0)$ besitzt zunächst zwei positive Maxima. Das linke Maximum entsteht durch die v -Front und bewirkt einen Überschuss. Im stationären Profil gibt es ein Minimum gefolgt von einem Maximum. Dies steht für einen stabilen Überschuss. Zum Zeitpunkt $t = 40$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 40$ den Sättigungsprofilen. Der Überschuss in w geht mit einem Aufstauen einher. Dies wird durch den reduzierten Abstand zwischen der v -

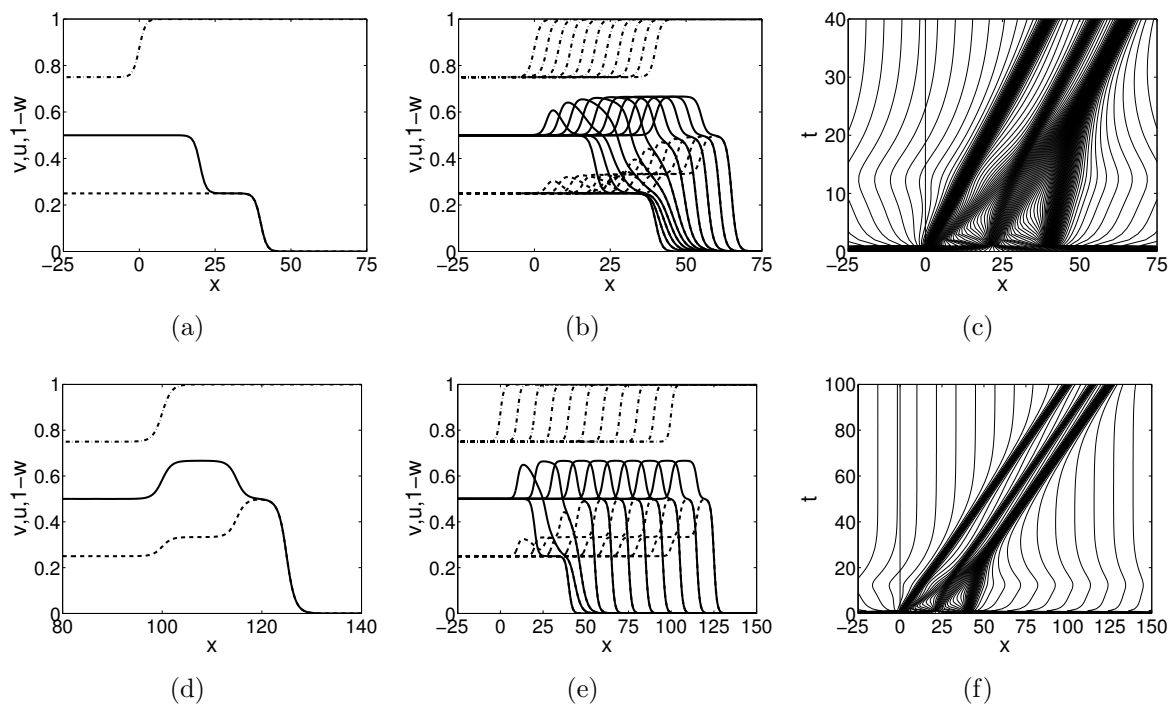


Abbildung 8.29: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1 - w$ gestrichpunktet, anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 4$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 40)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Lösung aus Abbildung 7.21(e).

und w -Front deutlich. Er reduziert sich von 20 auf 15.

In Abbildung 8.29 ist die Lösung aus Abbildung 7.21(e) gezeigt, dabei ist das u -Profil mit einer durchgezogenen Linie, das v -Profil mit einer gestrichelten Linie und das $1 - w$ -Profil mit einer gestrichpunkteten Linie dargestellt. Die Lösung besteht aus einem doppelten Überschuss in v , einem einfachen Überschuss in $u - v$ und einem einfachen nachgelagerten Überschuss in u . Die Abbildung besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.29(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.7. Dabei haben die $u - v$, v - und w -Welle das selbe Profil. Die u -Welle ist aus der v -Welle und der $u - v$ -Welle zusammengesetzt. Die $u - v$ -Welle ist um 20 und die v -Welle um 40 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.29(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 4$ bis Zeitpunkt $t = 40$ und Abbildung 8.29(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.29(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.29(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.29(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.29(e) und 8.29(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 40$ ein Profil

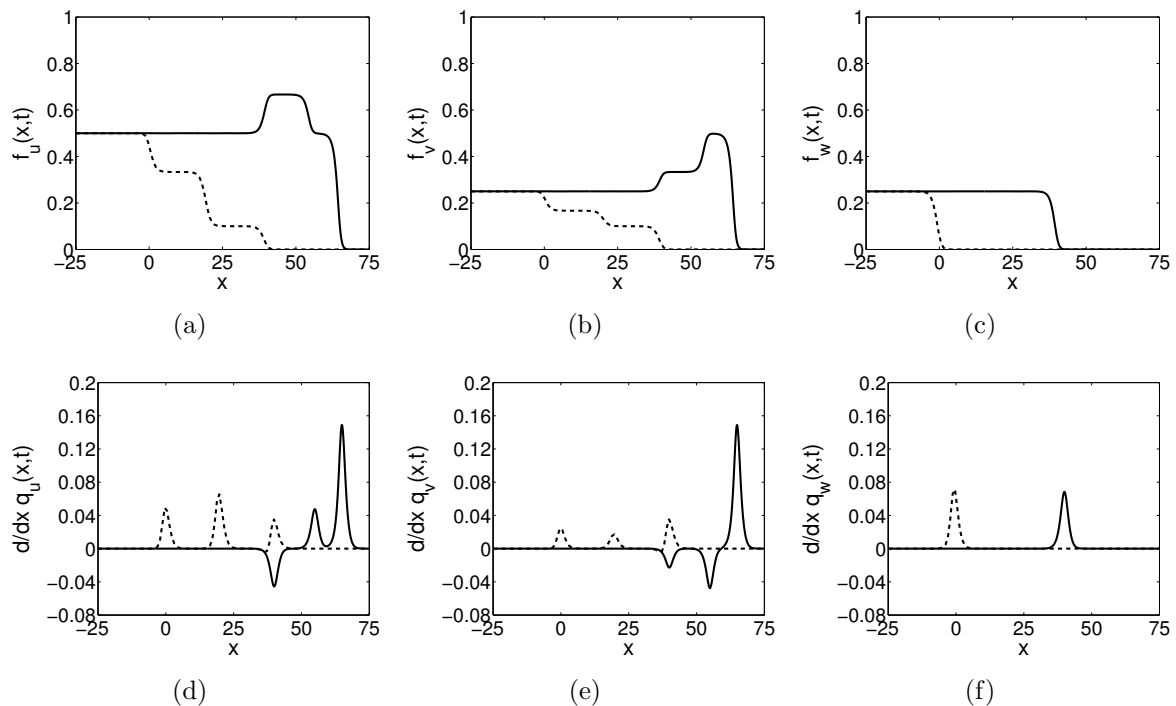


Abbildung 8.30: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a), $f_v(x, t)$ (b) und $f_w(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (d), des v -Flusses (e) und des w -Flusses (f) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 100$ (durchgezogen) für die Lösung aus Abbildung 7.21(e).

herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1$ fortbewegt. Das Profil in 8.29(d) stimmt mit dem quasianalytischen Profil überein.

Die Abbildungen 8.29(b) und 8.29(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Die linke Charakteristik ist die w -Welle, die mittlere ist die $u - v$ -Welle und die rechte ist die v -Welle. Die w -Welle, die hinter den anderen startet, bewegt sich von Anfang an mit Geschwindigkeit $c = 1$ vorwärts und verändert sich nicht. Dies liegt daran, dass sich im Bereich hinter ihrer Front die u - und v -Sättigungen nicht mehr verändern. Die w -Front bewirkt ein durch Aufstauen verursachtes Ansteigen der u - und v -Sättigung. Diese Überschüsse bewegen sich schnell vorwärts. Desweiteren entsteht wegen der u -Front ein durch Aufstauen entstandener doppelter Überschuss in v . Zuletzt verursacht das Ansteigen von v ein Ansteigen der u -Sättigung. Beim Treffen der Einflüsse werden die u und w -Front insgesamt schneller. In der u -Sättigung bildet sich ein nachlaufender Überschuss aus.

In Abbildung 8.30 sieht man die Flussfunktionen f_u , f_v und f_w und die Ableitungen des u -, v - und w -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 40$ als durchgezogene Linie. Jede ist gleich der zeitlichen Ableitung ihrer Sättigung

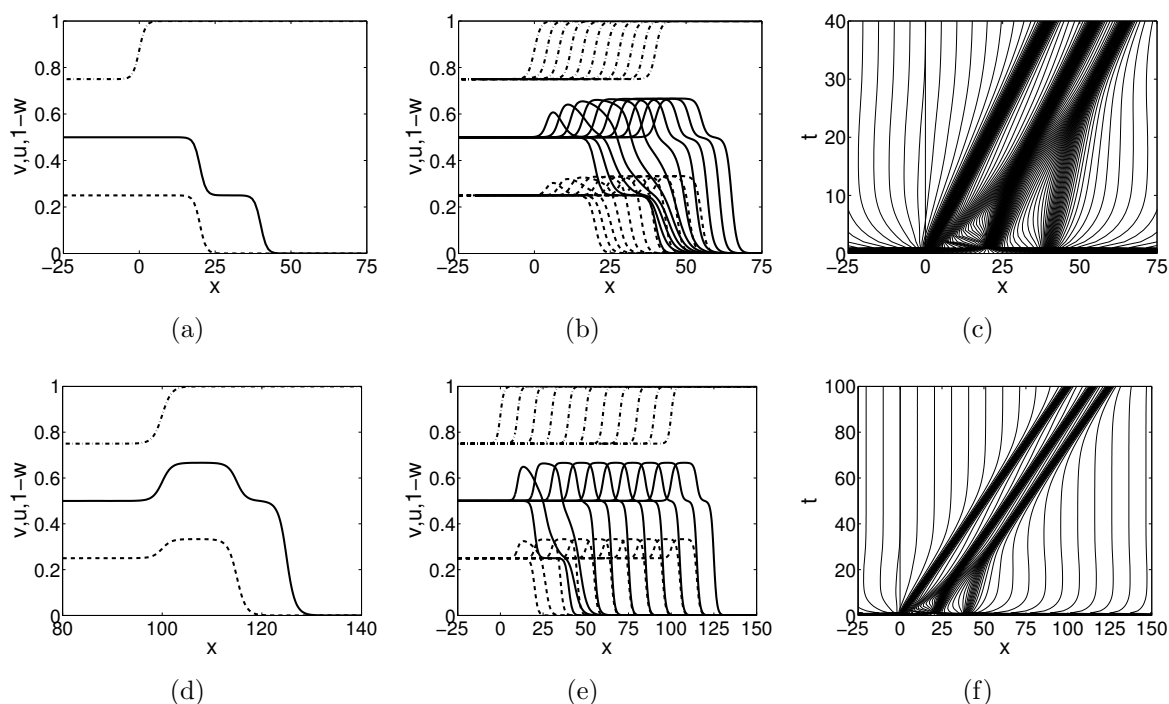


Abbildung 8.31: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1 - w$ gestrichpunktet, anfängliche zeitliche Entwicklung (b) mit Zeitschritt $t = 4$, Charakteristiken (c) für $t \in (0, 40)$, Profil (d) nach $t = 100$, zeitliche Entwicklung des Profils (e) mit Zeitschritt $t = 10$ und Charakteristiken (f) für $t \in (0, 100)$ für die Lösung aus Abbildung 7.21(f).

und ist wie in Gleichung 8.24 definiert. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit drei positiven Maxima. Das erste Maximum wird von der w -Front verursacht und bewirkt ein Aufstauen und damit einen Überschuss von u . Das letzte Maximum ist dem v -Einfluss geschuldet und bewirkt ein Ansteigen und damit zuletzt eine Terrasse. Über die Zeit entstehen ein negatives Minimum gefolgt von zwei positiven Maxima. Dies steht für eine nachlaufende Überschusslösung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ hat drei positive Maxima. Die zwei linken Maxima werden von der w - und $u - v$ -Front verursacht und bewirken einen doppelten Überschuss. Dieser ist stabil, was das Profil für $t = 40$ mit zwei negativen Minima gefolgt von einem positiven Maximum zeigt. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_w(x, 0)$ hat ein positives Maximum. Dies steht für ein klassisches monotones Verhalten und es ändert sich über die Zeit auch nicht. Zum Zeitpunkt $t = 40$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 40$ den Sättigungsprofilen. Der doppelte Überschuss in v geht mit einem Aufstauen einher. Dies wird durch den reduzierten Abstand zwischen der v - und w -Front deutlich. Er reduziert sich von 40 auf 30.

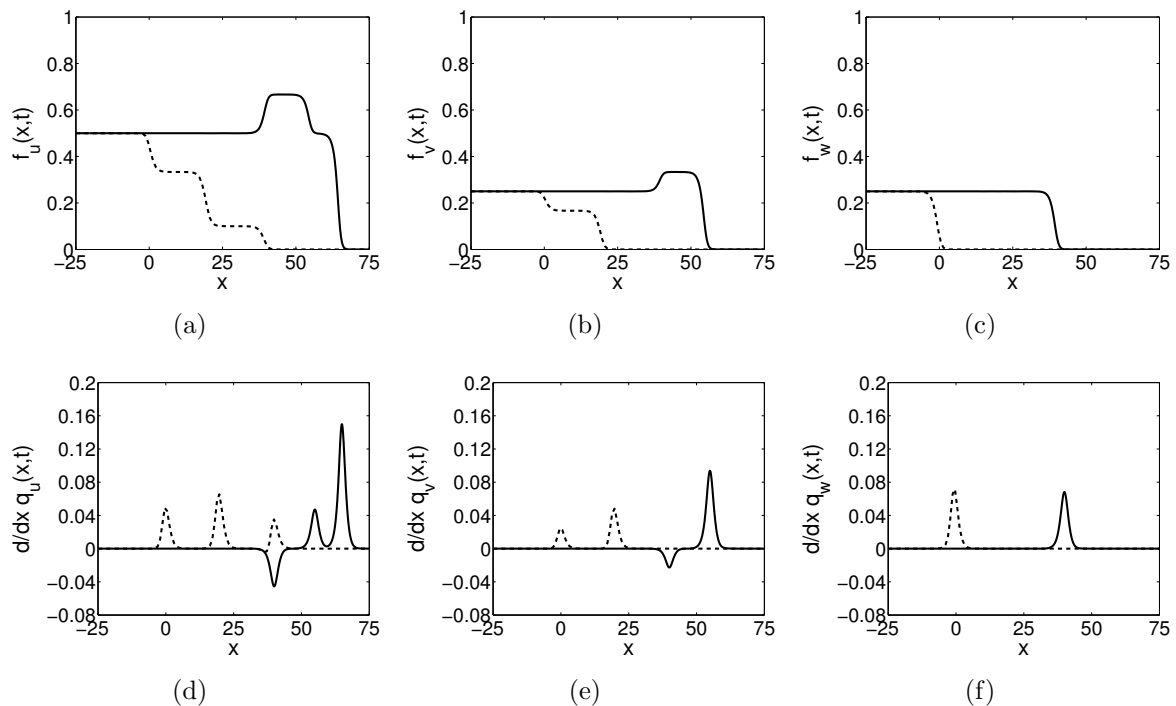


Abbildung 8.32: Fraktionale Flussfunktionen $f_u(x, t)$ (a), $f_v(x, t)$ (b) und $f_w(x, t)$ (c) und räumliche Ableitung des u -Flusses (d), des v -Flusses (e) und des w -Flusses (f) zu den Zeitpunkten $t = 0$ (gestrichelt) und $t = 100$ (durchgezogen) für die Lösung aus Abbildung 7.21(f).

In Abbildung 8.31 ist die Lösung aus Abbildung 7.21(f) gezeigt, dabei ist das u -Profil mit einer durchgezogenen Linie, das v -Profil mit einer gestrichelten Linie und das $1 - w$ -Profil mit einer gestrichpunkteten Linie dargestellt. Die Lösung besteht aus einem doppelten Überschuss in $u - v$, einem einfachen Überschuss in v und einem nachgelagerten Überschuss in u . Die Abbildung besteht aus sechs Teilabbildungen. Die Abbildung 8.31(a) zeigt das Anfangsprofil mit Parametern aus Tabelle 8.7. Dabei haben die $u - v$, v - und w -Welle das selbe Profil. Die u -Welle ist aus der v -Welle und der $u - v$ -Welle zusammengesetzt. Die $u - v$ -Welle ist um 40 und die v -Welle um 20 nach rechts verschoben. Die Abbildung 8.31(b) zeigt die anfängliche zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 4$ bis Zeitpunkt $t = 40$ und Abbildung 8.31(c) zeigt die zu diesem Zeitraum gehörigen Charakteristiken. Abbildung 8.31(d) zeigt das Profil nach $t = 100$. Die Abbildung 8.31(e) zeigt die zeitliche Entwicklung des Profils mit Zeitschritt $t = 10$ bis $t = 100$ und Abbildung 8.31(f) zeigt die zugehörigen Charakteristiken.

Die Abbildungen 8.31(e) und 8.31(f) zeigen ganz klar, dass sich nach $t = 40$ ein Profil herausgebildet hat, das sich in seiner Form nicht mehr ändert und mit Geschwindigkeit $c = 1$ fortbewegt. Das Profil in 8.31(d) stimmt mit dem quasianalytischen Profil überein.

Die Abbildungen 8.31(b) und 8.31(c) beleuchten, wie sich das stationäre Profil aus dem monotonen Tangenshyperbolicusanfangsprofil herausbildet. Die linke Charakteristik ist die w -Welle, die mittlere ist die v -Welle und die rechte ist die $u - v$ -Welle. Die w -Welle, die hinter den anderen startet, bewegt sich von Anfang an mit Geschwindigkeit $c = 1$ vorwärts und verändert sich nicht. Dies liegt daran, dass sich im Bereich hinter ihrer Front die u - und v -Sättigungen nicht mehr verändern. Die w -Front bewirkt ein durch Aufstauen verursachtes Ansteigen der u - und v -Sättigung. Diese Überschüsse bewegen sich schnell vorwärts. Desweiteren entsteht wegen der v -Front ein Ansteigen in u . Diese beide Einflüsse auf u bewirken letztendlich einen nachlaufenden Überschuss. Beim Treffen der Einflüsse werden die u und v -Front insgesamt schneller.

In Abbildung 8.32 sieht man die Flussfunktionen f_u , f_v und f_w und die Ableitungen des u -, v - und w -Flusses in Abhängigkeit des Raumes für die Zeitpunkte $t = 0$ als gestrichelte Linie und $t = 40$ als durchgezogene Linie. Jede ist gleich der zeitlichen Ableitung ihrer Sättigung und ist wie in Gleichung 8.24 definiert. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_u(x, 0)$ ist eine Funktion mit drei positiven Maxima. Das linke Maximum wird von der w -Front verursacht und bewirkt ein Aufstauen und damit einen Anstieg von u . Das zweite Maximum wird von der v -Front verursacht und bewirkt ein zusätzliches Ansteigen in u . Über die Zeit entstehen ein negatives Minimum gefolgt von zwei positiven Maxima. Dies steht für eine nachlaufende Überschusslösung. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_v(x, 0)$ hat zwei positive Maxima. Das linke Maximum wird von der w -Front verursacht und bewirkt ein Aufstauen und damit einen Anstieg von v . Im stationären Profil gibt es ein Minimum gefolgt von einem Maximum. Dies steht für einen stabilen Überschuss. Die Funktion $\frac{d}{dx}q_w(x, 0)$ hat ein positives Maximum. Dies steht für ein klassisches monotones Verhalten und es ändert sich über die Zeit auch nicht. Zum Zeitpunkt $t = 40$ befindet sich das System und damit alle seine Funktionen in einem stationären Zustand. Dieses Profil verändert sich außer einer konstanten Translation nicht mehr. Aus dem selben Grund wie bei den anderen Lösungen ähneln die fraktionalen Flussprofile zum Zeitpunkt $t = 40$ den Sättigungsprofilen. Der Überschuss in v geht mit einem Aufstauen einher. Dies wird durch den reduzierten Abstand zwischen der v - und w -Front deutlich. Er reduziert sich von 20 auf 15.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass alle sechs Profile durch monotone versetzte Anfangsprofile erzeugt werden können.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Systeme aus 8.21 und 8.25 physikalisch sehr unwahrscheinlich sind, wenn man das Perkolationsmodell als Grundlage sieht, da die vorderste Front die des nichtperkolierenden Öls ist. Man hat dann Bereiche, die annähernd zur Hälfte mit perkolierendem und nichtperkolierendem Öl besetzt sind. Wenn nichtperkolierendes Öl vor-

handen sein soll, dann muss aber auch ausreichend Wasser vorhanden sein, das die nichtperkolierende Ölphase von der perkolierenden Ölphase trennt. Die Wassersättigung ist jedoch extrem nahe bei Null und wird dafür nicht ausreichend sein.

Die Lösungen der Abbildungen 8.23, 8.27 und 8.31 können durch Heterogenitäten hervorgerufen werden, die die perkolierenden Phasen den nichtperkolierenden bevorzugen. Dies scheint physikalisch plausibel.

Nun wird die Bedeutung der in dem quasianalytischen Teil gefundenen Freiheitsgrade diskutiert. Dabei wird klar, dass die beiden Freiheitsgrade mit den Abständen der Anfangsprofile

$$\Delta_v^{u-v} = x_0^{u-v} - x_0^v, \quad (8.33a)$$

$$\Delta_w^{u-v} = x_0^{u-v} - x_0^w \quad (8.33b)$$

zu tun haben. Es gilt weiterhin

$$\Delta_\sigma^\pi = -\Delta_\pi^\sigma, \quad (8.34a)$$

$$\Delta_\tau^\pi = \Delta_\sigma^\pi + \Delta_\tau^\sigma, \quad (8.34b)$$

für $\pi, \sigma, \tau \in \{u - v, v, w\}$.

Man sieht, dass

$$\Delta_\sigma^\pi > 0 \Leftrightarrow \sigma > \pi. \quad (8.35)$$

Wenn also eine Welle vor der anderen startet, dann ist ihre Sättigung immer größer als die der anderen. Damit gibt die Ordnung der Anfangswellen, d.h.

$$\Delta_\sigma^\pi \geq 0, \quad (8.36a)$$

$$\Delta_\tau^\sigma \geq 0, \quad (8.36b)$$

$$\Delta_\tau^\pi \geq 0, \quad (8.36c)$$

die Ordnung der Sättigungen $\pi \geq \sigma \geq \tau$ aus Tabelle 7.19 wieder und die stationären Profile korrespondieren zu den Trajektorien aus den dazugehörigen invarianten dreidimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Dies ist in Tabelle 8.8 dargestellt.

Falls eine der Anfangsabstände $\Delta_\sigma^\pi = 0$ ist, dann sind die Sättigungen für immer identisch, d.h. $\pi = \sigma$, und man befindet sich in dem zugehörigen zweidimensionalen System.

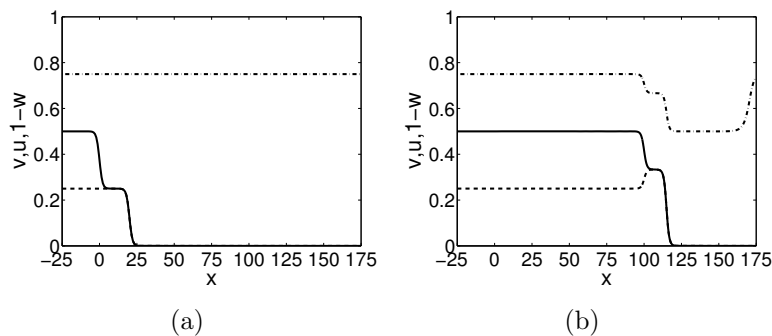


Abbildung 8.33: Anfangsprofil (a) von u (durchgezogen), v (gestrichelt) und $1 - w$ gestrichpunktet, und Profil (b) nach $t = 100$, mit $(u_\ell, v_\ell, w_\ell) = (0.5, 0.25, 0.25), (u_r, v_r, w_r) = (0, 0, 0.25)$ und $(x_0^{u-v}, x_0^v) = (0, 20)$.

Falls die Abstände

$$\Delta_\sigma^\pi \rightarrow -\infty, \tag{8.37a}$$

$$\Delta_\tau^\pi \rightarrow -\infty, \tag{8.37b}$$

dann ist die π -Welle nach $-\infty$ verschoben. Die Sättigung π ist identisch Null und man befindet sich auf der zugehörigen zweidimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeit.

Falls die Abstände

$$\Delta_\sigma^\pi \rightarrow \infty, \tag{8.38a}$$

$$\Delta_\tau^\pi \rightarrow \infty, \tag{8.38b}$$

dann ist die π -Welle nach $+\infty$ verschoben und die Sättigung π ist gleich ihrem linksseitigen Grenzwert. Es ist erstaunlich, dass lokal die Sättigung π gleich der Sättigung $1 - u - w$ ist.

	phys. Erhalt.	Δ_v^{u-v}	Δ_w^{u-v}	Δ_w^v
a	$0 < S_1 < S_2 < S_4 < S_3$	-	-	-
b	$0 < S_1 < S_4 < S_2 < S_3$	-	-	+
c	$0 < S_2 < S_1 < S_4 < S_3$	+	-	-
d	$0 < S_2 < S_4 < S_1 < S_3$	+	+	-
e	$0 < S_4 < S_1 < S_2 < S_3$	-	+	+
f	$0 < S_4 < S_2 < S_1 < S_3$	+	+	+

Tabelle 8.8: Physikalische Erhaltung und Abstände der anfänglichen Wellen der dreidimensionalen invarianten Teilbereiche des Bewässerungsbereiches aus Abbildung 7.17.

Abb.	phys. Erhalt.	Abstände
7.8(a)	$S_1 = 0$	$\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^{u-v} = -\infty$
7.8(f)	$S_1 = S_3$	$\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^{u-v} = \infty$
7.8(b)	$S_2 = 0$	$-\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^v = -\infty$
7.8(h)	$S_2 = S_3$	$-\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^v = \infty$
7.8(d)	$S_4 = 0$	$-\Delta_w^{u-v} = -\Delta_w^v = -\infty$
7.8(j)	$S_4 = S_3$	$-\Delta_w^{u-v} = -\Delta_w^v = \infty$
7.8(e)	$S_1 = S_2$	$\Delta_v^{u-v} = 0$
7.8(g)	$S_1 = S_4$	$\Delta_w^{u-v} = 0$
7.8(i)	$S_2 = S_4$	$\Delta_w^v = 0$

Tabelle 8.9: Abbildung, physikalische Erhaltung und Abstände der anfänglichen Wellen der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.17 und Tabelle 7.4.

Dies ist beispielhaft für w in Abbildung 8.33 dargestellt. Die w -Front befindet sich bei $x = \infty$, womit anfangs $w = 0.25$. Nach einer gewissen Zeit bildet sich das Profil aus 8.33(b) aus. Im Bereich $x < 170$ gilt $w = 1 - u - w$. Die Welle, bei der w auf 0.5 ansteigt, läuft schneller als die anderen Wellen. Damit vergrößert sich der Bereich, in dem $w = 0.5$ ist. Dieser Bereich ist gerade der rechtsseitige Grenzwert der zweidimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeit $w = 1 - u - w$, d.h. lokal befindet sich das dreidimensionale System mit (8.38) auf der in Abbildung 7.14 mit Parameter $\lambda = 1$ dargestellten zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit.

Alle zweidimensionalen invarianten Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.17 und Tabelle 7.4 können somit durch den numerischen Algorithmus erzeugt werden. Die Abstände der korrespondierenden Anfangsbedingungen sind in Tabelle 8.9 dargestellt. Es wird nochmal deutlich, dass jede der drei Variablen S_1, S_2, S_4 minimal gleich Null ist, genau dann, wenn der Mittelpunkt der Welle sich relativ unendlich weit links von den anderen Wellen befindet, gleich eine der anderen Variablen ist, genau dann, wenn ihre Anfangsbedingungen identisch sind, und maximal lokal gleich S_3 ist, genau dann, wenn der Mittelpunkt der Welle sich relativ unendlich weit rechts von den anderen Wellen befindet.

Natürlich kann man auch die eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten numerisch erzeugen. Die dazugehörigen Abstände der Anfangsbedingungen sind in Tabelle 8.10 dargestellt. Dabei gibt es vier verschiedene Klassen. Die erste Klasse, bei der $S_3 = 0$, kann nicht erzeugt werden. Das liegt daran, dass ihre Trajektorien, welche in Abbildung 7.15 gezeigt wurden, nicht mit dem bewässerungsrelevanten Gebiet aus Abbildung 7.17 zusammenhängen. Durch stetiges Verändern der Abstände erhält man auch eine stetige Veränderung der Trajektorie. Aber man

Abb.	Abb. 2dim	phys. Erhalt.	Abstände
7.16(a)	7.8(a),7.8(d)	$S_1 = 0, S_4 = 0$	$\Delta_v^{u-v} = -\Delta_w^v = -\infty, \Delta_w^{u-v} = 0$
7.16(b)	7.8(b),7.8(d)	$S_2 = 0, S_4 = 0$	$-\Delta_v^{u-v} = -\Delta_w^{u-v} = -\infty, \Delta_w^v = 0$
7.16(c)	7.8(a),7.8(i)	$S_1 = 0, S_2 = S_4$	$\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^{u-v} = -\infty, \Delta_w^v = 0$
7.16(d)	7.8(a),7.8(j)	$S_1 = 0, S_3 = S_4$	$-\Delta_v^{u-v} = -\Delta_w^v = -\Delta_w^{u-v} = -\infty$
7.16(e)	7.8(b),7.8(g)	$S_2 = 0, S_1 = S_4$	$-\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^v = -\infty, \Delta_w^{u-v} = 0$
7.16(f)	7.8(b),7.8(j)	$S_2 = 0, S_3 = S_4$	$-\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^v = \Delta_w^{u-v} = -\infty$
7.16(g)	7.8(c),7.8(g)	$S_3 = 0, S_1 = S_4$	–
7.16(h)	7.8(c),7.8(i)	$S_3 = 0, S_2 = S_4$	–
7.16(i)	7.8(d),7.8(e)	$S_4 = 0, S_1 = S_2$	$-\Delta_w^{u-v} = -\Delta_w^v = -\infty, \Delta_v^{u-v} = 0$
7.16(j)	7.8(d),7.8(f)	$S_4 = 0, S_1 = S_3$	$-\Delta_v^{u-v} = -\Delta_w^v = -\Delta_w^{u-v} = -\infty$
7.16(k)	7.8(d),7.8(h)	$S_4 = 0, S_2 = S_3$	$\Delta_v^{u-v} = -\Delta_w^v = -\Delta_w^{u-v} = -\infty$
7.16(l)	7.8(f), 7.8(g),7.8(j)	$S_1 = S_3 = S_4$	$-\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^v = -\infty, \Delta_w^{u-v} = 0$
7.16(m)	7.8(e), 7.8(g),7.8(i)	$S_1 = S_2 = S_4$	$\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^{u-v} = \Delta_w^v = 0$
7.16(n)	7.8(h),7.8(i),7.8(j)	$S_2 = S_3 = S_4$	$\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^{u-v} = -\infty, \Delta_w^v = 0$
7.16(o)	7.8(e),7.8(j)	$S_1 = S_2, S_3 = S_4$	$\Delta_w^{u-v} = \Delta_w^v = -\infty, \Delta_v^{u-v} = 0$

Tabelle 8.10: Abbildung ihrer Sättigungsprofile, Abbildungen ihrer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten aus Abbildung 7.8 und Abstände der anfänglichen Wellen der eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten.

kann durch eine stetige Transformation nicht von dem Gebiet auf eine der zwei Trajektorien kommen. Bei der zweiten Klasse haben zwei Abstände Unendlichkeitsstellen und der dritte Abstand ist gleich Null. Dies ist bei den Systemen aus Abbildungen 7.16(a), 7.16(b), 7.16(c), 7.16(e), 7.16(i), 7.16(l), 7.16(n) und 7.16(o) der Fall. Bei der dritten Klasse haben alle drei Abstände Unendlichkeitsstellen. Dies ist bei den Systemen aus Abbildungen 7.16(d), 7.16(f), 7.16(j) und 7.16(k) der Fall. Bei der vierten Klasse sind alle drei Abstände identisch Null. Dies geschieht nur bei dem System aus Abbildung 7.16(m).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass alle Profile, die in dem bewässerungsrelevanten Gebiet sind, mit den zwei Abständen $\Delta_v^{u-v}, \Delta_w^{u-v}$ der Anfangsbedingungen der Wellen in $u - v, v, w$ als Freiheitsgrade zumindest lokal erzeugt werden können. In Abbildung 7.22 war das gesamte dreidimensionale Bewässerungssystem mit den zwei Parametern α und β gezeigt. Es lassen sich folgende Verbindungen zwischen der Abbildung und den Abständen finden. Im Zentrum sind alle Abstände gleich Null. Die inneren Linien, die die Sattelpunkte mit dem Zentrum verbinden, stehen für $\Delta_v^{u-v} = 0, \Delta_w^{u-v} = 0$ oder $\Delta_v^{u-v} = \Delta_w^{u-v}$, wobei das

letzte gleichbedeutend mit $\Delta_w^v = 0$ ist. Bei dem Überschreiten dieser Linien ändert sich das Vorzeichen des Abstandes, der auf dieser Linie gleich Null ist. Die Ränder, die benachbarte Sattelpunkte verbinden, stehen für die singulären Grenzwerte der Abstände. Das Vorzeichen der Singularität in einem Abstand wird von der Lage der Linie zu seiner inneren Linie bestimmt.

Die invarianten Untermannigfaltigkeiten haben alle ausgezeichnete Werte in den Abständen, so dass die Invarianz eine physikalische Erklärung bekommt. So sind schon vorher die Abstände mit Heterogenitäten im porösen Medium erklärt worden, die die eine Phase der anderen bevorzugen und damit kurzzeitig schneller fließen lassen. Um ein stabiles Profil zu bekommen, darf sich dieser Effekt nicht umdrehen. Und somit bleibt ein positiver Abstand immer positiv. Dies erklärt die Invarianz der dreidimensionalen Teilgebiete.

Wie im Kapitel über zwei Gleichungen könnten nun noch die Bifurkationen der verschiedenen Einzelprofile mit den Abständen in Verbindung gebracht werden. Darauf wird hier verzichtet, da es keine zusätzliche Information liefert.

Alle quasianalytischen Bewässerungslösungen konnten also numerisch gefunden werden. Die Freiheitsgrade und die Invarianzen konnten physikalisch mit den Abständen in den Anfangsbedingungen erklärt werden.

Fazit und Ausblick

Zum Ende dieser Arbeit wird dargestellt, inwieweit die in der Einleitung in 1.2 aufgeworfenen Fragen in dieser Arbeit beantwortet werden konnten.

- Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass eine dynamische Systembeschreibung der laufenden Wellengleichungen des Perkulationsmodells möglich ist, wie er in [Brev 01] besprochen wird, aber nur, wenn zusätzliche Näherungen getroffen werden.
- Eine zwingende Bedingung dafür ist, dass die Kapillarität entkoppelt ist, d.h. dass der Kapillarterm in den Gleichungen für die jeweilige Phase ausschließlich von dieser Phase abhängt. Die anderen Annahmen, wie der verschwindende Massenaustausch oder die entkoppelten Burgerflüsse, dienen dazu, das System handhabbarer zu machen und die einzelnen Aspekte wie Konvektion, Kapillarität und Massenaustausch zu beleuchten. Diese Restriktionen können in einer weiterführenden Arbeit nach und nach weggelassen werden. Das resultierende System wird dann aber wesentlich schwerer zu erörtern sein.
- Die Unterschiede zwischen den laufenden Wellenlösungen im Perkulationsmodell und im DBRMMWBL-Modell variieren zwischen den unterschiedlich starken Vereinfachungen, die im Perkulationsmodell getroffen werden. So ergeben sich für das Perkulationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Phasen nur leichte Gegensätze. Erstens kann man die Unterschiede zwischen primärer und sekundärer Bewässerung ausarbeiten, die sich hauptsächlich in unterschiedlichen Geschwindigkeiten widerspiegeln. Zweitens kann man das Verhalten nichtperkolierender Flüssigkeitsanteile untersuchen und so zu einem besseren Verständnis der Prozesse gelangen. Drittens sind nun auch überall stetig differenzierbare Bewässerungswellen in ein komplett trockenes Medium möglich. Die Kontraste werden größer, wenn man ein oder zwei der nichtperkolierenden Phasen mobil wählt. Diese Systeme können nichtmonotones Verhalten in allen Phasen aufweisen. Desweiteren können Überschusslösungen in der Wassersättigung auftreten, wenn nichtperkolierendes Öl vorhanden und frei beweglich ist.
- Das genaue Verhalten der Kapillarität spielt für die qualitative Lösung unter der Annahme, dass sie entkoppelt und positiv ist, keine Rolle. Deswegen wird sie hier zumeist

als positive Konstante, wie auch in dem verschwindenden Viskositätsproblem [Duij 01], angenommen. Dies steht im Gegensatz zu [Brev 01], wo es drei weitere Klassen gibt, die ganz entscheidend von dem Verhalten der Kapillarität, insbesondere den Nullstellen der Kapillarfunktion, abhängen. In dieser Dissertation wird jedoch dargelegt, dass weder das DBRMMWBL-Modell, noch das Perkolationsmodell mit immobilen nichtperkolierenden Phasen diese drei Klassen erzeugen können, falls die Stetigkeit des Wasserflusses auf dem gesamten Gebiet zu jeder Zeit angenommen werden soll. Die Konvektion, insbesondere die gekoppelten Flussfunktionen, spielen eine herausragende Rolle im nichtmonotonen Verhalten. Dieses nichtmonotone Verhalten kann in allen vier Phasen, aber auch, was von noch größerer Bedeutung ist, in der Wassersättigung beobachtet werden. Desweiteren kann der Massenaustausch, der hier linearisiert wurde, je nach Vorzeichen als Quelle oder Senke dienen und damit auch nichtmonotones Verhalten auslösen. Dies geschieht jedoch nur in den einzelnen Phasen und nie in der Wassersättigung.

- Mit Hilfe eines numerischen Algorithmus' kann gezeigt werden, dass sich alle analytisch gefundenen laufenden Wellen nach einer gewissen Zeit aus geeigneten Anfangs- und Randwerten herausbilden und über die Zeit erhalten bleiben. Dies deutet stark darauf hin, dass alle laufenden Wellen stabil sind.
- Die Randwerte ergeben sich aus den stabilen und instabilen Fixpunkten des dynamischen Systems. Die Anfangswerte können als Tangenshyperbolikusfunktionen mit den Rändern aus den Randwertbedingungen gewählt werden. Bei den analytischen Lösungen für zwei oder drei Gleichungen kommen entweder ein oder zwei Freiheitsgrade hinzu, die im Gegensatz zu den Lösungen für eine Gleichung die Lösung für gegebene Randwerte nicht eindeutig machen. Diese Freiheitsgrade basieren auf der Möglichkeit, die Startwellen zueinander versetzt starten zu lassen. Dies ist physikalisch plausibel, wenn man davon ausgeht, dass das poröse Medium nur näherungsweise homogen ist, und dass diese kleinen Heterogenitäten in kleinen relativen Translationen der Wellen enden.

Wie schon angedeutet wäre der nächste logische Schritt, die gekoppelten Flussfunktionen und die Massenaustauschsterme gemeinsam zu betrachten. Hierbei sollte die Näherung des einzig in perkolierender Form vorhandenen Wassers zuerst untersucht werden, da diese Arbeit gezeigt hat, dass nichtperkolierendes Öl für einen Wassersättigungsüberschuss notwendig ist. Ob die gekoppelten Flussfunktionen und die Massenaustauschsterme die Nichtmonotonität der Lösungen verstärken werden, kann hier nur abgeschätzt werden. Es ist jedoch gut möglich, dass sich die momentan eher geringen Überschüsse in der Wassersättigung vergrößern.

Desweiteren kann das Verhalten der Massenaustauschterme und der Kapillarität modellgetreuer implementiert werden. Dies sollte eher geringe Auswirkungen auf die qualitative Lösung haben. Ein weiterer Schritt wäre, die Gravitation miteinzubeziehen. Dies alles kann die laufenden Wellenlösungen näher an die Ergebnisse der Experimente [Geig 00, DiCa 00, DiCa 04, DiCa 07, DiCa 08] bringen.

Literaturverzeichnis

- [Abra 75] A. Abrams. “Influence of fluid viscosity, interfacial-tension, and flow velocity on residual oil saturation left by waterflood”. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 15, No. 5, pp. 437–447, 1975.
- [Alte 94] J. Altenbach and H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Anto 99] L. Anton and R. Hilfer. “Trapping and mobilization of residual fluid during capillary desaturation in porous media”. *Physical Review E*, Vol. 59, pp. 6819–6823, 1999.
- [Aulb 97] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [Avra 95a] D. Avraam and A. C. Payatakes. “Flow regimes and relative permeabilities during steady-state two-phase flow in porous media”. *Journal of fluid mechanics*, Vol. 293, pp. 207–236, 1995.
- [Avra 95b] D. Avraam and A. Payatakes. “Generalized relative permeability coefficients during steady-state two-phase flow in porous media, and correlation with the flow mechanisms”. *Transport in Porous Media*, Vol. 20, pp. 135–168, 1995.
- [Babc 08] A. Babchin, I. Brailovsky, P. Gordon, and G. Sivashinsky. “Fingering instability in immiscible displacement”. *Physical Review E*, Vol. 77, No. 2, p. 26301, 2008.
- [Bare 72] G. I. Barenblatt and Y. B. Zel’Dovich. “Self-similar solutions as intermediate asymptotics”. *Annu. Re. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 285–312, 1972.
- [Bear 72] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, New York, 1972.
- [Beck 75] E. Becker and W. Bürger. *Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, 1975.
- [Beki 09] A. Bekir and A. C. Cevikel. “New exact travelling wave solutions of nonlinear physical models”. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 41, pp. 1733–1739, 2009.

- [Blom 94] J. Blom and P. Zegeling. “Algorithm 731: A Moving-Grid Interface for Systems of One-Dimensional Time-Dependent Partial Differential Equation”. *ACM Transactions in Mathematical Software*, Vol. 20, pp. 194–214, 1994.
- [Brev 01] L. Brevdo, R. Helmig, M. Haragus-Courcelle, and K. Kirchgässner. “Permanent Fronts in Two-Phase Flows in a Porous Medium”. *Transport in Porous Media*, Vol. 44, pp. 507 – 537, 2001.
- [Broo 64] R. H. Brooks and A. T. Corey. “Hydraulic Properties of Porous Media”. In: *Hydrol. Pap.*, Colorado State University, Fort Collins, 1964.
- [Buck 07] E. Buckingham. “Studies on the Movement of Soil Moisture”. *U.S. Department of Agriculture, Bureau of Soils—Bulletin No. 38*, pp. 1 – 61, 1907.
- [Burd 53] N. T. Burdine. “Relative Permeability Calculations from Pore – Size Distribution Data”. Tech. Rep., Reseach Report, Petroleum Transactions, AIME, 1953.
- [Calv 91] A. Calvo, I. Paterson, R. Chertcoff, M. Rosen, and J. Hulin. “Dynamic capillary pressure variations in diphasic flows through glass capillaries”. *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 141, No. 2, pp. 384–394, 1991.
- [Cues 00] C. Cuesta, C. J. van Duijn, and J. Hulshof. “Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves”. *Euro. Journal of Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 381 – 397, 2000.
- [Cuet 09a] L. Cueto-Felgueroso and R. Juanes. “A phase field model of unsaturated flow”. *Water Resources Research*, Vol. 45, 2009.
- [Cuet 09b] L. Cueto-Felgueroso and R. Juanes. “Stability analysis of a phase-field model of gravity-driven unsaturated flow through porous media”. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, Vol. 79, No. 3, p. 036301, 2009.
- [Dahl 05] H. Dahle, M. Celia, and S. Majid Hassanizadeh. “Bundle-of-Tubes Model for Calculating Dynamic Effects in the Capillary-Pressure-Saturation Relationship”. *Transport in Porous Media*, Vol. 58, No. 1, pp. 5–22, 2005.
- [Dam 06] A. van Dam and P. Zegeling. “A robust moving mesh finite volume method applied to 1D hyperbolic conservation laws from magnetohydrodynamics”. *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, pp. 526–546, 2006.
- [Darc 56] H. Darcy. *Les fontaines de la ville Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.

- [Dein 08] M. R. Deinert, A. Dathe, J.-Y. Parlange, and K. B. Cady. “Capillary pressure in a porous medium with distinct pore surface and pore volume fractal dimensions”. *Physical Review E*, Vol. 77, No. 2, p. 021203, 2008.
- [Dias 86a] M. M. Dias and A. C. Payatakes. “Network models for two-phase flow in porous media part 1. immiscible microdisplacement of non-wetting fluids”. *J.Fluid Mechanics*, Vol. 164, pp. 305 – 336, 1986.
- [Dias 86b] M. M. Dias and A. C. Payatakes. “Network models for two-phase flow in porous media part 2. motion of oil ganglia”. *J.Fluid Mechanics*, Vol. 164, pp. 337 – 358, 1986.
- [DiCa 00] D. A. DiCarlo and M. J. Blunt. “Determination of finger shape using the dynamic capillary pressure”. *Water Resources Research*, Vol. 36, No. 9, pp. 2781 – 2785, 2000.
- [DiCa 04] D. A. DiCarlo. “Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration”. *Water Resources Research*, Vol. 40, 2004.
- [DiCa 07] D. A. DiCarlo. “Capillary pressure overshoot as a function of imbibition flux and initial water content”. *Water Resources Research*, Vol. 43, 2007.
- [DiCa 08] D. A. DiCarlo, R. Juanes, T. LaForce, and T. P. Witelski. “Nonmonotonic traveling wave solutions of infiltration into porous media”. *Water Resources Research*, Vol. 44, 2008.
- [Dost 10] F. Doster, P. A. Zegeling, and R. Hilfer. “Numerical solutions of a generalized theory for macroscopic capillarity”. *Phys. Rev. E*, Vol. 81, No. 3, p. 036307, 2010.
- [Dost 11a] F. Doster and R. Hilfer. “Generalized Buckley-Leverett theory for two phase flow in porous media”. *New Journal of Physics*, Vol. 13, p. 123030, 2011.
- [Dost 11b] F. Doster, O. Höning, and R. Hilfer. “Horizontal flows and capillarity driven redistribution in porous media”. *submitted*, 2011.
- [Dost 11c] F. Doster. *Die Bedeutung perkolierender und nichtperkolierender Phasen bei Mehrphasenströmungen in porösen Medien auf Laborskala*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 2011.
- [Duij 01] C. J. van Duijn, L. A. Peletier, and I. S. Pop. “A New Class Of Entropy Solutions Of The Buckley-Leverett Equation”. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 39, No. 2, pp. p507 – 536, 20070601.

- [Duij 10] Y. F. C. J. van Duijn and L. A. Peletier. “Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equation modelling two-phase flow in porous media”. Tech. Rep., CASA Report, Eindhoven University of Technology, 2010.
- [Dull 92] F. Dullien. *Porous Media - Fluid Transport and Pore Structure*. Academic Press, San Diego, 2 Ed., 1992.
- [Ebig 07] A. Ebigbo, H. Class, and R. Helmig. “CO₂ leakage through an abandoned well: problem-oriented benchmarks”. *Computational Geosciences*, Vol. 11, pp. 103–115, 2007.
- [Elia 01] M. Eliassi and R. J. Glass. “On the continuum-scale modeling of gravity-driven fingers in unstaturated porous media: The inadequacy of the Richards equation with standard monotonic constitutive relations and hysteretic equations of state”. *Water Resources Research*, Vol. 37, No. 8, pp. 2019–2035, 2001.
- [Elia 02] M. Eliassi and R. J. Glass. “On the porous-continuum modeling of gravity-driven fingers in unsaturated materials: Extension of standard theory with a hold-back-pile-up effect”. *Water Resources Research*, Vol. 38, No. 11, 2002.
- [Engl 87] W. England, A. Mackenzie, D. Mann, and T. Quigley. “The Movement And Entrapment Of Petroleum Fluids In The Subsurface”. *J. Geol. Soc.*, Vol. 144, p. 327, 1987.
- [Evan 98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Oxford University Press, 1998.
- [Geel 97] P. J. van Geel and J. F. Sykes. “The importance of fluid entrapment, saturation hysteresis and residual saturations on the distribution of a lighter-than-water non-aqueous phase liquid in a variably saturated sand medium”. *Journal of Contaminant Hydrology*, Vol. 25, No. 3-4, pp. 249–270, March 1997.
- [Geig 00] S. L. Geiger and D. S. Durnford. “Infiltration in Homogeneous Sands and a Mechanistic Model of Unstable Flow”. *Soil.Sci.Soc.Am.J.*, Vol. 64, pp. 460 – 469, 2000.
- [Genu 80] M. van Genuchten. “A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils”. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 44, No. 5, pp. 892–898, 1980.
- [Gild 01] B. Gilding and R. Kersner. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection-reaction*. Memorandum 1585, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, 2001.

- [Gild 96] B. H. Gilding and R. Kersner. “The Characterization of Reaction-Convection-Diffusion Processes by Travelling Waves”. *Journal of Differential Equations*, Vol. 124, pp. 27–79, 1996.
- [Grev 03] R. Greve. *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 2003.
- [Hass 02] S. M. Hassanizadeh, M. A. Celia, and H. K. Dahle. “Dynamic Effect in the Capillary Pressure - Saturation Relationship and its Impact on Unsaturated Flow”. *Vadose Zone Hydrology*, Vol. 1, pp. 38–57, 2002.
- [Hass 93] S. M. Hassanizadeh and W. G. Gray. “Thermodynamic Basis of Capillary Pressure in Porous Media”. *Water Resources Research*, Vol. 29, No. 10, pp. 3389–3405, 1993.
- [Helm 97] R. Helmig. *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface*. Springer, 1997.
- [Hilf 00] R. Hilfer. “Local Porosity Theory and Stochastic Reconstruction for Porous Media”. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 554, pp. 203–241, 2000.
- [Hilf 06a] R. Hilfer. “Capillary pressure, hysteresis and residual saturation in porous media”. *Physica A*, Vol. 359, p. 119, 2006.
- [Hilf 06b] R. Hilfer. “Macroscopic capillarity and hysteresis for flow in porous media”. *Physical Review E*, Vol. 73, p. 016307, 2006.
- [Hilf 06c] R. Hilfer. “Macroscopic capillarity without a constitutive capillary pressure function”. *Physica A*, Vol. 371, pp. 209–225, 2006.
- [Hilf 09] R. Hilfer. “Modeling and simulation of macrocapillarity”. In: P. Garrido, P. Hurtado, and J. Marro, Eds., *Modeling And Simulation Of New Materials: Proceedings of Modeling and Simulation of New Materials: Tenth Granada Lectures*, pp. 141–150, 2009.
- [Hilf 10] R. Hilfer and F. Doster. “Percolation as a Basic Concept for Macroscopic Capillarity”. *Transport in Porous Media*, Vol. 82, No. 3, pp. 507–519, 2010.
- [Hilf 96a] R. Hilfer. “Transport and relaxation phenomena in porous media”. *Advances in Chemical Physics*, Vol. 17, p. 299, 1996.
- [Hilf 96b] R. Hilfer and P. Oeren. “Dimensional Analysis of Pore Scale and Field Scale Immiscible Displacement”. *Transport in Porous Media*, Vol. 22, pp. 53–72, 1996.

- [Hilf 98] R. Hilfer. “Macroscopic equations of motion for two-phase flow in porous media”. *Physical Review A*, Vol. 58, p. 2090, 1998.
- [Hupp 82] H. E. Huppert. “Flow and instability of a viscous current down a slope”. *Nature*, Vol. 300, pp. 427 – 429, 1982.
- [Jord 99] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction to Dynamical Systems*. Oxford University Press, 3 Ed., 1999.
- [Klou 92] J. Kloubek. “Pore-Size Distribution In Separon Using Mercury Contact Angles In Pores And Hysteresis In Porosimetry”. *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol. 6, No. 6, pp. 667–688, 1992.
- [Kolm 37] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky, and N. S. Piskunov. *Bull.Mosc.Univ.Se. A 1:No.6*, 1937.
- [Lake 89] L. W. Lake. *Enhanced Oil Recovery*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [Lenh 91] R. Lenhard, J. Parker, and J. Kaluarachchi. “Comparing simulated and experimental hysteretic two-phase transient fluid flow phenomena”. *Water Resources Research*, Vol. 27, No. 8, pp. 2113–2124, 1991.
- [Leve 41] M. C. Leverett. “Capillary Behaviour in Porous Solids”. *Transaction of the AIME*, Vol. 142, pp. 152–169, 1941.
- [Marl 82] C. Marle. “On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media”. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 20, No. 5, pp. 643–662, 1982.
- [McWh 92] D. McWhorter and D. Sunada. “Exact Integral Solutions For 2-Phase Flow - Reply”. *Water Resources Research*, Vol. 28, No. 5, p. 1479, May 1992.
- [Mike 10] A. Mikelic. “A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure”. *Journal of Differential Equations*, Vol. 248, pp. 1561–1577, 2010.
- [Moge 98] K. Mogensen and E. H. Stenby. “A dynamic two-phase pore-scale model for imbibition”. *Transport in Porous Media*, Vol. 32, pp. 299–327, 1998.
- [Morr 65] N. R. Morrow and C. C. Harris. “Capillary Equilibrium in Porous Materials”. *Soc. Pet. Eng. Jour.*, pp. 15 – 24, 1965.
- [Morr 88] N. Morrow, I. Chatzis, and J. Taber. “Entrapment and mobilization of residual oil in bead packs”. *SPE Reservoir Engineering*, Vol. 3, No. 3, pp. 927–934, 1988.

- [Mual 73] Y. Mualem. “Modified approach to capillary hysteresis based on a similarity hypothesis”. *Water Resources Research*, Vol. 9, No. 5, pp. 1324–1331, 1973.
- [Mual 74] Y. Mualem. “A conceptual model of hysteresis”. *Water Resources Research*, Vol. 10, pp. 514–520, 1974.
- [Mual 76] Y. Mualem. “A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media”. *Water Resources Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 513–522, 1976.
- [Munz 05] C. Munz and T. Westermann. *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen*. Springer, 2005.
- [Musk 36] M. Muskat and M. Meres. “The flow of heterogeneous fluids through porous media”. *Physics*, Vol. 7, p. 346, 1936.
- [Naum 08] S. Naumov, A. Khokhlov, R. Valiullin, J. Karger, and P. A. Monson. “Understanding capillary condensation and hysteresis in porous silicon: Network effects within independent pores”. *Physical Review E*, Vol. 78, No. 6, p. 060601, 2008.
- [Nieb 05] J. L. Nieber, R. Z. Dautov, A. G. Egorov, and A. Y. Sheshukov. “Dynamic Capillary Pressure Mechanism for Instability in Gravity-Driven Flows; Review and Extension to Very Dry Conditions”. *Transport in Porous Media*, Vol. 58, pp. 147–172, 2005.
- [Nies 08] J. Niessner and S. M. Hassanizadeh. “A model for two-phase flow in porous media including fluid-fluid interfacial area”. *Water Resources Research*, Vol. 44, No. 8, p. W08439, AUG 26 2008.
- [Papa 08] A. Papafotiou. *Numerical Investigations of the Role of Hysteresis in Heterogeneous Two-Phase Flow Systems*. PhD thesis, University of Stuttgart, 2008.
- [Park 89] J. Parker. “Multiphase Flow And Transport In Porous-Media”. *Reviews of Geophysics*, Vol. 27, No. 3, pp. 311–328, AUG 1989.
- [Pasa 04] U. Pasaogullari and C. Wang. “Liquid water transport in gas diffusion layer of polymer electrolyte fuel cells”. *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 151, p. A399, 2004.
- [Perk 93] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1993.

- [Petz 83] L. R. Petzold. “A Description of DASSL: A Differential/Algebraic System Solver.”. In: R. S. Stepleman, Ed., *IMACS Transactions on Scientific Computation*, IMACS, Amsterdam, 1983.
- [Phil 91] J. R. Philip. “Horizontal Redistribution With Capillary Hysteresis”. *Water Resources Research*, Vol. 27, No. 7, pp. 1459 – 1469, 1991.
- [Rich 31] L. A. Richards. “Capillary Conduction of Liquids through Porous Medium”. *Physics*, pp. 318–333, 1931.
- [Sand 08] G. C. Sander, O. J. Glidewell, and J. Norbury. “Dynamic capillary pressure, hysteresis and gravity-driven fingering in porous media”. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 138, 2008.
- [Sche 74] A. E. Scheidegger. *The Physics of Flow Through Porous Media*. University of Toronto Press, Toronto and Buffalo, 3rd edition Ed., 1974.
- [Shen 92] P. Sheng and M. Zhou. “Immiscible-fluid displacement: Contact-line dynamics and the velocity-dependent capillary pressure”. *Physical Review A*, Vol. 45, No. 8, pp. 5694–5708, 1992.
- [Tabe 69] J. Taber. “Dynamic and static forces required to remove a discontinuous oil phase from porous media containing both oil and water”. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 9, No. 1, pp. 3–8, 1969.
- [Tsak 07] C. D. Tsakiroglou, D. G. Avraam, and A. C. Payatakes. “Transient and steady-state relative permeabilities from two-phase flow experiments in planar pore networks”. *Advances In Water Resources*, Vol. 30, No. 9, pp. 1981–1992, SEP 2007.
- [Voge 08] H.-J. Vogel, A. Samouelian, and O. Ippisch. “Reprint of ”Multi-step and two-step experiments in heterogeneous porous media to evaluate the relevance of dynamic effects””. *Advances in Water Resources*, Vol. 31, No. 9, pp. I–VIII, Sep. 2008.
- [Volp 94] A. I. Volpert, V. A. Volpert, and V. A. Volpert. “Traveling wave solutions of parabolic systems”. *Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence*, Vol. 140, p. 448, 1994.
- [Wyck 36] R. D. Wyckoff and H. G. Botset. “The Flow of Gas-Liquid Mixtures Through Unconsolidated Sands”. *Physics*, Vol. 7, No. 9, pp. 325–345, 1936.
- [Zege 10] P. Zegeling, I. Lagzi, and F. Izsak. “Transition of Liesegang Precipitation Systems: Simulations with an Adaptive Grid PDE Method”. *submitted*, 2010.

- [Zege 92] P. A. Zegeling and J. Blom. “An Evaluation of the Gradient-Weighted Moving-Finite-Element Method in One Space Dimension”. *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, pp. 422–441, 1992.
- [Zhan 02] Z. Zhang and J. Smith. “Visualization of DNAPL Fingering Processes and Mechanisms in Water-Saturated Porous Media”. *Transport in Porous Media*, Vol. 48, pp. 41–59, 2002.