Ŭ/45

Matematičeskij sbornik
T. 4 (46) (1938) Nr 1

Aleksandrov, A.D. (Leningrad):

ÜBER EINE KLASSE GESCHLOSSENER FLÄCHEN

Gegenstand dieser Arbeit ist eine Untersuchung geschlossener Flächen mit Gebieten negativer Gaußscher Krümmung und Gebieten positiver Gaußscher Krümmung, wobei die Totalkrümmung aller Gebiete mit positiver Krümmung 4π beträgt. Als Beispiel für eine solche Fläche kann die Torusfläche dienen. Infolgedessen werden wir unsere Flächen T-Flächen nennen.

Die genannten Flächen besitzen Eigenschaften, die zu den bekannten Eigenschaften geschlossener Flächen mit überall positiver Gaußscher Krümmung analog sind. Und zwar werden wir (unter einschränkenden Voraussetzungen, die an geeigneter Stelle genau formuliert werden) zeigen, daß

1) Gebiete mit positiver Gaußscher Krümmung jeder T-Fläche einen zusammenhängenden Bereich, der Teil einer geschlossenen konvexen Fläche ist, bilden; dieser Bereich ist von den Gebieten mit negativer Krümmung durch geschlossene Kurven abgetrennt, deren jede in einer Tangentialebene liegt.

2) Die T-Flächen erlauben keine nichttrivialen isometrischen Abbildungen (d.h. zwei isometrische T-Flächen können übereinander gelegt werden durch Bewegung oder durch Bewegung und Spiegelung).

3) Die T-Flächen sind starr (d.h. sie erlauben keine unendlich kleinen Verbiegungen, außer unendlich kleinen Bewegungen).

§ 1. Aufbau der T-Flächen

Wir betrachten die stetigen geschlossenen T-Flächen im gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raum; sie sind durch folgende Bedingungen bestimmbar:

1) T ist zweimal stetig differenzierbar;

2) T zerfällt in eine endliche Anzahl von Gebieten; in jedem dieser Gebiete ändert die Gaußsche Krümmung K nicht das Zeichen und verschwindet nur auf den Randkurven der Gebiete[1];

3) die Totalkrümmung aller Gebiete mit positiver Krümmung beträgt 4π;

4) Gebiete, in denen $K > 0$, sind von Gebieten, in denen $K < 0$, durch stückweise glatte Kurven getrennt.

Es ist einfach zu zeigen, daß die T-Fläche homöomorph zu einer Kugel mit einer beliebigen Anzahl von Henkeln konstruiert werden kann. Bei der Konstruktion kann man von einer glatten konvexen Fläche mit der Symmetrieebene P ausgehen; es gibt dabei auf dieser Fläche ebene Stücke, von denen kein einziges gemeinsame Punkte mit P hat. Die ebenen Stücke werden paarweise symmetrisch sein. Wenn man sie alle herausschneidet und die Randkurven der sich paarweise bildenden symmetrischen Hohlräume durch konkave Flächen so verbindet, daß man auf den Hohlraumgrenzkurven keine Kanten erhält, so gewinnt man eine T-Fläche, die homöomorph ist zu einer Kugel mit soviel Henkeln wie Paare von ebenen Stücken auf der konvexen Ausgangsfläche sind. Die Totalkrümmung jenes Teils der gewonnenen Fläche, wo die Gaußsche Krümmung positiv ist, ist gleich der Totalkrümmung der geschlossenen Ausgangsfläche, da die Totalkrümmung der ebenen Stücke gleich Null ist.

Von der Möglichkeit der erwähnten Verbindung paarweise symmetrischer Hohlraumgrenzkurven durch konkave Flächen

---

1 Diese Einschränkung wird ein wenig abgeschwächt werden.

kann man sich auf folgende Weise überzeugen. Angenommen, P_1 und P_2 sind Ebenen zweier solcher symmetrischer Grenzkurven L_1 und L_2. L_1 und L_2 sind konvexe Kurven. Die Ebenen P_1, P_2, und P werden jeweils von einer Geraden geschnitten. Diese Gerade wählen wir als x-Achse; die y-Achse wird senkrecht zu ihr in der Ebene P gerichtet und die z-Achse - senkrecht zur Ebene P. Wir setzen den Raum der projektiven Transformation

⟨a⟩

aus.

Diese Transformation läßt die Gerade, von der die Ebenen P_1 und P_2 geschnitten werden, unendlich fern werden. Folglich werden die Ebenen P_1 und P_2 selbst parallel. Die Kurven L_1 und L_2 bleiben natürlich konvex und werden in ihren Ebenen symmetrisch in bezug auf die Ebene P liegen. (Für symmetrische Punkte auf den Kurven L_1 und L_2 haben wir vor der Transformation $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = -z_2$, und deshalb werden genau jene Punkte wieder symmetrisch in bezug auf die Ebene P_1 werden, da für sie gilt:

.) ⟨b⟩

Nehmen wir jetzt die Gerade t, die senkrecht zu den Ebenen P_1 und P_2 ist (P_1 und P_2 sind jetzt parallel) und innerhalb der Kurven L_1 und L_2 verläuft. Wir nehmen die Ebene Q an, die durch t verläuft, und auf ihr den konvexen Kreisbogen l, der mit der Wölbung nach t gerichtet ist und die Ebenen P_1 und P_2 in Punkten berührt, die auf den Kurven L_1 und L_2 liegen. Wir werden die Ebene Q um die Gerade t drehen und sie dabei einer solchen Streckung oder Pressung in Richtung der Geraden t aussetzen, daß der Kreisbogen l weiter die Ebenen P_1 und P_2 in Punkten berührt, die auf L_1 und L_2 liegen. Dabei wird jeder Punkt auf l eine Kurve beschreiben, die L_1 – und das bedeutet: auch L_2 – ähnlich ist. Im Ergebnis erhält man eine Fläche, die die Ebenen P_1 und P_2 an den Kurven L_1 und L_2 berührt. Ihre Schnitte durch zu P_1 und P_2 parallele Ebenen werden konvex sein, die Schnitte durch die Q-Ebenen aber – konkav. Daher wird die konstruierte Fläche überall – mit Ausnahme der Punkte auf L_1 und L_2 – eine negative Krümmung haben. Wenn man jetzt die Kurven L_1 und L_2 durch inverse projektive Transformation in ihre ursprüngliche Lage zurückbringt, so wird die konstruierte Fläche zu jener, die wir brauchen. Bekanntlich behalten projektive Transformationen von Flächen das Zeichen der Gaußschen Krümmung bei.

§ 2. Form der T-Flächen

S a t z. Bei jeder T-Fläche bildet der Teil mit positiver Gaußscher Krümmung ein zusammenhängendes Stück einer geschlossenen konvexen Fläche und ist von den Teilen mit negativer Krümmung durch geschlossene konvexe Kurven getrennt, deren jede in einer Tangentialebene liegt. Wenn man den Teil der T-Fläche mit positiver Krümmung durch – von den genannten Kurven herausgeschnittene – Stücke der Tangentialebenen ergänzt, erhält man eine geschlossene konvexe Fläche; innerhalb dieser Fläche liegen Teile von T mit negativer Krümmung.

Der Kürze wegen werden wir die Gaußsche Krümmung mit K bezeichnen; den Teil von T, wo $K \geqslant 0$, werden wir konvex nennen.

1. Die sphärische Abbildung des konvexen T-Teils bedeckt die ganze Kugeloberfläche; überdies wird kein Gebiet auf der Kugel von dieser sphärischen Abbildung mehr als einmal bedeckt.

Zu T kann eine Stützebene beliebiger Richtung gelegt werden. Sie kann T nur in den Punkten $K \geqslant 0$ berühren. Das heißt, die sphärische Abbildung des konvexen T-Teils bedeckt die ganze Kugeloberfläche. Da die Totalkrümmung des konvexen Teils nach Voraussetzung 4π beträgt, kann eben dadurch kein Gebiet auf der Kugel durch diese sphärische Abbildung mehr als einmal bedeckt sein.

2. Die Tangentialebene ist in jedem beliebigen Punkt des konvexen T-Teils die Stützebene zu T.

Im Punkt x auf T sei $K > 0$; wir nehmen an, die Tangentialebene in x sei nicht die Stützebene in bezug auf T. Dann ist in einer bestimmten Umgebung $U(x)$ des Punktes x $K > 0$, und die Tangentialebenen sind nicht die Stützebenen (da die Grenze der Stützebenen eine Stützebene ist). ω sei die sphärische Abbildung von $U(x)$. ω besitzt innere Punkte, da in x $K > 0$. Bei T gibt es Stützebenen mit den Normalen, die nach ω gerichtet sind, und sie berühren den konvexen T-Teil. Deshalb ist das Gebiet ω zweimal von der sphärischen Abbildung des konvexen T-Teils bedeckt, was der oben angeführten Feststellung widerspricht.

Da die Grenze von Stützebenen eine Stützebene ist, sind die Tangentialebenen in den Punkten der Grenzlinie des konvexen T-Teils Stützebenen.

3. Die Tangentialebene P im Punkt x, wo $K > 0$, berührt T in keinem anderen Punkt.

Wir nehmen an, P berühre T noch im Punkt x_1. In x_1 ist $K > 0$, da – wie gezeigt – P die Stützebene ist. Nehmen wir die Umgebung $U(x)$ des Punktes x, in dem $K > 0$. Ihre sphärische Abbildung sei ω. Dann wird sich in der Umgebung des Punktes x_1 der Punkt x_2 befinden, wo $K > 0$, mit der nach gerichteten Normalen. Die sphärische Abbildung der Umgebung des Punktes x_2 wird auf ω zu liegen kommen, was nicht möglich ist, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

4. Wir möchten zeigen, daß jede zusammenhängende Komponente der Randkurve des konvexen T-Teils in einer Tangentialebene liegt. Es ist hinreichend hierfür zu zeigen, daß

jeder ihrer glatten Abschnitte in einer Tangentialebene liegt, da dann - infolge der Stetigkeit der Drehung der Tangentialebenen - auch sie ganz in einer Tangentialebene liegt.

L sei ein glatter Abschnitt auf der Randkurve des konvexen T-Teils. s sei die Länge seines Bogens. Wenn in allen Punkten von L die Ableitung der Normalen n nach s gleich Null ist, dann liegt L in einer Tangentialebene. Wir nehmen daher an, daß auf L der Punkt x_0 liegt, wo

. (1)

Die Tangentialebene P_0 im Punkt x_0 ist die Stützebene von T. Wenn sie L in Punkten berührte, die beliebig nahe an x_0 liegen, dann würde die Gleichung (1) nicht gelten. Daher kann man aus L den Abschnitt heraustrennen, der x_0 im Innern enthält und keine anderen Berührungspunkte mit der Ebene P_0 hat. Diesen Abschnitt werden wir weiterhin auch mit L bezeichnen.

5. n_0 sei die sphärische Abbildung des Punktes x_0 und Λ - die sphärische Abbildung von L. Infolge der Voraussetzung (1) hat Λ in n_0 eine Tangente und teilt daher jede hinreichend kleine Umgebung n_0 in zwei "Halbumgebungen".

Wir sondern in der Nähe von x_0 die kleine Umgebung $U(x_0)$ aus, die einen Teil des Abschnitts L enthält und keine anderen T-Teile, wo die Gaußsche Krümmung gleich Null ist. Dann enthält $U(x_0)$ außer x_0 keine anderen Punkte, die in der Ebene P_0 liegen, da Punkte, wo $K > 0$, infolge des im Punkt 3 Bewiesenen nicht in P_0 liegen und Punkte, wo $K < 0$, überhaupt nicht in der Stützebene liegen können. Die Kurve L sondert aus $U(x_0)$ die Halbumgebung $U^+(x_0)$ aus, die zum konvexen T-Teil gehört.

Wir werden zeigen, daß die sphärische Abbildung von $U^+(x_0)$ nur die eine Halbumgebung $\omega^+(n_0)$ des Punktes n_0 überdeckt.

Für den Beweis nehmen wir auf L die zwei Punkte x_1 und x_2, die auf verschiedenen Seiten von x_0 liegen, und verbinden sie durch den Bogen l, der in $U^+(x_0)$ liegt. Die sphärische Abbildung λ des Bogens l hat mit Λ nur die zwei gemeinsamen Punkte n_1 und n_2 - die sphärischen Abbildungen von x_1 und x_2, da kein Punkt, wo $K > 0$, die gleiche sphärische Abbildung hat, die ein beliebiger Punkt - wo $K \geqslant 0$ - aufweist (wie dies in Punkt 3 dargestellt ist). Wir werden l zu L zusammenziehen. Dann wird λ zu Λ zusammengezogen und dadurch die sphärische Abbildung eines Teils von $U^+(x_0)$ skizziert. Da λ nicht schneiden kann, wird λ dabei nur eine Halbumgebung des Punktes n_0 skizzieren.

6. Die sphärische Abbildung von $U(x_0)$ enthält Punkte, die beliebig nahe an n_0 liegen und nicht zu $\omega^+(n_0)$ gehören.

Tatsächlich ist es so, daß aus der Voraussetzung (1) folgt, daß der Punkt x_0 nicht ein ebener Nabelpunkt ⟨Kreispunkt⟩ ist. Daher ist in allen Richtungen, die von ihm ausgehen - abgesehen von der Hauptrichtung, die der Nullkrümmung entspricht - die Ableitung der Normalen nicht gleich Null. Folglich kann man durch x_0 einen Bogen ziehen, der L so schneidet, daß seine sphärische Abbildung Λ schneidet.

7. Jetzt werden wir das gewünschte Resultat dadurch erhalten, daß wir die Folgerung des Punktes 6 mit der Folgerung des Punktes 5 zum Widerspruch führen.

$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ sei die Folge von Punkten von $U(x_0)$, die gegen x_0 konvergieren und deren sphärische Abbildungen nicht in $\omega^+(n_0)$ liegen. In diesen Punkten ist die Gaußsche Krümmung $K < 0$. Daher schneiden die

Tangentialebenen P_1, P_2, ..., P_m, ... in ihnen $U(x_o)$. Bei hinreichend großen m schneidet P_m nicht die Randkurve von $U(x_o)$. Tatsächlich konvergieren P_m gegen die Ebene P_o, der Tangente im Punkt x_o, und wenn sie bei beliebig großen m die Randkurve von $U(x_o)$ schnitten, so wären auch auf P_o Punkte der Grenzkurve von $U(x_o)$, was aufgrund der Wahl von $U(x_o)$ nicht der Fall ist. Wenn P_m aber nicht die Grenzkurve von $U(x_o)$ schneidet, so wird aus $U(x_o)$ ein "Kugelkäppchen" ausgeschnitten, das sich auf P_m stützt [d.h. jenen Teil von $U(x_o)$, der keine Punkte der Randkurve von $U(x_o)$ enthält und auf einer Seite von P_m liegt]. Im Punkt x_m dieses "Kugelkäppchens", der am weitesten von P_m entfernt ist, gibt es die Tangentialebene P'_m, die parallel zu P_m ist. Überdies ist die Gaußsche Krümmung in x'_m $K \geqslant 0$, da das "Kugelkäppchen" auf einer Seite von P'_m liegt; und das wiederum widerspricht der Schlußfolgerung des Punktes 5.

8. Also, wir haben gezeigt, daß jede zusammenhängende Komponente der Grenzkurve des konvexen T-Teils in einer Tangentialebene liegt.

Konstruieren wir die konvexe Hülle T^* einer T-Fläche. Alle Stützebenen von T berühren T in seinem konvexen Teil. Daher liegt der konvexe T-Teil vollständig auf der Fläche T^*. Die ebenen Kurven, die auf der Fläche T^* liegen, sind zwangsläufig konvex. Daher ist jede zusammenhängende Komponente der Randkurve des konvexen T-Teils eine geschlossene konvexe Kurve.

Die sphärische Abbildung aller dieser Kurven besteht aus einzelnen isolierten Punkten, so daß man zwei beliebige Punkte auf der Kugel durch einen stetigen Bogen verbinden kann, der nicht durch diese Punkte verläuft. Einem derartigen Bogen entspricht auf dem konvexen T-Teil auch der stetige Bogen, der zwei beliebige Punkte von ihm verbindet. (Die sphärische Abbildung jeder Fläche mit positiver Krümmung ist beiderseits stetig.) Daher ist der konvexe T-Teil zusammenhängend.

9. Bei der Bestimmung der T-Flächen hatten wir gefordert, daß die Gaußsche Krümmung nur auf der Randkurve des konvexen Teils verschwindet. Diese Forderung kann jedoch abgeschwächt werden. Und zwar kann man annehmen, die Gaußsche Krümmung verschwinde außer auf der Randkurve des konvexen T-Teils noch auf einer beliebigen Menge M von Punkten auf T unter der einzigen Voraussetzung, daß auf der Grenzkurve des konvexen Teils die Häufungspunkte der Menge M eine nirgends dichte Menge M^1 bilden. Und bei dieser mehr allgemeinen Annahme wird unser Satz gültig sein. Tatsächlich ist es hinreichend, erstens: den Punkt x_0 auf L so zu wählen, daß er nicht zu M^1 gehört. Da M^1 auf L nirgends dicht ist, bilden jene Punkte auf ihr eine dichte Menge; und deshalb ist - wenn in ihnen

⟨c⟩

ist, das auch in allen Punkten von L der Fall. Zweitens muß die Umgebung $U(x_0)$ so gewählt werden, daß sie keine Punkte der Menge M enthält. Schließlich darf die Überlegung aus Punkt 3 nicht auf das ganze T, sondern nur auf $U(x_0)$ angewandt werden, was für die Durchführung der Überlegungen des Punktes 5 hinreichend ist. Wenn all dies befolgt wird, dann läßt sich der Beweis für unseren Satz auf die erwähnte mehr allgemeine Klasse von T-Flächen ausdehnen. Im folgenden Paragraphen kann man die Fläche T in diesem weiteren Sinne verstehen.

§ 3. Unverbiegbarkeit von T-Flächen

H i l f s s a t z. Wenn zwei T-Flächen isometrisch sind, dann sind die ihre konvexen Teile begrenzenden Kurven entsprechend kongruent.

T_1 und T_2 seien isometrische T-Flächen und L_1 und L_2

- ein Paar entsprechender geschlossener Kurven, die zu den Randkurven ihrer konvexen Teile gehören. Nach der Isometrie sind die geodätischen Krümmungen in den entsprechenden Punkten von L_1 und L_2 gleich. Aber L_1 und L_2 liegen jede vollständig in einer Tangentialebene. Daher sind ihre geodätischen Krümmungen gleich den üblichen Krümmungen. Das heißt, die letztgenannten sind in den entsprechenden Punkten von L_1 und L_2 gleich und daher sind L_1 und L_2 kongruent.

S a t z. Zwei isometrische analytische T-Flächen sind kongruent.

1. T_1 und T_2 seien zwei isometrische analytische T-Flächen. Wir wählen auf ihnen ein Paar entsprechender Bögen S_1, S_2 der Randkurven ihrer konvexen Teile so aus, daß ihre Krümmung nicht gleich Null ist[1]. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz sind diese Bögen kongruente ebene Kurven. Betrachten wir auf T_1 und T_2 die entsprechenden Umgebungen U_1, U_2 dieser Bögen. E, F, G, L, M, N seien wie immer die Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform ⟨Form⟩. Die Indizes 1 und 2 werden jeweils auf das Verhältnis von L, M und N zu T_1 und T_2 hinweisen. Wir nehmen an

(1)

und

. (2)

Wir wählen auf U_1 und U_2 als Parameterlinien u die geodätischen orthogonalen Linien zu S_1 und S_2 und als

---

1 Solche Bögen gibt es, da sie zu geschlossenen konvexen Kurven gehören.

v-Linien ihre orthogonalen Trajektorien. Dann gilt:

.(3)

Abstrahieren wir weiter die Umgebungen U_1 und U_2 und betrachten wir das entsprechende Gebiet D der Parameter u und v mit den darin gegebenen E, F, G, L, M, N, l, m und n. Aus der Gleichung der Gaußschen Krümmungen auf U_1 und U_2 (d.h. aus $L_1N_1 - M_1^2 = L_2N_2 - M_2^2$) erhalten wir nach den Formeln (1)

,(4)

und aus den Codazzischen Formeln [infolge ihrer Linearität in bezug auf die Koeffizienten der zweiten Grundform und Voraussetzung (3)]:

,(5)

,(6)

,(7)

.(8)

2. Wir erhalten bei $u = 0$, d.h. auf den Linien S_1 und S_2, weil sie eben sind:

.(9)

Bei $u = 0$ können nicht alle Ableitungen von L nach u verschwinden, da in dem Bereich, der den konvexen Teilen von T_1 und T_2 entspricht, $L > 0$ ist. Es sei[1]

(10)

---

1 Der Index u^k bezeichnet die k-te Ableitung und bei $k = 0$ - die Funktion selbst.

die erste Ableitung bei $u = 0$, die nicht gleich Null ist. Wir werden zeigen, daß in einem solchen Fall bei $u = 0$

.(11)

Für $h = 0$ gilt dies infolge der Gleichung (9). Wir zeigen, daß wenn dies bei $h < k$ gültig ist, dies auch bei $h+1$ gilt. Wir werden die Formel (7) hmal differenzieren. Dann erhalten wir - da $L_{vu^i} = 0$, $M_{u^i} = N_{u^i} = 0$ bei $i \leq h$:

(d)

und genauso erhalten wir, indem wir die Formel (8) hmal differenzieren

.(e)

3. Den Beweis des Satzes erhalten wir nachdem wir gezeigt haben, daß l, m, n und alle Ableitungen davon nach u, v bei $u = 0$ verschwinden. Dann finden wir nach der Analytizität von T_1 und T_2 und aus der Bestimmung von l, m und n, daß nicht nur die ersten, sondern auch die zweiten Formen der Flächen T_1 und T_2 zusammenfallen. Folglich sind sie kongruent.

Die Gleichungen (9) zeigen, daß bei $u = 0$ m und n - und folglich auch alle Ableitungen davon nach v - verschwinden. Wir werden zu allererst zeigen, daß bei $u = 0$ $l = n_u = 0$ ist. Dafür werden wir die Formel (4) $(k+1)$mal differenzieren. Dann erhalten wir, aufgrund dessen, daß bei $u = 0$,

(11)*

und

,(f)

. (12)

Überdies ergibt die Formel (6) bei $u = 0$

. (13)

Differenzieren wir die Formel (8) kmal nach u , dann erhalten wir bei $u = 0$

. (14)

Diese Gleichung ergibt zusammen mit der Beziehung (12)

. (15)

Wir werden zeigen, daß bei $u = 0$

. (16)

Eben dadurch erhalten wir aus den Gleichungen (13) und (15)

. (17)

Nach Voraussetzung sind die Krümmungen der Bögen S_1 und S_2 nicht gleich Null. Darüber hinaus sind sie untereinander gleich und gleich ihren geodätischen Krümmungen, da S_1 und S_2 in Tangentialebenen liegen. Aus der bekannten Formel für die geodätische Krümmung der Linie $u = 0$ (bei $E = 1$)

(18)

erhalten wir daher (16) , so daß (17) bewiesen ist. Da bei $u = 0$ $l = 0$, verschwinden alle Ableitungen von l nach v bei $u = 0$. Daher erhalten wir aus Formel (5)

. ⟨g⟩

4. Bei einer Wiederholung der angestellten Überlegung zeigen wir, daß bei $u = 0$ alle Ableitungen von l, m und n verschwinden. Es sei

; (19)

wir zeigen, daß dann

. (20)

Wir differenzieren (4) $(k+h+1)$mal und erhalten aufgrund der Beziehungen (19) und (11)

. (21)

Hieraus folgt für uns nach Formel (14)

. (22)

Differenzieren wir den Ausdruck (6) nach u $h$mal, finden wir überdies, daß

, (23)

und folglich - da $G_u \neq 0$ -

. (24)

Differenzieren wir schließlich die Gleichung (5) $h$mal nach u, finden wir infolge der Beziehungen (19) und (24), daß

. (25)

Somit ist unser Satz bewiesen.

S a t z. Eine analytische T-Fläche ist starr.

Rembs bewies die Starrheit konvexer Flächen, die durch Kurven, deren jede in einer Tangentialebene liegt, begrenzt werden[1]. Daher ist der konvexe Teil jeder T-Fläche schon von vornherein starr. Es bleibt noch, diese Starrheit über die Grenzen des konvexen Teils auszudehnen, was sofort gelingt, wenn man die Analytizität von T berücksichtigt. Daher ist nicht nur T, sondern auch jedes Stück, das einen konvexen T-Teil enthält, starr.

Wir bemerken hierzu, daß wenn T stückweise analytisch ist und seine analytischen Stücke nicht nur durch asymptotische Linien eines Geschlechts getrennt sind, sich die Unmöglichkeit nichttrivialer isometrischer Abbildungen und die Starrheit von T ganz genauso beweisen lassen. Dabei muß beim Beweis der Starrheit berücksichtigt werden, daß die Ableitungen l, m, n von den Koeffizienten der zweiten Grundform nach dem Parameter t - von dem eine unendlich kleine Verbiegung abhängt - die nach t differenzierten Gauß-Codazzi-Gleichungen erfüllen, d.h. die Gleichungen (4), (5) und (6).

Institut für Mathematik und Mechanik
der Universität Leningrad

(Eingegangen in der Redaktion am 29.1.1938)

Stuttgart, den 31.1.1969 i.A.

Monika Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

---

1 R e m b s, Unverbiegbare offene Flächen, Sitz.-Ber. Preuss. Akad., 1930

1938 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 4 (46), N.1
RECUEIL MATHÉMATIQUE

Об одном классе замкнутых поверхностей

А. Д. Александров (Ленинград)

Предметом этой работы является изучение замкнутых поверхностей, имеющих области отрицательной гауссовой кривизны и области положительной кривизны такие, что полная кривизна всех областей положительной кривизны равна 4π. Примером такого рода поверхности может служить поверхность тора. В связи с этим, мы будем называть наши поверхности поверхностями T.

Указанные поверхности обладают свойствами, аналогичными известным свойствам замкнутых поверхностей со всюду положительной гауссовой кривизной. Именно, мы покажем (при ограничительных предположениях, которые будут точно формулированы в своем месте), что

1) области положительной гауссовой кривизны каждой поверхности T образуют связную область, являющуюся частью замкнутой выпуклой поверхности; эта область отделена от областей отрицательной кривизны замкнутыми кривыми, из которых каждая лежит в одной касательной плоскости.

2) Поверхности T не допускают нетривиальных изометрических отображений (т. е. две изометрические поверхности T могут быть совмещены путем движения или движения и отражения).

3) Поверхности T жесткие (т. е. они не допускают бесконечно малых изгибаний, отличных от бесконечно малых движений).

§ 1. Построение поверхностей T

Мы будем рассматривать непрерывные замкнутые поверхности T в обычном трехмерном эвклидовом пространстве, определяемые следующими условиями:

1) T дважды непрерывно диференцируема,

2) T разбивается на конечное число областей, в каждой из которых гауссова кривизна K не меняет знака и обращается в нуль только на границах областей [1],

3) полная кривизна всех областей положительной кривизны равна 4π,

4) области, где $K>0$, отделены от областей, где $K<0$, кусочно-гладкими кривыми.

Легко показать, что можно построить поверхность T, гомеоморфную шару с любым числом ручек. Для построения можно исходить из гладкой выпуклой поверхности, имеющей плоскость симметрии P, причем на этой поверхности

[1] Это ограничение будет несколько ослаблено.

есть плоские куски, ни один из которых не имеет общих точек с P. Плоские куски будут попарно симметричны. Если все их вырезать и соединить границы образовавшихся попарно симметричных дыр вогнутыми поверхностями так, чтобы на границах дыр не получалось ребер, то получится поверхность T, гомеоморфная шару с числом ручек, равным числу пар плоских кусков на исходной выпуклой поверхности. Полная кривизна той части полученной поверхности, где гауссова кривизна положительна, равна полной кривизне исходной замкнутой поверхности, так как полная кривизна плоских кусков равна нулю.

В возможности указанного соединения попарно симметричных границ дыр вогнутыми поверхностями можно убедиться следующим образом. Пусть P_1 и P_2 — плоскости двух таких симметричных границ L_1 и L_2. L_1 и L_2 — выпуклые кривые. Плоскости P_1, P_2, P пересекаются по одной прямой. Выберем эту прямую за ось x, ось y направим перпендикулярно ей в плоскости P, а ось z направим перпендикулярно плоскости P. Подвергнем пространство проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad z' = \frac{z}{y}.$$

Это преобразование сделает прямую, по которой пересекаются плоскости P_1 и P_2, бесконечно удаленной. Следовательно, сами плоскости P_1 и P_2 станут параллельными. Кривые L_1 и L_2 останутся, конечно, выпуклыми и будут лежать в своих плоскостях симметрично относительно плоскости P. (Для симметричных точек на кривых L_1 и L_2 до преобразования имеем $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = -z_2$, а потому после преобразования те же точки будут снова симметричны относительно плоскости P_1, так как для них

$$x'_1 = x'_2, \quad y'_1 = y'_2, \quad z'_1 = -z'_2.)$$

Возьмем теперь прямую t, перпендикулярную плоскостям P_1 и P_2 (P_1 и P_2 теперь параллельны) и проходящую внутри кривых L_1 и L_2. Возьмем плоскость Q, проходящую через t, и в ней выпуклую дугу l, обращенную выпуклостью к t и касающуюся плоскостей P_1 и P_2 в точках, лежащих на кривых L_1 и L_2. Будем вращать плоскость Q вокруг прямой t, подвергая ее при этом такому растяжению или сжатию к прямой t, чтобы дуга l продолжала касаться плоскостей P_1 и P_2 в точках, лежащих на L_1 и L_2. При этом каждая точка на l будет описывать кривую, подобную L_1, а значит, и L_2. В результате получится поверхность, касающаяся плоскостей P_1 и P_2 по кривым L_1 и L_2. Сечения ее плоскостями, параллельными P_1 и P_2, будут выпуклыми, а сечения плоскостями Q — вогнутыми. Поэтому построенная поверхность будет иметь отрицательную кривизну всюду кроме точек на L_1 и L_2. Если теперь обратным проективным преобразованием вернуть кривые L_1 и L_2 в их первоначальное положение, то построенная поверхность перейдет в ту, которая нам нужна. Как известно, проективные преобразования поверхностей сохраняют знак гауссовой кривизны.

§ 2. Форма поверхностей T

Теорема. *У всякой поверхности T та ее часть, где гауссова кривизна положительна, является связным куском замкнутой выпуклой поверхности, и она отделена от частей отрицательной кривизны замкнутыми* *выпуклыми кривыми, лежащими каждая в одной касательной плоскости. Если дополнить часть поверхности T с положительной кривизной кусками касательных плоскостей, вырезаемыми указанными кривыми, то получится замкнутая выпуклая поверхность, внутри которой лежат части T с отрицательной кривизной.*

Для краткости мы будем обозначать гауссову кривизну через K; ту часть T, где $K \geqslant 0$, будем называть выпуклой.

1. Сферическое изображение выпуклой части T покрывает всю сферу, и притом никакая область на сфере не покрывается этим сферическим изображением более одного раза.

К T можно провести опорную плоскость любого направления. Она может касаться T только в точках $K \geqslant 0$. Значит, сферическое изображение выпуклой части T покрывает всю сферу. Так как полная кривизна выпуклой части, по условию, равна 4π, то, тем самым, никакая область на сфере не может быть покрыта этим сферическим изображением более одного раза.

2. Касательная плоскость в любой точке выпуклой части T — опорная к T.

Пусть в точке x на T $K > 0$, и допустим, что касательная плоскость в x не опорная к T. Тогда в некоторой окрестности $U(x)$ точки x $K > 0$, и касательные плоскости не являются опорными (так как предел опорных плоскостей есть опорная плоскость). Пусть ω — сферическое изображение $U(x)$. ω имеет внутренние точки, так как в x $K > 0$. У T есть опорные плоскости с нормалями, направленными в ω, и они касаются выпуклой части T. Поэтому область ω оказывается дважды покрытой сферическим изображением выпуклой части T, что противоречит установленному выше.

Так как предел опорных плоскостей есть опорная плоскость, то касательные плоскости в точках границы выпуклой части T — опорные.

3. Касательная плоскость P в точке x, где $K > 0$, не касается T ни в какой другой точке.

Допустим, что P касается T еще в точке x_1. В x_1 $K \geqslant 0$, так как, по доказанному, P — опорная. Возьмем окрестность $U(x)$ точки x, в которой $K > 0$. Пусть ее сферическое изображение есть ω. Тогда в окрестности точки x_1 найдется точка x_2, где $K > 0$, с нормалью, направленной в ω. Сферическое изображение окрестности точки x_2 будет налегать на ω, что невозможно, и, тем самым, наше утверждение доказано.

4. Мы хотим показать, что всякая связная компонента границы выпуклой части T лежит в одной касательной плоскости. Для этого достаточно показать, что любой ее гладкий отрезок лежит в одной касательной плоскости, так как тогда, вследствие непрерывности вращения касательных плоскостей, и вся она лежит в одной касательной плоскости.

Пусть L — гладкий отрезок границы выпуклой части T. Пусть s — длина его дуги. Если во всех точках L производная нормали n по s равна нулю, то L лежит в одной касательной плоскости. Допустим поэтому, что на L есть точка x_0, где

$$\frac{dn}{ds} \neq 0. \tag{1}$$

Касательная плоскость P_0 в точке x_0 — опорная к T. Если бы она касалась L в точках, сколь угодно близких к x_0, то неравенство (1) не имело бы места. Поэтому можно из L выделить отрезок, содержащий x_0 внутри и не содержащий других точек касания с плоскостью P_0. Этот отрезок мы и будем обозначать дальше через L.

5. Пусть n_0 — сферическое изображение точки x_0 и Λ — сферическое изображение L. В силу условия (1), Λ имеет в n_0 касательную и делит поэтому всякую достаточно малую окрестность n_0 на две „полуокрестности".

Мы выделим около x_0 малую окрестность $U(x_0)$, содержащую часть отрезка L и не содержащую никаких других частей T, где гауссова кривизна равна нулю. Тогда $U(x_0)$ не содержит кроме x_0 других точек, лежащих в плоскости P_0, так как точки, где $K>0$, не лежат в P_0 вследствие доказанного в п. 3, а точки, где $K<0$, вообще, не могут лежать в опорной плоскости. Кривая L выделяет из $U(x_0)$ полуокрестность $U^+(x_0)$, принадлежащую выпуклой части T.

Покажем, что сферическое изображение $U^+(x_0)$ покрывает только одну полуокрестность $\omega^+(n_0)$ точки n_0.

Для доказательства возьмем на L две точки x_1 и x_2, лежащие по разные стороны от x_0, и соединим их дугой l, лежащей в $U^+(x_0)$. Сферическое изображение λ дуги l имеет с Λ только две общие точки n_1 и n_2 — сферические изображения x_1 и x_2, так как никакая точка, где $K>0$, не имеет того же сферического изображения, что любая другая точка, где $K\geqslant 0$ (как это показано в п. 3). Будем стягивать l к L. Тогда λ будет стягиваться к Λ, зачерчивая сферическое изображение части $U^+(x_0)$. Так как λ не может пересекать Λ, то при этом она зачертит только одну полуокрестность точки n_0.

6. Сферическое изображение $U(x_0)$ содержит точки, сколь угодно близкие к n_0 и не принадлежащие $\omega^+(n_0)$.

Действительно, из условия (1) вытекает, что точка x_0 не является плоской точкой округления. Поэтому во всех направлениях, исходящих из нее, кроме главного направления, соответствующего нулевой кривизне, производная нормали отлична от нуля. Следовательно, через x_0 можно провести дугу, пересекающую L так, что ее сферическое изображение пересечет Λ.

7. Теперь мы достигнем желаемого результата, приведя к противоречию вывод п. 6 с выводом п. 5.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ — последовательность точек $U(x_0)$, сходящихся к x_0 и таких, что их сферические изображения не лежат в $\omega^+(n_0)$. В этих точках гауссова кривизна $K<0$. Поэтому касательные плоскости в них $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ пересекают $U(x_0)$. При достаточно больших m P_m не пересекают границу $U(x_0)$. Действительно, P_m сходятся к плоскости P_0, касательной в точке x_0, и если бы они при сколь угодно больших m пересекали границу $U(x_0)$, то и на P_0 были бы точки границы $U(x_0)$, чего нет в силу выбора $U(x_0)$. Но если P_m не пересекает границы $U(x_0)$, то она отрезает от $U(x_0)$ „шапочку", опирающуюся на P_m [т. е. часть $U(x_0)$, не содержащую точек границы $U(x_0)$ и лежащую по одну сторону от P_m]. В точке x_m' этой „шапочки", наиболее удаленной от P_m, имеется касательная плоскость P_m', параллельная P_m. Вместе с тем, в x_m' гауссова кривизна $K\geqslant 0$, так как „шапочка" лежит по одну сторону от P_m', а это как раз противоречит выводу п. 5.

8. Итак, мы показали, что всякая связная компонента границы выпуклой части T лежит в одной касательной плоскости.

Построим выпуклую оболочку T^* поверхности T. Все опорные плоскости к T касаются T в выпуклой ее части. Поэтому выпуклая часть T целиком лежит на поверхности T^*. Плоские кривые, лежащие на поверхности T^*, необходимо выпуклые. Поэтому всякая связная компонента границы выпуклой части T есть замкнутая выпуклая кривая.

Сферическое изображение всех этих кривых состоит из отдельных изолированных точек, так что любые две точки на сфере можно соединить непрерывной дугой, не проходящей через эти точки. Такой дуге на выпуклой части T соответствует также непрерывная дуга, соединяющая любые две ее точки. (Сферическое изображение всякой поверхности положительной кривизны взаимно непрерывно.) Поэтому выпуклая часть T связна.

9. В определении поверхностей T мы требовали, чтобы гауссова кривизна обращалась в нуль только на границе выпуклой части. Это требование можно, однако, ослабить. Именно, можно предполагать, что гауссова кривизна помимо границы выпуклой части T обращается в нуль еще на любом множестве M точек на T с одним условием, чтобы на границе выпуклой части T точки сгущения множества M образовывали нигде не плотное множество M^1. И при этом более общем предположении наша теорема будет верна. Действительно, достаточно, во-первых, взять точку x_0 на L так, чтобы она не принадлежала M^1. Так как M^1 нигде не плотно на L, то такие точки образуют на нем плотное множество, а потому, если в них

$$\frac{dn}{ds}=0,$$

то то же будет во всех точках L. Во-вторых, окрестность $U(x_0)$ следует взять такую, чтобы она не содержала точек множества M. Наконец, рассуждение п. 3 следует применить не ко всей T, а только к $U(x_0)$, что достаточно для проведения рассуждений п. 5. Если все это сделать, то доказательство нашей теоремы распространится на указанный более общий класс поверхностей T. В следующем параграфе поверхность T можно понимать в этом расширенном смысле.

§ 3. Неизгибаемость поверхностей T

Лемма. *Если две поверхности T изометричны, то кривые, ограничивающие их выпуклые части, соответственно, конгруэнтны.*

Пусть T_1 и T_2 — изометричные поверхности T и L_1 и L_2 — пара соответственных замкнутых кривых, входящих в границы их выпуклых частей. По изометрии геодезические кривизны в соответственных точках L_1 и L_2 равны. Но L_1 и L_2 лежат каждая целиком в одной касательной плоскости. Поэтому их геодезические кривизны равны обыкновенным кривизнам. Значит, эти последние в соответственных точках L_1 и L_2 равны, а потому L_1 и L_2 конгруэнтны.

Теорема. *Две изометричные аналитические поверхности T конгруэнтны.*

1. Пусть T_1 и T_2 — две изометричные аналитические поверхности T. Возьмем на них пару соответственных дуг S_1, S_2 границ их выпуклых частей

таких, чтобы кривизна их была отлична от нуля[1]. По доказанной только что лемме эти дуги суть конгруэнтные плоские кривые. Рассмотрим на T_1 и T_2 соответственные окрестности U_1, U_2 этих дуг. Пусть E, F, G, L, M, N, как всегда, коэфициенты первой и второй форм. Индексы 1 и 2 будут указывать на отношение L, M, N, соответственно, к T_1 и T_2. Положим

$$L = L_1 + L_2, \quad M = M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2 \tag{1}$$

и

$$l = L_1 - L_2, \quad m = M_1 - M_2, \quad n = N_1 - N_2. \tag{2}$$

Выберем на U_1 и U_2 за параметрические линии u геодезические ортогональные к S_1 и S_2 и за линии v их ортогональные траектории. Тогда

$$F = 0, \quad E = 1. \tag{3}$$

Отвлекаясь в дальнейшем от окрестностей U_1 и U_2, мы будем рассматривать соответствующую область D параметров u, v с заданными на ней E, F, G, L, M, N, l, m, n. Из равенства гауссовых кривизн на U_1 и U_2 (т. е. из $L_1N_1 - M_1^2 = L_2N_2 - M_2^2$), в силу формул (1), получаем

$$Ln - 2Mm + Nl = 0, \tag{4}$$

а из формул Кодацци [вследствие их линейности относительно коэфициентов второй формы и условия (3)]:

$$l_v - m_u = \frac{G_u}{2G} m, \tag{5}$$

$$m_v - n_u = \frac{G_v}{2G} m - \frac{G_u}{2G}(n + Gl), \tag{6}$$

$$L_v - M_u = \frac{G_u}{2G} M, \tag{7}$$

$$M_v - N_u = \frac{G_v}{2G} M - \frac{G_u}{2G}(N + GL). \tag{8}$$

2. При $u = 0$, т. е. на линиях S_1 и S_2, в силу того, что они плоские, имеем

$$M = N = m = n = 0. \tag{9}$$

При $u = 0$ все производные от L по u не могут исчезать, так как в области, соответствующей выпуклым частям T_1 и T_2, $L > 0$. Пусть[2]

$$L_{u^k} \neq 0 \quad (k \geqslant 0) \tag{10}$$

есть первая не равная нулю производная при $u = 0$. Покажем, что в таком случае при $u = 0$

$$M_{u^h} = N_{u^h} = 0 \quad (h \leqslant k). \tag{11}$$

[1] Такие дуги найдутся, так как они принадлежат замкнутым выпуклым кривым.

[2] Индекс u^k указывает k-ю производную, а при $k = 0$ — самую функцию.

Для $h=0$ это верно в силу равенства (9). Покажем, что если это верно при $h<k$, то это верно и при $h+1$. Продиференцируем формулу (7) h раз. Тогда, так как $L_{vu^h}=0$, $M_{u^i}=N_{u^i}=0$ при $i\leqslant h$, то получим

$$M_{u^{h+1}}=0$$

и точно так же, диференцируя формулу (8) h раз, получим

$$N_{u^{h+1}}=0.$$

3. Доказательство теоремы мы получим, показав, что l, m, n и все их производные по u, v исчезают при $u=0$. Тогда по аналитичности T_1 и T_2 и из определения l, m, n получим, что не только первые, но и вторые формы поверхностей T_1 и T_2 совпадают. Следовательно, они конгруэнтны.

Равенства (9) показывают, что при $u=0$ m и n, а следовательно, и все их производные по v, исчезают. Покажем прежде всего, что при $u=0$ $l=n_u=0$. Для этого продиференцируем формулу (4) $k+1$ раз. Тогда вследствие того, что при $u=0$

$$m=n=0,\quad L_{u^h}=0\ (h<k),\ M_{u^h}=N_{u^h}=0\ (h\leqslant k) \tag{11}$$

и

$$L_{u^k}\neq 0,$$

получим

$$L_{u^k}n_u+N_{u^{k+1}}l=0. \tag{12}$$

Вместе с тем, при $u=0$ формула (6) дает

$$n_u=\frac{1}{2}G_u l. \tag{13}$$

Диференцируя k раз по u формулу (8), получим при $u=0$

$$N_{u^{k+1}}=\frac{1}{2}G_u L_{u^k}. \tag{14}$$

Это равенство, вместе с (12), даст

$$n_u=-\frac{1}{2}G_u l. \tag{15}$$

Покажем, что при $u=0$

$$G_u\neq 0. \tag{16}$$

Тем самым, из равенств (13) и (15) получим

$$l=n_u=0. \tag{17}$$

По условию, кривизны дуг S_1 и S_2 отличны от нуля. Вместе с тем, они равны между собою и равны их геодезическим кривизнам, так как S_1 и S_2 лежат в касательных плоскостях. Поэтому из известной формулы для геодезической кривизны линии $u=0$ (при $E=1$)

$$\frac{1}{\rho_g}=-\frac{G_u}{2G} \tag{18}$$

получаем (16), так что (17) доказано. Поскольку при $u=0$ $l=0$, то все производные l по v при $u=0$ исчезают. Поэтому из формулы (5) получаем

$$m_u=0 \quad (u=0).$$

4. Повторяя проведенное рассуждение, покажем, что при $u=0$ все производные от l, m, n исчезают. Пусть

$$l_{u^i}=0 \ (i<h), \ m_{u^i}=n_{u^i}=0 \ (i\leqslant h); \tag{19}$$

покажем, что тогда

$$l_{u^h}=m_{u^{h+1}}=n_{u^{h+1}}=0. \tag{20}$$

Диференцируя (4) $k+h+1$ раз, получим, благодаря (19) и (11),

$$L_{u^k}n_{u^{h+1}}+N_{u^{k+1}}l_{u^h}=0. \tag{21}$$

Отсюда, по формуле (14), имеем

$$n_{u^{h+1}}=-\frac{1}{2}G_u l_{u^h}. \tag{22}$$

Вместе с тем, диференцируя (6) по u h раз, получаем, что

$$n_{u^{h+1}}=\frac{1}{2}G_u l_{u^h}, \tag{23}$$

и следовательно, благодаря тому, что $G_u\neq 0$,

$$l_{u^h}=n_{u^{h+1}}=0. \tag{24}$$

Наконец, диференцируя (5) h раз по u, получим, вследствие (19) и (24), что

$$m_{u^{h+1}}=0. \tag{25}$$

Таким образом, наша теорема доказана.

Теорема. *Аналитическая поверхность T жесткая.*

Рембс доказал жесткость выпуклых поверхностей, ограниченных кривыми, лежащими каждая в одной касательной плоскости [1]. Поэтому выпуклая часть всякой поверхности T уже, сама по себе, является жесткой. Остается эту жесткость распространить за пределы выпуклой части, что сразу получается, если иметь в виду аналитичность T. Поэтому не только T, но и всякий ее кусок, содержащий выпуклую часть T, жесткий.

Заметим, что если T — кусочно-аналитическая и ее аналитические куски не разделяются только асимптотическими линиями одного семейства, то невозможность ее нетривиальных изометрических отображений и ее жесткость доказываются точно так же. При этом при доказательстве жесткости следует иметь в виду, что производные l, m, n от коэфициентов второй формы по параметру t, от которого зависит бесконечно малое изгибание, удовлетворяют продиференцированным по t уравнениям Гаусса-Кодацци, т. е. уравнениям (4), (5), (6).

Институт математики и механики
Ленинградского университета.

(Поступило в редакцию 29/I 1938 г.)

[1] Rembs, Unverbiegbare offene Flächen, Sitz.-Ber. Preuss. Akad., 1930.

Über eine Klasse geschlossener Flächen

A. Alexandroff (Leningrad)

(Résumé)

Wir betrachten die geschlossenen zweimal stetig differenzierbaren Flächen, die wir T-Flächen nennen, und die die folgenden Eigenschaften besitzen:

1) Eine T-Fläche besitzt Gebiete positiver und negativer Gaussscher Krümmung, die voneinander durch stückweise glatte Kurven getrennt sind.

2) Die Gausssche Krümmung verschwindet nur auf diesen Kurven (wir können annehmen, dass die Gausssche Krümmung auf einer Menge von inneren Punkten der Gebiete, in denen sie das Zeichen nicht wechselt, verschwindet, deren Häufungspunkte eine nirgends-dichte Menge auf den Grenzkurven bilden).

3) Die Totalkrümmung der Gebiete positiver Krümmung beträgt 4π.

Die Torusfläche stellt das einfachtse Beispiel einer T-Fläche dar. Es existieren T-Flächen von beliebigem Geschlecht $p \geqslant 1$.

Satz I. *Auf jeder T-Fläche bilden die Gebiete positiver Krümmung ein zusammenhängendes Stück einer geschlossenen konvexen Fläche. Die Grenzkurven (die dieses einzige Gebiet mit positiver Krümmung von den Gebieten mit negativer Krümmung trennen) sind geschlossene konvexe Kurven, deren jede in einer Tangentialebene an die Fläche liegt.*

Satz II. *Sind zwei analytische T-Flächen isometrisch, so sind sie entweder kongruent oder symmetrisch.*

Z. B. erlaubt die Torusfläche keine nichttrivialen isometrischen Abbildungen.

Satz III. *Jede analytische T-Fläche ist starr.*

Institut der Mathematik und Mechanik
an der Staatsuniversität Leningrad.