Ü/68

Izvestija Akademii nauk SSSR
Serija matematičeskaja
13 (1949), S. 329/340

Rochlin, V.A.: ÜBER ENDOMORPHISMEN KOMPAKTER KOMMUTATIVER GRUPPEN

(Vorgelegt von Akademiemitglied A.N. Kolmogorov)

In der Arbeit werden metrische Eigenschaften von Endomorphismen kompakter kommutativer topologischer Gruppen untersucht. *

Die vorliegende Arbeit entstand aus den Versuchen des Autors, das bekannte Spektralproblem der Theorie dynamischer Systeme zu lösen: existieren metrisch unterschiedliche dynamische Systeme mit ein und demselben kontinuierlichen (insbesondere Lebesgueschen) Spektrum? Mit Hilfe von zu diesem Zweck eingeführten metrischen Invarianten (s. Pt. 3 § 1) versuchte der Autor, unter den ergodischen Automorphismen kompakter kommutativer Gruppen Automorphismen verschiedener metrischer Typen zu finden. Es zeigte sich jedoch, daß bei allen erwähnten Automorphismen die neuen Invarianten vollkommen identisch waren. Und das ist auch das wichtigste Resultat der vorliegenden Arbeit (§ 3).

Die Ergebnisse der §§ 2 und 4 sind nicht neu: schon im Februar 1941 hatte der Autor dem Lehrstuhl für Funktionalanalysis der Moskauer Universität darüber berichtet; sie wurden jedoch nicht veröffentlicht; die wesentlichsten Teile wurden 1943 von Halmos veröffentlicht [1].

Ein wesentliches Hilfsmittel für die Untersuchung ist in der Arbeit die Pontrjaginsche Theorie der Charaktere. Genau die gleiche Transformationsklasse - vom Standpunkt einer rein metrischen Theorie - könnte man mittels der Theorie unitärer Ringe bestimmen und untersuchen [2] . Dieser Weg ist vorzuziehen, wenn man den rein metrischen Aufbau der Theorie im Auge hat.

---

* Kompakt heißt in der Arbeit eine topologische Gruppe, bei der aus jeder Überdeckung durch offene Mengen eine endliche ⟨Überdeckung⟩ gewählt werden kann ("Bikompaktheit").

§ 1. Die wichtigsten metrischen Definitionen

1. R ä u m e m i t e i n e m M a ß u n d i h r e E n d o - m o r p h i s m e n . Wir werden unter M eine beliebige Menge verstehen, in der die Gesamtheit Ω_μ m e ß b a r e r Teilmengen ⟨Untermengen⟩ A definiert ist, die mit bestimmten M a ß e n μA versehen sind. Es wird angenommen, daß Ω_μ ein Borelscher Mengenkörper ist, daß μ eine nichtnegative vollständig additive Mengenfunktion $A \in \Omega_\mu$ ist und daß die Teilmengen der Mengen des Maßes Null immer meßbar sind (und folglich das Maß Null haben). Darüber hinaus nehmen wir an, daß $M \in \Omega_\mu$ und daß $\mu M = 1$. Unter diesen Voraussetzungen nennen wir M einen R a u m m i t e i n e m M a ß .

Eine eindeutige Abbildung eines Raumes mit einem Maß auf einen anderen bezeichnen wir als h o m o m o r p h , wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist und das Maß seines Bildes hat. Eine homomorphe Abbildung heißt i s o m o r p h , wenn sie eineindeutig ⟨umkehrbar eindeutig⟩ ist und die umgekehrte Abbildung ebenfalls homomorph ist. Wenn die beiden Räume kongruent sind, wird der Homomorphismus E n d o - m o r p h i s m u s genannt und der Isomorphismus - A u t o m o r - p h i s m u s . Zwei Endomorphismen - der Endomorphismus T des Raumes M und der Endomorphismus T' des Raumes M' - heißen i s o m o r p h z u e i n a n d e r , wenn ein solcher Isomorphismus S des Raumes M auf den Raum M' existiert, daß $T' = STS^{-1}$. Endlich gehören die Endomorphismen T und T' zu ein und demselben (metrischen) T y p , wenn sie nach Entfernung entsprechender Mengen des Maßes Null aus M und M' isomorph werden. Dabei hat man natürlich im Auge, daß das Entfernen der erwähnten Mengen des Maßes Null aus M und M' M und M' in neue Räume mit einem Maß verwandelt und T und T' - in die Endomorphismen dieser neuen Räume.

2. S p e k t r a l e i g e n s c h a f t e n . Angenommen, $L^2(M)$ sei ein unitärer Raum komplexer Funktionen mit dem integrierbaren Quadrat des Moduls nach M . Die Formeln

⟨a⟩

ordnen dem Endomorphismus T des Raumes M eine bestimmte Transformation U des Raumes $L^2(M)$ zu. Wenn T ein Automorphismus ist, dann ist U ein unitärer Operator*; im allgemeinen jedoch kann man lediglich behaupten, daß der Operator U halbunitär ist **.

Wir wollen sagen, daß zwei Endomorphismen - der Endomorphismus T des Raumes M und der Endomorphismus T' des Raumes M' - zu ein und demselben *Spektraltyp* gehören, wenn eine solche lineare isometrische Abbildung V des Raumes $L^2(M)$ auf den Raum $L^2(M')$ existiert, daß für die Operatoren U und U', die den Endomorphismen T und T' entsprechen, die Beziehung $U' = VUV^{-1}$ gilt. Es ist offensichtlich, daß Endomorphismen ein und desselben Typs zu ein und demselben Spektraltyp gehören.

Da die Konstanten immer invariante Funktionen sind ($Uf = f$), ist die Einheit ⟨ist Eins⟩ immer ein Eigenwert des Operators U. Die Vielfachheit des Eigenwerts ist die einfachste Spektralinvariante des Endomorphismus T. Wenn sie gleich der Einheit ⟨gleich Eins⟩ ist, d.h. jede invariante Funktion $f \in L^2(M)$ unterscheidet sich nur auf einer Menge des Maßes Null von der Konstanten, dann heißt der Endomorphismus T *ergodisch* (vgl. [3], §9).

3. Allgemeine Definition der Vermischung. Wir bezeichnen mit *Komplex des Ranges* r jedes geordnete System $\triangle^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ $r+1$ nichtnegativer ganzer Zahlen (unter denen auch gleiche sein können). Wir sagen, daß der Endomorphismus T eine *Vermischung in bezug auf die Folge der Komplexe*

(1)

ist, wenn für jedes $r+1$ der meßbaren Mengen $A_o, A_1, \ldots, A_r$ für $n \to \infty$

(2)

gilt.

---

* Vgl. [3], § 3 . ** Über die Theorie halbunitärer Operatoren s. [4] .

Wir nehmen für den Komplex $\Delta^r = (k^o, k^1, \ldots, k^r)$ an:

⟨b⟩

und wollen sagen, daß (1) eine *Folge des Ranges* r ist, wenn $I(\Delta_n^r) \to \infty$ für $n \to \infty$. Wir sagen, daß T eine *Vermischung des Grades* r ist, wenn T eine Vermischung in bezug auf jede Folge des Ranges r ist. Es ist offensichtlich, daß wenn T eine Vermischung des Grades r ist, daß T dann eine Vermischung jeden Grades $r' < r$ ist. Insbesondere bei $r = 1$ gewinnt man die übliche Definition der Vermischung (vgl. [3], § 11).

Die Beziehung (2) kann man in folgender Form darstellen:

; (3)

dabei ist f_i - die charakteristische Funktion der Menge A_i, U - ein Operator, der in dem vorhergehenden Punkt bestimmt ist, e - eine Funktion, die identisch gleich Eins ⟨der Einheit⟩ ist, $\prod$ - das Zeichen der gewöhnlichen Multiplikation und die Klammern - das Zeichen der skalaren Multiplikation in $L^2(M)$. Wenn aber (3) (für eine gegebene Folge (1) für $n \to \infty$) für jedes beliebige System charakteristischer Funktionen $f_o, f_1, \ldots, f_r$ gilt, dann gilt (3) auch für jedes beliebige System jeder *beliebiger beschränkter meßbarer Funktionen* $f_o, f_1, \ldots, f_r$, wovon man sich unschwer überzeugen kann, wenn man von den charakteristischen Funktionen zu ihren Linearkombinationen übergeht und die vorgegebenen beschränkten meßbaren Funktionen durch diese Linearkombinationen gleichmäßig annähert. Somit ist die Beziehung (2), wobei $A_o, A_1, \ldots, A_r$ beliebige meßbare Mengen sind, äquivalent der Beziehung (3), wobei $f_o, f_1, \ldots, f_r$ beliebige meßbare Funktionen sind.

Wir bemerken hierzu, daß wenn T eine Vermischung des Grades r ist, dann bei den vorgegebenen Funktionen $f_o, f_1, \ldots, f_r$ der Grenzübergang in der Formel (3) *gleichmäßig* ist in folgendem Sinn: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein N, sodaß für jeden beliebigen Komplex $\Delta^r = (k^o, k^1, \ldots, k^r)$ aus der Ungleichung $I(\Delta^r) > N$

die Ungleichung

⟨c⟩

folgt.

Gelegentlich ist es bequemer, nur solche Komplexe $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ zu betrachten, für die $k^0 < k^1 < \ldots < k^r$. Die aus solchen Komplexen gebildeten Folgen nennen wir s p e z i e l l e F o l g e n. Damit der Endomorphismus T eine Vermischung des Grades r ist, reicht es offensichtlich aus, daß er eine Vermischung in bezug auf jede spezielle Folge des Ranges r ist.

§ 2. Endomorphismen kompakter kommutativer Gruppen und ihre Spektraleigenschaften

1. T r a n s p o n i e r t e ⟨k o n j u g i e r t e⟩ E n d o m o r p h i s m e n. In der vorliegenden Arbeit spielt die Rolle des Raumes M eine kompakte topologische Gruppe G, die im übrigen völlig willkürlich sein kann, die Rolle des Maßes μ - das invariante Maß auf G und die Rolle von T - ein beliebiger Endomorphismus der topologischen Gruppe G auf die gesamte Gruppe G. Die Tatsache, daß ein solcher Endomorphismus auch im Sinne des § 1 ein Endomorphismus ist, folgt aus der Eindeutigkeit des invarianten Maßes.

Zur Untersuchung des Endomorphismus T benutzen wir die Pontrjaginsche Theorie der Charaktere*. Angenommen, G^* sei eine (diskrete) Gruppe der Charaktere der Gruppe ~~von~~ G. Ihre Mächtigkeit bezeichnen wir mit m. In G^* entspricht dem Endomorphismus T ein mit ihm konjugierter ⟨transponierter⟩ Endomorphismus T^*, der durch die Formeln

⟨d⟩

bestimmbar ist. Dabei ist die Gruppe der Charaktere der Gruppe G^* in dem bekannten Sinn wiederum G, und der mit T^* konjugierte ⟨transponierte⟩ Endomorphismus ist von neuem T.

---

* s. [5], und für den Fall von Gruppen ohne abzählbare topologische Basis - [6].

Somit werden - obwohl T^* ein rein algebraisches Objekt ist - durch seine Eigenschaften alle Eigenschaften des Endomorphismus T bestimmt. Wir bemerken hierzu, daß die Voraussetzung $TG = G$ äquivalent der Eineindeutigkeit von T^* ist und daß T dann und nur dann ein Automorphismus ist, wenn T^* ein Automorphismus ist.

2. Der Spektraltyp eines Endomorphismus. Wir betrachten jetzt die Charaktere als komplexe Funktionen auf G. Dann wird G^* ein vollständiges normiertes orthogonales System in $L^2(G)$ und der Operator U, der auf G^* untersucht wird, fällt mit T^* zusammen. Unter der Einwirkung des Endomorphismus T^* bewegt sich jedes Element $\chi \in G^*$ auf seiner Trajektorie und da G^* ein vollständiges normiertes orthogonales System in $L^2(G)$ ist, wird durch diese Bewegungen der Operator U völlig definiert. Offensichtlich kann man die Trajektorien in drei Klassen einteilen:

a) unendliche Trajektorien, die aus Elementen der Form $(T^*)^n \chi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ bestehen, die sich untereinander alle unterscheiden.

b) Halbendliche Trajektorien, die dann und nur dann existieren, wenn der Endomorphismus T^* nicht ein Automorphismus ist. Eine solche Trajektorie wird durch das Vorhandensein eines am weitesten links stehenden Elements charakterisiert, das das Bild keines anderen Elements der Gruppe G^* beim Endomorphismus T^* ist.

c) Endliche Trajektorien, die den periodischen Bewegungen entsprechen. Zu dieser Klasse gehört immer eine Trajektorie, die von der Einheit der Gruppe G^* durchlaufen wird. Wenn keine anderen endlichen Trajektorien existieren, heißt der Endomorphismus T^* aperiodisch.

Wie kompliziert auch immer der Endomorphismus T ist,

sein Spektraltyp hängt ausschließlich von den rein theoretischen Mengeneigenschaften des Endomorphismus T^* ab, d.h. von der Mächtigkeit m_0 der Menge unendlicher Trajektorien, von der Mächtigkeit m_1 der Menge halbendlicher Trajektorien, der Mächtigkeit der Menge von Trajektorien, die aus einem Element bestehen, der Mächtigkeit der Menge von Trajektorien, die aus zwei Elementen bestehen, usw.

Um sich von dem Gesagten zu überzeugen, reicht es aus festzustellen, daß der Einteilung des vollständigen normierten orthogonalen Systems G^* in Trajektorien die Zerlegung des Raumes $L^2(G)$ in eine orthogonale Summe in bezug auf U zyklischer Unterräume entspricht, die durch diese Trajektorien erzeugt sind, und daß die Struktur des Operators U in einem solchen Unterraum nur von dem Charakter der entsprechenden Trajektorie abhängt. Und zwar entspricht jeder unendlichen Trajektorie ein invarianter Unterraum, in dem U ein unitärer Operator mit einem einfachen Lebesgueschen Spektrum ist*; jeder halbendlichen Trajektorie entspricht ein invarianter Unterraum, in dem U ein elementarer halbunitärer Operator ist **; endlich entspricht jeder Trajektorie, die aus n Elementen besteht, ein n - dimensionaler invarianter Unterraum, in dem U ein unitärer Operator ist, der als seine Eigenwerte alle n-ten Wurzeln der Eins ⟨Einheit⟩ hat.

3. D e r E r g o d e n f a l l. Aus dem soeben Dargelegten folgt, daß jeder endlichen Trajektorie ihre invariante Funktion entspricht. Und da der Operator U auf den invarianten Unterräumen, die den unendlichen und halbendlichen Trajektorien entsprechen, ein rein kontinuierliches Spektrum hat, so

ist der Endomorphismus T dann und nur dann ergodisch, wenn der Endomorphismus T^* aperiodisch ist.

Jetzt nehmen wir an, daß T ein ergodischer Endomorphismus ist. Dann wird sein Spektraltyp vollständig durch die Zahlen m_o und m_1 bestimmt. Die Frage, welche Werte diese Zahlen annehmen können, ist eine rein algebraische. Wir beginnen mit folgendem Lemma:

Bei jedem aperiodischen Automorphismus zerfällt eine nichttriviale kommutative Gruppe in eine unendliche Zahl von Trajektorien.

B e w e i s . Angenommen, V sei ein aperiodischer Automorphismus der nichttrivialen kommutativen Gruppe X , die additiv geschrieben sei. Wir setzen voraus, daß die Anzahl der Trajektorien, in die X zerfällt,

---

* Ein solcher Operator kann dargestellt werden als Operator der Multiplikation mit einer unabhängigen Veränderlichen im Funktionenraum mit dem integrablen Quadrat des Moduls auf dem Einheitskreis, der mit dem gewöhnlichen Lebesgueschen Maß versehen ist.

** s. [4], S. 710

endlich ist.

Wir nehmen zuerst an, daß X eine endliche Zahl Erzeugender besitzt. Dann kann es in X keine von Null verschiedenen Elemente endlicher Ordnung geben: wenn $a \neq 0$, dann ist auch $na \neq 0$; $n = 1, 2, \ldots$. Offensichtlich muß eine unendliche Zahl von Gliedern der Folge $\{na\}$ auf ein und derselben Trajektorie liegen, die somit von Null verschiedene Elemente enthalten muß, die durch beliebig große natürliche Zahlen teilbar sind. Und da alle ihre Elemente die gleichen algebraischen Eigenschaften besitzen, so muß auch jedes von ihnen durch beliebig große natürliche Zahlen teilbar sein, was der Existenz eines endlichen Systems von Erzeugenden in X widerspricht.

Angenommen, X sei jetzt eine beliebige nichttriviale kommutative Gruppe. Wir zeigen (und damit wird das Lemma bewiesen sein), daß es in X eine nichttriviale Untergruppe mit einer endlichen Zahl von Erzeugenden gibt, die invariant in bezug auf V und V^{-1} ist. Wir wählen dazu in X irgendein Element $a \neq 0$ und nehmen an

. $\langle e \rangle$

Da unter den Gliedern der Folge $\{a_n\}$ sich solche befinden müssen, die auf ein und derselben Trajektorie liegen, müssen die Gleichungen in folgender Form gelten:

; (4)

aus (4) folgt, daß eine Untergruppe der Gruppe X, die von den Elementen $V^{p_1}a$, $V^{p_1+1}a$, $V^{p_1+2}a$, $\ldots$, $V^{p_q}a$ erzeugt wird, invariant in bezug auf V und V^{-1} ist.

Jetzt ist es nicht schwer, die Werte aufzuzeigen, die die Zahlen m_0 und m_1 annehmen können.

Für m_0 sind nur unendliche Werte und der Wert 0 möglich; für m_1 sind nur die Werte 0 und m möglich.

Um den ersten Teil dieses Theorems zu beweisen ist es ausreichend, das Lemma auf die Untergruppe jener Elemente der Gruppe G^* anzuwenden, die nicht auf den halbendlichen Trajektorien liegen (diese Untergruppe ist kongruent zu dem Schnitt aller Untergruppen $(T^*)^n G^*$; $n = 0, 1, \ldots$). Um den zweiten Teil zu beweisen reicht es aus festzustellen, daß m_1 die Mächtigkeit der Menge linker Enden ⟨?⟩ aller halbendlichen Trajektorien ist, und daß diese Menge mit der Ergänzung der Untergruppe $T^* G^*$ der Gruppe G^* in G^* kongruent ist und daher entweder leer ist oder die Mächtigkeit m hat.

Das Beispiel 2 des § 4 zeigt, daß das Zahlenpaar m_o, m_1 durch keinerlei andere Bedingungen verbunden ist.

§ 3. Theorem über die Vermischung

1. Reduktion auf das algebraische Lemma. In diesem Paragraphen beweisen wir, daß

> jeder ergodische Endomorphismus einer kompakten kommutativen topologischen Gruppe eine Vermischung aller Potenzen ist.

In Punkt 3 des § 1 sahen wir, daß die Gleichung (3) für beliebige beschränkte meßbare Funktionen gilt, wenn sie für die charakteristischen Funktionen gilt. Man kann sich unschwer auf gleiche Weise davon überzeugen, daß diese Gleichung für beliebige beschränkte meßbare Funktionen gelten muß, wenn sie für die Charaktere der Gruppe G gilt. Tatsächlich ist es so, daß wenn die Gleichung (3) für die Charaktere der Gruppe G gilt, sie auch für ihre Linearkombinationen gilt. Folglich gilt sie - wie das Lebesguesche Theorem über das Integrieren beschränkter Folgen zeigt - auch für alle Funktionen, die Grenzwerte fast überall konvergierender gleichmäßig beschränkter Folgen solcher Linearkombinationen sind, d.h. für alle beschränkten meßbaren Funktionen.

Somit ist es ausreichend, die Formel (3) für die Charaktere der Gruppe G zu beweisen. Wenn jedoch $f_o, f_1, \ldots, f_r$ Charaktere sind, können beide Seiten dieser Formel nur die Werte 0 und 1 annehmen, wobei die linke Seite nur dann gleich Eins ⟨Einheit⟩ ist, wenn

, ⟨f⟩

und die rechte - nur dann, wenn

. ⟨g⟩

Folglich bleibt uns, folgende rein algebraische Tatsache festzustellen:

> Es sei V ein eineindeutiger aperiodischer Endomorphismus der kommutativen Gruppe X, die wiederum additiv geschrieben sei. Wenn für gewisse Elemente $c_0, c_1, \ldots, c_r$ dieser Gruppe und eine bestimmte spezielle Folge (1) des Ranges r
>
> (5)
>
> gilt, dann gilt:
>
> . (6)

2. <u>Der Fall einer endlichen Anzahl von Erzeugenden</u>. Wir nehmen zuerst an, daß X eine Gruppe mit einer endlichen Anzahl von Erzeugenden ist. Dann kann sie keine Elemente endlicher Ordnung haben und läßt folglich ein endliches System der unabhängigen Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zu. In bezug auf dieses System wird jedes Element $x \in X$ eindeutig ⟨einzig⟩ in der Form

(7)

dargestellt, wobei $\xi_\alpha(x)$ ganze Zahlen sind, und der Endomorphismus V durch die ganzzahlige quadratische Matrix $\| v_{\alpha\beta} \| = \| \xi_\alpha(V a_\beta) \|$ dargestellt ist

. (8)

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ alles verschiedene charakteristische Zahlen der Matrix $\| v_{\alpha\beta} \|$ und $q_1 q_2, \ldots, q_l$ - ihre Vielfachheiten $\left(\sum_{\gamma=1}^{l} q_\gamma = m \right)$. Wir bezeichnen mit K ein Feld, das aus einem Feld rationaler Zahlen durch Adjunktion der Zahlen λ_1, λ_2, ..., λ_l gewonnen wird und mit L - den m-dimensionalen Vektorraum mit der Basis a_1, a_2, ..., a_m über dem Feld K. Die Elemente der Gruppe X kann man als ganzzahlige Vektoren des Raumes L betrachten; die anderen Vektoren dieses Raumes werden ebenfalls eindeutig ⟨einzig⟩ in der Form (7) dargestellt; für sie sind ξ_α jedoch schon beliebige Zahlen des Feldes K.

Die Formel (8) bestimmt in L eine lineare Transformation, die auf X mit V kongruent ist und die wir ebenfalls mit V bezeichnen. Es sei L_γ die Mannigfaltigkeit jener Vektoren $x \in L$, für die $(V - \lambda_\gamma E)^{q_\gamma} x = 0$ (E ist die identische Transformation des Raumes L). Die Mannigfaltigkeiten L_1, L_2, ..., L_l sind invariant in bezug auf V, ihre paarweisen Schnitte nulldimensional und ihre direkte Summe ist das gesamte L, sodaß jeder Vektor $x \in L$ eindeutig ⟨einzig⟩ in der folgenden Form dargestellt wird (s. [7], § 109):

. ⟨h⟩

Wir zeigen - und damit wird (6) bewiesen sein - , daß bei beliebigem $\gamma = 1, 2, \ldots, l$

(9)

gilt.

Zuerst betrachten wir den Wert γ, für den $|\lambda_\gamma| \neq 1$. Wir wählen in L_γ die Basis

, ⟨i⟩

wobei $\left(\sum_{\delta=1}^{s} t_\delta = q_\gamma\right)$; in bezug auf diese hat die Matrix der Transformation, die durch die Transformation V in L_γ induziert wird, das folgende Aussehen (s. [7], § 109):

. ⟨k⟩

Es sei

⟨l⟩

die Darstellung des Vektors $\chi \in L_\gamma$ in bezug auf diese Basis. Dann ist, wie man unschwer berechnen kann,

, ⟨m⟩

wobei $P^{(x)}_{\delta\varepsilon}$ - ein durch die Formel

⟨n⟩

bestimmtes Polynom ist, und aus (5) erhalten wir

. (10)

Da (1) eine spezielle Folge des Ranges r ist und $\lambda_\gamma \neq 0$ (der Endomorphismus V ist eineindeutig!) und $|\lambda_\gamma| \neq 1$, haben alle Glieder der Summe, die in (10) auf der linken Seite stehen, verschiedene Ordnungen für $n \to \infty$. In einem solchen Fall aber ist (10) lediglich unter der Voraussetzung möglich, daß alle Polynome $P^{(c_i^\gamma)}_{\delta\varepsilon}$, die einem gegebenen Wert γ entsprechen, identisch gleich Null sind, d.h. nur unter der Voraussetzung (9).

Es sei jetzt $|\lambda_\gamma| = 1$. Man kann unschwer sehen, daß dann eine algebraisch ~~mit~~ zu λ_γ konjugierte charakteristische Zahl $\lambda_{\gamma'}$ existiert, für die $|\lambda_{\gamma'}| \neq 1$. Tatsächlich wäre sonst λ_γ die Wurzel aus Eins ⟨der Einheit⟩ einer gewissen Potenz p (s. [8], S. 126), und Eins ⟨die Einheit⟩ wäre die charakteristische Zahl der Transformation V^p, infolge deren ein von Null verschiedenes Element $x \in X$ existieren würde, für das $V^p x = x$.

Es sei also $\lambda_{\gamma'}$ eine zu λ_γ konjugierte charakteristische Zahl, für die $|\lambda_{\gamma'}| \neq 1$, und es sei A irgendein Automorphismus des Feldes K, der $\lambda_{\gamma'}$ in λ_γ überführt (s. [9], § 35). In L entspricht dem Automorphismus A die Transformation, die den Vektor (7) in den Vektor

⟨o⟩

überführt. Diese Transformation ist halblinear:

; ⟨p⟩

sie läßt die Elemente $x \in X$ fest und stellt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeiten $L_{\gamma'}$ und L_{γ} her. Folglich ist – wenn $x \in X$ – $x^{\gamma} = Ax^{\gamma'}$, und da – aufgrund des schon Bewiesenen – $c_0^{\gamma'} = c_1^{\gamma'} = \dots = c_r^{\gamma'} = 0$, ist auch $c_0^{\gamma} = c_1^{\gamma} = \dots = c_r^{\gamma} = 0$.

3. D e r a l l g e m e i n e F a l l. Es sei jetzt X eine beliebige kommutative Gruppe. Da (1) eine spezielle Folge des Ranges r ist, muß für alle n, angefangen von irgendeinem beliebigen, in jedem Fall gelten:

. (11)

Wir beweisen – und damit wird der Beweis abgeschlossen sein –, daß wenn die Ungleichungen (11) für r aufeinanderfolgende Werte n gilt, es in X eine invariante Untergruppe mit einer endlichen Zahl von Erzeugenden gibt, die die Elemente $c_0, c_1, \dots c_r$ enthält. Dabei nehmen wir an – um die Bezeichnungen nicht zu verkomplizieren – , daß die erwähnten Werte für n 1, 2, ..., r sind.

Es sei $r \geqslant \alpha > \beta \geqslant 0$. Summieren wir die Gleichungen (11) über i von $i = \beta + 1$ bis $i = \alpha$ und ersetzen wir auf der rechten Seite $\alpha - \beta$ durch Eins, so finden wir, daß

(12)

und in jedem Fall

. (13)

Wenn wir jetzt in den Ungleichungen (12) $n = \alpha$ annehmen und sie über α von $\alpha = \beta + 1$ bis $\alpha = \gamma > \beta$ summieren, so erhalten wir

. (14)

Ganz genau so erhalten wir, wenn wir in den Ungleichungen (13) $n = \beta$ annehmen und sie über β von $\beta = \delta + 1$ bis $\beta = \alpha > \delta$ summieren (bei $n = \alpha = \beta$ gilt die Ungleichung (13) offensichtlich weiter):

. (15)

Endlich erhalten wir, wenn wir in den Ungleichungen (12) $n = \alpha$ und $\beta = 0$ annehmen und sie von $\alpha = j + 1$ bis $\alpha = r$ summieren ($r \geqslant j \geqslant 0$; für $j = r$ wird die Summe gleich Null angenommen):

. (16)

Wir bezeichnen die Summe, die links in (16) steht, mit s_j und nehmen an

. $\langle q \rangle$

Aus (14) und (15) folgt, daß sowohl bei $i > j$ als auch bei $i < j$

(17)

gilt und aus (16), daß bei beliebigen i und j

$\langle r \rangle$

gilt.

Die letzte Ungleichung ermöglicht es, auf beiden Seiten der Gleichung

$\langle s \rangle$

die Transformation V^{δ_j} anzuwenden. So kommen wir zu den Beziehungen:

, ⟨t⟩

die zusammen mit den Ungleichungen (17) zeigen, daß die Untergruppe der Gruppe X , erzeugt von den Elementen

, ⟨u⟩

, ⟨v⟩

, ⟨w⟩

invariant in bezug auf V ist.

§ 4. Beispiele

Beispiel 1. G ist eine r-dimensionale Torusgruppe, G^* ist die direkte Summe r freier zyklischer Gruppen. Jeder Endomorphismus T der Gruppe G auf G ist - in bezug auf ein vorgegebenes System unabhängiger Erzeugender dieser Gruppe - eine nichtsinguläre ganzzahlige quadratische Matrix der Ordnung r . In bezug auf das Dualsystem der Erzeugenden der Gruppe G^* ist der konjugierte Endomorphismus ⟨transponierte Endomorphismus⟩ T^* eine ⟨die⟩ transponierte Matrix. Der Endomorphismus T ist dann und nur dann ergodisch, wenn es unter den Wurzeln des entsprechenden charakteristischen Polynoms keine Einheitswurzeln ⟨Wurzeln aus Eins⟩ gibt. Die Automorphismen sind dadurch charakterisiert, daß ihre Norm gleich ± 1 ist. Beispielsweise werden bei $r = 2$ nur solche Automorphismen mit der Norm -1 nichttransitive Automorphismen, deren Spur gleich Null ist, und nur solche Automorphismen mit der Norm $+1$, deren Spur der absoluten Größe nach nicht über 2 hinausgeht.

Beispiel 2. G ist die direkte Summe einer abzählbaren Zahl von Exemplaren einer bestimmten ⟨gewissen⟩ kompakten Gruppe X und einer abzählbaren Zahl von Exemplaren einer anderen kompakten Gruppe

Y . Wir stellen uns die Elemente der Gruppe G als Komplexe vor:

$$; \langle x \rangle$$

Operationen über diese laufen auf Operationen über die Komponenten hinaus. Wir nehmen an:

$$. \langle y \rangle$$

T ist der Endomorphismus der Gruppe G , der nur dann nicht ergodisch ist, wenn beide Gruppen X und Y trivial sind. Der metrische Typ dieses Endomorphismus hängt sehr wenig von der Struktur der Gruppen X und Y ab; zumindesten in den Fällen, wenn das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt, wird er völlig von den Mächtigkeiten dieser Gruppen bestimmt. T ist dann und nur dann ein Automorphismus, wenn die Gruppe Y trivial ist.

B e i s p i e l 3. G^* ist die additive Gruppe rationaler Zahlen, T^* ist ein beliebiger Automorphismus der Gruppe G^* , d.h. die Multiplikationsoperation aller ihrer Elemente mit ein und derselben rationalen Zahl r . Der Automorphismus T ist nur bei $r = \pm 1$ nicht ergodisch.

Ein einfacheres Beispiel erhält man, wenn man - nachdem man irgendeine beliebige ganze Zahl $m \geqslant 2$ gewählt hat - für G^* eine additive Gruppe m-facher $\langle ? \rangle$ rationaler Zahlen annimmt und für T^* - eine Multiplikationsoperation der Elemente dieser Gruppe mit m . Der entsprechende Automorphismus T ist ergodisch , und man kann unschwer beweisen - wenn man eine Zerlegung in m-fache $\langle ? \rangle$ Brüche anwendet - , daß

er zu dem gleichen metrischen Typ gehört wie auch der Endomorphismus des Beispieles 2 unter der Voraussetzung, daß die Gruppe X aus m Elementen besteht und die Gruppe Y trivial ist. -

Eingegangen am
26. 1. 1948

Literatur

1	Halmos, P.R.	On automorphisms of compact groups. Bull. of the Amer. Math. Soc., 49 (1943), S. 619 - 624
2	Rochlin, V.	Unitarnye kol'ca ⟨Unitäre Ringe⟩. Doklady Ak. Nauk SSSR 59 (1948), Nr 4, S. 643 - 646
3	Hopf, E.	Ergodičeskaja teorija ⟨Die Ergodentheorie⟩. Uspechi matem. nauk Bd. IV, Nr 1, S. 113 - 182
4	Plesner, A.I.	O poluunitarnych operatorach ⟨Über halbunitäre Operatoren⟩ Doklady Ak. Nauk SSSR 25 (1939), Nr 9, S. 708 - 710
5	Pontrjagin, L.S.	Nepreryvnye gruppy ⟨Stetige Gruppen⟩ Moskau, 1938
6	Weil, A.	L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications Paris, 1940
7	Van-der- Varden, B.L.	Sovremennaja algebra ⟨Moderne Algebra⟩, Tl. II Moskau, 1937
8	Gekke, E.	Lekcii po teorii algebraičeskich čisel ⟨Lektionen über die Theorie algebraischer Zahlen⟩ Moskau, 1940
9	Van-der-Varden, B.L.	Sovremennaja algebra ⟨Moderne Algebra⟩, Tl. I Moskau, 1937

Anmerkung des Übersetzers:

Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um eine Übersetzungsvariante.

Stuttgart, den 30.7.1970

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 329—340

В. А. РОХЛИН

ОБ ЭНДОМОРФИЗМАХ КОМПАКТНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуются метрические свойства эндоморфизмов компактных коммутативных топологических групп.*

Предлагаемая работа возникла из попыток автора решить известную спектральную проблему теории динамических систем: существуют ли метрически различные динамические системы с одним и тем же непрерывным (в частности, лебеговским) спектром? С помощью введенных для этой цели новых метрических инвариантов (см. п. 3 § 1) автор пытался найти среди эргодических автоморфизмов компактных коммутативных групп автоморфизмы различных метрических типов. Оказалось, однако, что у всех указанных автоморфизмов новые инварианты совершенно одинаковы. Это и есть главный результат настоящей работы (§ 3).

Результаты § 2 и 4 не новы: еще в феврале 1941 г. они были доложены автором кафедре функционального анализа Московского университета, но не были опубликованы в печати; в своей наиболее существенной части они были в 1943 г. опубликованы Халмошем ([1]).

Основным инструментом исследования в работе является понтрягинская теория характеров. Тот же, с точки зрения чисто метрической теории, класс преобразований можно было бы определить и исследовать с помощью теории унитарных колец ([2]). Этот путь предпочтительнее, если иметь в виду чисто метрическое построение теории.

§ 1. Основные метрические определения

1. Пространства с мерой и их эндоморфизмы. Мы будем понимать под M произвольное множество, в котором отмечена совокупность Ω_μ измеримых подмножеств A, снабженных определенными мерами μA. Предполагается, что Ω_μ есть борелевское тело множеств, что μ есть неотрицательная вполне аддитивная функция множества $A \in \Omega_\mu$ и что подмножества множеств меры нуль всегда измеримы (и, следовательно, имеют меру нуль). Кроме того, мы будем предполагать, что $M \in \Omega_\mu$ и что $\mu M = 1$. При этих условиях мы будем называть M пространством с мерой.

Однозначное отображение одного пространства с мерой на другое мы называем гомоморфным, если прообраз всякого измеримого мно-

* Компактной в работе называется топологическая группа, из всякого покрытия которой открытыми множествами можно выбрать конечное («бикомпактность»).

жества измерим и имеет меру своего образа. Гомоморфное отображение называется **изоморфным**, если оно взаимнооднозначно и обратное отображение также гомоморфно. Если оба пространства совпадают, то гомоморфизм называется **эндоморфизмом**, а изоморфизм — **автоморфизмом**. Два эндоморфизма — эндоморфизм T пространства M и эндоморфизм T' пространства M' — называются **изоморфными между собой**, если существует такой изоморфизм S пространства M на пространство M', что $T' = STS^{-1}$. Наконец, эндоморфизмы T и T' принадлежат к одному и тому же (метрическому) **типу**, если они становятся изоморфными после удаления из M и M' подходящих множеств меры нуль. При этом, конечно, имеется в виду, что удаление из M и M' упомянутых множеств меры нуль превращает M и M' в новые пространства с мерой, а T и T' — в эндоморфизмы этих новых пространств.

2. **Спектральные свойства.** Пусть $L^2(M)$ — унитарное пространство комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на M. Формулы

$$f' = Uf, \quad f'(x) = f(Tx)$$

ставят в соответствие эндоморфизму T пространства M определенное преобразование U пространства $L^2(M)$. Если T есть автоморфизм, то U есть унитарный оператор *; в общем же случае можно утверждать только, что оператор U полуунитарен **.

Условимся говорить, что два эндоморфизма — эндоморфизм T пространства M и эндоморфизм T' пространства M' — принадлежат к одному и тому же **спектральному типу**, если существует такое линейное изометрическое отображение V пространства $L^2(M)$ на пространство $L^2(M')$, что для операторов U и U', отвечающих эндоморфизмам T и T', справедливо соотношение $U' = VUV^{-1}$. Очевидно, что эндоморфизмы одного и того же типа принадлежат к одному и тому же спектральному типу.

Так как константы всегда являются инвариантными функциями ($Uf = f$), то единица всегда является собственным значением оператора U. Кратность этого собственного значения есть простейший спектральный инвариант эндоморфизма T. Если она равна единице, т. е. всякая инвариантная функция $f \in L^2(M)$ лишь на множестве меры нуль отличается от константы, то эндоморфизм T называется **эргодическим** [ср. ([3]), § 9].

3. **Общее определение перемешивания.** Мы будем называть **комплексом ранга** r всякую упорядоченную систему $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ $r+1$ неотрицательных целых чисел (среди которых могут быть и равные). Мы скажем, что эндоморфизм T есть **перемешивание относительно последовательности комплексов**

$$\Delta_0^r = (k_0^0, k_0^1, \ldots, k_0^r), \ \Delta_1^r = (k_1^0, k_1^1, \ldots, k_1^r), \ldots, \tag{1}$$

если для любых $r+1$ измеримых множеств $A_0, A_1, \ldots, A_r$ при $n \to \infty$

* Ср. ([3]), § 3.

** По поводу теории полуунитарных операторов см. ([4]).

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{k_n^i} A_i\right) \to \prod_{i=0}^{r} \mu A_i. \tag{2}$$

Положим для комплекса $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$

$$I(\Delta^r) = \inf_{0 \leqslant i < j \leqslant r} |k^i - k^j|$$

и условимся говорить, что (1) есть **последовательность ранга** r, если $I(\Delta_n^r) \to \infty$ при $n \to \infty$. Мы скажем, что T есть **перемешивание степени** r, если T есть перемешивание относительно всякой последовательности ранга r. Очевидно, что если T есть перемешивание степени r, то T есть перемешивание всякой степени $r' < r$. В частности, при $r = 1$ получается обычное определение перемешивания [ср. ([3]), § 11].

Соотношение (2) можно представить в виде:

$$\left(\prod_{i=0}^{r} U^{k_n^i} f_i, e\right) \to \prod_{i=0}^{r} (f_i, e), \tag{3}$$

где f_i — характеристическая функция множества A_i, U — оператор, определенный в предыдущем пункте, e — функция, тождественно равная единице, Π — знак обычного умножения и скобки — знак скалярного умножения в $L^2(M)$. Но если (3) имеет место (для данной последовательности (1) при $n \to \infty$) для любой системы характеристических функций $f_0, f_1, \ldots, f_r$, то (3) имеет место и для любой системы **каких-угодно ограниченных измеримых функций** $f_0, f_1, \ldots, f_r$, в чем нетрудно убедиться, переходя от характеристических функций к их линейным комбинациям и равномерно аппроксимируя такими комбинациями заданные ограниченные измеримые функции. Таким образом, соотношение (2), где $A_0, A_1, \ldots, A_r$ — любые измеримые множества, эквивалентно соотношению (3), где $f_0, f_1, \ldots, f_r$ — любые ограниченные измеримые функции.

Заметим, что если T есть перемешивание степени r, то при заданных функциях $f_0, f_1, \ldots, f_r$ предельный переход в формуле (3) является **равномерным** в следующем смысле: для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для любого комплекса $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ из неравенства $I(\Delta^r) > N$ следует неравенство:

$$\left|\left(\prod_{i=0}^{r} U^{k^i} f_i, e\right) - \prod_{i=0}^{r} (f_i, e)\right| < \varepsilon.$$

Иногда удобно бывает рассматривать только такие комплексы $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$, для которых $k^0 < k^1 < \cdots < k^r$. Последовательности, составленные из таких комплексов, мы будем называть **специальными**. Для того чтобы эндоморфизм T был перемешиванием степени r, достаточно, очевидно, чтобы он был перемешиванием относительно всякой специальной последовательности ранга r.

§ 2. Эндоморфизмы компактных коммутативных групп и их спектральные свойства

1. Сопряженные эндоморфизмы. В настоящей работе роль пространства M будет играть компактная топологическая группа G, которая в остальном может быть вполне произвольной, роль меры μ — инвариантная мера на G и роль T — произвольный эндоморфизм топологической группы G на всю группу G. То, что такой эндоморфизм является эндоморфизмом и в смысле § 1, следует из единственности инвариантной меры.

Для изучения эндоморфизма T мы воспользуемся понтрягинской теорией характеров *. Пусть G^* — (дискретная) группа характеров группы G. Ее мощность мы будем обозначать через $\mathfrak{m}$. В G^* эндоморфизму T отвечает сопряженный с ним эндоморфизм T^*, определяемый формулами

$$\chi' = T^*\chi, \quad \chi'(x) = \chi(Tx) \quad (x \in G,\ \chi \in G^*).$$

При этом группа характеров группы G^* есть в хорошо известном смысле снова G, а эндоморфизм, сопряженный с T^*, есть снова T. Таким образом, хотя T^* есть чисто алгебраический объект, его свойствами определяются все свойства эндоморфизма T. Заметим, что условие $TG = G$ эквивалентно взаимной однозначности T^* и что T в том и только в том случае есть автоморфизм, если T^* есть автоморфизм.

2. Спектральный тип эндоморфизма. Будем теперь рассматривать характеры как комплексные функции на G. Тогда G^* станет полной нормированной ортогональной системой в $L^2(G)$, а оператор U, рассматриваемый на G^*, совпадет с T^*. Под действием эндоморфизма T^* каждый элемент $\chi \in G^*$ движется по своей траектории, и так как G^* есть полная нормированная ортогональная система в $L^2(G)$, то этими движениями вполне определяется оператор U. Очевидно, траектории могут быть разбиты на три класса:

а) бесконечные траектории, состоящие из элементов вида $(T^*)^n\chi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые все различны между собой.

б) Полуконечные траектории, существующие в том и только в том случае, если эндоморфизм T^* не является автоморфизмом. Такая траектория характеризуется наличием самого левого элемента, не являющегося образом никакого другого элемента группы G^* при эндоморфизме T^*.

в) Конечные траектории, соответствующие периодическим движениям. К этому классу всегда принадлежит траектория, пробегаемая единицей группы G^*. Если других конечных траекторий не существует, то эндоморфизм T^* называется апериодическим.

Как бы ни был сложен эндоморфизм T, *его спектральный тип зависит исключительно от чисто теоретико-множественных свойств эндоморфизма* T^*, *т. е. от мощности* $\mathfrak{m}_0$ *множества бесконечных траекторий, мощности* $\mathfrak{m}_1$ *множества полуконечных траекторий, мощности множества траекторий, состоящих из одного элемента, мощности множества траекторий, состоящих из двух элементов, и т. д.* Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что разбиению полной нормированной

* См. ([5]), а для случая групп без счетной топологической базы — ([6]).

ортогональной системы G^* на траектории отвечает разложение пространства $L^2(G)$ в ортогональную сумму инвариантных относительно U циклических подпространств, порожденных этими траекториями, и что структура оператора U на таком подпространстве зависит только от характера соответствующей траектории. Именно, каждой бесконечной траектории отвечает инвариантное подпространство, на котором U есть унитарный оператор с простым лебеговским спектром *; каждой полуконечной траектории — инвариантное подпространство, на котором U есть элементарный полуунитарный оператор **; наконец, каждой траектории, состоящей из n элементов, — n-мерное инвариантное подпространство, на котором U есть унитарный оператор, имеющий своими собственными значениями все корни n-й степени из единицы.

3. Эргодический случай. Из только что изложенного следует, что каждой конечной траектории соответствует своя инвариантная функция. А так как на инвариантных подпространствах, отвечающих бесконечным и полуконечным траекториям, оператор U имеет чисто непрерывный спектр, то *эндоморфизм T эргодичен в том и только в том случае, если эндоморфизм T^* апериодичен.*

Теперь мы предположим, что T есть эргодический эндоморфизм. Тогда его спектральный тип вполне определяется числами $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_1$. Вопрос о том, какие значения могут принимать эти числа, является чисто алгебраическим. Мы начнем со следующей леммы:

При всяком апериодическом автоморфизме нетривиальная коммутативная группа распадается на бесконечное число траекторий.

Доказательство. Пусть V — апериодический автоморфизм нетривиальной коммутативной группы X, которую мы возьмем в аддитивной записи. Допустим, что число траекторий, на которые распадается X, конечно.

Предположим сначала, что X имеет конечное число образующих. Тогда в X не может быть отличных от нуля элементов конечного порядка: если $a \neq 0$, то и $na \neq 0$; $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что бесконечное число членов последовательности $\{na\}$ должно лежать на одной и той же траектории, которая должна, таким образом, содержать отличные от нуля элементы, делящиеся на сколь угодно большие натуральные числа. А так как все ее элементы обладают одинаковыми алгебраическими свойствами, то и каждый из них должен делиться на сколь угодно большие натуральные числа, что противоречит существованию у X конечной системы образующих.

Пусть теперь X — произвольная нетривиальная коммутативная группа. Мы покажем (и этим лемма будет доказана), что в X имеется нетривиальная подгруппа с конечным числом образующих, инвариантная относительно V и V^{-1}. Возьмем для этого в X какой-нибудь элемент $a \neq 0$ и положим

---

* Такой оператор может быть представлен как оператор умножения на независимое переменное в пространстве функций с интегрируемым квадратом модуля на единичной окружности, снабженной обычной мерой Лебега.

** См. ([4]), стр. 710.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} V^k a \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Так как среди членов последовательности $\{a_n\}$ должны найтись такие, которые лежат на одной и той же траектории, то должны иметь место равенства вида:

$$\sum_{i=1}^{q} \pm V^{p_i} a = 0, \quad p_1 < p_2 < \ldots < p_q; \tag{4}$$

из (4) следует, что подгруппа группы X, порожденная элементами $V^{p_1}a$, $V^{p_1+1}a, V^{p_1+2}a, \ldots, V^{p_q}a$, инвариантна относительно V и V^{-1}.

Теперь нетрудно указать значения, которые могут принимать числа $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_1$.

Для $\mathfrak{m}_0$ *возможны только бесконечные значения и значение* 0; *для* $\mathfrak{m}_1$ *возможны только значения* 0 *и* $\mathfrak{m}$.

Чтобы доказать первую часть этой теоремы, достаточно применить нашу лемму к подгруппе тех элементов группы G^*, которые лежат не на полуконечных траекториях (эта подгруппа совпадает с пересечением всех подгрупп $(T^*)^n G^*$; $n = 0, 1, \ldots$). Чтобы доказать вторую часть, достаточно заметить, что $\mathfrak{m}_1$ есть мощность множества левых концов всех полуконечных траекторий, и что это множество совпадает с дополнением подгруппы T^*G^* группы G^* в G^* и потому либо пусто, либо имеет мощность $\mathfrak{m}$.

Пример 2 § 4 показывает, что никакими другими условиями пара чисел $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_1$ не связана.

§ 3. Теорема о перемешивании

1. Редукция к алгебраической лемме. В этом параграфе мы докажем, что *всякий эргодический эндоморфизм компактной коммутативной топологической группы есть перемешивание всех степеней.*

В п. 3 § 1 мы видели, что равенство (3) справедливо для любых ограниченных измеримых функций, если оно справедливо для характеристических функций. Подобным же образом нетрудно убедиться в том, что это равенство должно быть справедливо для любых ограниченных измеримых функций, если оно справедливо для характеров группы G. Действительно, если равенство (3) имеет место для характеров группы G, то оно имеет место и для их линейных комбинаций. Следовательно, как показывает теорема Лебега об интегрировании ограниченных последовательностей, оно имеет место и для всех функций, являющихся пределами почти всюду сходящихся равномерно ограниченных последовательностей таких линейных комбинаций, т. е. для всех ограниченных измеримых функций.

Итак, достаточно доказать формулу (3) для характеров группы G. Но если $f_0, f_1, \ldots, f_r$ суть характеры, то обе части этой формулы могут принимать только значения 0 и 1, причем левая часть равна единице лишь в случае, когда

$$\prod_{i=0}^{r} U^{k_n^i} f_i = e,$$

а правая — лишь в случае, когда

$$f_0 = f_1 = \ldots = f_r = e.$$

Следовательно, нам остается установить следующий чисто алгебраический факт:

Пусть V — взаимнооднозначный апериодический эндоморфизм коммутативной группы X, которую мы снова возьмем в аддитивной записи. Если для некоторых элементов $c_0, c_1, \ldots, c_r$ этой группы и некоторой специальной последовательности (1) *ранга r*

$$\sum_{i=0}^{r} V^{k_n^i} c_i = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

то

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_r = 0. \tag{6}$$

2. Случай конечного числа образующих. Предположим сначала, что X есть группа с конечным числом образующих. Тогда она не может иметь элементов конечного порядка и, следовательно, допускает конечную систему независимых образующих $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Относительно этой системы всякий элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi_\alpha(x)\, a_\alpha, \tag{7}$$

где $\xi_\alpha(x)$ — целые числа, а эндоморфизм V изображается целочисленной квадратной матрицей $\| v_{\alpha\beta} \| = \| \xi_\alpha(V a_\beta) \|$:

$$\xi_\alpha(Vx) = \sum_{\beta=1}^{m} v_{\alpha\beta}\xi_\beta(x) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — все различные характеристические числа матрицы $\| v_{\alpha\beta} \|$ и $q_1, q_2, \ldots, q_l$ — их кратности $\left(\sum_{\gamma=1}^{l} q_\gamma = m\right)$. Обозначим через K поле, получающееся из поля рациональных чисел присоединением чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, и через L — m-мерное векторное пространство с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_m$ над полем K. Элементы группы X можно рассматривать как целочисленные векторы пространства L; другие векторы этого пространства также единственным образом представляются в виде (7), но для них ξ_α суть уже произвольные числа поля K.

Формула (8) определяет в L линейное преобразование, которое совпадает на X с V и которое мы обозначим также через V. Пусть L_γ — многообразие тех векторов $x \in L$, для которых $(V - \lambda_\gamma E)^{q_\gamma} x = 0$ (E есть тождественное преобразование пространства L). Многообразия

$L_1, L_2, \ldots, L_l$ инвариантны относительно V, их попарные пересечения нульмерны и их прямая сумма есть все L, так что всякий вектор $x \in L$ единственным образом представляется в виде [см. ([7]), § 109]:

$$x = \sum_{\gamma=1}^{l} x^{\gamma}, \quad x^{\gamma} \in L_{\gamma}.$$

Мы покажем — и этим (6) будет доказано —, что при любом $\gamma = 1, 2, \ldots, l$

$$c_0^{\gamma} = c_1^{\gamma} = \ldots = c_r^{\gamma} = 0. \tag{9}$$

Сначала мы рассмотрим значение γ, для которого $|\lambda_{\gamma}| \neq 1$. Выберем в L_{γ} базис

$$b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1t_1}; b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2t_2}; \ldots; b_{s1}, b_{s2}, \ldots b_{st_s}$$

$\left(\sum_{\delta=1}^{s} t_{\delta} = q_{\gamma}\right)$, относительно которого матрица преобразования, индуцируемого преобразованием V в L_{γ}, имеет вид [см. ([7]), § 109]:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & & & 0 \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_s \end{bmatrix}, \quad Q_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\gamma} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_{\gamma} \end{bmatrix}}_{t_i \text{ рядов}}$$

Пусть

$$x = \sum_{\delta=1}^{s} \sum_{\varepsilon=1}^{t_{\delta}} \eta_{\delta\varepsilon}(x)\, b_{\delta\varepsilon}$$

— представление вектора $x \in L_{\gamma}$ относительно этого базиса. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$\eta_{\delta\varepsilon}(V^n x) = P_{\delta\varepsilon}^{(x)}(n)\, \lambda_{\gamma}^{n},$$

где $P_{\delta\varepsilon}^{(x)}$ — полином, определенный формулой

$$P_{\delta\varepsilon}^{(x)}(n) = \sum_{\nu=\varepsilon}^{t_{\delta}} \frac{\eta_{\delta\varepsilon}(x)}{\lambda_{\gamma}^{\nu-1}} \binom{n}{\nu-1},$$

и из (5) мы получаем:

$$\sum_{i=0}^{r} P_{\delta\varepsilon}^{(c_i^{\gamma})}(k_n^i)\, \lambda_{\gamma}^{k_n^i} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

Так как (1) есть специальная последовательность ранга r, а $\lambda_\gamma \neq 0$ (эндоморфизм V взаимнооднозначен!) и $|\lambda_\gamma| \neq 1$, то все члены суммы, стоящей слева в (10), имеют различные порядки при $n \to \infty$. Но в таком случае (10) возможно лишь при условии, что все полиномы $P_{\delta\varepsilon}^{(c_i^\gamma)}$, отвечающие данному значению γ, тождественно равны нулю, т. е. лишь при условии (9).

Пусть теперь $|\lambda_\gamma| = 1$. Нетрудно видеть, что тогда существует алгебраически сопряженное с λ_γ характеристическое число $\lambda_{\gamma'}$, для которого $|\lambda_{\gamma'}| \neq 1$. Действительно, в противном случае λ_γ было бы корнем из единицы некоторой степени p [см. ([8]), стр. 126], и единица была бы характеристическим числом преобразования V^p, вследствие чего существовал бы отличный от нуля элемент $x \in X$, для которого $V^p x = x$.

Итак, пусть $\lambda_{\gamma'}$ — сопряженное с λ_γ характеристическое число, для которого $|\lambda_{\gamma'}| \neq 1$, и пусть A — какой-нибудь автоморфизм поля K, переводящий $\lambda_{\gamma'}$ в λ_γ [см. ([9]), § 35]. В L автоморфизму A отвечает преобразование, переводящее вектор (7) в вектор

$$Ax = \sum_{\alpha=1}^{m} A(\xi_\alpha(x))\, a_\alpha.$$

Это преобразование полулинейно:

$$A\left(\sum \mu_j x_j\right) = \sum (A\mu_j)(Ax_j),$$

оставляет неподвижными элементы $x \in X$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами многообразий $L_{\gamma'}$ и L_γ. Следовательно, если $x \in X$, то $x^\gamma = Ax^{\gamma'}$, и так как, в силу уже доказанного, $c_0^{\gamma'} = c_1^{\gamma'} = \ldots = c_r^{\gamma'} = 0$, то и $c_0^\gamma = c_1^\gamma = \ldots = c_r^\gamma = 0$.

3. Общий случай. Пусть теперь X — произвольная коммутативная группа. Так как (1) есть специальная последовательность ранга r, то для всех n, начиная с некоторого, мы во всяком случае должны иметь

$$k_n^i - k_n^{i-1} > k_{n-1}^i - k_{n-1}^{i-1} + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Мы докажем — и этим доказательство будет завершено —, что если неравенства (11) имеют место для r последовательных значений n, то в X имеется инвариантная подгруппа с конечным числом образующих, содержащая элементы $c_0, c_1, \ldots, c_r$. При этом, чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что упомянутые значения n суть $1, 2, \ldots, r$.

Пусть $r \geqslant \alpha > \beta \geqslant 0$. Суммируя неравенства (11) по i от $i = \beta + 1$ до $i = \alpha$ и заменяя в правой части $\alpha - \beta$ единицей, мы найдем, что

$$k_n^\alpha - k_{n-1}^\alpha - 1 > k_n^\beta - k_{n-1}^\beta \tag{12}$$

и во всяком случае

$$k_n^\alpha - k_{n-1}^\alpha > k_n^\beta - k_{n-1}^\beta - 1. \tag{13}$$

Полагая теперь в неравенствах (12) $n=\alpha$ и суммируя их по α от $\alpha=\beta+1$ до $\alpha=\gamma>\beta$, получим

$$\sum_{\alpha=\beta+1}^{\gamma} (k_\alpha^\alpha - k_{\alpha-1}^\alpha - 1) > k_\gamma^\beta - k_\beta^\beta \quad (r\geqslant\gamma>\beta\geqslant 0). \tag{14}$$

Точно так же, полагая в неравенствах (13) $n=\beta$ и суммируя их по β от $\beta=\delta+1$ до $\beta=\alpha>\delta$ (при $n=\alpha=\beta$ неравенство (13), очевидно, сохраняет силу), получим

$$k_\alpha^\alpha - k_\delta^\alpha > \sum_{\beta=\delta+1}^{\alpha} (k_\beta^\beta - k_{\beta-1}^\beta - 1) \quad (r\geqslant\alpha>\delta\geqslant 0). \tag{15}$$

Наконец, полагая в неравенствах (12) $n=\alpha$ и $\beta=0$ и суммируя их от $\alpha=j+1$ до $\alpha=r$ ($r\geqslant j\geqslant 0$; при $j=r$ сумма считается равной нулю), получим

$$\sum_{\alpha=j+1}^{r} (k_\alpha^\alpha - k_{\alpha-1}^\alpha - 1) > k_r^0 - k_j^0. \tag{16}$$

Обозначим сумму, стоящую слева в (16), через s_j и положим

$$p_j^i = k_j^i + s_j,$$

Из (14) и (15) следует, что как при $i>j$, так и при $i<j$,

$$p_j^j > p_j^i \quad (i \neq j), \tag{17}$$

а из (16), что при любых i и j

$$p_j^i > k_r^0 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство позволяет применить к обеим частям равенства

$$\sum_{i=0}^{r} V^{k_j^i} c_i = 0 \quad (j=0,1,\ldots,r)$$

преобразование V^{s_j}. Таким образом, мы приходим к соотношениям:

$$V^{p_j^j} c_j = -\sum_{i=0,\ldots,j-1,\,j+1,\ldots,r} V^{p_j^i} c_i \quad (j=0,1,\ldots,r),$$

которые вместе с неравенствами (17) показывают, что подгруппа группы X, порожденная элементами

$$c_0,\ Vc_0,\ V^2c_0, \ldots,\ V^{p_0^0-1}c_0,$$

$$c_1,\ Vc_1,\ V^2c_1, \ldots,\ V^{p_1^1-1}c_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_r,\ Vc_r,\ V^2c_r, \ldots,\ V^{p_r^r-1}c_r,$$

инвариантна относительно V.

§ 4. Примеры

Пример 1. G есть r-мерная торовидная группа, G^* есть прямая сумма r свободных циклических групп. Всякий эндоморфизм T группы G на G представляется, относительно заданной системы независимых образующих этой группы, невырожденной целочисленной квадратной матрицей порядка r. Относительно дуальной системы образующих группы G^* сопряженный эндоморфизм T^* представляется транспонированной матрицей. Эндоморфизм T эргодичен в том и только в том случае, если среди корней соответствующего характеристического полинома нет корней из единицы. Автоморфизмы характеризуются тем, что их норма равна ± 1. Например, при $r = 2$ нетранзитивными автоморфизмами будут только такие автоморфизмы с нормой -1, след которых равен нулю, и только такие автоморфизмы с нормой $+1$, след которых по абсолютной величине не превосходит 2.

Пример 2. G есть прямая сумма счетного числа экземпляров некоторой компактной группы X и счетного числа экземпляров другой компактной группы Y. Мы будем представлять себе элементы группы G как комплексы

$$\{x_m,\ y_n\} \quad (x_m \in X,\quad y_n \in Y;\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

операции над которыми сводятся к операциям над компонентами. Положим

$$x'_m = x_{m+1},\quad y'_n = y_{n+1},\qquad T\{x_m,\ y_n\} = \{x'_m,\ y'_n\}.$$

T есть эндоморфизм группы G, не эргодический только в том случае, если обе группы X и Y тривиальны. Метрический тип этого эндоморфизма очень мало зависит от структуры групп X и Y; по крайней мере в тех случаях, когда имеет место вторая аксиома счетности, он всецело определяется мощностями этих групп. T есть автоморфизм тогда и только тогда, когда группа Y тривиальна.

Пример 3. G^* есть аддитивная группа рациональных чисел, T^* есть произвольный автоморфизм группы G^*, т. е. операция умножения всех ее элементов на одно и то же рациональное число r. Автоморфизм T не эргодичен только при $r = \pm 1$.

Более простой пример получится, если, взяв какое-нибудь целое число $m \geqslant 2$, принять за G^* аддитивную группу m-рично рациональных чисел, а за T^* — операцию умножения элементов этой группы на m. Соответствующий автоморфизм T эргодичен, и нетрудно показать, пользуясь разложением в m-ричные дроби, что *он принадлежит к тому же метрическому типу, что и эндоморфизм примера 2, при условии, что группа X состоит из m элементов, а группа Y тривиальна.*

Поступило
26. 1. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., On automorphisms of compact groups, Bull. of the Amer. Math. Soc., 49 (1943), 619—624.
[2] Рохлин В., Унитарные кольца, Доклады Ак. Наук СССР, 59, № 4 (1948), 643—646.
[3] Хопф Э., Эргодическая теория, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 1, 113—182.
[4] Плеснер А. И., О полуунитарных операторах, Доклады Ак. Наук СССР, 25, № 9 (1939), 708—710.
[5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, 1938.
[6] Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940.
[7] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. II, Москва, 1937.
[8] Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, Москва, 1940.
[9] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. I, Москва, 1937.