Ü/64

Teorija funkcij, funkcional'nyj analiz i ich priloženija
Bd. 1 (1965), Seite 194 - 204

Gurarij, V.I.:

ÜBER ÖFFNUNGEN UND NEIGUNGEN VON UNTERRÄUMEN EINES BANACHRAUMES

In der vorliegenden Arbeit wird eine Reihe von Charakteristiken der wechselseitigen Anordnung von Unterräumen eines Banachraumes untersucht und es werden einige Anwendungen in der Geometrie von Banachräumen angeführt.

§ 1. Verschiedene Definitionen für die Öffnung von Unterräumen

M.G. Krejn, M.A. Krasnosel'skij und D.P. Mil'man führten [1] folgende Definition für die Öffnung zweier Unterräume P und Q eines Banachraumes E ein:

. ⟨a⟩

Ein bedeutender Teil der Anwendungen dieses Begriffs basiert auf folgendem Theorem, das in [1] bewiesen ist:

> Theorem 1. Wenn die Dimensionen * der Unterräume P und Q des Banachraumes E untereinander nicht gleich sind, dann ist $\theta(P, Q) \geqslant \frac{1}{2}$; wenn dabei mindestens einer der Unterräume P und Q endlich dimensional oder E ein Hilbertscher Raum ist, dann ist $\theta(P, Q) = 1$.

I.C. Gochberg und A.S. Markus [2] modifizierten die Definition der Öffnung wie folgt:

, ⟨b⟩

---

* Die Dimension des Banachraumes E wird hier als Mächtigkeit der kleinsten Menge ⟨minimale Mächtigkeit einer Menge⟩ verstanden, deren lineare Hülle in E dicht ist. Offensichtlich ist, wenn E unendlich dimensional ist, dim E gleich der Mächtigkeit einer überall dichten minimalen Menge ⟨... der minimalen Mächtigkeit einer überall dichten Menge ...⟩ in E.

(wobei S_p - die ⟨eine⟩ Einheitssphäre in P ist, d.h. die Menge der Elemente $x \in P : \| x \| = 1$; analog wird S_Q definiert) und stellten folgenden Satz auf:

> Theorem 2. Die Menge der Unterräume eines Banachraumes E, in der der Abstand zwischen zwei Unterräumen P und Q als Öffnung $\tilde{\theta}$ (P, Q) definiert ist, ist ein vollständiger metrischer Raum.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß θ (P, Q) ≤ 1 und daß die Ungleichung

⟨c⟩

gilt.

Das Theorem 1 und - entsprechend - das Theorem 2 gelten nicht, wenn man die Öffnung $\tilde{\theta}$ bzw. die Öffnung θ betrachtet. Wir führen eine Definition der Öffnung an, bei der die Behauptungen der Theoreme 1 und 2 gelten.

D e f i n i t i o n. Wir nennen die Größe

⟨d⟩

die Öffnung der Unterräume P und Q, wobei T_P - die ⟨eine⟩ Einheitskugel in P ist, d.h. die Menge der Elemente $x \in P : \|x\| \leq 1$. Analog wird T_Q definiert.

Es ist leicht, die Ungleichungen

, (1)

(2)

nachzuprüfen, wobei $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ - absolute Konstanten sind (die exakten Werte dieser Konstanten sind uns nicht bekannt). Außerdem ist im Hilbertraum $\hat{\theta}$ (P, Q) = θ (P, Q).

Theorem 3. Für die Öffnung $\hat{\theta}$ (P, Q) gelten die Behauptungen der Theoreme 1 und 2.

B e w e i s. Aus (1) und dem Theorem 1 folgt, daß für die Öffnung $\hat{\theta}$ (P, Q) die Behauptung des Theorems 1 gilt. Auf der Grundlage von (2) und Theorem 2 genügt es zu zeigen, daß für die Öffnung $\hat{\theta}$ (P, Q) die Dreiecksungleichung

(3)

gilt. (3) ist jedoch ein Spezialfall des folgenden Lemmas [3].

L e m m a. (F. Hausdorff). Wenn in einem metrischen Raum R die Entfernung zwischen den Mengen $A \subset R$ und $B \subset R$ wie folgt definiert ist:

, ⟨e⟩

dann gilt für die beliebigen Mengen $A_1 \subset R$, $A_2 \subset R$, $A_3 \subset R$ die Ungleichung

. ⟨f⟩

Hieraus folgt die Behauptung.

Es ist nicht bekannt, ob eine absolute Konstante q existiert; $\frac{1}{2} < q \leq 1$ ist so beschaffen, daß wenn in einem Banachraum die Dimensionen zweier Unterräume P und Q nicht untereinander gleich sind, dann $\hat{\theta}$ (P, Q) $\geq$ q gilt.

Die analoge Frage für die Öffnung θ (P, Q) ist bisher nicht gelöst: ihre Klärung dürfte jedoch für die Öffnung $\hat{\theta}$ (P, Q) - formal gesprochen - infolge (1) auf weniger Schwierigkeiten stoßen. Möglicherweise folgt bei hinreichend starken Beschränkungen auf P und Q aus der Beziehung θ (P, Q) $< \alpha$ bei einem bestimmten $\alpha > 0$ die Isomorphie der Unterräume P und Q. Einige Gründe für einen derartigen Vermutung liefert das folgende

Theorem 4. Wenn in einem separablen Banachraum für die Unterräume P und Q θ (P, Q) < 1 ist und P isometrisch l_1 (*), dann ist Q isomorph zu P.

B e w e i s. Wir brauchen das folgende, unlängst von V.D. Mil'man ** gewonnene Lemma, das wir in einer etwas abgeschwächten Form anführen.

L e m m a. Wenn ein separabler Banachraum E nicht isomorph zu l_1 ist, dann existiert für ein beliebiges normiertes System $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ in E und die Zahl $\varepsilon > 0$ ein in E vollständiges System $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, das so beschaffen ist, daß $\| x_i - y_i \| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$

Wir nehmen an, daß die Behauptung des Theorems 4 nicht gilt. Es sei $\{e_i\}_1^{\infty}$ eine natürliche Basis in l_1. Da bei einem bestimmten $a > 0$, $\theta^1(P, Q) < a < 1$, folgt aus dem Lemma, daß sich in Q ein vollständiges System $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ findet, für das $\| e_i - g_i \| < a < 1$ ist. Offensichtlich ist $\| g_i \| < 1 + a$. Wir haben

. (g)

Andrerseits gilt:

. (h)

Somit erhalten wir:

. (i)

Folglich ist der lineare Operator T, der auf der Menge aller endlichen linearen Kombinationen $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ in P durch die Formel $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ definiert ist, beschränkt und beschränkt umkehrbar. Erweitert man ihn auf ganz P, dann erhalten wir den gesuchten Isomorphismus von P auf Q.

Hieraus folgt die Behauptung.

---

* l_p ($p \geq 1$) - ist der Raum der Zahlenfolgen $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, für die die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$ konvergiert, mit den natürlich bestimmten Vektoroperationen und der Norm $\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

** Dieses Resultat von V.D. Mil'man ist in einem Artikel dargelegt, der sich gegenwärtig in Druck befindet.

§ 2. Die Neigung

Definition. Es seien P und Q Unterräume eines Banachraumes E. Wir bezeichnen als Neigung P gegen Q die Größe

. ⟨k⟩

Als Neigung des Unterraumes P gegen das Element $x \in E$ bezeichnen wir die Neigung von P gegen einen eindimensionalen Unterraum, der durch dieses Element erzeugt ist. Analog definieren wir die Neigung eines Elements gegen einen Unterraum und eines Elements gegen ein Element.

Die Anwendung dieses Begriffs (s. z.B. [4]) in der Basistheorie (*) basiert auf folgendem, von M.M. Grinbljum [5] in einer zu der angeführten Form äquivalenten Kriterium. Wir kommen überein, für eine ⟨die⟩ gegebene Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ durch $P_{i,j}$, $i \leq j$ die lineare Hülle über den Elementen $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j$ zu bezeichnen.

Theorem 5. Damit die vollständige Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ im Banachraum E die Basis in E wird, ist es notwendig und hinreichend, daß die Bedingung

⟨l⟩

erfüllt ist, wobei β nicht von i und j abhängt (die obere Grenze genommen über alle β wird Index der Basis $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ genannt und im weiteren mit $\gamma(\{e_i\}_{i=1}^{\infty})$ bezeichnet).

Man kann unschwer sehen, daß $\widehat{(P, Q)} = \frac{1}{\|A\|}$ ist, wobei A der Pro-

---

* Eine Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ im Banachraum E wird eine Basis in E genannt, wenn jedes Element $x \in E$ die eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. Wenn $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Basis in ihrer abgeschlossenen linearen Hülle ist, dann wird sie Basisfolge ⟨?⟩ in E genannt.

jektionsoperator aus $P \dotplus Q$ auf P ist, wobei P parallel zu Q ist. Tatsächlich gilt:

. ⟨m⟩

Der Begriff der Neigung ist nichtsymmetrisch: im allgemeinen Fall gilt für einige P und Q $(\widehat{P, Q}) \neq (\widehat{Q, P})$; das folgende Theorem gibt Auskunft über den "Grad der Asymmetrie".

Theorem 6. Wenn $(\widehat{P, Q}) = \delta$, dann ist $(\widehat{Q, P}) \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}$. Diese Ungleichung ist exakt bei beliebigem δ, $0 \leq \delta \leq 1$.

B e w e i s . Angenommen, es sei $y \in Q$, $\|y\| = 1$, $x \in P$; wir schätzen $\|y + x\|$ ab. Wir betrachten die folgenden zwei Fälle:

1. $\|x\| \leq \frac{1}{1+\delta}$, dann gilt

. ⟨n⟩

2. $\|x\| > \frac{1}{1+\delta}$, dann gilt

. ⟨o⟩

Da die Elemente $x \in P$ und $y \in Q$ beliebig gewählt sind, erhalten wir

. ⟨p⟩

Um festzustellen, wann das Gleichheitszeichen gilt, untersuchen wir die zwei ⟨folgenden⟩ Funktionen in $C[0, 1]$: $x(t) = 1$, $y(t) = (1 - \delta) + 2\delta t$. Es kann unmittelbar überprüft werden, daß

⟨q⟩

gilt.

Hieraus folgt die Behauptung.

Theorem 7. Damit in einem Banachraum E, $\dim E > 2$, für zwei beliebige Unterräume P und Q die Beziehung

(4)

erfüllt ist, ist es notwendig und hinreichend, daß E ein Raum mit einem Skalarprodukt ist.

B e w e i s.

N o t w e n d i g k e i t. Es sei für zwei beliebige Unterräume in E (4) erfüllt und $E^{(3)}$ sei ein dreidimensionaler Unterraum in E und P - ein beliebiger zweidimensionaler Unterraum in $E^{(3)}$. Offensichtlich gibt es ein derartiges Element $x \in E^{(3)}$, daß $(\widehat{x, P}) =$ $= 1$; dann ist jedoch $(\widehat{P, x}) = 1$. Wie unschwer zu sehen ist, bedeutet dies, daß die Zylinderfläche mit der Leitlinie S_p (S_p - ist der ⟨eine⟩ Einheitskreis ⟨Einheitssphäre⟩ in P) und der Erzeugenden x die Stützfläche zur Einheitskugel $T^{(3)}$ in $E^{(3)}$ ist. Da der Unterraum P in $E^{(3)}$ beliebig gewählt ist, folgt hieraus, daß der Körper $T^{(3)}$ ein Ellipsoid [6] und folglich $E^{(3)}$ - ein euklidischer Raum ist. Da jedoch jeder beliebige dreidimensionale Unterraum in E ein euklidischer Raum ist, ist E ein Raum mit einem skalaren Produkt [7], was auch die Notwendigkeit beweist.

Es sit nicht bekannt, ob die Behauptung der Notwendigkeit bei $\dim E = 2$ gilt.

H i n l ä n g l i c h k e i t. Für einen zweidimensioanlen euklidischen Raum gilt (4) offensichtlich. Es seien P und Q Unterräume eines Raumes mit einem skalaren Produkt. Offensichtlich gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eindimensionale Unterräume $P_1 \subset P$ und $Q_1 \subset Q$, so daß

(5)

gilt.

Da offensichtlich $(\widehat{P_1, Q_1}) = (\widehat{Q_1, P_1}) \geqslant (\widehat{Q, P})$, haben wir aus

(5)

⟨r⟩

und infolgedessen, daß ε beliebig gewählt ist, erhalten wir $\widehat{(P, Q)} \geqslant \widehat{(Q, P)}$. Damit ist aber die umgekehrte Ungleichung $\widehat{(Q,P)} \geqslant \widehat{(P, Q)}$ bewiesen, woraus auch (4) folgt.

Das Theorem ist bewiesen.

<u>Theorem 8.</u> $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei eine vollständige Folge in einem Banachraum E und es sei $\widehat{(P_{1,i}, e_{i+1})} = \beta_i$. Wenn $\prod_{i=1}^{\infty} \beta_i = \beta > 0$ ist, dann ist $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Basis in E, wobei $\gamma(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}) \geqslant \beta$ ist.

B e w e i s. Es sei $x \in P_{1,i}$, $y \in P_{i+1,j}$, $y = \sum_{k=i+1}^{j} \alpha_k e_k$; dann haben wir

. ⟨s⟩

Das bedeutet, daß $\widehat{(P_{1,i}, P_{i+1,j})} \geqslant \beta$ ist, und aufgrund des Theorems 5 ist die Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Basis in E.

D e f i n i t i o n. Eine normierte Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ im Banachraum heißt δ- Minimalfolge ($\delta > 0$), wenn
$\rho(e_i, P_{1,i-1} \dotplus P_{i+1,\infty}) \geqslant \delta$,
$i = 1, 2, \ldots$.

<u>Theorem 9.</u> Die Basis $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|e_i\| = 1$ mit dem Index γ ist eine δ- Minimalfolge, wobei $\delta = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}$ ist.

B e w e i s. Es sei $x \in P_{1,i-1}$, $y \in P_{i+1,\infty}$; unter Anwendung des Theorems 6 haben wir:

, ⟨t⟩

was auch bedeutet, daß δ den Minimaleigenschaftcharakter der Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ angibt, $\delta = \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}$.

F o l g e r u n g. Wenn $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine normierte Basisfolge mit dem Index γ ist, dann gelten in der Zerlegung des normierten Elements $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ die Ungleichungen.

⟨u⟩

Theorem 10. Es sei $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine normierte Basisfolge mit dem Index γ und die Folge $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ erfülle die Bedingung $\| e_i - g_i \| < \varepsilon_i$. $i = 1, 2, \ldots,$ wobei $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \dfrac{a\gamma^2}{1+\gamma}$; $0 < a < 1$. Dann ist der Operator T, der auf der Menge der Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ durch die Formel $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ definiert ist, beschränkt und beschränkt umkehrbar, wobei $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leq \dfrac{1}{1-a}$.

B e w e i s. Wir setzen $e_i - g_i = h_i$ und nehmen an, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = y$. Aufgrund der Folgerung aus dem Theorem 9 haben wir

; ⟨v⟩

daher ist

⟨w⟩

und folglich

, ⟨x⟩

was auch das Theorem 10 beweist.

Abschließend möchten wir bemerken, daß die Neigung $(\widehat{P, Q})$ mit dem Minimalwinkel $\varphi(P, Q)$, der in [2] eingeführt wurde, wie folgt verbunden ist:

$$. \qquad \langle y\rangle$$

§ 3. Über die Verbindung zwischen Öffnungen und Neigungen

Es gilt offensichtlich die Ungleichung

$$. \qquad (6)$$

Im Hilbertraum gilt in trivialen Fällen, wenn P und Q orthogonal sind oder in (6) zusammenfallen, das Gleichheitszeichen: im ersten Fall $(\widehat{P, Q}) = \theta(P, Q) = 1$; im zweiten Fall $(\widehat{P, Q}) = \theta(P, Q) = 0$. Außerdem gilt - wenn P und Q eindimensional sind - im Falle des Hilbertraumes in (6) ebenfalls das Gleichheitszeichen. Es zeigt sich, daß bei beliebigem p, $0 \leq p \leq 1$ für einige nicht-eindimensionale Unterräume P und Q im Hilbertraum die Gleichung $(\widehat{P, Q}) = \theta(P, Q) = p$ möglich ist. Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden Theorems.

Theorem 11. Im Hilbertraum H existieren für ein beliebiges natürliches ⟨für eine beliebige natürliche Zahl⟩ $n > 1$ und die Zahlen p, q, $0 \leq p \leq q \leq 1$ die n-dimensionalen Unterräume P und Q, für die

$$\langle z\rangle$$

gilt.

B e w e i s. $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ sei ein orthonormiertes System in H. Wir nehmen an:

$$(7)$$

(die Zahlen a_i werden später gewählt); P_i und Q_i - sind eindimensionale Unterräume, die jeweils von den Elementen x_i und y_i erzeugt werden, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wir setzen $P = P_1 \dot{+} P_2 \dot{+} \ldots \dot{+} P_n$, $Q = Q_1 \dot{+} Q_2 + \ldots + Q_n$. Wenn $x = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda x_\lambda$, dann ist - wie man leicht sehen kann -

. ⟨aa⟩

Die unmittelbare Rechnung ergibt:

. ⟨ab⟩

Unter Berücksichtigung, daß $\| x \| = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^2 (1 + \alpha_\lambda^2)}$, haben wir

. (8)

Wir nehmen an, daß

. (9)

Dann wird offensichtlich das Minimum oder Maximum in (8) erreicht, wenn alle α_λ außer α_1, oder - entsprechend - α_n gleich Null sind. Da das Minimum oder Maximum des Ausdrucks $\frac{|a|}{\sqrt{1 + a^2}}$ gleich 0 bzw. $\frac{1}{2}$ ist, kann man von Anfang an $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ so wählen, daß (9) und die Gleichung

$$\frac{a_1}{1 + a_1^2} = \frac{p}{2}, \quad \frac{a_n}{1 + a_n^2} = \frac{q}{2}$$

erfüllt sind. Dann erhalten wir aus (8)

. ⟨ac⟩

Aus (7) ist jedoch ersichtlich, daß

. ⟨ad⟩

Das Theorem ist bewiesen.

Wir nehmen im Theorem 11 $p = q$ an und gewinnen:

F o l g e r u n g. Im Hilbertraum existieren für eine beliebige Zahl p, $0 \leq p \leq 1$ die n-dimensionalen Unterräume P und Q, die so beschaffen sind, daß $\frac{\rho(x, Q)}{\|x\|} = \frac{\rho(y, P)}{\|y\|} = p$ bei beliebigen $x \in P$, $y \in Q$.

Auf die gleiche Weise kann das Theorem 11 auch für den Fall unendlichdimensionaler Unterräume P und Q bewiesen werden.

§ 4. Bedingungen für die Abgeschlossenheit der direkten Summe von Unterräumen

D e f i n i t i o n. Als Summe ⟨Gruppensumme⟩ $P + Q$ der Unterräume P und Q eines Banachraumes E wird die Menge aller Elemente der Form $x + y$, $x \in P$, $y \in Q$ bezeichnet. Wenn $P \cap Q = \Theta$, dann wird $P + Q$ die direkte Summe genannt und mit $P \dotplus Q$ bezeichnet.

Offensichtlich ist - wenn P oder Q endlichdimensional ist - $P \dotplus Q$ abgeschlossen. Für unendlichdimensionale P und Q gilt die Abgeschlossenheit von $P \dotplus Q$ nicht immer. Die bekannten geometrischen Kriterien für die Abgeschlossenheit einer direkten Summe von Unterräumen (s. z.B. [8]) können unter Verwendung des Begriffs Neigung auf folgende Weise umformuliert werden:

Theorem 12. Die direkte Summe zweier Unterräume P und Q eines Banachraumes ist genau dann abgeschlossen, wenn $\widehat{(P, Q)} > 0$ ist.

Bevor wir die Hauptergebnisse dieses Paragraphen formulieren, schikken wir einige Hilfssätze voraus.

L e m m a 1. Es seien P und Q Unterräume eines Banachraumes, ferner $P = P_1 \dot{+} P_2$, $Q = Q_1 \dot{+} Q_2$, ferner

$$. \langle ae \rangle$$

So gilt

$$. \quad (10)$$

B e w e i s. Es sei $x \in P$, $y \in Q$, $\|x\| = 1$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_i \in P_i$, $y_i \in Q_i$, $i = 1, 2$. Wir schätzen $\|x + y\|$ ab und betrachten die zwei folgenden Fälle:

1. $\|x_1\| + \|y_1\| \geq a$ (a bestimmen wir später).
Diesen Fall unterteilen wir wiederum in zwei Unterfälle:
a) $\|x_1\| \ldots \langle af \rangle$, dann ist

$$. \langle ag \rangle$$

b) $\|x_1\| \ldots \langle ah \rangle$, dann ist $\langle ai \rangle$ und wir haben

$$\langle ak \rangle$$

und somit im Falle 1:

$$. \langle al \rangle$$

2. $\langle am \rangle$; dann gilt $\langle an \rangle$ und wir erhalten

. ⟨ao⟩

Nun bestimmen wir a als Wurzel der Gleichung ⟨ap⟩ ,
d.h. a = ⟨aq⟩ und erhalten in beiden Fällen

, ⟨ar⟩

woraus auch (10) folgt.

Offensichtlich gilt das folgende Lemma:

L e m m a 2. Wenn $P \cap Q = \theta$ und $\dim P < \infty$, dann ist $(\widehat{P, Q}) > 0$.

L e m m a 3. Es seien R und S Unterräume endlicher Kodimensionen in den Unterräumen P bzw. Q eines Banachraumes und $P \cap Q = \theta$. Damit $(\widehat{R, S}) = 0$ ist, ist es notwendig und hinreichend, daß $(\widehat{P, Q}) = 0$ ist.

Offenbar brauchen wir nur die Hinlänglichkeit zu beweisen. Es sei $(\widehat{P, Q}) = 0$ und es seien R' und S' direkte Komplemente von R und S bezüglich P bzw. Q; offensichtlich ist $\dim R' < \infty$ und $\dim S' < \infty$. Da $P \cap Q = \theta$ und $R' \cap R = \theta$, $S' \cap S = \theta$, gilt $R' \cap (Q \dotplus R) = \theta$ und $S' \cap (P \dotplus S) = \theta$. Setzen wir $(\widehat{R', Q \dotplus R}) = \alpha$, $(\widehat{S', P \dotplus S}) = \beta$, $(\widehat{R, S}) = \gamma$, dann ist aufgrund des Lemmas 2 $\alpha > 0$, $\beta > 0$; dann folgt jedoch aus dem Lemma 1: $\gamma = 0$, was zu beweisen war.

L e m m a 4. Es sei P ein endlichdimensionaler Unterraum eines Banachraumes E. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenem $\beta < 1$ einen Unterraum Q_β mit endlicher Kodimension in E, so daß $(\widehat{P, Q_\beta}) > \beta$.

Dieses Lemma ist in impliziter Form in [9] enthalten (s. auch [4]).

D e f i n i t i o n. Die unendlichdimensionalen Banachräume P und Q heißen "teilweiseisometrisch" (teilweiseisomorph), wenn für ein beliebiges $\eta > 1$ (bzw. für ein gewisses $\eta < \infty$) die unendlichdimensionalen Unterräume $P_\eta \subset P$ und $Q_\eta \subset Q$ und der Isomorphismus T von P_η auf Q_η existieren derart, daß $\max \{ \| T \| , \| T^{-1} \| \} < \eta$. Wenn P und Q nicht teilweiseisometrisch (teilweiseisomorph) sind, nennen wir sie wesentlich nichtisometrisch (wesentlich nichtisomorph).

Wenn beispielsweise E einer der Räume c_o, l_p, $1 \leq p < \infty$ * ist sowie E_1 und E_2 unendlichdimensionale Unterräume von E sind, so kann unschwer gezeigt werden, daß E_1 und E_2 teilweiseisometrisch sind. Als Beispiele wesentlich nichtisometrischer (wesentlich nichtisomorpher) Räume können l_p und l_r, $p \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $p \neq r$ sowie l_p, $p \geqslant 1$ und c_o dienen.

Theorem 13. Die direkte Summe zweier wesentlich nichtisometrischer Unterräume eines Banachraumes ist abgeschlossen.

B e w e i s. Wir nehmen an, daß die direkte Summe der Unterräume P und Q, wobei P und Q wesentlich nichtisometrisch sind, nicht abgeschlossen ist. Dann ist nach dem Theorem 12 $(\widehat{P, Q}) = 0$. Es seien $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ und $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ positive Folgen derart, daß

$$\tag{11}$$

gilt.
Da $(\widehat{P, Q}) = 0$ ist, gibt es zwei Elemente e_1 und g_1, $e_1 \in P$, $g_1 \in Q$, $\| e_1 \| = 1$, derart, daß $\| e_1 - g_1 \| < \varepsilon_1$ ist. Nach dem Lemma 4 gibt es einen Unterraum R_1 der endlichen Kodimension in P mit der Eigenschaft, daß $(\widehat{e_1, R_1}) \geqslant \beta_1$; da aber nach dem Lemma 3 $(\widehat{R_1, Q}) = 0$ ist, gibt es zwei Elemente e_2 und g_2: $e_2 \in R_1$ und $g_2 \in Q$, $\| e_2 \| = 1$ so daß $\| e_2 - g_2 \| < \varepsilon_2$ gilt. Offensichtlich gilt

---

* c_o ist der Raum aller gegen Null konvergierender Zahlenfolgen $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ mit den natürlichen Vektorraum-Operationen und der Norm $\| \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \| = \max_i |\xi_i|$

$\widehat{(e_1, e_2)} \geqslant \widehat{(e_1, R_1)} \geqslant \beta_1$. Es sei $P_{1,\,2}$ die lineare Hülle der Elemente e_1 und e_2. Nach Lemma 4 gibt es einen Unterraum R_2 mit endlicher Kodimension in P derart, daß $\widehat{(P_{1,\,2}, R_2)} \geqslant \beta_2$ ist; da jedoch nach dem Lemma 3 $\widehat{(R_2, Q)} = 0$ ist, gibt es zwei Elemente e_3 und g_3, $e_3 \in R_2$, $g_3 \in Q$, $\|e_3\| = 1$ mit $\|e_3 - g_3\| < \varepsilon_3$. Offensichtlich ist $\widehat{(P_{1,\,2}, e_3)} \geqslant \widehat{(P_{1,\,2}, R_2)} \geqslant \beta_2$. Wenn wir diesen Prozeß ad infinitum fortsetzen, erhalten wir die Existenz der Folgen $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ und $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, $e_i \in P$, $\|e_i\| = 1$, $g_i \in Q$, $i = 1, 2, \ldots$, wobei

(12)

gilt. ($P_{1,\,i}$ - ist die lineare Hülle der Elemente $e_1, \ldots, e_i$).
P_1 und Q_1 seien die linearen Hüllen von $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ bzw. von $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Offensichtlich gilt $\dim P_1 = \infty$ und $\dim Q_1 = \infty$. Aufgrund von (11), (12) sowie Theorem 10 existiert ein Isomorphismus T von P_1 auf Q_1 mit $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, sind die Unterräume P und Q teilweiseisometrisch, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit ist das Theorem bewiesen.

F o l g e r u n g. Die direkte Summe eines reflexiven und eines wesentlich nichtreflexiven * Unterraumes eines Banachraumes ist abgeschlossen.

Theorem 14. Die Summe ⟨Gruppensumme⟩ $P + Q$ zweier wesentlich nichtisometrischer Unterräume P und Q eines Banachraumes ist abgeschlossen.

B e w e i s . Es sei $P \cap Q = R$. Aus der Bedingung des Theorems folgt, daß $\dim R < \infty$. Dann gibt es jedoch Unterräume $P_1 \subset P$ und $Q_1 \subset Q$ mit der Eigenschaft $R \dotplus P_1 = P$, $R \dotplus Q_1 = Q$. Da offensichtlich $P_1 \cap Q_1 = \theta$ ist, ist nach Theorem 13 $P_1 \dotplus Q_1$ abgeschlossen. Berücksich-

---

* Wesentlich nichtrefelxiv heißt ein unendlichdimensionaler Banachraum, dessen reflexive Unterräume alle endlichdimensional sind.

tigt man, daß R endlichdimensional ist, so ergibt sich, daß die Summe

⟨as⟩

abgeschlossen ist.

Damit ist das Theorem bewiesen.

F o l g e r u n g. 1. Die ⟨Gruppen⟩Summe eines reflexiven und eines wesentlich nichtreflexiven Unterraumes eines Banachraumes ist abgeschlossen.

F o l g e r u n g 2. Die direkte Summe oder die ⟨Gruppen⟩Summe wesentlich nichtisomorpher Unterräume eines Banachraumes ist abgeschlossen.

Aus Theorem 12 und 13 folgt:

<u>Theorem 15.</u> Wenn die Unterräume P und Q eines Banachraumes wesentlich nichtisometrisch sind und $P \cap Q = \Theta$ ist, dann bilden diese Unterräume einen positiven minimalen Winkel.

L i t e r a t u r a n g a b e n

1. M.G. Krejn, M.A. Krasnosel'skij, D.P. Mil'man — O defektnych čislach linejnych operatorov v banachovom prostranstve i nekotorych geometričeskich voprosach. ⟨Über Defektzahlen linearer Operatoren in einem Banachraum und einige geometrische Fragen⟩. Sb. trudov Instituta matem. AN USSR, 11 (1948), 97 - 112

2. I.C. Gochberg, A.S. Markus — Dve teoremy o rastvore podprostranstv banachova prostranstva. ⟨Zwei Theoreme über die Öffnung von Unterräumen eines Banachraumes⟩ "Uspechi matem. nauk", 14, vyp. 5 (1959), 135 - 140

3. F. Hausdorff — Teorija množestv. ⟨Mengenlehre⟩ M. - L., (1937), 166

4. V. I. Gurarij — O naklonach podprostranstv i uslovnych bazisach v prostranstve Banacha. ⟨Über Neigungen der Unterräume und bedingte Basen in einem Banachraum⟩ "Dokl. AN SSSR", 145, No 3 (1962), 504 - 506

5. M.M. Grinbljum — Nekotorye teoremy o bazise v prostranstve tipa (B). ⟨Einige Theoreme über die Basis in einem Raum vom Typ (B)⟩"Dokl. AN SSSR", 31 (1941), 428 - 432

6. T. Bonnesen, W. Fenchel — Theorie der konvexen Körper. Berlin (1934), 142 - 143

7. M.M. Dej (Day) — Normirovannye linejnye prostranstva. ⟨Normierte lineare Räume⟩, IL, 1961, 193

8. M.I. Grinbljum — O predstavlenii prostranstva tipa (B) v vide prjamoj summy podprostranstv. ⟨Über die Darstellung eines Raumes vom Typ (B) als direkte Summe von Unterräumen⟩ "Dokl. AN SSSR", 70 (1950), 747 - 752

9. B.R. Gelbaum — Notes on Banach spaces and bases. Anais Acad. Brasil. sienc., 30, No 1, (1958), 29 - 36

<u>Anmerkung des Übersetzers:</u>

Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um die wörtliche Übersetzung.

Stuttgart, den 2.2.1971

i.A.
M. Wagenknecht
(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

64

О РАСТВОРАХ И НАКЛОНАХ ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

В. И. Гурарий

В настоящей работе рассматривается ряд характеристик взаимного расположения подпространств банахова пространства и приводятся некоторые их применения в геометрии банаховых пространств.

§ 1. Различные определения раствора подпространств

М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман ввели [1] следующее определение раствора двух подпространств P и Q банахова пространства E:

$$\Theta(P, Q) = \max\{\sup_{x \in P,\ \|x\|=1} \rho(x, Q), \quad \sup_{y \in Q,\ \|y\|=1} \rho(y, P)\}.$$

Значительная часть применений этого понятия основана на следующей теореме, доказанной в [1].

Теорема 1. *Если размерности* подпространств P и Q банахова пространства E не равны между собой, то $\Theta(P, Q) \geqslant \frac{1}{2}$; если при этом по крайней мере одно из подпространств P и Q конечномерно или E — гильбертово пространство, то $\Theta(P, Q) = 1$.*

И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус [2] следующим образом видоизменили определение раствора:

$$\tilde{\Theta}(P, Q) = \max\{\sup_{x \in S_P} \rho(x, S_Q), \quad \sup_{y \in S_Q} \rho(y, S_P)\}$$

(где S_P — единичная сфера в P, т. е. множество элементов $x \in P$: $\|x\| = 1$; аналогично определяется S_Q) и установили следующее предложение:

Теорема 2. *Множество подпространств банахова пространства E, в котором расстояние между подпространствами P и Q определяется как раствор $\tilde{\Theta}(P, Q)$, есть полное метрическое пространство.*

Нетрудно видеть, что $\Theta(P, Q) \leqslant 1$ и что имеет место неравенство

$$\Theta(P, Q) \leqslant \tilde{\Theta}(P, Q) \leqslant 2\Theta(P, Q).$$

Теорема 1 и, соответственно, теорема 2 становятся несправедливыми, если иметь в виду раствор $\tilde{\Theta}$ или, соответственно, раствор Θ. Мы приводим определение раствора, при котором имеют место утверждения теорем 1 и 2.

* Размерность банахова пространства E понимается здесь как минимальная мощность множества, линейная оболочка которого плотна в E. Очевидно, если E бесконечномерно, то $\dim E$ равна минимальной мощности всюду плотного множества в E.

Определение. *Раствором подпространств P и Q будем называть величину*

$$\hat{\Theta}(P, Q) = \max\{\sup_{x \in T_P} \rho(x, T_Q), \quad \sup_{y \in T_Q} \rho(y, T_P)\},$$

где T_P — единичный шар в P, т. е. множество элементов $x \in P : \|x\| \leqslant 1$. Аналогично определяется T_Q.

Легко проверяются неравенства:

$$\Theta(P, Q) \leqslant \hat{\Theta}(P, Q) \leqslant 1, \tag{1}$$

$$C_1\hat{\Theta}(P, Q) < \tilde{\Theta}(P, Q) \leqslant C_2\hat{\Theta}(P, Q), \tag{2}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — абсолютные постоянные (точные значения этих постоянных нам неизвестны). Кроме того, в гильбертовом пространстве $\hat{\Theta}(P, Q) = \Theta(P, Q)$.

Теорема 3. *Для раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$ имеют место утверждения теорем 1 и 2.*

Доказательство. Из (1) и теоремы 1 вытекает, что для раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$ справедливо утверждение теоремы 1. На основании (2) и теоремы 2 для доказательства справедливости утверждения теоремы 2 относительно раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$ достаточно доказать неравенство треугольника:

$$\hat{\Theta}(P_1, P_3) \leqslant \hat{\Theta}(P_1, P_2) + \hat{\Theta}(P_2, P_3). \tag{3}$$

Но (3) является частным случаем следующей леммы [3].

Лемма (Ф. Хаусдорф). *Если в метрическом пространстве R определено расстояние между множествами $A \subset R$ и $B \subset R$*

$$r(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} \rho(x, B), \quad \sup_{y \in B} \rho(y, A)\},$$

то для произвольных множеств $A_1 \subset R$, $A_2 \subset R$, $A_3 \subset R$ имеет место неравенство

$$r(A_1, A_3) \leqslant r(A_1, A_2) + r(A_2, A_3).$$

Теорема доказана.

Неизвестно, существует ли абсолютная постоянная q; $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$, такая, что если в банаховом пространстве размерности двух подпространств P и Q не равны между собой, то $\hat{\Theta}(P, Q) \geqslant q$.

Аналогичный вопрос для раствора $\Theta(P, Q)$ до сих пор не решен; выяснение же его для раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$, формально говоря, могло бы встретить меньшие трудности в силу (1). Возможно, что при достаточно жестких ограничениях на P и Q из соотношения $\Theta(P, Q) < \alpha$ при некотором $\alpha > 0$ вытекает изоморфизм подпространств P и Q. Некоторые основания для такого предположения дает следующая

Теорема 4. *Если в сепарабельном банаховом пространстве для подпространств P и Q $\Theta(P, Q) < 1$ и P изометрично l_1 (*), то Q изоморфно P.*

* $l_p (p \geqslant 1)$ — пространство числовых последовательностей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$, с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма, недавно полученная В. Д. Мильманом *, которую мы приведем в несколько ослабленной форме.

Лемма. *Если сепарабельное банахово пространство E не изоморфно l_1, то для произвольной нормированной системы $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в E и числа $\varepsilon > 0$ существует полная в E система $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая что $\|x_i - y_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$*

Предположим, что утверждение теоремы 4 не имеет места. Пусть $\{e_i\}_1^{\infty}$ — естественный базис в l_1. Так как при некотором $a > 0$, $\Theta(P, Q) < a < 1$, то из леммы вытекает, что в Q найдется полная система $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $\|e_i - g_i\| < a < 1$. Очевидно, $\|g_i\| < 1 + a$. Имеем

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\| \leqslant (1+a)\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| = (1+a)\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|.$$

С другой стороны,

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\| = \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g_i - e_i)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\| - \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g_i - e_i)\| \geqslant (1-a)\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|.$$

Таким образом получаем

$$(1-a)\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\| \leqslant \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\| \leqslant (1+a)\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|.$$

Следовательно, линейный оператор T, определенный на множестве всех конечных линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ в P формулой $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i$, ограничен и ограниченно обратим. Продолжая его на все P, получим требуемый изоморфизм P на Q.

Теорема доказана.

§ 2. Наклон

Определение. *Пусть P и Q подпространства банахова пространства E. Будем называть наклоном P к Q величину*

$$(\widehat{P, Q}) = \inf_{x \in P;\ \|x\|=1} \rho(x, Q).$$

Наклоном подпространства P к элементу $x \in E$ будем называть наклон P к одномерному подпространству, порожденному этим элементом. Аналогично определим наклон элемента к подпространству и элемента к элементу.

Применения этого понятия (см., например, [4]) в теории базисов (**) основаны на следующем критерии, данном М. М. Гринблюмом [5] в форме,

* Этот результат В. Д. Мильмана изложен в статье, которая в настоящее время находится в печати.

** Последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве E называется базисом в E, если любой элемент $x \in E$ может быть единственным образом представлен в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$. Если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в своей замкнутой линейной оболочке, то она называется базисной в E.

эквивалентной приводимой. Условимся для данной последовательности $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ обозначать через $P_{i,j}$, $i < j$ линейную оболочку над элементами $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j$.

Теорема 5. *Для того, чтобы полная последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве E была базисом в E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,j}}) \geqslant \beta > 0, \quad i < j,$$

где β не зависит от i и j (точная верхняя грань таких β называется индексом базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и обозначается в дальнейшем $\gamma(\{e_i\}_{i=1}^{\infty})$).

Нетрудно видеть, что $(\widehat{P, Q}) = \frac{1}{\|A\|}$, где A — оператор проектирования из $P \dotplus Q$ на P, параллельно Q. Действительно,

$$\|A\| = \sup_{x \in P,\, y \in Q} \frac{\|x\|}{\|x+y\|} = \frac{1}{\inf\limits_{x \in P,\, y \in Q} \frac{\|x+y\|}{\|x\|}} = \frac{1}{(\widehat{P, Q})}.$$

Понятие наклона несимметрично: в общем случае для некоторых P и Q $(\widehat{P, Q}) \neq (\widehat{Q, P})$; следующая теорема дает оценку «степени несимметричности».

Теорема 6. *Если $(\widehat{P, Q}) = \delta$, то $(\widehat{Q, P}) \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}$. Это неравенство точное при любом δ, $0 < \delta < 1$.*

Доказательство. Пусть $y \in Q$, $\|y\| = 1$, $x \in P$, оценим $\|y + x\|$. Рассмотрим два случая

1. $\|x\| \leqslant \frac{1}{1+\delta}$, тогда

$$\|y + x\| \geqslant \|y\| - \|x\| \geqslant 1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta}$$

2. $\|x\| > \frac{1}{1+\delta}$, тогда

$$\|y + x\| \geqslant \rho(x, Q) \geqslant (\widehat{P, Q}) \|x\| \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Так как элементы $x \in P$ и $y \in Q$ выбраны произвольно, то получаем

$$(\widehat{Q, P}) = \inf_{\substack{y \in Q,\, x \in P \\ \|y\|=1}} \|y + x\| \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Для установления точности этого неравенства рассмотрим две функции в $C[0, 1]$: $x(t) \equiv 1$, $y(t) = (1-\delta) + 2\delta t$. Непосредственно проверяется, что

$$(\widehat{x, y}) = \delta, \ (\widehat{y, x}) = \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Для того, чтобы в банаховом пространстве E, $\dim E > 2$ для любых двух подпространств P и Q выполнялось соотношение*

$$(\widehat{P, Q}) = (\widehat{Q, P}), \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы E было пространством со скалярным произведением.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для любых двух подпространств в E выполнено (4) и пусть $E^{(3)}$ — трехмерное подпространство в E, а P — произвольное двумерное подпространство в $E^{(3)}$. Очевидно, найдется элемент $x \in E^{(3)}$ такой, что $(\widehat{x, P}) = 1$, но тогда $(\widehat{P, x}) = 1$. Как нетрудно видеть, это означает, что цилиндрическая поверхность с направляющей S_P (S_P — единичная сфера в P) и образующим элементом x является опорной к единичному шару $T^{(3)}$ в $E^{(3)}$. Так как подпространство P выбрано в $E^{(3)}$ произвольно, то отсюда вытекает, что тело $T^{(3)}$ есть эллипсоид [6] и, следовательно, $E^{(3)}$ — эвклидово пространство. Но так как любое трехмерное подпространство в E эвклидово, то E — пространство со скалярным произведением [7], что и доказывает необходимость.

Неизвестно, справедливо ли утверждение необходимости при $\dim E = 2$.

Достаточность. Для двумерного эвклидова пространства (4) очевидно. Пусть P и Q подпространства пространства со скалярным произведением. Очевидно, для данного $\varepsilon > 0$ найдутся одномерные подпространства $P_1 \subset P$ и $Q_1 \subset Q$, такие что

$$(\widehat{P, Q}) \geqslant (\widehat{P_1, Q_1}) - \varepsilon. \tag{5}$$

Так как, очевидно, $(\widehat{P_1, Q_1}) = (\widehat{Q_1, P_1}) \geqslant (\widehat{Q, P})$, то [illegible]) имеем

$$(\widehat{P, Q}) \geqslant (\widehat{Q, P}) - \varepsilon$$

и в силу произвольности ε получаем $(\widehat{P, Q}) \geqslant (\widehat{Q, P})$. Таким же образом доказывается обратное неравенство $(\widehat{Q, P}) \geqslant (\widehat{P, Q})$, откуда и вытекает (4).

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная последовательность в банаховом пространстве E и пусть $(\widehat{P_{1,i}, e_{i+1}}) = \beta_i$. Если $\prod_{i=1}^{\infty} \beta_i = \beta > 0$, то $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в E, причем $\gamma(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}) \geqslant \beta$.*

Доказательство. Пусть $x \in P_{1,i}$, $y \in P_{i+1,j}$, $y = \sum_{k=i+1}^{j} \alpha_k e_k$, имеем

$$\|x + y\| = \|x + \sum_{k=i+1}^{j-1} \alpha_k e_k + \alpha_j e_j\| \geqslant \|x + \sum_{k=i+1}^{j-1} \alpha_k e_k\| \cdot (\widehat{P_{1,j-1}, e_j}) \geqslant$$

$$\geqslant \|x + \sum_{k=i+1}^{j-2} \alpha_k e_k\| \cdot (\widehat{P_{1,j-2}, e_{j-1}}) \cdot (\widehat{P_{1,j-1}, e_j}) \geqslant$$

$$\geqslant \ldots \geqslant \|x\| \cdot \beta_i \cdot \beta_{i+1} \ldots \beta_{j-1} \geqslant \|x\| \beta.$$

Это означает, что $(\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,i}}) \geqslant \beta$ и на основании теоремы 5 последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в E.

Определение. *Нормированная последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве называется δ-минимальной ($\delta > 0$), если $\rho(e_i, P_{1,i-1} \dotplus P_{i+1,\infty}) \geqslant \delta$, $i = 1, 2, \ldots$*

Теорема 9. *Базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|e_i\| = 1$ с индексом γ есть δ-минимальная последовательность, где $\delta = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}$.*

Доказательство. Пусть $x \in P_{1,i-1}$, $y \in P_{i+1,\infty}$; применяя теорему 6, имеем

$$\|e_i + x + y\| \geqslant \|e_i\| \cdot (\widehat{e_i, P_{1,i-1}}) \cdot (\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,\infty}}) \geqslant \|e_i\| \cdot \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \gamma = \frac{\gamma^2}{1+\gamma},$$
$$i = 1, 2, \ldots$$

что и означает δ — минимальность последовательности $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$; $\delta = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}$.

Следствие. *Если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ нормированная базисная последовательность с индексом γ, то в разложении нормированного элемента $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ имеют место неравенства*

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Теорема 10. *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — нормированная базисная последовательность с индексом γ и пусть последовательность $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\|e_i - g_i\| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{a\gamma^2}{1+\gamma}$; $0 < a < 1$. Тогда оператор T, определенный на множестве линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ формулой $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ ограничен и ограниченно обратим, причем $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \frac{1}{1-a}$.*

Доказательство. Обозначим $e_i - g_i = h_i$ и пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = y$. На основании следствия из теоремы 9 имеем

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \|x\|, \quad i = 1, 2, \ldots;$$

поэтому

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \right\| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \sum_{i=1}^{n} \|h_i\| \cdot \|x\| \leqslant \frac{(1+\gamma)\|x\|}{\gamma^2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leqslant a\|x\|$$

и, следовательно,

$$(1-a)\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant (1+a)\|x\|,$$

что и доказывает теорему 10.

В заключение отметим, что наклон $(\widehat{P, Q})$ связан с минимальным углом $\varphi(P, Q)$, введенным в [2], следующим образом:

$$\sin\varphi(P, Q) = \min\{(\widehat{P, Q}),\ (\widehat{Q, P})\}.$$

§ 3. О связи между раствором и наклоном

Очевидно, имеет место неравенство

$$(\widehat{P, Q}) \leqslant \Theta(P, Q). \tag{6}$$

В гильбертовом пространстве в тривиальных случаях, когда P и Q ортогональны или совпадают в (6), имеет место знак равенства: в первом случае $(\widehat{P, Q}) = \Theta(P, Q) = 1$, во втором случае $(\widehat{P, Q}) = \Theta(P, Q) = 0$. Кроме того, если P и Q одномерны, то в случае гильбертова пространства в (6) также имеет место знак равенства. Оказывается, при любом p, $0 \leqslant p \leqslant 1$ для некоторых неодномерных подпространств P и Q в гильбертовом пространстве возможно равенство $(\widehat{P, Q}) = \Theta(P, Q) = p$. Это предложение является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 11. *В гильбертовом пространстве H для любого натурального $n > 1$ и чисел p, q, $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 1$ существуют n-мерные подпространства P и Q, для которых*

$$(\widehat{P, Q}) = p, \quad \Theta(P, Q) = q.$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ ортонормированная система в H. Положим

$$x_i = e_{2i-1} + a_i e_{2i}, \quad y_i = e_{2i-1} - a_i e_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

(числа a_i будут выбраны позже); P_i и Q_i — одномерные подпространства, порожденные соответственно элементами x_i и y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $P = P_1 \dotplus P_2 \dotplus \ldots \dotplus P_n$, $Q = Q_1 \dotplus Q_2 + \ldots + Q_n$. Если $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, то, как легко видеть,

$$\rho(x, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^4 \rho^2(x_i, Q_i)}.$$

Непосредственный подсчет дает:

$$\rho(x_i, Q_i) = \frac{2a_i}{\sqrt{1 + a_i^2}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая, что $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (1 + a_i^2)}$, имеем

$$(\widehat{P, Q}) = \min 2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 a_i^2}{1 + a_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (1 + a_i^2)}}. \tag{8}$$

$$\max_{x \in P} \frac{\rho(x, Q)}{\|x\|} = \max_{\alpha_i} 2 \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 a_i^2}{1 + a_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (1 + a_i^2)}}. \tag{8}$$

Примем, что

$$\frac{a_1}{1 + a_1^2} \leqslant \frac{a_2}{1 + a_2^2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a_n}{1 + a_n^2}. \tag{9}$$

Тогда, очевидно, минимум или максимум в (8) достигается, когда все α_i, кроме α_1 или, соответственно, α_n равны нулю. Так как минимум или максимум выражения $\frac{|a|}{1 + a^2}$ равны соответственно 0 или $\frac{1}{2}$, то можно с самого начала выбрать $\{a_i\}_{i=1}^n$ так, чтобы выполнялось (9) и равенство $\frac{a_1}{1 + a_1^2} = \frac{p}{2}$, $\frac{a_n}{1 + a_n^2} = \frac{q}{2}$. Тогда из (8) получим

$$(\widehat{P, Q}) = p, \quad \max_{x \in P} \frac{\rho(x, Q)}{\|x\|} = q.$$

Но из (7) видно, что

$$\max_{x \in P} \frac{\rho(x, Q)}{\|x\|} = \max_{y \in Q} \frac{\rho(y, P)}{\|y\|} = \Theta(P, Q).$$

Теорема доказана.

Полагая в теореме 11 $p = q$, получаем

Следствие. *В гильбертовом пространстве для любого числа p, $0 \leqslant p \leqslant 1$ существуют n-мерные подпространства P и Q такие, что $\frac{\rho(x, Q)}{\|x\|} = \frac{\rho(y, P)}{\|y\|} = p$ при любых $x \in P$, $y \in Q$.*

Таким же методом теорема 11 может быть доказана и для случая бесконечномерных подпространств P и Q.

§ 4. Условия замкнутости прямой суммы подпространств

Определение. *Групповой суммой $P + Q$ подпространств P и Q банахова пространства E называется множество всех элементов вида $x + y$, $x \in P$, $y \in Q$. Если $P \cap Q = \Theta$, то $P + Q$ называется прямой суммой и обозначается $P \dotplus Q$.*

Очевидно, если P или Q конечномерно, то $P \dotplus Q$ замкнута. Для бесконечномерных P и Q замкнутость $P \dotplus Q$ не всегда имеет место. Известные геометрические критерии замкнутости прямой суммы подпространств (см., например, [8]) можно переформулировать в терминах наклонов следующим образом:

Теорема 12. *Для того, чтобы прямая сумма двух подпространств P и Q банахова пространства была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы $(\widehat{P, Q}) > 0$.*

Перед формулировкой основного результата этого параграфа установим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Пусть P и Q подпространства банахова пространства, $P = P_1 \dotplus P_2$, $Q = Q_1 \dotplus Q_2$,

$$\widehat{(P_1, P_2 \dotplus Q)} = \alpha, \quad \widehat{(Q_1, Q_2 \dotplus P)} = \beta, \quad \widehat{(P_2, Q_2)} = \gamma.$$

Тогда

$$\widehat{(P, Q)} \geqslant \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $x \in P$, $y \in Q$, $\|x\| = 1$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_i \in P_i$, $y_i \in Q_i$, $i = 1, 2$. Оценивая $\|x + y\|$, рассмотрим два случая:

1. $\|x_1\| + \|y_1\| \geqslant a$ (a выберем позже).

Этот случай в свою очередь подразделяем на два:

а) $\|x_1\| \geqslant \frac{a\beta}{\alpha + \beta}$, тогда

$$\|x + y\| = \|x_1 + (x_2 + y_1 + y_2)\| \geqslant \|x_1\| \alpha \geqslant \frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

б) $\|x_1\| < \frac{a\beta}{\alpha + \beta}$, тогда $\|y_1\| \geqslant a - \|x_1\| > \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$, и мы имеем

$$\|x + y\| = \|y_1 + (x_1 + x_2 + y_2)\| \geqslant \|y_1\| \beta \geqslant \frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

и, таким образом, в случае 1:

$$\|x + y\| \geqslant \frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

2. $\|x_1\| + \|y_1\| < a$, тогда $\|x_2\| \geqslant 1 - \|x_1\| \geqslant 1 - a$ и имеем

$$\|x + y\| = \|x_2 + y_2 + x_1 + y_1\| \geqslant \|x_2 + y_2\| - (\|x_1\| + \|y_1\|) \geqslant$$
$$\geqslant \|x_2\| \gamma - a \geqslant (1 - a)\gamma - a.$$

Выбирая a как корень уравнения $\frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta} = (1 - a)\gamma - a$, т. е. $a = \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}$, мы в обоих случаях получим

$$\|x + y\| \geqslant \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma},$$

откуда и вытекает (10).

Очевидна следующая

Лемма 2. Если $P \cap Q = \Theta$ и $\dim P < \infty$, то $\widehat{(P, Q)} > 0$.

Лемма 3. Пусть R и S подпространства конечных коразмерностей в подпространствах соответственно P и Q банахова пространства, и $P \cap Q = \Theta$. Для того, чтобы $\widehat{(R, S)} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\widehat{(P, Q)} = 0$.

Очевидно, в доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\widehat{(P, Q)} = 0$ и пусть R' и S' — прямые дополнения к R и S в P и Q соответственно; очевидно, $\dim R' < \infty$ и $\dim S' < \infty$. Так как $P \cap Q = \Theta$ и $R' \cap R = \Theta$, $S' \cap S = \Theta$, то $R' \cap (Q \dotplus R) = \Theta$ и $S' \cap (P \dotplus S) = \Theta$. Если обозначить $\widehat{(R', Q \dotplus R)} = \alpha$, $\widehat{(S', P \dotplus S)} = \beta$, $\widehat{(R, S)} = \gamma$, то на основании леммы 2 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, но тогда из леммы 1 вытекает: $\gamma = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Пусть P конечномерное подпространство в банаховом пространстве E. Для произвольного, наперед заданного $\beta < 1$ существует подпространство Q_β конечной коразмерности в E, такое что $\widehat{(P, Q_\beta)} > \beta$.

Эта лемма в неявном виде содержится в [9], (см. также [4]).

Определение. *Бесконечномерные банаховы пространства P и Q будем называть частично изометричными (частично изоморфными), если для любого $\eta > 1$ (соответственно для некоторого $\eta < \infty$) существуют бесконечномерные подпространства $P_\eta \subset P$ и $Q_\eta \subset Q$ и изоморфизм T P_η на Q_η такие, что $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < \eta$. Если P и Q не являются частично изометричными (частично изоморфными), то будем называть их существенно неизометричными (существенно неизоморфными).*

Нетрудно показать, например, что если E есть одно из пространств c_0, l_p, $1 \leqslant p < \infty$ *, E_1 и E_2 — бесконечномерные подпространства в E, то E_1 и E_2 частично изометричны. Примерами существенно неизоморфных (а значит и существенно неизометричных) пространств могут служить l_p и l_r, $p \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $p \neq r$, а также l_p, $p \geqslant 1$ и c_0.

Теорема 13. *Прямая сумма двух существенно неизометричных подпространств банахова пространства замкнута.*

Доказательство. Предположим, что прямая сумма подпространств P и Q, где P и Q существенно неизометричны, незамкнута. Тогда по теореме 12 $(\widehat{P, Q}) = 0$. Пусть $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительные последовательности, такие, что

$$\prod_{i=1}^{\infty} \beta_i = \beta > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon\beta^2}{1+\beta}. \tag{11}$$

Так как $(\widehat{P, Q}) = 0$, то найдутся два элемента e_1 и g_1, $e_1 \in P$, $g_1 \in Q$, $\|e_1\| = 1$, такие, что $\|e_1 - g_1\| < \varepsilon_1$. По лемме 4 найдется подпространство R_1 конечной коразмерности в P, такое, что $(\widehat{e_1, R_1}) \geqslant \beta_1$, но так как по лемме 3 $(\widehat{R_1, Q}) = 0$, то найдутся два элемента e_2 и g_2: $e_2 \in R_1$ и $g_2 \in Q$, $\|e_2\| = 1$, такие, что $\|e_2 - g_2\| < \varepsilon_2$. Очевидно, $(\widehat{e_1, e_2}) \geqslant (\widehat{e_1, R_1}) \geqslant \beta_1$. Пусть $P_{1,2}$ — линейная оболочка элементов e_1 и e_2. По лемме 4 найдется подпространство R_2 конечной коразмерности в P такое, что $(\widehat{P_{1,2}, R_2}) \geqslant \beta_2$, но так как по лемме 3 $(\widehat{R_2, Q}) = 0$, то найдутся два элемента e_3 и g_3, $e_3 \in R_2$, $g_3 \in Q$, $\|e_3\| = 1$ такие, что $\|e_3 - g_3\| < \varepsilon_3$. Очевидно, $(\widehat{P_{1,2}, e_3}) \geqslant (\widehat{P_{1,2}, R_2}) \geqslant \beta_2$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим существование последовательностей $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, $e_i \in P$, $\|e_i\| = 1$, $g_i \in Q$, $i = 1, 2, \ldots$ таких, что

$$(\widehat{P_{1,i}, e_{i+1}}) \geqslant \beta_i \text{ и } \|e_i - g_i\| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

($P_{1,i}$ — линейная оболочка над элементами $e_1, \ldots, e_i$). Пусть P_1 и Q_1 — линейные оболочки над $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и соответственно над $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Очевидно $\dim P_1 = \infty$ и $\dim Q_1 = \infty$. На основании (11), (12) и теоремы 10 существует изоморфизм T P_1 на Q_1 такой, что $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$, и так как ε можно было с самого начала выбрать сколь угодно малым, то подпространства P и Q частично изометричны, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

---

* c_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \max_i |\xi_i|$.

Следствие. *Прямая сумма рефлексивного и существенно нерефлексивного* подпространств банахова пространства замкнута.*

Теорема 14. *Групповая сумма $P + Q$ двух существенно неизометричных подпространств P и Q банахова пространства замкнута.*

Доказательство. Пусть $P \cap Q = R$. Из условия теоремы следует, что $\dim R < \infty$. Но тогда существуют подпространства $P_1 \subset P$ и $Q_1 \subset Q$ такие, что $R \dot{+} P_1 = P$, $R \dot{+} Q_1 = Q$. Так как, очевидно, $P_1 \cap Q_1 = 0$, то по теореме 13 $P_1 \dot{+} Q_1$ замкнута. Но тогда, учитывая, что R конечномерно, получаем, что сумма

$$P + Q = R \dot{+} (P_1 \dot{+} Q_1) -$$

замкнута.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Групповая сумма рефлексивного и существенно нерефлексивного подпространств банахова пространства замкнута.*

Следствие 2. *Прямая или групповая сумма существенно неизоморфных подпространств банахова пространства замкнута.*

Из теорем 12 и 13 вытекает

Теорема 15. *Если подпространства P и Q банахова пространства существенно неизометричны и $P \cap Q = 0$, то эти подпространства образуют положительный минимальный угол.*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и некоторых геометрических вопросах. Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 11 (1948), 97—112.

2. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус. Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства. «Усп. матем. наук», 14, вып. 5 (1959), 135—140.

3. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М.—Л., (1937), 166.

4. В. И. Гурарий. О наклонах подпространств и условных базисах в пространстве Банаха. «Докл. АН СССР», 145, № 3 (1962), 504—506

5. М. М. Гринблюм. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (В). «Докл. АН СССР», 31 (1941), 428—432.

6. T. Bonnesen und W. Fenchel. Theorie der konvexen körper, Berlin, (1934), 142—143.

7. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961, 193.

8. М. Н. Гринблюм. О представлении пространства типа (В) в виде прямой суммы подпространств. «Докл. АН СССР», 70, (1950), 747—752.

9. B. R. Gelbaum. Notes on Banach spaces and bases. Anais Acad. Brasil. cienc., 30, № 1, (1958), 29—36.

* Существенно нерефлексивным мы называем бесконечномерное банахово пространство, все рефлексивные подпространства которого конечномерны.