ü/3

Doklady AN SSSR 149(1963) 2, S. 288-291

KYBERNETIK UND THEORIE DER REGELUNG

Jakubovič, V.A.: Frequenzgangbedingungen für die absolute Stabilität von Regelungssystemen mit Hysterese

(Vorgelegt vom Mitglied der Akademie V.I. Smirnov am 18. IX. 1962)

Im folgenden bezeichnen wir, soweit nicht etwas anderes gesagt wird, mit großen lateinischen Buchstaben die [1] -Matrizen, mit kleinen lateinischen Buchstaben die [2] -Vektorspalten (Ausnahme: t - Zeit) und mit griechischen Buchstaben die Skalarwerte. Die Matrizen, Vektoren und Zahlen sind reell; I ist die Einheitsmatrix.

1°. Wir untersuchen die Systeme (s. ([1-5]) u.a.)

(1)

wobei [3] die Hysterese- oder Relais-Hysteresefunktion ist (s. Zeichnung 1, wo diese "Funktionen" für [4] dargestellt sind). Wir geben eine genaue Definition der Hysteresefunktion.

D e f i n i t i o n 1. Wir bezeichnen mit [5] die Menge der für [6] stetigen Funktionen [7] , so daß [8] . Wir setzen voraus, daß: 1) jedem beliebigen [9] eine gewisse Menge [10] der "Anfangswerte der Hysteresefunktion" (s. Zeichnung 1) zugeordnet ist; 2) für beliebige [11] und [12] ein Operator [13] gegeben ist, der die Menge [14] in [15] darstellt; 3) die Beziehungen [16] , [17] gelten, wobei [18] die entsprechende Funktion und [19] ihr Wert im Punkt [20] ist; 4) wenn [21] bei [22] und [23] bei [24] , wobei [25] , dann [26] bei [27] und [28] bei [29] gilt, wobei [30] . Bei Erfüllung dieser Bedingungen bezeichnen wir die Schar der Darstellungen von [31] als s t e t i g e H y s t e r e s e f u n k t i o n . Wenn alle diese Darstellungen stetig sind, wird die Hysteresefunktion als s t a r k s t e t i g bezeichnet.

Es sind auch andere Definitionen ähnlichen Charakters möglich, z.B. solche, die sich durch Substitution von [32] durch [33] ergeben. Wenn [34] ist, dann wird die Hysteresefunktion als unstetig (oder als Relais-Hysteresefunktion) bezeichnet. Auf

Zeichnung 1 sind die Darstellungen (in der üblichen Interpretation) der stark stetigen (a), der stetigen (b) und der unstetigen (c) Hysteresefunktion *.

In diesem Beitrag wollen wir die Operatorenschar betrachten, die nur die Bedingungen 1), 2) mit festem $t_0=0$ erfüllen, wobei wir [35] bezeichnen. Im Falle, daß [36] ein stetiger Operator ist (insbesondere die stark stetige Hysteresefunktion), wird der lokale Existenzsatz für die Gleichungen (1) gewöhnlich durch die Anwendung des Prinzips von Šauder bewiesen *. Wenn [37] ein unstetér Operator ist und um so mehr, wenn [37] eine Relais-Hysteresefunktion ist, bleibt der Beweis des Existenzsatzes eine ungelöste mathematische Aufgabe. Bei Relaishysteresefunktionen braucht man zur Definition die Kenntnis der Lösung des Systems (1); diese Definition kann analog der Bestimmung der Lösung von Differentialgleichungssystemen mit unstetigen rechten Seiten sein $(^{6-9})$. Die weitere Ausführung ist richtig bei beliebiger Definition der Lösung, bei der: 1) die Lösung [38] eine absolut stetige Funktion ist; 2) in der Gleichung (1) [39] eine beliebige Funktion ist, L im beliebigen endlichen Intervall integrierbar ist und gebunden [verbunden] mit den Beziehungen [40], die im folgendem noch formuliert werden; 3) die Gleichung (1) fast überall erfüllt wird; 4) wenn die Lösung begrenzt auch für [41] existiert, sie auf den Intervall [42] erweiterbar ist.

2°. Wir setzen wie gewöhnlich voraus, daß für ein beliebiges [43] und ein beliebiges [44] aus dem Existenzintervall

(2)

erfüllt ist **.

D e f i n i t i o n 2. Das System (1) wird als a b s o l u t s t a b i l bezeichnet, wenn: 1) eine beliebige Lösung des Systems (1) für [45] existiert und [46] bei [47] und 2) eine nur von [48] abhängige stetige wachsende Funktion [49], vorgegeben für [50] existiert, so daß für jedes beliebige [51], wobei [52], [53] erfüllt ist.

Wir bezeichnen [54]. Für die absolute Stabilität ist es notwendig, daß die Kurve [55] die reelle negative Halbachse nicht schneidet ***.

T h e o r e m 1. Wir setzen voraus, daß das Spektrum der Matrix P in der offenen linken Halbebene liegt, [56] bei [57]

Dann ist das System (1) absolut stabil, und darüber hinaus existieren [58] , wobei sie nur von [59] abhängen, so daß es heißt: (3)

Wir weisen darauf hin, daß die Bedingungen des Theorems die Systeme (1) mit Hysterese-Nichtlinearitäten (derart, wie sie auf Zeichnung 1 dargestellt sind) erfüllen, deren Kurven sich mit der Zeit verändern können, wobei sie innerhalb des festgelegten Sektors [60] bleiben.

D e f i n i t i o n 3. Den Operator [61] bezeichnet man als (+)-Operator, wenn die Beziehungen (2) erfüllt sind und für eine beliebige absolut stetige Funktion [62] das Integral [63] und [64] existiert, wobei [65] eine stetige, nicht kleiner werdende Funktion ist, [66] .

Ein bißchen ungenau ausgedrückt, ist die Hysteresefunktion ein (+)-Operator, wenn der Flächenzuwachs längs jeder beliebigen Hystereseschleife positiv ist. Wenn aber der Flächenzuwachs längs einer beliebigen Hystereseschleife der Funktion [67] negativ ist, ist die Hysteresefunktion [68] (+)-Operator.

Die Hysteresefunktionen, die auf Zeichnung 1 dargestellt und um die negativen Werte (σ) entsprechend erweitert sind, sind (+)-Operatoren (vorausgesetzt, daß ihre Kurven sich in der Zeit nicht verändern). Wenn man auf Zeichnung 1 b, c die Richtungspfeile~~r~~ [Zeigerrichtungen] verändert, werden die Operatoren [69] (+)-Operatoren. Es lassen sich ohne weiteres Beispiele für ebenfall~~s~~ ~~stetige~~ stark Hysteresefunktionen [70] anführen, bei denen [71] (+)-Operatore sind.

T h e o r e m 2. Wir setzen voraus, daß das Spektrum der Matrix P in der linken offenen Halbebene liegt und entweder a') [72] (+)-Operator ist und b') die Kurve [73] bei [74] in einer offenen Halbebene liegt, die durch eine durch den Koordinatenursprung verlaufende und keine reelle negative oder imaginäre positive Halbachse enthaltende Gerade begrenzt ist, oder a'') [75] , der Operator [76] (+)-Operator ist und b'') die Bedingung b') erfüllt ist, wobei die Worte "imaginär positiv" durch "imaginär negativ" ersetzt werden. Dann ist das System (1) absolut stabil.

T h e o r e m 3. Wir setzen voraus, daß: 1) die Matrix P einen Null-Eigenwert hat und die übrigen Werte in der offenen linken Halbebene liegen; 2) [77] bei [78] und 3) [79] *. Für die absolute Stabilität des Systems (1) ist es hinreichend, wenn entweder [80] bei [81] oder die Bedingungen a'), b') oder die Bedingungen a''), b'') von Theorem 2 für [82] erfüllt sind.

B e m e r k u n g . Bei den Voraussetzungen für das Theorem gilt [83] , wobei [84] .

T h e o r e m 4. Wir setzen voraus, daß: 1) die Matrix P einen Null-Eigenwert, zwei rein imaginäre Eigenwerte [85] hat und ihre übrigen Eigenwerte in der offenen linken Halbebene liegen; 2) [86] bei [87] . Wir stellen die Funktion [88] in Form von [89] dar, wobei [90] eine holomorphe Funktion an der imaginären Achse ist. Für die absolute Stabilität des Systems (1) ist es hinreichend, wenn

(4)

und wenn bei [91] die Bedingung a') und bei [92] die Bedingung a'') von Theorem 2 erfüllt ist.

3°. Für den Fall, daß [93] die Normalfunktion ist (dann sind [94] und [95] offensichtlich (+)-Operatoren), sind die Aussagen von Theorem 2 und 3 bekannt; sie stimmen mit dem Kriterium von V.M. Popov (10, 11) überein *. Theorem 4 ist auch in diesem Falle neu; die Theoreme 1-4 zeitigen auch dann ein neues Resultat, wenn die Nichtlinearität die von t abhängige Normalfunktion ist.

Der Beweis der Theoreme 1-4 unterscheidet sich wesentlich von (10, 11) und beruht auf den Ergebnissen von (12). Zur Erläuterung der Methode führen wir einen (im Unterschied zu den Beweisen für die Theoreme 2-4) sehr einfachen Beweis für Theorem 1. Für [96] haben wir auf Grund des Systems (1) [97] ,wobei [98] . Wir fordern, daß [99] bei [100] und [101] bei [102] . Gemäß (12) existiert die Matrix [103] , wenn die Bedingungen des Theorems erfüllt sind. Dabei gilt [104] für [105] . Folglich ist die Lösung für [106] erweiterbar, und es gilt die Abschätzung (3).

Die hinreichenden Bedingungen für die Theoreme 1-4 sind in bestimmtem Sinne optimal. So sind z.B. in Theorem 4 die Ungleichungen [107] für die absolute Stabilität notwendig, und die Ungleichungen (4) mit dem Zeichen [108] sind notwendig, damit man die absolute Stabilität mit Hilfe der Funktion nach Ljapunov [109] mit der Ableitung [110] beweisen kann. Die Ungleichungen (4) sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Ableitung [111] minimal entartet. Die Funktion [112] bezeichnet man als minimal entartet, wenn [113] und aus [114] folgt, daß [115], und [116] in der Summe [117] der Eigenunterräume der Matrix P liegt, die den Null- und rein imaginären Eigenwerten entsprechen. Man kann beweisen, daß für eine beliebige Funktion [118] der bezeichneten Art, bei der [119], aus [120] [121] folgt, was die Bestimmung der minimalen Entartung erklärt.

Eingegangen am 15. IX. 1962

F u ß n o t e n

S. 288 * Im Falle b) ist die Darstellung unstetig, z.B. bei den Funktionen [123] , die ein Maximum im Punkte [124] haben unter der Voraussetzung, daß [125] .

S. 289 * Das gilt selbstverständlich auch für die Gleichungen [126] , wobei [127] die analog bestimmte Operatorenschar über den Vektorfunktionen [128] ist.

** Diese Bedingung ist offensichtlich für die auf Zeichnung 1 dargestellten Funktionen erfüllt (bei entsprechendem Zusatz zu der Definition für die Werte [129]). Wir weisen darauf hin, daß der Fall [130] angenommen werden kann, dann gilt für die weiteren Formeln [131] .

*** Aus der Lineartheorie ist bekannt, daß diese Bedingung notwendig und hinreichend ist für die Stabilität aller Linearsysteme (1) mit [132] . Die Amplitudenphasenkennwerte des linearen Teils des Systems [133] können bekanntlich experimentell gewonnen werden.

S. 290 * Die Bedingung [134] ist die bekannte notwendige Voraussetzung für die Stabilität bei A.I. Lur'e ([1]).

S. 291 * Die Theoreme 1 und 2 sind in Wirklichkeit ein neuer Beweis für dieses Kriterium von Popov. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß das Spektrum P in der offenen linken Halbebene liegt. Für [135] haben wir [136] , wobei [137] durch [138] ausgedrückt werden. Bei der Forderung, daß entweder [139] oder [140] erfüllt ist, erhalten wir [141] bei [142] , woraus die absolute Stabilität folgt. Nach den Theoremen 1 und 2 ([12]) existiert die Lösung H der sich ergebenden [gewonnenen] Ungleichungen, wenn [143] , was zu beweisen war.

Z i t i e r t e   L i t e r a t u r

1 A. I. L u r ' e : Nekotorye nelinejnye zadači teorii avtomatičeskogo regulirovanija. M. - L., 1951

2 A. M. L e t o v : Ustojčivostj nelinejnych reguliruemych sistem. M. - L., 1955

3 Ja. Z. C y p k i n : Teorija relejnych sistem avtomatičeskogo regulirovanija. M. - L., 1955

4 E. P. P o p o v , I. P. P a l ' t o v : Približennye metody issledovanija nelinejnych avtomatičeskich sistem. 1960

5 S. L e f s c h e t z : Res. Inst. Adv. Stud. Techn. Rep., 62-10 (1962)

6 M. A. A j z e r m a n , F. R. G a n t m a c h e r : Pervyj meždynarodnyj kongress IFAK po avtomatičeskomu upravleniju. 1960

7 M. A. A j z e r m a n , F. R. G a n t m a c h e r : Avtomatika i telemech., 18, Nr 11 (1957)

8 A. F. F i l i p p o v : Matem. sbornik, 51 (93), Nr 1 (1960)

9 J. A n d r é , P. S e i b e r t : Res. Inst. Adv. Stud. Techn. Rep., 60-6 (1960)

10 V. M. P o p o v : Avtomatika i telemech., 22, Nr 8 (1961)

11 V. M. P o p o v : Acad. Rep. Pop. Romîne, Stud. si cercetâri de energeticâ, 10 Nr 3 (1960)

12 V. A. J a k u b o v i č : DAN, 143. Nr 6 (1962)

Anmerkung des Übersetzers

Die hochgestellten Zahlen in [] wurden fortlaufend zur Kennzeichnung der Formeln im Originaltext eingeführt.

Die Worte in [] sind eine Übersetzungsvariante des vorhergehenden Wortes, wobei in [] die wörtliche Übersetzung gegeben ist.

Für die Begriffe 'Bestimmung' und 'Definition' wird im Russischen das gleiche Wort (opredelenie) gebraucht, so daß es möglich ist, daß in der deutschen Übersetzung unter diesen beiden Begriffen sachlich nicht immer richtig unterschieden wurde.

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 2

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. ЯКУБОВИЧ

ЧАСТОТНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 IX 1962)

Ниже мы обозначаем, если не оговорено противное, большими латинскими буквами $\nu \times \nu$-матрицы, малыми латинскими буквами $\nu \times 1$-векторы-столбцы (исключение: t — время) и греческими — скалярные величины. Матрицы, векторы и числа являются вещественными; I — единичная матрица.

1°. Будем изучать системы (см. [1-5] и др.)

$$dz/dt = Pz + q\varphi[\sigma, \varphi_0]_t, \quad \sigma = (z, r), \tag{1}$$

где $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ — гистерезисная или релейно-гистерезисная функция (см. рис. 1, где эти «функции» изображены для $\sigma \geqslant 0$). Дадим точное определение гистерезисной функции.

Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}(t_0, t_1)$ множество непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $\sigma(t)$ таких, что $\sigma(t_0) = \sigma_0$. Предположим, что: 1) любому σ_0 поставлено в соответствие некоторое множество $\mathfrak{E}(\sigma_0)$ «начальных значений гистерезисной функции» (см. рис. 1); 2) для любых $t_1 \geqslant t_0 \geqslant 0$ и $\varphi_0 \in \mathfrak{E}(\sigma_0)$ указан оператор $\varphi[\cdot|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]$, отображающий $\mathfrak{M}_{\sigma_0}(t_0, t_1)$ в $C(t_0, t_1)$; 3) имеют место соотношения $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_{t_0} = \varphi_0$, $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t \in \mathfrak{E}[\sigma(t)]$, где $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]$ — соответствующая функция и $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t$ — ее значение в точке t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; 4) если $\sigma(t) = \sigma_1(t) \in \mathfrak{M}_{\sigma_0}(t_0, t_*)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_*$ и $\sigma(t) = \sigma_2(t) \in \mathfrak{M}_{\sigma_*}(t_*, t_1)$ при $t_* \leqslant t \leqslant t_1$, где $\sigma_* = \sigma(t_*)$, то $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t = \varphi[\sigma_1|_{t_0}^{t_*}, \varphi_0]_t$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_*$ и $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t = \varphi[\sigma_2|_{t_*}^{t_1}, \varphi_*]_t$ при $t_* \leqslant t \leqslant t_1$, где $\varphi_* = \varphi[\sigma_1|_{t_0}^{t_*}, \varphi_0]_{t_*}$. При выполнении этих условий семейство отображений $\varphi[\cdot|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]$ будем называть непрерывной гистерезисной функцией. Если все эти отображения непрерывны, то гистерезисная функция называется сильно непрерывной.

Возможны и другие, близкие по характеру определения, например получающиеся заменой $C(t_0, t_1)$ на $L(t_0, t_1)$. Если $\varphi[\sigma|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0] \notin C(t_0, t_1)$, то гистерезисная функция называется разрывной (или релейно-гистерезисной). На рис. 1 изображены (подразумевается обычная интерпретация) сильно-непрерывная (*а*), непрерывная (*б*) и разрывная (*в*) гистерезисные функции *.

В настоящей заметке мы будем рассматривать семейства операторов, удовлетворяющие лишь условиям 1), 2) с фиксированным $t_0 = 0$, при этом будем обозначать $\varphi[\sigma, \varphi_0] = \varphi[\sigma|_0^t, \varphi_0]$. В случае, когда $\varphi[\cdot, \varphi_0]$ — непре-

* В случае *б* отображение разрывно, например, на функциях $\sigma(t)$, имеющих максимум в точке σ_2, при условии, что $\varphi_0 = \varphi_0'$.

рывный оператор (в частности, сильно непрерывная гистерезисная функция), локальная теорема существования для уравнений (1) доказывается обычным образом применением принципа Шаудера *. Если $\varphi[\cdot, \varphi_0]$ — разрывный оператор и, тем более, если $\varphi[\cdot, \varphi_0]$ — релейно-гистерезисная функция, доказательство теоремы существования остается нерешенной математической задачей. Для релейно-гистерезисных функций нуждается в определении само понятие решения системы (1); это определение может быть аналогичным определению решения систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями ([6–9]). Дальнейшее изложение справедливо при

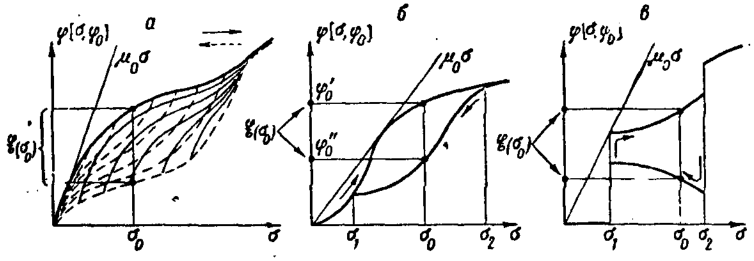

Рис. 1

любом определении решения, при котором: 1) решение $z(t)$ — абсолютно непрерывная функция; 2) в уравнении (1) $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t^* = \varphi(t)$ — произвольная функция, L-интегрируемая на любом конечном интервале, связанная с $\sigma(t)$ соотношениями, которые формулируются ниже; 3) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду; 4) если решение существует и ограничено на $[0, \tau)$, то оно продолжимо на интервал $[\tau, \tau+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

2⁰. Будем, как обычно, предполагать, что для любого $\varphi_0 \in \mathfrak{C}(\sigma_0)$ и любого $t \geqslant 0$ из интервала существования выполнено **

$$0 \leqslant \sigma(t)\,\varphi[\sigma, \varphi_0]_t \leqslant \mu_0\sigma(t)^2, \qquad \varphi[\sigma, \varphi_0]_t = 0 \text{ при } \sigma(t) = 0. \tag{2}$$

Определение 2. Система (1) называется **абсолютно устойчивой**, если: 1) любое решение системы (1) существует на $[0, \infty)$ и $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и 2) существует зависящая только от P, q, r, μ_0 непрерывная возрастающая функция $\psi(\rho)$, заданная на $[0, \infty)$, $\psi(0) = 0$, такая, что для любого $\varphi_0 \in \mathfrak{C}(\sigma_0)$, где $\sigma_0 = (z(0), r)$, выполнено $|z(t)| \leqslant \psi(|z(0)|)$.

Обозначим $\chi(\lambda) = ((P - \lambda I)^{-1}q, r)$, $\xi(\omega) = 1/\mu_0 + \operatorname{Re}\chi(i\omega)$, $\eta(\omega) = \omega \operatorname{Im}\chi(i\omega)$. Для абсолютной устойчивости необходимо, чтобы кривая $\xi(\omega) + i\eta(\omega)$, $0 \leqslant \omega < \infty$, не пресекала действительной отрицательной полуоси ***.

Теорема 1. *Предположим, что спектр матрицы P лежит в открытой левой полуплоскости, $\xi(\omega) > 0$ при $0 \leqslant \omega < \infty$ и $+\infty \geqslant \lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2\xi(\omega) > 0$. Тогда система* (1) *абсолютно устойчива и, более того, существуют $\varkappa_0$, $\varkappa > 0$, зависящие лишь от P, q, r, μ_0, такие, что*

$$|z(t)| \leqslant \varkappa_0 e^{-\varkappa t}|z(0)|. \tag{3}$$

* Разумеется, это же справедливо для уравнений $\dot{x} = f[x, f_0]$, где $f[x, f_0] = f[x\,|\,{}_0^t, f_0]_t$ — аналогичным образом определенное семейство операторов над векторными функциями $x(t')$, $0 \leqslant t' \leqslant t$.

** Это условие, очевидно, выполнено (при соответствующем доопределении на значения $\sigma < 0$) для гистерезисных функций, изображенных на рис. 1. Отметим, что допускается случай $\mu_0 = \infty$, тогда в дальнейших формулах $1/\mu_0 = 0$.

*** Из линейной теории известно, что это условие необходимо и достаточно для устойчивости всех линейных систем (1) с $\varphi[\sigma, \varphi_0] = \mu\sigma$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$. Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $[-\chi(i\omega)]$ может быть, как известно, получена экспериментально.

Отметим, что условиям теоремы удовлетворяют системы (1) с гистерезисными нелинейностями (типа изображенных на рис. 1), графики которых могут меняться со временем, оставаясь в фиксированном секторе $0 \leqslant \sigma\varphi \leqslant \leqslant \mu_0\sigma^2$.

Определение 3. Оператор $\varphi[\cdot, \varphi_0]$ называется (+)-оператором, если выполнены соотношения (2) и для любой абсолютно непрерывной функции $\sigma(t)$ и $\varphi_0 \in \mathfrak{C}[\sigma(0)]$ существует интеграл $\Phi(t) \int\limits_0^t \varphi[\sigma, \varphi_0]_t d\sigma(t)$ и $\Phi(t) \geqslant -\psi_0(|\sigma(0)|)$, где $\psi_0(\sigma)$ — непрерывная, неубывающая функция, $\psi_0(0) = 0$.

Говоря несколько неточно, гистерезисная функция является (+)-оператором, если приращение площади вдоль любой ее петли гистерезиса положительно. Если же приращение площади вдоль любой петли гистерезиса функции $\varphi[\sigma, \varphi_0]$ отрицательно, то (+)-оператором является гистерезисная функция $\mu_0\sigma - \varphi[\sigma, \varphi_0]$.

Гистерезисные функции, изображенные на рис. 1 и соответствующим образом продолженные на отрицательные значения σ, являются (+)-операторами (предполагается, что их графики не меняются во времени). Если на рис. 1, *б*, *в* изменить направления стрелок, то будут (+)-операторами операторы $\mu_0\sigma - \varphi[\sigma, \varphi_0]$. Легко привести примеры также сильно непрерывных гистерезисных функций $\varphi[\sigma, \varphi_0]$ таких, что $\mu_0\sigma - \varphi[\sigma, \varphi_0]$ будут (+)-операторами.

Теорема 2. *Предположим, что спектр матрицы P лежит в открытой левой полуплоскости, а также либо* a′) $\varphi[\cdot, \varphi_0]$ *является* (+)-*оператором и* б′) *кривая* $\xi(\omega) + i\eta(\omega)$ *расположена при* $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$ *в какой-либо открытой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начало координат и не содержащей действительной отрицательной и мнимой положительной полуосей, либо* a″) $\mu_0 \neq \infty$, *оператор* $\mu_0\sigma - \varphi[\sigma, \varphi_0]$ *является* (+)-*оператором и* б″) *выполнено условие* б′) *с заменой слов «мнимой положительной» на «мнимой отрицательной». Тогда система* (1) *абсолютно устойчива.*

Теорема 3. *Предположим, что:* 1) *матрица P имеет одно нулевое собственное значение и остальные — в открытой левой полуплоскости;* 2) $\varphi[\sigma, \varphi_0]'_t \neq 0$ *при* $\sigma(t) \neq 0$ *и* 3) $\Gamma^2 = \operatorname*{Выч}_{\lambda=0} \chi(\lambda) > 0$ *. *Для абсолютной устойчивости системы* (1) *достаточно, чтобы было выполнено либо* $\xi(\omega) > 0$ *при* $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$, *либо условия* a′), б′), *либо условия* a″), б″) *теоремы* 2 *для* $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$.

Замечание. В предположениях теоремы $\xi(0) = \chi_0(0)$, где $\chi_0(\lambda) = \chi(\lambda) - \Gamma^2/\lambda$, $\eta(0) = -\Gamma^2$, $\xi(\infty) = l/\mu_0$, $\eta(\infty) = (q, r)$.

Теорема 4. *Предположим, что:* 1) *матрица P имеет одно нулевое, два чисто мнимых собственных значения* $\pm i\omega_0$ *и остальные ее собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости;* 2) $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t \neq 0$ *при* $\sigma(t) \neq 0$. *Представим функцию* $\chi(\lambda)$ *в виде* $\chi(\lambda) = \Gamma^2/\lambda + (\alpha\lambda + \beta)/(\lambda^2 + \omega_0^2) + \chi_1(\lambda)$, *где* $\chi_1(\lambda)$ — *функция, голоморфная на мнимой оси. Для абсолютной устойчивости системы* (1) *достаточно, чтобы*

$$\begin{gathered} \Gamma^2 > 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad -\beta(q, r) + \alpha\omega_0^2/\mu_0 > 0, \\ \beta(\Gamma^2 - \alpha) + \alpha\omega_0^2/\mu_0 + \operatorname{Re}[(\alpha\omega_0^2 + i\omega\beta)\chi_1(i\omega)] > 0, \quad 0 \leqslant \omega < \infty, \end{gathered} \tag{4}$$

и чтобы при $\beta > 0$ *было выполнено условие* a′), *а при* $\beta < 0$ — *условие* a″) *теоремы* 2.

3°. В случае, когда $\varphi[\sigma, \varphi_0] = \varphi(\sigma)$ — обычная функция (тогда, очевидно, $\varphi[\sigma, \varphi_0]$ и $\mu_0\sigma - \varphi[\sigma, \varphi_0]$ — (+)-операторы) утверждения тео-

* Условие $\Gamma^2 > 0$ является известным необходимым условием устойчивости А. И. Лурье [1].

рем 2 и 3 известны — они совпадают с критерием В. М. Попова ([10], [11]) *. Теорема 4 является новой и в этом случае; теоремы 1—4 дают новый результат также в случае, когда нелинейность — обычная функция, зависящая от t.

Доказательство теорем 1—4 существенно отлично от ([10], [11]) и основывается на результатах ([12]). Для иллюстрации метода приведем очень простое (в отличие от доказательств теорем 2—4) доказательство теоремы 1. Для $\Omega = (Hz, z)$ имеем в силу системы (1) $-\dot{\Omega} = (Gz, z) + 2\varphi(g, z) + \sigma\varphi$, где $-G = P^*H + HP$, $g = -Hq - r/2$. Требуем, чтобы $G - \mu_0 gg^* > 0$ при $\mu_0 \neq \infty$ и $G > 0$, $g = 0$ при $\mu_0 = \infty$. Согласно ([12]) матрица $H = H^* > 0$ существует, если выполнены условия теоремы. При этом $\dot{\Omega} < -2\varkappa\Omega$ для некоторого $\varkappa > 0$. Следовательно, решение продолжимо на $(0, \infty)$, и имеет место оценка (3).

Достаточные условия теорем 1—4 в определенном смысле оптимальны. Так, например, в теореме 4 неравенства $\Gamma^2 > 0$, $\alpha \geqslant 0$ необходимы для абсолютной устойчивости, а неравенства (4) со знаками $\geqslant$ необходимы для того, чтобы абсолютную устойчивость можно было обнаружить посредством функции Ляпунова вида $\Omega = (Hz, z) + \vartheta \int\limits_0^t \varphi[\sigma, \varphi_0]_t d\sigma(t)$ с производной $\dot{\Omega} \leqslant 0$. Неравенства (4) необходимы и достаточны, чтобы прозводная $\dot{\Omega}$ была минимально вырождена. Функция $\dot{\Omega} = \Omega_0(z, \varphi) \leqslant \leqslant 0$ называется минимально вырожденной, если $\operatorname{Inf}[-\Omega_0(0, \varphi)/\varphi^2] > 0$ и из $\Omega_0(z, \varphi) = 0$ следует, что $\varphi = 0$, а z лежит в сумме $\mathfrak{L}$ собственных подпространств матрицы P, отвечающих нулевым и чисто мнимым собственным значениям. Можно доказать, что для любой функции Ω указанного вида такой, что $\Omega_0(z, \varphi) \leqslant 0$, из $\Omega_0(z, 0) = 0$ следует $z \in \mathfrak{L}$, что объясняет определение минимальной вырожденности.

Поступило
15 IX 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.—Л., 1951. [2] А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, М.—Л., 1955. [3] Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, М.—Л., 1955. [4] Е. П. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, 1960. [5] S. Lefschetz, Res. Inst. Adv. Stud. Techn. Rep., 62—10 (1962). [6] М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Первый международный конгресс ИФАК по автоматическому управлению, 1960. [7] М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Автоматика и телемех., 18, № 11 (1957). [8] А. Ф. Филиппов, Матем. сборн., 51 (93), № 1 (1960). [9] J. André, P. Seibert, Res. Inst. Adv. Stud. Techn. Rep., 60—6 (1960). [10] В. М. Попов, Автоматика и телемех., 22, № 8 (1961). [11] V. M. Popov, Acad. Rep. Pop. Romîne, Stud. si cercetări de energetică, 10, № 3 (1960). [12] В. А. Якубович, ДАН, 143, № 6 (1962).

---

* Теоремы 1 и 2 ([12]) дают по существу новое доказательство этого критерия Попова. Пусть, для простоты, спектр P лежит в открытой левой полуплоскости. Для $\Omega = (Hz, z) + \vartheta \int\limits_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma$ имеем $-\dot{\Omega}(Gz, z) + 2\varphi(g, z) + \gamma\varphi^2 + \varphi(\sigma - \varphi/\mu_0)$, где G, g, γ выражаются через P, q, r, ϑ, H. Требуя, чтобы было выполнено либо $\gamma > 0$, $\gamma G - gg^* > 0$, либо $\gamma = 0$, $g = 0$, $G > 0$, получим $\Omega > 0$, $\dot{\Omega} < 0$ при $|z| \neq 0$, откуда будет следовать абсолютная устойчивость. По теоремам 1 и 2 ([12]) решение H полученных неравенств существует, если $\xi(\omega) + \vartheta\eta(\omega) > 0$, $+\infty \geqslant \lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2[\xi(\omega) + \vartheta\eta(\omega)] > 0$, что и требовалось доказать.