ü/70

Doklady Akademii nauk SSSR
(1958) Bd. 119, Nr 5, S. 861/864
M a t e m a t i k a

Kolmogorov, A.N. (Akademiemitglied):

EINE NEUE METRISCHE INVARIANTE TRANSITIVER DYNAMISCHER SYSTEME UND AUTOMORPHISMEN LEBESGUESCHER RÄUME

Es ist allgemein bekannt, daß ein erheblicher Teil der metrischen Theorie dynamischer Systeme als abstrakte Theorie von "Strömungen" $\{S_t\}$ auf "Lebesgueschen Räumen" M mit dem Maß μ in Termini dargelegt werden kann, die zu "Isomorphismen nach dem Nullmodul" invariant sind (s. den Übersichtsartikel von V.A. Rochlin [1], an den sich die weitere Darlegung in bezug auf Definitionen und Bezeichnungen anlehnt). Wir nehmen an, das Maß auf M sei normiert durch die Bedingung

(1)

und sei nichttrivial (d.h. wir nehmen die Existenz einer Menge $A \subseteq M$ mit $0 < \mu(A) < 1$ an). Es sind viele Beispiele transitiver Automorphismen und transitiver Strömungen mit einem sogenannten "abzählbaren ⟨mehrfachen⟩ Lebesgueschen Spektrum" bekannt (für Automorphismen s. [1], § 4; für Strömungen - [2 - 5]). Vom Gesichtspunkt des Spektrums aus haben wir hier einen Typ der Automorphismen $\mathcal{L}_0^\omega$ und einen Typ der Strömungen $\mathcal{L}^\omega$. Die Frage, ob nicht alle Automorphismen des Typs $\mathcal{L}_0^\omega$ (entsprechend: alle Strömungen des Typs $\mathcal{L}^\omega$) zueinander isomorph mod 0 sind, blieb bisher offen. Wir zeigen in den §§ 3 - 4, daß die Antwort auf diese Frage negativ sowohl im Falle der Automorphismen als auch im Falle der Strömungen ist. Die neue Invariante, die es ermöglicht, die Klasse der Automorphismen $\mathcal{L}_0^\omega$ und die Klasse der Strömungen $\mathcal{L}^\omega$ in ein Kontinuum invarianter Unterklassen aufzuspalten, ist die E n t r o p i e p r o Z e i t e i n h e i t . In § 1 werden die notwendigen Angaben aus der Informationstheorie dargelegt (die hier eingeführten Begriffe der bedingten Entropie und der bedingten Information und ihrer Eigenschaften sind wahrscheinlich auch von größerem Interesse, obwohl die gesamte Darstellung unmittelbar an den Informationsgehalt aus [7] und zahlreiche Arbeiten anschließt, die diese Definition entwickeln.). In § 2 wird eine Defintion der Charakteristik h gegeben und ihre Invarianz bewiesen. In den Paragraphen §§ 3 - 4 werden Beispiele von Automorphismen und Strömungen mit beliebigen Werten h innerhalb der Grenzen $0 < h \leq \infty$ aufgezeigt. Im Falle der Automorphismen geht es um schon vor langer Zeit konstruierte Beispiele, bei den Strömungen ist das Konstruieren von Beispielen mit endlichem h eine heiklere Aufgabe und mit einigen interessanten Fragen der Theorie Markovscher Prozesse verbunden.

§ 1. <u>Eigenschaften der bedingten Entropie und des bedingten Informationsgehalts.</u> In Übereinstimmung mit [1] bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ die Boolesche Algebra der meßbaren Mengen des Raumes M, untersucht mod 0. Angenommen, $\mathfrak{C}$ sei eine in der Metrik $\rho(A, B) = \mu((A - B) \cup \cup (B - A))$ abgeschlossene Unteralgebra der Algebra $\mathfrak{S}$. Sie erzeugt eine bestimmte mod 0 - Zerlegung $\xi_{\mathfrak{C}}$ des Raumes M, die durch die Bedingung, daß $A \in \mathfrak{C}$ dann und nur dann, wenn ⟨durch ?⟩ mod 0 ganz A aus ganzen ⟨vollen⟩ Elementen der Zerlegung $\xi_{\mathfrak{C}}$ zusammengesetzt sein kann, bestimmbar ist. Auf den Elementen C der Zerlegung $\xi_{\mathfrak{C}}$ wird das "kanonische Maßsystem μ_C" definiert [1]. Für jedes beliebige $x \in C$ nehmen wir an:

$$. \quad (2)$$

Vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie (wo jede beliebige meßbare Funktion des Elements $x \in M$ eine "Zufallsgröße" genannt wird) ist die Zufallsgröße $\mu_x(A / \mathfrak{C})$ eine bedingte Wahrscheinlichkeit" des Ereignisses A bei bekanntem Ausgang des "Versuchs" $\mathfrak{C}$ ([6], Kapitel I, § 7).

Für die drei Unteralgebren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der Algebra $\mathfrak{S}$ und $c \in \xi_{\mathfrak{C}}$ nehmen wir an:

$$, \quad (3)$$

wobei die obere Grenze entsprechend allen endlichen Zerlegungen $M = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $M = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ gewählt wird, für die $A_i \cap A_j = N$, $B_i \cap B_j = N$, $i \neq j$, $A_i \in \mathfrak{A}$ $B_j \in \mathfrak{B}$ (N - ist eine leere Menge). Wenn $\mathfrak{C}$ die triviale Algebra $\mathfrak{N} = \{N, M\}$ ist, dann geht (3) in die Definition der unbedingten Information $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aus der Anlage 7 zu [7] über *. Die Größe (3) selbst wird als "Informationsgehalt durch Versuch $\mathfrak{A}$ ⟨in den Ergebnissen des Versuchs $\mathfrak{A}$ ⟩ hinsichtlich Versuch $\mathfrak{B}$ bei bekanntem Ausgang C des Versuchs $\mathfrak{C}$ " interpretiert. Wenn man $C \in \xi_{\mathfrak{C}}$ nicht festlegt, dann wird natürlich die Zufallsgröße $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{C})$ betrachtet, die bei $x \in C$ gleich $I_x(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{C}) = I_C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{C})$ ist. Weiter werden wir mit ihrem Erwartungswert

(4)

zu tun haben.

Die Definitionen der bedingten Entropie und der durchschnittlichen bedingten Entropie $H(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}) = I(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}/\mathfrak{C})$, $\underline{M}\, H(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) = \int_M H_x(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})\, \mu(dx)$ bedürfen keiner besonderen Erklärungen.

Wir nehmen diejenigen Eigenschaften des bedingten Informationsgehalts und der bedingten Entropie heraus, die wir im folgenden brauchen. Die Eigenschaften (α) und (δ) für den Fall von unbedingtem Informationsgehalt und unbedingter Entropie sind allgemein bekannt; die Eigenschaft (ε) für einen unbedingten Informationsgehalt bildet den Inhalt des Theorems (2) aus der Anmerkung [8]. Die Eigenschaften (β) und (γ) lassen sich ohne Mühe beweisen. Hinsichtlich der Eigenschaft (β) muß lediglich bemerkt werden, daß ein analoger Satz für den Informationsgehalt (aus $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{C}'$ folgt: $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{C}) \leq I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{C})$) schon falsch wäre. Verbunden hiermit ist der Umstand, daß sich in der

---

* Die Autoren der Anmerkung [8] haben nicht rechtzeitig auf die Anlage 7 zu [7] geachtet, die nicht in die russische Übersetzung [9] eingeschlossen wurde. Die Anmerkung [8] müßte mit dem Hinweis auf diese Beilage zu [7] beginnen.

Eigenschaft (ζ) die untere Grenze und das Zeichen $\geqslant$ stehen: die entsprechende Grenze kann nicht existieren, und die untere Grenze kann in einigen Fällen größer als $MI(a, b/c)$ sein.

(α) $I(a, b/c) \leq H(a/c)$, die Gleichheit wird offensichtlich bei $b \geq a$ erreicht.

(β) Wenn $\mathfrak{C} \geq \mathfrak{C}'$, dann ist $H(a/c) \leq H(a/c')$ mod 0.

(γ) Wenn $b \geq b'$, dann ist $MI(a, b/c) = MI(a, b'/c) + MI(a, b/c \vee b')$, wobei $c \vee b'$ eine minimale abgeschlossene Algebra ist, die c und b' enthält.

(δ) Wenn $b \geq b'$, dann ist $MI(a, b/c) \geqslant MI(a, b'/c)$.

(ε) Wenn $a_1 \subseteq \dots \subseteq a_n \subseteq \dots, \bigcup a_n = a$, dann ist $\lim MI(a_n, b/c) = MI(a, b/c)$.

(ζ) Wenn $\mathfrak{C}_1 \geq \mathfrak{C}_2 \geq \dots \geq \mathfrak{C}_n \geq \dots, \bigcap_n \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$, dann ist $\liminf_{n\to\infty} MI(a, b/c_n) \geqslant MI(a, b/c)$.

§ 2. Definition der Invarianten h. Wir sagen, die Strömung $\{S_t\}$ sei quasiregulär (habe den Typ γ), wenn** eine abgeschlossene Unteralgebra $\mathfrak{S}_0$ der Algebra $\mathfrak{S}$ existiert, deren Verschiebungen $\mathfrak{S}_t = S_t \mathfrak{S}_0$ folgende Eigenschaften besitzen: (I) $\mathfrak{S}_t \subseteq \mathfrak{S}_{t'}$, wenn $t \leq t'$. (II) $\bigcup_t \mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}$. (III) $\bigcap_t \mathfrak{S}_t = \gamma$.

Bei der Interpretation der Strömung als stationären Zufallsprozeß kann $\mathfrak{S}_t$ als Algebra von Ereignissen betrachtet werden, "die lediglich vom Verlauf des Prozesses bis zum Moment der Zeit t" abhängen. Es läßt sich leicht beweisen, daß die Strömungen vom Typ γ transitiv sind und aus den Ergebnissen von Plesner [10, 11] kann man folgern, daß sie ein homogenes Lebesguesches Spektrum

---

** Diese Bedingung ist erheblich schwächer als die Bedingungen der "Regularität", die gewöhnlich in der Theorie von Zufallsprozessen verwendet werden. S. dazu Ende des § 4.

haben. Wenn die Vielfachheit des Spektrums gleich ν ist ($\nu = 1, 2, \ldots, \omega$), dann ordnen wir die Strömung dem Typ τ^{ν} zu. Offensichtlich ist $\tau^{\nu} \subseteq \mathcal{L}^{\nu}$, wobei $\mathcal{L}^{\nu}$ eine Klasse von Strömungen mit Lebesgueschem Spektrum mit der homogenen Vielfachheit ν ist. Es ist im übrigen möglich, daß alle $\mathcal{L}^{\nu}$ (und folglich τ^{ν}) außer $\mathcal{L}^{\omega}$ (τ^{ω}) leer sind und daß $\tau^{\omega} = \mathcal{L}^{\omega}$.

Theorem 1. Wenn für die Strömung $\{S_t\}$ ein $\mathfrak{S}_0$ existiert, das die Bedingungen (I) - (III) erfüllt, so ist bei $\Delta > 0$ $MH(\mathfrak{S}_{t+\Delta}/\mathfrak{S}_t) = h\Delta$, wobei h eine Konstante ist, die innerhalb der Grenzen $0 < h \leq \infty$ liegt.

Theorem 2. Die Konstante h für eine gegebene Strömung $\{S_t\}$ hängt nicht von der Wahl von $\mathfrak{S}_0$ ab, das die Bedingungen (I) - (III) erfüllt.

Wir nehmen hier den Beweis des Theorems 2 vor. Angenommen, den beiden $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_0'$ entsprächen $h < \infty$ und h'. Aufgrund des Theorems 1 und der Lemmata (α) und (ε) kann man für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein solches k finden, daß

(5)

gilt.

Aus (5) ergibt sich - infolge des Lemmas ([illegible]) - die Existenz eines solchen m, daß

(6)

gilt.

Aus (6) und den Lemmata (δ), (γ), (α) und (β) folgt (in der genannten Reihenfolge angewandt!):

(δ)

(γ)

(α)

(β)

. (7)

Da $\varepsilon > 0$ und n beliebig sind (wobei n nach dem Fixieren von k und m gewählt wird), folgt aus (7) die Ungleichung $h \leq h'$. Diese Ungleichung läßt sich völlig analog auch im Falle von $h = \infty$ beweisen. Analog wird auch die umgekehrte Ungleichung $h' \leq h$ bewiesen, womit auch der Beweis des Theorems 2 abgeschlossen ist.

§ 3. Die Invarianten der Automorphismen. Wenn man in § 2 voraussetzt, daß t nur ganze Werte annimmt, so wird $\{S_t\}$ eindeutig durch den Automorphismus $T = S_1$ bestimmt. Infolge der Theoreme 1 und 2 existiert eine Invariante $0 < h(T) \leq \infty$.

Es läßt sich leicht beweisen, daß jeder beliebige Automorphismus vom Typ τ_0 (der Index steht zur Unterscheidung von dem Fall von Strömungen mit stetiger ⟨fortlaufender⟩ Zeit) ein abzählbares ⟨mehrfaches⟩ Lebesguesches Spektrum hat, d.h. von den Klassen τ_0^ν ist nur die Klasse $\tau_0^\omega \subseteq \mathcal{L}_0^\omega$ nicht leer. Sie zerfällt bezüglich der Werte $h(T)$ in die Klassen $\tau_0^\omega(h)$.

Theorem 3. Für jedes beliebige h, $0 < h \leq \infty$, existiert ein Automorphismus, der zu $\tau_0^\omega(h)$ gehört.

Entsprechende Beispiele sind gut bekannt; man erhält sie beispielsweise aus einem Schema unabhängiger Zufallsversuche $\mathcal{L}_{-1}$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, .. $\mathcal{L}_t$,..mit Wahrscheinlichkeitsverteilung des Ausgangs ξ_t des Versuchs $\mathcal{L}_t$

.(8)

Der Raum M ist aus den Folgen $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots)$, $x_t = a_1, a_2, \ldots$, zusammengesetzt und die Verschiebung $Tx = x'$ wird mit der Formel $x_t = x_{t-1}$ bestimmt. Das Maß μ auf M wird als direktes Produkt der Wahrscheinlichkeitsmaße (8) definiert.

§ 4. Die Invarianten der Strömungen.

Theorem 4. Für jedes beliebige h, $0 < h < \infty$, existiert eine Strömung der Klasse $r^{\omega}(h)$, d.h. eine Strömung mit abzählbarem ⟨mehrfachem⟩ Lebesgueschem Spektrum und vorgegebenem Wert der Konstanten h.

Hinsichtlich einer Analogie mit § 3 taucht natürlich der Gedanke auf, für den Beweis des Theorems 4 anstelle des Schemas diskreter unabhängiger Versuche ein Schema von "Prozessen mit unabhängigem Zuwachs" oder von verallgemeinerten Prozessen "mit unabhängigen Werten" [12, 13] zu benutzen. Dieser Weg führt jedoch nur zu Strömungen der Klasse $r^{\omega}(\infty)$[5]. Um endliche Werte von h zu gewinnen ist es erforderlich, einen kunstvolleren Aufbau zu benützen. In dieser Skizze kann lediglich die *Beschreibung* einer dieser Konstruktionen gegeben werden.

Wir definieren die voneinander unabhängigen Zufallsgrößen ξ_n, die allen ganzen n entsprechen, durch die Verteilungen ihrer Werte: $P(\xi_0 = k) = 3/4^k$, $k = 1, 2, \ldots$, und bei $n \neq 0$ $P\{\xi_n = k\} = 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Den Punkt τ_0 auf der t - Achse ordnen wir im Falle $\xi_0 = k$ mit gleichmäßiger Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Abschnitt $-u/2^k \leq \tau_0 \leq 0$ an, und die Punkte τ_n für $n \neq 0$ bestimmen wir aus der Beziehung $\tau_{n+1} = \tau_n + u/2^{\xi_n}$.

Wir nehmen an $\varphi(t) = \xi_n$ bei $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß die Verteilung der Zufallsfunktion $\varphi(t)$ invariant in bezug auf die Verschiebungen $S_t\varphi(t_0) = \varphi(t_0 - t)$ ist. Man kann leicht berechnen, daß $h\{S_t\} = 6/u$ (auf eine Zeiteinheit entfällt im Durchschnitt: $3/u$ ⟨der⟩ Punkte τ_n, und auf jedes ξ_n kommt die Entropie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$).

Man kann eine anschaulichere Vorstellung von unserem Zufallsprozeß bekommen, wenn man in die Beschreibung seines Zustands $\omega(t)$ im Zeitpunkt t außer der Größe $\varphi(t)$ noch den Wert $\delta(t) = t - \tau^*(t)$ der Differenz zwischen t und dem am nächsten links von t gelegenen Punkt τ_n einschließt. Bei einer derartigen Beschreibungsweise ist unser Prozeß ein stationärer Markovscher Prozeß. Er verdient lediglich den Namen "quasiregulär" , da - obwohl das ihm entsprechende dynamische System transitiv ist - der Wert der Differenz $f(\omega(t), t) = \tau^*(t) = t - \delta(t)$ mit einer Genauigkeit bis zum dyadisch-rationalen Summanden durch das Verhalten der Realisierung des Prozesses in beliebig weiter Vergangenheit bestimmt wird.

Eingegangen am
21. 1. 1958

Literatur

1.	Rochlin, V.A.	Uspechi matemat. nauk, 4, 2 (30) (1949)
2.	Gel'fand, I.M. Fomin, S.V.	Uspechi matemat. nauk, 7, 1 (47) (1952)
3.	Fomin, S.V.	Ukr. matemat. žurnal, 2, No 2, (1950)
4.	Itô, K.	Japan J. Math., 22, 63 (1952)
5.	Itô, K.	Trans. Am. Math. Soc., 81, 253 (1956)
6.	Dž. l. Dub	Verojatnostnye processy ⟨Wahrscheinlichkeitsprozesse⟩, IL, 1956
7.	Shannon, C.E., Weaver, W.	The Mathematical Theory of Communications, 1949
8.	Gel'fand, I.M., Kolmogorov, A.N. Jaglom, A.M.	DAN, 111, No 4 (1956)
9.	Shannon, C.	Sborn. Teorija peredači električeskich signalov pri naličii pomech ⟨Sammelband. Theorie der Übertragung elektrischer Signale bei Vorhandensein von Störungen⟩, IL, 1953
10.	Plesner, A.I.	DAN, 23, No 4 (1939)
11.	Plesner, A.I.	DAN, 25, No 9 (1939)
12.	Itô, K.	Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 18, No 3 (1954)
13.	Gel'fand, I.M.	DAN, 100, No 5 (1955)

Anmerkung des Übersetzers

Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um die wörtliche Übersetzung bzw. eine Übersetzungsvariante.

Stuttgart, den 5.10.1970

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 119, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

НОВЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ТРАНЗИТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

Хорошо известно, что значительная часть метрической теории динамических систем может быть изложена как абстрактная теория «потоков» $\{S_t\}$ на «пространствах Лебега» M с мерой μ в терминах, инвариантных по отношению к «изоморфизмам по модулю нуль» (см. обзорную статью В. А. Рохлина ([1]), к которой дальнейшее изложение примыкает в отношении определений и обозначений). Меру на M мы будем предполагать нормированной условием

$$\mu(M) = 1 \tag{1}$$

и нетривиальной (т. е. предполагать существование множества $A \subseteq M$ с $0 < \mu(A) < 1$). Известно много примеров транзитивных автоморфизмов и транзитивных потоков с так называемым «счетнократным лебеговским спектром» (для автоморфизмов см. ([1]), § 4, для потоков ([2-5])). Со спектральной точки зрения мы имеем здесь один тип автоморфизмов $\mathfrak{L}_0^\omega$ и один тип потоков $\mathfrak{L}^\omega$. Вопрос о том, не являются ли все автоморфизмы типа $\mathfrak{L}_0^\omega$ (соответственно, потоки типа $\mathfrak{L}^\omega$) друг другу изоморфными mod 0, оставался до сих пор открытым. Мы показываем в §§ 3—4, что ответ на этот вопрос отрицателен как в случае автоморфизмов, так и в случае потоков. Новый инвариант, позволяющий расщепить класс автоморфизмов $\mathfrak{L}_0^\omega$ и класс потоков $\mathfrak{L}^\omega$ на континуум инвариантных подклассов, есть **энтропия на единицу времени**. В § 1 излагаются необходимые сведения из теории информации (вводимые здесь понятия условной энтропии и условной информации и их свойства имеют, вероятно, и более широкий интерес, хотя все изложение непосредственно примыкает к определению количества информации из ([7]) и многочисленным работам, развивающим это определение. В § 2 дается определение характеристики h и доказывается ее инвариантность. В §§ 3—4 указываются примеры автоморфизмов и потоков с произвольными значениями h в пределах $0 < h \leqslant \infty$. В случае автоморфизмов дело идет о примерах давно построенных, в случае потоков построение примеров с конечным h — задача более деликатная и связанная с некоторыми любопытными вопросами теории марковских процессов.

§ 1. **Свойства условной энтропии и условного количества информации.** В соответствии с ([1]), обозначаем через $\mathfrak{S}$ булевскую алгебру измеримых множеств пространства M, рассматриваемых mod 0. Пусть $\mathfrak{C}$ — замкнутая в метрике $\rho(A, B) = \mu((A - B) \cup (B - A))$ подалгебра алгебры $\mathfrak{S}$. Она порождает определенное mod 0 разбиение $\xi_{\mathfrak{C}}$ пространства M, определяемое тем условием, что $A \in \mathfrak{C}$ в том и только в том случае, когда mod 0 все A может быть составлено из полных элементов разбиения $\xi_{\mathfrak{C}}$. На элементах C разбиения $\xi_{\mathfrak{C}}$ определяется «каноническая система мер μ_C» ([1]). Для любого $x \in C$ будем считать

$$\mu_x(A \mid \mathfrak{C}) = \mu_C(A \cap C). \tag{2}$$

С точки зрения теории вероятностей (где любая измеримая функция элемента $x \in M$ называется «случайной величиной») случайная величина $\mu_x(A \mid \mathfrak{C})$ есть «условная вероятность» события A при известном исходе «испытания» $\mathfrak{C}$ ([6], гл. I, § 7).

Для трех подалгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{S}$ и $c \in \xi_{\mathfrak{C}}$ положим:

$$I_C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \sup \sum_{i,j} \mu_x(A_i \cap B_j) \log \frac{\mu_x(A_i \cap B_j)}{\mu_x(A_i)\,\mu_x(B_j)}, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всем конечным разложениям $M = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $M = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, для которых $A_i \cap A_j = N$, $B_i \cap B_j = N$, $i \neq j$, $A_i \in \mathfrak{A}$ $B_j \in \mathfrak{B}$ (N — пустое множество). Если $\mathfrak{C}$ есть тривиальная алгебра $\mathfrak{N} = \{N, M\}$, то (3) переходит в определение безусловной информации $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ из приложения 7 к ([7])*. Сама величина (3) интерпретируется как «количество информации в результатах испытания $\mathfrak{A}$ относительно испытания $\mathfrak{B}$ при известном исходе C испытания $\mathfrak{C}$». Если не фиксировать $C \in \xi_{\mathfrak{C}}$, то естественно рассматривать случайную величину $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$, которая при $x \in C$ равна $I_x(\mathfrak{A}; \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = I_C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$. Далее мы будем иметь дело с ее математическим ожиданием

$$\mathbf{M}\, I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \int_M I_x(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})\, \mu(dx). \tag{4}$$

Не требуют особых пояснений определения условной энтропии и средней условной энтропии $H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}) = I(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \mid \mathfrak{C})$, $\mathbf{M} H(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) = \int_M H_x(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}) \mu(dx)$.

Отметим те свойства условного количества информации и условной энтропии, которые нам понадобятся далее. Свойства (α) и (δ) для случая безусловных количества информации и энтропии общеизвестны, свойство (ε) для безусловного количества информации составляет содержание теоремы 2 из заметки ([8]). Свойства (β) и (γ) доказываются без труда. По поводу свойства (β) следует лишь заметить, что аналогичное предложение для количества информации (из $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{C}'$ вытекает: $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) \leqslant I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}')$) было бы уже ошибочным. С этим связано то обстоятельство, что в свойстве (ζ) стоит н и ж н и й п р е д е л и з н а к $\geqslant$: соответствующий предел может не существовать, а нижний предел может в некоторых случаях оказаться б о л ь ш е $\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$.

(α) $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) \leqslant H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C})$, *равенство заведомо достигается при* $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.

(β) *Если* $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{C}'$, *то* $H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}) \leqslant H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}')$, $\operatorname{mod} 0$.

(γ) *Если* $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}'$, *то* $\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \mid \mathfrak{C}) + \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}')$, *где* $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}'$ — *минимальная замкнутая алгебра, содержащая* $\mathfrak{C}$ *и* $\mathfrak{B}'$.

(δ) *Если* $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}'$, *то* $\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) \geqslant \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \mid \mathfrak{C})$.

(ε) *Если* $\mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \ldots$, $\bigcup_n \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$, *то* $\lim_{n \to \infty} \mathbf{M} I(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$.

(ζ) *Если* $\mathfrak{C}_1 \supseteq \mathfrak{C}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{C}_n \supseteq \ldots$, $\bigcap_n \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$, *то* $\liminf_{n \to \infty} \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}_n) \geqslant \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$.

§ 2. О п р е д е л е н и е и н в а р и а н т а h. Будем говорить, что поток $\{S_t\}$ квазирегулярен (имеет тип $\mathfrak{R}$), если** существует замкнутая подалгебра $\mathfrak{S}_0$ алгебры $\mathfrak{S}$, сдвиги которой $\mathfrak{S}_t = S_t \mathfrak{S}_0$ обладают следующими свойствами: (I) $\mathfrak{S}_t \subseteq \mathfrak{S}_{t'}$, если $t \leqslant t'$. (II) $\bigcup_t \mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}$. (III) $\bigcap_t \mathfrak{S}_t = \mathfrak{N}$.

---

* Авторы заметки ([8]) не обратили своевременно внимания на приложение 7 к ([7]), не включенное в русский перевод ([9]). Заметка ([8]) должна была бы начинаться со ссылки на это приложение к ([7]).

** Это условие значительно слабее, чем условия «регулярности», обычно употребляемые в теории случайных процессов. См. об этом в конце § 4.

При интерпретации потока как стационарного случайного процесса $\mathfrak{S}_t$ может рассматриваться как алгебра событий, «зависящих лишь от течения процесса до момента времени t». Легко доказывается, что потоки типа $\mathfrak{K}$ транзитивны, а из результатов Плеснера ([10], [11]) можно вывести, что они имеют однородный лебеговский спектр. Если кратность спектра равна ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \omega$), то отнесем поток к типу $\mathfrak{K}^\nu$. Очевидно, что $\mathfrak{K}^\nu \subseteq \mathfrak{L}^\nu$, где $\mathfrak{L}^\nu$ — класс потоков с лебеговским спектром однородной кратности ν. Возможно, впрочем, что все $\mathfrak{L}^\nu$ (и, следовательно, $\mathfrak{K}^\nu$), кроме $\mathfrak{L}^\omega(\mathfrak{K}^\omega)$, пусты и что $\mathfrak{K}^\omega = \mathfrak{L}^\omega$.

Теорема 1. *Если для потока $\{S_t\}$ существует $\mathfrak{S}_0$, удовлетворяющее условиям* (I) — (III), *то при $\Delta > 0$ $\mathbf{M}H(\mathfrak{S}_{t+\Delta} \mid \mathfrak{S}_t) = h\Delta$, где h — константа, лежащая в пределах $0 < h \leqslant \infty$.*

Теорема 2. *Константа h для данного потока $\{S_t\}$ не зависит от выбора $\mathfrak{S}_0$, удовлетворяющего условиям* (I)—(III).

Наметим здесь доказательство теоремы 2. Пусть двум $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_0'$ соответствуют $h < \infty$ и h'. В силу теоремы 1 и лемм (α) и (ε) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое k, что

$$h = \mathbf{M}H(\mathfrak{S}_{t+1} \mid \mathfrak{S}_t) = \mathbf{M}I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S} \mid \mathfrak{S}_t) \leqslant \mathbf{M}I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}'_{t+k} \mid \mathfrak{S}_t) + \varepsilon. \quad (5)$$

Из (5), в силу леммы (ζ), вытекает существование такого m, что

$$h \leqslant \mathbf{M}I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}'_{t+k} \mid \mathfrak{S}_t \vee \mathfrak{S}'_s) + 2\varepsilon \quad \text{при } t - s \geqslant m. \quad (6)$$

Из (6) и лемм (δ), (γ), (α), (β) (применять в указанном порядке!):

$$nh \leqslant \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{M}I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}'_{t+k} \mid \mathfrak{S}_t \vee \mathfrak{S}'_{-m}) + 2n\varepsilon \leqslant$$

$$(\delta)$$

$$\leqslant \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{M}I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}'_{n+k} \mid \mathfrak{S}_t \vee \mathfrak{S}'_{-m}) + 2n\varepsilon =$$

$$(\gamma)$$

$$= \mathbf{M}I(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}'_{n+k} \mid \mathfrak{S}_0 \vee \mathfrak{S}'_{-m}) + 2n\varepsilon \leqslant$$

$$(\alpha)$$

$$\leqslant \mathbf{M}H(\mathfrak{S}'_{n+k} \mid \mathfrak{S}_0 \vee \mathfrak{S}'_{-m}) + 2\varepsilon n \leqslant$$

$$(\beta)$$

$$\leqslant \mathbf{M}H(\mathfrak{S}'_{n+k} \mid \mathfrak{S}'_{-m}) + 2n\varepsilon =$$
$$= (n + k + m)h' + 2n\varepsilon,$$
$$h \leqslant \frac{n+k+m}{n} h' + 2\varepsilon. \quad (7)$$

Так как $\varepsilon > 0$ и n произвольны (причем n выбирается после фиксирования k и m), то из (7) вытекает неравенство $h \leqslant h'$. Это неравенство вполне аналогично доказывается и в случае $h = \infty$. Аналогично доказывается обратное неравенство $h' \leqslant h$, чем и заканчивается доказательство теоремы 2.

§ 3. Инварианты автоморфизмов. Если в § 2 считать, что t принимает только целые значения, то $\{S_t\}$ однозначно определяется автоморфизмом $T = S_1$. В силу теорем 1 и 2 существует инвариант $0 < h(T) \leqslant \infty$.

Легко доказывается, что любой автоморфизм типа $\mathfrak{K}_0$ (индекс стоит для отличия от случая потоков с непрерывным временем) имеет счетнократный лебеговский спектр, т. е. из классов $\mathfrak{K}_0^\nu$ не пуст только класс $\mathfrak{K}_0^\omega \subseteq \mathfrak{L}_0^\omega$. Он распадается по значениям $h(T)$ на классы $\mathfrak{K}_0^\omega(h)$.

Теорема 3. *Для любого h, $0 < h \leqslant \infty$, существует автоморфизм, принадлежащий $\mathfrak{K}_0^\omega(h)$.*

Соответствующие примеры хорошо известны и получаются, например, из схемы независимых случайных испытаний $\mathfrak{L}_{-1}, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_t, \ldots$ с распределением вероятностей исхода ξ_t испытания $\mathfrak{L}_t$

$$\mathbf{P}\{\xi_t = a_i\} = p_i, \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i = h. \tag{8}$$

Пространство M составляется из последовательностей $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots)$, $x_t = a_1, a_2, \ldots$, а сдвиг $Tx = x'$ определяется формулой $x'_t = x_{t-1}$. Мера μ на M определяется как прямое произведение вероятностных мер (8).

§ 4. Инварианты потоков.

Теорема 4. *Для любого h, $0 < h < \infty$, существует поток класса $\mathfrak{R}^{\omega}(h)$, т. е. поток со счетнократным лебеговским спектром и заданным значением константы h.*

По аналогии с § 3 естественно возникает идея — воспользоваться для доказательства теоремы 4 вместо схемы дискретных независимых испытаний схемой «процессов с независимыми приращениями», или обобщенных процессов «с независимыми значениями» ([12],[13]). Однако этот путь приводит лишь к потокам класса $\mathfrak{R}^{\omega}(\infty)$ ([5]). Для получения конечных значений h приходится воспользоваться более искусственным построением. В этой заметке возможно только дать описание одного из таких построений.

Определим взаимно независимые случайные величины ξ_n, соответствующие всем целым n, распределениями их значений: $\mathbf{P}(\xi_0 = k) = 3/4^k$, $k = 1, 2, \ldots$, а при $n \neq 0$ $\mathbf{P}\{\xi_n = k\} = 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Точку τ_0 на оси t расположим в случае $\xi_0 = k$ с равномерным распределением вероятностей на отрезке $-u/2^k \leqslant \tau_0 \leqslant 0$, а точки τ_n при $n \neq 0$ определим из соотношения $\tau_{n+1} = \tau_n + u/2^{\xi_n}$.

Положим $\varphi(t) = \xi_n$ при $\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$. Легко проверить, что распределение случайной функции $\varphi(t)$ инвариантно по отношению к сдвигам $S_t\varphi(t_0) = \varphi(t_0 - t)$. Легко подсчитать, что $h\{S_t\} = 6/u$ (на единицу времени падает в среднем $3/u$ точек τ_n, а на каждое ξ_n приходится энтропия $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$).

Можно получить более наглядное представление о нашем случайном процессе, если включить в описание его состояния $\omega(t)$ в момент времени t, кроме величины $\varphi(t)$, еще значение $\delta(t) = t - \tau^*(t)$ разности между t и ближайшей слева от t точки τ_n. При таком способе описания наш процесс оказывается стационарным марковским процессом. Он заслуживает лишь название «квазирегулярного», так как, хотя соответствующая ему динамическая система транзитивна, значение разности $f(\omega(t), t) = \tau^*(t) = t - \delta(t)$ определяется с точностью до двоично рационального слагаемого поведением реализации процесса в сколь угодно далеком прошлом.

Поступило
21 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, 4, 2 (30) (1949). [2] И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Усп. матем. наук, 7, 1 (47) (1952). [3] С. В. Фомин, Укр. матем. журн., 2, № 2, (1950). [4] K. Itô, Japan J. Math., 22, 63 (1952). [5] K. Itô, Trans. Am. Math. Soc., 81, 253 (1956). [6] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956. [7] C. E. Shannon, W. Weaver, The Mathematical Theory of Communications, 1949. [8] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом, ДАН, 111, № 4 (1956). [9] К. Шэннон, Сборн. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, 1953. [10] А. И. Плеснер, ДАН, 23, № 4 (1939). [11] А. И. Плеснер, ДАН, 25, № 9 (1939). [12] K. Itô, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 18, № 3 (1954). [13] И. М. Гельфанд, ДАН, 100, № 5 (1955).