N/67

Vestnik Leningradskog Universiteta
M a t e m a t i k a
(1960) 7, S. 5/13

Aleksandrov, A.D.: EINDEUTIGKEITSSÄTZE FÜR FLÄCHEN IM GROSSEN. VII

§ 1. Formulierung der Ergebnisse

1. Im folgenden ist H (x,y,z) überall eine Funktion, die im gesamten Raum - mit Ausnahme des Ursprungs - definiert ist und positiv homogen der ersten Potenz ist. Infolge der Homogenität ist einer der Eigenwerte ihres zweiten Differentials immer gleich Null.

T h e o r e m 1. Angenommen, H sei zweimal differenzierbar und für ihr zweites Differential gilt in jedem Punkt - mit Ausnahme vielleicht einer bestimmten Menge des Maßes Null - eine der beiden Möglichkeiten: entweder ist $d^2H \equiv 0$, oder d^2H ist eine indefinite Form, wobei das Verhältnis seiner Eigenwerte R_1 , R_2 beschränkt ist (abgesehen von dem trivial verschwindenden), d.h. es existiert eine solche Konstante A , daß $A > \left|\frac{R_1}{R_2}\right| > \frac{1}{A}$.

Dann ist die Funktion H linear.

T h e o r e m 1a. Im Theorem 1 kann man die Forderung nach zweimaliger Differenzierbarkeit von H durch die Voraussetzung ersetzen, daß H stetig differenzierbar ist und verallgemeinerte zweite Ableitungen hat, die quadratisch integrierbar sind.

Dabei kann man das zweite Differential d^2H als eine Form verstehen, deren Koeffizienten die verallgemeinerten Ableitungen sind.

Das Theorem 1a ist nicht identisch mit dem Theorem 1, da die zweiten Ableitungen nicht unbedingt quadratisch integrierbar sein müssen. Man kann jedoch allgemeinere Voraussetzungen formulieren, bei denen man ein beide Theoreme umfassendes Theorem gewinnen kann. Da eine solche Formulierung jedoch die Einführung anderer Begriffe erfordert, führen wir es nicht an.

2. Wir betrachten die Flächen S', S'', die Einhüllende einer Ebenenschar sind, die fast überall bestimmbar sind durch die zweimal differenzierbaren Stützfunktionen H', H''. Die Übereinstimmung ⟨Zuordnung⟩ der Punkte der Flächen wird durch die Parallelität der Normalen hergestellt, mit anderen Worten: es geht um die Übereinstimmung der Ebenen der erwähnten Scharen. Der Hauptfall ist der, wenn diese Flächen konvex sind; in diesem Fall ist bekanntlich fast überall die Existenz der zweiten Differentiale d^2H', d^2H'' von selbst gewährleistet. Wenn es heißt, daß irgendetwas fast überall gilt, ist es selbstverständlich, daß dies für fast alle Normalen gilt.

Angenommen, es seien $R_1' \geqslant R_2'$, $R_1'' \geqslant R_2''$ die Hauptkrümmungsradien der Flächen S', S'', die man auch im Sinne der relativen Differentialgeometrie verstehen kann. (vgl. [1]). Beim üblichen Verständnis sind sie die Eigenwerte der zweiten Differentiale d^2H', d^2H''.

<u>T h e o r e m 2.</u> Angenommen, die Differenz $H' - H''$ sei zweimal differenzierbar und für fast jedes Paar entsprechender Punkte gilt: entweder die beiden Differenzen $\triangle R_1 = R_1' - R_1''$, $\triangle R_2 = R_2' - R_2''$ sind gleich Null, oder sie haben verschiedene Vorzeichen und ihr Verhältnis ist beschränkt, d.h. es existiert eine solche Konstante A, daß in allen solchen Punkten $A > \dfrac{\triangle R_1}{\triangle R_2} > \dfrac{1}{A}$.

Unter diesen Voraussetzungen sind die Flächen S', S'' kongruent und parallel gelegen.

<u>T h e o r e m 2a.</u> Genau das gleiche Resultat gilt unter diesen gleichen Voraussetzungen für $\triangle R_1$, $\triangle R_2$, wenn $H = H' - H''$ die Voraussetzungen des Theorems 1a erfüllt.

Der Regularitätsgrad der Flächen S', S'' selbst spielt keine Rolle. Daher schließen die Theoreme 2, 2a das folgende Resultat ein.

> Wenn eine allgemeine geschlossene konvexe Fläche infolge einer Änderung ihrer Stützfunktion so deformiert wird, daß die Voraussetzungen der Theoreme 2 oder 2a erfüllt sind, so läuft die Deformation auf eine Parallelverschiebung hinaus.

Es ist leicht, aus den Voraussetzungen des Theorems 2 oder 2a zu schließen, daß $H = H' - H''$ die Voraussetzungen des Theorems 1 oder 1a erfüllt und folglich linear sein muß. Das bedeutet aber auch, daß die Flächen S', S'' gleich und parallel gelegen sind. Somit folgen die Theoreme 2, 2a jeweils aus den Theoremen 1, 1a. (Es gilt auch das Umgekehrte. Angenommen, H sei eine Funktion mit den Voraussetzungen des Theorems 1 oder 1a, S'' - eine Sphäre, H'' - ihre Stützfunktion und S' - eine Fläche mit der Stützfunktion $H' = H'' + H$. Dann sind für die Flächen S', S'' die Voraussetzungen des Theorems 2 oder 2a erfüllt und infolge dieser Theoreme ist H linear.)

3. Nach einer einfachen Aussage, die in [2] gemacht wurde, sieht die Bedingung ⟨Voraussetzung⟩ für $\triangle R_1$, $\triangle R_2$ in den Theoremen 2, 2a wie folgt aus: es existiert eine nach R_1, R_2 stetig differenzierbare Funktion $f(R_1, R_2; n)$ mit der Bedingung $\frac{df}{dR_1}\frac{df}{dR_2} > \text{const} > 0$, die so beschaffen ist, daß fast in allen entsprechenden Punkten der Flächen S', S''

$$ \qquad (1,1)$$

ist, wobei n - die Normale ist.

In dieser Form wurde das Theorem 2 in [2 - 6] bewiesen bei wesentlich strengeren Voraussetzungen hinsichtlich der Flächen und der Funktion f und unter der Voraussetzung, daß die Gleichung (1,1) überall erfüllt ist.

4. Ein dem Theorem 1 ähnliches Theorem wurde zuerst in [2] bewiesen mit dem Unterschied, daß die Funktion H als analytisch angenommen wurde, statt dessen aber die Forderung nach Beschränktheit des Verhältnisses der Eigenwerte ihres zweiten Differentials fehlte.

Wir beweisen hier das folgende Theorem.

T h e o r e m 3. Die Voraussetzungen ⟨Bedingungen⟩ des Theorems 1 kann man durch folgende ersetzen: 1) in jedem Punkt ist entweder $R_1 = R_2 = 0$ oder $R_1R_2 < 0$; 2) wie auch immer der Punkt X_o beschaffen ist, sobald sich der Punkt X - wo R_1 und R_2 nicht gleich Null sind - X_o nähert, dann ist

, (1,2)

wobei $r(XX_o)$ - der Abstand von X zu X_o ist.

Ebenso wie aus dem Theorem 1 das Theorem 2 folgt, so geht aus dem Theorem 3 ein Theorem hervor, in dem die Forderung der Beschränktheit des Verhältnisses $\triangle R_1 : \triangle R_2$ durch eine zu (1,2) analoge Bedingung ersetzt wird.

§ 2. Beweis der Theoreme 1, 1a

1. Wir beweisen die Theoreme 1, 1a gleichzeitig, indem wir nacheinander eine Reihe von Behauptungen, deren größter Teil auch unter den Voraussetzungen des Theorems 3 gilt, beweisen. Dem entsprechend wird - wenn nicht explizit das Gegenteil festgelegt wird - unter $H(x, y, z)$ eine Funktion verstanden, die die Bedingungen jedes der Theoreme 1, 1a, 3 erfüllt.

Wir bemerken hierzu, daß man - ohne Veränderung der Voraussetzungen dieser Theoreme - zu H jede beliebige homogene lineare Funktion hinzufügen kann.

2. B e h a u p t u n g 1. Wenn fast überall in irgendeinem Bereich G $d^2H = 0$ ist, so ist H in G linear.

B e w e i s. Auf fast allen in G liegenden Strecken ⟨Abschnitten⟩ paralleler Geraden beliebiger Richtung ist $H_{ss} = 0$. Daher ist H - wenn sie zweimal differenzierbar ist - auf solchen Strecken linear und folglich linear in G.

Wenn aber H verallgemeinerte zweite Ableitungen hat, dann ist auf fast allen Geraden der jeweiligen Richtung ihre Ableitung H_s entlang solcher Geraden absolut stetig (s. beispielsweise [7]). Daher ist in diesem Fall H ebenfalls linear in G.

In Anbetracht des Bewiesenen nehmen wir weiter an, daß $d^2H = 0$ auf einer Menge mit positivem Maß, da H sonst linear wäre und wir schon das gewünschte Resultat hätten.

3. Behauptung 2. Die Funktion $u(x, y) = H(x, y, 1)$ erfüllt fast überall eine elliptische Gleichung zweiter Ordnung, die man mittels Drehung der x, y - Achsen in jedem Punkt, in dem sie erfüllt ist, auf die Form: $a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} = 0$ bringen kann. Dabei ist in jedem endlichen Bereich ⟨Gebiet⟩ der x, y - Ebene das Verhältnis $a_{11} : a_{22}$ genau den gleichen Beschränkungen unterworfen wie das Verhältnis $|R_1| : |R_2|$, wobei - gemäß § 1 - R_1, R_2 die Eigenwerte von d^2H sind.

Beweis. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Eigenwerte k_1, k_2 des zweiten Differentials der Funktion $u(x, y)$ aus R_1, R_2 durch Multiplikation mit Faktoren gewonnen werden, die nach unten und oben durch positive Konstanten in jedem begrenzten Bereich der x, y - Ebene beschränkt sind.

Wenn in einem gegebenen Punkt $d^2u = 0$, dann ist $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Wenn in einem gegebenen Punkt d^2u existiert, aber nicht identisch verschwindet, dann haben k_1, k_2 verschiedene Vorzeichen. Durch Drehung der Achsen bringen wir d^2u auf die kanonische Form, so daß $k_1 = u_{xx}$, $k_2 = u_{yy}$ ist. Dann ist - da k_1, k_2 verschiedene Vorzeichen haben, $|k_2|u_{xx} + |k_1|u_{yy} = 0$.

Damit ist unsere Beahuptung bewiesen.

4. Wir betrachten die Fläche F, die in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, u durch die Gleichung

$$ \tag{a} $$

bestimmbar ist.

B e h a u p t u n g 3. Keine Ebene trennt von der Fläche F eine "Kappe" ab, d.h. ein endliches Stück.

B e w e i s. Wir nehmen das Gegenteil an. G sei eine von F abgeschnittene Kappe. Wenn wir über G eine konvexe Hülle ziehen, können wir uns davon überzeugen, daß G eine Menge von Punkten mit positivem Flächeninhalt des sphärischen Bildes enthalten muß.

Aus dem im Beweis der Behauptung 2 Gesagten folgt jedoch, daß die Krümmung der Fläche F fast überall nichtpositiv ist. Daher kann man - wenn $u(x, y)$ überall zweimal differenzierbar ist - von G nicht eine Kappe abschneiden.

Wenn aber $u(x, y)$ verallgemeinerte zweite Ableitungen hat, die quadratisch integrierbar sind, dann ist die Integralkrümmung einer beliebigen Menge auf ihr gleich dem Integral aus dem Produkt der Hauptkrümmungen (s. beispielsweise [8]). Daher ist sie nichtpositiv und folglich kann man von F keine Kappe abschneiden. (Genau das gleiche Ergebnis kann man gewinnen, wenn man sich auf das Maximumprinzip (s. [9]) stützt für eine Gleichung, die - nach der Behauptung 2 - $u(x, y)$ erfüllt.

5. B e h a u p t u n g 4. Durch Drehung der x, y, z - Achsen und Hinzufügung ⟨Addition⟩ einer homogenen linearen Funktion zu H kann man erreichen, daß für die Fläche $F: u = u(x, y) = H(x, y, 1)$ zwei Voraussetzungen erfüllt sind: 1) überall ist $u_x \geqslant 0$, 2) wenigstens in einem Punkt berührt die Fläche F die Ebene $u = 0$.

B e w e i s. Wir betrachten die Fläche S, die die Einhüllende einer Ebenenschar Q mit der Stützfunktion H ist. Die Koordinaten der Punkte dieser Fläche sind $X = H_x$, $Y = H_y$, $Z = H_z$. Diese Fläche ist beschränkt und hat deshalb Stützebenen beliebiger Richtung.

Gleichzeitig hat diese Fläche überall, wo d^2H existiert und nicht identisch verschwindet, eine negative Krümmung (ihre Hauptkrümmungsradien sind die Eigenwerte von d^2H). Nach der Annahme in Punkt 2 gilt dies für eine Menge der Ebenen Q mit positivem Maß.

Angenommen, Q_1 sei eine dieser Ebenen. P sei eine ⟨die⟩ Stützebene von S_1 deren innere Normale parallel der Normalen von Q_1 ist. Dann entspricht der Punkt A, wo P auf S stößt, wenigstens einer Ebene Q_0, die von P verschieden ist.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Punkt A. Das ist gleichbedeutend mit der Ergänzung einer entsprechenden linearen Funktion zu H. Wir drehen die Achsen so, daß die x-Achse mit der inneren Normalen zur Ebene P zusammenfällt. Dann ist überall $X \geqslant 0$, d.h. $H_x \geqslant 0$. Und im Punkt A selbst ist $X = Y = 0$ und folglich $H_x = H_y = 0$.

Angenommen, die Normale zur Ebene Q_o werde durch die Koordinaten $x_o : y_o : z_o$ bestimmt. Da Q_o nicht mit P zusammenfällt ⟨nicht mit P kongruent ist⟩, ist sie nicht senkrecht zur x-Achse und man kann also die y, z - Achsen so drehen, daß $z_o > 0$ ist; und dann kann man $z_o = 1$ wählen. Somit gibt es in dem "Raum der Normalen" x, y, z auf der Ebene $z = 1$ den Punkt $(x_o, y_o, 1)$, der der Ebene Q_o entspricht.

Wenn wir jetzt die Fläche $F : u = H(x, y, 1)$ betrachten, können wir uns davon überzeugen, daß erstens überall $u_x \geqslant 0$ ist, da $H_x \geqslant 0$ und zweitens in dem Punkt (x_o, y_o) $H_x = H_y = 0$ ist, d.h. $u_x = u_y = 0$. Außerdem geht die Ebene Q_o durch den Ursprung, so daß $H(x_o, y_o, 1) = 0$ ist. Folglich berührt die Fläche F im Punkt (x_o, y_o) die Ebene $u = 0$.

6. B e h a u p t u n g 5. Wenn überall $u_x \geqslant 0$ ist und wenigstens in einem Punkt die Fläche F die Ebene $u = 0$ berührt, so berührt sie sie auf einer zusammenhängenden Menge, die ins Unendliche geht.

B e w e i s. Angenommen, M sei eine Menge, auf der F die Ebene $u = 0$ berührt. Wenn sich M nicht auf die ganze Ebene ausdehnt, so gibt es einen Punkt $A \in M$, der auf der Grenze von M liegt. In der Umgebung dieses Punktes kann nicht fast überall $d^2H = 0$ sein, da sonst - nach der Behauptung 1 - diese gesamte Umgebung in M eingeschlossen wäre. Daher existieren die Punkte $A_i \to A$, in denen d^2H eine indefinite Form ist.

Wir zeichnen in den entsprechenden Punkten $\bar{A}_i$ der Fläche F die Tangenten der Ebene P_i. Die Ebene P_i schneidet F so, daß es auf F in der Nähe des Punktes $\bar{A}_i$ vier Bereiche G_i gibt, die paarweise über und unter der Ebene P_i liegen. Da man von F keine Kappe abschneiden kann, erstrecken sich diese Bereiche ins Unendliche.

Aber da überall u_x 0 ist, wird die Fläche F durch die Ebene $u = 0$ in nicht mehr als zwei Bereiche zerlegt. Wenn die Punkte A_i gegen A konvergieren, entartet daher zumindest einer der Bereiche G_i an der Grenze: sein Grenzwert (seine Grenze) liegt völlig in der Ebene $u = 0$. Das ergibt auch die sich ins Unendliche erstreckende zusammenhängende Menge, auf der F die Ebene $u = 0$ berührt.

7. Angenommen, M sei eine zusammenhängende Menge, auf der - gemäß dem Bewiesenen - die Fläche F die Ebene $u = 0$ berührt. Bezüglich M unterscheiden wir drei Möglichkeiten:

1) Es existiert eine nicht in M enthaltene Gerade l, die parallel zur x- Achse ist und M so schneidet, daß auf beiden Seiten von ihr Punkte der Menge M existieren.

2) Eine derartige Gerade existiert nicht, aber M erstreckt sich nicht über die ganze Ebene. Dann ist M entweder eine Halbgerade oder eine zur x-Achse parallele Gerade oder ein Streifen zwischen einem Paar solcher Geraden oder eine Halbebene, die durch eine derartige Gerade bgrenzt ist. Weiterhin genügt es zu berücksichtigen, daß es hier immer eine zur x-Achse parallele Halbgerade gibt, die zur Grenze der Menge M gehört, so daß es auf einer Seite von ihr keine Punkte dieser Menge gibt.

3) M ist die gesamte Ebene.

Das Weitere läuft darauf hinaus zu beweisen, daß die ersten zwei Möglichkeiten ausgeschlossen sind.

8. <u>Behauptung 6.</u> Im ersten Fall existiert auf der x, y- Ebene ein Kreis C, der die Menge M berührt, aber keine Punkte von ihr im Innern enthält und so beschaffen ist, daß in C die Funktion $u(x, y)$ das Vorzeichen nicht ändert.

<u>Beweis.</u> Nach der Eigenschaft der Geraden l und des Zusammenhangs der Menge M existiert ein l enthaltender Streifen aus parallelen Geraden, die die gleiche Eigenschaft haben. Die Menge M teilt diesen Streifen. Aus der Tatsache, daß u_x 0 ist, ist offensichtlich, daß in einem Teil dieses Streifens, der auf einer Seite von M liegt, $u(x, y)$ nicht das Vorzeichen ändert. Wählen wir den Kreis in diesem

Teil des Streifens und schieben ihn an M heran, so erhalten wir dann den Kreis C mit der geforderten Eigenschaft.

9. B e h a u p t u n g 7. Unter den Voraussetzungen des Theorems 1 oder 1a ist der erste der für die Menge M angeführten Fälle unmöglich.

B e w e i s. Nach der Behauptung 2 erfüllt u (x, y) eine Gleichung, die in jedem Punkt, wo sie bestimmt ist, durch Drehung der Achsen auf die Form $a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} = 0$ gebracht wird.

Unter den Voraussetzungen der Theoreme 1, 1a ist das Verhältnis der Koeffizienten in jedem endlichen Bereich beschränkt. Folglich finden wir, wenn wir beispielsweise durch $a_{11} + a_{22}$ dividieren, daß diese Gleichung Koeffizienten besitzt, die (im endlichen Bereich) nach unten und oben durch positive Konstanten begrenzt sind, d.h. sie ist streng elliptisch.

In dem Kreis C , dessen Existenz oben festgestellt wurde, ändert u (x, y) jedoch nicht das Vorzeichen und verschwindet samt ihren 1. Ableitungen ⟨...berührt Null irgendwo ...⟩ irgendwo auf seiner Grenze. Daher ist - gemäß dem in [9] Bewiesenen - u = 0 in C (s. [9], Theorem 4). In einem solchen Fall aber ist C in der zusammenhängenden Menge M enthalten, auf der die Fläche F : u = u (x, y) die Ebene u = 0 berührt. Dies widerspricht der Wahl des Kreises C, und damit ist die Unmöglichkeit des ersten Falles für die Menge M bewiesen.

10. Im zweiten, im Punkt 7 für die Menge M aufgezeigten Falle, gibt es auf ihrer Grenze eine zur x-Achse parallele Halbgerade 1 , auf deren einer Seite es keine Punkte der Menge M gibt.

B e h a u p t u n g 8. Von der erwähnten Seite grenzt an die Halbgerade 1 ein Streifen, in dem u (x, y) nicht das Vorzeichen ändert.

B e w e i s. Wir wählen einen parallelen Streifen L der aufgezeigten Form. Wenn sich der Punkt X (x, y) auf ihm ins Unendliche bewegt, bleibt y beschränkt und x strebt gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

In dem Raum x, y, z, wo die Funktion H (x, y, z) vorgegeben ist, entspricht dem Punkt X ein aus dem Ursprung hervorgehender Strahl mit der Richtung x : y : 1 . Bei der erwähnten Bewegung des Punktes X (x, y)

k

konvergieren diese Richtungen entweder gegen $1 : 0 : 0$ oder gegen $-1 : 0 : 0$. Infolge der Homogenität der Funktion H hängen ihre ersten Ableitungen nur von dem Verhältnis $x : y : z$ ab. Außerdem sind diese Ableitungen nach Voraussetzung stetig.

Daraus folgt: wie der Punkt X sich auch auf dem Streifen L ins Unendliche bewegt, $u_y\ (x, y)$ strebt gleichmäßig gegen eine bestimmte Grenze ⟨gegen einen bestimmten Grenzwert⟩. Und da auf der Halbgeraden l $u_y = 0$ ist, ist der erwähnte Grenzwert gleich Null.

Folglich ist in einem genügend entfernten Teil des Streifens L $u_y\ (x, y)$ beliebig klein. Und da auf l $u = 0$ ist, erweist sich in einem solchen entfernten Teil des Streifens L auch $u\ (x, y)$ als beliebig klein und beim Wegrücken ins Unendliche u 0.

Überall jedoch ist u_x 0. Daher folgt aus dem Gesagten, daß $u\ (x, y)$ in dem Streifen L nicht das Vorzeichen ändert.

11. B e h a u p t u n g 9. Unter den Voraussetzungen des Theorems 1 oder 1a ist die für die Menge M in Punkt 7 aufgezeigte zweite Möglichkeit ausgeschlossen.

B e w e i s. Wir konstruieren den Kreis C , der in dem Streifen L liegt und die Halbgerade l berührt. Nach dem Bewiesenen ändert $u\ (x, y)$ in L nicht das Vorzeichen. Gleichzeitig verschwindet sie samt ihren 1. Ableitungen ⟨..berührt die Nullstelle ..⟩ in dem Punkt, in dem C die Halbgerade l berührt. Daher bekommen wir ganz analog zum Beweis der Behauptung 7 den Beweis der formulierten Behauptung 9 .

12. B e h a u p t u n g 10. Bei der dritten in Punkt 7 für die Menge M aufgezeigten Möglichkeit, wenn M sich über die ganze Ebene erstreckt, ist nicht nur $u\ (x, y) = H\ (x, y, 1) = 0$, sondern überhaupt $H\ (x, y, z) = 0$.

B e w e i s. In dem angeführten Fall ist $H\ (x, y, 1) = 0$, d.h. $H\ (x, y, z) = 0$ in dem Halbraum z 0 und nach der Stetigkeit auch bei $z = 0$. Daher genügt es zu beweisen, daß $H = 0$ bei z 0 , d.h. daß $H\ (x, y, 1) = 0$.

Wir nehmen an

. (2,1)

Da auf der Ebene $z = 0$ $H = 0$ ist, gilt dann

. (2, 2)

Nach der Homogenität von H ist

. (b)

Kraft dessen, daß H stetig differenzierbar ist und $H_z(x, y, 0) = 0$, ist daher $H_z(x, y, z)$ 0 gleichmäßig bei z 1 und r . Daraus schließen wir infolge (2, 1) und (2, 2), daß bei $x^2 + y^2$ $H(x, y, -1)$ 0 . Das bedeutet, daß die Fläche F' mit der Gleichung $u = H(x, y, -1)$ im Unendlichen die Ebene $u = 0$ berührt. Nach der Beahuptung 2 kann jedoch von der Fläche F' keine Kappe abgeschnitten werden. Daher ist $H(x, y, -1) = 0$, was zu beweisen war.

Vergleicht man die Behauptungen 5 - 7, kann man sich davon überzeugen, daß unter den Voraussetzungen des Theorems 1 oder 1a $H = 0$ ist. Und da die untersuchte Funktion sich von der Ausgangsfunktion nur durch den linearen Summanden unterscheidet, ist die Ausgangsfunktion H linear und die Theoreme 1, 1a sind bewiesen. Wie aus dem in § 1 Gesagten folgt, sind damit gleichzeitig auch die Theoreme 2, 2a bewiesen.

§ 3. Beweis des Theorems 3

1. <u>L e m m a.</u> Angenommen, C sei ein geschlossener Kreis auf der x, y - Ebene, der die y - Achse im Koordinatenursprung O von der Seite x 0 berührt. Es sei in C die zweimal differenzierbare Funktion $u(x, y)$ mit den folgenden Bedingungen vorgegeben:
1) überall in C ist $u(x, y)$ 0;
2) $u(x, y)$ verschwindet in O samt ihren 1. Ableitungen, d.h. in O ist $u = u_x = u_y = 0$;
3) überall in C erfüllt $u(x, y)$ die Gleichung

(3, 1)

wobei c b^2 und cx 0 bei x 0.
Dann existieren innerhalb von C Punkte, in denen $u = 0$ ist.

B e w e i s. Wir nehmen die Transformation vor:

, (3, 2)

wobei a 0 so groß ist, daß in der Nähe von O die Parabel $x = \frac{a}{2} y^2$ innerhalb von C liegt.

Wir betrachten den Bereich G, in den der innere Teil der erwähnten Parabel übergeht, der im Kreis C enthalten ist. Dieser Bereich ist auf der einen Seite durch die y - Achse begrenzt. Die transformierte Funktion $u\ (x, y)$ verschwindet samt ihren 1. Ableitungen in O und ⟨ist⟩ dabei eher x^{2-} , da sie zweimal differenzierbar ist.

Angenommen, a_{11}, b_1 seien die Koeffizienten bei u_{xx} , u_x in der transformierten Gleichung (3, 1). Nach dem in [10] Bewiesenen (s. [10], § 2 , Theorem 1) ist es - damit u offensichtlich irgendwo innerhalb von G verschwindet - ausreichend, daß mindestens bei kleinen x

. ⟨c⟩

Wenn wir zur Vereinfachung $= \frac{1}{2}$ wählen und aus (3, 2) feststellen, daß x x, finden wir, daß

(3, 3)

ausreicht.

Wenn wir die Transformation (3, 2) auf die Gleichung (3, 1) anwenden, gewinnen wir

. ⟨d⟩

Da c b^2 , gilt

. ⟨e⟩

Innerhalb des Bereichs G ist $x \quad \frac{a}{2} y^2$. Außerdem gilt nach Voraussetzung des Lemmas $cx \quad 0$ bei $x \quad 0$. Daher ist - zumindest bei genügend kleinen x -

. ⟨f⟩

Und da $c = - b_1$, so ergibt dies auch die Ungleichung (3, 3), womit unser Lemma bewiesen ist.

2. Jetzt gehen wir unmittelbar an den Beweis des Theorems 3 heran. Dabei machen wir uns die Behauptungen 1 - 6, 8, 9 des § 2 zunutze, da sie auch unter den Voraussetzungen des Theorems 3 gelten. Unter $H(x, y, z)$ wird eine Funktion verstanden, die die Bedingungen dieses Theorems erfüllt.

B e h a u p t u n g 1. Die Funktion $u(x, y) = H(x, y, 1)$ erfüllt die Gleichung (3, 1) mit den gleichen Voraussetzungen für den Koeffizienten c, als ob in der x, y - Ebene die Achsen gewählt seien.

B e w e i s. Nach der Beahuptung 2 des § 2 erfüllt die Funktion $u(x, y)$ eine Gleichung, die in jedem Punkt auf die Form $a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} = 0$ gebracht werden kann, wobei $a_{11}, a_{22} \quad 0$ sind. Daher erfüllt sie in den fixierten Achsen eine Gleichung, die nach Division mit dem Koeffizienten bei u_{xx} auf die Form (3, 1) gebracht wird, wobei $c \quad b^2$ ist.

Nach der gleichen Behauptung 2 des § 2 gilt, unter den Voraussetzungen des Theorems 3, egal wie auch immer der feste Punkt X_0 beschaffen ist,

. ⟨g⟩

Von daher ist offensichtlich, daß in der Gleichung (3, 1) der Koeffizient c so beschaffen ist, daß $cx \quad 0$ bei $x \quad 0$.

3. Unter Berücksichtigung der Behauptung 5 des § 2 kann man annehmen, daß für die Fläche $F : u = u(x, y) = H(x, y, 1)$ die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind: 1) überall ist $u_x \quad 0$; 2) F berührt die Ebene $u = 0$ auf einer zusammenhängenden Menge M, die ins Unendliche reicht.

B e h a u p t u n g 2. Die Menge M erstreckt sich über die gesamte Ebene.

B e w e i s. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann folgt aus den Behauptungen 6, 8 des § 2, daß ein Kreis C gefunden wird, der M berührt und so beschaffen ist, daß es innerhalb von C keine Punkte aus M gibt und $u (x, y)$ in C nicht das Vorzeichen ändert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß in C $u (x, y) \quad 0$ ist.

Man kann leicht sehen, daß dann ein solcher Kreis $C' \quad C$ gefunden wird, daß überall in C' und auf seiner Grenze $u \quad 0$ ist, abgesehen von einem Punkt A auf der Kreislinie, wo $u (x, y)$ samt ihren 1. Ableitungen verschwindet. Tatsächlich kann man, wenn $u \quad 0$ überall innerhalb von C ist, da der Kreis C M berührt in iregend einem Punkt, als C' einen Kreis annehmen, der in C enthalten ist und dessen Kreislinie in diesem Punkt berührt. Wenn jedoch irgendwo innerhalb C $u = 0$ ist, so verschwindet dort $u (x, y)$ samt ihren 1. Ableitungen, da sie in C nicht das Vorzeichen ändert. Gleichzeitig aber kann nicht überall in C $u = 0$ sein, da dann $C \quad M$ wäre. Daher wird wieder ein Kreis C' mit den geforderten Eigenschaften gefunden.

Wir wählen den Ursprung im Punkt A und richten die x-Achse aus A durch den Mittelpunkt des Kreises C'. Dann stellen wir - bei Berücksichtigung der Behauptung 1 - fest, daß im Kreis C' die Funktion $u (x, y)$ alle Voraussetzungen des oben bewiesenen Lemmas erfüllt. Daher müssen in C' Punkte sein, in denen $u = 0$ ist. Dies widerspricht der Wahl des Kreises C'.

Der gewonnene Widerspruch beweist unsere Behauptung 2.

4. Somit erstreckt sich die Menge M über die ganze Ebene. Eine einfache Verweisung auf die Behauptung 9 des § 2 führt uns daher zum Beweis des Theorems 3. -

---

Anmerkung des Übersetzers:
Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um eine Übersetzungsvariante bzw. die wörtliche Übersetzung.

Literatur

1. Aleksandrov, A.D. — Teoremy edinstvennosti dlja poverchnostej v celom ⟨Eindeutigkeitssätze für Flächen im Großen⟩ II. Vestnik LGU (Leningradskogo Gosudarstvennogo Universiteta), No 7, 1957.

2. Aleksandrov, A.D. — O teoremach edinstvennosti dlja zamknutych poverchnostej ⟨Über Eindeutigkeitstheoreme für geschlossene Flächen⟩. DAN SSSR (Doklady Akademii Nauk SSSR), 22, 3, 1939.

3. Aleksandrov, A.D. — Odna obščaja teorema edinstvennosti dlja zamknutych poverchnostej ⟨Ein allgemeiner Eindeutigkeitssatz für geschlossene Flächen⟩. DAN SSSR, 19, 1938.

4. Aleksandrov, A.D. — O rabotach Kan-Fossena ⟨Über (die) Arbeiten von Kohn-Vossen⟩. Uspechi matematičeskich nauk, II, X (19), 1947.

5. Wintner, A., Hartman, P. — On the third fundamental form of a surface (Appendix), Am. J. Math., 75, 1953.

6. Pogorelov, A.V. — Rasprostranenie obščej teoremy edinstvennosti A.D. Aleksandrova ⟨Die Ausdehnung des allgemeinen Eindeutigkeitssatzes von A.D. Aleksandrov⟩. DAN SSSR, 62, 3, 1948.

7. Bakel'man, I.Ja. Verner, A.L. (Werner) — Obobščennye proizvodnye nepreryvnych funkcij ⟨Verallgemeinerte Ableitungen stetiger Funktionen⟩. Uspechi matematičeskich nauk, 9, 1 .

8. Bakel'man, I.Ja. — Differencial'naja geometrija gladkich nereguljarnych poverchnostej ⟨Differentialgeometrie glatter unregelmäßiger Flächen⟩. Uspechi matematičeskich nauk, 9, 2, 1956.

9. Aleksandrov, A.D. — Issledovanija o principe maksimuma. V. ⟨Untersuchungen über das Maximumprinzip⟩. Izvestija vuzov, Matematika, No 4, 1960 .

10. Aleksandrov, A.D. — Issledovanija o principe maksimuma. III. ⟨Untersuchungen über das Maximumprinzip⟩. Izvestija vuzov, Matematika, No 5, 1959 .

Stuttgart, 6.7.1970

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

МАТЕМАТИКА

А. Д. Александров

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЦЕЛОМ. VII

§ 1. Формулировки результатов

1. Всюду дальше $H(x, y, z)$ есть функция, определенная во всем пространстве за исключением начала и положительно однородная первой степени. Вследствие однородности одно из собственных значений ее второго дифференциала всегда равно нулю.

Теорема 1. *Пусть H дважды дифференцируема и для ее второго дифференциала в каждой точке, за исключением, может быть, некоторого множества меры нуль, имеет место одно из двух: либо $d^2H \equiv 0$, либо d^2H есть знакопеременная форма, причем отношение ее собственных значений R_1, R_2 (не считая тривиально равного нулю) ограничено, т. е. существует такая постоянная A, что $A > \left|\frac{R_1}{R_2}\right| > \frac{1}{A}$. Тогда функция H — линейная.*

Теорема 1а. *В теореме 1 требование двукратной дифференцируемости H можно заменить условием, что H непрерывно дифференцируема и имеет обобщенные вторые производные, интегрируемые с квадратом.* При этом второй дифференциал d^2H можно понимать как форму, коэффициенты которой суть эти обобщенные производные.

Теорема 1а не покрывает теоремы 1, потому что вторые производные не обязаны быть интегрируемы с квадратом. Можно, однако, формулировать более общие условия, при которых получается теорема, охватывающая обе теоремы. Но так как такая формулировка требует введения других понятий, то мы ее не будем приводить.

2. Рассмотрим поверхности S', S'', являющиеся огибающими семейств плоскостей, определяемых почти везде дважды дифференцируемыми опорными функциями H', H''. Соответствие точек поверхностей устанавливается по параллельности нормалей, иначе говоря, речь идет о соответствии плоскостей указанных семейств. Главный случай тот, когда эти поверхности выпуклые; в этом случае, как известно, существование почти везде вторых дифференциалов d^2H', d^2H'' обеспечено само собою. Когда говорится, что нечто имеет место почти везде, подразумевается, что это имеет место для почти всех нормалей.

Пусть $R_1' \geqslant R_2'$, $R_1'' \geqslant R_2''$ — главные радиусы кривизны поверхностей S', S'', которые можно понимать также в смысле относительной дифференциальной геометрии (ср. [1]). При обычном понимании они суть собственные значения вторых дифференциалов d^2H', d^2H''.

Теорема 2. *Пусть разность $H' - H''$ дважды дифференцируема и для почти каждой пары соответственных точек имеет место одно из двух: либо обе разности* $\Delta R_1 = R_1' - R_1''$, $\Delta R_2 = R_2' - R_2''$ *равны* *нулю, либо они разных знаков и отношение их ограничено, т. е. существует такая постоянная A, что во всех таких точках $A > \left|\frac{\Delta R_1}{\Delta R_2}\right| > \frac{1}{A}$. При этих условиях поверхности S', S'' равны и параллельно расположены.*

Теорема 2а. *Тот же результат имеет место при тех же условиях для ΔR_1, ΔR_2, если $H = H' - H''$ удовлетворяет условиям теоремы 1а.*

Степень регулярности самих поверхностей S', S'' не играет роли. Поэтому теоремы 2, 2а включают следующий результат.

Если общая замкнутая выпуклая поверхность деформируется в результате изменения ее опорной функции так, что выполнены условия теоремы 2 или 2а, то деформация сводится к параллельному переносу.

Из условий теоремы 2 или 2а легко заключить, что $H = H' - H''$ удовлетворяет условиям теоремы 1 или 1а и, следовательно, должна быть линейной. А это и значит, что поверхности S', S'' равны и параллельно расположены. Таким образом, теоремы 2, 2а вытекают, соответственно, из теорем 1, 1а. (Верно также обратное. Пусть H — функция с условиями теоремы 1 или 1а, S'' — сфера, H'' — ее опорная функция, а S' — поверхность с опорной функцией $H' = H'' + H$. Тогда для поверхностей S', S'' выполнены условия теоремы 2 или 2а, и в силу этих теорем H оказывается линейной.)

3. Согласно простому замечанию, сделанному в [2], условие, налагаемое на ΔR_1, ΔR_2 в теоремах 2, 2а, равносильно следующему: существует такая функция $f(R_1, R_2; n)$, непрерывно дифференцируемая по R_1, R_2, с условием $\frac{\partial f}{\partial R_1}\frac{\partial f}{\partial R_2} > \text{const} > 0$, что почти во всех соответственных точках поверхностей S', S''

$$f(R_1', R_2'; n) = f(R_1'', R_2''; n), \tag{1,1}$$

где n — нормаль.

В такой форме теорема 2 доказывалась в [2–6] при существенно более жестких условиях относительно поверхностей и функции f и при условии, что равенство (1,1) выполняется всюду.

4. Теорема, подобная теореме 1, была впервые доказана в [2] с той разницей, что функция H предполагалась аналитической, но зато требование ограниченности отношения собственных значений ее второго дифференциала отсутствовало.

Мы докажем здесь следующую теорему.

Теорема 3. *Условия теоремы 1 можно заменить следующими: 1) в каждой точке либо $R_1 = R_2 = 0$ либо $R_1 R_2 < 0$; 2) какова бы ни была точка X_0, как только точка X, где R_1 и R_2 отличны от нуля, приближается к X_0, так*

$$\left(\left|\frac{R_1}{R_2}\right| + \left|\frac{R_2}{R_1}\right|\right) r(XX_0) \to 0, \tag{1,2}$$

где $r(XX_0)$ — расстояние от X до X_0.

Подобно тому как из теоремы 1 следует теорема 2, так из теоремы 3 вытекает теорема, в которой требование ограниченности отношения $\Delta R_1 : \Delta R_2$ заменяется условием, аналогичным (1,2).

§ 2. Доказательство теорем 1, 1а

1. Мы будем доказывать теоремы 1, 1а одновременно, доказывая последовательно ряд утверждений, большая часть из которых верна

также в условиях теоремы 3. Соответственно этому, *пока не будет явно оговорено противное, под $H(x, y, z)$ будет подразумеваться функция, удовлетворяющая условиям любой из теорем 1, 1а, 3.*

Заметим, что не меняя условий этих теорем к H можно прибавлять любую однородную линейную функцию.

2. Утверждение 1. Если почти везде в какой-либо области G $d^2H = 0$, то H линейна в G.

Доказательство. На почти всех лежащих в G отрезках параллельных прямых любого направления $H_{ss} = 0$. Поэтому, если H дважды дифференцируема, то на таких отрезках она линейна, а стало быть, линейна в G.

Если же H имеет обобщенные вторые производные, то на почти всех прямых данного направления ее производная H_s вдоль таких прямых абсолютно непрерывна (см., например, [7]). Поэтому в этом случае H также линейна в G.

Ввиду доказанного *мы будем предполагать дальше, что $d^2H \neq 0$ на множестве положительной меры*, так как иначе H была бы линейной и мы уже имели бы желаемый результат.

3. Утверждение 2. Функция $u(x, y) = H(x, y, 1)$ удовлетворяет почти везде эллиптическому уравнению второго порядка, которое в каждой точке, где оно выполнено, можно путем вращения осей x, y привести к виду: $a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} = 0$. При этом во всякой конечной области плоскости x, y отношение $a_{11} : a_{22}$ подчиняется тем же ограничениям, что отношение $|R_1| : |R_2|$, где, согласно § 1, R_1, R_2 — собственные значения d^2H.

Доказательство. Легко убедиться, что собственные значения k_1, k_2 второго дифференциала функции $u(x, y)$ получаются из R_1, R_2 умножением на множители, ограниченные снизу и сверху положительными постоянными во всякой ограниченной области плоскости x, y.

Если в данной точке $d^2u = 0$, то $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Если в данной точке d^2u существует, но не исчезает тождественно, то k_1, k_2 разных знаков. Вращением осей приводим d^2u к каноническому виду, так что $k_1 = u_{xx}$, $k_2 = u_{yy}$. Тогда так как k_1, k_2 разных знаков, то $|k_2| u_{xx} + |k_1| u_{yy} = 0$.

Этим наше утверждение доказано.

4. Рассмотрим поверхность F, определяемую в прямоугольных координатах x, y, u уравнением

$$u = u(x, y) = H(x, y, 1).$$

Утверждение 3. Никакая плоскость не отсекает от поверхности F „шапки“ т. е. конечного куска.

Доказательство. Допустим противное. Пусть G — шапка, отрезанная от F. Натягивая на G выпуклую оболочку, убеждаемся, что G должен содержать множество точек с положительной площадью сферического изображения.

Однако из сказанного в доказательстве утверждения 2 следует, что кривизна поверхности F почти везде неположительна. Поэтому если $u(x, y)$ всюду дважды дифференцируема, то от G нельзя отрезать шапки.

Если же $u(x, y)$ имеет обобщенные вторые производные, интегрируемые с квадратом, то интегральная кривизна любого множества на ней равна интегралу от произведения главных кривизн (см., например, [8]). Поэтому она неположительна и, следовательно, от F нельзя отрезать шапки. (Тот же результат можно получить, ссылаясь на принцип максимума (см. [9]) для уравнения, которому, согласно утверждению 2, удовлетворяет $u(x, y)$.)

5. Утверждение 4. Путем поворота осей x, y, z и прибавления к H однородной линейной функции можно добиться того, чтобы для поверхности $F: u = u(x, y) = H(x, y, 1)$ выполнялось два условия: 1) всюду $u_x \geqslant 0$, 2) хотя бы в одной точке поверхность F касается плоскости $u = 0$.

Доказательство. Рассмотрим поверхность S, являющуюся огибающей семейства плоскостей Q с опорной функцией H. Координаты точек этой поверхности суть $X = H_x$, $Y = H_y$, $Z = H_z$. Поверхность эта ограничена и потому имеет опорные плоскости любого направления.

Вместе с тем, всюду, где d^2H существует и не обращается тождественно в нуль, эта поверхность имеет отрицательную кривизну (ее главные радиусы кривизны суть собственные значения d^2H). По предложению, сделанному в п. 2, это имеет место для множества плоскостей Q положительной меры.

Пусть Q_1 — одна из таких плоскостей. Пусть P — опорная плоскость к S, внутренняя нормаль к которой параллельна нормали к Q_1. Тогда точка A, где P упирается в S, отвечает хотя бы одной плоскости Q_0, отличной от P.

Перенесем начало в точку A. Это равносильно прибавлению к H, соответствующей линейной функции. Повернем оси так, чтобы ось x совпала с внутренней нормалью к плоскости P. Тогда всюду будет $X \geqslant 0$, т. е. $H_x \geqslant 0$. А в самой точке A $X = Y = 0$ и, стало быть, $H_x = H_y = 0$.

Пусть нормаль к плоскости Q_0 определяется координатами x_0: y_0: z_0. Так как Q_0 не совпадает с P, то она не перпендикулярна оси x и, стало быть, можно повернуть оси y, z так, чтобы было $z_0 > 0$, а тогда можно взять $z_0 = 1$. Таким образом, в „пространстве нормалей" x, y, z, на плоскости $z = 1$ имеется точка $(x_0, y_0, 1)$, отвечающая плоскости Q_0.

Рассматривая теперь поверхность $F: u = H(x, y, 1)$ убеждаемся, что, во-первых, всюду $u_x \geqslant 0$, так как $H_x \geqslant 0$, а, во-вторых, в точке (x_0, y_0) $H_x = H_y = 0$, т. е. $u_x = u_y = 0$. Кроме того, плоскость Q_0 проходит через начало, так что $H(x_0, y_0, 1) = 0$. Следовательно, в точке (x_0, y_0) поверхность F касается плоскости $u = 0$.

6. Утверждение 5. Если всюду $u_x \geqslant 0$ и хотя бы в одной точке поверхность F касается плоскости $u = 0$, то она касается ее по связному множеству, уходящему в бесконечность.

Доказательство. Пусть M — множество, по которому F касается плоскости $u = 0$. Если M не простирается на всю плоскость, то существует точка $A \in M$, лежащая на границе M. В окрестности этой точки не может быть почти везде $d^2H = 0$, так как иначе по утверждению 1 вся эта окрестность включалась в M. Поэтому существуют точки $A_i \to A$, в которых d^2H есть знакопеременная форма.

Проведем в соответствующих точках $\overline{A}_i$ поверхности F касательные плоскости P_i. Плоскость P_i пересекает F так, что на F вблизи точки $\overline{A}_i$ имеются четыре области G_i, лежащие попарно над и под плоскостью P_i. Так как от F нельзя отрезать шапки, то эти области простираются в бесконечность.

Но так как всюду $u_x \geqslant 0$, то поверхность F разбивается плоскостью $u = 0$ не более чем на две области. Поэтому, когда точки A_i сходятся к A, то по крайней мере одна из областей G_i в пределе вырождается:

ее предел целиком лежит в плоскости $u=0$. Это и дает простирающееся в бесконечность связное множество, по которому F касается плоскости $u=0$.

7. Пусть M — связное множество, по которому, согласно доказанному, поверхность F касается плоскости $u=0$. В отношении M различаем три возможности:

1) Существует, не содержащаяся в M, прямая l, параллельная оси x и пересекающая M так, что по обе стороны от нее есть точки множества M.

2) Такой прямой не существует, но M не простирается на всю плоскость. Тогда M есть либо полупрямая или прямая, параллельная оси x, либо полоса между парой таких прямых или полуплоскость, ограниченная такой прямой. Для дальнейшего достаточно иметь в виду, что тут всегда имеется параллельная оси x полупрямая, принадлежащая границе множества M, так что по одну сторону от нее нет точек этого множества.

3) M есть вся плоскость.

Дальнейшее сводится к доказательству того, что первые две возможности исключаются.

8. Утверждение 6. В первом случае на плоскости x, y существует такой круг C, касающийся множества M, но не содержащий его точек внутри, что в C функция $u(x, y)$ не меняет знака.

Доказательство. По свойству прямой l и связности множества M существует содержащая l полоса из параллельных прямых, обладающих тем же свойством. Множество M разбивает эту полосу. Из того, что $u_x \geqslant 0$, очевидно, что в части этой полосы, лежащей по одну сторону от M, $u(x, y)$ не меняет знака.

Взяв в этой части полосы круг и придвинув его к M, получим круг C с требуемым свойством.

9. Утверждение 7. В условиях теоремы 1 или 1а первый из указанных для множества M случаев невозможен.

Доказательство. По утверждению 2 $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению, которое в каждой точке, где оно определено, поворотом осей приводится к виду $a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} = 0$.

В условиях теорем 1, 1а отношение коэффициентов ограничено во всякой конечной области. Следовательно, деля, например, на $a_{11} + a_{22}$, получим, что это уравнение имеет коэффициенты, ограниченные (в конечной области) снизу и сверху положительными постоянными, т. е. оно строго эллитично.

Но в круге C, существование которого установлено выше, $u(x, y)$ не меняет знака и касается нуля хоть где-нибудь на его границе. Поэтому, согласно доказанному в [9], $u \equiv 0$ в C (см. [9], теорема 4). Но в таком случае C содержится в связном множестве M, по которому поверхность $F: u = u(x, y)$ касается плоскости $u=0$. Это противоречит выбору круга C и тем самым невозможность первого случая для множества M доказана.

10. Во втором случае, указанном в п. 7 для множества M, на его границе имеется параллельная оси x полупрямая l, по одну сторону от которой нет точек множества M.

Утверждение 8. С указанной стороны к полупрямой l прилегает полоса, в которой $u(x, y)$ не меняет знака.

Доказательство. Возьмем указанного вида параллельную полосу L. Если точка $X(x, y)$ движется по ней в бесконечность, то y остается ограниченным, а x стремится к $+\infty$ или $-\infty$.

В пространстве x, y, z, где задана функция $H(x, y, z)$, точке X отвечает идущий из начала луч с направлением $x:y:1$. При указанном движении точки $X(x, y)$ эти направления сходятся или к $1:0:0$, или к $-1:0:0$. Вследствие же однородности функции H ее первые производные зависят только от отношения $x:y:z$. Кроме того, по условию эти производные непрерывны.

Отсюда следует, что как бы точка X не двигалась в бесконечность по полосе L, $u_y(x, y)$ стремится равномерно к некоторому пределу. А так как на полупрямой l $u_y=0$, то указанный предел равен нулю.

Следовательно, в достаточно далекой части полосы L $|u_y(x, y)|$ оказывается сколь угодно малым. А так как на l $u=0$, то в такой далекой части полосы L также $|u(x, y)|$ оказывается сколь угодно малым и при удалении в бесконечность $|u| \to 0$.

Но всюду $u_x \geqslant 0$. Поэтому из сказанного следует, что в полосе L $u(x, y)$ не меняет знака.

11. Утверждение 9. В условиях теоремы 1 или 1а вторая возможность, указанная для множества M в п. 7, исключается.

Доказательство. Построим круг C, лежащий в полосе L и касающийся полупрямой l. По доказанному, $u(x, y)$ не меняет в L знака. Вместе с тем, она касается нуля в точке, где C касается полупрямой l. Поэтому совершенно аналогично доказательству утверждения 7 получим доказательство высказанного утверждения 9.

12. Утверждение 10. При третьей возможности, указанной для множества M в п. 7, когда M простирается на всю плоскость, не только $u(x, y)=H(x, y, 1)\equiv 0$, но вообще $H(x, y, z)\equiv 0$.

Доказательство. В указанном случае $H(x, y, 1)\equiv 0$, т. е. $H(x, y, z)\equiv 0$ в полупространстве $z>0$, а по непрерывности также при $z=0$. Поэтому достаточно доказать, что $H\equiv 0$ при $z<0$, т. е. что $H(x, y, -1)\equiv 0$.

Положим

$$h(x, y)=\max_{-1<z<0} H_z(x, y, z). \tag{2,1}$$

Тогда так как на плоскости $z=0$ $H\equiv 0$, то

$$|H(x, y, -1)| \leqslant h(x, y). \tag{2,2}$$

По однородности H

$$H_z(x, y, z)=H_z\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Поэтому в силу того, что H непрерывно дифференцируема и $H_z(x, y, 0)\equiv 0$, $H_z(x, y, z)\to 0$ равномерно при $|z|\leqslant 1$ и $r\to\infty$. Отсюда вследствие (2,1) и (2,2) заключаем, что при $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ $H(x, y, -1)|\to 0$. Это означает, что поверхность F' с уравнением $u=H(x, y, -1)$ касается в бесконечности плоскости $u=0$. Но, согласно утверждению 2, от поверхности F' нельзя отрезать шапки. Поэтому $H(x, y, -1)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

13. Сопоставляя утверждения 5—7, убеждаемся, что в условиях теоремы 1 или 1а $H\equiv 0$. А так как рассматриваемая функция отличается от исходной только линейным слагаемым, то исходная функция H линейна, и теоремы 1, 1а доказаны. Как следует из сказанного в § 1, вместе с ними доказаны также теоремы 2, 2а.

§ 3. Доказательство теоремы 3

1. Лемма. *Пусть C есть замкнутый круг на плоскости x, y, касающийся оси y в начале координат O со стороны $x>0$. Пусть в C задана дважды дифференцируемая функция $u(x, y)$ с условиями:*

1) *всюду в* C $u(x, y) \geqslant 0$; 2) $u(x, y)$ *касается в* O *нуля, т. е. в* O $u = u_x = u_y = 0$; 3) *всюду в* C $u(x, y)$ *удовлетворяет уравнению*

$$u_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0, \tag{3,1}$$

где $c \geqslant b^2$ *и* $cx \to 0$ *при* $x \to 0$.

Тогда внутри C *есть точки, где* $u = 0$.

Доказательство. Произведем преобразование

$$\bar{x} = x - \frac{a}{2} y^2, \ \bar{y} = y, \tag{3,2}$$

где $a > 0$ столь велико, что вблизи O парабола $x = \frac{a}{2} y^2$ лежит внутри C.

Рассмотрим область G, в которую переходит внутренняя часть указанной параболы, содержащаяся в круге C. Эта область ограничена с одной стороны осью $\bar{y}$. Преобразованная функция $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$ касается в O нуля и при том быстрее $\bar{x}^{2-\varepsilon}$, поскольку она дважды дифференцируема.

Пусть $\bar{a}_{11}$, $\bar{b}_1$ — коэффициенты при $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$, $\bar{u}_{\bar{x}}$ в преобразованном уравнении (3,1). Согласно доказанному в [10] (см. [10], § 2, теорема 1), для того чтобы $\bar{u}$ заведомо обращалась в нуль, хоть где-нибудь внутри G, достаточно, чтобы по крайней мере при малых $\bar{x}$ было

$$\frac{1-\varepsilon}{\bar{x}} \bar{a}_{11} + \bar{b}_1 > 0.$$

Беря для простоты $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и замечая из (3,2), что $\bar{x} < x$, получим, что достаточно

$$\bar{a}_{11} + 2x\bar{b}_1 > 0. \tag{3,3}$$

Применяя преобразование (3,2) к уравнению (3,1), получаем, что

$$\bar{a}_{11} = 1 - 2bay + ca^2y^2, \quad \bar{b}_1 = -ca.$$

Так как $c \geqslant b^2$, то

$$\bar{a}_{11} \geqslant (1 - \sqrt{ca}\,|y|)^2.$$

Внутри области G $x > \frac{a}{2} y^2$. Кроме того, по условию леммы $cx \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому, по крайней мере при достаточно малых x,

$$\bar{a}_{11} \geqslant \left(1 - \sqrt{\frac{2acx}{a}}\right)^2 > 2cax.$$

А так как $c = -\bar{b}_1$, то это и дает неравенство (3,3), чем наша лемма доказана.

2. Теперь обратимся непосредственно к доказательству теоремы 3. При этом мы воспользуемся утверждениями 1—6, 8, 9, § 2, поскольку они верны также в условиях теоремы 3. Под $H(x, y, z)$ будет подразумеваться функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы.

Утверждение 1. Функция $u(x, y) = H(x, y, 1)$ удовлетворяет уравнению (3,1) с теми же условиями на коэффициент c, как бы в плоскости x, y не выбирались оси.

Доказательство. По утверждению 2 § 2 функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению, приводимому в каждой точке к виду $a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} = 0$, где a_{11}, $a_{22} \geqslant 0$. Поэтому в фиксированных осях она удовлетворяет уравнению, которое после деления на коэффициент при u_{xx} приводится к виду (3,1), причем $c > b^2$.

По тому же утверждению 2 § 2, при условиях теоремы 3, какова бы ни была зафиксированная точка X_0,

$$\frac{a_{22}(X)}{a_{11}(X)} r(XX_0) \to 0, \quad \text{при} \quad X \to X_0.$$

Отсюда очевидно, что в уравнении (3,1) коэффициент c таков, что $cx \to 0$ при $x \to 0$.

3. Ссылаясь на утверждение 5 § 2, можно считать, что для поверхности $F: u = u(x, y) = H(x, y, 1)$ выполнены условия: 1) всюду $u_x \geqslant 0$; 2) F касается плоскости $u = 0$ по связному множеству M, уходящему в бесконечность.

Утверждение 2. Множество M простирается на всю плоскость.

Доказательство. Допустим противное. Тогда из утверждений 6, 8 § 2 следует, что найдется такой круг C, соприкасающийся с M, что внутри C нет точек из M, и $u(x, y)$ не меняет в C знака. Не ограничивая общности, можно считать, что в C $u(x, y) \geqslant 0$.

Легко видеть, что тогда найдется такой круг $C' \subset C$, что всюду в C' и на его границе $u > 0$, кроме одной точки A на окружности, где $u(x, y)$ касается нуля.

Действительно, если $u > 0$ всюду внутри C, то, поскольку круг C соприкасается с M в какой-то точке, можно принять за C' круг, содержащийся в C и касающийся его окружности в этой точке. Если же где-нибудь внутри C $u = 0$, то там $u(x, y)$ касается нуля, поскольку она не меняет в C знака. Но вместе с тем не может быть $u = 0$ всюду в C, так как тогда было бы $C \subset M$. Поэтому опять найдется круг C' с требуемыми свойствами.

Возьмем начало в точке A, направляя ось x из A через центр круга C'. Тогда, имея в виду утверждение 1, мы замечаем, что в круге C' функция $u(x, y)$ удовлетворяет всем условиям доказанной выше леммы. Поэтому в C' должны быть точки, где $u = 0$. Это противоречит выбору круга C'.

Полученное противоречие доказывает наше утверждение 2.

4. Таким образом, множество M простирается на всю плоскость. Поэтому простая ссылка на утверждение 9 § 2 приводит нас к доказательству теоремы 3.

Summary

Let $H(x, y, z)$ be a function defined in the whole space except the point (0, 0, 0) with the following properties: 1) For any $\lambda > 0$ $H(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda H(x, y, z)$, 2) H is of class C', 3) H is twice differentiable either everywhere or almost everywhere and, in this case, has generalized second derivatives summable with squares.

Theorem 1. Let at each point, with the exception of a set of measure zero, either $d^2H = 0$ or d^2H have the eigenvalues R_1, R_2 of opposite signs and their ratio is bounded, i. e. there exists such a constant A that at all such points $A > \left|\frac{R_1}{R_2}\right| > \frac{1}{A}$. Then $H = ax + by + cz$.

An immediate corollary of this theorem is the following:

Theorem 2. Let S be an arbitrary closed convex surface. Suppose S is deformed because of such a displacement of its supporting planes that (1, 1) the change H of its supporting function is subject to the above conditions; (1, 2) the changes ΔR_1, ΔR_2 of its principal radii of curvature are such that at each point where they exist either $\Delta R_1 = \Delta R_2 = 0$ or

$\Delta R_1 \Delta R_2 < 0$ and $A > \left|\frac{\Delta R_1}{\Delta R_2}\right| > \frac{1}{A}$, $A = \text{const}$. Then the deformation of S reduces to a parallel translation.

Theorem 3. Let a function H with the above properties be twice differentiable everywhere. Let at each point either $d^2H \equiv 0$ or $R_1 \cdot R_2 < 0$ and for any fixed point X_0 and a variable point X, where $R_1 R_2 < 0$, $\left(\left|\frac{R_1}{R_2}\right| + \left|\frac{R_2}{R_1}\right|\right) r(XX_0) \to 0$ provided the distance $r(XX_0) \to 0$. Then $H = ax + by + cz$. To this theorem there corresponds a uniqueness theorem for convex surfaces with twice differentiable supporting functions, as to theorem 1 there corresponds theorem 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей в целом. II. Вестник ЛГУ, № 7, 1957.
2. А. Д. Александров. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, **22**, 3, 1939.
3. А. Д. Александров Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, **19**, 1938.
4. А. Д. Александров. О работах Кан-Фоссена. Успехи матем. наук, **II**, X (19), 1947.
5. A. Wintner, P. Hartman. On the third fundamental form of a surface (Appendix), Am. j. math., **75**, 1953.
6. А. В. Погорелов. Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова. ДАН СССР, **62**, 3, 1948.
7. И. Я. Бакельман и А. Л. Вернер. Обобщенные производные непрерывных функций... Успехи матем. наук, **9**, 1.
8. И. Я. Бакельман. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей. Успехи матем. наук, **9**, 2, 1956.
9. А. Д. Александров. Исследования о принципе максимума. V. Известия вузов, Математика, № 4, 1960.
10. А. Д. Александров. Исследования о принципе максимума. III. Известия вузов, Математика, № 5, 1959.