
Torsionseinheiten in ganzzahligen Gruppenringen nicht auflösbarer Gruppen

Von der Fakultät Mathematik und Physik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Leo Margolis

geboren in Kuibyschew

Hauptberichter: apl. Prof. Dr. Wolfgang Kimmerle

Mitberichter: Prof. Dr. Ángel del Río

Prof. Dr. Meinolf Geck

Tag der mündlichen Prüfung: 02. Juni 2015

Institut für Geometrie und Topologie

2015

Эх, Киса, мы чужие на этом празднике жизни.
- О.И. Бендер, великий комбинатор

I believe in Curtis-Reiner.
- Martin Hertweck

Danksagung

Ich danke Wolfgang Kimmerle dafür, dass er mich den endlichen Gruppen und ihren Gruppenringe vorgestellt hat. Mein Dank gilt Andreas Bächle für fruchtbare Zusammenarbeit und Martin Hertweck für einige interessante Gespräche. Ich danke auch Alexander Konovalov für die Zusammenarbeit in St Andrews und allen Algebraikern des Fachbereichs Mathematik für verschiedene Hinweise. Ich danke Markus Schmidmeier für seinen Hinweis zu den Littlewood-Richardson Koeffizienten.

Ich bedanke mich bei Marc Wied und Matthias Breckner für das Korrekturlesen dieser Arbeit, bei Alexander Thumm für nützliche Gespräche und bei allen Mitarbeitern des CIP-Pools für ihre Geduld und Hilfe.

Nicht zuletzt danke ich meinem Vater, meiner Großmutter, meiner Schwester und natürlich meiner Mutter für ihre Unterstützung in allen Lebenslagen.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	vii
Einleitung	1
1 Grundlagen und Methoden	7
1.1 Grundlagen	8
1.2 Die HeLP-Methode	11
1.3 Die Gitter-Methode	13
1.3.1 Young Tableaus und kC_n -Moduln	19
1.4 Algorithmische Aspekte der Gitter-Methode	21
2 Torsionseinheiten im ganzzahligen Gruppenring der $\mathrm{PSL}(2, q)$	23
2.1 Grundlagen und Bekanntes	25
2.1.1 Gruppen- und darstellungstheoretische Grundlagen	25
2.1.2 Bekanntes über Torsionseinheiten	28
2.2 Ein starker Sylowsatz	30
2.3 Nicht-abelsche p -Untergruppen	38
2.4 Primgraphfrage	46
2.5 Zassenhausvermutung für $\mathrm{PSL}(2, 16)$, $\mathrm{PSL}(2, 19)$, $\mathrm{PSL}(2, 23)$ und $\mathrm{PSL}(2, 25)$	49
3 Gruppen mit wenigen Primteilern	61
3.1 Gruppen mit drei Primteilern	62
3.2 Gruppen mit vier Primteilern	68
3.2.1 Mittels HeLP	69
3.2.2 Mittels der Gitter-Methode	72
A Anhang: Die HeLP-Methode für fast-einfache Gruppen mit vier Primteilern	93
Symbolverzeichnis	107
Literaturverzeichnis	110

Zusammenfassung/Summary

Gegenstand dieser Arbeit sind Torsionseinheiten und Torsionsuntergruppen der Einheitengruppe ganzzahliger Gruppenringe nicht-auflösbarer Gruppen. Im ersten Kapitel werden die Methoden eingeführt, auf denen im Wesentlichen die Ergebnisse der folgenden Kapitel beruhen. Dies sind einerseits die bekannte HeLP-Methode und andererseits eine neue, im Rahmen dieser Arbeit gefundene Methode, die Gitter-Methode.

Im zweiten Kapitel werden verschiedene Ergebnisse über normalisierte Torsionseinheiten im ganzzahligen Gruppenring der $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ vorgestellt. In Abschnitt 2.2 wird bewiesen, dass normalisierte Torsionseinheiten, deren Ordnung eine zu p teilerfremde Primzahlpotenz ist, rational konjugiert zu Elementen der Gruppenbasis sind. Hieraus folgt für $p = 2$ oder $f = 1$, dass beliebige Torsionsuntergruppen von Primzahlpotenzordnung rational konjugiert zu Untergruppen der Gruppenbasis sind. In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass im Fall $f = 3$ Untergruppen von Primzahlpotenzordnung isomorph zu Untergruppen der Gruppenbasis sind. In Abschnitt 2.4 wird bewiesen, dass keine normalisierten Torsionseinheiten der Ordnung $3p$ existieren, falls 9 kein Teiler der Ordnung von G ist. Hierbei findet erstmals die Gitter-Methode Anwendung. Außerdem werden Ergebnisse Hertwecks über die Torsionseinheiten ganzzahliger Gruppenringe der $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ auf $\mathrm{PGL}(2, p^f)$ ausgedehnt. Insbesondere wird die Primgraphfrage für die Gruppen $\mathrm{PGL}(2, p)$ gezeigt. In Abschnitt 2.5 wird die Zassenhausvermutung für die Gruppen $\mathrm{PSL}(2, 16)$, $\mathrm{PSL}(2, 19)$, $\mathrm{PSL}(2, 23)$ und $\mathrm{PSL}(2, 25)$ bewiesen.

Im dritten Kapitel wird die Primgraphfrage für Gruppen, deren Ordnung nur durch drei bzw. vier Primzahlen teilbar ist, untersucht. Im ersten Abschnitt wird die Primgraphfrage für die Mathieugruppe vom Grad 10 und die $\mathrm{PGL}(2, 9)$ bewiesen. Dies schließt einen Beweis Kimmerles und Konovajlovs ab, dass die Primgraphfrage für jede Gruppe, für die die Ordnung jedes fast-einfachen Bildes durch maximal drei paarweise verschiedene Primzahlen

teilbar ist, eine positive Antwort hat. In Abschnitt 3.2 wird die Primgraphfrage für fast-einfache Gruppen untersucht, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Mit Ausnahme der, möglicherweise unendlichen, Serie der Gruppen $\text{PGL}(2, 3^f)$ und fünf weiterer Ausnahmegruppen gelingt hierbei ein Beweis der Primgraphfrage.

The object of study in this thesis are torsion units and torsion subgroups in the normalized unit group of an integral group ring of a finite group. In Chapter 1 two methods are introduced, which are the basis for all the following results. This is the well known HeLP-method and a method found during the work on this thesis, the lattice-method.

In Chapter 2 different results on the normalized torsion subgroups of the integral group ring of $\text{PSL}(2, p^f)$ are presented. In section 2.2 it is proved, that normalized torsion units of prime power order prime to p are rationally conjugate to elements of the group bases. From this it follows that any torsion subgroup of prime power order is rationally conjugate to a subgroup of the group base provided $p = 2$ or $f = 1$. In section 2.3 it is proved that in case $f = 3$ any torsion subgroup of prime power order is isomorphic to a subgroup of the group bases. In section 2.4 the lattice-method is applied for the first time to prove that there are no normalized torsion units of order $3p$ in the integral group ring of $G = \text{PSL}(2, p^f)$ provided 9 does not divide the order of G . Moreover results of Hertweck for $\text{PSL}(2, p^f)$ are generalized to $\text{PGL}(2, p^f)$, especially the Prime Graph Question for every $\text{PGL}(2, p)$ is proved. These results are used in Section 3.2. In section 2.5 the Zassenhaus Conjecture is proved for the groups $\text{PSL}(2, 16)$, $\text{PSL}(2, 19)$, $\text{PSL}(2, 23)$ and $\text{PSL}(2, 25)$.

The third chapter deals with groups whose order is divisible by exactly three or four different primes. In the first section of chapter 3 a positive answer for the Prime Graph Question for the Mathieu group of degree 10 and the group $\text{PGL}(2, 9)$ is given. This yields, using a result of Kimmerle and Konovalov, that the Prime Graph Question has a positive answer for any group whose orders of all almost simple images have at most three pairwise different prime divisors. In the second section the Prime Graph Question for almost simple groups, whose order has at most four different prime divisors, is studied. Except for the, maybe infinite, series of groups $\text{PGL}(2, 3^f)$ and five other exceptional groups a positive answer is given.

Einleitung

Die erste Untersuchung der Einheiten endlicher Ordnung eines ganzzahligen Gruppenrings wurde 1940 von G. Higman in seiner Dissertation [Hig40a] vorgenommen. Einige Resultate Higmans wurden in [Hig40b] veröffentlicht und eine Zusammenfassung seiner Dissertation findet sich in [San81]. Für eine endliche Gruppe G bezeichne $\mathbb{Z}G$ den ganzzahligen Gruppenring von G und $V(\mathbb{Z}G)$ die Gruppe der normalisierten Einheiten in $\mathbb{Z}G$, d.h. die Menge der Einheiten mit Koeffizientensumme 1.

Bereits Higman beschäftigte sich im fünften Kapitel seiner Dissertation mit der Fragestellung, ob jede endliche Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$ isomorph zu einer Untergruppe von G ist. Diese Frage wurde später von R. Sandling in [San85, Problem 5.4] als explizites Problem formuliert und ist in spezieller Form in [Seh93, Problem 8] zu finden. Bis heute beruhen alle Gegenbeispiele zu diesen Fragen auf dem Gegenbeispiel M. Hertwecks zum Isomorphieproblem [Her98], s. auch [Her01], und im Allgemeinen ist nur sehr wenig über die endlichen Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ bekannt, vgl. die Grundlagen in Abschnitt 1.1.

Einen weiteren Schub erlebte das Studium der endlichen Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ durch drei von H.J. Zassenhaus in den 1960er Jahren geäußerten und später in [Zas74], [Seh84] veröffentlichten Vermutungen, welche Higmans Frage in einer speziellen Form verschärften. Von diesen Vermutungen stellten sich zwei im Allgemeinen als nicht richtig heraus, s. [Rog91, Sco92], während die dritte bis heute offen ist und daher auch einfach Zassenhausvermutung genannt wird. Diese Vermutung gilt heute als das zentrale offene Problem in der Theorie der Einheiten endlicher Ordnung in ganzzahligen Gruppenringen.

(ZV) Ist $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Einheit endlicher Ordnung, dann existiert in der rationalen Gruppenalgebra $\mathbb{Q}G$ eine Einheit x , so dass $x^{-1}ux \in G$ gilt.

Existiert ein solches x , so sagt man, dass u zu einem Element in G rational konjugiert ist. Es sei bemerkt, dass bereits in $V(\mathbb{Z}S_3)$ Involutionen existieren, welche in $V(\mathbb{Z}S_3)$ nicht konjugiert sind.

Eine deutlich schwächere Frage, deren Beweis für eine Gruppe als eine erste Annäherung an die Zassenhausvermutung zu werten ist, formulierte W. Kimmerle in [Kim06], s. auch [Ari07, Prob. 21], die sogenannte Primgraphfrage:

- (PQ)** Sind p und q zwei unterschiedliche Primzahlen und enthält die Gruppe $V(\mathbb{Z}G)$ ein Element der Ordnung pq , so enthält auch G ein Element der Ordnung pq .

Der Primgraph einer Gruppe G ist wie folgt definiert: Die Eckenmenge des Primgraphen besteht aus jenen Primzahlen, die als Elementordnungen von Elementen in G vorkommen, und zwei Ecken p und q werden durch eine Kante verbunden, falls in G ein Element der Ordnung pq existiert. Die Primgraphfrage ist somit äquivalent zu der Aussage, dass die Primgraphen von $V(\mathbb{Z}G)$ und G übereinstimmen. Die Primgraphfrage kann aber auch als Spezialfall der oben erwähnten Frage Higman's bzw. Sandlings verstanden werden.

Als eine weitere Variation oben genannter Probleme wird auch folgende Fragestellung betrachtet: Ist P eine p -Gruppe in $V(\mathbb{Z}G)$, ist dann P notwendigerweise isomorph zu einer Untergruppe von G oder sogar rational konjugiert zu einer Untergruppe von G ? Eine Aussage solchen Typs kann auch als schwacher bzw. starker Sylowsatz für $V(\mathbb{Z}G)$ bezeichnet werden. Erste Ergebnisse in dieser Richtung, allerdings in einem sehr viel weiteren Kontext, wurden in [RS87] und [Wei88, Wei91] erzielt, falls G eine p -Gruppe bzw. nilpotent ist. In diesen Fällen sind Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ sogar p -adisch zu Untergruppen von G konjugiert. Letztere der beiden Fragen wurde explizit in [DJ96] formuliert und für einige Klassen auflösbarer Gruppen untersucht. Beide Fragestellungen werden in [Kim15] aufgegriffen.

Das Studium der Zassenhausvermutung konzentrierte sich bis ca. 2004 hauptsächlich auf auflösbare Gruppen und viele Arbeiten wurden auf diesem Gebiet veröffentlicht (vgl. z.B. [Wei91], [Her06], [Her08a], [CMdR13]). Lange Zeit waren hingegen die alternierende Gruppe vom Grad 5 [LP89] und die symmetrische Gruppe vom Grad 5 [LT91] die einzigen nicht-auflösbaren Gruppen, für welche die Zassenhausvermutung bekannt war. Ein wesentlicher Fortschritt für weitere nicht-auflösbare Gruppen konnte erst durch die Erweiterung der von I.S. Luthar und I.B.S. Passi in [LP89] verwendeten Methode durch Hertweck in [Her07] erzielt werden. Diese Methode wird daher als HeLP-Methode bezeichnet und in Abschnitt 1.2 eingeführt.

Die Grundidee der HeLP-Methode ist folgende: Sei u eine Einheit endlicher Ordnung in $V(\mathbb{Z}G)$ und χ ein Charakter, der zu einer G -Darstellung über einem Körper der Charakteristik 0 korrespondiert. Dann ist das Skalarprodukt von χ mit jedem Charakter von $\langle u \rangle$ eine nicht-negative ganze Zahl. Es gelang Hertweck diese Idee auch auf Darstellungen über Körpern positiver Charakteristik p zu übertragen, wobei aber p nicht die Ordnung von u teilen darf.

Die HeLP-Methode verwendet Charakter- und Brauer-Tafeln und es bietet sich an, sie für Serien von Gruppen anzuwenden, für die diese Tafeln generisch vorliegen. Insbesondere sind dies die Gruppen $\mathrm{PSL}(2, p^f)$, die projektiven speziellen linearen Gruppen, die auf der projektiven Geraden über einem Körper mit p^f Elementen operieren. Diese Gruppen haben außerdem den Vorteil, dass zu jeder festen Ordnung einer zyklischen Untergruppe stets nur eine Konjugiertenklasse solcher zyklischer Untergruppen vorliegt. Die HeLP-Methode wird in Abschnitt 2.2 eingesetzt, um zu zeigen, dass Einheiten in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$, deren Ordnung eine zu p teilerfremde Primzahlpotenzordnung ist, rational konjugiert zu Elementen in $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ sind. Hieraus folgt:

Satz 2.2.2: *Ist $p = 2$ oder $f = 1$, so ist jede Untergruppe von $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, zu einer Untergruppe der Gruppenbasis rational konjugiert. Das heißt in solchen Gruppenringen gilt ein starker Sylowsatz.*

Dieses Resultat findet sich in [Mar14] und verschärft ein Ergebnis von Hertweck, Höfert und Kimmerle, dass solche Untergruppen zu Untergruppen der $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ isomorph sind [HHK09], d.h. dass in den entsprechenden Gruppenringen ein schwacher Sylowsatz gilt.

In Abschnitt 2.3 wird mittels einer Abwandlung der HeLP-Methode gezeigt:

Satz 2.3.1: *In $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^3))$ ist jede Untergruppe von Primzahlpotenzordnung isomorph zu einer Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2, p^3)$, d.h. in solchen Gruppenringen gilt ein schwacher Sylowsatz.*

Dieses Ergebnis ist in Zusammenarbeit mit A. Bächle entstanden und findet sich in [BM14b]. Es beantwortet eine Frage von Hertweck, Höfert und Kimmerle aus [HHK09] für diese Serie von Gruppen.

Während für die Zassenhausvermutung kaum strukturelle Theorie vorliegt, z.B. ist es vollkommen unbekannt, ob die Gültigkeit der Zassenhausvermutung für eine Gruppe G die Gültigkeit der Vermutung für das direkte Produkt $G \times G$ impliziert, gelang es Kimmerle und Konovalov für die Primgraphfrage eine starke Reduktion zu zeigen: Hat die Primgraphfrage für jedes fast-einfache Bild einer Gruppe G eine positive Antwort, so hat sie eine positive Antwort für G , s. [KK12, Th. 2.1]. Hierbei heißt eine Gruppe G fast-einfach, wenn eine einfache, nicht-abelsche Gruppe S existiert, so dass $\text{Inn}(S) \leq G \leq \text{Aut}(S)$ gilt, wobei Inn bzw. Aut die innere bzw. gesamte Automorphismengruppe bezeichnet.

Kimmerle und Konovalov versuchten daraufhin die Primgraphfrage für alle Gruppen zu beantworten, deren Ordnung von genau drei paarweise verschiedenen Primzahlen geteilt wird, indem sie diese für alle fast-einfachen Gruppen mit dieser Eigenschaft zu beantworten suchten [KK13]. Nach der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen und [Fei71, § 7] gibt es bis auf Isomorphie genau 19 solche Gruppen. Es gelang Kimmerle und Konovalov mittels der HeLP-Methode für 17 dieser 19 Gruppen die Primgraphfrage zu beantworten. Die letzten beiden zu untersuchenden Gruppen waren die Mathieugruppe M_{10} und die $\text{PGL}(2, 9)$. Konkret war noch zu zeigen, dass in den normalisierten Einheitengruppen dieser beiden Gruppen jeweils keine Elemente der Ordnung 6 existieren. Im Rahmen dieser Arbeit gelang es, gemeinsam mit A. Bächle, auch für diese Gruppen, die Primgraphfrage zu beantworten, s. Satz 3.1.1, und es ergibt sich somit

Korollar 3.1.2: *Sei G eine Gruppe, für welche die Ordnung jedes fast-einfachen Bildes von G höchstens drei paarweise verschiedene Primteiler hat. Dann gilt die Primgraphfrage für G . Insbesondere gilt die Primgraphfrage für alle Gruppen, deren Ordnung höchstens durch drei paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist.*

Dieses Resultat findet sich auch in [BM14a]. Aus den Argumenten des Beweises konnte sogar eine allgemeine Methode entwickelt werden, die sogenannte Gitter-Methode, welche in Abschnitt 1.3 vorgestellt wird. Als Inspiration für die Gitter-Methode diente ein Argument Hertwecks in [Her08c]. Es handelt sich erst um die zweite allgemeine Methode, welche zur Behandlung der Zas-

senhausvermutung und der Primgraphfrage für nicht-auflösbare Gruppen zur Verfügung steht.

Die Grundidee der Gitter-Methode ist folgende: Sei u eine Einheit endlicher Ordnung in $V(\mathbb{Z}G)$, weiterhin p ein Primteiler der Ordnung von u und L ein RG -Gitter, welches zu einer Darstellung D von G korrespondiert. Hierbei bezeichnet R einen Ring der Charakteristik 0, der ein maximales Ideal P enthält, in dem p liegt. Ist die HeLP-Methode für u nicht erfolgreich, so liefert sie dennoch starke Einschränkungen an die möglichen Eigenwerte von $D(u)$. Ist $k = R/P$ der Restklassenkörper von R modulo P und bezeichnet $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo P , so lassen sich aus diesen Eigenwerten Einschränkungen an die Isomorphietypen der kG -Kompositionsfaktoren von \bar{L} als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln gewinnen. Da reduzierte nicht-isomorphe Gitter isomorphe Kompositionsfaktoren besitzen können, kann die Anwendung der Methode auf verschiedene Gitter schließlich einen Widerspruch ergeben. Die für den Einsatz der Gitter-Methode benötigten Zutaten sind Charaktertafeln und Zerlegungsmatrizen sowie teilweise auch Brauer-Tafeln.

Das Verhältnis der HeLP- und Gitter-Methode kann auch in folgendem Sinne aufgefasst werden: Während der erfolgreiche Einsatz der klassischen Methode von Luthar und Passi, also der HeLP-Methode in Charakteristik 0, die Existenz gewisser Einheiten in der komplexen Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ widerlegt, leistet der erfolgreiche Einsatz der Gitter-Methode bezüglich einer Primzahl p dies für den p -adischen Gruppenring \mathbb{Z}_pG .

Die HeLP-Methode und die Gitter-Methode werden in Abschnitt 2.5 eingesetzt, um zu zeigen:

Satz 2.5.1: *Die Zassenhausvermutung gilt für die vier Gruppen $\mathrm{PSL}(2, 16)$, $\mathrm{PSL}(2, 19)$, $\mathrm{PSL}(2, 23)$ und $\mathrm{PSL}(2, 25)$. Somit gilt die Zassenhausvermutung für die Gruppen $\mathrm{PSL}(2, q)$ mit $q \leq 25$.*

Der Beweis der Zassenhausvermutung für die beiden Gruppen $\mathrm{PSL}(2, 19)$ und $\mathrm{PSL}(2, 23)$ ist aus gemeinsamer Arbeit mit A. Bächle entstanden und findet sich in [BM14a]. Die Zassenhausvermutung war bisher nur für sieben nicht-abelsche einfache Gruppen bekannt, s. Proposition 2.1.4.

Zur Erprobung der Gitter-Methode wurde für diese Arbeit außerdem die Klasse der fast-einfachen Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, gewählt. Diese Gruppen werden in

Abschnitt 3.2 behandelt. Zwar gelingt es nicht, die Primgraphfrage für alle solchen Gruppen zu beweisen, s. Satz 3.2.1, es ergeben sich aber viele interessante Anwendungen der Gitter-Methode, s. die Lemmata 3.2.5 bis 3.2.10. Insbesondere wird die Gitter-Methode erstmals auf eine unendliche Serie von Gruppen angewendet, um zu zeigen:

Proposition 2.4.1: In $V(\mathbb{Z}\text{PSL}(2, p^f))$ existieren keine Elemente der Ordnung $3p$, falls 9 nicht die Ordnung der Gruppenbasis $\text{PSL}(2, p^f)$ teilt.

Da auflösbare Gruppen nicht Teil dieser Arbeit sind, ist die Gitter-Methode für diese bisher noch nicht eingesetzt worden und es erscheint hochinteressant zu erfahren, welche Ergebnisse sie für solche Gruppen liefern könnte. Die kleinste Gruppe, für welche die Gitter-Methode mehr Informationen als die HeLP-Methode liefern könnte, ist nach einem Resultat von A. Herman und G. Singh [HS15] eine Gruppe der Ordnung 200 und die zu untersuchende Einheit hat Ordnung 10. Die Gitter-Methode kann für diese Gruppe tatsächlich leicht erfolgreich angewendet werden.

Eine erste GAP-Implementierung der Gitter-Methode für unverzweigte Körpererweiterungen geschah gemeinsam mit A. Konovalov und wurde teilweise zu Voruntersuchungen der in Abschnitt 3.2.2 erzielten Ergebnisse genutzt. Es erscheint außerdem dringend notwendig, eine Implementierung der HeLP-Methode öffentlich zur Verfügung zu stellen. Ich hoffe sehr, dass die Implementierung in GAP, welche in Zusammenarbeit mit A. Bächle entstanden ist und insbesondere verwendet wurde, um die Ergebnisse in Abschnitt 3.2.1 zu erzielen, noch dieses Jahr veröffentlicht werden kann.

Kapitel 1

Grundlagen und Methoden

Es bezeichne in diesem Kapitel und in der gesamten weiteren Arbeit G stets eine endliche Gruppe und \mathbb{Z} den Ring der ganzen Zahlen. Weiterhin bezeichne RG , den Gruppenring von G über R , für einen beliebigen Ring R . Die Abbildung

$$\varepsilon : RG \rightarrow R, \quad \sum_{g \in G} r_g g \mapsto \sum_{g \in G} r_g$$

heißt **Augmentationsabbildung** und ist ein Ringhomomorphismus. Insbesondere folgt für eine Einheit u in $\mathbb{Z}G$ die Gleichung $\varepsilon(u) = \pm 1$. Man nennt u eine **normalisierte Einheit**, falls $\varepsilon(u) = 1$ gilt. Bezeichne mit $V(\mathbb{Z}G)$ die Gruppe aller normalisierten Einheiten in $\mathbb{Z}G$. Dann besteht die Menge aller Einheiten in $\mathbb{Z}G$ gerade aus den Elementen von $\pm V(\mathbb{Z}G)$ und das Studium aller Einheiten des ganzzahligen Gruppenrings reduziert sich auf das Studium der normalisierten Einheiten.

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die grundlegenden bekannten Resultate über Torsionseinheiten ganzzahliger Gruppenringe angegeben. In den beiden folgenden Abschnitten werden die HeLP- und Gitter-Methoden vorgestellt, welche die Grundlage für die darauffolgenden Kapitel und die meisten Resultate dieser Arbeit bilden.

Notation: Die nachfolgenden Bezeichnungen sollen für die gesamte Arbeit gelten. Ist A eine Matrix mit Eigenwerten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, wobei die Multiplizitäten mit eingerechnet werden, dann schreibe

$$A \sim (\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Besitzt A genau a_1 Mal die Eigenwerte $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k_1}$ genau a_2 Mal die Eigenwerte $\alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,k_2}$ usw., dann schreibe auch

$$A \sim (a_1 \times (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k_1}), a_2 \times (\alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,k_2}), \dots, a_m \times (\alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,k_m})).$$

Es bezeichne ζ_n stets eine primitive n -te Einheitswurzel. Der Körper, in welchem ζ_n liegt, wird sich stets aus dem Kontext ergeben. Schreibe $(\zeta_n, \dots, \zeta_n^{-1})$ für die Menge aller primitiven n -ten Einheitswurzeln, falls diese als Eigenwerte einer Matrix auftreten.

Handelt es sich bei A um eine Matrix endlicher Ordnung, welche aus einer modularen Darstellung resultiert, so werden die Eigenwerte von A , im Sinne Brauers, als komplexe Einheitswurzeln aufgefasst.

1.1 Grundlagen

Für eine beliebige endliche Gruppe G ist über die Einheiten endlicher Ordnung von $V(\mathbb{Z}G)$ nur sehr wenig bekannt. So gut wie die einzigen bekannten Resultate sind:

Satz 1.1.1. [*ŽK67*], [*CL65, Cor. 4.1*] *Ist $U \leq V(\mathbb{Z}G)$ eine endliche Untergruppe, so teilt die Ordnung von U die Ordnung von G . Außerdem stimmen die Exponenten von $V(\mathbb{Z}G)$ und von G überein.*

Ist $x \in G$ und bezeichnet x^G die Konjugiertenklasse von x in G , dann heißt die Abbildung

$$\varepsilon_x : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}, \quad u = \sum_{g \in G} z_g g \mapsto \sum_{g \in x^G} z_g$$

die **partielle Augmentation** von u bezüglich x . Partielle Augmentationen spielen beim Studium der Zassenhausvermutung bzw. der Primgraphfrage eine wesentliche Rolle vermittelt folgenden Lemmas:

Lemma 1.1.2. [*MRSW87, Th. 2.5*] *Die Einheit $u \in V(\mathbb{Z}G)$ ist genau dann zu einem Element von G rational konjugiert, wenn für jedes $x \in G$ und jedes $d \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\varepsilon_x(u^d) \geq 0$ erfüllt ist.*

Es sind folgende Tatsachen über die partiellen Augmentationen von Torsionseinheiten bekannt:

Proposition 1.1.3. *Sei $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Torsionseinheit.*

- a) *Gilt $u \neq 1$, so ist $\varepsilon_1(u) = 0$ [Hig40a, Th. 10], [Ber55, Lem. 2] (s. auch [Seh93, Proposition 1.4]).*
- b) *Gilt $\varepsilon_x(u) \neq 0$, so teilt die Ordnung von x die Ordnung von u [Her07, Prop. 2.2].*

Die bisher genannten Resultate werden in dieser Arbeit teilweise ohne weitere Referenzierung verwendet.

Ist man nicht nur an der rationalen Konjugation zyklischer Untergruppen interessiert, ist häufig folgendes Lemma nützlich:

Lemma 1.1.4. *[Val94, Lem. 4] Sei U eine endliche Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$ und H eine Untergruppe von G isomorph zu U . Ist $\sigma : U \rightarrow H$ ein Isomorphismus, so dass $\chi(u) = \chi(\sigma(u))$ für jedes $u \in U$ und jeden gewöhnlichen irreduziblen Charakter χ von G gilt, so ist U rational konjugiert zu H .*

Ist U eine feste endliche Gruppe und G beliebig, dann ist so gut wie immer unbekannt, ob das Vorhandensein einer zu U isomorphen Untergruppe in $V(\mathbb{Z}G)$ dazu führt, dass auch G eine zu U isomorphe Untergruppe enthält. Dies ist nur bekannt, falls U eine zyklische Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist, s. Satz 1.1.1, oder in folgendem Fall.

Proposition 1.1.5. *[Kim07, Prop.], [Her08b, Cor. 1] Ist p eine Primzahl und enthält $V(\mathbb{Z}G)$ eine zu $C_p \times C_p$ isomorphe Untergruppe, so enthält auch G eine zu $C_p \times C_p$ isomorphe Untergruppe.*

Die bereits in der Einleitung erwähnte Reduktion der Primgraphfrage von Kimmerle und Konovalov besagt:

Satz 1.1.6. *[KK12, Th. 2.1]: Hat die Primgraphfrage für jedes fast-einfache Bild einer Gruppe G eine positive Antwort, so hat sie eine positive Antwort für G .*

Ein Lemma, welches bei der Behandlung der Primgraphfrage hilfreich ist und direkt aus [Her07, Bew. von Prop. 6.3] folgt, ist

Lemma 1.1.7. *Seien p und q verschiedene Primzahlen, so dass G kein Element der Ordnung pq enthält, und $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Einheit der Ordnung pq . Ist s die Summe der partiellen Augmentationen von u bezüglich Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung p , so gilt $s \equiv 0 \pmod{p}$.*

Zur Übersicht und zur Einordnung der Resultate dieser Arbeit sollen hier noch, bis auf einzelne Ausnahmen auflösbarer Gruppen, alle Gruppen angegeben werden, für welche die Zassenhausvermutung bzw. die Primgraphfrage bekannt ist. Zu beachten ist hierbei noch die Reduktion in Satz 1.1.6 und Hertwecks [Her08a, Prop. 8.1].

Die Zassenhausvermutung ist bekannt für:

- Nilpotente Gruppen [Wei91],
- Gruppen G mit einem zyklischen Normalteiler N , so dass G/N abelsch ist [CMdR13],
- Gruppen, die eine normale Sylowgruppe mit abelschem Komplement enthalten [Her06],
- Frobeniusgruppen, deren Ordnung durch genau zwei Primzahlen teilbar ist [JPM00],
- Gruppen der Form $X \rtimes A$, wobei X abelsch, A elementar abelsch ist und A treu sowie irreduzibel auf X operiert [SW86],
- Gruppen der Form $X \rtimes A$, wobei sowohl X als auch A abelsch sind und A von Primzahlordnung p ist, so dass p kleiner ist als jeder Primteiler der Ordnung von X [MRSW87],
- Zentrale Erweiterungen der S_5 [BH08] und einige $\text{PSL}(2, q)$, welche in Proposition 2.1.4 aufgeführt sind,
- Gruppen bis Ordnung 159 [HS15]¹.

Die Primgraphfrage wurde beantwortet für:

- Auflösbare Gruppen [Kim06, § 4], [Hö08, Kor. 2.10],
- Die Gruppen $\text{PSL}(2, p)$, wobei p eine Primzahl bezeichnet [Her07],
- Die Hälfte der sporadischen Gruppen (in einer Serie von Artikeln von V. Bovdi, Konovalov und anderen. Siehe z.B. [BKL08]),
- Fast-einfache Gruppen, deren Ordnung durch genau drei paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, abgesehen von M_{10} und $\text{PGL}(2, 9)$ [KK13].

¹Nach Fertigstellung dieser Arbeit teilte A. Herman mir mit, dass der Beweis dieses Resultats womöglich unvollständig ist.

1.2 Die HeLP-Methode

Eine Methode zur Untersuchung rationaler Konjugation von Torsionseinheiten in ganzzahligen Gruppenringen, welche gewöhnliche Charaktere benutzt, wurde 1989 von I.S. Luthar und I.B.S. Passi in [LP89] vorgestellt. Sie bewiesen damit die Zassenhausvermutung für die alternierende Gruppe vom Grad 5. Zusammen mit der symmetrischen Gruppe vom Grad 5, welche von Luthar und Trama in [LT91] untersucht wurde, blieb dies lange Zeit die einzige nicht-auflösbare Gruppe, für die die Zassenhausvermutung bekannt war. Ein erster algorithmischer Einsatz der Methode für generische Charaktertafeln einer ganzen Serie von Gruppen wurde von R. Wagner in seiner Diplomarbeit [Wag95] unternommen. Später gelang es Hertweck, in einem aus unbekanntem Gründen nie veröffentlichten Artikel, diese Methode auf modulare Charaktere auszuweiten [Her07]. Der heute übliche Name „HeLP“ (HertweckLutharPassi) für diese Methode geht, meines Wissens, auf Konovalov zurück.

Die Idee der HeLP-Methode ist nun folgende: Sei $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Torsionseinheit der Ordnung n und K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \geq 0$, wobei n nicht von p geteilt wird. Sei D eine K -Darstellung von G vom Grad s und χ der zu D gehörende Charakter. Dann lässt sich D , und folglich auch χ , linear auf $\mathbb{Z}G$ ausdehnen und $D(u)$ ist eine invertierbare Matrix endlicher Ordnung, deren Eigenwerte Einheitswurzeln von zu p teilerfremder Ordnung sind. Insbesondere ist $D(u)$ über K diagonalisierbar. Es gilt die Gleichung

$$\chi(u) = \sum_{x \in G} \varepsilon_x(u) \chi(x), \quad (1.1)$$

wobei die Summe über alle Konjugiertenklassen x^G von G läuft, die Elemente von zu p teilerfremder Ordnung enthalten. Diese Gleichung gilt mit Proposition 1.1.3b) offensichtlich für gewöhnliche Charaktere und nach Hertweck [Her07, Th. 3.2] auch für Brauer-Charaktere.

Kennt man nun, z.B. nach Induktion, die partiellen Augmentationen aller echten Potenzen von u , dann lassen sich die Charakterwerte für diese Potenzen bestimmen und diese Charakterwerte liefern Einschränkungen an die Eigenwerte von $D(u)$. Handelt es sich bei $n = q^f$ um eine Primzahlpotenz

und gilt $D(u^q) \sim (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, so existieren β_1, \dots, β_s mit $\beta_i^q = \alpha_i$ und

$$D(u) \sim (\beta_1, \dots, \beta_s).$$

Ist n hingegen keine Primzahlpotenz, so existieren zwei zu n nicht teilerfremde Zahlen m_1 und m_2 mit $u^{m_1+m_2} = u$. Aus $D(u^{m_1}) \sim (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ und $D(u^{m_2}) \sim (\beta_1, \dots, \beta_s)$ und der Tatsache, dass $D(u^{m_1})$ und $D(u^{m_2})$ als kommutierende Matrizen simultan diagonalisierbar sind, folgt

$$D(u) \sim (\alpha_1 \beta_{i_1}, \dots, \alpha_s \beta_{i_s})$$

mit $\{i_1, \dots, i_s\} = \{1, \dots, s\}$. In der Regel erhält man durch den Charakterring von χ weitere Einschränkungen an die möglichen Eigenwerte von $D(u)$, da die Summe der Eigenwerte von $D(u)$ in diesem Charakterring liegen muss. Der Vergleich der so erhaltenen Eigenwerte mit der oben angegebenen Gleichung (1.1) für $\chi(u)$, welche partielle Augmentationen von u enthält, liefert dann Einschränkungen an die möglichen partiellen Augmentationen von u . Dies ist die Grundidee der HeLP-Methode.

Dies lässt sich technischer auch folgendermaßen schreiben: Bezeichnet ζ eine feste, primitive, komplexe n -te Einheitswurzel und ξ irgendeine n -te komplexe Einheitswurzel, dann ist die Multiplizität von ξ als Eigenwert von $D(u)$, geschrieben $\mu(\xi, u, \chi)$, eine nicht-negative ganze Zahl und es gilt

$$\mu(\xi, u, \chi) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta^d)/\mathbb{Q}}(\chi(u^d) \xi^{-d}) + \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \varepsilon_x(u) \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}(\chi(x) \xi^{-1}). \quad (1.2)$$

Hierbei läuft die zweite Summe über alle Konjugiertenklassen x^G von G , die Elemente von zu p teilerfremder Ordnung enthalten, und es bezeichnet $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta^d)/\mathbb{Q}}$ die zahlentheoretische Spur, d.h.

$$\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta^d)/\mathbb{Q}}(x) = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta^d)/\mathbb{Q})} \sigma(x).$$

Ist weiterhin u von Primzahlpotenzordnung q^f , so vereinfacht sich die erste Summe in (1.2) zu

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta^d)/\mathbb{Q}}(\chi(u^d) \xi^{-d}) = \frac{1}{q} \mu(\xi^q, u^q, \chi). \quad (1.3)$$

Diese Formeln finden sich in [Her07, Sec. 4].

Die HeLP-Methode in Charakteristik 0 lässt sich auch als Spezialfall des folgenden Arguments auffassen: Ist U eine endliche Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$ und ψ ein gewöhnlicher Charakter von U sowie χ die lineare Ausdehnung eines gewöhnlichen Charakters von G auf den Gruppenring $\mathbb{Z}G$, so ist

$$\langle \psi, \chi|_U \rangle_U \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Das Wissen über die Charakterwerte von $\chi|_U$, welches z.B. aus dem Wissen über die partiellen Augmentationen der Elemente in U gewonnen werden kann, ermöglicht dann die Anwendung dieser Ungleichung. Die HeLP-Methode und die Gleichung (1.2) ergeben sich dann als explizite Berechnung dieses Ansatzes für eine zyklische Gruppe U . Die erste Anwendung dieser Methode für ein nicht-zyklisches U geschah in der Doktorarbeit Höferts [Hö08]. Später wurde sie auch in [Her08b] und [HHK09] eingesetzt. In dieser Arbeit wird die Methode für die Heisenberggruppe $(C_p \times C_p) \rtimes C_p$ in Abschnitt 2.3 angewendet.

1.3 Die Gitter-Methode

In Fällen, in denen die HeLP-Methode nicht ausreicht um rationale Konjugation gewisser Torsionseinheiten in $V(\mathbb{Z}G)$ zu Elementen der Gruppenbasis zu zeigen bzw. die Existenz gewisser Torsionseinheiten zu widerlegen, liefert sie dennoch starke Einschränkungen an die möglichen partiellen Augmentationen solcher Einheiten. Ist u eine solche Torsionseinheit und sind auch die partiellen Augmentationen aller echten Potenzen von u bekannt, so lassen sich für eine K -Darstellung D von G die Eigenwerte von $D(u)$ angeben. Hierbei bezeichnet K einen Körper, dessen Charakteristik teilerfremd zur Ordnung von u ist. Es stellt sich die natürliche Frage: Kann man mit Hilfe dieser Eigenwerte weiteres Wissen über u , bis hin zu seiner Nichtexistenz bzw. seiner rationalen Konjugation zu einem Element in G , gewinnen und wie ließe sich das anstellen?

Notation: Es bezeichnet in diesem Abschnitt stets p eine Primzahl, \mathbb{Q}_p die p -adische Vervollständigung von \mathbb{Q} und \mathbb{Z}_p den Ring der ganzen Zahlen des Körpers \mathbb{Q}_p . Weiterhin bezeichnet R stets einen vollständigen diskreten Be-

wertungsring von endlichem Grad über \mathbb{Z}_p und P das maximale Ideal des Rings R , welches p enthält, sowie K den Quotientenkörper von R . Weiterhin bezeichnet k einen endlichen Körper der Charakteristik p , welcher groß genug ist und den Restklassenkörper R/P enthält. Die Reduktion modulo P , auch in Bezug auf Gitter, wird mit $\bar{\cdot}$ bezeichnet.

Die Grundidee der Gitter-Methode ist nun folgende: Sei u eine Torsionseinheit in $V(\mathbb{Z}G)$, so dass für u und alle echten Potenzen von u die partiellen Augmentationen bekannt sind und p die Ordnung von u teilt. Ist D eine R -Darstellung von G und L ein zu dieser Darstellung passendes RG -Gitter, dann liefern die Eigenwerte von $D(u)$ Einschränkungen an die Struktur von L als $R\langle u \rangle$ -Gitter. Hieraus ergeben sich wiederum Einschränkungen an \bar{L} als $k\langle \bar{u} \rangle$ -Modul und daraus Einschränkungen an die als kG -Moduln einfachen Kompositionsfaktoren von \bar{L} , wenn man diese als $k\langle \bar{u} \rangle$ -Moduln auffasst, vgl. Abbildung 1.1.

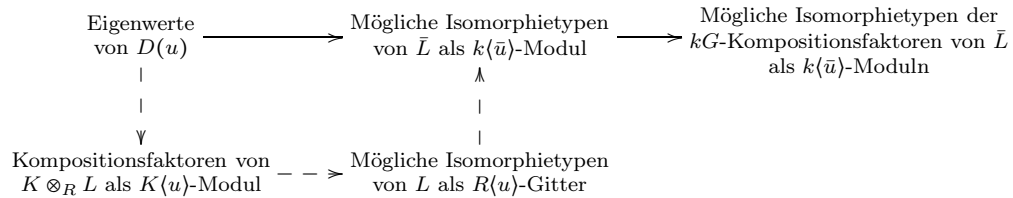


Abbildung 1.1: Die Idee der Gitter-Methode.

Da verschiedene Darstellungen und die zugehörigen reduzierten Gitter als kG -Moduln isomorphe Kompositionsfaktoren besitzen können, können die möglichen Isomphietypen dieser Kompositionsfaktoren als $k\langle \bar{u} \rangle$ -Moduln sich widersprechen und einen Widerspruch zur Existenz von u liefern. Die genauen theoretischen Voraussetzungen an die Gitter-Methode finden sich in den folgenden Lemmata und Propositionen, welche aus Resultaten der modularen und ganzzahligen Darstellungstheorie folgen. Einige Teile der hier angeführten Zusammenhänge finden sich in [BM14a].

Das erste Lemma ist Standardwissen der modularen Darstellungstheorie und kann etwa in [HB82a, Ch. VII, Th. 5.3, Th. 5.5] nachgelesen werden.

Lemma 1.3.1. *Sei $U = \langle u \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^a m$, wobei m teilerfremd zu p ist. Sei k ein Körper der Charakteristik p , welcher eine primitive m -te Einheitswurzel ζ enthält. Dann gilt:*

- a) *Es existieren bis auf Isomorphie genau m einfache kU -Moduln. Diese sind als k -Vektorräume alle 1-dimensional, u^m operiert auf jedem trivial und u^{p^a} operiert als ζ^i mit $1 \leq i \leq m$. Wir nennen diese Moduln k_1, \dots, k_m .*
- b) *Die projektiven, unzerlegbaren kU -Moduln sind p^a -dimensional. Sie alle sind uniseriell und jeder hat bis auf Isomorphie nur einen Kompositionsfaktor. Es gibt bis auf Isomorphie genau m projektive, unzerlegbare kU -Moduln.*
- c) *Jeder unzerlegbare kU -Modul ist isomorph zu einem Untermodul eines projektiven, unzerlegbaren Moduls. Es gibt insbesondere bis auf Isomorphie genau $p^a m$ unzerlegbare kU -Moduln und jeder solche ist uniseriell und hat bis auf Isomorphie nur einen Kompositionsfaktor.*

Notation: Ein unzerlegbarer $k\langle u \rangle$ -Modul der k -Dimension j mit Kompositionsfaktor k_i wird mit $(I_j)^{\zeta^i}$ bezeichnet. Geht der Kompositionsfaktor k_i aus dem Kontext eindeutig hervor, so wird dieser Modul auch mit I_j bezeichnet.

Mit Lemma 1.3.1 und dem Liften von Idempotenten [CR90, Th. 30.4] folgt:

Proposition 1.3.2. *Sei $U = \langle u \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^a m$, so dass m teilerfremd zu p ist. Sei R ein vollständiger, diskreter Bewertungsring, welcher eine primitive m -te Einheitswurzel ζ enthält. Sei D eine R -Darstellung von U und L ein zu dieser Darstellung korrespondierendes RU -Gitter. Seien A_i ungeordnete Tupel von p^a -ten Einheitswurzeln, so dass $\zeta A_1 \cup \zeta^2 A_2 \cup \dots \cup \zeta^m A_m$ gerade die komplexen Eigenwerte von $D(u)$ sind. Hierbei können manche A_i auch leer sein.*

Des Weiteren seien V_1, \dots, V_m solche KU -Moduln, dass für eine zu V_i korrespondierende Darstellung E_i die Eigenwerte von $E_i(u)$ gerade $\zeta^i A_i$ sind. Dann ist

$$L \cong L^\zeta \oplus L^{\zeta^2} \dots \oplus L^{\zeta^m} \quad \text{und} \quad \bar{L} \cong \bar{L}^\zeta \oplus \dots \oplus \bar{L}^{\zeta^m},$$

so dass $\text{rank}_R(L^{\zeta^i}) = \dim_k(\bar{L}^{\zeta^i}) = |A_i|$ gilt. Hierbei sind die obenstehenden ζ^i als Indices zu lesen. Weiterhin ist $K \otimes_R L^{\zeta^i} \cong V_i$ und der bis auf Isomorphie einzige Kompositionsfaktor von \bar{L}^{ζ^i} ist k_i (vgl. Notation in Lemma 1.3.1).

In einigen einfachen Fällen lassen sich die L_i genau beschreiben. Die nachfolgende Proposition beschreibt die einfachste Situation und ist eine Folgerung aus [Gud67, Kor. 1 nach Th. 2.2].

Proposition 1.3.3. *Sei die Notation wie in Proposition 1.3.2, die Gruppe U von Ordnung p und K unverzweigt über \mathbb{Q}_p . Sei ξ eine primitive p -te Einheitswurzel.*

a) *Sei L ein unzerlegbares RU -Gitter. Dann tritt für den R -Rang von L , die zu L korrespondierenden Eigenwerte und das Zerfallen von \bar{L} einer der folgenden Fälle ein.*

- $\text{rank}(L) = 1$ mit zugehörigem Eigenwert 1 und \bar{L} ist unzerlegbar,
- $\text{rank}(L) = p - 1$ mit zugehörigen Eigenwerten $\xi, \xi^2, \dots, \xi^{p-1}$ und \bar{L} ist unzerlegbar,
- $\text{rank}(L) = p$ mit zugehörigen Eigenwerten $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{p-1}$ und \bar{L} ist unzerlegbar,
- $\text{rank}(L) = p$ mit zugehörigen Eigenwerten $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{p-1}$ und \bar{L} ist die direkte Summe eines trivialen Moduls und eines unzerlegbaren Moduls der k -Dimension $p - 1$.

b) *Sei L nun wieder ein beliebiges RU -Gitter. Ist man nur an dem Zusammenhang zwischen den Eigenwerten von $D(u)$ und dem Isomorphietyp von \bar{L} interessiert, so kann man nach a) und Lemma 1.3.1 annehmen, dass L nur unzerlegbare direkte Summanden der ersten drei in a) angegebenen Isomorphietypen besitzt.*

Bemerkung und Notation: Die in den ersten drei Fällen in der Proposition 1.3.3a) geschilderten Gitter sind bis auf Isomorphie gerade das triviale Gitter, das Augmentationsideal des Gruppenrings RC_p und der Gruppenring RC_p selber. Sie sollen daher mit ihren natürlichen Namen R , $I(RC_p)$ und RC_p versehen werden. Entsprechend werden ihre Reduktionen mit k , $I(kC_p)$ bzw. kC_p bezeichnet.

Nach Proposition 1.3.3b) kann außerdem bei der Anwendung der Gitter-Methode der vierte Fall in Proposition 1.3.3a) ignoriert werden.

Einige weitere, für die Gitter-Methode wichtige Aspekte finden sich in folgender Bemerkung:

Bemerkung 1.3.4. *Die Notation sei wie in Proposition 1.3.2.*

- a) *Das Krull-Schmidt-Azumaya-Theorem gilt für L [CR90, Th. 30.6].*
- b) *Die Anwendung der Gitter-Methode erfordert, einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten $\zeta^i A_i$ und der Struktur von L^S herzustellen. Um dies in voller Allgemeinheit erreichen zu können, muss man also die Darstellungstheorie von $R\langle u^m \rangle$ studieren. Der Darstellungstyp von $R\langle u^m \rangle$ kann dabei endlich, zahm oder wild sein. Die Darstellungstheorie wird, grob gesprochen, desto komplizierter je größer a wird und je höher der Verzweigungsgrad von K über \mathbb{Q}_p steigt. Die Auflistung der Darstellungstypen für alle solchen Gruppenringe findet sich in [Die85].*
- c) *Es bezeichne ξ eine primitive, komplexe p -te Einheitswurzel. K habe die Form $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_2$, wobei K_1 einen Teilkörper von $\mathbb{Q}_p(\xi)$ bezeichnet und K_2 eine unverzweigte Erweiterung von \mathbb{Q}_p . Sei $a = 1$ und L unzerlegbar, so dass L bis auf Isomorphie höchstens zwei einfache, nicht-isomorphe RU -Gitter als Kompositionsfaktoren besitzt. Dann tritt jedes dieser nicht-isomorphen einfachen Gitter höchstens ein Mal als Kompositionsfaktor von L auf [Gud67, Th. 2.2].*
- d) *Sei p eine ungerade Primzahl mit $p \equiv \epsilon \pmod{4}$ und $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Weiterhin sei $K = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\epsilon p})$ und U von Ordnung p . Bis auf Isomorphie existieren dann genau drei einfache RU -Gitter. Sei L unzerlegbar. Dann tritt jedes der nicht-trivialen einfachen RU -Gitter höchstens ein Mal als Kompositionsfaktor von L auf und das triviale RU -Gitter höchstens zwei Mal [Gud67, Lem. 4.1].*

Die Rolle der Gruppe U in Proposition 1.3.2 wird in den Anwendungen von $\langle u \rangle$ eingenommen, wobei u die untersuchte Torsionseinheit im ganzzahligen Gruppenring bezeichnet. Wichtige Aspekte der Darstellungstheorie der Gruppenbasis werden in folgender Bemerkung angegeben.

Bemerkung 1.3.5. *Sei G eine endliche Gruppe.*

- a) *Sei p eine ungerade Primzahl, χ ein irreduzibler Charakter von G und $\mathbb{Q}(\chi)$ der Charakterkörper von χ . Weiterhin sei $p^a m$ mit $\text{ggT}(m, p) = 1$ der Exponent von G . Dann existiert nach einem Satz von P. Fong [Isa76, Cor. 10.13] eine den Charakter χ über dem Körper $\mathbb{Q}(\chi)(\zeta_m)$*

realisierende Darstellung von G .

Nach [Neu92, Kap. II, Satz 7.12] existiert somit ein p -adisch vollständiger Körper vom selben Verzweigungsgrad über \mathbb{Q}_p wie die p -adische Vervollständigung von $\mathbb{Q}(\chi)$, über dem sich χ realisieren lässt.

- b) R ist als vollständiger, diskreter Bewertungsring ein Hauptidealbereich. Damit ist jede K -Darstellung von G äquivalent zu einer R -Darstellung [CR90, Prop. 23.16].

Das nachfolgende Lemma beschreibt die einfachste Situation, in welcher sich die Gitter-Methode anwenden lässt. Diese liegt bei der alternierenden Gruppe vom Grad 6 vor und begegnet einem bei den in dieser Arbeit betrachteten Gruppen auch überraschend häufig.

Lemma 1.3.6. *Sei G eine endliche Gruppe und $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Torsionseinheit der Ordnung pq , wobei p und q verschiedene Primzahlen bezeichnen und p ungerade ist. Es bezeichne ζ_q eine primitive komplexe q -te Einheitswurzel und χ und ψ seien irreduzible ganzzahlige Charaktere von G . Sei R ein über \mathbb{Z}_p unverzweigter diskreter vollständiger Bewertungsring, dessen maximales Ideal \mathfrak{p} enthält und über dem sich zu χ und ψ gehörende Darstellungen D_χ und D_ψ realisieren lassen (R existiert nach Bemerkung 1.3.5 a)). Seien L_χ und L_ψ zu D_χ bzw. D_ψ korrespondierende RG -Gitter. Angenommen modulo dem maximalen Ideal von R gilt $\bar{L}_\chi^{\zeta_q} \cong \bar{L}_\psi^{\zeta_q}$. Dann folgt*

$$\chi(u) - \psi(u) = \chi(u^q) - \psi(u^q).$$

Diese Situation liegt insbesondere vor, falls \bar{L}_χ ein einfacher kG -Modul ist und \bar{L}_ψ als kG -Modul als Kompositionsfaktoren den trivialen Modul und \bar{L}_χ , jeweils ein Mal, besitzt.

Beweis: Sei $D_\chi(u) \sim (Y_1, X_1)$ und $D_\psi(u) \sim (Y_2, X_2)$, wobei Y_1 und Y_2 jeweils nur p -te Einheitswurzeln und X_1 und X_2 alle anderen, also die primitiven q -ten und primitiven pq -ten, Einheitswurzeln enthalten. Wegen $\bar{L}_\chi^{\zeta_q} \cong \bar{L}_\psi^{\zeta_q}$ folgt nach Proposition 1.3.3 dann $X_1 = X_2$. Somit gilt

$$\chi(u) = \sum_{y \in Y_1} y + \sum_{x \in X_1} x \quad \text{und} \quad \psi(u) = \sum_{y \in Y_2} y + \sum_{x \in X_1} x. \quad (1.4)$$

Da χ und ψ ganzzahlig sind, ist jede primitive p -te Einheitswurzel gleich häufig in Y_1 enthalten und somit gilt $\sum_{y \in Y_1} y = \sum_{y \in Y_1} y^q$. Selbiges gilt auch für Y_2 .

Somit folgt

$$\chi(u^q) = \sum_{y \in Y_1} y + \sum_{x \in X_1} x^q \quad \text{und} \quad \psi(u^q) = \sum_{y \in Y_2} y + \sum_{x \in X_1} x^q. \quad (1.5)$$

Die Subtraktion der jeweils passenden Ausdrücke in den Gleichungen (1.4) und (1.5) zeigt dann die Aussage. \square

1.3.1 Young Tableaus und kC_n -Moduln

Sei k ein genügend großer Körper der Charakteristik p . Eine typische Situation bei der Anwendung der Gitter-Methode ist das Vorliegen eines gewissen $k\langle u \rangle$ -Moduls M und der Struktur eines Untermoduls V von M . Diese liegen nicht konkret, sondern nur bis auf Isomorphie, vor und es stellt sich dann die Frage nach den möglichen Isomorphietypen des Quotienten M/V . Nach Lemma 1.3.1 können wir uns hierbei auf $\mathbb{F}_p C_{p^a}$ -Moduln einschränken, wenn $\circ(u) = p^a m$ mit $p \nmid m$ gilt. Die Untersuchung solcher Fragen führt zur Behandlung von Young-Tableaus und zu Littlewood-Richardson-Koeffizienten. Da diese Begriffe im Bereich der Gruppenringe sonst eher unüblich sind, sollen hier kurz die notwendigen Grundlagen und Aussagen hierzu zusammengefasst werden. Alle Definitionen lassen sich etwa in [Ful97] oder [Mac95] nachlesen. Beachte, dass die Bezeichnungen in der Literatur oft nicht einheitlich sind.

Definition 1.3.7. *Es bezeichne $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ eine Partition, so dass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ gilt. Das zu λ gehörige **Young Diagramm** ist ein aus gleich großen leeren Kästchen bestehendes Diagramm, welches in der ersten Zeile λ_1 Kästchen, in der zweiten Zeile λ_2 Kästchen usw. enthält. Ist $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ eine Unterpartition von λ , d.h. $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_2 \geq \mu_2$ usw., dann erhält man durch das Streichen der zu μ gehörenden Kästchen im Young Diagramm von λ das zu λ/μ gehörende **Schiefdiagramm**.*

*Enthält ein Young Diagramm bzw. Schiefdiagramm Einträge aus einem Alphabet, typischerweise den natürlichen Zahlen, so heißt es **Young Tableau** bzw. **Schieftableau**. Ein Young (Schief)Tableau heißt **semistandard**, wenn die Einträge in jeder Zeile von links nach rechts nicht kleiner werden und in jeder Spalte von oben nach unten stets größer werden.*

*Ein Wort der Länge r im Alphabet der natürlichen Zahlen erfüllt die **Gitter-Eigenschaft**, wenn die ersten s Buchstaben stets mindestens so viele 1er wie*

2er, mindestens so viele 2er wie 3er usw. enthalten, für jedes $1 \leq s \leq r$. Ein Young (Schief)Tableau erfüllt die Gitter-Eigenschaft, wenn das Wort, welches entsteht, wenn man die Einträge von rechts nach links und oben nach unten hintereinanderschreibt, die Gitter-Eigenschaft erfüllt.

Beispiel 1.3.8. Die Partition $\mu = (3, 1, 0)$ ist eine Unterpartition der Partition $\lambda = (4, 2, 1)$. Das zu λ gehörige Young Diagramm findet sich in der Abbildung 1.2 links. Das mittlere Bild in Abbildung 1.2 ist ein zu λ/μ gehöriges Schieftableau, welches die Gitter-Eigenschaft erfüllt. Hingegen erfüllt das rechte Schieftableau in Abbildung 1.2 die Gitter-Eigenschaft nicht.

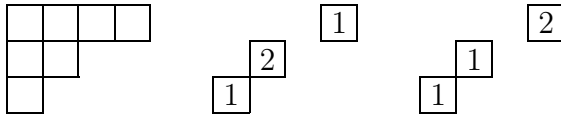


Abbildung 1.2: Beispiele für ein Young Diagramm und zwei Schieftableaus

Ist nun M ein $\mathbb{F}_p C_{p^a}$ -Modul, dann lässt er sich nach Lemma 1.3.1 als

$$M \cong a_{p^a} I_{p^a} \oplus \dots \oplus a_2 I_2 \oplus a_1 I_1$$

mit $a_i \in \mathbb{N}_0$ und jeweils unzerlegbaren Moduln I_i der Dimension i schreiben. Diesem M wird nun eine Partition zugeordnet, welche a_{p^a} Mal p^a, \dots, a_2 Mal die 2 und a_1 Mal die 1 enthält. Der nachfolgende Hauptsatz ist eine Folgerung aus [Mac95, II, 4].

Satz 1.3.9. Seien M, V und Q jeweils $\mathbb{F}_p C_{p^a}$ -Moduln mit zugehörigen Young Diagrammen λ, μ bzw. $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$. Dann existiert in M genau dann ein zu V isomorpher Untermodul \tilde{V} mit $M/\tilde{V} \cong Q$, wenn ein semistandard Schieftableau der Form λ/μ existiert, welches die Gitter-Eigenschaft erfüllt und genau ν_1 Mal die 1, ν_2 Mal die 2, \dots, ν_l Mal l und keine weiteren Zahlen als Einträge enthält.

Bemerkung 1.3.10. Die Anzahl der Möglichkeiten ein Schiefdiagramm der Form λ/μ mit Einträgen aus ν auf die oben beschriebene Weise zu füllen heißt Littlewood-Richardson-Koeffizient und wird oft mit $c_{\mu\nu}^\lambda$ bezeichnet. Für die Anwendung der Gitter-Methode ist es meistens nur von Bedeutung, ob der Littlewood-Richardson-Koeffizient verschwindet. Andere kombinatorische Beschreibungen für $c_{\mu\nu}^\lambda$ finden sich in [Ful97, 5.1, Cor. 2], insbesondere die Symmetrie $c_{\mu\nu}^\lambda = c_{\nu\mu}^\lambda$.

1.4 Algorithmische Aspekte der Gitter-Methode

Möchte man die Gitter-Methode algorithmisch auffassen, so lässt sich dies wie folgt verstehen:

Eingabe:

- Eine endliche Gruppe G .
- Eine Torsionseinheit $u \in V(\mathbb{Z}G)$ der Ordnung n , so dass die partielle Augmentationen von u und u^d für jeden Teiler d von n bekannt sind.
- Ein Primteiler p von n .
- Ein gewöhnlicher Charakter χ von G .
- Die Kompositionszahlen von χ modulo p .
- Die Werte der zu den kG -Kompositionsfaktoren von χ korrespondierenden Brauer-Charaktere auf den Konjugationsklassen, deren partielle Augmentation bezüglich einem u^d nicht verschwindet. Hierbei bezeichnet k einen endlichen Körper der Charakteristik p , welcher groß genug ist.

Ausgabe: Einschränkungen an die möglichen Isomorphietypen der $S_j^{S_i^m}$ als $k(\bar{u})$ -Moduln mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq t$. Hierbei bezeichnen S_1, \dots, S_t die einfachen Kompositionsfaktoren von \bar{L} als kG -Modul.

Sei $n = p^a m$ mit $p \nmid m$ und ferner bezeichne M einen zu χ korrespondierenden KG -Modul mit geeignetem Körper K . Weiterhin sei o.B.d.A. K ein bezüglich der p -adischen Bewertung vervollständigter algebraischer Zahlkörper, der eine primitive m -te Einheitswurzel enthält, und R der Ring der ganzen Zahlen von K . D.h. R ist ein lokaler diskreter Bewertungsring, dessen maximales Ideal p enthält. Nach Bemerkung 1.3.5a) kann man außerdem voraussetzen, dass K über \mathbb{Q}_p den selben Verzweigungsgrad besitzt wie die p -adische Vervollständigung des Charakterkörpers von χ . Es bezeichne $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo dem maximalen Ideal von R . Außerdem sei D eine zu χ korrespondierende R -Darstellung, diese existiert nach Bemerkung 1.3.5b), und L ein zu D korrespondierendes RG -Gitter.

Es lassen sich dann zuerst aus den gegebenen partiellen Augmentationen Einschränkungen an die Eigenwerte mitsamt Vielfachheiten von $D(u)$ berechnen. Zerlegt man das Polynom $(x^{p^a} - 1)$ in $R[x]$ in seine irreduziblen

Faktoren, so lassen sich hieraus die einfachen Kompositionsfaktoren der $L^{\zeta_m^i}$ bestimmen, diese werden als $R\langle u \rangle$ -Gitter aufgefasst.

Aus der Kenntnis dieser Kompositionsfaktoren lassen sich im Idealfall alle möglichen Isomorphietypen der $L^{\zeta_m^i}$ bestimmen oder wenigstens Einschränkungen an diese Isomorphietypen gewinnen. Da es nach dem Satz von Jordan-Zassenhaus [CR90, Th. 24.1] immer nur endlich viele mögliche Isomorphietypen für $L^{\zeta_m^i}$ gibt, lassen sich diese theoretisch, insbesondere unter Zuhilfenahme eines Rechners, immer bestimmen. In konkreten Fällen, vor allem wenn der Isomorphietyp von $R\langle u \rangle$ wild ist, kann dies aber sehr aufwendig sein. Aus diesen Isomorphietypen kann man dann wiederum Einschränkungen an die Isomorphietypen der $\bar{L}^{\zeta_m^i}$ erhalten.

Aus der Kenntnis der Werte der Brauercharaktere und der partiellen Augmentationen von u lassen sich die Dimensionen der $S_j^{\zeta_m^i}$ als $k\langle \bar{u} \rangle$ -Modul bestimmen. Mit dem im vorigen Abschnitt vorgestellten Littlewood-Richardson-Kalkül und dem Wissen um die möglichen Isomorphietypen der $\bar{L}^{\zeta_m^i}$ erhält man dann mögliche Isomorphietypen der $S_j^{\zeta_m^i}$. Hierbei kann es von großem Vorteil sein, nicht nur die Kompositionszahlen von χ zu kennen, sondern eine konkrete Sockelreihe von \bar{L} vorliegen zu haben. Diese Reihe kann sich z.B. aus einer Berechnung von D ergeben oder aus theoretischen Gründen, etwa weil kG eine Brauerbaumalgebra ist, folgen.

Führt man dieses Verfahren mit mehreren Charakteren aus, die in einem gemeinsamen Block bezüglich p liegen, so kann man hoffen, schließlich einen Widerspruch zur Existenz einer Einheit mit den gegebenen partiellen Augmentationen zu erhalten. In dieser Arbeit wird die Gitter-Methode in den Abschnitten 2.4, 2.5, 3.1 und 3.2.2 angewendet.

Kapitel 2

Torsionseinheiten im ganzzahligen Gruppenring der $\mathrm{PSL}(2, q)$

In diesem Kapitel werden Torsionseinheiten in ganzzahligen Gruppenringen der Gruppen $\mathrm{PSL}(2, q)$ untersucht. Diese Gruppen bieten sich für die in Kapitel 1 geschilderten HeLP- und Gitter-Methode besonders an, da sie eine Serie einfacher Gruppen liefern, deren generische Charaktertafeln, sowohl gewöhnlich als auch modular, bekannt und gut zu behandeln sind. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die gruppen- und darstellungstheoretischen Grundlagen für diese Gruppen kurz geschildert. Ebenso werden einige bekannte Resultate über Torsionseinheiten in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, q))$ angegeben, insbesondere alle Ergebnisse für die Zassenhausvermutung und die Primgraphfrage.

Betrachtet man $V(\mathbb{Z}G)$, so stellt sich die Frage, wie ein Sylowsatz hier formuliert werden könnte. Eine Möglichkeit, sagen wir ein **schwacher Sylowsatz**, wäre, dass alle p -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ zu Untergruppen von G isomorph sind. Eine andere Möglichkeit, sagen wir ein **starker Sylowsatz**, wäre, dass alle p -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ zu Untergruppen von G rational konjugiert sind. Erste Fragen dieser Art wurden explizit von K.W. Roggenkamp und Kimmerle in [KR93] betrachtet, nachdem in [RS87] und [Wei88, Wei91] bereits ein starker Sylowsatz für die normalisierten Torsionseinheiten ganzzahliger Gruppenringe von p -Gruppen bzw. nilpotenten Gruppen bewiesen worden war. Später bewiesen M.A. Dockuchaev und S.O. Juriaans einen starken Sylowsatz für weitere Klassen auflösbarer Gruppen [DJ96].

Während im Fall einer auflösbaren Gruppe H eine abelsche p -Sylowgruppe impliziert, dass p -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}H)$ zu Untergruppen von H rational

konjugiert sind [DJ96, Prop. 2.11], ist diese Frage für nicht-auflösbare Gruppen vollkommen offen. Ist H eine Gruppe mit zyklischer p -Sylowgruppe, so sind auch die p -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}H)$ zyklisch, vgl. Proposition 1.1.5. Hat die p -Sylowgruppe von H höchstens die Ordnung p^2 , so folgt bereits nach Satz 1.1.1, dass jede p -Untergruppe von H abelsch ist, da sie höchstens die Ordnung p^2 besitzt. Es ist aber, außer für einzelne nicht-auflösbare Gruppen, nicht bekannt, ob eine abelsche, nicht-zyklische p -Sylowgruppe von Ordnung mindestens p^3 impliziert, dass auch die p -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ abelsch sind.

Im zweiten Abschnitt wird zuerst mittels der HeLP-Methode gezeigt, dass Einheiten der Ordnung r^n in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$ rational konjugiert zu Elementen der Gruppenbasis sind. Hierbei bezeichnet r eine von p verschiedene Primzahl. Darauf aufbauend wird ein starker Sylowsatz für $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$ für $p = 2$ oder $f = 1$ bewiesen. Dieses Resultat verallgemeinert ein Ergebnis von Hertweck, Höfert und Kimmerle, s. Proposition 2.1.9. Die Ergebnisse dieses Abschnitts finden sich auch in [Mar14].

Im dritten Abschnitt werden p -Gruppen in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$ in definierender Charakteristik untersucht. Es wird ein erster Schritt zur Beantwortung einer Frage von Hertweck, Höfert und Kimmerle aus [HHK09] getätigt und bewiesen, dass Untergruppen in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^3))$ von Primzahlpotenzordnung stets isomorph zu Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2, p^3)$ sind. Dies geschieht mittels der Anwendung der HeLP-Methode auf die Heisenberggruppe $(C_p \times C_p) \rtimes C_p$. Hieraus folgt ein schwacher Sylowsatz für die Gruppenringe solcher Gruppen. Dieses Resultat findet sich auch in [BM14b].

Im vierten Abschnitt wird, wiederum mit Hilfe der HeLP-Methode, die Primgraphfrage für alle fast-einfachen Gruppen mit einem zu $\mathrm{PSL}(2, p)$ isomorphen Normalteiler positiv beantwortet, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Dies sollte im Rahmen der Reduktion in Satz 1.1.6 gesehen werden. Weiterhin wird erstmals die Gitter-Methode angewendet und zwar für eine unendliche Serie von Gruppen. Genauer wird für $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$ gezeigt, dass $V(\mathbb{Z}G)$ keine Elemente der Ordnung $3p$ enthält, falls 9 kein Teiler der Ordnung von G ist.

Im fünften Abschnitt wird die Zassenhausvermutung für die vier Gruppen $\mathrm{PSL}(2, 16)$, $\mathrm{PSL}(2, 19)$, $\mathrm{PSL}(2, 23)$ und $\mathrm{PSL}(2, 25)$ bewiesen. Während der Beweis für $\mathrm{PSL}(2, 23)$ und $\mathrm{PSL}(2, 25)$ nur mittels der HeLP-Methode ge-

lingt, wird die Zassenhausvermutung für $\mathrm{PSL}(2, 16)$ und $\mathrm{PSL}(2, 19)$ unter zusätzlichem Einsatz der Gitter-Methode bewiesen. Für $\mathrm{PSL}(2, 19)$ wird insbesondere erstmals eine verzweigte Körpererweiterung betrachtet. Ein Teil dieser Ergebnisse findet sich auch in [BM14a].

2.1 Grundlagen und Bekanntes

2.1.1 Gruppen- und darstellungstheoretische Grundlagen

Alle Untergruppen der $\mathrm{PSL}(2, q)$ wurden erstmals von L.E. Dickson beschrieben. Der für diese Arbeit benötigte Teil ist:

Proposition 2.1.1. *[Dic01, Th. 260] bzw. [Hup67, Kap. II, Hauptsatz 8.27] Sei $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$ und $d = \mathrm{ggT}(2, p-1)$. Dann hat die Gruppe G die Ordnung $(p^f - 1)p^f(p^f + 1)/d$. Weiterhin enthält G jeweils eine zyklische Untergruppe der Ordnung p , $\frac{p^f+1}{d}$ und $\frac{p^f-1}{d}$, so dass jedes Element von G zu einem Element in einer dieser drei Untergruppen konjugiert ist.*

Die p -Sylowgruppen von G sind elementar-abelsch, alle anderen Sylowgruppen ungerader Ordnung sind zyklisch und die 2-Sylowgruppe von G ist, für ungerades p , eine Diedergruppe oder eine Kleinsche Vierergruppe. Es gibt d Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung p . Ist $g \in G$ nicht von Ordnung p , so ist g^{-1} das einzige zu g konjugierte Element in $\langle g \rangle$. Insbesondere gibt es in G nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen.

Die gewöhnliche Charaktertafel der $\mathrm{PSL}(2, q)$ ist in der gewöhnlichen Charaktertafel der zentralen Erweiterung $\mathrm{SL}(2, q)$ enthalten. Die Tafeln letzterer Serie wurden zuerst unabhängig von H.E. Jordan [Jor07] und I. Schur [Sch07] bestimmt. Eine Wiedergabe findet sich in [Dor71, §38]. Die für diese Arbeit benötigten Teile werden in den folgenden Absätzen angegeben.

Sei $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$ und $d = \mathrm{ggT}(2, p-1)$. Der sogenannte Steinbergcharakter von G , ist der Charakter, welcher sich aus der natürlichen Permutationsdarstellung auf der zugehörigen projektiven Geraden ergibt, wenn man den trivialen Untermodul herauskürzt. Da diese Operation 2-transitiv ist, ist dieser Charakter irreduzibel, s. [Hup67, Kap. V, Satz 20.2]. Bezeichnet ψ den

Steinbergcharakter, so gilt:

$$\psi(g) = \begin{cases} p^f, & g = 1 \\ 1, & \circ(g) \mid \frac{p^f-1}{d} \\ 0, & \circ(g) = p \\ -1, & \circ(g) \mid \frac{p^f+1}{d}. \end{cases}$$

Die Charaktertafel der $\text{PSL}(2, p^f)$ findet sich in Tabelle 2.1 und Tabelle 2.2. Für $p = 2$ stimmt Tabelle 2.1 genau mit der Tafel in [Dor71, Th. 38.2] überein. In diesem Fall bezeichnet c eine Involution, a ein Element der Ordnung $2^f - 1$ und b ein Element der Ordnung $2^f + 1$. Weiterhin bezeichnet ρ eine primitive $(2^f - 1)$ -te und σ eine primitive $(2^f + 1)$ -te Einheitswurzel.

	1	c	a^l	b^m
1	1	1	1	1
ψ	q	0	1	-1
χ_i	$q+1$	1	$\rho^{il} + \rho^{-il}$	0
θ_j	$q-1$	-1	0	$-(\sigma^{jm} + \sigma^{-jm})$

Mit: $1 \leq i, l \leq \frac{q-2}{2}$, $1 \leq j, m \leq \frac{q}{2}$

Tabelle 2.1: Gewöhnliche Charaktertafel der $\text{PSL}(2, q)$ für gerades q .

Ist p ungerade, so muss die Charaktertafel in [Dor71, Th. 38.1] an den Quotienten $\text{PSL}(2, p^f)$ angepasst werden. Die Tafel in Tabelle 2.2 findet sich genau so in [Her07, Tab. 2].

Die in Tabelle 2.2 benutzten Bezeichnungen sind folgende: a, b, c, d sind Elemente in $\text{PSL}(2, q) = \text{PSL}(2, p^f)$, so dass a die Ordnung $\frac{q-1}{2}$ und b die Ordnung $\frac{q+1}{2}$ besitzt. Weiterhin sind c und d von Ordnung p , so dass c und d nicht zueinander konjugiert sind. Es gilt $\epsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$ und ρ bzw. σ bezeichnet eine primitive $\frac{q-1}{2}$ -te bzw. $\frac{q+1}{2}$ -te Einheitswurzel.

Die p -modularen Darstellungen von $\text{PSL}(2, p^f)$ wurden zuerst vollständig von R. Brauer und C. Nesbitt bestimmt [BN41]. Die zugehörige Tafel findet sich explizit in [Sri64]. Die Zerlegungsmatrizen bezüglich aller Primteiler der Gruppenordnung werden in [Bur76] bestimmt. Diese Zerlegungsmatrizen werden in dieser Arbeit mehrmals benötigt, sollen aber aus Platzgründen nicht alle angegeben werden.

Obwohl die Darstellungstheorie der $\text{PSL}(2, q)$ also wohlbekannt ist, konnte

	1	c	d	a^l	b^m
1	1	1	1	1	1
ψ	q	0	0	1	-1
χ_i	$q+1$	1	1	$\rho^{il} + \rho^{-il}$	0
θ_j	$q-1$	-1	-1	0	$-(\sigma^{jm} + \sigma^{-jm})$
η_1	$\frac{q+\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{\epsilon-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$(-1)^l \delta_{\epsilon,1}$	$(-1)^m \delta_{\epsilon,-1}$
η_2	$\frac{q+\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$(-1)^l \delta_{\epsilon,1}$	$(-1)^m \delta_{\epsilon,-1}$

Mit: $1 \leq i \leq \frac{q-5}{4}$, $1 \leq j, l, m \leq \frac{q-1}{4}$ für $\epsilon = 1$ und
 $1 \leq i, j, l \leq \frac{q-3}{4}$, $1 \leq m \leq \frac{q+1}{4}$ für $\epsilon = -1$.

Tabelle 2.2: Gewöhnliche Charaktertafel der $\text{PSL}(2, q)$ für ungerades q .

ich nachfolgendes Lemma in der Literatur nicht finden. Es findet sich zwar in [Her07], allerdings ohne Beweis. Aus diesen Gründen wird es hier bewiesen.

Lemma 2.1.2. *Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$ und $d = \text{ggT}(2, p-1)$. Des Weiteren sei a ein Element der Ordnung $\frac{p^f-1}{d}$ und b ein Element der Ordnung $\frac{p^f+1}{d}$ in G . Dann existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ eine p -modulare Darstellung Θ_m mit zugehörigem Brauercharakter φ_m sowie eine $\frac{p^f-1}{d}$ -te primitive Einheitswurzel α und eine $\frac{p^f+1}{d}$ -te primitive Einheitswurzel β , so dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\begin{aligned}\Theta_m(a) &\sim (1, \alpha, \alpha^{-1}, \alpha^2, \alpha^{-2}, \dots, \alpha^m, \alpha^{-m}), \\ \Theta_m(b) &\sim (1, \beta, \beta^{-1}, \beta^2, \beta^{-2}, \dots, \beta^m, \beta^{-m}).\end{aligned}$$

Beweis: Bezeichne k einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p . Die Gruppe $\text{SL}(2, p^f)$ operiert auf dem Vektorraum der homogenen Polynome in zwei kommutierenden Variablen x und y von festem Grad e über k durch die Ausdehnung der natürlichen Operation auf dem durch x und y aufgespanntem zweidimensionalen Vektorraum. Siehe hierzu zum Beispiel [Alp86, S. 14-16].

Diese Operation liefert genau dann eine Darstellung der $\text{PSL}(2, p^f)$, wenn e gerade und p ungerade oder wenn $p = 2$ ist, da die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x^i y^j = (-1)^{i+j} x^i y^j$$

gilt. Sei im Folgenden e gerade.

Die Darstellung, welche sich aus der oben beschriebenen Operation ergibt, heiÙe $\Theta_{\frac{e}{2}}$. Sei nun γ der Eigenwert eines Elements in $\text{SL}(2, p^f)$, welches unter

der natürlichen Projektion auf $\text{PSL}(2, p^f)$ auf a abbildet. Somit besitzt $\Theta_{\frac{e}{2}}(a)$ die gleichen Eigenwerte wie $\Theta_{\frac{e}{2}}\left(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}\right)$. Wegen

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} x^i y^j = \gamma^{i-j} x^i y^j$$

sind diese Eigenwerte

$$\{\gamma^{i-j} \mid 0 \leq i, j \leq e, i + j = e\} = \{(\gamma^{2t} \mid \frac{-e}{2} \leq t \leq \frac{e}{2})\}.$$

Setzt man $\alpha = \gamma^2$, so folgt der erste Teil der Behauptung.

Sei nun δ ein Eigenwert eines Elements in $\text{SL}(2, p^f)$, welches unter der natürlichen Projektion auf $\text{PSL}(2, p^f)$ auf b abbildet. Die Operation der $\text{SL}(2, p^f)$ lässt sich auf die $\text{SL}(2, p^{2f})$ ausdehnen. Dann hat $\Theta_{\frac{e}{2}}(b)$ die selben Eigenwerte wie $\Theta_{\frac{e}{2}}\left(\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}\right)$, wobei letztere Matrix als Element von $\text{SL}(2, p^{2f})$ aufgefasst wird. Dann zeigt das selbe Argument wie oben mit $\beta = \delta^2$ den zweiten Teil der Behauptung. \square

Die Beschreibung der Automorphismengruppen der $\text{PSL}(2, q)$ finden sich, in einem sehr viel weiteren Kontext, in [Die71, Ch. 4, §6]. Eine für die hier vorliegenden Gruppen lesbarere Beschreibung findet sich in [Wil09, 3.3.4]. Es gilt:

Proposition 2.1.3. *Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$ mit $p^f \geq 4$. Dann ist*

$$\text{Out}(G) = \langle s \rangle \times \langle t \rangle \cong C_d \times C_f$$

mit $d = \text{ggT}(2, p - 1)$. Dabei ist $G \rtimes \langle s \rangle = \text{PGL}(2, p^f)$. Der Frobeniusautomorphismus des Körpers \mathbb{F}_{p^f} operiert eintragsweise auf $\text{GL}(2, p^f)$ und dies induziert den Automorphismus t auf $\text{PSL}(2, p^f)$.

2.1.2 Bekanntes über Torsionseinheiten

Verschiedene Fragestellungen über Torsionseinheiten im ganzzahligen Gruppenring der Gruppen $\text{PSL}(2, q)$ wurden in den beiden Diplomarbeiten [Ble93], [Wag95], den Doktorarbeiten [Ble95a], [Hö08] und in den Artikeln [LP89], [Ble95b], [BHK04], [Her06], [Her07], [HHK09], [Her08c], [BK11], [Gil13] und [KK12] untersucht. Die für diese Arbeit relevanten Resultate werden im Folgenden kurz angegeben.

Proposition 2.1.4. *Die Zassenhausvermutung gilt für die Gruppe $\mathrm{PSL}(2, q)$, falls $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 17\}$. Jede einfache nicht-abelsche Gruppe, für die die Zassenhausvermutung bekannt ist, ist isomorph zu einer dieser Gruppen.*

Bemerkung 2.1.5. Der Beweis der Zassenhausvermutung für $q = 2$ findet sich in [HP72] und für $q = 3$ in [AH80]. Die zu A_5 isomorphen Fälle $q = 4$ und $q = 5$ sind die erste Anwendung der HeLP-Methode in [LP89]. Noch bevor Hertweck die Methode von Luthar und Passi auf modulare Charaktere ausgeweitet hatte, konnte er in [Her06, Ex. 3.6] die Zassenhausvermutung für $\mathrm{PSL}(2, 7)$ zeigen. Das zusätzliche Argument hierfür war grob folgendes: Ist u eine Torsionseinheit, deren Existenz man widerlegen möchte, D eine gekürzte Permutationsdarstellung und existiert eine Primzahl p , so dass der Grad von D kongruent zu -1 modulo p ist, so muss $D(u)$ einen Eigenwert 1 besitzen. Zwar ist prinzipiell vorstellbar, dass dieses Argument auch für andere Gruppen Anwendung finden könnte, es ist aber weder mir noch Hertweck selber (mündliche Mitteilung an mich Mitte 2013) ein Beispiel hierfür bekannt.

Nachdem Hertweck die Methode von Luthar und Passi auf modulare Charaktere übertragen hatte, gelang es ihm weiterhin, nur mit Hilfe der HeLP-Methode, die Zassenhausvermutung für $q = 11$ und $q = 13$ zu verifizieren [Her07]. Ebenso mittels der HeLP-Methode konnten J. Gildea [Gil13] und unabhängig davon Konovalov und Kimmerle [KK12] für $q = 8$ und $q = 17$ die Zassenhausvermutung verifizieren. Der Fall $q = 9$ wurde von Hertweck in [Her08c] betrachtet. Hier erwies sich die HeLP-Methode nicht als ausreichend. Das zusätzliche Argument in diesem Artikel war der Anstoß zur Entwicklung der Gitter-Methode.

Wie oben erwähnt, geschah die erste Anwendung der HeLP-Methode auf eine Serie von Gruppen, deren Charaktertafeln generisch vorliegen, in Wagners Diplomarbeit [Wag95]. Da der modulare, von Hertweck bewiesene Teil, der Methode noch unbekannt war und man im Allgemeinen deutlich weniger über partielle Augmentationen wusste, war die Methode noch wesentlich schwächer als in ihrer heutigen Form. Wagner konnte folgendes Resultat erzielen, das für den Fall $f = 1$ in [BHK04] veröffentlicht wurde. Ein kompletter Beweis findet sich auch in [Her07, Prop. 6.1].

Proposition 2.1.6. *[Wag95] Sei $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$ und $f \leq 2$. Ist $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung p , so ist u rational konjugiert zu einem Element von G .*

Nach der Ausweitung der Luthar-Passi-Methode auf modulare Darstellungen bewies Hertweck weiterhin folgende Aussagen:

Proposition 2.1.7. *[Her07, Prop. 6.3 - 6.7] Sei $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$ und u eine Torsionseinheit in $V(\mathbb{Z}G)$. Dann gilt:*

- a) *Ist $f = 1$ und ist die Ordnung von u durch p teilbar, so hat u bereits die Ordnung p .*
- b) *Ist r eine Primzahl ungleich p und u von Ordnung r , so ist u zu einem Element von G rational konjugiert.*
- c) *Hat u Ordnung 6 und ist $p \notin \{2, 3\}$, so ist u zu einem Element von G rational konjugiert.*
- d) *Ist die Ordnung von u nicht durch p teilbar, so enthält G ein Element der selben Ordnung wie u .*
- e) *Sei r eine Primzahl ungleich p und u von Ordnung r^n . Sei $m < n$ und S ein Repräsentantensystem von Konjugiertenklassen von G bis Ordnung r^m . Dann gilt $\sum_{s \in S} \varepsilon_s(u) = 0$. Ist weiterhin g ein Element der Ordnung r^n in G , so gilt $\mu(1, u, \varphi) = \mu(1, g, \varphi)$ für jeden p -Brauer Charakter φ der Gruppe G .*

Bemerkung 2.1.8. Insbesondere folgt aus obigen Resultaten und der Gruppenstruktur von $\mathrm{PSL}(2, q)$ (s. Proposition 2.1.1), dass die Primgraphfrage für $\mathrm{PSL}(2, p)$, für jede Primzahl p , eine positive Antwort hat.

Ein weiteres für diese Arbeit wichtiges Resultat folgt direkt aus den Sätzen [HHK09, Th. 2.1, Th. 3.1]:

Proposition 2.1.9. *Sei $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$ mit $p = 2$ oder $f \leq 2$. Dann ist jede Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$, welche Primzahlpotenzordnung hat, isomorph zu einer Untergruppe von G . D.h. in $V(\mathbb{Z}G)$ gilt ein schwacher Sylowsatz.*

2.2 Ein starker Sylowsatz

Die Proposition 2.1.9 zeigt einen schwachen Sylowsatz für einige $\mathrm{PSL}(2, q)$. Dieses Ergebnis soll in diesem Abschnitt unter Einsatz der HeLP-Methode wesentlich verschärft werden. Die hier angeführten Resultate finden sich auch in [Mar14]. Konkret wird bewiesen:

Proposition 2.2.1. *Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$ und r eine von p verschiedene Primzahl. Sei u eine Torsionseinheit in $V(\mathbb{Z}G)$ der Ordnung r^n , für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist u zu einem Element von G rational konjugiert.*

Satz 2.2.2. *Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$ und $f = 1$ oder $p = 2$. Dann ist jede Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, rational konjugiert zu einer Untergruppe von G . Das heißt in $V(\mathbb{Z}G)$ gilt ein starker Sylowsatz.*

Zunächst einige elementare zahlentheoretische Zusammenhänge:

Lemma 2.2.3. *Seien s und t natürliche Zahlen und s ein Teiler von t . Weiterhin sei ζ_s bzw. ζ_t eine primitive komplexe s -te bzw. t -te Einheitswurzel. Dann gilt:*

$$\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_t)/\mathbb{Q}}(\zeta_s) = \mu(s) \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)},$$

wobei μ die Möbius-Funktion und φ die Eulersche φ -Funktion bezeichnet. Insbesondere folgt für eine Primzahl r und natürliche Zahlen n und m

$$\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_{r^n})/\mathbb{Q}}(\zeta_{r^m}) = \begin{cases} r^{n-1}(r-1), & m = 0 \\ -r^{n-1}, & m = 1 \\ 0, & m > 1. \end{cases}$$

Seien des Weiteren i und j zu r teilerfremde ganze Zahlen. Dann folgt

$$\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_{r^n})/\mathbb{Q}}(\zeta_{r^m}^i \zeta_{r^m}^{-j}) = \begin{cases} r^{n-1}(r-1), & i \equiv j(r^m) \\ -r^{n-1}, & i \not\equiv j(r^m), \quad i \equiv j(r^{m-1}) \\ 0, & i \not\equiv j(r^{m-1}). \end{cases}$$

Beweis: Sei $s = p_1^{f_1} \cdots p_k^{f_k}$ die Primfaktorzerlegung von s . Für eine natürliche Zahl ℓ setze $I(\ell) = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \ell, \text{ggT}(\ell, i) = 1\}$. Dann gilt bekanntlich $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_t)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i : \zeta_t \mapsto \zeta_t^i \mid i \in I(t)\}$. Hieraus folgt der Fall $s = 1$. Ansonsten erhalten wir

$$\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_t)/\mathbb{Q}}(\zeta_s) = \sum_{i \in I(t)} \zeta_s^i = \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \sum_{i \in I(s)} \zeta_s^i = \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \prod_{j=1}^k \sum_{i \in I(p_j^{f_j})} \zeta_{p_j^{f_j}}^i.$$

Wegen

$$\sum_{i \in I(p_j^{f_j})} \zeta_{p_j^{f_j}}^i = \begin{cases} -1, & f_j = 1 \\ 0, & f_j > 1 \end{cases}$$

ergibt sich die erste Formel. Die anderen Formeln sind Spezialfälle dieser, welche aus $\varphi(r^n) = (r-1)(r^{n-1})$ folgen. \square

Beweis der Proposition 2.2.1: Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$, sei r eine Primzahl ungleich p und u eine Torsionseinheit der Ordnung r^n in $V(\mathbb{Z}G)$. Es bezeichne ζ eine primitive komplexe r^n -te Einheitswurzel und setze $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}} = \text{Tr}$. Ist $n = 1$, dann ist u nach Proposition 2.1.7b) rational konjugiert zu einem Element von G . Sei also im Folgenden $n \geq 2$ und nach Induktion sei u^r rational konjugiert zu einem Element von G .

Sei m eine natürliche Zahl kleiner n . Wir zeigen nun induktiv, dass $\varepsilon_x(u) = 0$ gilt, falls x Ordnung r^m hat. Für $m = 0$ folgt dies aus dem Satz von Berman-Higman und für $m = 1$ und $p = 2$ folgt dies aus Proposition 2.1.7e). Sei also $\varepsilon_x(u) = 0$, falls $\circ(x) < r^m$ gilt. Setze $\ell = \frac{r^m-1}{2}$, falls r ungerade ist, und $\ell = \frac{r^m-2}{2}$, falls $r = 2$ gilt. Sei außerdem $\{x_i \mid 1 \leq i \leq \ell, \text{ggT}(i, r) = 1\}$ ein Repräsentantensystem von Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung r^m in G , so dass $x_1^i = x_i$ gilt. Dies ist möglich nach Proposition 2.1.1. Wir werden per Induktion über k zeigen, dass

$$\varepsilon_{x_i}(u) = \varepsilon_{x_j}(u) \quad \text{für } i \equiv \pm j \pmod{r^{m-k}}$$

gilt. Dies gilt offensichtlich für $k = 0$ und sobald dies für $k = m$, im Fall r ungerade, bzw. $k = m - 1$, im Fall $r = 2$, gezeigt ist, folgt mit Hilfe der Proposition 2.1.7e) auch $\varepsilon_{x_i}(u) = 0$ für jedes i .

Sei also nun $\varepsilon_{x_i}(u) = \varepsilon_{x_j}(u)$ für $i \equiv \pm j \pmod{r^{m-k}}$. Im Folgenden werden die in Lemma 2.1.2 eingeführten Darstellungen und Charaktere genutzt. Da u^r nach Induktion zu einem Element von G rational konjugiert ist, existiert eine primitive, komplexe r^{n-1} -te Einheitswurzel $\zeta_{r^{n-1}}$, so dass

$$\Theta_{r^k}(u^r) \sim (1, \zeta_{r^{n-1}}, \zeta_{r^{n-1}}^{-1}, \zeta_{r^{n-1}}^2, \zeta_{r^{n-1}}^{-2}, \dots, \zeta_{r^{n-1}}^{r^k}, \zeta_{r^{n-1}}^{-r^k})$$

gilt. Da die p -modularen Charaktere von G nur reelle Werte annehmen, erhalten wir somit

$$\Theta_{r^k}(u) \sim (1, a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \dots, a_{r^k}, a_{r^k}^{-1}),$$

wobei die a_i jeweils Einheitswurzeln mit $a_i^{r^{m-k}} \neq 1$ bezeichnen. Insbesondere folgt $\mu(\zeta_{r^{m-k}}, u, \varphi) = 0$ für jede primitive, komplexe r^{m-k} -te Einheitswurzel

$\zeta_{r^{m-k}}$. Sei ζ_{r^m} eine primitive, komplexe r^m -te Einheitswurzel, so dass

$$\Theta_{r^k}(x_1) \sim (1, \zeta_{r^m}, \zeta_{r^m}^{-1}, \dots, \zeta_{r^m}^{r^k}, \zeta_{r^m}^{-r^k})$$

gilt, und setze $\xi = \zeta_{r^m}^{r^k}$. Sei weiterhin S eine Repräsentantensystem von Konjugiertenklassen von Elementen in G von r -Potenzordnung bis Ordnung r^n , welches die Elemente x_1, \dots, x_ℓ enthält, und außerdem α eine zu r teilerfremde natürliche Zahl zwischen 1 und ℓ .

Ab hier und im Rest des Abschnitts bedeutet eine Summe über i immer die Summe über alle definierten i , dies wird immer $1 \leq i \leq \ell$, $\text{ggT}(i, r) = 1$ bedeuten. Aus $\mu(\xi^\alpha, u, \varphi_{r^k}) = 0$ und $\varepsilon_x(u) = 0$ für $\circ(x) < r^m$ folgt dann mit Hilfe der HeLP-Methode aus Gleichung (1.2):

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(\xi^\alpha, u, \varphi_{r^k}) = \frac{1}{r} \mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) + \frac{1}{r^n} \sum_{x \in S} \varepsilon_x(u) \text{Tr}(\varphi_{r^k}(x) \xi^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{r} \mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) + \frac{1}{r^n} \sum_{\substack{x \in S \\ \circ(x) > r^m}} \varepsilon_x(u) \text{Tr}(\varphi_{r^k}(x) \xi^{-\alpha}) + \frac{1}{r^n} \sum_i \varepsilon_{x_i}(u) \text{Tr}(\varphi_{r^k}(x_i) \xi^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{r} \mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) + \frac{1}{r^n} \sum_{x \in S} \varepsilon_x(u) \text{Tr}(\xi^{-\alpha}) + \frac{1}{r^n} \sum_i \varepsilon_{x_i}(u) \text{Tr}((\xi^i + \xi^{-i}) \xi^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{r} \mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) + \frac{\text{Tr}(\xi^{-\alpha})}{r^n} + \frac{1}{r^n} \sum_i \varepsilon_{x_i}(u) \text{Tr}((\xi^i + \xi^{-i}) \xi^{-\alpha}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Hierbei wird in der dritten Zeile ausgenutzt, dass für eine komplexe Einheitswurzel $\tilde{\zeta}$ von r -Potenzordnung echt größer r^{m-k} auch $\tilde{\zeta}\xi$ die selbe Ordnung wie $\tilde{\zeta}$ besitzt und somit $\text{Tr}(\tilde{\zeta}\xi) = 0$ nach Lemma 2.2.3 gilt.

Beachte im Weiteren, dass für eine zu r teilerfremde Zahl i mit $i \equiv \alpha \pmod{r^{m-k}}$ die Kongruenz $-i \not\equiv \alpha \pmod{r^{m-k}}$ folgt, falls $r^{m-k} \notin \{1, 2\}$ gilt, und wir diese Ausnahmefälle nach den Voraussetzung an k und m nicht zu betrachten brauchen. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Sei zuerst $k < m-1$, d.h. ξ hat mindestens Ordnung r^2 . Dann gilt $\mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) = 0$ und mit Lemma 2.2.3 in (2.1) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^n} \sum_i \varepsilon_{x_i}(u) \text{Tr}((\xi^i + \xi^{-i}) \xi^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{r^n} \sum_{i \equiv \pm \alpha \pmod{r^{m-k}}} \varepsilon_{x_i}(u) (r^{n-1}(r-1)) + \frac{1}{r^n} \sum_{\substack{i \equiv \pm \alpha \pmod{r^{m-k-1}} \\ i \not\equiv \pm \alpha \pmod{r^{m-k}}} } \varepsilon_{x_i}(u) (-r^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \equiv \pm \alpha (r^{m-k})} \varepsilon_{x_i}(u) - \frac{1}{r} \sum_{i \equiv \pm \alpha (r^{m-k-1})} \varepsilon_{x_i}(u). \quad (2.2)$$

Somit folgt

$$r \sum_{i \equiv \pm \alpha (r^{m-k})} \varepsilon_{x_i}(u) = \sum_{i \equiv \pm \alpha (r^{m-k-1})} \varepsilon_{x_i}(u).$$

Da nach Induktion $\varepsilon_{x_i}(u) = \varepsilon_{x_j}(u)$ für $i \equiv \pm j \pmod{r^{m-k}}$ gilt, sind alle Summanden dieser Gleichung linkerhand gleich. Da weiterhin die Änderung von α um r^{m-k-1} an den Summanden rechterhand nichts ändert, erhalten wir also $\varepsilon_{x_i}(u) = \varepsilon_{x_j}(u)$ für $i \equiv \pm j \pmod{r^{m-k-1}}$.

Sei nun $k = m - 1$, d.h. ξ ist eine primitive r -te Einheitswurzel und es gilt $\mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) = 1$. Mit Lemma 2.1.7e) in (2.1) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r} + \frac{-r^{n-1}}{r^n} + \frac{1}{r^n} \sum_{\pm i \not\equiv \alpha(r)} \varepsilon_{x_i}(u)(-2r^{n-1}) + \frac{1}{r^n} \sum_{\pm i \equiv \alpha(r)} \varepsilon_{x_i}(u)(r^{n-1}(r-1) - r^{n-1}) \\ &= \sum_{\pm i \equiv \alpha(r)} \varepsilon_{x_i}(u) - \frac{2}{r} \sum_i \varepsilon_{x_i}(u). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Somit gilt

$$r \sum_{\pm i \equiv \alpha(r)} \varepsilon_{x_i}(u) = 2 \sum_i \varepsilon_{x_i}(u).$$

Nach Lemma 2.1.7e) ist die rechte Seite dieser Gleichung gleich 0 und nach Induktion sind die Summanden linkerhand alle gleich. Variiert man also α , so folgt schließlich $\varepsilon_x(u) = 0$ für jedes $x \in G$ von Ordnung r^m .

Es bleibt zu zeigen, dass $\varepsilon_{x_0}(u) = 1$ für genau eine Konjugiertenklasse x_0^G in G gilt, wobei x_0 Ordnung r^n hat, und $\varepsilon_x(u) = 0$ für jede weitere Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung r^n . Die Argumente hierfür ähneln sehr den obigen. Sei $k \leq n$. Wie oben gilt

$$\Theta_{r^k}(u^r) \sim (1, \zeta_{r^{n-1}}, \zeta_{r^{n-1}}^{-1}, \dots, \zeta_{r^{n-1}}^{r^k}, \zeta_{r^{n-1}}^{-r^k})$$

für eine primitive, komplexe Einheitswurzel $\zeta_{r^{n-1}}$ und

$$\Theta_{r^k}(u) \sim (1, a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \dots, a_{r^k}, a_{r^k}^{-1}),$$

wobei die a_i jeweils Einheitswurzeln bezeichnen, so dass $a_i^{r^{n-k}} \neq 1$ für alle $1 \leq i \leq r^k - 1$ gilt, und a_{r^k} eine primitive r^{n-k} -te Einheitswurzel ist. Setze $\xi_k = a_{r^k}$ und sei $\ell = \frac{r^n - 1}{2}$ für ungerades r und $\ell = \frac{r^n - 2}{2}$ für $r = 2$. Es bezeichne

analog wie oben $\{x_i \mid 1 \leq i \leq \ell, \text{ggT}(i, r) = 1\}$ ein Repräsentantensystem von Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung r^n in G , so dass $x_1^i = x_i$ gilt und außerdem $\Theta_1(x_1) \sim \Theta_1(u)$. Somit ist insbesondere x_1^r rational konjugiert zu u^r .

Wir zeigen mittels Induktion nach k :

- (i) $\varepsilon_{x_1}(u) = 1$ und $\varepsilon_{x_i}(u) = 0$ für $i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}, i \neq 1$.
- (ii) $\varepsilon_{x_i}(u) = \varepsilon_{x_j}(u)$ für $i \equiv \pm j \pmod{r^{n-k}}$ und $i \not\equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}$.

Wir werden beide Zusammenhänge für $k = n - 1$ zeigen. Im Fall $r = 2$ folgt hieraus die Behauptung der Proposition. Im Fall, dass r ungerade ist, werden wir außerdem

$$\sum_{i \equiv \alpha \pmod{r}} \varepsilon_{x_i}(u) = 0 \quad \text{für } \alpha \not\equiv \pm 1 \pmod{r}$$

zeigen, woraus sich wiederum die Behauptung der Proposition ergibt.

Sei α eine zu r teilerfremde natürliche Zahl zwischen 1 und ℓ . Aus $\varepsilon_x(u) = 0$ für $\circ(x) < r^n$ und mittels der HeLP-Methode erhalten wir mit der selben Rechnung wie in (2.1):

$$\mu(\xi^\alpha, u, \varphi_{r^k}) = \frac{1}{r} \mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) + \frac{\text{Tr}(\xi^{-\alpha})}{r^n} + \frac{1}{r^n} \sum_{\substack{i=1 \\ r \nmid i}}^{\ell} \varepsilon_{x_i}(u) \text{Tr}((\xi^i + \xi^{-i}) \xi^{-\alpha}). \quad (2.4)$$

Da u^r und x_1^r rational konjugiert sind, sind $\xi^{\pm r}$ Eigenwerte von $\Theta_{r^k}(u^r)$.

Somit gilt

$$\mu(\xi^\alpha, u, \varphi_{r^k}) = \begin{cases} 1, & \alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \mu(\xi^{\alpha r}, u^r, \varphi_{r^k}) = \begin{cases} 1, & \alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k-1}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden: (ii) gilt offensichtlich im Fall $k = 0$ und falls $\alpha \not\equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}$ gilt, können wir für $k < n - 1$ die selben Rechnungen wie in (2.2) durchführen. Somit gilt (ii) für $k = n - 1$.

Setze $k = 0$, um den Induktionsanfang für (i) zu erhalten. Dann gilt nach (2.4) mit analogen Rechnungen wie in (2.2):

$$1 = \frac{1}{r} + \varepsilon_{x_1}(u) - \frac{1}{r} \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}} \varepsilon_{x_i}(u)$$

und

$$0 = \frac{1}{r} + \varepsilon_{x_\alpha}(u) - \frac{1}{r} \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}} \varepsilon_{x_i}(u)$$

für $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}$ und $\alpha \neq 1$. Die Subtraktion zweier solcher Gleichungen liefert

$$1 = \varepsilon_{x_1}(u) - \varepsilon_{x_\alpha}(u) \quad (2.5)$$

für jedes $\alpha \neq 1$ mit $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}$. Sei $t = |\{i \in \mathbb{N} \mid i \leq \ell, i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}\}|$. Dann ergibt das Aufsummieren der Gleichungen für alle $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}$

$$1 = \frac{t}{r} + \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}} \varepsilon_{x_i}(u) - \frac{t}{r} \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}} \varepsilon_{x_i}(u) = \frac{t}{r} + \left(1 - \frac{t}{r}\right) \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}} \varepsilon_{x_i}(u).$$

Somit gilt

$$\sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-1}}} \varepsilon_{x_i}(u) = 1$$

und der Induktionsanfang für (i) ergibt sich aus (2.5).

Sei also $1 \leq k < n - 1$. Nach Induktion gilt somit $\sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}} \varepsilon_{x_i}(u) = 1$ und für $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}$ erhält man aus (2.4) mittels analogen Rechnungen wie in (2.2) die Gleichung

$$1 = \frac{1}{r} + \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}} \varepsilon_{x_i}(u) - \frac{1}{r} \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k-1}}} \varepsilon_{x_i}(u) = \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{r} \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k-1}}} \varepsilon_{x_i}(u).$$

Für $\alpha \not\equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k}}$ und $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k-1}}$ erhalten wir auf die selbe Art und Weise

$$0 = \frac{1}{r} + \sum_{i \equiv \pm \alpha \pmod{r^{n-k}}} \varepsilon_{x_i}(u) - \frac{1}{r} \sum_{i \equiv \pm 1 \pmod{r^{n-k-1}}} \varepsilon_{x_i}(u).$$

Die Subtraktion der letzten Gleichung von der vorletzten liefert dann

$$1 = 1 - \sum_{i \equiv \pm \alpha \pmod{r^{n-k}}} \varepsilon_{x_i}(u).$$

Nach (ii) sind die Summanden rechterhand in dieser Gleichung alle gleich und somit folgt, wie behauptet, $\varepsilon_{x_\alpha}(u) = 0$.

Schlussendlich sei r ungerade, $k = n - 1$ und $\alpha \not\equiv \pm 1 \pmod{r}$. Dann erhält man $\mu(\xi^\alpha, u^r, \varphi_{r^k}) = \mu(1, u^r, \varphi_{r^k}) = 3$. Aus (2.4) folgt mit analogen Rechnungen wie in (2.3) dann

$$0 = \frac{3}{r} + \frac{-r^{n-1}}{r^n} - \frac{2}{r} \sum_i \varepsilon_{x_i}(u) + \sum_{i \equiv \pm \alpha(r)} \varepsilon_{x_i}(u) = \sum_{i \equiv \pm \alpha(r)} \varepsilon_{x_i}(u).$$

Da nach (ii) alle Summanden in der rechten Summe gleich sind, folgt die Gleichung $\varepsilon_{x_\alpha}(u) = 0$ und die Proposition ist somit bewiesen. \square

Beweis des Satzes 2.2.2: Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$ mit $f = 1$ oder $p = 2$. Sei r eine ungerade Primzahl ungleich p und R eine r -Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$. Nach Proposition 1.1.5 ist R dann zyklisch und somit nach Proposition 2.2.1 rational konjugiert zu einer Untergruppe von G . Ist p ungerade und ist R eine 2-Sylowgruppe von $V(\mathbb{Z}G)$, dann ist R nach Proposition 2.1.9 entweder zyklisch oder isomorph zu einer Diedergruppe oder einer Kleinschen Vierergruppe. Ist R zyklisch, dann ist R nach Proposition 2.2.1 rational konjugiert zu einer Untergruppe von G . Ist hingegen R isomorph zu einer Diedergruppe oder einer Kleinschen Vierergruppe, so sei $S = \langle s \rangle$ eine maximale zyklische Untergruppe von R . Wiederum nach Proposition 2.2.1 ist s rational konjugiert zu einem Gruppenelement $g \in G$. Sei H eine zu R isomorphe Untergruppe von G , welche $\langle g \rangle$ enthält. Da G nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen enthält, gilt für jedes Element $u \in R$, einen Isomorphismus σ zwischen R und H , welcher s auf g abbildet, und jeden irreduziblen Charakter χ von G die Gleichung $\chi(\sigma(u)) = \chi(u)$. Nach Lemma 1.1.4 ist dann R rational konjugiert zu H .

Sei $p = 2$ und P eine 2-Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$. Alle nicht-trivialen Elemente von P sind Involutionen und P somit elementar-abelsch und isomorph zu einer Untergruppe H von G . Da wiederum nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen in G existiert gilt für jedes $u \in P$, jeden Isomorphismus σ zwischen P und H und jeden irreduziblen Charakter χ von G die Gleichung $\chi(\sigma(u)) = \chi(u)$. Nach Lemma 1.1.4 ist also P rational konjugiert zu H . Sei schlussendlich noch p ungerade und P eine p -Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$. Dann ist P von Ordnung p , somit also zyklisch und nach Proposition 2.1.6 rational konjugiert zu einer Untergruppe von G . \square

Bemerkung 2.2.4. Weitere Aspekte bezüglich Untergruppen von Primzahlpotenzordnung in $V(\mathbb{Z}\text{PSL}(2, p^f))$ sind:

- a) Seien q_1 und q_2 Primzahlpotenzen und n eine zu q_1 und q_2 teilerfremde natürliche Zahl. Die Struktur der Brauertafel einer $\text{PSL}(2, p^f)$ in definierender Charakteristik zeigt, dass wenn die HeLP-Methode ausreicht, um zu zeigen, dass Torsionseinheiten der Ordnung n in $V(\mathbb{Z}\text{PSL}(2, q_1))$

rational konjugiert zu Gruppenelementen sind, die HeLP-Methode ausreicht, um zu zeigen, dass Einheiten der Ordnung n in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, q_2))$ rational konjugiert zu Gruppenelementen sind, solange nur die in Lemma 2.1.2 angegebenen Darstellungen verwendet werden, vgl. hierzu auch Lemma 2.5.3. In diesem Sinne scheint es interessant, und auch machbar, eine Menge A_p natürlicher Zahlen zu bestimmen, so dass man die Aussage erhält: Die HeLP-Methode ist ausreichend, um zu zeigen, dass Torsionseinheiten in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$ der Ordnung n genau dann zu Elementen in $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ rational konjugiert sind, wenn $n \in A_p$. Proberechnungen legen die Vermutung nahe, dass A_p tatsächlich alle zu p teilerfremden ungeraden Zahlen enthält.

Würde sich dies als richtig erweisen, dann würde mit Proposition 2.1.7a) die Zassenhausvermutung für $\mathrm{PSL}(2, p)$ folgen, wenn es sich bei p um eine Fermat- oder Mersenneprimzahl handelt.

- b) Fragen, welche bereits am Ende von [HHK09] erwähnt wurden und bis heute offen sind, lauten: Falls $u \in V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$ eine durch p teilbare Ordnung besitzt, ist u von Ordnung p ? Sind Einheiten der Ordnung p zu Elementen der Gruppenbasis rational konjugiert? Gibt es nicht-abelsche p -Gruppen in $V(\mathbb{Z}\mathrm{PSL}(2, p^f))$?

2.3 Nicht-abelsche p -Untergruppen

Seien r und p unterschiedliche Primzahlen, p ungerade und $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$. Im letzten Abschnitt konnte ein starkes Ergebnis für r -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ bewiesen werden. Es scheint jedoch, zumindest mit den bekannten Methoden, nicht möglich, ähnlich starke Ergebnisse auch für p -Untergruppen von $V(\mathbb{Z}G)$ zu erzielen, vgl. Bemerkung 2.2.4b).

In diesem Abschnitt wird ein erster Schritt zur Beantwortung der letzten Frage in [HHK09], welches auch die letzte Frage der Bemerkung 2.2.4b) ist, getätigt. Der Beweis geschieht mittels der „nicht-zyklischen HeLP-Methode“, vgl. das Ende des Abschnitts 1.2, und findet sich auch in [BM14b]. Konkret wird gezeigt:

Satz 2.3.1. *Ist $G = \mathrm{PSL}(2, p^3)$, so ist jede Untergruppe H von $V(\mathbb{Z}G)$ von Primzahlpotenzordnung isomorph zu einer Untergruppe von G . Das heißt in diesen Gruppenringen gilt ein schwacher Sylowsatz.*

Beweis: Sei H eine Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$ von zu p teilerfremder Ordnung. Ist H von ungerader Ordnung, so ist H nach Proposition 1.1.5 zyklisch und nach Satz 1.1.1 isomorph zu einer Untergruppe von G . Ist H eine 2-Gruppe und $p = 2$, so ist H ebenso nach Satz 1.1.1 isomorph zu einer Untergruppe von G , und ist $p \neq 2$, so folgt dies nach [HHK09, Th. 2.1].

Sei also H eine p -Untergruppe von $V(\mathbb{Z}G)$ und p ungerade. Da eine p -Sylowgruppe von G elementar-abelsch von Ordnung p^3 ist, hat H den Exponenten p . Ist also $|H| = p$ oder $|H| = p^2$, so ist auch H elementar-abelsch und isomorph zu einer Untergruppe von G . Sei also $|H| = p^3$. Es existiert bis auf Isomorphie genau eine nicht-abelsche p -Gruppe der Ordnung p^3 vom Exponent p , eine sogenannte Heisenberg-Gruppe. Ist H isomorph zu einer solchen Gruppe, so lässt sich H schreiben als

$$H = \langle b, c, z \mid z^p = b^p = c^p = 1, z \in Z(H), b^c = zb \rangle.$$

In G existieren genau zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung p , seien g und h Vertreter dieser Klassen. Sei weiterhin $\epsilon \in \{\pm 1\}$, so dass die Kongruenz $p \equiv \epsilon \pmod{4}$ gilt. Es wird der gewöhnliche Charakter η von $V(\mathbb{Z}G)$ verwendet, welcher sich als lineare Ausdehnung des in der Tabelle 2.2 als η_1 bezeichneten Charakters ergibt, s. Tabelle 2.3. Eine zu η korrespondierende Darstellung heiÙe D .

$$\eta \begin{array}{c|ccc} & 1a & g & h \\ \hline & \frac{p^3+\epsilon}{2} & \frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon p^3}}{2} & \frac{\epsilon-\sqrt{\epsilon p^3}}{2} \end{array}$$

Tabelle 2.3: Teil eines irreduziblen Charakters der $\text{PSL}(2, p^3)$ für eine ungerade Primzahl p .

Sei $\zeta = e^{(2\pi i)/p}$, ferner Q die Menge der quadratischen Reste in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und N die Menge der quadratischen Nichtreste in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Dann gilt die Gleichung $\sum_{i \in Q} \zeta^i + \sum_{i \in N} \zeta^i = -1$ und außerdem gelten die Gauß'schen Summen [Gau11] (s. z.B. auch [Neu92, S.54, im Beweis von 8.6]):

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon p} &= 1 + 2 \sum_{i \in Q} \zeta^i, \\ -\sqrt{\epsilon p} &= 1 + 2 \sum_{i \in N} \zeta^i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sei nun $u \in H$ und $x \in \mathbb{N}_0$, so dass entweder $(\varepsilon_g(u), \varepsilon_h(u)) = (x+1, -x)$ oder $(\varepsilon_g(u), \varepsilon_h(u)) = (-x, x+1)$ gilt. Dann ergibt sich im ersten Fall

$$\begin{aligned} \eta(u) &= (x+1) \left(\frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon p^3}}{2} \right) - x \left(\frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon p^3}}{2} \right) = \frac{1}{2}(\epsilon + (2x+1)p\sqrt{\epsilon p}) \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon + (2x+1)p(1 + 2 \sum_{i \in Q} \zeta^i)) = \frac{1}{2}(\epsilon + 2xp + p + 2(2x+1)p \sum_{i \in Q} \zeta^i) \\ &= \frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \sum_{i \in Q} \zeta^i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Im zweiten Fall folgt mit analoger Rechnung und mit Hilfe der Gleichung $-\sqrt{\epsilon p} = 1 + 2 \sum_{i \in N} \zeta^i$:

$$\eta(u) = \frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \sum_{i \in N} \zeta^i. \quad (2.8)$$

Hiermit lassen sich nun die Eigenwerte von $D(u)$ genau bestimmen. Es wurden in obigen Rechnungen schon $\frac{p+\epsilon}{2} + xp + \frac{p-1}{2}(2x+1)p$ Eigenwerte bestimmt und die übrigen müssen sich zu 0 aufsummieren. Wegen

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{p} \left(\frac{p^3 + \epsilon}{2} - \left(\frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \left(\frac{p-1}{2} \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2p} (p^3 + \epsilon - p - \epsilon - 2xp - (2x+1)p(p-1)) \\ &= \frac{1}{2p} (p^3 - p - 2xp - 2xp^2 - p^2 + 2xp + p) \\ &= \frac{p^2 - p}{2} - xp, \end{aligned}$$

folgt im Fall $\varepsilon_g(u) > 0$

$$D(u) \sim \left(\left(\frac{p+\epsilon}{2} + xp \right) \times (1), (2x+1)p \times (\zeta^{i_1}, \dots, \zeta^{i_{\frac{p-1}{2}}}), \left(\frac{p^2-p}{2} - xp \right) \times (1, \zeta, \dots, \zeta^{-1}) \right)$$

mit $\{i_1, \dots, i_{\frac{p-1}{2}}\} = Q$. Im Fall $\varepsilon_g(u) \leq 0$ folgt

$$D(u) \sim \left(\left(\frac{p+\epsilon}{2} + xp \right) \times (1), (2x+1)p \times (\zeta^{j_1}, \dots, \zeta^{j_{\frac{p-1}{2}}}), \left(\frac{p^2-p}{2} - xp \right) \times (1, \zeta, \dots, \zeta^{-1}) \right)$$

mit $\{j_1, \dots, j_{\frac{p-1}{2}}\} = N$.

Es handelt sich bei H um eine extraspezielle p -Gruppe, ihre Charaktertheorie ist wohlbekannt und findet sich z.B. in [Hup67, Kap. V, Satz 16.14]. Es

hat H genau $p - 1$ nicht-lineare irreduzible Charaktere vom Grad p , die auf allen nicht-zentralen Konjugiertenklassen den Wert 0 und auf einer zentralen den Wert $p\zeta^i$, für $1 \leq i \leq p - 1$, annehmen. Außerdem hat H genau p^2 lineare Charaktere, die zum Quotienten $H/Z(H) \cong C_p \times C_p$ korrespondieren. Insbesondere nehmen die linearen Charaktere auf allen zentralen Konjugiertenklassen den Wert 1 an, vgl. Tabelle 2.4.

	1	b	b^2	...	$b^{p-1}c^{p-1}$	z	...	z^{p-1}
χ_1						1	...	1
\vdots		CT($C_p \times C_p$)				\vdots		\vdots
χ_{p^2}						1	...	1
ψ_1	p	0	0	...	0	$p\zeta$...	$p\zeta^{p-1}$
\vdots	\vdots				\vdots	\vdots		\vdots
ψ_{p-1}	p	0	0	...	0	$p\zeta^{p-1}$...	$p\zeta$

Tabelle 2.4: Charaktertafel von $H \simeq (C_p \times C_p) \rtimes C_p$. Es meint CT($C_p \times C_p$) die Charaktertafel des Quotienten $H/Z(H) \simeq C_p \times C_p$.

Es wird nun untersucht wie sich $\eta|_H$ aus den irreduziblen Charakteren von H zusammensetzt und gezeigt, dass dies nicht möglich ist. Es kann dann H nicht existieren. Sei nun $u \in Z(H)$. Um dann die oben angegebenen Eigenwerte für $D(u)$ zu erreichen müssen genau

$$\frac{p + \epsilon}{2} + xp + \frac{p^2 - p}{2} - xp = \frac{p^2 + \epsilon}{2}$$

lineare Charaktere von H und entsprechend

$$\frac{1}{p} \left(\frac{p^3 + \epsilon}{2} - \frac{p^2 + \epsilon}{2} \right) = \frac{p^2 - p}{2}$$

nicht-lineare irreduzible Charaktere von H aufaddiert werden. Ist nun v ein nicht-zentrales Element in H , so folgt, da v auf jedem nicht-linearen irreduziblen Charakter von H den Wert 0 annimmt, dass sich $\eta(v)$ als Summe von genau $\frac{p^2 + \epsilon}{2}$ Einheitswurzeln ergibt. Hieraus folgt mit obigen Charakterwerten in (2.7) bzw. (2.8), dass entweder $(\varepsilon_g(v), \varepsilon_h(v)) = (1, 0)$ oder $(\varepsilon_g(v), \varepsilon_h(v)) = (0, 1)$ gilt. Außerdem ergibt sich aus den angegebenen Eigenwerten

$$(\varepsilon_g(v), \varepsilon_h(v)) = (1, 0) \Leftrightarrow (\varepsilon_g(v^n), \varepsilon_h(v^n)) = (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Sei nun χ ein linearer Charakter von H . Es werden die Beiträge der einzelnen Konjugiertenklassen zyklischer Untergruppen in H zu $\langle \eta, \chi \rangle_H$ berechnet. Der allgemeine Faktor $1/|H|$ wird dabei erst einmal außen vor gelassen.

Der Beitrag der 1 lautet:

$$\chi(1)\eta(1) = \frac{p^3 + \epsilon}{2}.$$

Es gibt noch $p - 1$ weitere zentrale Elemente in H . Hiervon haben $\frac{p-1}{2}$ für η den Charakterwert $\frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \sum_{i \in Q} \zeta^i$ und genauso viele den Wert $\frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \sum_{i \in N} \zeta^i$. Auf χ haben sie den Wert 1. Es folgt der Beitrag

$$\begin{aligned} & \frac{p-1}{2} \left(\frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \sum_{i \in Q} \zeta^i \right) + \frac{p-1}{2} \left(\frac{p+\epsilon}{2} + xp + (2x+1)p \sum_{j \in N} \zeta^j \right) \\ &= \frac{p-1}{2} (p + \epsilon + 2xp - p(2x+1)) \\ &= \epsilon \cdot \frac{p-1}{2}. \end{aligned}$$

Im Kern von χ liegt außerdem genau eine weitere Konjugiertenklasse zyklischer Untergruppen, diese enthält genau p Untergruppen. In einer zyklischen Gruppe haben $\frac{p-1}{2}$ Elemente den Charakterwert $\frac{p+\epsilon}{2} + p \sum_{i \in Q} \zeta^i$ und ebenso viele den Wert $\frac{p+\epsilon}{2} + p \sum_{i \in N} \zeta^i$ unter η . Die selbe Rechnung wie soeben liefert dann den Beitrag

$$p \cdot \epsilon \cdot \frac{p-1}{2}.$$

Die Berechnung der anderen Beiträge wird nun komplizierter und involviert einiges Rechnen mit Einheitswurzeln. Es werden folgende Formeln verwendet, welche direkt aus den Gauß'schen Summen in (2.6) folgen:

$$\left(\sum_{i \in Q} \zeta^i \right) \left(\sum_{i \in Q} \zeta^i \right) + \left(\sum_{j \in N} \zeta^j \right) \left(\sum_{j \in N} \zeta^j \right) = \frac{\epsilon \cdot p + 1}{2}$$

und

$$\left(\sum_{i \in Q} \zeta^i \right) \left(\sum_{j \in N} \zeta^j \right) + \left(\sum_{j \in N} \zeta^j \right) \left(\sum_{i \in Q} \zeta^i \right) = \frac{-\epsilon \cdot p + 1}{2}.$$

Die Beiträge der weiteren Konjugiertenklassen zyklischer Untergruppen ergeben sich wie folgt: Ein Faktor p ist immer vorhanden, da genau p zyklische Untergruppen konjugiert sind. Eine typische zyklische Gruppe sei $\langle d \rangle$. Es

meint $\zeta^i = \chi(d) \in Q$, dass $i \in Q$ gilt. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

Fall 1: $(\varepsilon_g(d), \varepsilon_h(d)) = (1, 0)$ und $\chi(d^{-1}) \in Q$ oder
 $(\varepsilon_g(d), \varepsilon_h(d)) = (0, 1)$ und $\chi(d^{-1}) \in N$.

Der Beitrag ist dann

$$\begin{aligned} p \sum_{h \in \langle d \rangle \setminus \{1\}} \eta(h) \chi(h^{-1}) &= p \left(\sum_{q \in Q} \left(\frac{p+\epsilon}{2} + p \sum_{i \in Q} \zeta^i \right) \zeta^q + \sum_{n \in N} \left(\frac{p+\epsilon}{2} + p \sum_{j \in N} \zeta^j \right) \zeta^n \right) \\ &= p \left(-\frac{p+\epsilon}{2} + p \left(\left(\sum_{q \in Q} \zeta^q \right) \left(\sum_{i \in Q} \zeta^i \right) + \left(\sum_{n \in N} \zeta^n \right) \left(\sum_{j \in N} \zeta^j \right) \right) \right) \\ &= p \left(-\frac{p+\epsilon}{2} + p \left(\frac{\epsilon \cdot p + 1}{2} \right) \right) = p \left(\frac{\epsilon \cdot p^2 - \epsilon}{2} \right) \\ &= \epsilon \cdot \frac{p^3 - p}{2}. \end{aligned}$$

Fall 2: $(\varepsilon_g(d), \varepsilon_h(d)) = (1, 0)$ und $\chi(d^{-1}) \in N$ oder
 $(\varepsilon_g(d), \varepsilon_h(d)) = (0, 1)$ und $\chi(d^{-1}) \in Q$.

Der Beitrag ist dann

$$\begin{aligned} p \left(\sum_{n \in N} \left(\frac{p+\epsilon}{2} + p \sum_{i \in Q} \zeta^i \right) \zeta^n + \sum_{q \in Q} \left(\frac{p+\epsilon}{2} + p \sum_{j \in N} \zeta^j \right) \zeta^q \right) \\ = p \left(-\frac{p+\epsilon}{2} + p \left(\left(\sum_{n \in N} \zeta^n \right) \left(\sum_{i \in Q} \zeta^i \right) + \left(\sum_{q \in Q} \zeta^q \right) \left(\sum_{j \in N} \zeta^j \right) \right) \right) \\ = p \left(-\frac{p+\epsilon}{2} + p \left(\frac{-\epsilon \cdot p + 1}{2} \right) \right) = p \left(\frac{-\epsilon \cdot p^2 - \epsilon}{2} \right) \\ = -\epsilon \cdot \frac{p^3 + p}{2}. \end{aligned}$$

Sei nun χ ein linearer Charakter von H und s ein Element im Kern von χ mit $s \notin Z(H)$. Weiterhin sei $t \notin \text{Ker}(\chi)$ und o.B.d.A. sei $\chi(t^{-1}) \in Q$. Dann ist $\{(ts^i)^{-1} \mid 1 \leq i \leq p\}$ eine Menge, die aus jeder Konjugiertenklasse zyklischer Untergruppen, welche nicht im Kern von χ liegen, genau ein Element enthält und es gilt $\chi((ts^i)^{-1}) \in Q$. Sei

$$\alpha = |\{i \mid (\varepsilon_g(ts^i), \varepsilon_h(ts^i)) = (1, 0)\}| \quad \text{und} \quad \beta = |\{i \mid (\varepsilon_g(ts^i), \varepsilon_h(ts^i)) = (0, 1)\}|.$$

Dann gilt $\alpha + \beta = p$ und mit allen oben errechneten Beiträgen ergibt sich:

$$\langle \eta, \chi \rangle_H = (1/p^3) \left(\frac{p^3 + \epsilon}{2} + \epsilon \cdot \frac{p-1}{2} + p\epsilon \cdot \frac{p-1}{2} + \alpha\epsilon \cdot \frac{p^3 - p}{2} - \beta\epsilon \cdot \frac{p^3 + p}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1/2p^3)(p^3 + \epsilon + \epsilon p - \epsilon + \epsilon p^2 - \epsilon p + \epsilon \alpha p^3 - \epsilon \alpha p - \epsilon \beta p^3 - \epsilon \beta p) \\
&= (1/2p^3)(p^3(1 + \epsilon \alpha - \epsilon \beta) + \epsilon p^2 - \epsilon(\alpha + \beta)p) \\
&= \frac{1 + \epsilon \alpha - \epsilon \beta}{2}
\end{aligned}$$

Ist $n \in N$, so ist $\chi^n : H \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$, $x \mapsto \chi(x)^n$ ebenso ein linearer Charakter von H und eine analoge Rechnung liefert

$$\langle \eta, \chi^n \rangle_H = \frac{1 - \epsilon \alpha + \epsilon \beta}{2}.$$

Ist also $|\alpha - \beta| > 1$, so ist entweder $\langle \eta, \chi \rangle$ oder $\langle \eta, \chi^n \rangle$ negativ, was einen Widerspruch liefern würde.

Sei $I = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Für $i \in I$ ist nun $\langle c \rangle, \langle bc^i \rangle$ ein Repräsentantensystem aller Konjugiertenklassen zyklischer, nicht-zentraler Untergruppen in H . Nun wird für alle möglichen partiellen Augmentationen der c, bc^i gezeigt, dass ein linearer Charakter χ von H existiert, so dass $\langle \eta, \chi \rangle_H < 0$ gilt. Bis auf Galois-Konjugation in $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ wird jeder lineare Charakter von H durch seinen Kern eindeutig beschrieben.

Sei $n \in N$. Nach (2.9) existieren dann $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in \{1, n\}$, so dass die Elemente $c, b^{\alpha_0}, b^{\alpha_1} c^{\alpha_1}, \dots, b^{\alpha_{p-1}} c^{(p-1)\alpha_{p-1}}$ rational konjugiert sind, o.B.d.A. sollen alle auf g die partielle Augmentation 1 besitzen. Es werden nun für alle möglichen Kerne Repräsentanten der Konjugiertenklassen der Gruppen $\langle c \rangle, \langle bc^i \rangle$ bestimmt, welche in einer gemeinsamen Nebenklasse des Kerns liegen. Von diesen müssen dann nach Obigem $\frac{p \pm 1}{2}$ auf g die partielle Augmentationen 1 und die anderen die partielle Augmentation 0 besitzen.

Angenommen $\langle c \rangle$ liegt im Kern von χ . Dann liegen alle Elemente bc^i , für $i \in I$, in einer gemeinsamen Nebenklasse des Kerns. Nun ist $\varepsilon_g(b^{\alpha_i} c^{i\alpha_i}) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 1$. Somit gilt

$$m = |\{i \in I \mid \alpha_i = 1\}| \in \left\{ \frac{p \pm 1}{2} \right\}. \quad (2.10)$$

Angenommen $\langle bc^i \rangle$ liegt im Kern von χ . Es wird nun ein Element der Form $b^{\ell\alpha_j} c^{\ell j\alpha_j}$ bestimmt, welches in der selben Nebenklasse des Kerns wie c liegt, d.h. in

$$\text{Ker}(\chi)c = \{z^r b^k c^{ik+1} \mid k \in I\}.$$

Sei also ℓ derart, dass für ein passendes k gilt

$$b^k c^{ik+1} = b^{\ell\alpha_j} c^{\ell j\alpha_j}.$$

Dann folgt modulo p , dass $k = \ell\alpha_j$ und $ik + 1 = \ell j\alpha_j$ und hieraus $\ell = \frac{1}{j\alpha_j - i\alpha_j}$. Für die partielle Augmentation von $b^{\ell\alpha_j} c^{\ell j\alpha_j}$ ist nur von Bedeutung, ob ℓ ein quadratischer Rest modulo p ist. Allgemein ist $(1/s)$ genau dann ein quadratischer Rest, wenn s ein quadratischer Rest ist, für jedes $s \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Somit hat $b^{\ell\alpha_j} c^{\ell j\alpha_j}$ genau dann die gleichen partiellen Augmentationen wie c , wenn $\ell \in Q$, d.h. $j\alpha_j - i\alpha_j \in Q$ gilt. Somit folgt

$$m_i = 1 + |\{j \in I \mid j\alpha_j - i\alpha_j \in Q\}| \in \left\{ \frac{p \pm 1}{2} \right\},$$

wobei die stets auftauchende 1 das Element c repräsentiert.

Für $i \in I$ sei nun $\beta_i = \left(\frac{\alpha_i}{p} \right)$ das Legendre-Symbol von α_i bezüglich p . Aus der Gleichung (2.10) für m folgt dann

$$\sum_{i \in I} \beta_i \in \{\pm 1\}$$

und aus einer typischen Gleichung für ein m_i folgt

$$1 + \sum_{j \in I} \left(\frac{j-i}{p} \right) \beta_j \in \{\pm 1\}.$$

Setze $s_j = \left(\frac{j}{p} \right)$. Dann lassen sich letztere Gleichungen so zusammenfassen: Es existieren $c_0, \dots, c_{p-1} \in \{\pm 1\}$, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{p-1} \\ s_{p-1} & \beta_1 & s_1 & \dots & s_{p-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_2 & \dots & s_{p-1} & \beta_{p-2} & s_1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{p-1} & \beta_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Summiert man alle Zeilen des Gleichungssystems auf und klammert man hiernach die β_i aus, folgt

$$\beta_0(s_1 + \dots + s_{p-1}) + \dots + \beta_{p-1}(s_1 + \dots + s_{p-1}) + p = c_0 + \dots + c_{p-1}.$$

Da $s_1 + \dots + s_{p-1} = 0$ gilt, folgt $c_i = 1$ für alle $i \in I$. Somit ist das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{p-1} \\ s_{p-1} & 0 & s_1 & \dots & s_{p-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_2 & \dots & s_{p-1} & 0 & s_1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{p-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Der Lösungsraum hat wegen des nachfolgenden Lemmas 2.3.2 höchstens die Dimension 1 und enthält den Vektor $(1, \dots, 1)^t$, welcher für den Vektor $(\beta_0, \dots, \beta_{p-1})^t$ nicht in Frage kommt, da $\sum_{i \in I} \beta_i \in \{\pm 1\}$ gilt. Somit existiert mindestens ein linearer Charakter χ von H mit $\langle \eta, \chi \rangle_H < 0$, ein Widerspruch dazu, dass sich η auf die Untergruppe H einschränken lässt. \square

Lemma 2.3.2. *Sei m eine ungerade Zahl und $A \in \mathbb{F}_2^{m \times m}$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat A Rang $m - 1$.

Beweis: Die Summe aller Zeilen ergibt 0, somit ist der Rang von A höchstens $m - 1$. Seien z_1, \dots, z_{m-1} die ersten $m - 1$ Zeilen von A und $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{F}_2$ mit

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i z_i = 0.$$

Dann folgt für jedes j mit $1 \leq j \leq m - 1$, dass

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{m-1} \alpha_i = 0.$$

Der Vergleich zweier solcher Summen liefert dann $\alpha_i = \alpha_j$ für beliebige i und j und somit $\alpha_i = 0$. \square

2.4 Primgraphfrage

Proposition 2.4.1. *Sei $G = \text{PSL}(2, p^f)$, so dass 9 kein Teiler der Ordnung von G ist. Dann existieren in $V(\mathbb{Z}G)$ keine Elemente der Ordnung $3p$.*

Beweis: Gilt $p = 3$, so existieren in $V(\mathbb{Z}G)$ keine Elemente der Ordnung 9 nach Satz 1.1.1. Sei also $p \neq 3$.

Seien c und d die Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung p in G und $3a$ die Konjugiertenklasse der Elemente der Ordnung 3. Im Fall $p = 2$ existiert d nicht und kann ignoriert werden. Sei $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung $3p$ und $n = \varepsilon_c(u) + \varepsilon_d(u)$ sowie $m = \varepsilon_{3a}(u)$. Dann gilt $n + m = 1$. Sei ψ der Steinberg-Charakter von G und L_ψ ein zu ψ korrespondierendes \mathbb{Z}_3G -Gitter. Weiterhin bezeichne wie üblich $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo dem maximalen Ideal von \mathbb{Z}_3 und k sei \mathbb{F}_3 . Alle folgenden Aussagen über die Zerlegungsmatrizen von G sind aus [Bur76] entnommen. Da die Schur-Indices aller irreduziblen Charaktere von G nach [SS83] jeweils 1 sind, lässt sich jeder ganzzahlige Charakter mittels einer ganzzahligen Darstellung realisieren.

Fall 1: $3 \mid p^f - 1$: Da $|G|$ nicht von 9 geteilt wird, existiert im Hauptblock ein ganzzahliger Charakter χ vom Grad $p^f + 1$, so dass $\chi(3a) = -1$ und $\chi(c) = \chi(d) = 1$ gilt. Ist L_χ ein zu χ korrespondierendes \mathbb{Z}_3G -Gitter, so ist \bar{L}_ψ ein einfacher kG -Modul und die Kompositionsfaktoren von \bar{L}_χ als kG -Modul sind der triviale Modul und \bar{L}_ψ , vgl. Tabelle 2.5.

	$1a$	c	d	$3a$
ψ	p^f	0	0	1
χ	$p^f + 1$	1	1	-1

(a) Teil der Charaktertafel der $\text{PSL}(2, p^f)$

	φ_1	φ_{p^f}
1	1	\cdot
ψ	\cdot	1
χ	1	1

(b) Teil der Zerlegungsmatrix

Tabelle 2.5: Teil der Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 für $\text{PSL}(2, p^f)$ mit $3 \mid p^f - 1$ und $9 \nmid |\text{PSL}(2, p^f)|$

Somit lässt sich Lemma 1.3.6 anwenden und es folgt

$$-1 - 1 = \chi(3a) - \psi(3a) = \chi(u^p) - \psi(u^p) = \chi(u) - \psi(u) = (n - m) - m = n - 2m.$$

Also ist $n = 2m - 2$ und mit $n + m = 1$ folgt $m = 1$ und $n = 0$. Dies widerspricht Lemma 1.1.7, wonach $m \equiv 0 \pmod{3}$ gelten muss.

Fall 2: $3 \mid p^f + 1$: Die Argumentation ist dem obigen Fall sehr ähnlich. Da wiederum $|G|$ nicht von 9 geteilt wird, existiert im Hauptblock ein ganzzahliger Charakter θ mit zugehörigem \mathbb{Z}_3G -Gitter L_θ und $\theta(3a) = 2$, $\theta(c) = \theta(d) = -1$. Es ist \bar{L}_θ ein einfacher kG -Modul und \bar{L}_ψ besitzt als Kompositionsfaktoren den trivialen Modul und \bar{L}_θ , vgl. Tabelle 2.6.

	$1a$	c	d	$3a$		φ_1	φ_{p^f}
θ	$p^f - 1$	-1	-1	2	1	1	\cdot
ψ	p^f	0	0	-1	θ	\cdot	1
					ψ	1	1

(a) Teil der Charaktertafel der $\text{PSL}(2, p^f)$

(b) Teil der Zerlegungsmatrix

Tabelle 2.6: Teil der Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 für $\text{PSL}(2, p^f)$ mit $3 \mid p^f + 1$ und $9 \nmid |\text{PSL}(2, p^f)|$

Nach Lemma 1.3.6 folgt also

$$2 - (-1) = \theta(u^p) - \psi(u^p) = \theta(u) - \psi(u) = (-n + 2m) - (-m) = -n + 3m.$$

Also ist $n = 3m - 3$ und mit $n + m = 1$ folgt wieder $m = 1$ und $n = 0$, also wieder ein Widerspruch zu $m \equiv 0 \pmod{3}$ bzw. Lemma 1.1.7. \square

Satz 2.4.2. *Sei $G = \text{PGL}(2, p^f)$. Ist ℓ eine zu p teilerfremde Zahl und existiert in $V(\mathbb{Z}G)$ ein Element der Ordnung ℓ , so existiert ein Element der Ordnung ℓ in G . Ist $f = 1$, so hat die Primgraphfrage für G eine positive Antwort.*

Beweis: Die Zassenhausvermutung für die Gruppe $\text{PGL}(2, 2) \cong S_3$ wurde in [AH80], für $\text{PGL}(2, 3) \cong S_4$ in [AH88] und für $\text{PGL}(2, 5) \cong S_5$ in [LT91] bewiesen. Die gewöhnlichen Charaktertafeln der $\text{PGL}(2, p)$ wurde ebenso wie die der $\text{PSL}(2, p)$ von Schur [Sch07] und Jordan [Jor07] bestimmt. Sei $f = 1$ und $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Torsionseinheit, deren Ordnung von p geteilt wird. Ist r eine Primzahl ungleich p , die ebenso die Ordnung von u teilt, dann existieren in G keine Elemente der Ordnung pr . Ist $r \neq 2$ so lässt sich Hertwecks Beweis aus [Her07, Prop. 6.3] anwenden, da keine neuen Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung r oder p hinzukommen und alle im Beweis involvierten Charaktere irreduzibel bleiben. Ist $r = 2$, so existiert ein gewöhnlicher Charakter χ , der eingeschränkt auf die $\text{PSL}(2, p)$ gerade den Steinberg-Charakter liefert und der auf beiden Konjugiertenklassen von Involutionen den selben Wert 1 oder -1 annimmt. Ist dann D eine zu χ korrespondierende Darstellung und u von Ordnung $2p$, so gilt

$$D(u^2) \sim (1, \zeta_p, \zeta_p^2, \dots, \zeta_p^{-1}),$$

$$D(u^p) \sim (\pm 1, \frac{p-1}{2} \times (1, -1)).$$

Die Summe der Eigenwerte von $D(u)$ muss dann in jedem Fall komplex sein, im Widerspruch dazu, dass χ ganzzahlig ist. Somit ist die Ordnung von u gerade p .

Sei also f beliebig und die Ordnung von u teilerfremd zu p . Da die Spur einer Matrix unter Konjugation invariant bleibt, operiert die $GL(2, p^f)$ mittels Konjugation auf den 2×2 -Matrizen über \mathbb{F}_{p^f} , deren Spur verschwindet. Der Kern dieser Operation ist gerade das Zentrum der $GL(2, p^f)$ und somit liefert dies eine 3-dimensionale p -modulare Darstellung Θ der $PGL(2, p^f)$. Eingeschränkt auf die $PSL(2, p^f)$ ist diese äquivalent zur Darstellung Θ_1 aus Lemma 2.1.2. Modulo skalare Vielfache ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ein Vertreter der Konjugiertenklasse von Involuntoren in $PGL(2, p^f)$, die nicht in $PSL(2, p^f)$ liegen. Nun ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1 . Somit ist $\Theta(A) \sim (1, -1, -1)$. Es lässt sich also der Beweis von [Her07, Prop. 6.7] übertragen. \square

2.5 Zassenhausvermutung für $PSL(2, 16)$, $PSL(2, 19)$, $PSL(2, 23)$ und $PSL(2, 25)$

Teile der in diesem Abschnitt angeführten Resultate finden sich in [BM14a]. Ziel ist der Beweis folgenden Satzes:

Satz 2.5.1. *Die Zassenhausvermutung gilt für die Gruppen $PSL(2, 16)$, $PSL(2, 19)$, $PSL(2, 23)$ und $PSL(2, 25)$.*

Zusammen mit Proposition 2.1.4 ergibt sich hieraus direkt:

Korollar 2.5.2. *Die Zassenhausvermutung gilt für $PSL(2, q)$, für $q \leq 25$.*

Zum Beweis dieses Satzes wird sowohl die HeLP-Methode als auch die Gitter-Methode verwendet. Die mittels der HeLP-Methode erreichbaren Ergebnisse, welche nicht schon bereits an anderer Stelle bewiesen worden sind oder in Kapitel 3 bewiesen werden, finden sich in folgendem Lemma. Dieses Lemma illustriert auch die Bemerkung 2.2.4a).

Lemma 2.5.3. *Sei $G = PSL(2, p^f)$ und $u \in V(\mathbb{Z}G)$ eine Torsionseinheit. Dann gilt:*

- a) *Ist $p \notin \{2, 3\}$ und u von Ordnung 12, so ist u rational konjugiert zu einem Element von G .*

b) Ist $p \notin \{2, 5\}$ und u von Ordnung 10, so ist u entweder rational konjugiert zu einem Element von G oder es gilt

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u), \varepsilon_{10a}(u), \varepsilon_{10b}(u)) = (0, 1, -1, 1, 0),$$

falls u^2 rational konjugiert zu einem Element von $5a$ ist, oder

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u), \varepsilon_{10a}(u), \varepsilon_{10b}(u)) = (0, -1, 1, 0, 1),$$

falls u^2 rational konjugiert zu einem Element in $5b$ ist. Dabei sind die Konjugiertenklassen von G so bezeichnet, dass Quadrate von Elementen in $10a$ in $5b$ liegen.

c) Ist $p \notin \{3, 5\}$ und u von Ordnung 15, so ist u rational konjugiert zu einem Element von G .

Beweis: Beachte die gruppentheoretischen Eigenschaften von G aus Proposition 2.1.1. Sei $p \notin \{2, 3\}$ und u von Ordnung 12. Nach Proposition 2.1.7d) existieren dann auch in G Elemente der Ordnung 12. Seien $2a, 3a, 4a, 6a, 12a, 12b$ die Konjugiertenklassen entsprechender Ordnung in G , auf denen die partielle Augmentation bezüglich u potenziell nicht verschwindet. Es werden die in Lemma 2.1.2 eingeführten Darstellungen Θ_i und Charaktere φ_i verwendet. Die für den Beweis benötigten Teile dieser Charaktere werden in Tabelle 2.7 angegeben.

	1a	2a	3a	4a	6a	12a	12b
φ_1	3	-1	0	1	2	$1 + \zeta_{12} + \zeta_{12}^{-1}$	$1 - \zeta_{12} - \zeta_{12}^{-1}$
φ_2	5	1	-1	-1	1	$2 + \zeta_{12} + \zeta_{12}^{-1}$	$2 - \zeta_{12} - \zeta_{12}^{-1}$
φ_3	7	-1	1	-1	-1	$2 + \zeta_{12} + \zeta_{12}^{-1}$	$2 - \zeta_{12} - \zeta_{12}^{-1}$
φ_5	11	-1	-1	1	-1	1	1

Tabelle 2.7: Teil einiger p -Brauer-Charaktere von $\text{PSL}(2, p^f)$ für $p \notin \{2, 3\}$.

Setze $\zeta = \zeta_{12}$. Es wird $\zeta, \zeta^{11}, \zeta^4, \zeta^8$ als \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[\zeta]$ verwendet. Dies ist tatsächlich eine Basis, da $\varphi(12) = 4$ gilt, wobei φ die Eulersche φ -Funktion bezeichnet, und außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= -\zeta^4 - \zeta^8, & \zeta^2 &= -\zeta^8, & \zeta^3 &= \zeta - \zeta^{11}, & \zeta^5 &= -\zeta^{11}, \\ \zeta^6 &= -1 = \zeta^4 + \zeta^8, & \zeta^7 &= -\zeta, & \zeta^9 &= -\zeta + \zeta^{11}, & \zeta^{10} &= -\zeta^4. \end{aligned}$$

Man erhält

$$\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{4a}(u) + \varepsilon_{6a}(u) + \varepsilon_{12a}(u) + \varepsilon_{12b}(u) = 1. \quad (2.11)$$

Nach Lemma 2.1.2 folgt

$$\Theta_1(u^9) \sim (1, \zeta^3, \zeta^9) \quad \text{und} \quad \Theta_1(u^4) \sim (1, \zeta^4, \zeta^8).$$

Da die p -modularen Charaktere von G nur reelle Werte annehmen, folgt $\Theta_1(u) \sim X$ mit

$$X \in \{(1, \zeta^5, \zeta^7), (1, \zeta, \zeta^{11})\} = \{(1, -\zeta^{11}, -\zeta), (1, \zeta, \zeta^{11})\}.$$

Somit erhält man unter Benutzung der Tabelle 2.7:

$$-\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{4a}(u) + 2\varepsilon_{6a}(u) + (1 + \zeta + \zeta^{11})\varepsilon_{12a}(u) + (1 - \zeta - \zeta^{11})\varepsilon_{12b}(u) \in \{1 \pm \zeta \pm \zeta^{11}\}.$$

Nutzt man $\zeta, \zeta^{11}, \zeta^4, \zeta^8$ als Basis von $\mathbb{Z}[\zeta]$ dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich also

$$\varepsilon_{12a}(u) - \varepsilon_{12b}(u) = \pm 1, \quad (2.12)$$

$$-\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{4a}(u) + 2\varepsilon_{6a}(u) + \varepsilon_{12a}(u) + \varepsilon_{12b}(u) = 1. \quad (2.13)$$

Analog erhält man

$$\Theta_2(u^9) \sim (1, -1, -1, \zeta^3, \zeta^9), \quad \Theta_2(u^4) \sim (1, \zeta^4, \zeta^8, \zeta^4, \zeta^8)$$

und $\Theta_2(u) \sim X$ mit

$$X \in \{(1, \zeta^2, \zeta^{10}, \zeta, \zeta^{11}), (1, \zeta^2, \zeta^{10}, \zeta^5, \zeta^7)\}.$$

Somit folgt mit Tabelle 2.7 und $\zeta^2 + \zeta^{10} = 1$ also

$$\varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{4a}(u) + \varepsilon_{6a}(u) + (2 + \zeta + \zeta^{11})\varepsilon_{12a}(u) + (2 - \zeta - \zeta^{11})\varepsilon_{12b}(u) \in \{2 \pm \zeta \pm \zeta^{11}\}.$$

Der Koeffizientenvergleich an ζ^4 liefert

$$\varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{4a}(u) + \varepsilon_{6a}(u) + 2\varepsilon_{12a}(u) + 2\varepsilon_{12b}(u) = 2. \quad (2.14)$$

Verfährt man analog mit φ_3 , so folgt

$$\Theta_3(u^9) \sim (1, -1, -1, \zeta^3, \zeta^9, \zeta^3, \zeta^9), \quad \Theta_3(u^4) \sim (1, \zeta^4, \zeta^8, 1, \zeta^4, \zeta^8, 1)$$

und $\Theta_3(u) \sim X$ mit

$$X \in \{(1, -1, -1, \zeta, \zeta^{11}, \zeta, \zeta^{11}), (1, -1, -1, \zeta, \zeta^{11}, \zeta^5, \zeta^7), (1, -1, -1, \zeta^5, \zeta^7, \zeta^5, \zeta^7), \\ (1, \zeta^2, \zeta^{10}, \zeta^3, \zeta^9, \zeta, \zeta^{11}), (1, \zeta^2, \zeta^{10}, \zeta^3, \zeta^9, \zeta^5, \zeta^7)\}.$$

Somit gilt nach Tabelle 2.7 und mittels der Gleichungen $\zeta^2 + \zeta^{10} = 1$ und $\zeta^3 + \zeta^9 = 0$, dass

$$\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{4a}(u) - \varepsilon_{6a}(u) + (2 + \zeta + \zeta^{11})\varepsilon_{12a}(u) + (2 - \zeta - \zeta^{11})\varepsilon_{12b}(u) \\ \in \{-1 + 2\zeta + 2\zeta^{11}, -1, -1 - 2\zeta - 2\zeta^{11}, 2 + \zeta + \zeta^{11}, 2 - \zeta - \zeta^{11}\}.$$

Die ersten drei Möglichkeiten würden $\varepsilon_{12a}(u) - \varepsilon_{12b}(u) \in \{-2, 0, 2\}$ ergeben, ein Widerspruch zu (2.12). Somit bleiben nur die beiden letzten Möglichkeiten und diese liefern

$$-\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{4a}(u) - \varepsilon_{6a}(u) + 2\varepsilon_{12a}(u) + 2\varepsilon_{12b}(u) = 2. \quad (2.15)$$

Analog folgt

$$\Theta_5(u^9) \sim (1, 1, 1, -1, -1, \zeta^3, \zeta^9, \zeta^3, \zeta^9, \zeta^3, \zeta^9), \\ \Theta_5(u^4) \sim (1, \zeta^4, \zeta^8, 1, \zeta^4, \zeta^8, 1, \zeta^4, \zeta^8, \zeta^4, \zeta^8), \\ \Theta_5(u) \sim (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^7, \zeta^8, \zeta^9, \zeta^{10}, \zeta^{11}).$$

Beachte hierbei, dass $\varphi_5(u)$ nicht bloß reellwertig sein muss, sondern sogar einen Wert in \mathbb{Q} annimmt, da φ_5 nur rationale Werte annimmt. Somit folgt

$$-\varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{4a}(u) - \varepsilon_{6a}(u) + \varepsilon_{12a}(u) + \varepsilon_{12b}(u) = 1. \quad (2.16)$$

Die Subtraktion der Gleichung (2.11) von der Gleichung (2.16) ergibt dann $\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{6a}(u) = 0$ und die Subtraktion von (2.14) von (2.15) ergibt $\varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{6a}(u) = 0$. Es folgt $\varepsilon_{3a}(u) = 0$. Dann liefert die Subtraktion von (2.11) von (2.13) genau $-2\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{6a}(u) = 0$, also gilt $\varepsilon_{2a}(u) = \varepsilon_{6a}(u) = 0$. Multipliziert man (2.11) mit 2 und subtrahiert dies anschließend von (2.14), folgt $\varepsilon_{4a}(u) = 0$. Nutzt man (2.11) und (2.12), so bleiben schließlich nur die

trivialen Möglichkeiten

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{4a}(u), \varepsilon_{6a}(u), \varepsilon_{12a}(u), \varepsilon_{12b}(u)) \in \{(0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Somit ist u rational konjugiert zu einem Element von G .

Sei nun $p \notin \{2, 5\}$ und $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung 10. Es werden wiederum die Darstellungen aus Lemma 2.1.2 verwendet, wobei der benötigte Teil der Charaktere in Tabelle 2.8 angegeben wird.

	1a	2a	5a	5b	10a	10b
φ_1	3	-1	$-\zeta_5^2 - \zeta_5^{-2}$	$-\zeta_5 - \zeta_5^{-1}$	$-2(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) - (\zeta_5^2 + \zeta_5^{-2})$	$-2(\zeta_5^2 + \zeta_5^{-2}) - (\zeta_5 + \zeta_5^{-1})$
φ_2	5	1	0	0	$-2(\zeta_5 + \zeta_5^{-1})$	$-2(\zeta_5^2 + \zeta_5^{-2})$

Tabelle 2.8: Teil einiger p -Brauer-Charaktere von $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ für $p \notin \{2, 5\}$.

Setze $\zeta = \zeta_5$ und beachte die Gleichung $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$. Es gilt

$$\varepsilon_{2a}(u) + \varepsilon_{5a}(u) + \varepsilon_{5b}(u) + \varepsilon_{10a}(u) + \varepsilon_{10b}(u) = 1.$$

Wir haben $\Theta_1(u^5) \sim (1, -1, -1)$ und $\Theta_1(u^6) \sim (1, \zeta^2, \zeta^3)$. Da φ_1 immer reellwertig ist, folgt $\Theta_1(u) \sim (1, -\zeta^2, -\zeta^3)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_{2a}(u) + (-\zeta^2 - \zeta^3)\varepsilon_{5a}(u) + (-\zeta - \zeta^4)\varepsilon_{5b}(u) \\ & + (-2\zeta - \zeta^2 - \zeta^3 - 2\zeta^4)\varepsilon_{10a}(u) + (-\zeta - 2\zeta^2 - 2\zeta^3 - \zeta^4)\varepsilon_{10b}(u) = 1 - \zeta^2 - \zeta^3. \end{aligned}$$

Nutzt man $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ als \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[\zeta]$ so ergibt dies

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{5b}(u) - 2\varepsilon_{10a}(u) - \varepsilon_{10b}(u) &= -1, \\ \varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{5a}(u) - \varepsilon_{10a}(u) - 2\varepsilon_{10b}(u) &= -2. \end{aligned}$$

Analog folgt $\Theta_2(u^5) \sim (1, 1, 1, -1, -1)$ und $\Theta_2(u^6) \sim (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)$. Somit ist $\Theta_2(u) \sim X$ mit

$$X \in \{(1, -\zeta, \zeta^2, \zeta^3, -\zeta^4), (1, \zeta, -\zeta^2, -\zeta^3, \zeta^4)\}.$$

Da außerdem

$$\varphi_2(u) = \varepsilon_{2a}(u) - 2(\zeta + \zeta^4)\varepsilon_{10a}(u) - 2(\zeta^2 + \zeta^3)\varepsilon_{10b}(u)$$

gilt, folgt

$$(-\varepsilon_{2a}(u) - 2\varepsilon_{10a}(u), -\varepsilon_{2a}(u) - 2\varepsilon_{10b}(u)) \in \{(-2, 0), (0, -2)\}.$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit obigen, so ergibt sich

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u), \varepsilon_{10a}(u), \varepsilon_{10b}(u)) \in \{(0, 1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Ersetzt man im Fall, dass u^2 rational konjugiert zu einem Element in $5b$ ist, jedes ζ^i in obiger Rechnung durch ζ^{2i} , so folgt

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u), \varepsilon_{10a}(u), \varepsilon_{10b}(u)) \in \{(0, -1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}.$$

Somit gilt die Behauptung des Lemmas für Einheiten der Ordnung 10.

Sei schlussendlich $p \notin \{3, 5\}$ und u von Ordnung 15. Nach Proposition 2.1.7d) existieren dann auch in G Elemente der Ordnung 15. Setze $\zeta = \zeta_{15}$ und wähle $\zeta, \zeta^2, \zeta^4, \zeta^7, \zeta^8, \zeta^{11}, \zeta^{13}, \zeta^{14}$ als \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[\zeta]$. Dies ist eine Basis, da einerseits $\varphi(15) = 8$ gilt und andererseits

$$\begin{aligned} 1 &= \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^{11} + \zeta^{13} + \zeta^{14}, \\ \zeta^5 &= -\zeta^2 - \zeta^8 - \zeta^{11} - \zeta^{14}, \quad \zeta^{10} = -\zeta - \zeta^4 - \zeta^7 - \zeta^{13}, \\ \zeta^3 &= -\zeta^8 - \zeta^{13}, \quad \zeta^6 = -\zeta - \zeta^{11}, \quad \zeta^9 = -\zeta^4 - \zeta^{14}, \quad \zeta^{12} = -\zeta^2 - \zeta^7. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Seien $3a, 5a, 5b, 15a, 15b, 15c, 15d$ die Konjugiertenklassen von Elementen entsprechender Ordnung in G , auf denen die partielle Augmentation von u potenziell nicht verschwindet. Für $g \in 15a$ gelte hierbei

$$g^2 \in 15b, \quad g^4 \in 15c, \quad g^7 \in 15d, \quad g^3 \in 5a, \quad g^6 \in 5b.$$

Weiterhin sei $\Theta_1(15a) \sim (1, \zeta, \zeta^{14})$. Es gilt die Gleichung

$$\varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{5a}(u) + \varepsilon_{5b}(u) + \varepsilon_{15a}(u) + \varepsilon_{15b}(u) + \varepsilon_{15c}(u) + \varepsilon_{15d}(u) = 1. \quad (2.18)$$

Nach Proposition 2.1.7b) sind u^3 und u^5 rational konjugiert zu Elementen von G . Angenommen u^3 ist rational konjugiert zu einem Element in $5a$. Dann gilt

$$\Theta_1(u^6) \sim (1, \zeta^6, \zeta^9), \quad \Theta_1(u^{10}) \sim (1, \zeta^5, \zeta^{10}).$$

Da $\varphi_1(u)$ reellwertig ist, folgt $\Theta_1(u) \in \{(1, \zeta, \zeta^{14}), (1, \zeta^4, \zeta^{11})\}$. Angenommen es gilt

$$\Theta_1(u) \sim (1, \zeta, \zeta^{14}).$$

Dann folgt unter Benutzung der Charakterwerte von φ_1 und von (2.17)

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= 1 + \zeta + \zeta^{14} \\ &= 2\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^{11} + \zeta^{13} + 2\zeta^{14} \\ &= (1 + \zeta^3 + \zeta^{12})\varepsilon_{5a}(u) + (1 + \zeta^6 + \zeta^9)\varepsilon_{5b}(u) + (1 + \zeta + \zeta^{14})\varepsilon_{15a}(u) \\ &\quad + (1 + \zeta^2 + \zeta^{13})\varepsilon_{15b}(u) + (1 + \zeta^4 + \zeta^{11})\varepsilon_{15c}(u) + (1 + \zeta^7 + \zeta^8)\varepsilon_{15d}(u) \\ &= (\zeta + \zeta^{14})(\varepsilon_{5a}(u) + 2\varepsilon_{15a}(u) + \varepsilon_{15b}(u) + \varepsilon_{15c}(u) + \varepsilon_{15d}(u)) \\ &\quad + (\zeta^2 + \zeta^{13})(\varepsilon_{5b}(u) + \varepsilon_{15a}(u) + 2\varepsilon_{15b}(u) + \varepsilon_{15c}(u) + \varepsilon_{15d}(u)) \\ &\quad + (\zeta^4 + \zeta^{11})(\varepsilon_{5a}(u) + \varepsilon_{15a}(u) + \varepsilon_{15b}(u) + 2\varepsilon_{15c}(u) + \varepsilon_{15d}(u)) \\ &\quad + (\zeta^7 + \zeta^8)(\varepsilon_{5b}(u) + \varepsilon_{15a}(u) + \varepsilon_{15b}(u) + \varepsilon_{15c}(u) + 2\varepsilon_{15d}(u)). \end{aligned}$$

Führt man einen Koeffizientenvergleich durch und zieht man dabei in allen Koeffizienten die Gleichung (2.18) ab, so folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{5b}(u) &= \varepsilon_{15a}(u) - 1 = \varepsilon_{15c}(u), \\ \varepsilon_{3a}(u) + \varepsilon_{5a}(u) &= \varepsilon_{15b}(u) = \varepsilon_{15d}(u). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Mittels Einsetzen dieser Gleichungen in (2.18) folgt dann außerdem

$$5\varepsilon_{3a}(u) + 3\varepsilon_{5a}(u) + 3\varepsilon_{5b}(u) = 0. \tag{2.20}$$

Unter Benutzung der Charakterwerte von $\varphi_3(u)$ und der Gleichungen (2.17) und (2.19) folgt dann

$$\begin{aligned} \varphi_3(u) &= \varepsilon_{3a}(u) + (\zeta^6 + \zeta^9)\varepsilon_{5a}(u) + (\zeta^3 + \zeta^{12})\varepsilon_{5b}(u) \\ &\quad + (1 + \zeta + \zeta^{14} + \zeta^2 + \zeta^{13} + \zeta^3 + \zeta^{12})\varepsilon_{15a}(u) \\ &\quad + (1 + \zeta^2 + \zeta^{13} + \zeta^4 + \zeta^{11} + \zeta^6 + \zeta^9)\varepsilon_{15b}(u) \\ &\quad + (1 + \zeta^4 + \zeta^{11} + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^3 + \zeta^{12})\varepsilon_{15c}(u) \\ &\quad + (1 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta + \zeta^{14} + \zeta^6 + \zeta^9)\varepsilon_{15d}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\zeta + \zeta^{14})(\varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{5a}(u) + 2\varepsilon_{15a}(u) + \varepsilon_{15c}(u) + \varepsilon_{15d}(u)) \\
&+ (\zeta^2 + \zeta^{13})(\varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{5b}(u) + \varepsilon_{15a}(u) + 2\varepsilon_{15b}(u) + \varepsilon_{15d}(u)) \\
&+ (\zeta^4 + \zeta^{11})(\varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{5a}(u) + \varepsilon_{15a}(u) + \varepsilon_{15b}(u) + 2\varepsilon_{15c}(u)) \\
&+ (\zeta^7 + \zeta^8)(\varepsilon_{3a}(u) - \varepsilon_{5b}(u) + \varepsilon_{15b}(u) + \varepsilon_{15c}(u) + 2\varepsilon_{15d}(u)) \\
&= (\zeta + \zeta^{14})(5\varepsilon_{3a} + 3\varepsilon_{5b}(u) + 2) + (\zeta^2 + \zeta^{13})(5\varepsilon_{3a} + 3\varepsilon_{5a}(u) + 1) \\
&+ (\zeta^4 + \zeta^{11})(5\varepsilon_{3a} + 3\varepsilon_{5b}(u) + 1) + (\zeta^7 + \zeta^8)(5\varepsilon_{3a} + 3\varepsilon_{5a}(u)). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Es ist

$$\Theta_3(u^6) \sim (1, \zeta^6, \zeta^9, \zeta^3, \zeta^{12}, \zeta^3, \zeta^{12}) \quad \text{und} \quad \Theta_3(u^{10}) \sim (1, \zeta^5, \zeta^{10}, \zeta^5, \zeta^{10}, 1, 1).$$

Da $\varphi_3(u)$ reell ist, ergeben sich hieraus sieben Möglichkeiten für die möglichen Eigenwerte von $\Theta_3(u)$. In jedem Fall ist aber $\varphi_3(u)$ die Summe von einer 1, zwei primitiven 5-ten Einheitswurzeln und vier primitiven 15-ten Einheitswurzeln, wobei zu jeder vorkommenden Einheitswurzel auch ihr komplex Konjugiertes einer dieser Summanden ist. Schreibt man also $\varphi_3(u)$ in der gegebenen Basis von $\mathbb{Z}[\zeta]$ und nutzt man die Gleichungen (2.17), so ist die Summe der Koeffizienten aller Basiselemente genau $8 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 8$ und keiner der Koeffizienten ist größer als 3. Summiert man nun die in (2.21) berechneten Koeffizienten auf, folgt

$$40\varepsilon_{3a}(u) + 12\varepsilon_{5a}(u) + 12\varepsilon_{5b}(u) + 8 = 8.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (2.20), dass $\varepsilon_{3a}(u) = 0$ und $\varepsilon_{5a}(u) = -\varepsilon_{5b}(u)$ gilt. Ist $\varepsilon_{5a}(u) \neq 0$, so ist einer der Koeffizienten in (2.21) somit echt größer als 3, im Widerspruch zu den oben gezeigten Eigenschaften von $\varphi_3(u)$.

Mit (2.19) folgt insgesamt, dass die partielle Augmentation von u bezüglich jeder Konjugiertenklasse außer $15a$ verschwindet und u zu einem Element in $15a$ rational konjugiert ist. Im Fall $\Theta_1(u) \sim (1, \zeta^4, \zeta^{11})$ bzw. im Fall, dass u^3 zu einem Element in $5b$ rational konjugiert ist, folgt mit analogen Argumenten, dass u zu einem Element in $15c$ bzw. $15b$ oder $15d$ rational konjugiert ist. \square

Beweis des Satzes 2.5.1: Sei zuerst $G = \text{PSL}(2, 16)$. Dann erhält man $\exp(G) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$. Nach Proposition 2.1.7 und Lemma 3.2.4 (bzw. nach Tabelle A.1) sind noch Torsionseinheiten der Ordnung 2, 6 und 15 in $V(\mathbb{Z}G)$ zu untersuchen. Aus Proposition 2.4.1 folgt, dass keine normalisierten Einhei-

ten der Ordnung 6 existieren. Beachte, dass letztere Proposition die Gitter-Methode verwendet. Dass normalisierte Einheiten der Ordnung 2 zu Gruppenelementen rational konjugiert sind, folgt direkt, da in G nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen existiert. Weiterhin sind nach Lemma 2.5.3c) Einheiten der Ordnung 15 zu Elementen von G rational konjugiert. Die Zassenhausvermutung gilt also für G .

Sei $G = \text{PSL}(2, 23)$, dann ist $\exp(G) = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$. Nach Proposition 2.1.6 und Proposition 2.1.7 sind nur Einheiten der Ordnung 4 und 12 in $V(\mathbb{Z}G)$ zu untersuchen. Sei zuerst $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung 4, dann ist u nach Proposition 2.2.1 zu einem Element von G rational konjugiert. Dies folgt auch direkt aus Proposition 2.1.7e). Ist weiterhin u von Ordnung 12, so ist u nach Lemma 2.5.3a) zu einem Element von G rational konjugiert. Somit gilt die Zassenhausvermutung für G .

Sei $G = \text{PSL}(2, 25)$, dann ist $\exp(G) = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Nach Proposition 2.1.7 und Lemma 3.2.4 (bzw. Tabelle A.1) müssen nur noch Einheiten der Ordnung 12 in $V(\mathbb{Z}G)$ untersucht werden und diese sind nach Lemma 2.5.3a) zu Elementen in G rational konjugiert.

Sei nun $G = \text{PSL}(2, 19)$. Nach Proposition 2.1.6 und Proposition 2.1.7 sind noch Einheiten der Ordnung 9 und 10, auf rationale Konjugation zu Elementen in G zu prüfen. Ist $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung 9, so ist u nach Proposition 2.2.1 zu einem Element von G rational konjugiert.

Sei also $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung 10 und $\zeta = \zeta_5$. Ist u nicht zu einem Element in G rational konjugiert, so ist auch u^3 nicht zu einem Element in G rational konjugiert. Ist u^2 rational konjugiert zu einem Element in $5a$, so ist u^6 rational konjugiert zu einem Element in $5b$. Man kann also o.B.d.A. annehmen, dass u^2 zu einem Element in $5a$ rational konjugiert ist. Nach Lemma 2.5.3 ist noch der Fall

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u), \varepsilon_{10a}(u), \varepsilon_{10b}(u)) = (0, 1, -1, 1, 0)$$

zu untersuchen, wobei Quadrate von Elementen in $10a$ in $5b$ liegen. Dies gelingt nicht mittels der HeLP-Methode und es wird die Gitter-Methode eingesetzt.

	$1a$	$2a$	$5a$	$5b$	$10a$
θ_1	18	-2	$-\zeta_5 - \zeta_5^{-1}$	$-\zeta_5^2 - \zeta_5^{-2}$	$-\zeta_5 - \zeta_5^{-1}$
ψ	19	-1	-1	-1	-1

(a) Teil der Charaktertafel wie in Tabelle 2.2

	γ_1	γ_{18}
1	1	.
θ_1	.	1
ψ	1	1

(b) Teil der Zerlegungsmatrix

Tabelle 2.9: Teil der Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 5 für $\text{PSL}(2, 19)$

Sei also $u \in \mathbb{Z}G$ eine Torsionseinheit der Ordnung 10, so dass

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u), \varepsilon_{10a}(u), \varepsilon_{10b}(u)) = (0, 1, -1, 1, 0)$$

gilt und u^2 zu einem Element in $5a$ rational konjugiert ist. Wir berechnen zunächst die Eigenwerte von u bezüglich zweier gewöhnlicher irreduzibler Charaktere (vgl. Tabelle 2.9). Dies geschieht auf gewohnte Art und Weise. Seien D_{18} und D_{19} Darstellungen von G , welche die Charaktere θ_1 bzw. ψ realisieren. Dann gilt

$$D_{18}(u^5) \sim (-1, -1, 8 \times (1, -1)), \quad D_{18}(u^2) \sim (1, \zeta^2, \zeta^3, 3 \times (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)).$$

Da

$$\theta_1(u) = \theta_1(5a) - \theta_1(5b) + \theta_1(10a) = -2(\zeta + \zeta^4) + \zeta^2 + \zeta^3$$

gilt, folgt hieraus mit der HeLP-Methode und $\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = -1$, dass

$$D_{18}(u) \sim (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, 1, \zeta^2, \zeta^3, -1, -\zeta, -\zeta^2, -\zeta^3, -\zeta^4, -1, -\zeta, -\zeta^4, -\zeta, -\zeta^4)$$

gilt.

Analog ergibt sich

$$D_{19}(u^5) \sim (-1, 9 \times (1, -1)), \quad D(u^2) \sim (\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, 3 \times (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)).$$

Wegen

$$\psi(u) = \psi(5a) - \psi(5b) + \psi(10a) = -1,$$

folgt damit

$$D_{19}(u) \sim (\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, 1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, 2 \times (-1, -\zeta, -\zeta^2, -\zeta^3, -\zeta^4)).$$

Da die Schur-Indices aller irreduziblen Charaktere von G genau 1 sind [SS83], darf man davon ausgehen, dass es sich bei D_{19} um eine \mathbb{Q}_5 -Darstellung und bei D_{18} um eine K -Darstellung handelt. Hierbei bezeichnet K die 5-adische Vervollständigung des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1})(\zeta_9 + \zeta_9^{-1})$, vgl. den vollständigen Charakter in Tabelle 2.2. Nach Bemerkung 1.3.5b) darf man dann sogar annehmen, dass D_{19} eine \mathbb{Z}_5 -Darstellung und D_{18} eine R -Darstellung ist, wobei R den Ring der ganzen Zahlen von K bezeichnet. Sei k ein endlicher Körper der Charakteristik 5, der die Restklassenkörper von \mathbb{Z}_5 und R enthält und über dem sich alle irreduziblen 5-modularen Darstellungen von G realisieren lassen. Im Folgenden wird jeder Modul eines modularen Gruppenrings als k -Modul aufgefasst. Sei L_{19} bzw. L_{18} ein zu D_{19} bzw. D_{18} gehörendes $\mathbb{Z}_5 G$ bzw. RG -Gitter. Bezeichne wie üblich mit $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo dem jeweiligen maximalen Ideal.

Nach Proposition 1.3.2 gilt als $R\langle u \rangle$ -Gitter bzw. als $\mathbb{Z}_5\langle u \rangle$ -Gitter

$$L_{18} \cong L_{18}^1 \oplus L_{18}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad L_{19} \cong L_{19}^1 \oplus L_{19}^{-1},$$

so dass für $i \in \{18, 19\}$ die Kompositionsfaktoren von \bar{L}_i^1 bzw. \bar{L}_i^{-1} jeweils trivial bzw. nicht-trivial sind. Laut dem in Tabelle 2.9 angegebenen Teil der Zerlegungsmatrix besitzt \bar{L}_{19} als kG -Modul als Kompositionsfaktoren einen trivialen Modul und einen zu \bar{L}_{18} isomorphen Modul. Wieder als $k\langle \bar{u} \rangle$ -Modul betrachtet muss der triviale Modul ein Unter- oder Faktormodul von \bar{L}_{19}^1 sein und somit folgt $\bar{L}_{19}^{-1} \cong \bar{L}_{18}^{-1}$.

Mit den obigen Eigenwerten von $D_{19}(u)$ und mit den Propositionen 1.3.2 und 1.3.3 gilt $\bar{L}_{19}^{-1} \cong X$ mit

$$X \in \{2(k)^{-1} \oplus 2I(kC_5)^{-1}, (k)^{-1} \oplus I(kC_5)^{-1} \oplus (kC_5)^{-1}, 2(kC_5)^{-1}\}.$$

In jedem der drei Fälle besitzt \bar{L}_{19}^{-1} zwei unzerlegbare direkte Summanden, deren k -Dimension mindestens 4 ist.

Andererseits besitzt mit obigen Eigenwerten von $D_{18}(u)$ das Gitter L_{18}^{-1} zwei Mal den zum Eigenwert -1 korrespondierenden einfachen RC_{10} -Modul, dieser heie S_1 , als Kompositionsfaktor, drei Mal den zu den Eigenwerten $-\zeta, -\zeta^4$ korrespondierenden einfachen RC_{10} -Modul, dieser heie S_2 , und ein Mal den zu den Eigenwerten $-\zeta^2, -\zeta^3$ korrespondierenden einfachen RC_{10} -Modul. Letzterer heie S_3 . Dies sind tatsächlich die einzigen einfachen RC_{10} -Gitter, deren Eigenwerte nicht zu 5ten Einheitswurzeln korrespondieren, da im Po-

ynomring $R[X]$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} X^{10} - 1 &= (X^5 - 1)(X^5 + 1) \\ &= (X^5 - 1)(X + 1)(X^2 - (\zeta + \zeta^4)X + 1)(X^2 - (\zeta^2 + \zeta^3)X + 1) \end{aligned}$$

gilt und die letzten drei Faktoren dieser Zerlegung irreduzibel sind. Sei R' der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}_5(\zeta + \zeta^{-1}) = \mathbb{Q}_5(\sqrt{5})$. Nach dem Ende des Beweises von [CR90, Prop. 33.16] existiert zu jedem unzerlegbaren $R\langle u \rangle$ -Gitter L ein unzerlegbares $R'G$ -Gitter L' , so dass L ein direkter Summand von $R \otimes_{R'} L'$ ist. Insbesondere gelten die Aussagen aus Proposition 1.3.4d) auch für unzerlegbare $R\langle u \rangle$ -Gitter.

Sei nun $L_{18}^{-1} \cong Y \oplus Z$, so dass S_3 ein Kompositionsfaktor des unzerlegbaren Gitters Y ist. Dann besitzt Z nur die Kompositionsfaktoren S_1 und S_2 . Nach Proposition 1.3.4d) und obiger Argumentation besitzt ein unzerlegbarer Summand von Z jedes der Gitter S_1 und S_2 höchstens jeweils ein Mal als Kompositionsfaktor. Insbesondere hat jeder unzerlegbare Summand von \bar{Z} höchstens k -Dimension 3. Nach Proposition 1.3.4d) und den Argumenten aus dem letzten Absatz besitzt aber Y höchstens ein Mal den Kompositionsfaktor S_2 und zwei Mal den Kompositionsfaktor S_1 . Somit hat \bar{Y} höchstens die k -Dimension 6. Folglich kann \bar{L}_{18}^{-1} nicht zwei direkte unzerlegbare Summanden von k -Dimension mindestens 4 besitzen. Dies widerspricht dem Isomorphietyp von \bar{L}_{19}^{-1} und der Isomorphie $\bar{L}_{18}^{-1} \cong \bar{L}_{19}^{-1}$ und somit schließlich der Existenz von u .

Kapitel 3

Gruppen mit wenigen Primteilern

Nachdem Kimmerle und Konovalov die Reduktion der Primgraphfrage auf fast-einfache Gruppen, s. Satz 1.1.6, gelungen war, versuchten Sie diese zu nutzen, um die Primgraphfrage für alle Gruppen, deren Ordnung durch genau drei paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, zu beweisen. Dies schien insofern aussichtsreich, als dass nach [Fei71, § 7] und der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, bis auf Isomorphie, genau acht einfache Gruppen existieren, deren Ordnung durch genau drei paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Aus diesen ergeben sich dann insgesamt 19 fast-einfache Gruppen. Mit der Reduktion würde ein Beweis der Primgraphfrage für diese Gruppen also die Primgraphfrage für eine große Klasse von Gruppen beweisen, s. Korollar 3.1.2. Tatsächlich gelang es Kimmerle und Konovalov mittels der HeLP-Methode die Primgraphfrage für 17 dieser 19 Gruppen positiv zu beantworten. Die beiden Gruppen, für die ein Beweis der Primgraphfrage mittels der HeLP-Methode nicht gelang, gaben den Anstoß zur Entwicklung der Gitter-Methode, welche verbliebene Beweislücken schließen konnte, s. Satz 3.1.1 und Korollar 3.1.2. Der Beweis dieser Resultate ist das Ziel des ersten Abschnitts.

Eine weitere interessante Klasse von Gruppen zur Untersuchung der Primgraphfrage bilden Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Es gibt nach [HL00] drei, möglicherweise unendliche, Serien einfacher Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, und die alle vom Typ $\text{PSL}(2, q)$ sind. Des Weiteren gibt es noch genau 31 einfache Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist und die nicht zu einer $\text{PSL}(2, q)$ isomorph sind. Hier gelingt mit den gegebenen Methoden zwar

kein vollständiger Beweis der Primgraphfrage, es ergeben sich jedoch sowohl für die HeLP- als auch für die Gitter-Methode interessante Anwendungsbeispiele. Die Klasse dieser Gruppen wird im zweiten Abschnitt behandelt.

3.1 Gruppen mit drei Primteilern

Die in diesem Abschnitt untersuchten Gruppen waren die ursprüngliche Inspiration für die Gitter-Methode. Die angeführten Resultate finden sich auch in [BM14a]. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis folgenden Satzes.

Satz 3.1.1. *In $V(\mathbb{Z}M_{10})$ und $V(\mathbb{Z}\mathrm{PGL}(2,9))$ existieren keine Einheiten der Ordnung 6 und die Primgraphfrage gilt für diese Gruppen. Hierbei bezeichnet M_{10} die Mathieugruppe vom Grad 10.*

Hieraus ergibt sich aus [KK12, Th. 3.1] und Satz 1.1.6 direkt:

Korollar 3.1.2. *Sei G eine Gruppe, so dass die Ordnung jedes fast-einfachen Bildes von G höchstens drei paarweise verschiedene Primteiler hat. Dann gilt die Primgraphfrage für G . Insbesondere gilt die Primgraphfrage für alle Gruppen, deren Ordnung höchstens drei paarweise verschiedene Primteiler besitzt.*

Beweis des Satzes 3.1.1: Nach [KK12, Th. 3.1] sind tatsächlich nur Einheiten der Ordnung 6 zu untersuchen. Beide vorliegenden Gruppen M_{10} und $\mathrm{PGL}(2,9)$ besitzen einen Normalteiler von Index 2 isomorph zu A_6 , vgl. Abbildung 3.1.

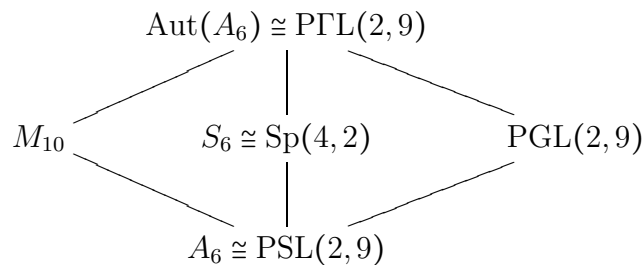


Abbildung 3.1: Die fast-einfachen Gruppen über A_6 . Der Index aufeinanderfolgender Gruppen ist jeweils 2.

Ist u eine normalisierte Torsionseinheit der Ordnung 6 im ganzzahligen Gruppenring über einer der beiden Gruppen, verschwinden alle partiellen Augmentationen bezüglich u mit Ausnahme der Konjugationsklasse $2a$, der Involutionsen in A_6 , und der Konjugationsklasse $3a$, der Elemente der Ordnung 3 in A_6 . Beachte hierbei, dass A_6 zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 3 besitzt, diese in den hier vorliegenden Gruppen aber zusammenfallen. Es gilt dann

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) = (-2, 3)$$

und u^3 ist rational konjugiert zu den Elementen in $2a$ [KK12, S. 11]. Sowohl M_{10} als auch $\text{PGL}(2, 9)$ sind außerdem als Normalteiler vom Index 2 jeweils in $\text{Aut}(A_6)$ enthalten, vgl. Abbildung 3.1, und die Konjugiertenklassen $2a$ und $3a$ bleiben hier unverändert. Die nachfolgenden Rechnungen mit Hilfe der Gitter-Methode finden in $\text{Aut}(A_6)$ statt und durch Einschränkung auf M_{10} bzw. $\text{PGL}(2, 9)$ wird sich jeweils ein Widerspruch zur Existenz von u ergeben.

Sei also $G = \text{Aut}(A_6)$ und u eine Einheit der Ordnung 6 in $V(\mathbb{Z}G)$, so dass die partiellen Augmentationen bezüglich u auf allen Konjugiertenklassen außer $2a$ und $3a$ verschwinden und $(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) = (-2, 3)$ gilt. Weiterhin sei u^3 zu den Elementen in $2a$ rational konjugiert. Die zum Beweis benötigten Teile der Charaktertafel von G und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 werden in Tabelle 3.1 und 3.2 wiedergegeben.

Es bezeichne ζ eine komplexe, primitive 3te Einheitswurzel. Mittels der HeLP-Methode und unter Benutzung des Umstands, dass die Charaktere χ_{10} und χ_{20} nur reelle Werte annehmen, ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{10}(u) &\sim (2 \times (1, \zeta, \zeta^2), -1, -\zeta, -\zeta^2, -1), \\ D_{20}(u) &\sim (8 \times (1), 6 \times (-\zeta, -\zeta^2)). \end{aligned}$$

Dies folgt wie in den Rechnungen in Kapitel 2. Hier eine kurze Nachrechnung: Da u^4 zu den Elementen in $3a$ und u^3 zu den Elementen in $2a$ rational konjugiert ist, gilt $\chi_{10}(u^4) = \chi_{10}(3a) = 1$ sowie $\chi_{10}(u^3) = \chi_{10}(2a) = 2$ und somit

$$\begin{aligned} D_{10}(u^4) &\sim (1, 3 \times (1, \zeta, \zeta^2)), \\ D_{10}(u^3) &\sim (6 \times (1), 4 \times (-1)). \end{aligned}$$

	1a	2a	3a
χ_{1a}	1	1	1
χ_{1b}	1	1	1
χ_{10}	10	2	1
χ_{20}	20	-4	2

(a) Teil der Charaktertafel

	1a	2a	5a	2b
φ_{1a}	1	1	1	1
φ_{1b}	1	1	1	-1
φ_{6a}	6	-2	1	0
φ_{6b}	6	-2	1	0
φ_8	8	0	-2	0

(b) Teil der Brauer-Tafel für $p = 3$

Tabelle 3.1: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Brauer-Tafel bezüglich 3 von $\text{Aut}(A_6)$

	φ_{1a}	φ_{1b}	φ_{6a}	φ_{6b}	φ_8
χ_{1a}	1	·	·	·	·
χ_{1b}	·	1	·	·	·
χ_{10}	1	1	·	·	1
χ_{20}	·	·	1	1	1

Tabelle 3.2: Teil der Zerlegungsmatrix für $\text{Aut}(A_6)$ bezüglich der Primzahl 3

Nun ist

$$\chi_{10}(u) = \varepsilon_{2a}(u)\chi_{10}(2a) + \varepsilon_{3a}(u)\chi_{10}(3a) = -1$$

und da die Eigenwerte von $D_{10}(u)$ sich als paarweise Produkte der Eigenwerte von $D_{10}(u^4)$ und $D_{10}(u^3)$ ergeben, folgt die Behauptung für $D_{10}(u)$.

Weiterhin ist $\chi_{20}(u^4) = \chi_{20}(3a) = 2$ und $\chi_{20}(u^3) = \chi_{20}(2a) = -4$. Es folgt

$$\begin{aligned} D_{20}(u^4) &\sim (1, 1, 6 \times (1, \zeta, \zeta^2)), \\ D_{20}(u^3) &\sim (8 \times (1), 12 \times (-1)). \end{aligned}$$

Da

$$\chi_{20}(u) = \varepsilon_{2a}(u)\chi_{20}(2a) + \varepsilon_{3a}(u)\chi_{20}(3a) = 14$$

gilt, erhält man die oben für $D_{20}(u)$ angegebenen Eigenwerte.

Die Werte aller involvierten gewöhnlichen Charaktere von G sind auf allen Konjugationsklassen von G ganzzahlig und somit kann man nach Bemerkung 1.3.5a) annehmen, dass es sich bei den zugehörigen Darstellungen um K -Darstellungen handelt, wobei K einen 3-adisch vollständigen und über \mathbb{Q}_3 unverzweigten Körper bezeichnet. Ist R der Ring der ganzen Zahlen von K , lassen sich die Darstellungen nach Bemerkung 1.3.5b) also bereits über R realisieren. Es bezeichne P das maximale Ideal von R und k einen endlichen Körper der Charakteristik 3, so dass sich alle 3-modularen Darstellungen von

M_{10} , $\text{PGL}(2, 9)$ und $\text{Aut}(A_6)$ über k realisieren lassen und k den Restklassenkörper von R enthält. Wie üblich bezeichne $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo P . Weiterhin sei L_* ein die Darstellung D_* realisierendes RG -Gitter und T_* ein zum Brauer-Charakter φ_* gehörender einfacher kG -Modul.

Es bezeichne $(k)^{-1}$ bzw. $I(kC_3)^{-1}$ bzw. $(kC_3)^{-1}$ einen unzerlegbaren 1- bzw. 2- bzw. 3-dimensionalen kC_6 -Modul, dessen Kompositionsfaktoren alle nicht-trivial sind, vgl. Lemma 1.3.1. Als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln schreibe, unter Benutzung des Lemmas 1.3.1 und der Proposition 1.3.2, jeweils $\bar{L}_* = \bar{L}_*^1 \oplus \bar{L}_*^{-1}$ und $T_* = T_*^1 \oplus T_*^{-1}$, so dass die Kompositionsfaktoren von \bar{L}_*^1 und T_*^1 alle trivial und die Kompositionsfaktoren von \bar{L}_*^{-1} und T_*^{-1} alle nicht-trivial sind. Da u^3 zu den Elementen in $2a$ rational konjugiert ist, ist es nach [Her06, Lem. 2.9] auch 3-adisch konjugiert zu den Elementen in $2a$. Somit folgen die k -Dimensionen von T_*^1 und T_*^{-1} aus der Brauer-Tafel, während die k -Dimensionen der \bar{L}_*^1 und \bar{L}_*^{-1} nach Proposition 1.3.2 aus den jeweiligen Eigenwerten abgelesen werden können. Diese Dimensionen werden in Tabelle 3.3 angegeben.

$k\langle\bar{u}\rangle$ -Modul T	k -Dimension von T^1	k -Dimension von T^{-1}
\bar{L}_{10}	6	4
\bar{L}_{20}	8	12
T_{1*}	1	0
T_{6*}	2	4
T_8	4	4

Wobei $*$ alle Werte in $\{a, b\}$ annimmt.

Tabelle 3.3: Dimensionen von T^1 und T^{-1} gewisser $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln T

Es werden Kompositionsreihen von \bar{L}_* als kG -Modul verwendet, welche mit Hilfe des Computeralgebrasystems GAP [GAP15] gewonnen wurden und in Tabelle 3.4 wiedergegeben werden.

kG -Modul T	Sockel von T	Kopf von T
\bar{L}_{10}	T_{1i}	T_{1j}
\bar{L}_{20}	$T_{6a} \oplus T_{6b}$	T_8

Wobei (i, j) Werte in $\{(a, b), (b, a)\}$ annimmt.

Tabelle 3.4: Kompositionsreihen gewisser reduzierter $\text{RAut}(A_6)$ -Gitter als $k\text{Aut}(A_6)$ -Moduln

Das Krull-Schmidt-Azumaya Theorem wird ab hier ohne weitere Erwähnung verwendet, vgl. Bemerkung 1.3.4a). In diesem Absatz sind alle Moduln $k\langle\bar{u}\rangle$ -

Moduln. Aus den oben berechneten Eigenwerten von $D_{20}(u)$ folgt aus Proposition 1.3.2 und Proposition 1.3.3 die Isomorphie $\bar{L}_{20}^{-1} \cong 6I(kC_3)^{-1}$. Nach dem oben angegebenen Teil der Charaktertafel sind T_{1a} und T_{1b} als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln trivial. Somit folgt unter Verwendung der oben berechneten Eigenwerte von $D_{10}(u)$ und aus Proposition 1.3.3, die Isomorphie $T_8^{-1} \cong \bar{L}_{10}^{-1} \cong X$ mit

$$X \in \{(k)^{-1} \oplus (kC_3)^{-1}, 2(k)^{-1} \oplus I(kC_3)^{-1}\}.$$

Da aber $T_8^{-1} \cong \bar{L}_{20}^{-1}/(T_{6a}^{-1} \oplus T_{6b}^{-1})$ gilt, d.h. T_8^{-1} auch ein Quotient des Moduls $\bar{L}_{20}^{-1} \cong 6I(kC_3)^{-1}$ ist, folgt

$$T_8^{-1} \cong 2(k)^{-1} \oplus I(kC_3)^{-1}.$$

Somit gilt

$$6I(kC_3)^{-1}/(T_{6a}^{-1} \oplus T_{6b}^{-1}) \cong \bar{L}_{20}^{-1}/(T_{6a}^{-1} \oplus T_{6b}^{-1}) \cong T_8^{-1} \cong 2(k)^{-1} \oplus I(kC_3)^{-1}$$

und dies liefert

$$T_{6a}^{-1} \oplus T_{6b}^{-1} \cong 2(k)^{-1} \oplus 3I(kC_3)^{-1}.$$

Wegen $\dim_k(T_{6a}^{-1}) = \dim_k(T_{6b}^{-1}) = 4$, erhält man entweder

$$T_{6a}^{-1} \cong 2(k)^{-1} \oplus I(kC_3)^{-1} \quad \text{und} \quad T_{6b}^{-1} \cong 2I(kC_3)^{-1}$$

oder

$$T_{6a}^{-1} \cong 2I(kC_3)^{-1} \quad \text{und} \quad T_{6b}^{-1} \cong 2(k)^{-1} \oplus I(kC_3)^{-1}.$$

Wir werden nun die beiden Fälle mittels Einschränkung auf die jeweilige Untergruppe abhandeln. Sei hierfür zuerst $u \in V(\mathbb{Z}M_{10})$. Dann folgt aus der Brauer-Tafel der M_{10} zur Primzahl 3, dass T_{6a} und T_{6b} als kM_{10} -Moduln jeweils einfach und isomorph sind, vgl. Tabelle 3.5. Ist u ein Element in $\mathbb{Z}M_{10}$, dann sind sie also auch als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln isomorph, ein Widerspruch zu Obigem.

Angenommen u liegt in $V(\mathbb{Z}PGL(2,9))$. Es bezeichne T den Modul T_{6a} oder T_{6b} , so dass als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Modul die Isomorphie

$$T^{-1} \cong 2(k)^{-1} \oplus I(kC_3)^{-1}$$

gilt. Die Brauer-Tafel der $PGL(2,9)$ zur Primzahl 3 zeigt, dass T als Modul

	1a	2a
τ_{1a}	1	1
τ_{1b}	1	1
τ_{4a}	4	0
τ_{4b}	4	0
τ_6	6	-2

Tabelle 3.5: Teil der Brauer-Tafel der M_{10} zur Primzahl 3 mit allen Charakteren bis Grad 6.

über $k\text{PGL}(2,9)$ zwei dreidimensionale Kompositionsfaktoren S_{3a} und S_{3b} besitzt, vgl. Tabelle 3.6 und Tabelle 3.1. Genauer korrespondieren die Moduln S_{3a} und S_{3b} zu den Brauer-Charakteren ψ_{3a} und ψ_{3b} aus Tabelle 3.6 oder den Brauer-Charakteren ψ_{3c} und ψ_{3d} . Nach Clifford [CR90, Th. 11.1] ist dann T die direkte Summe seiner Kompositionsfaktoren. Die zu S_{3a} und S_{3b} gehörenden Brauer-Charaktere sind Galois-konjugiert und haben auf der Konjugiertenklasse $2a$ beide den Wert -1 , d.h. als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln sind S_{3a}^{-1} und S_{3b}^{-1} jeweils 2-dimensional. Somit ist einer dieser Moduln isomorph zu $2(k)^{-1}$, während der andere zu $I(kC_3)^{-1}$ isomorph ist.

	1a	2a	4a	5a	5b	2b
ψ_{1a}	1	1	1	1	1	1
ψ_{1b}	1	1	1	1	1	-1
ψ_{3a}	3	-1	1	$-\alpha$	$1 + \alpha$	-1
ψ_{3b}	3	-1	1	$1 + \alpha$	$-\alpha$	1
ψ_{3c}	3	-1	1	$-\alpha$	$1 + \alpha$	1
ψ_{3d}	3	-1	1	$1 + \alpha$	$-\alpha$	-1
ψ_{4a}	4	0	-2	-1	-1	0
ψ_{4b}	4	0	-2	-1	-1	0

Mit $\alpha = \zeta_5 + \zeta_5^4$

Tabelle 3.6: Teil der Brauer-Tafel der $\text{PGL}(2,9)$ zur Primzahl 3 mit allen Charakteren bis Grad 6.

Sei $D_{3a} : \text{PGL}(2,9) \rightarrow \text{GL}(3,k)$ eine zu S_{3a} korrespondierende Darstellung und es bezeichne σ die Anwendung des Frobeniusautomorphismus auf k in jedem Eintrag einer 3×3 -Matrix über k . Dann ist $\sigma \circ D_{3a}$ ebenso eine Darstellung von $\text{PGL}(2,9)$ und die Brauer-Tafel zeigt wiederum, dass diese Darstellung zum Modul S_{3b} korrespondiert. Da es sich bei σ um eine \mathbb{F}_3 -lineare Abbildung auf dem gesamten Matrixring handelt, wird S_{3a} auch als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Modul mittels σ auf S_{3b} abgebildet. Insbesondere wird auch S_{3a}^{-1} mittels σ

auf S_{3b}^{-1} abgebildet. Da σ aber die Dimensionen der Eigenräume einer Matrix fest lässt, müssen S_{3a}^{-1} und S_{3b}^{-1} also isomorph sein, im Widerspruch zu Obigem. \square

3.2 Gruppen mit vier Primteilern

Ziel dieses Abschnitts ist die Anwendung der HeLP- und der Gitter-Methode auf die Klasse der Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Hierbei konnte leider kein vollständiges positives Resultat erzielt werden. Es finden sich jedoch einige interessante Anwendungsbeispiele der Gitter-Methode. Insgesamt wird bewiesen:

Satz 3.2.1. *Sei G eine Gruppe, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Dann hat die Primgraphfrage für G eine positive Antwort, falls G nicht eine der folgenden Gruppen als Bild besitzt: $\text{PSL}(2, 3^f)$ oder eine Erweiterung der $\text{PSL}(2, 3^f)$ vom Grad 2, $\text{PSL}(3, 7).2$, $\text{PSL}(3, 8)$, $\text{PSL}(3, 17)$, $\text{PSL}(3, 17).2$ oder $\text{Sz}(32)$.*

Beweis: Der Beweis ergibt sich als Kombination der folgenden Lemmata: Lemma 3.2.4 und hiernach Satz 2.4.2, Lemma 3.2.5, Lemma 3.2.4, Lemma 3.2.6, Lemma 3.2.7, Lemma 3.2.8, Lemma 3.2.9, Lemma 3.2.10. \square

Alle einfachen Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, wurden angeblich erstmals von W.J. Shi in [Shi91] klassifiziert. Diesen Artikel konnte ich mir jedoch nicht beschaffen. Eine Beschreibung aller dieser Gruppen mit Beweis findet sich in [HL00]. Hierbei wird die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen verwendet. Weitere arithmetische Einschränkungen an die potenziell unendlichen Serien solcher Gruppen finden sich in [BCM01, Th. 2]. Insgesamt ergibt sich:

Lemma 3.2.2. *Die fast-einfachen Gruppen G , deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, sind die in Tabelle A.1 aufgeführten Gruppen. Gilt hierbei $G = \text{PSL}(2, 2^f)$, so gilt entweder $f = 4$ oder $2^f - 1$ ist eine Mersenne-Primzahl und ebenso ist $\frac{2^f+1}{3}$ ein Primzahl. Gilt $G = \text{PSL}(2, 3^f)$ oder $G = \text{PGL}(2, 3^f)$, so gilt entweder $f = 4$ oder es sind $\frac{3^f-1}{2}$ und $\frac{3^f+1}{4}$ Primzahlen.*

Die Primgraphen fast-einfacher Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, wurden außerdem in [KK11] detailliert untersucht.

3.2.1 Mittels HeLP

Die Ergebnisse, die mit Hilfe der HeLP-Methode für fast-einfache Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, erzielbar sind, werden in Lemma 3.2.4 angegeben. Die hierfür benötigten Rechnungen werden in der Tabelle A.1 zusammengefasst, welche sich im Anhang dieser Arbeit findet.

Die Ergebnisse für die möglicherweise unendlichen Serien dieser Gruppen werden im folgenden Lemma gezeigt.

Lemma 3.2.3. *Sei $G = \text{PSL}(2, 2^f)$ oder $G = \text{PGL}(2, 3^f)$, so dass die Ordnung von G durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Sind dann p und q Primzahlen mit $pq \neq 6$ und existiert in G kein Element der Ordnung pq , dann genügt die HeLP-Methode, um zu zeigen, dass auch in $V(\mathbb{Z}G)$ kein Element der Ordnung pq existiert.*

Beweis: Sei D eine den Steinberg-Charakter von G realisierende Darstellung. Beachte, dass sich dieser Charakter von jeder $\text{PSL}(2, q)$ auf die $\text{PGL}(2, q)$ ausdehnen lässt, vgl. z.B. [Sch07] oder deutlich moderner [Whi13]. Sei zuerst $G = \text{PSL}(2, 2^f)$. Dann sind die Primteiler der Ordnung von G nach Lemma 3.2.2 genau 2, 3, $r = \frac{2^f+1}{3}$ und $s = 2^f - 1$. Nach Proposition 2.1.7 sind noch Elemente der Ordnung $2r$ und $2s$ zu untersuchen. Sei also $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung $2r$ oder $2s$. Dann ist

$$\begin{aligned} D(u^r) &\sim (2^{f-1} \times (1, -1)), \\ D(u^2) &\sim (1, 1, 3 \times (\zeta_r, \zeta_r^2, \dots, \zeta_r^{r-1})) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} D(u^s) &\sim (2^{f-1} \times (1, -1)), \\ D(u^2) &\sim (1, 1, \zeta_s, \zeta_s^2, \dots, \zeta_s^{s-1}). \end{aligned}$$

In jedem Fall kann die Summe der Eigenwerte von $D(u)$ nicht ganzzahlig

sein, im Widerspruch dazu, dass der Steinberg-Charakter ganzzahlig ist. Ist $G = \text{PGL}(2, 3^f)$, so sind die Primteiler der Ordnung von G wiederum nach Lemma 3.2.2 genau 2, 3, $r = \frac{3^f+1}{4}$ und $s = 3^f - 1$. Mit Satz 2.4.2 sind noch Elemente der Ordnung $3r$ und $3s$ zu untersuchen. Sei also $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung $3r$ bzw. $3s$. Dann ist

$$\begin{aligned} D(u^r) &\sim (3^{f-1} \times (1, \zeta_3, \zeta_3^2)), \\ D(u^3) &\sim (1, 1, 1, 4 \times (1, \zeta_r, \zeta_r^2, \dots, \zeta_r^{r-1})) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} D(u^s) &\sim (3^{f-1} \times (1, \zeta_3, \zeta_3^2)), \\ D(u^3) &\sim (1, 1, \zeta_s, \zeta_s^2, \dots, \zeta_s^{s-1}). \end{aligned}$$

Wiederum kann dann die Summe der Eigenwerte von $D(u)$ nicht ganzzahlig sein. □

Das in Tabelle A.1 dargestellte Ergebnis wird in folgendem Lemma zusammengefasst, wobei auch die möglichen partiellen Augmentationen angegeben werden.

Lemma 3.2.4. *Sei G eine fast-einfache Gruppe, deren Ordnung von genau vier verschiedenen Primzahlen geteilt wird. Seien p und q verschiedene Primteiler der Ordnung von G , so dass G kein Element der Ordnung pq enthält, und $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung pq . Dann kann man mit Hilfe der HeLP-Methode die Nicht-Existenz von u in allen Fällen zeigen, wenn G nicht Normalteiler einer der folgenden Gruppen ist und u von entsprechender Ordnung. In Fällen, in denen die partiellen Augmentationen von u angegeben werden, sind nicht erwähnte partielle Augmentationen jeweils 0.*

- $G = \text{PSL}(2, 2^f)$, es ist $2^f - 1$ eine Mersenne-Primzahl oder 15 und u hat Ordnung 6.
- $G = \text{PGL}(2, 3^f)$, es ist entweder $f = 4$ oder $\frac{3^f-1}{2}$ und $\frac{3^f+1}{4}$ sind Primzahlen und u hat Ordnung 6.
- $G = \text{PSL}(2, 81).(C_2 \times C_4)$ und u hat Ordnung 15 mit

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{5a}(u)) = (6, -5).$$

- $G = \text{PSL}(2, 81).2c$ und u hat Ordnung 6 mit

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) \in \{(10, -9), (4, -3), (-2, 3), (-8, 9), (-14, 15)\}.$$

- $G = \text{PSL}(3, 4)$ und u hat Ordnung 6 mit

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) \in \{(4, -3), (-2, 3)\}.$$

- $G = \text{PSL}(3, 5).2$ und u hat Ordnung 15 mit

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{5a}(u), \varepsilon_{5b}(u)) \in \{(6, x, y)\},$$

wobei (x, y) vier verschiedene Werte annimmt und $x + y = -5$ gilt.

- $G = \text{PSL}(3, 7).2$ und u hat Ordnung 21 mit

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{7a}(u), \varepsilon_{7b}(u), \varepsilon_{7c}(u)) \in \{(-6, x, y, z)\},$$

wobei (x, y, z) genau 77 verschiedene Werte annimmt.

- $G = \text{PSL}(3, 8)$ und u hat Ordnung 6 mit

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) \in \{(4, -3), (-2, 3)\}.$$

- $G = \text{PSL}(3, 17).2$ und u hat Ordnung 51. Es gibt 42 mögliche partielle Augmentationen für u .

- $G = \text{PSU}(3, 4)$ und u hat Ordnung 6 mit

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) = (-2, 3).$$

- $G = \text{PSU}(3, 7).2$ und u hat Ordnung 21 mit

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{7a}(u), \varepsilon_{7b}(u)) \in \{(15, 0, -14), (15, -1, -13), (-6, 0, 7), (-6, 1, 6)\}.$$

- $G = \text{Sz}(32)$ und u hat Ordnung 10 mit

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{5a}(u)) \in \{(6, -5), (-4, 5)\}.$$

- $G = G_2(3).2$ und u hat Ordnung 21 mit

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{3b}(u), \varepsilon_{3c}(u), \varepsilon_{3d}(u), \varepsilon_{7a}(u)) &= (0, 0, -2, -4, 7), \\(\varepsilon_{3a}(u^7), \varepsilon_{3b}(u^7), \varepsilon_{3c}(u^7), \varepsilon_{3d}(u^7)) &= (0, 0, -2, 3)\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{3b}(u), \varepsilon_{3c}(u), \varepsilon_{3d}(u), \varepsilon_{7a}(u)) &= (0, 0, -3, -3, 7), \\(\varepsilon_{3a}(u^7), \varepsilon_{3b}(u^7), \varepsilon_{3c}(u^7), \varepsilon_{3d}(u^7)) &= (0, 0, 4, -3).\end{aligned}$$

3.2.2 Mittels der Gitter-Methode

In diesem Abschnitt wird die Primgraphfrage für die in Lemma 3.2.4 angegebenen Fälle mit Hilfe der Gitter-Methode untersucht. Für sieben der in diesem Lemma gelisteten dreizehn kritischen Fälle wird hierbei ein positives Resultat erzielt, s. Lemma 3.2.5 bis Lemma 3.2.8 und Lemma 3.2.10. Für die Gruppe $PSL(3, 7).2$ ergeben sich starke Einschränkungen, die es erlauben die Primgraphfrage für $PSL(3, 7)$ zu beweisen, s. Lemma 3.2.9. Die Gruppen, für die es mir nicht gelungen ist, die Primgraphfrage zu beantworten, sind in Satz 3.2.1 angegeben.

Lemma 3.2.5. *Sei $G = PSL(2, 2^f)$, so dass die Ordnung von G durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. Dann hat die Primgraphfrage für G eine positive Antwort.*

Beweis: Nach Lemma 3.2.2 gilt $f = 4$ oder $2^f - 1$ ist eine Mersenne-Primzahl. Im Fall $f = 4$ gilt für G sogar die Zassenhausvermutung nach Satz 2.5.1. Ist hingegen $2^f - 1$ eine Mersenne-Primzahl, dann sind nach Lemma 3.2.3 nur noch Einheiten der Ordnung 6 in $V(\mathbb{Z}G)$ zu untersuchen. Nach Lemma 3.2.2 ist 9 kein Teiler der Ordnung von G und somit existieren keine Einheiten der Ordnung 6 in $V(\mathbb{Z}G)$ nach Proposition 2.4.1. \square

Lemma 3.2.6. *Die Primgraphfrage hat eine positive Antwort für die Gruppen $PSL(3, 5).2$, $PSU(3, 4)$ und $PSU(3, 7).2$.*

Beweis: Alle Gruppen werden mittels des in Lemma 1.3.6 angegebenen Spezialfalls behandelt. Dabei sind alle involvierten Charaktere auf allen konjugierten Klassen der entsprechenden Gruppe ganzzahlig.

- Sei $G = \text{PSL}(3, 5)$.2. Nach Lemma 3.2.4 müssen nur Einheiten der Ordnung 15 untersucht werden und hat $u \in V(\mathbb{Z}G)$ Ordnung 15, so ist

$$\varepsilon_{3a}(u) = 6 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{5a}(u) + \varepsilon_{5b}(u) = -5.$$

Verwende die in Tabelle 3.7 angegebenen Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich $p = 3$.

	1a	3a	5a	5b			φ_1	φ_{15}
χ_1	1	1	1	1		χ_1	1	·
χ_{15}	124	1	-1	-1		χ_{15}	·	1
χ_{21}	125	-1	0	0		χ_{21}	1	1

(a) Teil der Charaktertafel

(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 3

Tabelle 3.7: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 von $\text{PSL}(3, 5)$.2

Es ergibt sich

$$\chi_{21}(u) = -\varepsilon_{3a}(u) = -6, \quad \chi_{21}(u^5) = \chi_{21}(3a) = -1$$

und

$$\chi_{15}(u) = \varepsilon_{3a}(u) - (\varepsilon_{5a}(u) + \varepsilon_{5b}(u)) = 11, \quad \chi_{15}(u^5) = \chi_{15}(3a) = 1.$$

Mit dem angegebenen Teil der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 und Lemma 1.3.6 folgt die Aussage.

- Sei $G = \text{PSU}(3, 4)$. Nach Lemma 3.2.4 müssen nur Einheiten der Ordnung 6 untersucht werden und hat $u \in V(\mathbb{Z}G)$ Ordnung 6, so ist

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) = (-2, 3).$$

Verwende die in Tabelle 3.8 angegebenen Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix für $p = 3$.

Dann folgt

$$\chi_{13}(u) = 3\varepsilon_{3a}(u) = 3, \quad \chi_{13}(u^2) = \chi_{13}(3a) = 1$$

	1a	2a	3a
χ_1	1	1	1
χ_{13}	64	0	1
χ_{14}	65	1	-1

(a) Teil der Charaktertafel

	φ_1	φ_{13}
χ_1	1	·
χ_{13}	·	1
χ_{14}	1	1

(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 3

Tabelle 3.8: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 von $\text{PSU}(3, 4)$

und

$$\chi_{14}(u) = \varepsilon_{2a}(u) - \varepsilon_{3a}(u) = -5, \quad \chi_{14}(u^2) = \chi_{14}(3a) = -1.$$

Mit dem angegebenen Teil der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 und Lemma 1.3.6 folgt die Aussage.

- Sei $G = \text{PSU}(3, 7).2$. Nach Lemma 3.2.4 müssen nur Einheiten der Ordnung 21 untersucht werden und hat $u \in V(\mathbb{Z}G)$ Ordnung 21, so ist

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{7a}(u), \varepsilon_{7b}(u)) \in \{(15, 0, -14), (15, -1, -13), (-6, 0, 7), (-6, 1, 6)\}.$$

Verwende die in Tabelle 3.9 angegebenen Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3.

	1a	3a	7a	7b
χ_1	1	1	1	1
χ_{23}	343	1	0	0
χ_{27}	344	-1	1	1

(a) Teil der Charaktertafel

	φ_1	φ_{23}
χ_1	1	·
χ_{23}	·	1
χ_{27}	1	1

(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 3

Tabelle 3.9: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 von $\text{PSU}(3, 7).2$

Dann folgt

$$\chi_{23}(u) = \varepsilon_{3a}(u), \quad \chi_{23}(u^7) = \chi_{23}(3a) = 1$$

und

$$\chi_{27}(u) = -\varepsilon_{3a}(u) + (\varepsilon_{7a}(u) + \varepsilon_{7b}(u)), \quad \chi_{27}(u^5) = \chi_{27}(3a) = -1.$$

Gilt $\varepsilon_{3a}(u) = 15$, folgt

$$\chi_{23}(u) = 15, \chi_{27}(u) = -29.$$

Gilt hingegen $\varepsilon_{3a}(u) = -6$, folgt

$$\chi_{23}(u) = -6, \chi_{27}(u) = 11.$$

Mit dem angegebenen Teil der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 und Lemma 1.3.6 folgt die Aussage. \square

Notation: Es bezeichne G eine endliche Gruppe. Die nachfolgenden Lemmata wenden die Gitter-Methode an und es sollen in allen folgende Konventionen gelten: Es werden Charaktere verwendet, wie sie sich in der GAP character table library [Bre12] finden und die Namen werden beibehalten. Es bezeichne D_i eine zum irreduziblen Charakter χ_i gehörende Darstellung von G . Ist p eine feste Primzahl, diese wird sich stets aus dem Kontext ergeben, dann lässt sich D_i nach Bemerkung 1.3.5a) über einem p -adisch vollständigen, diskreten Ring R realisieren, dessen Verzweigungsgrad über \mathbb{Z}_p gleich dem Verzweigungsgrad des Charakterrings von χ_i ist. In den nachfolgenden Lemmata wird R stets unverzweigt über \mathbb{Z}_p sein.

Es bezeichne dann L_i ein zur Darstellung D_i korrespondierendes RG -Gitter, weiterhin bezeichne wie üblich $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo dem maximalen Ideal von R und k einen Körper der Charakteristik p , der die Restklassenkörper aller betroffenen vollständigen, diskreten Bewertungsringe enthält und über dem sich weiterhin alle angegebenen p -modularen Darstellungen von G realisieren lassen. Ist φ_i ein irreduzibler Brauer-Charakter von G , so bezeichne S_i den zugehörigen kG -Modul.

Die Rechnungen werden immer eine Einheit $u \in V(\mathbb{Z}G)$ involvieren. Sofern nicht anders angegeben, werden die L_i als $R\langle u \rangle$ -Gitter und die Moduln \bar{L}_i und S_i als $k\langle \bar{u} \rangle$ -Moduln betrachtet. Es wird außerdem für diese die Notation aus Proposition 1.3.1 und Proposition 1.3.2 verwendet.

Lemma 3.2.7. *Die Primgraphfrage hat eine positive Antwort für $\mathrm{PSL}(2, 81).(C_2 \times C_4)$.*

Beweis: Nach Lemma 3.2.4 müssen nur Elemente der Ordnung 15 unter-

sucht werden und hat $u \in V(\mathbb{Z}\text{PSL}(2, 81).(C_2 \times C_4))$ die Ordnung 15, gilt

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{5a}(u)) = (6, -5).$$

Setze $G = \text{PSL}(2, 81).(C_2 \times C_4)$ und verwende die in Tabelle 3.10 angegebenen Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und Zerlegungsmatrix zur Primzahl 5. Beachte hierbei, dass die Brauer-Tafel für $p = 5$ für diese Gruppe in GAP nicht vorliegt. Dennoch lässt sich bestimmen, welche irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in einem gemeinsamen Block liegen, vgl. [Isa76, Th. 15.18]. Da die angegebenen 81-dimensionalen Darstellungen bereits für Untergruppen von G mittels der Reduktion modulo 5 auf einfache modulare Darstellungen abgebildet werden, überträgt sich dieses Verhalten auch auf G und es folgt der angegebene Teil der Zerlegungsmatrix.

	1a	3a	5a		ψ_1	ψ_3	ψ_{28a}	ψ_{28b}
χ_1	1	1	1	χ_1	1	·	·	·
χ_3	1	1	1	χ_3	·	1	·	·
χ_{28}	81	0	1	χ_{28}	·	·	1	·
χ_{29}	81	0	1	χ_{29}	·	·	·	1
χ_{35}	164	2	-1	χ_{35}	1	1	1	1
(a) Teil der Charaktertafel				(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 5				

Tabelle 3.10: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 5 von $\text{PSL}(2, 81).(C_2 \times C_4)$

Es folgt dann mit Rechnungen wie in Abschnitt 2

$$D_1(u) \sim D_3(u) \sim (1),$$

$$D_{28}(u) \sim D_{29}(u) \sim (3 \times (1), 6 \times (\zeta_5, \dots, \zeta_5^{-1}), 7 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 5 \times (\zeta_{15}, \dots, \zeta_{15}^{-1})),$$

$$D_{35}(u) \sim (20 \times (1), 9 \times (\zeta_5, \dots, \zeta_5^{-1}), 6 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 12 \times (\zeta_{15}, \dots, \zeta_{15}^{-1})).$$

Für die vorliegende Situation ist die Argumentation mittels Young Schief tableaux am anschaulichsten, vgl. Abschnitt 1.3.1 Es sind \bar{L}_1 und \bar{L}_3 Unter- oder Faktormoduln von \bar{L}_{35}^1 und daher kann man nach Bemerkung 1.3.10 davon ausgehen, dass $\bar{L}_{35}^{\zeta_3}$ einen zu $\bar{L}_{28}^{\zeta_3}$ isomorphen Untermodul enthält, dessen Quotient zu $\bar{L}_{29}^{\zeta_3}$ isomorph ist. Sei λ eine zu $\bar{L}_{35}^{\zeta_3}$ korrespondierende Partition und μ eine zu $\bar{L}_{28}^{\zeta_3}$ korrespondierende Partition.

Nach obigen Eigenwerten und Proposition 1.3.3 enthält λ genau 12 Mal einen

der Einträge 4 oder 5, während μ genau 5 solche Einträge enthält. In jedem Fall enthält der oberste zusammenhängende Teil eines Schiefdiagramms der Form λ/μ mindestens 7 Zeilen der Länge 3, s. Abbildung 3.2. Hierbei sind rosa Kästchen nur potenziell vorhanden, während die weißen Kästchen in jedem Fall auftreten.

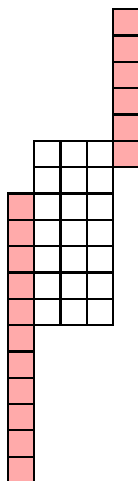


Abbildung 3.2: Zu $\bar{L}_{35}^{\zeta_3}/\bar{L}_{28}^{\zeta_3}$ gehöriges Schiefdiagramm

Möchte man dieses Diagramm nun so mit natürlichen Zahlen füllen, dass es zu einem semistandard Young Tableau wird, welches die Gitter Eigenschaft erfüllt, dann liegen einige Einträge durch die vorgegebene Form bereits fest. Insbesondere müssen die zweite und dritte Spalte jeweils mit den Ziffern 1 bis 7 aufgefüllt werden, s. Abbildung 3.3.

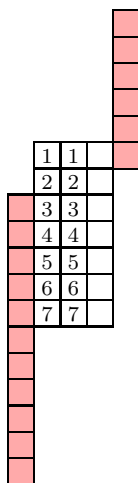


Abbildung 3.3: Zu $\bar{L}_{35}^{\zeta_3}/\bar{L}_{28}^{\zeta_3}$ gehöriges Schieftableau mit einigen zwingenden Einträgen

Somit besitzt nach Satz 1.3.9 der Modul $\bar{L}_{29}^{\zeta_3}$ mindestens 7 direkte unzerlegbare Summanden von k -Dimension mindestens 2, ein Widerspruch zu den oben angegebenen Eigenwerten und Proposition 1.3.3. \square

Lemma 3.2.8. *Die Primgraphfrage hat eine positive Antwort für $\text{PSL}(3, 4)$.*

Beweis: Nach Lemma 3.2.4 müssen nur Einheiten der Ordnung 6 untersucht werden und existiert in $V(\mathbb{Z}\text{PSL}(3, 4))$ ein Element u der Ordnung 6, gilt

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) \in \{(4, -3), (-2, 3)\}.$$

Die Anwendung der Gitter-Methode auf die Gruppe $\text{PSL}(3, 4)$ selbst würde hier kein vollständiges Resultat liefern. Die Gruppe $\text{PSL}(3, 4)$ ist jedoch isomorph zu einer maximalen Untergruppe der M_{22} , der Mathieugruppe vom Grad 22 [HB82b, Ch. XII, Th. 1.4], und in beiden Gruppen existiert jeweils nur genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen und von Elementen der Ordnung 3. Existiert also in $V(\mathbb{Z}\text{PSL}(3, 4))$ ein Element der Ordnung 6, so existiert ein Element u der Ordnung 6 auch in $V(\mathbb{Z}M_{22})$ und es gilt

$$(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) \in \{(4, -3), (-2, 3)\},$$

wobei $2a$ und $3a$ jetzt Konjugiertenklassen in M_{22} bezeichnen. Diese Möglichkeiten können nach [BKL08, Th. 1 (iv)] nicht mittels der HeLP-Methode ausgeschlossen werden. Setze also $G = M_{22}$. Es werden die in Tabelle 3.11 angegebenen Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 verwendet.

	$1a$	$2a$	$3a$		φ_2	φ_9
χ_2	21	5	3	χ_2	1	·
χ_8	210	2	3	χ_8	·	1
χ_9	231	7	-3	χ_9	1	1
(a) Teil der Charaktertafel				(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 3		

Tabelle 3.11: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 von M_{22}

Nach Bemerkung 1.3.10 und der Zerlegungsmatrix kann man annehmen, dass \bar{L}_9 einen zu \bar{L}_8 isomorphen Untermodul enthält. Es bezeichne ζ eine primitive komplexe 3-te Einheitswurzel.

Fall 1: $(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) = (4, -3)$.

Mit zu den in Abschnitt 2 durchgeführten analogen Rechnungen folgt

$$D_8(u) \sim (38 \times (1), 34 \times (\zeta, \zeta^2), 34 \times (-1), 35 \times (-\zeta, -\zeta^2)),$$

$$D_9(u) \sim (31 \times (1), 44 \times (\zeta, \zeta^2), 44 \times (-1), 34 \times (-\zeta, -\zeta^2)).$$

Nach Proposition 1.3.3 besitzt dann \bar{L}_8^{-1} genau 35 direkte unzerlegbare Summanden von k -Dimension mindestens 2, während \bar{L}_9^{-1} nur 34 solche besitzt. Dies widerspricht der Tatsache, dass \bar{L}_8^{-1} ein Untermodul von \bar{L}_9^{-1} ist.

Fall 2: $(\varepsilon_{2a}(u), \varepsilon_{3a}(u)) = (-2, 3)$.

Mit zu den in Abschnitt 2 durchgeführten analogen Rechnungen folgt

$$D_8(u) \sim (36 \times (1), 35 \times (\zeta, \zeta^2), 36 \times (-1), 34 \times (-\zeta, -\zeta^2)),$$

$$D_9(u) \sim (51 \times (1), 34 \times (\zeta, \zeta^2), 24 \times (-1), 44 \times (-\zeta, -\zeta^2)).$$

Analog zum Fall 1 besitzt \bar{L}_8^1 nach Proposition 1.3.3 genau 35 direkte unzerlegbare Summanden von k -Dimension mindestens 2, während \bar{L}_9^1 nur maximal 34 solche Summanden besitzt. Wiederum folgt ein Widerspruch. \square

Lemma 3.2.9. *Sei $G = \text{PSL}(3, 7).2$. Existiert $u \in V(\mathbb{Z}G)$ von Ordnung 21, so gilt*

$$(\varepsilon_{7a}(u^3), \varepsilon_{7b}(u^3), \varepsilon_{7c}(u^3)) = (5, 0, -4)$$

und

$$(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{7a}(u), \varepsilon_{7b}(u), \varepsilon_{7c}(u)) = (-6, -1, 0, 8).$$

Die Primgraphfrage hat eine positive Antwort für $\text{PSL}(3, 7)$.

Beweis: Nach Lemma 3.2.4 sind noch Einheiten der Ordnung 21 zu untersuchen und in jedem Fall gilt für eine Einheit $u \in V(\mathbb{Z}\text{PSL}(3, 7).2)$ der Ordnung 21, dass $\varepsilon_{3a}(u) = -6$ ist. Setze $G = \text{PSL}(3, 7).2$. Die Gitter-Methode und insbesondere Proposition 1.3.3 werden in diesem Beweis mehrmals ohne Referenzierung verwendet. Nutze die in Tabelle 3.12 dargestellten Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3.

Sei

$$D_5(u) \sim (a_1 \times (1), a_3 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), a_7 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), a_{21} \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})),$$

$$D_{23}(u) \sim (b_1 \times (1), b_3 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), b_7 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), b_{21} \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})),$$

	1a	3a	7a	7b	7c
χ_5	57	3	8	1	1
χ_{23}	399	3	7	0	0
χ_{25}	456	-3	15	1	1

(a) Teil der Charaktertafel

	φ_5	φ_{21}
χ_5	1	·
χ_{23}	·	1
χ_{25}	1	1

(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 3

Tabelle 3.12: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 von $\text{PSL}(3, 7).2$

mit gewissen nicht-negativen ganzen Zahlen a_i und b_i . Es gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\chi_5(u) &= a_1 + a_{21} - a_3 - a_7, \\
\chi_5(u^3) &= a_1 + 2a_3 - a_7 - 2a_{21}, \\
\chi_5(u^7) &= a_1 + 6a_7 - a_3 - 6a_{21} = \chi_5(3a) = 3, \\
\chi_5(u^{21}) &= a_1 + 2a_3 + 6a_7 + 12a_{21} = 57 = \chi_5(1a). \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für χ_{23} .

Unabhängig von den genauen partiellen Augmentationen von u und u^3 gilt

$$\begin{aligned}
\chi_5(u^3) + \chi_{23}(u^3) &= (8\varepsilon_{7a}(u^3) + \varepsilon_{7b}(u^3) + \varepsilon_{7c}(u^3)) + (7\varepsilon_{7a}(u^3)) \\
&= 15\varepsilon_{7a}(u^3) + \varepsilon_{7b}(u^3) + \varepsilon_{7c}(u^3) = \chi_{25}(u^3).
\end{aligned}$$

Sei $r = 15\varepsilon_{7a}(u) + \varepsilon_{7b}(u) + \varepsilon_{7c}(u)$. Dann gilt

$$\chi_5(u) + \chi_{23}(u) = r + 6\varepsilon_{3a}(u) = r - 36 = (r + 18) - 54 = \chi_{25}(u) - 54.$$

Hieraus folgt

$$D_{25}(u) \sim (a_1 + b_1 + 30 \times (1), a_3 + b_3 - 15 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), a_7 + b_7 - 6 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), a_{21} + b_{21} + 3 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})).$$

Dies lässt sich mittels der Charakterwerte $\chi_{25}(u)$, $\chi_{25}(u^3)$, $\chi_{25}(u^7)$ und $\chi_{25}(u^{21})$ verifizieren, was hier kurz geschehen soll. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi_{25}(u) &= a_1 + b_1 + 30 + a_{21} + b_{21} + 3 - a_3 - b_3 + 15 - a_7 - b_7 + 6 \\
&= a_1 + a_{21} - a_3 - a_7 + b_1 + b_{21} - b_3 - b_7 + 54 \\
&= \chi_5(u) + \chi_{23}(u) + 54,
\end{aligned}$$

wie verlangt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\chi_{25}(u^3) &= a_1 + b_1 + 30 + 2(a_3 + b_3 - 15) - a_7 - b_7 + 6 - 2(a_{21} + b_{21} + 3) \\ &= a_1 + 2a_3 - a_7 - 2a_{21} + b_1 + 2b_3 - b_7 - 2b_{21} = \chi_5(u^3) + \chi_{23}(u^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{25}(u^7) &= a_1 + b_1 + 30 + 6(a_7 + b_7 - 6) - a_3 - b_3 + 15 - 6(a_{21} + b_{21} + 3) \\ &= a_1 + 6a_7 - a_3 - 6a_{21} + b_1 + 6b_7 - b_3 - b_{21} - 9 \\ &= \chi_5(u^7) + \chi_{23}(u^7) - 9 = -3 = \chi_{25}(3a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{25}(u^{21}) &= a_1 + b_1 + 30 + 2(a_3 + b_3 - 15) + 6(a_7 + b_7 - 6) + 12(a_{21} + b_{21} + 3) \\ &= a_1 + 2a_3 + 6a_7 + 12a_{21} + b_1 + 2b_3 + 6b_7 + 12b_{21} \\ &= \chi_5(u^{21}) + \chi_{23}(u^{21}) = 57 + 399 = 456 = \chi_{25}(1a).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen die Richtigkeit der oben angegebenen Eigenwerte für $D_{25}(u)$.

Wegen $\chi_5(u^7) = \chi_5(3a) = 3$ gilt

$$D_5(u^7) \sim (21 \times (1), 18 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1})).$$

Hieraus folgt wiederum

$$a_3 + 6a_{21} = 18.$$

Nun ist \bar{L}_{23}^1 ein Unter- oder Faktormodul von \bar{L}_{25}^1 , woraus sich

$$a_3 + b_3 - 15 \geq b_3$$

ergibt, also $a_3 \geq 15$. Dann muss aber nach Obigem $a_3 = 18$ und $a_{21} = 0$ gelten.

Somit ist $a_7 \leq 3$ und $\bar{L}_5^{\zeta_7} \cong a_7 k$.

Die Anzahl der direkten Summanden von Dimension mindestens 2 in $\bar{L}_{25}^{\zeta_7}$ ist wenigstens um drei größer als jene von $\bar{L}_{23}^{\zeta_7}$. Somit ist

$$3 \geq \dim(\bar{L}_{25}^{\zeta_7}/\bar{L}_{23}^{\zeta_7}) = \dim(\bar{L}_5^{\zeta_7}) = \dim(a_7 k) = a_7.$$

Es folgt $a_7 = 3$. Aus der Gleichung (3.1) für $\chi_{25}(u^{21})$ ergibt sich außerdem $a_1 = 3$.

Somit ist

$$D_5(u^3) \sim (39 \times (1), 3 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1})),$$

also

$$\chi_5(u^3) = 36 = 8\varepsilon_{7a}(u^3) + \varepsilon_{7b}(u^3) + \varepsilon_{7c}(u^3).$$

Mit $\varepsilon_{7a}(u^3) + \varepsilon_{7b}(u^3) + \varepsilon_{7c}(u^3) = 1$ folgt $\varepsilon_{7a}(u^3) = 5$. Des Weiteren ist

$$\chi_5(u) = a_1 + a_{21} - a_3 - a_7 = 3 - 18 - 3 = -18 = 3\varepsilon_{3a}(u) + 8\varepsilon_{7a}(u) + \varepsilon_{7b}(u) + \varepsilon_{7c}(u).$$

Mit

$$\varepsilon_{7a}(u) + \varepsilon_{7b}(u) + \varepsilon_{7c}(u) = 1 - \varepsilon_{3a}(u) = 7,$$

ergibt sich $\varepsilon_{7a}(u) = -1$.

Es wird nun die HeLP-Methode angewandt, um die partiellen Augmentationen von u^3 weiter einzuschränken. Hierfür werden die in Tabelle 3.13 angegebenen Charaktere der Brauer-Tafel zur Primzahl 3 verwendet. Sind alle

	1a	7a	7b	7c
φ_8	96	-2	5	-2
φ_9	192	-4	-4	3

Tabelle 3.13: Teil der Brauer-Tafel von $\mathrm{PSL}(3, 1).2$ zur Primzahl 3.

Eigenwerte von $\Theta_8(u^3)$ primitive 7-te Einheitswurzeln, so gilt

$$\varphi_8(u^3) = -\frac{\varphi_8(1)}{6} = -16$$

und somit $\varphi_8(u^3) \geq -16$. Aus $\varepsilon_{7a}(u^3) = 5$, folgt $\varepsilon_{7b}(u^3) + \varepsilon_{7c}(u^3) = -4$ und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_8(u^3) &= -2\varepsilon_{7a}(u^3) + 5\varepsilon_{7b}(u^3) - 2\varepsilon_{7c}(u^3) \\ &= -10 + 5(-4 - \varepsilon_{7c}(u^3)) - 2\varepsilon_{7c}(u^3) = -30 - 7\varepsilon_{7c}(u^3) \geq -16. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\varepsilon_{7c}(u^3) \leq -2$.

Eine analoge Rechnung für φ_9 liefert zuerst

$$\varphi_9(u^3) \geq -\frac{\varphi_9(1)}{6} = -32$$

und hiernach

$$\varphi_9(u^3) = -4\varepsilon_{7a}(u^3) - 4\varepsilon_{7b}(u^3) + 3\varepsilon_{7c}(u^3)$$

$$= -20 - 4(-4 - \varepsilon_{7c}(u^3)) + 3\varepsilon_{7c}(u^3) = -4 + 7\varepsilon_{7c}(u^3) \geq -32.$$

Es folgt $\varepsilon_{7c}(u^3) \geq -4$.

Es werden nun die drei Fälle $\varepsilon_{7c}(u^3) \in \{-2, -3, -4\}$ einzeln betrachtet. In allen Fällen wird der in Tabelle 3.14 angegebene Teil der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix zur Primzahl 3 verwendet.

	1a	3a	7a	7b	7c		φ_1	φ_4	φ_8
χ_4	56	2	7	0	0	χ_4	1	1	·
χ_8	152	-1	5	5	-2	χ_8	1	1	1
	(a) Teil der Charaktertafel						(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 3		

Tabelle 3.14: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 3 von $\text{PSL}(3, 7).2$

In allen Fällen ergibt sich wegen $\chi_4(u) = 2\varepsilon_{3a}(u) + 7\varepsilon_{7a}(u) = -19$ und der entsprechenden Augmentationen von u^3 und u^7 für die Eigenwerte von $D_4(u)$ gerade

$$D_4(u) \sim (2 \times (1), 18 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 3 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1})).$$

Sei

$$D_8(u) \sim (c_1 \times (1), c_3 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), c_7 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), c_{21} \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})).$$

Durch die angegebenen Eigenwerte und Teile der Zerlegungsmatrix folgt, dass S_4^1 , als Faktor- oder Untermodul von \bar{L}_4^1 , wenigstens 17 direkte Summanden von k -Dimension mindestens 2 besitzt. Da S_4^1 auch ein Unter- oder Faktor-Modul von \bar{L}_8^1 ist, folgt $c_3 \geq 17$. Außerdem gilt $\chi_8(u^7) = -1$. Hieraus ergibt sich

$$D_8(u^7) \sim (50 \times (1), 51 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}))$$

und dies liefert

$$c_3 + 6c_{21} = 51.$$

Es folgt $c_3 \equiv 3 \pmod{6}$.

Fall 1: $\varepsilon_{7c}(u^3) = -2$, also $(\varepsilon_{7a}(u^3), \varepsilon_{7b}(u^3), \varepsilon_{7c}(u^3)) = (5, -2, -2)$.

In diesem Fall gilt $\chi_8(u^3) = 19$ und

$$D_8(u^3) \sim (38 \times (1), 19 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1})).$$

Somit besitzt $D_8(u)$ genau $6 \cdot 19 = 114$ Eigenwerte, welche primitive 7-te oder 21-te Einheitswurzeln sind. Somit verbleiben noch 38 andere Eigenwerte und es folgt $c_3 \leq 19$. Dies widerspricht aber $c_3 \geq 17$ und $c_3 \equiv 3 \pmod{6}$.

Fall 2: $\varepsilon_{7c}(u^3) = -3$, also $(\varepsilon_{7a}(u^3), \varepsilon_{7b}(u^3), \varepsilon_{7c}(u^3)) = (5, -1, -3)$.

Analog zum Fall 1 gilt nun

$$D_8(u^3) \sim (44 \times 1, 18 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}))$$

und $D_8(u)$ besitzt genau 108 Eigenwerte, welche primitive 7-te oder 21-te Einheitswurzeln sind. Es folgt $c_3 \leq 22$ und mit Obigem $c_3 = 21$. Aus der Gleichung $c_3 + 6c_{21} = 51$ folgt weiterhin $c_{21} = 5$, hieraus $c_7 = 8$ und daraus $c_1 = 2$. Also ist

$$\chi_8(u) = c_1 + c_{21} - c_3 - c_7 = -22.$$

Andererseits gilt mit $\varepsilon_{7b}(u) + \varepsilon_{7c}(u) = 8$ die Gleichung

$$\begin{aligned} -22 &= \chi_8(u) = -\varepsilon_{3a}(u) + 5\varepsilon_{7a}(u) + 5\varepsilon_{7b}(u) - 2\varepsilon_{7c}(u) \\ &= 6 - 5 + 5(8 - \varepsilon_{7c}(u)) - 2\varepsilon_{7c}(u) = 41 - 7\varepsilon_{7c}(u). \end{aligned}$$

Es folgt $\varepsilon_{7c}(u) = 9$ und $\varepsilon_{7b}(u) = -1$.

Es wird nun der in Tabelle 3.15 angegebene Teil der gewöhnlichen Charaktertafel, der Zerlegungsmatrix und der Brauer-Tafel zur Primzahl 7 verwendet.

	$1a$	$3a$	$7a$	$7b$	$7c$		$1a$	$3a$
χ_7	152	-1	5	5	-2	φ_{13}	117	0
χ_8	152	-1	5	5	-2	φ_{14}	117	0
χ_9	304	-2	10	-4	3			

(a) Teil der Charaktertafel

(b) Teil der Brauer-Tafel bezüglich 7

	φ_3	φ_4	φ_6	φ_7	φ_{13}	φ_{14}
χ_7	·	1	·	1	1	·
χ_8	1	·	1	·	·	1
χ_9	1	1	1	1	1	1

(c) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 7

Tabelle 3.15: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel, der Zerlegungsmatrix und Brauer-Tafel bezüglich 7 von $\text{PSL}(3, 7)$.2

Aus den in der Brauer-Tafel angegebenen Werten folgt

$$\Theta_{13}(u^7) \sim \Theta_{14}(u^7) \sim (39 \times (1), 39 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}))$$

und somit sind S_{13}^1 und S_{14}^1 als $k\langle\bar{u}\rangle$ -Moduln jeweils 39-dimensional. Mit den üblichen Rechnungen folgt

$$\begin{aligned} D_7(u) \sim D_8(u) &\sim (2 \times (1), 8 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 21 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 5 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})), \\ D_9(u) &\sim (46 \times (1), 9 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 18 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 14 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})). \end{aligned}$$

Da S_{13}^1 ein Unter- bzw. Faktormodul von \bar{L}_7^1 ist, folgt aus diesen Eigenwerten

$$\dim(\text{soc}(S_{13}^1)) \leq 10$$

und daraus

$$\dim(S_{13}^1/\text{soc}(S_{13}^1)) \geq 29.$$

Analog folgt

$$\dim(S_{14}^1/\text{soc}(S_{14}^1)) \geq 29.$$

Da S_{13}^1 und S_{14}^1 beide Unter- oder Faktormoduln von \bar{L}_9^1 sind, folgt hieraus

$$\dim(\bar{L}_9^1/\text{soc}(\bar{L}_9^1)) \geq 2 \cdot 29 = 58.$$

Andererseits ist diese Dimension aber durch die Anzahl der primitiven 7-ten Einheitswurzeln, welche als Eigenwerte von $D_9(u)$ auftauchen beschränkt und es folgt

$$\dim(\bar{L}_9^1/\text{soc}(\bar{L}_9^1)) \leq 9 \cdot 6 = 54,$$

ein Widerspruch.

Fall 3: $\varepsilon_{7c}(u^3) = -4$, also $(\varepsilon_{7a}(u^3), \varepsilon_{7b}(u^3), \varepsilon_{7c}(u^3)) = (5, 0, -4)$.

Analog zu den Fällen 1 und 2 folgt $\chi_8(u^3) = 33$ und hieraus

$$D_8(u^3) \sim (50 \times (1), 17 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1})).$$

Somit besitzt $D_8(u)$ genau $152 - 17 \cdot 6 = 50$ Eigenwerte, welche keine primitiven 7-ten oder 21-ten Einheitswurzeln sind. Somit gilt $c_3 \leq 25$ und wie im Fall 2 folgt $c_3 = 21, c_{21} = 5, c_7 = 7$ und $c_1 = 8$. Wiederum analog zum Fall 2 ergibt sich hieraus

$$-15 = \chi_8(u) = 41 - 7\varepsilon_{7c}(u)$$

und somit $\varepsilon_{7c}(u) = 8$ und $\varepsilon_{7b}(u) = 0$. Es ist mir in diesem Fall leider nicht gelungen die Gitter-Methode erfolgreich anzuwenden.

Angenommen es existiert ein Element der Ordnung 21 in $V(\mathbb{Z}\text{PSL}(3,7))$. Dann liegt dieses in jeder der drei verschiedenen, aber isomorphen, Erweiterungen vom Grad 2. Beachte hierfür, dass die äußere Automorphismengruppe der $\text{PSL}(3,7)$ eine S_3 ist. In $\text{PSL}(3,7)$ gibt es vier Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 7, sagen wir $7\alpha, 7\beta, 7\gamma, 7\delta$. Dabei fallen jeweils zwei verschiedene der $7\beta, 7\gamma, 7\delta$ in einer Erweiterung vom Grad 2 zusammen und die dritte dieser Klassen übernimmt die Rolle der Klasse $7b$ aus obiger Rechnung. Es folgt

$$\varepsilon_{7\alpha}(u^3) = 5 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{7\beta}(u^3) = \varepsilon_{7\gamma}(u^3) = \varepsilon_{7\delta}(u^3) = 0,$$

ein Widerspruch. □

Lemma 3.2.10. *Die Primgraphfrage hat eine positive Antwort für $G_2(3).2$.*

Beweis: Nach Lemma 3.2.4 müssen nur Elemente der Ordnung 21 untersucht werden und es gibt zwei mögliche partielle Augmentationen, wobei aber für beide Fälle

$$\varepsilon_{3a}(u) = \varepsilon_{3b}(u) = \varepsilon_{3a}(u^7) = \varepsilon_{3b}(u^7) = 0$$

gilt. Entsprechend werden die Konjugiertenklassen $3a$ und $3b$ nicht in den nachfolgenden Tabellen und Rechnungen auftauchen. Verwende die in der Tabelle 3.16 angegebenen Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und Zerlegungsmatrix.

	$1a$	$3c$	$3d$	$7a$		φ_1	φ_5	φ_7	φ_{10}	φ_{15}	φ_{23}
χ_1	1	1	1	1	χ_1	1	·	·	·	·	·
χ_5	64	4	-2	1	χ_5	·	1	·	·	·	·
χ_7	64	4	-2	1	χ_7	·	·	1	·	·	·
χ_{10}	78	-3	6	1	χ_{10}	·	·	·	1	·	·
χ_{15}	104	2	-1	-1	χ_{15}	1	·	·	·	1	·
χ_{24}	729	0	0	1	χ_{24}	·	·	·	·	1	1
χ_{28}	832	4	4	-1	χ_{28}	·	1	1	1	·	1
(a) Teil der Charaktertafel						(b) Teil der Zerlegungsmatrix bezüglich 7					

Tabelle 3.16: Teile der gewöhnlichen Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix bezüglich 7 von $G_2(3).2$

Fall 1: $(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{3b}(u), \varepsilon_{3c}(u), \varepsilon_{3d}(u), \varepsilon_{7a}(u)) = (0, 0, -2, -4, 7)$ und $(\varepsilon_{3a}(u^7), \varepsilon_{3b}(u^7), \varepsilon_{3c}(u^7), \varepsilon_{3d}(u^7)) = (0, 0, -2, 3)$.

Durch Rechnungen wie in Abschnitt 2 folgt

$$\begin{aligned}
 D_1(u) &\sim (1), \\
 D_5(u) \sim D_7(u) &\sim (6 \times (1), (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 2 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 4 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})), \\
 D_{10}(u) &\sim (7 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 6 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 2 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})), \\
 D_{15}(u) &\sim (5 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 7 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 5 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})), \\
 D_{24}(u) &\sim (39 \times (1), 34 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 33 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 35 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})), \\
 D_{28}(u) &\sim (22 \times (1), 43 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 48 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 38 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})).
 \end{aligned}$$

Die Isomorphietypen aller Gitter und Moduln werden im Folgenden mit den in Abschnitt 1.3 angegebenen Methoden bestimmt. Es folgt aus den Eigenwerten

$$S_{15}^1 \cong 4I_6 \oplus I_5.$$

Sei a eine nicht-negative ganze Zahl, so dass gilt:

$$\bar{L}_{24}^1 \cong aI_7 \oplus (34 - a)I_6 \oplus (39 - a)I_1.$$

Dann hat das zu $S_{23}^1 \cong \bar{L}_{24}^1/S_{15}^1$ gehörige Schiefdiagramm die Gestalt wie in Abbildung 3.4. Das Vorhandensein der rosa Kästchen ist abhängig von a . Hierbei ist die Anzahl der rosa Kästchen in der siebten Spalte genau a und in der ersten Spalte genau $34 - a$.

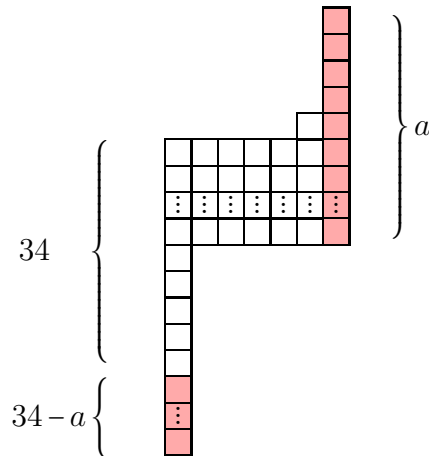


Abbildung 3.4: Zu S_{23}^1 gehöriges Schiefdiagramm

Ist $a \geq 5$, so liegen die meisten Einträge des Schieftableaus fest, die es zu einem semistandard Schieftableau machen, welches die Gitter-Eigenschaft

erfüllt. Es hat die Gestalt wie in Abbildung 3.5.

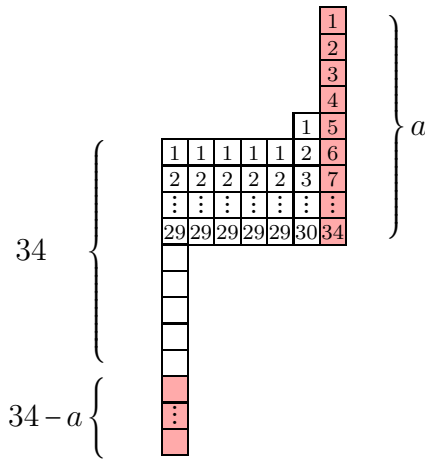


Abbildung 3.5: Zu S_{23}^1 gehöriges Schiefdiagramm im Fall $a \geq 5$

Dann hat S_{23}^1 genau $\min\{29, a\}$ direkte Summanden vom Typ I_7 . Andererseits kann man nach Bemerkung 1.3.10 o.B.d.A. annehmen, dass S_{23}^1 ein Untermodul von \bar{L}_{28}^1 ist und letzterer hat höchstens 22 direkte Summanden vom Typ I_7 . Es folgt $a \leq 22$.

Der Sockel von S_{23}^1 hat als Dimension die Anzahl der verschiedenen Ziffern, die im zugehörigen Schiefdiagramm auftauchen, also mindestens die Länge der ersten Spalte, also mindestens $68 - a$. Da aber \bar{L}_{28}^1 mindestens a direkte Summanden vom Typ I_7 besitzt, folgt aus den oben angegebenen Eigenwerten

$$\dim(\text{soc}(\bar{L}_{28}^1)) \leq a + (43 - a) + (22 - a) = 65 - a < 68 - a \leq \dim(\text{soc}(S_{23}^1)),$$

im Widerspruch dazu, dass S_{23}^1 ein Untermodul von \bar{L}_{28}^1 ist.

Sei nun $a \leq 4$ und

$$\bar{L}_{28}^1 \cong bI_7 \oplus (43 - b)I_6 \oplus (22 - b)I_1.$$

Dann ist

$$\dim(\text{soc}(\bar{L}_{28}^1)) = b + (43 - b) + (22 - b) = 65 - b.$$

Aus

$$64 \leq 68 - a \leq \dim(\text{soc}(S_{23}^1)) \leq \dim(\text{soc}(\bar{L}_{28}^1))$$

folgt dann $b \leq 1$, d.h. das zu \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 gehörige Schiefdiagramm enthält in der

siebten Spalte höchstens ein Kästchen. Weiterhin folgt

$$\dim(\text{soc}(\bar{L}_{28}^1)) - \dim(\text{soc}(S_{23}^1)) \leq 1,$$

d.h. das zu \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 gehörige Schiefdiagramm enthält in der ersten Spalte höchstens ein Kästchen. Nun ist aber

$$S_{10}^1 \cong \bar{L}_{10}^1 \cong 7I_6$$

ein Unter- oder Faktormodul von \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 , d.h. das zugehörige Schiefdiagramm muss die Ziffern 1 bis 7 jeweils mindestens 6 Mal enthalten. Dies würde aber voraussetzen, dass in der ersten und siebten Spalte des zugehörigen Schiefdiagramms insgesamt mindestens 7 Kästchen vorhanden sind, im Widerspruch zu Obigem.

Fall 2: $(\varepsilon_{3a}(u), \varepsilon_{3b}(u), \varepsilon_{3c}(u), \varepsilon_{3d}(u), \varepsilon_{7a}(u)) = (0, 0, -3, -3, 7)$ und $(\varepsilon_{3a}(u^7), \varepsilon_{3b}(u^7), \varepsilon_{3c}(u^7), \varepsilon_{3d}(u^7)) = (0, 0, 4, -3)$.

Durch Rechnungen wie in Abschnitt 2 folgt

$$D_1(u) \sim (1),$$

$$D_5(u) \sim D_7(u) \sim (6 \times (1), 5 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 2 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 2 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})),$$

$$D_{10}(u) \sim (1 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 6 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 5 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})),$$

$$D_{15}(u) \sim (7 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 7 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 4 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})),$$

$$D_{24}(u) \sim (39 \times (1), 34 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 33 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 35 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})),$$

$$D_{28}(u) \sim (22 \times (1), 43 \times (\zeta_7, \dots, \zeta_7^{-1}), 48 \times (\zeta_3, \zeta_3^{-1}), 38 \times (\zeta_{21}, \dots, \zeta_{21}^{-1})).$$

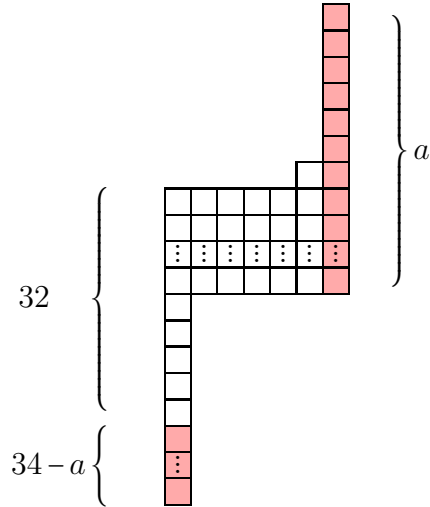
Die Argumentation verläuft ähnlich wie im ersten Fall. Aus den Eigenwerten folgt

$$S_{15}^1 \cong 6I_6 \oplus I_5.$$

Wiederum sei a eine nicht-negative ganze Zahl, so dass

$$L_{24}^1 \cong aI_7 \oplus (34 - a)I_6 \oplus (39 - a)I_1$$

gilt. Das zu $\bar{L}_{24}^1/S_{15}^1 \cong S_{23}^1$ gehörige Schiefdiagramm hat eine ähnliche Gestalt wie im Fall 1, genauer wie in Abbildung 3.6 angegeben. Hierbei ist die Anzahl der rosa Kästchen in der siebten Spalte wieder a und in der ersten Spalte $34 - a$.

Abbildung 3.6: Zu S_{23}^1 gehöriges Schiefdiagramm

Es hat dann der Sockel von S_{23}^1 mindestens die Dimension

$$32 + (34 - a) = 66 - a.$$

Im Fall $a \geq 7$ liegen die meisten Einträge fest und wie im Fall 1 hat S_{23}^1 dann $\min\{27, a\}$ direkte Summanden vom Typ I_7 und wieder liefert

$$\dim(\text{soc}(\bar{L}_{28}^1)) \leq a + (43 - a) + (22 - a) = 65 - a < 66 - a \leq \dim(\text{soc}(S_{23}^1))$$

einen Widerspruch.

Sei also $a \leq 6$ und

$$\bar{L}_{28}^1 \cong bI_7 \oplus (43 - b)I_6 \oplus (22 - b)I_1.$$

Es enthält dann die erste Spalte des zu \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 gehörigen Schiefdiagramms höchstens

$$\dim(\text{soc}(L_{28}^1)) - \dim(\text{soc}(S_{23}^1)) \leq (65 - b) - (66 - a) = a - 1 - b$$

Kästchen und die siebte Spalte höchstens b Kästchen. Insgesamt sind dies also $a - 1$ Kästchen. Wie im Fall 1 müssen dies aber wenigstens 5 Kästchen sein, da $S_5^1 \cong \bar{L}_5^1$ ein Unter- oder Faktormodul von \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 ist und wenigstens fünf unzerlegbare direkte Summanden von Dimension mindestens 6 hat. Es folgt $a = 6$ und \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 hat dann genau fünf direkte Summanden vom Typ

I_6 und keine vom Typ I_7 .

Mit den in [Sha92] angegebenen Brauer-Bäumen kann man voraussetzen, dass S_5^1 ein Untermodul von \bar{L}_{28}^1/S_{23}^1 ist. Dann hat der Quotient $(\bar{L}_{28}^1/S_{23}^1)/S_5^1$ keinen unzerlegbaren direkten Summanden von Dimension mindestens 6 mehr. Andererseits ist aber

$$S_{10}^1 \cong \bar{L}_{10}^1 \cong I_6$$

ein Untermodul von $(\bar{L}_{28}^1/S_{23}^1)/S_5^1$, ein Widerspruch. \square

Bemerkung 3.2.11. Es konnten in dieser Arbeit bereits einige interessante Aspekte aufgezeigt werden, die bei der Anwendung der Gitter-Methode eine Rolle spielen können. So macht Proposition 2.4.1 deutlich, dass sich die Gitter-Methode auch auf unendliche Serien von Gruppen erfolgreich anwenden lässt. Die Lemmata 3.2.9 und 3.2.10 zeigen, dass mit Hilfe des Littlewood-Richardson-Kalküls bzw. einem guten Verständnis der Struktur von kC_p -Moduln sich die Gitter-Methode auch einsetzen lässt, falls in der Zerlegungsmatrix relativ viele nicht-triviale Einträge auftauchen.

Die Verwendung der Gitter-Methode in Satz 2.5.1 bildet in dieser Arbeit insofern eine Ausnahme, als dass es das einzige Mal ist, dass die Gitter-Methode für eine verzweigte Körpererweiterung eingesetzt wird. Es handelt sich bei den betrachteten Modulkategorien aber immer noch um Kategorien von endlichem Darstellungstyp. Der Einsatz der Gitter-Methode auch bei zahmen oder wildem Darstellungstyp ist in Anbetracht des Satzes von Jordan-Zassenhaus [CR90, Th. 24.1] mit Hilfe eines Rechners zwar vorstellbar (vgl. Abschnitt 1.4), ist im Rahmen dieser Arbeit aber nicht erfolgt.

Ein weiterer interessanter Aspekt geht aus Satz 3.1.1 und Lemma 3.2.8 hervor. Der Einsatz der Gitter-Methode für eine Gruppe G bringt keinen Erfolg. Es gelingt allerdings die Primgraphfrage für G zu beweisen, indem die Gitter-Methode für eine Gruppe H angewendet wird, welche G enthält. Während dies in Satz 3.1.1 auf eine wenig überraschende Weise geschieht, da mit Hilfe der Clifford-Theorie $\text{Aut}(G)$ -Moduln bekanntermaßen starke Einschränkungen an G -Moduln liefern, passiert dies in Lemma 3.2.8 für die Gruppen $G = \text{PSL}(3, 4)$ und $H = M_{22}$, eine Erweiterung die im Sinne der Modultheorie auf den ersten Blick nicht besonders ausgezeichnet zu sein scheint. Dies legt nahe, auch für andere Gruppen passende Obergruppen zu betrachten bzw. zu konstruieren, um für diese die Gitter-Methode einzusetzen.

Anhang A

Die HeLP-Methode für fast-einfache Gruppen mit vier Primteilern

Die mittels der HeLP-Methode erzielten Ergebnisse für fast-einfache Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist, werden in folgender Tabelle zusammengefasst. Die Rechnungen beruhen im Wesentlichen auf den in der GAP character table library [Bre12] verfügbaren Daten. Die Tabelle ist wie folgt zu lesen:

- Die erste Spalte der Tabelle enthält einen oder mehrere übliche Namen der untersuchten Gruppe und, sofern vorhanden, in Schreibmaschinenschrift den Namen der Gruppe, mit dem in GAP [GAP15] die Charaktertafel aufgerufen werden kann.
- Die zweite Spalte enthält den Primgraph der entsprechenden Gruppe.
- Die dritte Spalte enthält die Ordnungen der Elemente, welche untersucht werden müssen, um die Primgraphfrage für die entsprechende Gruppe zu klären.

Hierbei wird die zu untersuchende Ordnung nur in der größten Gruppe angegeben, für die dies notwendig ist. Ist also H eine Untergruppe von G und enthalten sowohl G als auch H keine Elemente der Ordnung pq , so wird nur untersucht, ob $V(\mathbb{Z}G)$ Elemente der Ordnung pq enthält.

- Die vierte Spalte enthält die Charaktere, welche notwendig sind, um für die entsprechende Ordnung das mit Hilfe der HeLP-Methode maximal mögliche Ergebnis zu erzielen.

Es bezeichnet $\chi_{i/j\alpha}$ den i -ten Charakter der gewöhnlichen Charaktertafel wie sie sich in GAP findet. Dieser Charakter hat Grad j und existieren mehrere gewöhnliche irreduzible Charaktere vom Grad j , dann bezeichnet α , um welchen von diesen es sich handelt. Dabei bedeutet z.B. $\alpha = b$, dass es der zweite irreduzible Charakter vom Grad j ist. Es bezeichnet $\varphi_{i/j\alpha}^p$ einen p -Brauer Charakter aus der GAP-Bibliothek. Dabei sind die Indices i , j und α genauso zu lesen wie im gewöhnlichen Fall.

Für einige Gruppen G , deren Charaktertafeln sich in GAP nicht finden, werden induzierte Charaktere einer Untergruppe H verwendet, diese werden mit $\text{ind}_H(\chi_{i/j\alpha})$ angegeben, wobei das $\chi_{i/j\alpha}$ der entsprechende Charakter der Gruppe H ist.

Für einige der Gruppen oder einzelne Ordnungen wurde die Primgraphfrage bereits bewiesen, in diesem Fall finden sich Literaturverweise. Es treten außerdem noch weitere Ausnahmefälle ein:

- Für fast-einfache Gruppen, die einen Normalteiler isomorph zu $\text{PSL}(2, 49)$ enthalten, werden induzierte Charaktere verwendet, welche sich aus den Charakteren in Lemma 2.1.2 ergeben.
- Für die Serie $\text{PSL}(2, 2^f)$ werden Charaktere verwendet, die in Tabelle 2.1 angegeben sind. Für die $\text{PGL}(2, 3^f)$ werden die in Tabelle A.2 angegebenen Charaktere verwendet, diese finden sich in [Sch07].
- Für $\text{PSL}(3, 17).2$ findet sich keine Charaktertafel in GAP. Es wird ein Teil einer Charaktertafel verwendet, der mit Magma berechnet wurde und sich in Tabelle A.3 findet. Die Charaktertafel der $\text{PSL}(3, 17)$ findet sich außerdem in [SF73].
- Für die beiden Gruppen $\text{PSp}(4, 7).2$ und $\text{PSp}(4, 7)$ wird jeweils eine 5-dimensionale Darstellung über \mathbb{F}_7 verwendet, welche sich im ATLAS findet und deren Charakter in Tabelle A.4 angegeben ist. Diese Darstellung entsteht durch die Isomorphie der $\text{PSp}(4, 7)$ zur orthogonalen Gruppe $\text{P}\Omega(5, 7)$.
- Falls die HeLP-Methode nicht ausreicht, um die Existenz von Einheiten der angegebenen Ordnung in $V(\mathbb{Z}G)$ zu widerlegen, so enthält die fünfte Spalte die Anzahl der noch möglichen partiellen Augmentationen für eine Einheit entsprechender Ordnung.

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
S_7	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 7$	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/6a}, \chi_{6/14a}$	
"S7"	$\begin{array}{c} \\ 5 \end{array} \quad 7$	$3 \cdot 5$	$\chi_{5/20}$	
		$3 \cdot 7$	$\chi_{3/6a}, \chi_{5/20}$	
		$5 \cdot 7$	$\chi_{3/6a}$	
A_7	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 5$	[Sal11]	
"A7"	$\begin{array}{c} \\ 5 \end{array} \quad 7$			
S_8	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 7$	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/7a}, \chi_{5/14a}, \chi_{12/28a}$	
"S8"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 7$	$3 \cdot 7$	$\chi_{3/7a}, \chi_{7/20a}$	
		$5 \cdot 7$	$\chi_{3/7a}$	
A_8	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 5$	[Sal11]	
"A8"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 7$			
S_9	$2 \text{ --- } 3$	$3 \cdot 7$	$\chi_{3/8a}, \chi_{5/42a}, \chi_{6/27a}$	
"S9"	$\begin{array}{c} \times \\ 5 \end{array} \quad 7$	$5 \cdot 7$	$\chi_{3/8a}$	
A_9	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 7$	[Sal13]	
"A9"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 7$			
S_{10}	$2 \text{ --- } 3$	$5 \cdot 7$	$\chi_{3/9a}, \chi_{5/35a}$	
"S10"	$\begin{array}{c} \times \\ 5 \end{array} \quad 7$			
A_{10}	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 7$	[Sal13]	
"A10"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 7$			
$\text{PSL}(2, 16).4$	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 17$	$\chi_{7/16a}$	
"L2(16).4"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 17$	$3 \cdot 17$	$\chi_{7/16a}$	
		$5 \cdot 17$	$\chi_{7/16a}$	
$\text{PSL}(2, 16).2$	$2 \text{ --- } 3$			
"L2(16).2"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 17$			
$\text{PSL}(2, 16)$	$2 \text{ --- } 3$	$2 \cdot 3$	$\chi_{2/11a}, \chi_{11/17a}$	2
"L2(16)"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 17$	$2 \cdot 5$	$\chi_{12/17b}$	
$\text{PSL}(2, 25).2^2$	$2 \text{ --- } 3$	$3 \cdot 5$	$\chi_{17/26c}$	
"L2(25).2^2"	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 5 \end{array} \quad 13$	$3 \cdot 13$	$\chi_{5/26a}$	
		$5 \cdot 13$	$\chi_{5/26a}$	

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSL(2, 25).2c	2 — 3	2 · 5	$\chi_{11/26d}$	
"L2(25) . 2_3"	5 13	2 · 13	$\chi_{3/26a}, \chi_{4/48a}$	
PSL(2, 25).2b	2 — 3	2 · 13	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/13a}$	
"L2(25) . 2_2"	5 13			
PSL(2, 25).2a	2 — 3	2 · 5	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/26a}, \chi_{20/26d}$	
PGL(2, 25)	5 13			
"L2(25) . 2_1"				
PSL(2, 25)	2 — 3			
"L2(25) "	5 13			
PSL(2, 27).6	2 — 3	3 · 7	$\chi_{2/1b}, \chi_{7/26a}$	
"L2(27) . 6"	7 13	3 · 13	$\chi_{2/1b}, \chi_{7/26a}$	
		7 · 13	$\chi_{2/1b}, \chi_{7/26a}$	
PSL(2, 27).3	2 — 3	2 · 13	$\chi_{4/13a}$	
"L2(27) . 3"	7 13			
PSL(2, 27).2	2 3	2 · 3	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/26a}, \chi_{4/26b}$	4
PGL(2, 27)	7 13			
"L2(27) . 2"				
PSL(2, 27)	2 3			
"L2(27) "	7 13			
PSL(2, 49).2 ²	2 — 3	3 · 5	$\chi_{5/50a}, \text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_1)$	
"L2(49) . 2^2"	5 7	3 · 7	$\chi_{7/96a}$	
		5 · 7	$\chi_{5/50a}$	
PSL(2, 49).2c	2 — 3	2 · 5	$\text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_1),$	
"L2(49) . 2_3"	5 7		$\text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_2),$	
			$\text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_3)$	
		2 · 7	$\chi_{18/50g}$	
PSL(2, 49).2b	2 — 3	2 · 5	$\text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_1),$	
"L2(49) . 2_2"	5 7		$\text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_2),$	
			$\text{ind}_{\text{PSL}(2,49)}(\varphi_3)$	
PSL(2, 49).2a	2 — 3	2 · 7	$\chi_{2/1b}, \chi_{44/50g}$	
PGL(2, 49)	5 7			
"L2(49) . 2_1"				

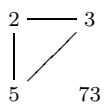
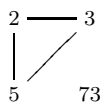
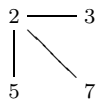
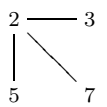
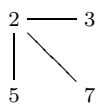
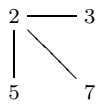
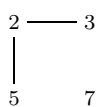
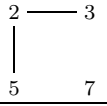
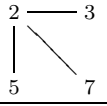
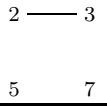
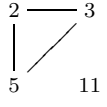
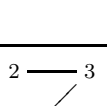
Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSL(2, 49) "L2(49)"	2 — 3 5 7			
PSL(2, 81) .(C2 × C4) "L2(81) . (2x4)"	2 — 3 \ 41 5	3 · 5 3 · 41 5 · 41	$\chi_{13/320a}, \chi_{33/164c}$ $\chi_{9/82a}$ $\chi_{9/82a}$	1
PSL(2, 81).4b "L2(81) . 4_2"	2 — 3 5 41	2 · 41	$\chi_{2/1b}, \chi_{5/82a}$	
PSL(2, 81).4a "L2(81) . 4_1"	2 — 3 5 41	2 · 41	$\chi_{2/1b}, \chi_{5/41a}$	
PSL(2, 81).2 ² "L2(81) . 2~2"	2 — 3 \ 41 5			
PSL(2, 81).2c "L2(81) . 2_3"	2 3 5 41	2 · 3	$\chi_{3/82a}, \chi_{32/164c}$	5
PSL(2, 81).2b PGL(2, 81) "L2(81) . 2_2"	2 3 \ 41 5	2 · 3	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/82a}, \chi_{52/82h}$	9
PSL(2, 81).2a "L2(81) . 2_1"	2 — 3 5 41			
PSL(2, 81) "L2(81)"	2 3 5 41			
PSL(2, p).2 PGL(2, p)	2 — 3 \ r p	2 · p 3 · p (3 · r) p · r	Satz 2.4.2 Satz 2.4.2 Satz 2.4.2 Satz 2.4.2	
PSL(2, p)	2 — 3 p r	(2 · 3)	Proposition 2.1.7d)	
PSL(2, 2 ^{f})	2 3 \ s r	2 · 3 2 · r 2 · s 3 · s r · s	θ_1, θ_3 (s. Tab. 2.1) Lemma 3.2.3 Lemma 3.2.3 Proposition 2.1.7d) Proposition 2.1.7d)	$\frac{2^{f-2}+1}{3}$

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSL(2, 3^f).2 PGL(2, 3^f)	$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & \diagdown \\ r & s \end{array}$	$2 \cdot 3$ $3 \cdot r$ $3 \cdot s$ $r \cdot s$	$\chi_{1b}, \chi_{(3^f-1)a}, \chi_{(3^f-1)b}$ (s. Tab. A.2) Lemma 3.2.3 Lemma 3.2.3 Satz 2.4.2	$3^{f-2} + 1$
PSL(2, 3^f)	$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & \\ r & s \end{array}$	$2 \cdot s$	Proposition 2.1.7d)	
PSL(3, 4). D_{12} "L3(4). D_{12} "	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagdown & \\ 5 & \times & 7 \end{array}$	$5 \cdot 7$	$\chi_{7/20a}$	
PSL(3, 4). S_3c "L3(4).3.2_3"	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagup & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$2 \cdot 7$	$\chi_{2/1b}, \chi_{4/20a}$	
PSL(3, 4). S_3b "L3(4).3.2_2"	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagdown & \\ 5 & \times & 7 \end{array}$	$2 \cdot 5$	$\chi_{2/1b}, \chi_{7/105a}$	
PSL(3, 4).6 "L3(4).6"	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagup & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$2 \cdot 5$ $2 \cdot 7$	$\chi_{2/1b}, \chi_{13/105a}$ $\chi_{2/1b}, \chi_{7/20a}$	
PSL(3, 4).3 PGL(3, 4) "L3(4).3"	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagup & \\ 5 & & 7 \end{array}$			
PSL(3, 4).2c "L3(4).2_3" U'gruppe . S_3c	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$3 \cdot 5$ $3 \cdot 7$	$\chi_{3/20a}$ $\chi_{3/20a}, \chi_{5/35a}$	
PSL(3, 4).2b "L3(4).2_2" U'gruppe . S_3b	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagdown & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$3 \cdot 5$ $3 \cdot 7$	$\chi_{3/20a}$ $\chi_{3/20a}, \chi_{5/35a}$	
PSL(3, 4).2a "L3(4).2_1" U'gruppe .6	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 3 \\ & & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$3 \cdot 5$ $3 \cdot 7$	$\chi_{3/20a}$ $\chi_{3/20a}, \chi_{5/35a}$	
PSL(3, 4) "L3(4)"	$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & \\ 5 & 7 \end{array}$	$2 \cdot 3$	$\chi_{3/35a}, \chi_{6/45a}$	2

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSL(3, 5).2	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 31 \end{array}$	$2 \cdot 31$	$\chi_{3/30a}, \chi_{6/31b}$	4
"L3(5) .2"		$3 \cdot 5$	$\chi_{3/30a}, \chi_{8/192a}, \chi_{13/124a}$	
		$3 \cdot 31$	$\chi_{3/30a}$	
		$5 \cdot 31$	$\chi_{3/30a}$	
PSL(3, 5)	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 31 \end{array}$			
PGL(3, 5)				
"L3(5) "				
PSL(3, 7). S_3	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$	$2 \cdot 19$	$\chi_{2/1b}, \chi_{4/56a}$	
"L3(7) . S_3 "		$7 \cdot 19$	$\chi_{4/56a}, \chi_{21/342a}$	
PSL(3, 7).3	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
PGL(3, 7)				
"L3(7) .3"				
PSL(3, 7).2	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 7 \quad 19 \end{array}$	$3 \cdot 7$	$\chi_{3/56a}, \chi_{7/152a},$	77
"L3(7) .2"			$\chi_{9/304}, \chi_{10/576a}$	
		$3 \cdot 19$	$\chi_{3/56a}, \chi_{7/152a}$	
PSL(3, 7)	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 7 \quad 19 \end{array}$			
"L3(7) "				
PSL(3, 8).6	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 73 \end{array}$	$2 \cdot 73$	$\chi_{7/72a}$	
"L3(8) .6"		$3 \cdot 73$	$\chi_{7/72a}$	
		$7 \cdot 73$	$\chi_{7/72a}, \chi_{18/511a}$	
PSL(3, 8).3	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 73 \end{array}$			
"L3(8) .3"				
PSL(3, 8).2	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 73 \end{array}$			
"L3(8) .2"				
PSL(3, 8)	$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 73 \end{array}$	$2 \cdot 3$	$\chi_{2/7a}, \chi_{9/441a}$	2
PGL(3, 8)				
"L3(8) "				
PSL(3, 17).2	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 17 \quad 307 \end{array}$	$2 \cdot 307$	χ_{4912}	42
---		$3 \cdot 17$	$\chi_{306}, \chi_{4912}, \chi_{9216}$	
		$3 \cdot 307$	χ_{306}	
		$17 \cdot 307$	χ_{4912}	
			(s. Char. in Tab. A.3)	

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSL(3, 17) ---	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 17 \end{array}$	307		
PSL(4, 3).2 ² "L4(3).2 ² "	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad \diagdown \\ 5 \quad 13 \end{array}$	3 · 5 3 · 13 5 · 13	$\chi_{5/39a}, \chi_{9/52a}, \chi_{16/260a}$ $\chi_{5/39a}, \chi_{11/90a}, \chi_{16/260a}$ $\chi_{5/39a}$	
PSL(4, 3).2c "L4(3).2_3"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 13 \end{array}$	2 · 13	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/52a}, \chi_{4/39a}$	
PSL(4, 3).2b "L4(3).2_2"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 13 \end{array}$	2 · 13	$\varphi_{2/1b}^3, \varphi_{3/6a}^3, \varphi_{5/20}^3$	
PSL(4, 3).2a PGL(4, 3) "L4(3).2_1"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad \diagdown \\ 5 \quad 13 \end{array}$			
PSL(4, 3) "L4(3)"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 13 \end{array}$			
PSU(3, 4).4 "U3(4).4"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad \diagdown \\ 5 \quad 13 \end{array}$	2 · 13 3 · 13 5 · 13	$\chi_{2/1b}, \chi_{5/12a}$ $\chi_{5/12a}$ $\chi_{5/12a}, \chi_{9/52}$	
PSU(3, 4).2 "U3(4).2"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad \diagdown \\ 5 \quad 13 \end{array}$			
PSU(3, 4) "U3(4)"	$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \quad \diagdown \\ 5 \quad 13 \end{array}$	2 · 3	$\chi_{7/39a}$	1
PSU(3, 5).S ₃ "U3(5).S3"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad \diagdown \quad \\ 5 \quad 7 \end{array}$	2 · 7 5 · 7	$\chi_{2/1b}, \chi_{4/20a}$ $\chi_{4/20a}, \chi_{10/84a}$	
PSU(3, 5).3 "U3(5).3"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad \diagdown \quad \\ 5 \quad 7 \end{array}$			
PSU(3, 5).2 "U3(5).2"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 7 \end{array}$	3 · 5 3 · 7	$\chi_{3/20a}, \chi_{7/28a}, \chi_{9/56}$ $\chi_{7/28a}$	
PSU(3, 5) "U3(5)"	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 5 \quad 7 \end{array}$			

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSU(3, 7).2	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 7 \quad 43 \end{array}$	$2 \cdot 43$	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/42a}$	
"U3(7) . 2"	$\begin{array}{c} \\ 7 \quad 43 \end{array}$	$3 \cdot 7$	$\chi_{3/42a}, \chi_{10/258a}, \chi_{29/688a}$	4
		$3 \cdot 43$	$\chi_{3/42a}$	
		$7 \cdot 43$	$\chi_{3/42a}$	
PSU(3, 7)	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \\ 7 \quad 43 \end{array}$			
"U3(7) "	$\begin{array}{c} \\ 7 \quad 43 \end{array}$			
PSU(3, 8)	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$	$2 \cdot 19$	$\text{ind}_{U_3(8)}(\chi_{2/56}),$	
$\cdot(C_3 \times S_3)$	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$		$\text{ind}_{U_3(8)}(\chi_{3/57a})$	
---		$7 \cdot 19$	$\text{ind}_{U_3(8)}(\chi_{2/56})$	
PSU(3, 8).3 ²	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$	$2 \cdot 7$	$\text{ind}_{U_3(8)}(\chi_{2/56}),$	
---			$\text{ind}_{U_3(8)}(\chi_{5/133a})$	
PSU(3, 8).S ₃	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
"U3(8) . S3"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
PSU(3, 8).6	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$	$3 \cdot 19$	$\chi_{7/56a}, \chi_{13/114a}, \chi_{16/133a}$	
"U3(8) . 6"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
PSU(3, 8).3c	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
"U3(8) . 3_3"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
U'gruppe .6				
PSU(3, 8).3b	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
"U3(8) . 3_2"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
U'gruppe .S ₃				
PSU(3, 8).3a	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
"U3(8) . 3_1"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
PSU(3, 8).2	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
"U3(8) . 2"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
PSU(3, 8)	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
"U3(8) "	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 7 \quad \quad 19 \end{array}$			
PSU(3, 9).4	$\begin{array}{c} 2 \text{ --- } 3 \\ \quad / \quad \\ 5 \quad \quad 73 \end{array}$	$2 \cdot 73$	$\chi_{2/1b}, \chi_{5/72a}$	
"U3(9) . 4"	$\begin{array}{c} \quad / \quad \\ 5 \quad \quad 73 \end{array}$	$3 \cdot 73$	$\chi_{5/72a}, \chi_{15/1168a}$	
		$5 \cdot 73$	$\chi_{5/72a}, \chi_{13/292a}$	

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSU(3, 9).2 "U3(9) . 2"				
PSU(3, 9) "U3(9) "				
PSU(4, 3).D ₈ "U4(3) . D8"		3 · 5 3 · 7 5 · 7	$\chi_{6/21a}, \chi_{11/70a}, \chi_{41/420a}$ $\chi_{6/21a}, \chi_{11/70a}, \chi_{41/420a}$ $\chi_{6/21a}$	
PSU(4, 3).4 "U4(3) . 4"				
PSU(4, 3).2 ^{2b} "U4(3) . (2^2) {133}"				
PSU(4, 3).2 ^{2a} "U4(3) . (2^2) {122}"				
PSU(4, 3).2c "U4(3) . 2_3"		2 · 7	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/21a}$	
PSU(4, 3).2b "U4(3) . 2_2"		2 · 7	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/21a}, \chi_{9/90a}$	
PSU(4, 3).2a "U4(3) . 2_1"				
PSU(4, 3) "U4(3) "		2 · 5	$\chi_{3/35a}$	
PSU(5, 2).2 "U5(2) . 2"		2 · 11 3 · 11 5 · 11	$\chi_{2/1b}, \chi_{3/10a}, \chi_{11/132}$ $\chi_{3/10a}, \chi_{5/22}, \chi_{8/55a},$ $\chi_{10/110a}$ $\chi_{3/10a}$	
PSU(5, 2) "U5(2) "		2 · 5	$\chi_{2/10a}, \chi_{6/55a}$	

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
PSp(4, 4).4		$2 \cdot 17$	$\chi_{2/1b}, \chi_{5/18a}, \chi_{9/68a}$	
"S4(4) . 4"		$3 \cdot 17$	$\chi_{5/18a}$	
		$5 \cdot 17$	$\chi_{5/18a}, \chi_{9/68a}$	
PSp(4, 4).2				
"S4(4) . 2"				
PSp(4, 4)				
"S4(4) "				
PSp(4, 5).2		$3 \cdot 13$	$\chi_{3/26a}, \chi_{4/40a}$	
"S4(5) . 2"		$5 \cdot 13$	$\chi_{3/26a}, \chi_{13/104a},$ $\chi_{19/130a}, \chi_{23/416}$	
PSp(4, 5)		$2 \cdot 13$	$\chi_{2/13a}, \chi_{4/40}$	
"S4(5) "				
PSp(4, 7).2		$3 \cdot 5$	$\chi_{3/50a}, \chi_{7/175a},$ ATLAS (s. Tab. A.4)	
"S4(7) . 2"		$5 \cdot 7$	$\chi_{3/50}, \chi_{4/126a}, \chi_{6/300a},$ $\chi_{7/175a}, \chi_{7/175c}, \chi_{11/224a},$ $\chi_{15/300d}, \chi_{21/350a}, \chi_{23/400a}$	
PSp(4, 7)		$2 \cdot 5$	$\chi_{4/126a}, \chi_{8/175b},$ ATLAS (s. Tab. A.4)	
"S4(7) "				
PSp(4, 9).2 ²		$3 \cdot 41$	$\chi_{5/82a}, \chi_{7/288a}, \chi_{11/369a}$	
"S4(9) . 2~2"		$5 \cdot 41$	$\chi_{21/450a}$	
PSp(4, 9).2c		$2 \cdot 41$	$\chi_{3/82}, \chi_{4/288a}$	
"S4(9) . 2_3"				
PSp(4, 9).2b				
"S4(9) . 2_2"				
PSp(4, 9).2a		$2 \cdot 41$	$\chi_{3/41a}, \chi_{4/41b}, \chi_{7/288a}$	
"S4(9) . 2_1"				
PSp(4, 9)				
"S4(9) "				

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
$\mathrm{PSp}(6, 2)$ "S6(2)"	$\begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagdown & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$2 \cdot 7$ $3 \cdot 7$ $5 \cdot 7$	$\chi_{2/7a}, \chi_{3/15a}, \chi_{4/21a},$ $\chi_{6/27a}$ $\chi_{2/7a}, \chi_{3/15a}, \chi_{4/21a}$ $\chi_{2/7a}$	
$\mathrm{P}\Omega_+(8, 2).S_3$ "08+(2).3.2"	$\begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \times & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$5 \cdot 7$	$\chi_{4/28a}$	
$\mathrm{P}\Omega_+(8, 2).3$ "08+(2).3"	$\begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagdown & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$2 \cdot 7$	$\chi_{4/28a}, \chi_{7/105a}$	
$\mathrm{P}\Omega_+(8, 2).2$ "08+(2).2"	$\begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \times & \\ 5 & & 7 \end{array}$	$3 \cdot 7$	$\chi_{3/28a}, \chi_{5/35a},$ $\chi_{7/70a}, \chi_{10/84a}$	
$\mathrm{P}\Omega_+(8, 2)$ "08+(2)"	$\begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 3 \\ & \diagdown & \\ 5 & & 7 \end{array}$			
$Sz(8)$ "Sz(8)"	$\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ & \\ 7 & 13 \end{array}$	$2 \cdot 5$ $2 \cdot 7$ $2 \cdot 13$ $5 \cdot 7$ $5 \cdot 13$ $7 \cdot 13$	$\chi_{4/35a}$ $\chi_{4/35a}$ $\chi_{2/14a}$ $\chi_{2/14a}$ $\chi_{2/14a}$ (s. [Bäc08, Kor. 4.2])	
$Sz(32).5$ "Sz(32).5"	$\begin{array}{cc} 2 & \text{---} & 5 \\ & \\ 31 & & 41 \end{array}$	$2 \cdot 31$ $2 \cdot 41$ $5 \cdot 31$ $5 \cdot 41$ $31 \cdot 41$	$\chi_{6/124a}, \chi_{18/1024a}$ $\chi_{6/124a}$ $\chi_{6/124a}$ $\chi_{6/124a}$ $\chi_{6/124a}$	
$Sz(32)$ "Sz(32)"	$\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ & \\ 31 & 41 \end{array}$	$2 \cdot 5$	$\chi_{2/124a}$	2
$G_2(3).2$ "G2(3).2"	$\begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 3 \\ & & \\ 7 & & 13 \end{array}$	$2 \cdot 13$ $3 \cdot 7$ $3 \cdot 13$ $7 \cdot 13$	$\chi_{14/104a}, \chi_{20/896}$ $\chi_{3/14a}, \chi_{5/64a},$ $\chi_{9/78a}, \chi_{11/91a}, \chi_{20/896a}$ $\chi_{3/14a}, \chi_{5/64a}, \chi_{11/91a}$ $\chi_{3/14a}$	2

Gruppe G	$\Gamma(G)$	$o(u)$	Charaktere	# Lösungen
$G_2(3)$	2 — 3	2 · 7	$\chi_{2/14a}$	
"G2(3)"	7 13			
${}^3D_4(2).3$	2 — 3	2 · 13	$\chi_{4/26a}, \chi_{10/196a}$	
"3D4(2).3"	7 13	3 · 13	$\varphi_{4/24}^2, \varphi_{5/26a}^2, \varphi_{10/246a}^2$	
		7 · 13	$\chi_{4/26a}, \chi_{7/52a}$	
${}^3D_4(2)$	2 — 3			
"3D4(2)"	7 13			
${}^2F_4(2)'.2$	2 — 3	2 · 13	$\chi_{8/78a}, \chi_{10/300a}$	
"2F4(2)'.2"	5 13	3 · 5	$\chi_{4/27a}$	
		3 · 13	$\chi_{4/27a}$	
		5 · 13	$\chi_{4/27a}$	
${}^2F_4(2)'$	2 — 3			
"2F4(2)'"	5 13			
M_{11}	2 — 3	2 · 5	[BK07]	
"M11"	5 11	2 · 11		
		3 · 5		
		3 · 11		
		5 · 11		
$M_{12}.2$	2 — 3	2 · 11	[KK13]	
"M12.2"	5 11	3 · 5		
		3 · 11		
		5 · 11		
M_{12}	2 — 3			
"M12"	5 11			
$J2.2$	2 — 3	3 · 7	[KK13]	
"J2.2"	5 7	5 · 7		
$J2$	2 — 3	2 · 7	[BJK11]	
"J2"	5 7			

Tabelle A.1: Ergebnisse der Anwendung der HeLP-Methode auf alle fast-einfachen Gruppen, deren Ordnung durch genau vier paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist.

	$1a$	$2a$	$2b$	$3a$
χ_{1b}	1	1	-1	1
$\chi_{(3^f-1)a}$	$3^f - 1$	2	0	-1
$\chi_{(3^f-1)b}$	$3^f - 1$	-2	0	-1

Tabelle A.2: Teil der gewöhnlichen Charaktertafel der $\mathrm{PSL}(2, 3^f).2 \cong \mathrm{PGL}(2, 3^f)$ für ungerades f .

	$1a$	$2a$	$2b$	$3a$	$17a$	$17b$	$307x$
χ_{306}	306	18	0	0	17	0	-1
χ_{4912}	4912	16	16	1	-1	-1	0
χ_{9216}	9216			0	-32	2	

Tabelle A.3: Teil der Charaktertafel der $\mathrm{PSL}(3, 17).2$. Hierbei bezeichnet $307x$ jede Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 307.

	$1a$	$2a$	$2b$	$3a$	$3b$	$5a$
φ	5	-3	1	2	-1	0

Tabelle A.4: Teil des 7-modularen ATLAS-Charakters der $\mathrm{PSp}(4, 7).2$. Dabei liegen $2a$ und $2b$ in $\mathrm{PSp}(4, 7)$.

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen, der natürlichen Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Menge der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen
$\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$	Menge der p -adischen Zahlen, der p -adischen ganzen Zahlen
\mathbb{F}_{p^f}	Endlicher Körper mit p^f Elementen
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	Der Restklassenring von \mathbb{Z} modulo p
$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$	Die Einheiten in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
ζ_n	Eine primitive n -te Einheitswurzel
$d \mid n, d \nmid n$	d teilt n bzw. d teilt nicht n
$\text{ggT}(n, m)$	Größter gemeinsamer Teiler der Zahlen m und n
$a \equiv b \pmod{n}$	a ist kongruent b modulo n
$a \equiv b \pmod{n}$	
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Delta
$\varphi(n)$	(In manchen Fällen) die Eulersche φ -Funktion
$\mu(n)$	(In manchen Fällen) die Möbius-Funktion
ϵ	I.d.R. ein Vorzeichen
$\left(\frac{n}{k}\right)$	Das Jacobi-Symbol von n bezüglich k
$\text{Tr}_{L/K}$	Die zahlentheoretische Spur der Körpererweiterung L/K
$R[x]$	Polynomring über R mit Variable x
$K^{n \times n}$	$n \times n$ -Matrixring über K
$A \sim (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$	Die Matrix A besitzt inklusive Vielfachheiten die Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_m$
$A \sim (a_1 \times (\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k_1}^1), \dots, a_m \times (\alpha_1^m, \dots, \alpha_{k_m}^m))$	Die Matrix A besitzt inklusive Vielfachheiten a_1 Mal die Eigenwerte $\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k_1}^1$ und ... und a_m Mal die Eigenwerte $\alpha_1^m, \dots, \alpha_{k_m}^m$
RG	Der Gruppenring der Gruppe G über dem Ring R

$I(RG)$	Das Augmentationsideal eines Gruppenrings RG
ε	Die Augmentationsabbildung eines Gruppenrings
$\varepsilon_g(u)$	Die partielle Augmentation eines Gruppenringelements u bezüglich einem Gruppenelement g
$\mu(\xi, u, \chi)$	Die Vielfachheit einer Einheitswurzel ξ als Eigenwert der Matrix $D(u)$, wobei D eine zum Charakter χ korrespondierende Darstellung bezeichnet
$\mathbb{Q}(\chi)$	Der Charakterkörper eines gewöhnlichen Charakters χ
$\langle \chi, \psi \rangle_G$	Das Skalarprodukt der G -Charaktere χ und ψ als Elemente der Klassenfunktionen von G
$\text{soc}(M)$	Der Sockel des Moduls M
$\text{rad}(M)$	Das Radikal des Moduls M
L^i	Gewisser Teil eines Gitters, s. Proposition 1.3.2
$c_{\nu\mu}^\lambda$	Littlewood-Richardson-Koeffizient bezüglich der Partitionen λ, μ, ν , s. Bemerkung 1.3.10
$U \leq G$	U ist Untergruppe von G
$U \trianglelefteq G$	U ist Normalteiler von G
$G \times H$	Direktes Produkt der Gruppen G und H
$G \rtimes H$	Semidirektes Produkt der Gruppen G und H
$G \cong H$	Die Gruppen G und H sind isomorph
$ G $	Ordnung der endlichen Gruppe G
$\circ(g)$	Ordnung eines Gruppenelements g
$\langle g \rangle$	Von einem Gruppenelement g erzeugte zyklische Gruppe
$Z(G)$	Zentrum der Gruppe G
x^G	Konjugationsklasse des Elements x in der Gruppe G
$\text{Aut}(G)$	Automorphismengruppe der Gruppe G
$G.2$	Eine Erweiterung der Gruppe G vom Grad 2, in welcher G normal ist
C_n	Zyklische Gruppe der Ordnung n
A_n	Alternierende Gruppe vom Grad n
S_n	Symmetrische Gruppe vom Grad n
M_i	Mathieugruppe vom Grad i
$\text{GL}(n, q)$	Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über einem Körper mit q Elementen
$\text{SL}(n, q)$	Gruppe der Matrizen mit Determinante 1 über einem Körper mit q Elementen

$\text{PGL}(n, q)$	Projektive generelle lineare Gruppe vom Grad n über einem Körper mit q Elementen
$\text{PSL}(n, q)$	Projektive spezielle lineare Gruppe vom Grad n über einem Körper mit q Elementen
$\text{PSU}(n, q)$	Projektive spezielle unitäre Gruppe vom Grad n über einem Körper mit q Elementen
$\text{PSp}(n, q)$	Projektive spezielle symplektische Gruppe vom Grad n über einem Körper mit q Elementen
$\text{P}\Omega_+(n, q)$	Sockel der speziellen orthogonalen Gruppe vom Grad n über einem Körper mit q Elementen mit zugehöriger elliptischer quadratischer Form
$\text{Sz}(q)$	Suzuki-Gruppe über einem Körper mit q Elementen

Literaturverzeichnis

- [AH80] P. J. Allen and C. Hobby, *A characterization of units in $\mathbf{Z}[A_4]$* , J. Algebra **66** (1980), no. 2, 534–543.
- [AH88] ———, *A characterization of units in $\mathbf{Z}S_4$* , Comm. Algebra **16** (1988), no. 7, 1479–1505.
- [Alp86] J. L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Modular representations as an introduction to the local representation theory of finite groups.
- [Ari07] *Mini-Workshop: Arithmetik von Gruppenringen*, Oberwolfach Rep. **4** (2007), no. 4, 3209–3239, Abstracts from the mini-workshop held November 25–December 1, 2007, Organized by Eric Jespers, Zbigniew Marciniak, Gabriele Nebe and Wolfgang Kimmerle, Oberwolfach Reports. Vol. 4, no. 4.
- [Bäc08] A. Bächle, *Über die erste Zassenhausvermutung für die Suzuki-Gruppe $Sz(q)$* , Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Oktober 2008.
- [BCM01] Y. Bugeaud, Z. Cao, and M. Mignotte, *On simple K_4 -groups*, J. Algebra **241** (2001), no. 2, 658–668.
- [Ber55] S. D. Berman, *On the equation $x^m = 1$ in an integral group ring*, Ukrain. Mat. Ž. **7** (1955), 253–261.
- [BH08] V. A. Bovdi and M. Hertweck, *Zassenhaus conjecture for central extensions of S_5* , J. Group Theory **11** (2008), no. 1, 63–74.

- [BHK04] V. Bovdi, C. Höfert, and W. Kimmerle, *On the first Zassenhaus conjecture for integral group rings*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 3-4, 291–303.
- [BJK11] V. A. Bovdi, E. Jespers, and A. B. Konovalov, *Torsion units in integral group rings of Janko simple groups*, Math. Comp. **80** (2011), no. 273, 593–615.
- [BK07] V. A. Bovdi and A. B. Konovalov, *Integral group ring of the first Mathieu simple group*, Groups St. Andrews 2005. Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 339, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 237–245.
- [BK11] A. Bächle and W. Kimmerle, *On torsion subgroups in integral group rings of finite groups*, J. Algebra **326** (2011), 34–46.
- [BKL08] V. A. Bovdi, A. B. Konovalov, and S. Linton, *Torsion units in integral group ring of the Mathieu simple group M_{22}* , LMS J. Comput. Math. **11** (2008), 28–39.
- [Ble93] F. M. Bleher, *Zassenhaus-Vermutung und einfache Gruppen*, Master’s thesis, Universität Stuttgart, 1993.
- [Ble95a] ———, *Automorphismen von Gruppenringen und Blocktheorie*, Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1995.
- [Ble95b] ———, *Tensor products and a conjecture of Zassenhaus*, Arch. Math. (Basel) **64** (1995), no. 4, 289–298.
- [BM14a] A. Bächle and L. Margolis, *Rational conjugacy of torsion units in integral group rings of non-solvable groups*, arXiv:1305.7419 [math.RA], 2014.
- [BM14b] ———, *Torsion subgroups in the units of the integral group ring of $PSL(2, p^3)$* , arXiv:1412.7700 [math.RA], 2014.
- [BN41] R. Brauer and C. Nesbitt, *On the modular characters of groups*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 556–590.
- [Bre12] T. Breuer, *The GAP Character Table Library, Version 1.2.1*, <http://www.math.rwth-aachen.de/~Thomas.Breuer/ctbllib>, May 2012, GAP package.

- [Bur76] R. Burkhardt, *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $\mathrm{PSL}(2, p^f)$* , J. Algebra **40** (1976), no. 1, 75–96.
- [CL65] J. A. Cohn and D. Livingstone, *On the structure of group algebras. I*, Canad. J. Math. **17** (1965), 583–593.
- [CMdR13] M. Caicedo, L. Margolis, and Á. del Río, *Zassenhaus conjecture for cyclic-by-abelian groups*, J. Lond. Math. Soc. (2) **88** (2013), no. 1, 65–78.
- [CR90] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Dic01] L. E. Dickson, *Linear groups: With an exposition of the Galois field theory*, Teubner, Leipzig, 1901.
- [Die71] J. A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5.
- [Die85] E. Dieterich, *Representation types of group rings over complete discrete valuation rings. II*, Orders and their applications (Oberwolfach, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1142, Springer, Berlin, 1985, pp. 112–125.
- [DJ96] M. A. Dokuchaev and S. O. Juriaans, *Finite subgroups in integral group rings*, Canad. J. Math. **48** (1996), no. 6, 1170–1179.
- [Dor71] L. Dornhoff, *Group representation theory. Part A: Ordinary representation theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971, Pure and Applied Mathematics, 7.
- [Fei71] W. Feit, *The current situation in the theory of finite simple groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 55–93.
- [Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With applications to representation theory and geometry.

- [GAP15] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.7*, 2015.
- [Gau11] C. F. Gauß, *Summatio quarundam serium singularium*, Commentationes soc. reg. sc. Gotting. recentiores **1** (1811), Auf Deutsch erschienen in: Untersuchungen über höhere Arithmetik, C. F. Gauss, Chelsea Publishing, New York, 1965.
- [Gil13] J. Gildea, *Zassenhaus conjecture for integral group ring of simple linear groups*, J. Algebra Appl. **12** (2013), no. 6, 1350016, 10.
- [Gud67] P. M. Gudivok, *Representations of finite groups over number rings*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 799–834.
- [HB82a] B. Huppert and N. Blackburn, *Finite groups. II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, AMD, 44.
- [HB82b] ———, *Finite groups. III*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 243, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [Her98] M. Hertweck, *Eine Lösung des Isomorphieproblems für ganzzahlige Gruppenringe von endlichen Gruppen*, Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1998.
- [Her01] ———, *A counterexample to the isomorphism problem for integral group rings*, Ann. of Math. (2) **154** (2001), no. 1, 115–138.
- [Her06] ———, *On the torsion units of some integral group rings*, Algebra Colloq. **13** (2006), no. 2, 329–348.
- [Her07] ———, *Partial augmentations and Brauer character values of torsion units in group rings*, arXiv:0612429v2 [math.RA], 2004 – 2007.
- [Her08a] ———, *Torsion units in integral group rings of certain metabelian groups*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **51** (2008), no. 2, 363–385.

- [Her08b] ———, *Unit groups of integral finite group rings with no noncyclic abelian finite p -subgroups*, *Comm. Algebra* **36** (2008), no. 9, 3224–3229.
- [Her08c] ———, *Zassenhaus conjecture for A_6* , *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **118** (2008), no. 2, 189–195.
- [HHK09] M. Hertweck, C. Höfert, and W. Kimmerle, *Finite groups of units and their composition factors in the integral group rings of the group $\text{PSL}(2, q)$* , *J. Group Theory* **12** (2009), no. 6, 873–882.
- [Hig40a] G. Higman, *Units in group rings*, D. phil. thesis, Oxford Univ., 1940.
- [Hig40b] ———, *The units of group-rings*, *Proc. London Math. Soc.* (2) **46** (1940), 231–248.
- [HL00] B. Huppert and W. Lempken, *Simple groups of order divisible by at most four primes*, *Proc. F. Scorina Gomel State University* **16** (2000), no. 3, 64–75.
- [HP72] I. Hughes and K. R. Pearson, *The group of units of the integral group ring ZS_3* , *Canad. Math. Bull.* **15** (1972), 529–534.
- [HS15] A. Herman and G. Singh, *Revisiting the Zassenhaus Conjecture on torsion units for the integral group rings of small groups*, *Erscheint in Pro. Mat. Sci. Ind. Ac. Sci.* (2015).
- [Hup67] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [Hö08] C. Höfert, *Bestimmung von Kompositionsfaktoren endlicher Gruppen aus Burnsideringen und ganzzahligen Gruppenringen*, *Doktorarbeit, Universität Stuttgart*, 2008.
- [Isa76] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976, *Pure and Applied Mathematics, No. 69*.
- [Jor07] H. E. Jordan, *Group-Characters of Various Types of Linear Groups*, *Amer. J. Math.* **29** (1907), no. 4, 387–405.

- [JPM00] S. O. Juriaans and C. Polcino Milies, *Units of integral group rings of Frobenius groups*, J. Group Theory **3** (2000), no. 3, 277–284.
- [Kim06] W. Kimmerle, *On the prime graph of the unit group of integral group rings of finite groups*, Groups, rings and algebras, Contemp. Math., vol. 420, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 215–228.
- [Kim07] ———, *Torsion units in integral group rings of finite insoluble groups*, Oberwolfach Reports **4** (2007), no. 4, 3229–3230, Abstracts from the mini-workshop held November 25–December 1, 2007, Organized by Eric Jespers, Zbigniew Marciniak, Gabriele Nebe, and Wolfgang Kimmerle.
- [Kim15] ———, *Sylow like theorems for $V(\mathbb{Z}G)$* , erscheint in Int. J. Gr. Th. (2015), 1–10.
- [KK11] A.S. Kondrat'ev and I.V. Khramtsov, *On finite tetraprimary groups*, Tr. IMM UrO RAN **17** (2011), no. 4, 142–159 (Russisch), Englische Version in Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) 279 (2012), no. 1, 43–61.
- [KK12] W. Kimmerle and A. B. Konovalov, *On the Prime Graph Question of the Unit Group of Integral Group Rings of Finite Groups II*, www.mathematik.uni-stuttgart.de/preprints/downloads/2012/2012-018.pdf, 2012.
- [KK13] ———, *Recent advances on torsion subgroups of integral group rings*, Erscheint in Proc. of Groups St Andrews 2013 (2013), 1–17.
- [KR93] W. Kimmerle and K. W. Roggenkamp, *A Sylow-like theorem for integral group rings of finite solvable groups*, Arch. Math. (Basel) **60** (1993), no. 1, 1–6.
- [LP89] I. S. Luthar and I. B. S. Passi, *Zassenhaus conjecture for A_5* , Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **99** (1989), no. 1, 1–5.
- [LT91] I. S. Luthar and P. Trama, *Zassenhaus conjecture for S_5* , Comm. Algebra **19** (1991), no. 8, 2353–2362.

- [Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [Mar14] L. Margolis, *A Sylow theorem for the integral group ring of $PSL(2, q)$* , arXiv:1408.6075 [math.RA], 2014.
- [MRSW87] Z. Marciniak, J. Ritter, S. K. Sehgal, and A. Weiss, *Torsion units in integral group rings of some metabelian groups II*, J. Number Theory **25** (1987), no. 3, 340–352.
- [Neu92] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Rog91] K. W. Roggenkamp, *Observations on a conjecture of Hans Zassenhaus*, Groups—St. Andrews 1989, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 160, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, pp. 427–444.
- [RS87] K. W. Roggenkamp and L. L. Scott, *Isomorphisms of p -adic group rings*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 3, 593–647.
- [Sal11] M. Salim, *Kimmerle’s conjecture for integral group rings of some alternating groups*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) **27** (2011), no. 1, 9–22.
- [Sal13] ———, *The prime graph conjecture for integral group rings of some alternating groups*, Int. J. Group Theory **2** (2013), no. 1, 175–185.
- [San81] R. Sandling, *Graham Higman’s thesis “Units in group rings”*, Integral representations and applications (Oberwolfach, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 882, Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 93–116.
- [San85] ———, *The isomorphism problem for group rings: a survey*, Orders and their applications (Oberwolfach, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1142, Springer, Berlin, 1985, pp. 256–288.

- [Sch07] I. Schur, *Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **132** (1907), 85–137.
- [Sco92] L. L. Scott, *On a conjecture of Zassenhaus, and beyond*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 325–343.
- [Seh84] S. K. Sehgal, *Torsion units in group rings*, Methods in ring theory (Antwerp, 1983), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 129, Reidel, Dordrecht, 1984, pp. 497–504.
- [Seh93] ———, *Units in integral group rings*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 69, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993, With an appendix by Al Weiss.
- [SF73] W. A. Simpson and J. S. Frame, *The character tables for $SL(3, q)$, $SU(3, q^2)$, $PSL(3, q)$, $PSU(3, q^2)$* , Canad. J. Math. **25** (1973), 486–494.
- [Sha92] J. Shamash, *Blocks and Brauer trees for the groups $G_2(2^k)$, $G_2(3^k)$* , Comm. Algebra **20** (1992), no. 5, 1375–1387.
- [Shi91] W.J. Shi, *On simple K_4 -groups*, Chinese Science Bull. **36** (1991), no. 17, 1281–1283.
- [Sri64] B. Srinivasan, *On the modular characters of the special linear group $SL(2, p^n)$* , Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 101–114.
- [SS83] M. A. Shahabi Shojaei, *Schur indices of irreducible characters of $SL(2, q)$* , Arch. Math. (Basel) **40** (1983), no. 3, 221–231.
- [SW86] S. K. Sehgal and A. Weiss, *Torsion units in integral group rings of some metabelian groups*, J. Algebra **103** (1986), no. 2, 490–499.

- [Val94] A. Valenti, *Torsion units in integral group rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 1, 1–4.
- [Wag95] R. Wagner, *Zassenhausvermutung über die Gruppen $\mathrm{PSL}(2, p)$* , Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Mai 1995.
- [Wei88] A. Weiss, *Rigidity of p -adic p -torsion*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 2, 317–332.
- [Wei91] ———, *Torsion units in integral group rings*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 175–187.
- [Whi13] D. L. White, *Character degrees of extensions of $\mathrm{PSL}_2(q)$ and $\mathrm{SL}_2(q)$* , J. Group Theory **16** (2013), no. 1, 1–33.
- [Wil09] R. A. Wilson, *The finite simple groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 251, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2009.
- [Zas74] H. J. Zassenhaus, *On the torsion units of finite group rings*, Studies in mathematics (in honor of A. Almeida Costa) (Portuguese), Instituto de Alta Cultura, Lisbon, 1974, pp. 119–126.
- [ŽK67] È. M. Žmud and G. Č. Kurennoĭ, *The finite groups of units of an integral group ring*, Vestnik Har’kov. Gos. Univ. **1967** (1967), no. 26, 20–26.

