Ü/63

Vestnik Leningradskogo Universiteta
M a t e m a t i k a
(1966) 19, S. 5/11

Aleksandrov, A.D. : ÜBER DIE FLÄCHENKRÜMMUNG

§ 1. Wir werden hier das folgende Theorem über Flächen in E_3 beweisen. Es wird angenommen, die Flächen besäßen Normalen bestimmter Richtung.

T h e o r e m 1. S sei eine analytische Fläche vom Typ einer Sphäre*, und S^o sei eine gleiche Fläche mit einer überall positiven Krümmung, folglich konvex. Es wird behauptet, daß S entweder gleich und parallel zu S^o ist oder solche Punkte $x \in S$, $x^o \in S^o$ mit parallelen Normalen existieren, daß die Krümmung eines beliebigen Normalschnitts in x sich von der Krümmung des parallelen Normalschnitts in x^o unterscheidet.

Aus dem Theorem 1 folgt die folgende Behauptung.

T h e o r e m 2. S, S^o seien solche Flächen wie in Theorem 1 und $k_1 \geq k_2$, $k_1^o \geq k_2^o$ ihre Hauptkrümmungen in den Punkten $x \in S$, $x^o \in S^o$ mit parallelen Normalen. $f(\xi, \eta; n)$ sei eine solche Funktion der numerischen Variablen ξ, η und des Einheitsvektors n , daß bei $\xi > \xi'$ und $\eta > \eta'$ immer $f(\xi, \eta; n) > f(\xi', \eta';$ ist. Wenn dann in jedem Punkt $x \in S$

(1)

---

* Darunter kann man die Paarmenge (x, ξ) verstehen, wobei $x \in E_3$, ξ ein Punkt einer beliebigen Sphäre Σ ist, der ganz Σ durchläuft und x eine ⟨die⟩ analytische Funktion des entsprechenden ξ ist, d.h. wenn beispielsweise u, v die Breite und Länge sind, dann wird der Vektor x (u, v) des Punktes x in die Potenzreihe nach $(u - u_o)$, $(v - v_o)$ in der Umgebung u_o, v_o entwickelt. Die Fläche S ist im Sinne dieser Definition homöomorph zu einer Sphäre. In genau dem gleichen Sinne wird in § 8 die Fläche verstanden, die einem Bereich ⟨ Gebiet ⟩ auf der Sphäre homöomorph ist. Unter einem Flächenpunkt wird streng genommen das Paar (x, ξ) verstanden, obwohl üblicherweise explizit nur von x gesprochen wird. Eine solche Definition schließt beispielsweise nicht aus, daß die Fläche auf einen Punkt zurückzuführen ist, d.h. x = const. Im Theorem wird jedoch angenommen, daß die Flächen glatt sind, d.h. $x_u \times x_v \neq 0$.

ist, wobei n die Normale in x ist, dann ist die Fläche S gleich und parallel zu S^o.

Tatsächlich folgt aus (1) - aufgrund der Monotonie von f - daß in jedem $x \in S$ entweder $k_1 \geq k_1^o$, $k_2 \leq k_2^o$ oder $k_1 \leq k_1^o$, $k_2 \geq k_2^o$ ist. Daher gibt es in den entsprechenden Punkten x, x^o immer ein Paar paralleler Normalschnitte mit gleichen Krümmungen; und dann ist nach dem Theorem 1 S gleich und parallel zu S^o.

Das einfachste Beispiel bekommen wir, wenn $f = k_1 + k_2$ und S^o eine Sphäre ist. Entsprechend folgt aus dem Theorem 2 das Theorem von H. Hopf [1]: Eine Fläche vom Typ einer Sphäre, die eine konstante mittlere Krümmung aufweist, ist selbst eine Sphäre. (In [1] wird auch eine allgemeinere Behauptung bewiesen). Man braucht hier die Analytizität von S nicht vorauszusetzen, da sie für eine Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung ganz von selbst durch die Analytizität und strenge Elliptizität der entsprechenden Differentialgleichung gewährleistet ist [2]. Aus genau dem gleichen Grund gilt dies immer wenn S^o analytisch ist und f symmetrisch bezüglich ξ, η, analytisch bezüglich aller Argumente ist und $\frac{df}{d\xi} \frac{df}{d\eta} > 0$.

Im übrigen ist es, wenn S selbst als konvex vorausgesetzt wird, hinreichend, die Funktion f als bei $\xi, \eta > 0$ definiert anzunehmen.

Ein zu dem Theorem 2 analoges Theorem wurde vom Autor unter den Voraussetzungen bewiesen [3], daß S selbst eine überall positive Krümmung hat und f solchermaßen ist, daß $f(\xi, \eta; n) > f(\xi', \eta'; n)$, sobald $\xi > \xi'$, $\eta \geq \eta'$ oder $\xi \geq \xi'$, $\eta > \eta'$. Es gelingt S, S^o von der Analytizität zu befreien [4], wenn man $\frac{df}{d\xi} \frac{df}{d\eta} > 0$ voraussetzt oder eine bestimmte Differenzenbedingung für die Krümmungen $k_1 - k_1^o$, $k_2 - k_2^o$ in der Nähe der Punkte, wo $k_1 = k_1^o$, $k_2 = k_2^o$, einführt.

Es muß hierzu bemerkt werden, daß in den Theoremen 1, 2 zum mindesten eine zweimalige ⟨wiederholte⟩ Differenzierbarkeit nötig ist. Das zeigt das Beispiel eines Zylinders, der an beiden Enden mit Halbkugeln verschlossen ist. Auf einer solchen Fläche ist $k_1 = \text{const}$.

§ 2. Wir formulieren jetzt das Theorem 1 in der Form , in der wir es beweisen werden. Die Fläche S_o sei so beschaffen wie im Theorem 1 : Sie sei geschlossen, konvex mit einer überall positiven Krümmung und analytisch. Nach den bekannten Definitionen der relativen Differentialgeometrie [5] nehmen wir S_o als "bedingte Einheitssphäre" ⟨Eichfläche⟩ an. Den Punkten x der Fläche S werden die Punkte $y \in S_o$ nach der Parallelität der Normalen gegenübergestellt. Die Richtungen dx im Punkt x, für die $kdx = dy$, werden die Hauptrichtungen hinsichtlich S_o genannt und die entsprechenden Werte k - die relativen Hauptkrümmungen. Dabei gibt es entweder nur zwei Hauptrichtungen und ihnen entsprechen verschiedene Werte k, oder alle Richtungen sind Hauptrichtungen und ihnen entspricht ein k .

<u>T h e o r e m 1-a.</u> S sei eine analytische Fläche vom Typ einer Sphäre und $k_1(x) \geq k_2(x)$, $x \in S$ ihre Hauptkrümmungen in bezug auf irgendeine bedingte Sphäre S_o . Wenn es eine solche Zahl k_o gibt, daß überall auf S $k_1(x) \geq k_o \geq k_2(x)$ ist, dann ist S zu S_o ähnlich, so daß $k_1 \equiv k_2 \equiv k_o$; der Ähnlichkeitskoeffizient ist offensichtlich k_o^{-1} . ($k_o = 0$ ist ausgeschlossen, da sonst überall $k_1 k_2 \leq 0$ wäre; und das ist unmöglich, weil das Vorzeichen von $k_1 k_2$ das gleiche ist wie bei der Gaußschen Krümmung.)

Die Behauptung dieses Theorems ist gleichbedeutend mit der, daß wenn S zu S_o nicht ähnlich ist, sich bei jedem k_o auf ihr ein Punkt x befindet, wo entweder $k_o > k_1 \geq k_2$ oder $k_o < k_2 \leq k_1$ ist. In einem solchen Punkt sind die Krümmungen aller Normalschnitte der Fläche S größer oder - umgekehrt - kleiner als die Krümmungen der parallelen Schnitte der Fläche S_o in dem Punkt y_o mit einer parallelen Normalen. Umgekehrt ist, wenn letzteres zutrifft, entweder $k_o > k_1 \geq k_2$ oder $k_o < k_2 \leq k_1$. (Das Gesagte wird ganz klar, wenn man feststellt, daß die Definition der relativen Hauptkrümmungen invariant hinsichtlich einer gemeinsamen affinen Abbildung der Flächen S, S_o ist. Wenn man jedoch durch eine solche Abbildung die Dupinsche Indikatrix in dem jeweiligen Punkt der Fläche S_o in einen Kreis verwandelt, so werden in dem entsprechenden

Punkt auf S die relativen Hauptrichtungen und -krümmungen zu gewöhnlichen Richtungen und Krümmungen.

Aus dem Gesagten wird klar, daß das Theorem 1-a gleichbedeutend mit dem Theorem 1 ist, wenn man in letzterem S^{o} durch $k_o^{-1} S_o$ ersetzt.

Wir bemerken hierzu noch, daß das Theorem 1-a offensichtlich gleichbedeutend mit der folgenden Behauptung ist. Wenn S der bedingten Sphäre S_o nicht ähnlich ist, dann ist $\min k_1(x) < \max k_2(x)$.

Endlich kann man feststellen, daß man in dem Theorem 2 die Hauptkrümmungen hinsichtlich irgendeiner bedingten Sphäre im Auge haben kann. Dann folgt aus ihm beispielsweise, daß eine Fläche vom Typ einer Sphäre, die eine konstante mittlere Krümmung in bezug auf S_o hat, zu S_o ähnlich ist. Hier ist die Bedingung der Analytizität von S wiederum von selbst erfüllt, da S_o als analytisch vorausgesetzt wird.

Am Ende des Artikels werden wir eine Verallgemeinerung unserer Theoreme für Flächen mit Rand aufzeigen.

§ 3. Wir beweisen das Theorem 1-a. Auf S sei $k_1(x) \geq k_o \geq k_2(x)$. Wir beweisen, daß dann in jedem Punkt mindestens eine der Gleichungen $k_1 = k_o$, $k_2 = k_o$ gilt. Wir nehmen jedoch an, daß dies nicht so ist.

Wir bezeichnen mit x und y die Radiusvektoren der Punkte auf S und S_o, ordnen Punkte mit parallelen Normalen einander zu und konstruieren so die Fläche S', die durch den Vektor[*]

(2)

bestimmt wird.

Unter den Hauptrichtungen und -krümmungen werden wir diese Begriffe in bezug auf S_o verstehen. Wenn dx die Hauptrichtung auf S ist, dann ist $k_1 dx = dy$ und aus (2) folgt, daß

---

[*] Nach der in der Fußnote zu § 1 gegebenen Definition wird S' eine analytische Fläche vom Typ einer Sphäre, und (2) legt die Homöomorphie von S auf S' fest. S' kann jedoch Singularitäten haben. Darüber hinaus besteht die Behauptung des Theorems 1 gerade darin, daß S' auf einen Punkt zurückgeführt wird, während bei der Voraussetzung, daß irgendwo $k_1 \neq k_o$, $k_2 \neq k_o$, das nicht so ist.

, (3)

d.h. die entsprechende Richtung dx' auf S' ist ebenfalls die Hauptrichtung und ihr entspricht die Krümmung k_i'. Eine Ausnahme bilden singuläre Punkte, wo $k_1 = k_o$ oder $k_2 = k_o$. In den übrigen Punkten ist S' regulär; ihre Hauptrichtungen sind parallel zu jenen auf S; darüber hinaus ist ihre Tangentialebene parallel zur Tangentialebene von S. Daher wird für jede beliebige Menge regulärer Punkte die sphärische Abbildung die gleiche sein, wie für die entsprechende Menge auf S (vielleicht genau bis auf die Symmetrie bezüglich der Sphärenmitte, was der Umkehrung der Normalen entspricht; das ist jedoch für uns nicht wesentlich.).

Zugleich ist - da $k_1 \geq k_o \geq k_2$ und in den regulären Punkten $k_1 \neq k_o$, $k_2 \neq k_o$ ist, in ihnen $(k_o - k_1)(k_o - k_2) < 0$. Daher folgt aus (3), daß in solchen Punkten die Produkte $k_1 k_2$ und $k_1' k_2'$ entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, oder wenn $k_1 k_2 = 0$ ist, dann ist auch $k_1' k_2' = 0$. Das Vorzeichen des Produkts der relativen Krümmungen ist das gleiche wie bei der Gaußschen Krümmung. Daher folgt aus dem Angeführten in Verbindung mit dem Vorhergehenden: wenn M eine Punktmenge auf S ist, wo $k_1 > k_o > k_2$ und M' die entsprechende Menge auf S' ist, dann haben wir für die Integralkrümmungen

. (4)

§ 4. N sei eine Menge jener Punkte auf S, wo $(k_o - k_1)(k_o - k_2) = 0$ ist. Sie ist nichtleer. Sonst wäre S' regulär und nach (4) wäre ihre Totalkrümmung $-\omega(S) = -4\pi$, was nicht möglich ist. Im übrigen ist das gleiche aus der Existenz von (relativen) Nabelpunkten klar: in ihnen ist notwendig $k_1 = k_2 = k_o$, wenn überall $k_1 \geq k_o \geq k_2$ ist.

Wir unterscheiden die Punkte $x \in N$ dreier Typen: (I) Punkte, die auf den Linien der Krümmung k_o liegen, d.h. auf den Einhüllenden der Hauptrichtungen, für die $k_o dx = dy$; (II) Punkte, die nicht zu den erwähnten Linien gehören, aber so beschaffen sind, daß in ihnen $k_1 = k_2 = k_o$; (III) alle übrigen Punkte; in ihnen ist entweder $k_1 \neq k_o$

oder $k_2 \neq k_o$ und sie liegen nicht auf den Linien der Krümmung k_o.

Wir beweisen, daß in den Punkten $x' \in S'$, die den Punkten vom Typ (III) entsprechen, die Fläche S' glatt ist.* Es sei z.B. in dem Punkt x vom Typ (III) $k_1 = k_o$, $k_2 \neq k_o$. Durch ihn verläuft die Krümmungslinie L_2, die k_2 entspricht, und sie wird geschnitten von den Krümmungslinien L_1, die k_1 entsprechen. In der Umgebung von x ist keine einzige davon eine Linie der Krümmung k_o. Daher ist auf jeder von ihnen $k_1 = k_o$ das Maximum in einer endlichen Anzahl von Punkten (infolge der Analytizität von S).

Längs der Krümmungslinien ist $k_i dx = dy$. Daher folgt aus (2), daß entlang der entsprechenden Linien auf S'

(5)

ist.
Da $k_2 \neq k_o$ ist, folgt von daher, daß die Kurve L_2', die L_2 entspricht, glatt ist. Weiter ist $k_1 \geq k_o$ und $k_1 = k_o$ nur in einer endlichen Anzahl von Punkten auf jeder L_1, d.h. überall auf L_1 - mit Ausnahme dieser Punkte - ist $k_o - k_1 < 0$. Daher folgt aus (5), daß entlang L_1

. ⟨a⟩

Das bedeutet, daß die Kurven L_1' ebenfalls glatt sind und ihre Tangenten parallel zu den Tangenten der Kurven L_1 sind. Folglich wird in der Umgebung des Punktes x' die Fläche S' durch die glatten Kurven L_1', die die glatte Kurve L_2 schneiden, gebildet. Von daher ist klar, daß S' in der Umgebung von x' glatt ist.

Da $S' \in C'$ in den Punkten x', die den Punkten vom Typ (III) entsprechen, folgt hieraus, daß die Hinzufügung solcher Punkte zu den regulären nicht die Gleichung (4) stört.

---

* Die hier - wie auch in § 5 - angestellte Betrachtung der singulären Punkte enthält genau genommen nichts neues: derartige Schlußfolgerungen kann man beispielsweise bei Kohn-Vossen [6] finden.

§ 5. Es sei jetzt x_0 ein Punkt vom Typ (II) und x'_0 - der entsprechende Punkt auf S'. Wir beweisen, daß S' in x'_0 eine Tangentialebene P'_0 hat, die parallel zur Tangentialebene P_0 von S in dem Punkt x_0 ist. (Das ist dem Sinn zu verstehen, daß die⟨Kontingenz⟩ ["relative Tangentialebene"?] der Fläche S' in x'_0 die Ebene P'_0 ist. Die Projektion der Umgebung des Punktes x'_0 auf P'_0 braucht jedoch nicht schlicht zu sein.)

Wir bemerken, daß es erstens in der Nähe von x_0 keine anderen Punkte vom Typ (II) gibt. Sonst gäbe es - nach der Analytizität von S - eine Kurve solcher Punkte, die x_0 enthält. Die Kurve, auf der $k_1 = k_2 = k_0$ ist, ist jedoch eine Linie der Krümmung k_0, so daß x_0 ein Punkt vom Typ (I) wäre. Hieraus und aus dem in § 4 Bewiesenen folgt, daß in einer gewissen Umgebung U' des Punktes x'_0 die Fläche S' glatt ist; x'_0 selbst ist dabei ausgeschlossen. Die Tangentialebenen in den Punkten $x' \in U' - (x'_0)$ sind parallel zu den Tangentialebenen von S in den entsprechenden Punkten x . Daher sind sie der Richtung nach der Ebene P_0 ähnlich. Von daher ist die zu beweisende Behauptung schon hinreichend klar.

Angenommen, U sei tatsächlich die Umgebung von x_0. Man kann sie so klein wählen, daß sie weder andere Punkte vom Typ (II), noch solche Punkte enthält, deren Bilder auf S' auf den Punkt x'_0 fallen. Es sei h die Abbildung von S auf S' und p - die Projektion auf die Ebene P'_0. Innerhalb der kleinen Umgebung U' des Punktes x'_0 ist p lokal homöomorph infolge der oben angeführten Eigenschaft der Tangentialebenen. Folglich ist die Abbildung ph von U auf P'_0 ebenfalls lokal homöomorph. Daher umfaßt -wenn der Kreis ⟨Kontur⟩ C in U x_0 einschließt - der Kreis ⟨Kontur⟩ C'' = ph(C) x'_0, und das Bild ph(U) der Umgebung U bildet eine Umgebung des Punktes x'_0. Wenn durch die Normale zur Ebene P'_0 im Punkt x'_0 die Halbebene Q gelegt wird, so schneidet sie U'. Wir wählen die Punkte x' auf dem Schnittpunkt $Q \cap U'$ als gegen x'_0 konvergierend. Die Tangentialebenen in ihnen konvergieren gegen P'_0. Von daher ist es einfach zu schließen, daß die Strahlen x'_0x' zum Strahl $Q \cap P'_0$ konvergieren. Damit ist bewiesen, daß die Ebene P'_0 eine Tangentialebene der Fläche S' in dem Punkt x'_0 ist. (Die Abbildung ph ist die ⟨"Überdeckung"⟩, das Bild U - (x_0) überdeckt die Umgebung von x'_0 in

P'_o mehrmals.)

Jetzt ist offensichtlich, daß der auf S' gemessene volle Winkel um den Punkt x'_o herum nicht kleiner als 2π ist. Die Krümmung $\omega(x'_o)$ ist jedoch 2π minus diesen Winkel.* Daher ist $\omega(x'_o) \leq 0$. Daraus folgt, daß die Hinzufügung der Punkte vom Typ (II) zu den regulären die Gleichung (4) in die Ungleichung

(6)

verwandelt.
Nach dem in § 4 Bewiesenen ist diese Ungleichung auch dann gültig, wenn M Punkte vom Typ (III) enthält. Daher hätte - wenn die singulären Punkte nur vom Typ (II), (III) wären - die Fläche S' die Krümmung $\omega(S') \leq - \omega(S) = - 4\pi$, was nicht möglich ist. Folglich gibt es auf S Punkte vom Typ (I), d.h. es gibt Linien der Krümmung k_o.

§ 6. Somit existieren auf S notwendig Linien der Krümmung k_o. Aus (5) folgt, daß längs einer solchen Kurve $dx' = 0$ ist, d.h. auf der Fläche S' entspricht ihr ein Punkt.

Nach der Analytizität von S bilden diese Kurven ein Netz aus einer endlichen Anzahl topologischer Strecken ⟨Abschnitte⟩ ohne freie Enden, das S in eine endliche Anzahl von Bereichen ⟨Gebieten⟩ untergliedert.

Es sei G ein solcher Bereich und G' der entsprechende Bereich auf S'. Jeder zusammenhängenden Grenzkomponente des Bereichs G entspricht auf S' ein Punkt. Wenn man zu G' diese Punkte x'_i hinzufügt, dann erhalten wir eine Fläche vom Typ einer Sphäre. Daher ist $\omega(G') + \Sigma\, \omega(x'_i) = 4\pi$. Die Krümmung eines Punktes ist jedoch immer nicht größer als 2π, so daß $\Sigma\, \omega(x'_i) \leq 2\pi m$, wobei m die Anzahl der Grenzkomponenten des Bereichs G ist. Außerdem ist infolge von (6) $-\omega(G') \geq \omega(G)$. All dies zusammen liefert

. ⟨b⟩

* Hier wie auch weiter benutzen wir den Begriff der Krümmung im Sinne der allgemeinen Theorie [7]. Man kann jedoch mit dem üblichen Begriff auskommen, wenn man das Gauss - Bonnet - Theorem benutzt, was die Darlegung nur erschwert. Wir bemerken hierzu, daß $\omega(x'_o) = 2\pi(1 - m)$ ist, wobei m die Häufigkeit der "Überdeckung" der Umgebung des Punktes x'_o in der Ebene P'_o bei der Abbildung ph ist.

Summiert man alle Bereiche und wendet man an, daß $\sum \omega(G) = 4\pi$, gewinnt man daraus $4\pi \leq 2\pi \sum m - 4\pi f$, wobei f die Anzahl der Bereiche ist; d.h.

. (7)

Wie wir uns jetzt jedoch überzeugen können, gilt für jedes Netz auf einer ⟨der⟩ Sphäre die Ungleichung

. (8)

Angenommen wir haben ein Netz, das aus k zusammenhängenden Komponenten besteht, wobei - wie auch oben - f die Anzahl der Bereiche ist, $n = \sum m$ - die Summe der Zahl zusammenhängender Grenzkomponenten der Bereiche ist. C sei eine der zusammenhängenden Komponenten des Netzes und G_i - jene Bereiche, deren Grenzen Teile von C enthalten. Für jedes solches Gebiet ist der Teil seiner Grenze, der zu C gehört, eine zusammenhängende Grenzkomponente (da es sich um ein Netz auf einer Sphäre handelt).

Wenn wir C ausschließen, dann verschmelzen die Bereiche G_i zu einem. Daher wird - wenn l die Anzahl dieser Bereiche ist - die Anzahl der Bereiche nach Ausschluß von C $f_1 = f - l + 1$. Und ⟨Aber⟩ da mit jedem Bereich G_i eine zu C gehörende zusammenhängende Komponente seiner Grenze ausgeschlossen wird, wird die Gesamtzahl der Grenzkomponenten der Bereiche $n_1 = n - l$. Folglich ist $f_1 - n_1 = f - n + 1$.

Schließen wir folgerichtig nacheinander alle k der zusammenhängenden Komponenten des Netzes aus, erhalten wir: $f_k - n_k = f - n + k$. Und ⟨aber⟩ da $f_k = 1$, $n_k = 0$, ist $f - n + k = 1$, d.h.

. (9)

Offensichtlich ist $k \leq f - 1$, und daher folgt aus (9) (8). Gleichzeitig widerspricht (8) (7). Dies beweist die Unmöglichkeit der zu Beginn aufgestellten Behauptung, daß nicht überall auf S $k_1 = k_0$ ist oder $k_2 = k_0$.

§ 7. Somit haben wir bewiesen, daß auf der Fläche S, auf der $k_1 \geq k_0 \geq k_2$ ist, zwangsläufig in jedem Punkt entweder $k_1 = k_0$ oder $k_2 = k_0$ ist. Und dann ist S entweder eine bedingte Sphäre $k_0^{-1} S_0$ oder ist die Einhüllende einer einparametrigen Schar solcher bedingten Sphären. Dies läßt sich ganz genauso beweisen, wie im Falle gewöhnlicher Hauptkrümmungen, wenn die Fläche die Einhüllende einer Schar gleicher gewöhnlicher Sphären ist. Es ist nicht erforderlich, diesen Beweis ⟨Herleitung⟩ zu wiederholen (s. auch [6]).

Nach der Analytizität von S muß die Sphärenschar analytisch sein. Der Bereich der Parameterwerte der Schar muß daher ein topologischer Kreis sein. Dann wäre S eine Fläche vom topologischen Typ eines Torus. Nach Voraussetzung ist das nicht so, und folglich bleibt eine Möglichkeit: S ist eine bedingte Sphäre. (Genau die gleiche Schlußfolgerung kann man ziehen bei einer höheren ⟨zweimaligen, wiederholten⟩ Differenzierbarkeit durch ein direkteres Verfahren.) Somit ist unser Theorem 1-a bewiesen und gleichzeitig mit ihm die Theoreme 1, 2. *

§ 8. Das Theorem 1-a läßt folgende Verallgemeinerung zu.

T h e o r e m 3. Die analytische Fläche S sei homöomorph einem Bereich auf einer Sphäre, der durch ⟨die durch⟩ p Kreise begrenzt ist, und auf ihr sei - genau wie im Theorem 1-a - $k_1(x) \geq k_0 \geq k_2(x)$, $k_0 \neq 0$ und ihr Rand besteht aus Linien der Krümmung k_0. Dann gibt es nur die folgenden drei Möglichkeiten: (1) S ist gleich und parallel einem möglicherweise nicht schlichtem Bereich auf der Fläche $k_0^{-1} S_0$; (2) S ist ein möglicherweise nicht schlichter Bereich auf der Einhüllenden einer ein⟨gleich⟩parametrigen Schar von Flächen, die gleich und parallel zu $k_0^{-1} S_0$ sind; (3) $\omega(S) \leq$

---

* H.F. Munzner teilte dem Autor auf dem Internationalen Kongreß für Mathematik (Moskau 1966) mit, daß er das Theorem 1 auf anderem Wege bewiesen habe (mittels der Index-Methode) und daß seine Arbeit in der Mathematischen Zeitschrift veröffentlicht wird.

$\leq 2\pi(p-2)$. Dabei ist - wenn $p = 1$, d.h. S homöomorph einer Kreisscheibe ist, die zweite Möglichkeit ausgeschlossen, so daß wenn noch $\omega(S) > -2\pi$ ist, S gleich und parallel einem (schlichten) Bereich auf $k_0^{-1}S$ ist.

Dieses Theorem enthält das Theorem 1-a: es ist hinreichend, in ihm $p = 0$ anzunehmen. Man kann ihm auch eine dem Theorem 1 analoge Form geben.

Aus dem Theorem 3 geht offensichtlich ein Theorem über die Gleichheit und Parallelität einer zu einem Kreis homöomorphen Fläche S zu einem Stück der Fläche $k_0^{-1}S_0$ hervor, das gänzlich analog zum Theorem 2 ist. Man braucht lediglich die Bedingung einzuführen, daß der Rand von S eine Linie der Krümmung k_0 ist und daß $\omega(S) > -2\pi$ ist.

Der Beweis für das Theorem 3 ist völlig analog dem durchgeführten Beweis für das Theorem 1-a. Seine letzte Etappe ⟨Stadium⟩ wird ebenfalls - wenn man die Kurven einschließt, die S begrenzen - in das dort untersuchte Netz gebracht.

Literatur

1. Hopf, H. — Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen. Math. Nachrichten, Bd. 4, 1951

2. Miranda, K. — Uravnenija s častnymi proizvodnymi elliptičeskogo tipa. M., IL, S. 190 - 191, 1957

3. Aleksandrov, A.D. — Odna obščaja teorema edinstvennosti dlja zamknutych poverchnostej. DAN SSSR, 19, 233-236, 1938

4. Aleksandrov, A.D. — Teoremy edinstvennosti dlja poverchnostej v celom. VII. Vestnik LGU, No 7, 1960

5. Bonnesen, T. und Fenchel, W. — Theorie der konvexen Körper. Berlin, 5, 64, 1934

6. Kohn-Vossen, S.E. — Nekotorye voprosy differencial'noj geometrii v celom. M., IL, S. 130-134, 59-60, 1959

7. Aleksandrow, A. — Innere Geometrie der konvexen Flächen. Nachtrag. Berlin, 1955.

Der Aufsatz ging am 4. Juli 1966 in der Redaktion ein.

Anmerkung des Übersetzers:

Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um die wörtliche Übersetzung.

Stuttgart, den 23.3.1970

i.A.

Monika Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

МАТЕМАТИКА

УДК 513.013

А. Д. Александров

О КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Мы докажем здесь следующую теорему о поверхностях в E_3. Поверхности предполагаются оснащенными нормалями определенного направления.

Теорема 1. *Пусть S — аналитическая поверхность типа сферы* и S^0 — такая же поверхность со всюду положительной кривизной, следовательно, — выпуклая. Утверждается, что либо S равна и параллельна S^0, либо существуют такие точки $x \in S$, $x^0 \in S^0$ с параллельными нормалями, что кривизна любого нормального сечения в x отлична от кривизны параллельного нормального сечения в x^0.*

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть S, S^0 — такие поверхности, как в теореме 1, и $k_1 \geqslant k_2$, $k_1^0 \geqslant k_2^0$ их главные кривизны в точках $x \in S$, $x^0 \in S^0$ с параллельными нормалями. Пусть $f(\xi, \eta; n)$ — такая функция численных переменных ξ, η и единичного вектора n, что при $\xi > \xi'$ и $\eta > \eta'$ всегда $f(\xi, \eta; n) > f(\xi', \eta'; n)$. Тогда если во всякой точке $x \in S$*

$$f(k_1, k_2; n) = f(k_1^0, k_2^0; n), \tag{1}$$

где n — нормаль в x, то поверхность S равна и параллельна S^0.

Действительно, из (1), вследствие монотонности f, вытекает, что в каждой $x \in S$ либо $k_1 \geqslant k_1^0$, $k_2 \leqslant k_2^0$, либо $k_1 \leqslant k_1^0$, $k_2 \geqslant k_2^0$. Поэтому в соответствующих точках x, x^0 всегда есть пара параллельных нормальных сечений с равными кривизнами; а тогда по теореме 1 S равна и параллельна S^0.

Простейший пример получаем, когда $f = k_1 + k_2$ и S^0 — сфера. Соответственно, из теоремы 2 вытекает теорема X. Хопфа [1]: поверхность типа сферы, имеющая постоянную среднюю кривизну, сама есть сфера. (В [1] доказывается и более общее утверждение). Аналитичность S здесь предполагать не нужно, так как для поверхности постоянной средней кривизны она обеспечена сама собою ввиду аналитичности и строгой эллиптичности соответствующего дифференциального уравнения [2]. По той же причине это верно, вообще, если S^0

---

* Под этим можно понимать множество пар (x, ξ), где $x \in E_3$, ξ — точка какой-либо сферы Σ, пробегающая всю Σ, и x есть аналитическая функция соответствующей ξ, т. е. если, например, u, v — широта и долгота, то вектор $x(u, v)$ точки x разлагается в степенной ряд по $(u - u_0)$, $(v - v_0)$ в окрестности u_0, v_0.

Поверхность S в смысле этого определения гомеоморфна сфере. В том же смысле понимается в § 8 поверхность, гомеоморфная области на сфере. Под точкой поверхности понимается, строго говоря, пара (x, ξ), хотя, как обычно, явно говорится лишь об x, Такое определение не исключает, например, что поверхность сводится к точке, т. е. $x = \mathrm{const}$. Но в теореме поверхности предполагаются гладкими, т. е. $x_u \times x_v \neq 0$.

аналитична, а f симметрична по ξ, η, аналитична по всем аргументам и $\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$. Между прочим, если S сама предполагается выпуклой, то функцию f достаточно считать определенной при ξ, $\eta > 0$.

Теорема, аналогичная теореме 2, была доказана мною [3] в предположениях, что S сама имеет всюду положительную кривизну, а f такова, что $f(\xi, \eta; n) > f(\xi', \eta'; n)$, как только $\xi > \xi'$, $\eta \geqslant \eta'$ или $\xi \geqslant \xi'$, $\eta > \eta'$. Избавиться от аналитичности S, S^0 удается [4], предполагая $\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$ или вводя некоторое условие на разности кривизн $k_1 - k_1^0$, $k_2 - k_2^0$ вблизи точек, где $k_1 = k_1^0$, $k_2 = k_2^0$.

Надо заметить, что в теоремах 1, 2, по крайней мере, двукратная дифференцируемость необходима. Это показывает пример цилиндра, заклеенного с обоих концов полусферами. На такой поверхности $k_1 = \text{const}$.

§ 2. Формулируем теперь теорему 1 в том виде, в каком мы будем ее доказывать. Пусть поверхность S_0 такая, как в теореме 1: замкнутая, выпуклая со всюду положительной кривизной и аналитическая. Согласно известным определениям относительной дифференциальной геометрии [5], примем S_0 за „условную единичную сферу". Точкам x поверхности S сопоставляются точки $y \in S_0$ по параллельности нормалей. Направления dx в точке x, для которых $kdx = dy$, называются главными относительно S_0, а соответствующие значения k — относительными главными кривизнами. При этом либо есть только два главных направления и им отвечают разные значения k, либо все направления главные и им отвечает одно k.

Теорема 1-а. *Пусть S — аналитическая поверхность типа сферы и $k_1(x) \geqslant k_2(x)$, $x \in S$, ее главные кривизны относительно какой-либо условной сферы S_0. Если существует такое число k_0, что всюду на S $k_1(x) \geqslant k_0 \geqslant k_2(x)$, то S гомотетична S_0, так что $k_1 \equiv k_2 \equiv k_0$; коэффициент подобия есть, очевидно, k_0^{-1}.* ($k_0 = 0$ исключено, так как иначе было бы всюду $k_1 k_2 \leqslant 0$, а это невозможно, потому что знак $k_1 k_2$ тот же, что у гауссовой кривизны.)

Утверждение этой теоремы равносильно тому, что если S не гомотетична S_0, то при всяком k_0 на ней найдется точка x, где либо $k_0 > k_1 \geqslant k_2$, либо $k_0 < k_2 \leqslant k_1$. В такой точке кривизны всех нормальных сечений поверхности S больше или, наоборот, меньше кривизн параллельных сечений поверхности S_0 в точке y_0 с параллельной нормалью. Обратно, если последнее имеет место, то либо $k_0 > k_1 \geqslant k_2$, либо $k_0 < k_2 \leqslant k_1$. (Сказанное становится абсолютно очевидным, если заметить, что определение относительных главных кривизн инвариантно относительно совместного аффинного преобразования поверхностей S, S_0. Если же таким преобразованием превратить индикатрису Дюпена в данной точке поверхности S_0 в окружность, то в соответствующей точке на S относительные главные направления и кривизны станут обычными.)

Из сказанного ясно, что теорема 1-а равносильна теореме 1, если в последней заменить S^0 на $k_0^{-1} S_0$.

Отметим еще, что теорема 1-а, очевидным образом, равносильна следующему утверждению. Если S не гомотетична условной сфере S_0, то $\min k_1(x) < \max k_2(x)$.

Наконец, можно заметить, что в теореме 2 можно иметь в виду главные кривизны относительно какой-либо условной сферы. Тогда из нее следует, например, что поверхность типа сферы, имеющая постоянную среднюю кривизну относительно S_0, гомотетична S_0. Здесь опять-таки требование аналитичности S выполняется само собой, поскольку S_0 предполагается аналитической.

В конце статьи мы укажем обобщение наших теорем по поверхности с краем.

§ 3. Докажем теорему 1-а. Пусть на S $k_1(x) \geqslant k_0 \geqslant k_2(x)$. Докажем, что тогда в каждой точке верно хотя бы одно из равенств: $k_1 = k_0$, $k_2 = k_0$. Допустим, однако, что это не так.

Обозначая через x и y радиусы-векторы точек на S и S_0 и сопоставляя точки с параллельными нормалями, построим поверхность S', определяемую вектором*

$$x' = x - k_0^{-1} y. \tag{2}$$

Под главными направлениями и кривизнами будем понимать эти понятия относительно S_0. Если dx — главное направление на S, то $k_i dx = dy$ и из (2) следует, что

$$k_i' dx' = dy, \quad k_i' = \frac{k_i k_0}{k_0 - k_i}, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

т. е. соответствующее направление dx' на S' тоже главное и ему соответствует кривизна k_i'. Исключение составляют особые точки, где $k_1 = k_0$ или $k_2 = k_0$. В остальных точках S' регулярна, ее главные направления параллельны таковым на S; тем более ее касательная плоскость параллельна касательной плоскости к S. Поэтому для любого множества регулярных точек сферическое изображение будет то же, что для соответствующего множества на S (может быть, с точностью до симметрии в центре сферы, что соответствует обращению нормали, но это для нас не существенно).

Вместе с тем, поскольку $k_1 \geqslant k_0 \geqslant k_2$ и в регулярных точках $k_1 \neq k_0$, $k_2 \neq k_0$, то в них $(k_0 - k_1)(k_0 - k_2) < 0$. Поэтому из (3) следует, что в таких точках произведения $k_1 k_2$ и $k_1' k_2'$ оказываются противоположных знаков, либо если $k_1 k_2 = 0$, то и $k_1' k_2' = 0$. Знак произведения относительных кривизн тот же, что у гауссовой кривизны. Поэтому из сказанного в соединении с предыдущим следует: если M — множество точек на S, где $k_1 > k_0 > k_2$, и M' — соответствующее множество на S', то для интегральных кривизн ω имеем

$$\omega(M') = -\omega(M). \tag{4}$$

§ 4. Пусть N — множество тех точек на S, где $(k_0 - k_1)(k_0 - k_2) = 0$. Оно не пусто. Иначе S' была бы регулярна и согласно (4) ее полная кривизна равнялась бы $-\omega(S) = -4\pi$, что невозможно. Впрочем, то же ясно из существования (относительных) точек округления: в них необходимо $k_1 = k_2 = k_0$, раз везде $k_1 \geqslant k_0 \geqslant k_2$.

Будем различать точки $x \in N$ трех типов: (I) точки, лежащие на линиях кривизны k_0, т. е. на огибающих главных направлений, для которых $k_0 dx = dy$; (II) точки, не принадлежащие указанным линиям, но такие, что в них $k_1 = k_2 = k_0$; (III) все остальные точки, в них либо $k_1 \neq k_0$, либо $k_2 \neq k_0$ и они не лежат на линиях кривизны k_0.

Докажем, что в точках $x' \in S'$, соответствующих точкам типа (III), поверхность S' гладкая.** Пусть, например, в точке x типа (III) $k_1 = k_0$,

* По определению, данному в примечании к § 1, S' будет аналитической поверхностью типа сферы и (2) устанавливает гомеоморфизм S на S'. Однако S' может иметь особенности. Более того, утверждение теоремы 1 состоит именно в том, что S' сводится к точке, но при сделанном предположении, что хоть где-то $k_1 \neq k_0$, $k_2 \neq k_0$, это не так.

** Проводимое здесь, как и в § 5, рассмотрение особых точек не содержит, собственно, ничего нового: такие выводы можно найти, например, у Кон-Фоссена [6].

$k_2 \neq k_0$. Через нее проходит линия кривизны L_2, отвечающая k_2, и ее пересекают линии кривизны L_1, отвечающие k_1. В окрестности x ни одна из них не есть линия кривизны k_0. Поэтому на каждой из них $k_1 = k_0$, максимум, в конечном числе точек (вследствие аналитичности S).

Вдоль линий кривизны $k_i dx = dy$. Поэтому из (2) следует, что вдоль соответствующих линий на S'

$$k_0 dx' = (k_0 - k_i)\, dx, \quad i = 1,\ 2. \tag{5}$$

Так как $k_2 \neq k_0$, то отсюда следует, что линия L_2', отвечающая L_2, гладка. Далее, $k_1 \geqslant k_0$ и $k_1 = k_0$ лишь в конечном числе точек на каждой L_1, т. е. везде на L_1, кроме этих точек, $k_0 - k_1 < 0$. Поэтому из (5) следует, что вдоль L_1'

$$\frac{dx'}{|dx'|} = -\frac{dx}{|dx|}.$$

Это значит, что линии L_1' также гладкие и их касательные параллельны касательным к линиям L_1. Следовательно, в окрестности точки x' поверхность S' образована гладкими кривыми L_1', пересекающими гладкую кривую L_2. Отсюда ясно, что S' — гладкая в окрестности x'.

Из гладкости S' в точках x', отвечающих точкам типа (III), следует, что присоединение таких точек к регулярным не нарушит равенства (4).

§ 5. Пусть теперь x_0 — точка типа (II) и x_0' — соответствующая точка на S'. Докажем, что S' имеет в x_0' касательную плоскость P_0', параллельную касательной плоскости P_0 к S в точке x_0. (Это понимается в том смысле, что контингенция поверхности S' в x_0' есть плоскость P_0'. Проекция же окрестности точки x_0' на P_0' может быть неоднолистной.)

Заметим, во-первых, что вблизи x_0 нет других точек типа (II). Иначе, по аналитичности S, имелась бы линия таких точек, содержащая x_0. Но кривая на которой $k_1 = k_2 = k_0$ есть линия кривизны k_0, так что x_0 оказывалась бы точкой типа (I). Отсюда и из доказанного в § 4 следует, что в некоторой окрестности U' точки x_0' поверхность S' гладкая; сама x_0' при этом исключается. Касательные плоскости в точках $x' \in U' - (x_0')$ параллельны касательным к S в соответствующих точках x. Поэтому они близки по направлению к плоскости P_0. Отсюда доказываемое утверждение уже достаточно очевидно.

В самом деле, пусть U — окрестность x_0. Ее можно взять столь малой, чтобы она не содержала ни других точек типа (II), ни таких точек, образы которых на S' попадают в точку x_0'. Пусть h — отображение S на S' и p — проектирование на плоскость P_0'. В пределах малой окрестности U' точки x_0' p оказывается локально гомеоморфным ввиду отмеченного выше свойства касательных плоскостей. Следовательно, отображение ph из U в P_0' также локально гомеоморфно. Поэтому, если контур C в U охватывает x_0, то контур $C'' = ph(C)$ охватывает x_0' и образ $ph(U)$ окрестности U образует окрестность точки x_0'. Если через нормаль к плоскости P_0' в точке x_0' провести полуплоскость Q, то она пересекает U'. Берем точки x' на пересечении $Q \cap U'$, сходящиеся к x_0'. Касательные плоскости в них сходятся к P_0'. Отсюда легко заключить, что лучи $x_0'x'$ сходятся к лучу $Q \cap P_0'$. Этим доказано, что плоскость P_0' есть касательная к поверхности S'

в точке x'_0. (Отображение ph есть накрытие; образ $U-(x_0)$ покрывает окрестность x'_0 в P'_0, вообще говоря, неоднократно.)

Теперь очевидно, что измеренный на S' полный угол вокруг точки x'_0 не меньше 2π. Кривизна же $\omega(x'_0)$ есть 2π минус этот угол.* Поэтому $\omega(x'_0) \leqslant 0$. Отсюда следует, что присоединение точек типа (II) к регулярным превращает равенство (4) в неравенство

$$\omega(M') \leqslant -\omega(M). \tag{6}$$

По доказанному в § 4 это неравенство верно и тогда, когда M содержит точки типа (III). Поэтому если бы особые точки были только типов (II), (III), то поверхность S' имела бы кривизну $\omega(S') \leqslant \leqslant -\omega(S) = -4\pi$, что невозможно. Следовательно, на S есть точки типа (I), т. е. есть линии кривизны k_0.

§ 6. Итак, на S необходимо существуют линии кривизны k_0. Из (5) следует, что вдоль такой линии $dx' = 0$, т. е. на поверхности S' ей отвечает одна точка.

По аналитичности S эти линии образуют сеть из конечного числа топологических отрезков без свободных концов, разбивающую S на конечное число областей.

Пусть G — такая область и G' — соответствующая область на S'. Каждой связной компоненте границы области G соответствует на S' одна точка. Если присоединить к G' эти точки x'_i, то получим поверхность типа сферы. Поэтому $\omega(G') + \sum \omega(x'_i) = 4\pi$. Но кривизна одной точки всегда не больше 2π, так что $\sum \omega(x'_i) \leqslant 2\pi m$, где m — число компонент границы области G. Кроме того, в силу (6) $-\omega(G') \geqslant \omega(G)$. Все это вместе дает

$$\omega(G) \leqslant 2\pi m - 4\pi.$$

Суммируя по всем областям и пользуясь тем, что $\Sigma\omega(G) = 4\pi$, получим отсюда, что $4\pi \leqslant 2\pi\Sigma m - 4\pi f$, где f — число областей; т. е.

$$2(f+1) \leqslant \Sigma m. \tag{7}$$

Однако, как мы сейчас убедимся, для всякой сети на сфере верно неравенство

$$2(f-1) \geqslant \Sigma m. \tag{8}$$

Пусть мы имеем сеть, состоящую из k связных компонент, причем, как и выше, f — число областей, $n = \Sigma m$ — сумма числа связных компонент границ областей. Пусть C — одна из связных компонент сети и G_l — те области, границы которых содержат части C. Для каждой такой области часть ее границы, входящая в C, является связной компонентой границы (потому что речь идет о сети на сфере).

Если мы исключим C, то области G_l сольются в одну. Поэтому, если l — число этих областей, то число областей по исключении C станет $f_1 = f - l + 1$. А так как с каждой областью G_l исключается связная компонента ее границы, входящая в C, то общее число компонент границ областей станет $n_1 = n - l$. Следовательно $f_1 - n_1 = f - n + 1$.

Исключая последовательно одну за другой все k связных компонент сети, мы получим: $f_k - n_k = f - n + k$. А так как $f_k = 1$, $n_k = 0$, то $f - n + k = 1$, т. е.

$$n = \Sigma m = f + k - 1. \tag{9}$$

---

* Здесь и дальше мы пользуемся понятием кривизны в смысле общей теории [7]. Но можно обойтись обычным понятием, если воспользоваться теоремой Гаусса—Боннэ, что лишь отяжелит изложение. Заметим, что $\omega(x'_0) = 2\pi(1-m)$, где m — кратность покрытия окрестности точки x'_0 в плоскости P'_0 при отображении ph.

Очевидно, $k \leqslant f-1$ и потому из (9) следует (8). Вместе с тем (8) противоречит (7). Это доказывает, невозможность сделанного вначале предположения, что не везде на S $k_1 = k_0$, или $k_2 = k_0$.

§ 7. Итак, мы доказали, что на поверхности S, на которой $k_1 \geqslant k_0 \geqslant k_2$, неизбежно в каждой точке либо $k = k_0$, либо $k_2 = k_0$. А тогда S есть либо условная сфера $k_0^{-1}S_0$, либо является огибающей однопараметрического семейства таких условных сфер. Это доказывается совершенно так же, как в случае обычных главных кривизн, когда поверхность оказывается огибающей семейства равных обычных сфер. Нет необходимости воспроизводить этот вывод (см. также [6]).

По аналитичности S семейство сфер должно быть аналитическим. Область значений параметра семейства должна быть поэтому топологической окружностью. Тогда S была бы поверхностью топологического типа тора. По условию это не так и, следовательно, остается одна возможность: S есть условная сфера. (Тот же вывод можно сделать при одной двукратной дифференцируемости более прямым методом.) Таким образом, наша теорема 1-а, а вместе с нею теоремы 1, 2 доказаны.*

§ 8. Теорема 1-а допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть аналитическая поверхность S гомеоморфна области на сфере, ограниченной p контурами, и пусть на ней так же, как в теореме 1-а, $k_1(x) \geqslant k_0 \geqslant k_2(x)$, $k_0 \neq 0$, а ее край состоит из линий кривизны k_0. Тогда есть только следующие три возможности:* (1) *S равна и параллельна, возможно неоднолистной, области на поверхности $k_0^{-1}S_0$;* (2) *S есть, возможно неоднолистная, область на огибающей однопараметрического семейства поверхностей, равных и параллельных $k_0^{-1}S_0$;* (3) $\omega(S) \leqslant 2\pi(p-2)$. *При этом, если $p=1$, т. е. S гомеоморфна кругу, то вторая возможность исключается, так что если еще $\omega(S) > -2\pi$, то S равна и параллельна области (однолистной) на $k_0^{-1}S$.*

Эта теорема содержит теорему 1-а: достаточно положить в ней $p=0$. Ей также можно придать форму, аналогичную теореме 1.

Из теоремы 3 очевидно вытекает теорема о равенстве и параллельности гомеоморфной кругу поверхности S куску поверхности $k_0^{-1}S_0$, вполне аналогичная теореме 2. Нужно лишь ввести условие, что край S есть линия кривизны k_0 и что $\omega(S) > -2\pi$.

Доказательство теоремы 3 вполне аналогично проведенному доказательству теоремы 1-а. Последний его этап проводится также, если включить кривые, ограничивающие S, в рассматриваемую там сеть.

Summary

We prove the following theorem on surfaces in E_3. Let S, S_0 be oriented analytic closed surfaces of genre 0, S_0 being convex with everywhere positive curvature. Then either S is equal and parallel to S_0 or there exist such points $x \in S$, $x_0 \in S_0$ with parallel normals that the curvatures of any two parallel normal sections of S and S_0 at x and x_0 are different. **Corollary.** Let $k_1 \geqslant k_2$, $k_1^0 \geqslant k_2^0$ be the principal curvatures at the points $x \in S$, $x_0 \in S_0$ with parallel normals, and $f(\xi, \eta; n)$ such a fun-

* Г. Ф. Мюнцнер (H. F. Munzner) на Международном математическом съезде (Москва, 1966 г.) сообщил мне, что он доказал теорему 1 другим путем (методом индексов) и что его работа будет опубликована в Mathematische Zeitschrift.

ction of numbers $\xi \geqslant \eta$ and of a unit vector n that $f(\xi, \eta; n) > f(\xi', \eta'; n)$, if $\xi > \xi'$, $\eta > \eta'$. Then, if for each $x \in S$ $f(k_1, k_2; n) = f(k_1^0, k_2^0; n)$, n being the normal vector at x, the surface S is congruent and parallel to S_0. Analogous results are valid for an S homeomorphic to a circle provided S is tangent to S_0 along its boundary and its integral curvature $\omega(S) > -2\pi$, then if $f(k_1, k_2; n) = f(k_1^0, k_2^0; n)$, S is a part of S_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Hopf. Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkümmungen. Math. Nachrichten, t. 4, 1951.
2. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, стр. 190—191, 1957.
3. А. Д. Александров. Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, 19, 233—236, 1938.
4. А. Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей в целом. VII. Вестник ЛГУ, № 7, 1960.
5. T. Bonnesen und W. Fenchel. Theorie der konvexen Körper. Berlin, 5, 64, 1934.
6. С. Э. Кон-Фоссен. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., ИЛ, стр. 130—134, 59—60, 1959.
7. A. Alexandrow. Innere Geometrie der konvexen Flächen. Nachtrag. Berlin, 1955.

Статья поступила в редакцию 4 июля 1966 г.