1/80

Andreeva, L.P., Boguslavskaja, T.M. :

FORMEN DER SYMMETRIE VON HERMITESCHEN QUASINICHTEUKLIDISCHEN QUATERNIONEN- UND ANTIQUATERNIONEN-RÄUMEN UND EINES REELLEN QUASISYMPLEKTISCHEN RAUMES

In der vorliegenden Arbeit sind alle Formen der Symmetrie hermitescher quasielliptischer und quasihyperbolischer Quaternionen- und Antiquaternionenräume zu finden sowie eines reellen quasisymplektischen Raumes, dessen Fundamentalgruppe isomorph zur Bewegungsgruppe eines ⟨des⟩ hermiteschen Antiquaternionenraumes ist. Die §§ 1 und 2 wurden von T.M. Boguslavskaja, der § 3 von L.P. Andreeva verfaßt.

§ 1. Quasielliptische Quaternionenräume

Die Definition eines hermiteschen quasielliptischen Quaternionenraumes $\bar{S}_n^m(i, j)$ [1] unterscheidet man von der Definition eines reellen Raumes S_n^m [2] dadurch, daß in dieser Definition der reelle projektive Raum P_n durch einen projektiven Quaternionenraum $P_n(i, j)$ ([3], S. 578) und die quadratischen Formen

(1)

in den Gleichungen des Kegels Q_o und der Quadrik Q_1 durch die hermiteschen Formen

(2)

ersetzt werden, wodurch der Kegel Q_o und die Quadrik Q_1 hier ein hermitescher Kegel und eine hermitesche Quadrik sind. Daher wird man den Abstand δ zwischen den Punkten x und y des Raumes $\bar{S}_n^m(i, j)$, deren Koordinaten durch die Bedingung $\sum_\alpha' \bar{x}^a x^a = \bar{x}_o^T x_o = 1$ normiert sind, durch die Beziehung

(3)

bestimmen, und wenn $\delta = 0$ ist, wird der Abstand d zwischen den Punkten x und y ermittelt:

. (4)

Wenn $\delta \neq 0$ ist, dann heißt die Gerade xy elliptisch, wenn aber $\delta = 0$ ist – parabolisch.

Die Bewegungen des Raumes $\bar{S}^m_n(i, j)$, die ebenso wie im Falle des Raumes S^m_n bestimmt werden, und bei $n = 2m + 1$ die Kobewegungen dieses Raumes, die ebenso bestimmt werden wie im Raume S^m_{2m+1} [4], kann man jeweils in der folgenden Form

(5)

und

(6)

schreiben, wobei U_0 und U_1 – unitäre Matrizen jeweils der $(m + 1)$-ten bzw. $(n - m)$-ten Ordnung sind (bei $n = 2m + 1$ fallen ihre Ordnungen zusammen).

Die Formen der Symmetrie und Kosymmetrie werden durch involutorische Bewegungen und Kobewegungen ebenso bestimmt wie im Raume S^m_n, wobei die Matrizen der involutorischen Bewegungen des Raumes $\bar{S}^m_n(i, j)$ auf eine der folgenden Formen gebracht werden:

(7)

(8)

(9)

, (10)

wobei I_o und I_1 Einheitsmatrizen jeweils der $(m + 1)$-ten bzw. $(n - m)$-ten Ordnung sind; und $\tilde{E}_o$ und $\tilde{E}_1$ - Diagonalmatrizen der gleichen Ordnungen mit den Diagonalelementen ± 1 sind.

Es zeigt sich - ebenso wie im Falle des Raumes S_n^m [2] -, daß die involutorischen Bewegungen (5) mit diesen Matrizen jeweils Spiegelungen an einer singulären m-Ebene, die eine elliptische m-Ebene ist, an einer elliptischen p-Ebene kleinerer ⟨kleiner⟩ Dimension $(p < m)$ und ihrer quasielliptischen $(n - p - 1)$-Ebene, die durch die Ebene A_o verläuft, an einer quasielliptischen p-Ebene größerer ⟨großer⟩ Dimension $(p > m)$ und ihrer elliptischen $(n - p - 1)$-Ebene, die in der Ebene A_o liegt, und an einer polarisierten parabolischen p-Ebene und ihrer parabolischen $(n - p - 1)$-Polarebene, die sich mit der Ebene A_o schneiden und die Räume $\bar{S}_p^k(i, j)$ und $\bar{S}_{n-p-1}^{m-k-1}(i, j)$ sind, darstellen.

Im Falle des Raumes $\bar{S}_n^m(i, j)$ sind involutorische Bewegungen (5) auch Bewegungen, die auf die Form

(11)

gebracht werden können, die in der Form

(12)

geschrieben werden können.

Diese involutorische Bewegung ist die Spiegelung an einer *komplexen normalen n-Kette*, die isometrisch zum Raum $\bar{S}_n^m(i)$ ist.

Die involutorischen Kobewegungen (6) werden auf die Form

(13)

(14)

gebracht.

Diese Kobewegungen heißen Polartransformation bezüglich einer m e - t r i s c h e n h e r m i t e s c h e n Q u a d r i k bzw. eines Nullsystems, das ⟨den⟩ einen m e t r i s c h e n h e r m i t e s c h e n K o m p l e x bestimmt. Man kann zeigen, daß die stationären Untergruppen der Formen der Kosymmetrie, die durch die Kobewegungen (13) und (14) bestimmbar sind, jeweils isomorph zu einer ⟨der⟩ Bewegungsgruppe des Duoquaternionenraumes $\bar{S}_{\frac{n-1}{2}}$ (i, j, ε) und dem direkten Produkt aus der Bewegungsgruppe des Duoquaternionenraumes $\tilde{\bar{S}}_{\frac{n-1}{2}}$ (i, j, ε) mit der Bewegungsgruppe der Geraden R_1 sind; der von N.D. Pecko [5] bestimmte Raum $\tilde{\bar{S}}_n$(i, j, ε) und der analoge Raum $\bar{S}_n$(i, j, ε) bilden den projektiven Raum P_n(i, j, ε) ⟨unter⟩ der Duoquaternionenalgebra (unter der Algebra der Dual-Quaternionen), in dem die projektiven Metriken mit Hilfe der hermiteschen Quadriken vorgegeben sind:

, ⟨a⟩

wobei $x \to \bar{x}$ der Übergang zu einer ⟨der⟩ konjugierten Quaternion ist; und $x \to \tilde{x}$ - der Ersatz der Dualkoordinaten der Duoquaternion durch konjugierte Dualzahlen.

Wir führen eine vollständige Liste der Symmetrie- und Kosymmetrieformen des Raumes $\bar{S}_n^m$(i, j) an. In der ersten Spalte führen wir die kanonische Form der involutorischen Bewegung oder Kobewegung an; in der zweiten - den Namen der Symmetrie- oder Kosymmetrieform; in der dritten - den Raum, dessen Fundamentalgruppe die stationäre Untergruppe der Form ist. Hierbei ist $a = 0, 1, ..., p$; $u = p + 1, ..., n$; α durchläuft p beliebige Indizes $0, 1, ..., n$, die sich von $0, 1, ..., m$ unterscheiden; φ durchläuft die übrigen Indizes $0, 1, ..., n$.

Tabelle 1

$\bar{S}_n^m(i, j)$

1) Elliptische p-Ebene kleinerer ⟨kleiner⟩ Dimension

2) Elliptische m-Ebene

3) Quasielliptische p-Ebene größerer ⟨großer⟩ Dimension

4) Polarisierte parabolische p-Ebene

5) Normale komlexe n-Kette

6) Metrische hermitesche Quadrik

7) Metrischer hermitescher Komplex

Wir stellen fest, daß die Gerade $\bar{R}_1(i, j)$ isomorph zum Raum R_4 ([3], S. 576) ist und die Gruppe der Bewegungen der Geraden $\bar{R}_1(i, j)$, die sich als Quaternionen-Transformationen $'x = axb + c$ $(|a| = |b| = 1)$ darstellen, isomorph zur Bewegungsgruppe des Raumes R_4 ([3], S. 497) ist. Wir führen eine Vergleichstabelle der Symmetrie- und Kosymmetrieformen der Geraden $\bar{R}_1(i, j)$ und der Symmetrieformen des Raumes R_4 mit isomorphen stationären Untergruppen an. In der ersten Spalte dieser Tabelle wird die kanonische Form der involutorischen Bewegung oder Kobewegung aufgezeigt; in der zweiten - die Bezeichnung ⟨der Name⟩ der Symmetrie- oder Kosymmetrieform der Geraden $\bar{R}_1(i, j)$; in der dritten - die Bezeichnung der entsprechenden Symmetrieform des Raumes R_4; in der vierten - der Raum, dessen Fundamentalgruppe die stationären Untergruppen dieser Formen sind.

Tabelle 2

	$\overline{R}_1(i,\ j)$		R_4
1)	Punkt	1)	Punkt
2)	Metrischer hermitescher Komplex	2)	Gerade
3)	Normale komplexe Kette	3)	2-Ebene
4)	Metrische hermitesche Quadrik	4)	3-Ebene

§ 2. Quasihyperbolische Quaternionenräume

Die Definition eines quasihyperbolischen hermiteschen Quaternionen-n-Raumes $k^{\overline{l}}S_n^m\ (i,\ j)$ unterscheidet sich von der Definition eines reellen Raumes $^{kl}S_n^m$ [2] dadurch, daß in dieser Definition der Raum P_n durch den projektiven Quaternionenraum $P_n(i,\ j)$ ersetzt ist und die quadratischen Formen ⟨b⟩ und ⟨c⟩ in den Gleichungen des Kegels Q_o und der Quadrik Q_1 hier durch die hermiteschen Formen ⟨d⟩ und ⟨e⟩ ersetzt werden; infolgedessen sind der Kegel Q_o und die Quadrik Q_1 hier ein hermitescher Kegel und eine hermitesche Quadrik. Wenn man die Koordinaten x^i der Punkte, die nicht auf der Ebene A_o liegen, durch die Bedingung

(15)

normiert, wird der Abstand δ zwischen den Punkten x und y, für die in der Formel (15) das Vorzeichen das gleiche ist, nach der Formel

(16)

bestimmt.
Falls sich die Gerade xy mit dem Kegel Q_0 in imaginären oder reellen Punkten schneidet, die nicht zur Ebene A_0 gehören, dann heißt sie elliptisch bzw. hyperbolisch; in diesem Fall ist $\delta \neq 0$.
Falls sich die Gerade xy mit der Ebene A_0 schneidet, heißt sie parabolisch; in diesem Fall ist $\delta = 0$, und zwischen den Punkten x und y wird der Abstand d definiert:

. (17)

Die Bewegungen des Raumes $^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$, die ebenso wie im Raum $^{kl}S_n^m$ bestimmt werden sowie bei $n = 2m + 1$ und $k = 1$ die Kobewegungen dieses Raumes, die ebenso wie im Raum $^{el}S_{2m+1}^m$ [3] bestimmt werden, kann man in der Form (5) bzw. (6) schreiben, wobei die Matrizen U_0 und U_1 pseudounitäre Matrizen sind, im ersten Fall der Indizes k und l, und im zweiten Fall des Indexes l.

Die Symmetrie- und Kosymmetrieformen werden ebenso wie beim Raum $^{kl}S_n^m$ bestimmt, wobei die Matrizen der involutorischen Bewegungen des Raumes $^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$ wie auch im Fall des Raumes $\overline{S}_n^m(i, j)$ auf eine der Formen (7 - 10) sowie auf die Form (12) gebracht werden.

Bei $n = 2m + 1$ und $k = 1$ existieren - wenn der Raum $^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$ nach dem Dualitätsprinzip sich selbst entspricht, - in ihm involutorische Kobewegungen, die auf die Form (13) und (14) gebracht werden können.

Wir führen eine vollständige Liste der Symmetrie- und Kosymmetrieformen des Raumes $^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$ in einer Tabelle der gleichen Art wie in § 1 (S. 49) an.

Tabelle 3

$${}^{kl}\overline{S}_n^{\,m}\ (i,\ j)$$

1) hyperbolische oder elliptische p-Ebene kleinerer ⟨kleiner⟩ Dimension

2) hyperbolische oder elliptische m-Ebene

3) quasihyperbolische oder quasielliptische p-Ebene größerer ⟨großer⟩ Dimension

4) polarisierte parabolische p-Ebene

5) komplexe normale n-Kette

6) metrische hermitesche Quadrik

7) metrischer hermitescher Komplex

§ 3. Ein reeller quasisymplektischer und quasielliptischer Antiquaternionenraum

Die Definition eines quasielliptischen hermiteschen Antiquaternionenraumes $\overline{S}_n^{\,m}(i,\ e)$ [6] unterscheidet sich von der Definition des Raumes $\overline{S}_n^{\,m}(i,\ j)$ dadurch, daß der Raum $P_n\ (i,\ j)$ durch den Antiquaternionenraum $P_n\ (i,\ e)$ ersetzt wird ([3], S. 578). Die Abstände δ und d zwischen den Punkten des Raumes $\overline{S}_n^{\,m}(i,\ e)$ werden nach den Formeln (3) und (4) bestimmt, und die Bewegungen und Kobewegungen haben die Form (5) und (6). Die Symmetrie- und Kosymmetrieformen des Raumes $\overline{S}_n^{\,m}(i,\ e)$ werden ebenso wie im Raume $\overline{S}_n^{\,m}\ (i,\ j)$ ermittelt.

Die Räume $\overline{S}_n(i,\ e,\ \varepsilon)$ und $\tilde{S}_n(i,\ e,\ \varepsilon)$ ⟨über⟩ der Algebra der Duoantiquaternionen (der Dual-Antiquaternionen) werden genauso bestimmt, wie die analogen Räume ⟨über⟩ der Algebra der Duoquaternionen.

Wir führen eine vollständige Liste der Symmetrie- und Kosymmetrieformen des Raumes $\overline{S}_n^m$ (i, e) in Form einer Tabelle der gleichen Art wie auch in § 1 an (S. 50).

Tabelle 4

$\overline{S}_n^m(i, e)$

1) elliptische p-Ebene kleinerer Dimension

2) elliptische m-Ebene

3) quasielliptische p-Ebene größerer Dimension

4) polarisierte parabolische p-Ebene

5) normale komplexe n-Kette

6) [illegible]

Wir führen eine vollständige Liste der Symmetrie- und Kosymmetrieformen des Raumes $\overline{S}_n^m$ (i, e) in Form einer Tabelle der gleichen Art wie auch in § 1 an (S. 50).

Tabelle 4

$\overline{S}_n^m(i, e)$

1) elliptische p-Ebene kleinerer Dimension
2) elliptische m-Ebene
3) quasielliptische p-Ebene größerer Dimension
4) polarisierte parabolische p-Ebene
5) normale komplexe n-Kette
6) normale komplexe n-Pseudokette
7) normale Doppel-n-Kette
8) metrische hermitesche Quadrik
9) metrischer hermitescher Komplex

Wir führen eine Vergleichstabelle der Symmetrie- und Kosymmetrieformen des Raumes $\overline{S}_n^m(i, e)$ und des reellen quasisymplektischen Raumes Sp_{2n+1}^{2m+1} an; die Gruppe symplektischer Transformationen dieses Raumes ist - wie in [6] gezeigt wird - isomorph zur Bewegungsgruppe des Raumes $\overline{S}_n^m$ (i, e) (S. 51).

Tabelle 5

Sp_{2n+1}	$S_n^m(i, e)$
1) nicht-triviale (2p+1)-Ebene kleinerer Dimension	1) elliptische p-Ebene kleinerer Dimension
2) nicht-triviale(2m+1)-Ebene	2) elliptische m-Ebene
3)nicht-triviale (2p+1)-Ebene größerer Dimension	3) quasielliptische p-Ebene größerer Dimension
4) parabolische (2p+1)-Ebene und (2n-2p-1)-Ebene, die in einem absoluten Nullsystem einander entsprechen	4) polarisierte parabolische p-Ebene 5) normale komlexe n-Kette
5) symplektische Kongruenzen	6) normale komlexe n-Pseudokette 7) normale Doppel-n-Kette
6) symplektischer linearer Komplex	8) metrische hermitesche Quadrik
7) symplektische Quadrik	9) metrischer hermitescher Komplex

Wir stellen fest, daß die Gerade $R_1(i, e)$ isometrisch zum Raum $^2R_4$ ist ([3], S. 576) und die Gruppe der Bewegungen der Geraden $\bar{R}_1(i, 1)$, die Antiquaternionen-Transformationen sind $'x = axb + c$ ($|a| = |b| = 1$ oder i) isomorph zur Bewegungsgruppe des Raumes $^2R_4$ ist ([3], S. 497). Wir führen eine Vergleichstabelle der Symmetrie- und Kosymmetrieformen der Geraden $\bar{R}_1(i, e)$ und des Raumes Sp_3^1 und der Symmetrieformen des Raumes $^2R_4$ mit isomorphen stationären Untergruppen an (S. 52).

Tabelle 6

Sp^1_3	$\overline{R}_1(i, e)$	$^2R_4$
1) Nicht-triviale Gerade	1) Punkt	1) Punkt
2) Symplektische Quadrik	2) Metrischer hermitescher Komplex	2) Gerade
	3) Normale komlexe Kette	3) Euklidische 2-Ebene
3) Symplektische Kongruenzen	4) Normale Doppelkette	4) Pseudoeuklidische 2-Ebene
4) Symplektischer linearer Komplex	5) Metrische hermitesche Quadrik	5) 3-Ebene

L i t e r a t u r

1. T.M. Klimanova (-Boguslavskaja) — Unitarnye poluelliptičeskie prostranstva. ⟨Unitäre halbelliptische Räume⟩. Izvestija AN Azerb. SSR, serija fiz.-matem. i techn. nauk, No 3, 1963, S. 21-29

2. B.A. Rozenfel'd, N.I. Adamuško, L.M. Karpova und L.V. L'vova — Obrazy simmetrii i antisimmetrii veščestvennych kvazineevklidovych prostranstv ⟨Symmetrie- und Antisymmetrieformen reeller quasinichteuklidischer Räume⟩. Učenye zapiski MOPI (S. 3 - 22) (diese Ausgabe ⟨Nummer⟩)

3. B.A. Rozenfel'd — Neevklidovy geometrii ⟨Nichteuklidische Geometrien⟩ M., 1965

4. L.M. Karpova, L.V. Konjaeva und L.V. L'vova — Kodviženija i obrazy kosimmetrii prostranstv s proektivnoj metrikoj ⟨Kobewegungen und Kosymmetrieformen von Räumen mit projektiver Metrik⟩. Učenye zapiski Orechovo-Zuevskogo pedinstituta, t. 30, No 4, 1967, S. 163-172

5. Pecko, N.D. — Bikvaternionnye elliptičeskie prostranstva i ich primenenie k veščestvennym geometrijam ⟨Elliptische Biquaternionenräume und ihre Anwendung auf reelle Geometrien⟩ "Proektivnye metriki". ⟨Projektive Metriken⟩. Učenye zapiski KPI, t. 8, 1965, S. 144-164

6. L.P. Andreeva, L.V. Šestyreva — Predel'nye simplektičeskie prostranstva ⟨Symplektische Grenzräume⟩ "Proektivnye metriki" ⟨Projektive Metriken⟩. Učenye zapiski KPI, t.6, 1965, S. 23-24

Anmerkung des Übersetzers:

Bei den Termini in ⟨⟩ handelt es sich um die wörtliche Übersetzung bzw. ein Übersetzungsvariante.

Stuttgart, den 17.2.1971

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

морфна прямому произведению группы движений плоскости ${}^1S_2$ на изоморфную ей группу паратактических сдвигов пространства ${}^2S_3$, во втором случае — прямому произведению группы движений плоскости R_2 на изоморфную ей группу паратактических сдвигов пространства $S_3{}^1$, в третьем случае — прямому произведению группы движений плоскости ${}^1R_2$ на изоморфную ей группу паратактических сдвигов пространства ${}^{10}S_3{}^1$. Геометрическими ковариантами двух образов симметрии одного вида являются 3 общих перпендикуляра, представляющие собой, соответственно, параболические, гиперболические и эллиптические прямые, причем в двух последних случаях две из этих трех прямых лежат в абсолютной 3-плоскости, а третья вне ее. Метрическими инвариантами двух образов симметрии одного вида являются длины общих перпендикуляров φ_0, φ_1 и φ_2 или a, b и c, которые также связаны условием (20) или (47).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. М., 1955.
2. Б. А. Розенфельд и Л. М. Карпова. Флаговые группы и сжатие группы Ли. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, вып. 13, 1966, стр. 168—202.
3. Г. Фрейденталь. Октавы, особые группы и октавная геометрия (сборник переводов), «Математика», т. 1, № 1, 1957, стр. 117—153.
4. Б. А. Розенфельд. Образы простоты и полупростоты. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, вып. 12, 1963, стр. 269—285.
5. G. I. Schellekens, On a hexagonic structure Proceedings Konink1 Akad. Wetenschappen, т. A65, 1962, стр. 201—234.
6. Д. Б. Персиц. Геометрия над вырожденными октавами. Доклады АН СССР, т. 173, № 5, 1967, стр. 1010—1013.
7. Д. Б. Персиц. Вырожденные октавы и проективная геометрия «Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии». Ученые записки МГПИ им. Ленина, 1967, стр. 299—328.
8. И. М. Яглом, Б. А. Розенфельд и Е. У. Ясинская. Проективные метрики, Успехи матем. наук, т. 19, № 5, 1964, стр. 51—113.

Л. П. АНДРЕЕВА, Т. М. БОГУСЛАВСКАЯ

ОБРАЗЫ СИММЕТРИИ КВАТЕРНИОННЫХ И АНТИКВАТЕРНИОННЫХ ЭРМИТОВЫХ КВАЗИНЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ВЕЩЕСТВЕННОГО КВАЗИСИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе находятся все образы симметрии кватернионных и антикватернионных эрмитовых квазиэллиптических и квазигиперболических пространств, а также вещественного квазисимплектического пространства, фундаментальная группа которого изоморфна группе движений антикватернионного эрмитова пространства. §§ 1 и 2 написаны Т. М. Богуславской, § 3 — Л. П. Андреевой.

§ 1. Кватернионные квазиэллиптические пространства

Определение кватернионного эрмитова квазиэллиптического пространства $\overline{S}_n{}^m(i, j)$ [1] отличаются от определения вещественного пространства $S_n{}^m$ [2] тем, что в этом определении вещественное проективное пространство P_n заменяется кватернионным проективным пространством $P_n(i, j)$ ([3], стр. 578), а квадратичные формы

$$\sum_a (x^a)^2 = x_0{}^T x_0 \quad \text{и} \quad \sum_u (x^u)^2 = x_1{}^T x_1 \tag{1}$$

в уравнениях конуса Q_0 и квадрики Q_1 заменяются эрмитовыми формами

$$\sum_a \bar{x}^a x^a = \bar{x}_0{}^T x_0 \quad \text{и} \quad \sum_u \bar{x}^u x^u = \bar{x}_1{}^T x_1 \tag{2}$$

вследствие чего конус Q_0 и квадрика Q_1 являются здесь эрмитовыми конусом и квадрикой. Поэтому расстояние δ между точками x и y пространства $\overline{S}_n^m(i,j)$, ординаты которых нормированы условием $\sum_a \overline{x}^a x^a = \overline{x}_0^{\mathrm{T}} x_0 = 1$, определятся соотношением

$$\cos^2 \delta = \overline{x}^{\mathrm{T}}_0 y_0 \cdot \overline{y}_0^{\mathrm{T}} x_0, \tag{3}$$

а в том случае, когда $\delta = 0$, между точками x и y определяется расстояние d:

$$d^2 = (\overline{x}_1^{\mathrm{T}} - \overline{y}_1^{\mathrm{T}})(x_1 - y_1). \tag{4}$$

В случае, когда $\delta \neq 0$, прямая xy называется эллиптической, а в случае, когда $\delta = 0$ — параболической.

Движения пространства $\overline{S}^m_n\ (i,j)$, определяемые так же, как в случае пространства S^m_n, и при $n = 2m + 1$ кодвижения этого пространства, определяемые так же, как в пространстве S^m_{2m+1} [4], можно записать, соответственно, в виде

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= U_0 x_0 \\ x_1' &= T x_0 + U_1 x_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \overline{x}_0^{\mathrm{T}} T + \overline{x}_1^{\mathrm{T}} U_0 \\ u_1 &= \overline{x}_4^{\mathrm{T}} U_0 \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

где U_0 и U_1 — унитарные матрицы, соответственно, $(m+1)$-го и $(n-m)$-го порядков (при $n = 2m+1$ их порядки совпадают).

Образы симметрии и косимметрии определяются инволюционными движениями и кодвижениями так же, как в пространстве S_n^m причем матрицы инволюционных движений пространства $\overline{S}_n^m\ (i, j)$ приводятся к одному из видов:

$$\begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\frown}{E}_0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & \overset{\frown}{E}_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{Bmatrix} \overset{\frown}{E}_0 & 0 \\ 0 & \overset{\frown}{E}_1 \end{Bmatrix}, \tag{10}$$

где I_0 и I_1 — единичные матрицы, соответственно, $(m+1)$-го и $(n-m)$-го порядков, а $\overset{\frown}{E}_0$ и $\overset{\frown}{E}_1$ — диагональные матрицы тех же порядков с диагональными элементами ± 1.

Так же, как в случае пространства S_n^m [2] показывается, что инволюционные движения (5) с этими матрицами являются, соответственно, отражениями от особенной m-плоскости, являющейся эллиптической m-плоскостью, от эллиптической p-плоскости малой размерности $(p < m)$ и ее квазиэллиптической $(n-p-1)$-плоскости, проходящей через плоскость A_0, от квазиэллиптической p-плоскости большой размерности $(p > m)$ и ее эллиптической $(n-p-1)$-плоскости, лежащей в плоскости A_0, и от поляризованной параболической p-плоскости и ее полярной параболической $(n-p-1)$-плоскости, пересекающихся с плоскостью A_0 и являющихся пространствами $\overline{S}_p^k(i, j)$ и $\overline{S}^{m-k-1}_{n-p-1}(i, j)$.

В случае пространства $\overline{S}_n^m(i, j)$ инволюционными движениями (5) являются также движения, приводимые к виду

$$'x^i = ix^i, \tag{11}$$

которые можно записать в виде

$$'x^i = ix^i\, i^{-1} \tag{12}$$

Это инволюционное движение является отражением от *комплексной нормальной n-цепи*, изометричной пространству $\overline{S}_n^m(i)$.

Инволюционные кодвижения (6) приводятся к виду

$$u_{2i} = \overline{x}^{2i+1}, \quad u_{2i+1} = \overline{x}^{2i}, \tag{13}$$

$$u_{2i} = \overline{x}^{2i+1}, \quad u_{2i+1} = -\overline{x}^{2i}. \tag{14}$$

Эти кодвижения называются, соответственно, полярным преобразованием относительно *метрической эрмитовой квадрики* и нуль-системой, определяющей *метрический эрмитов комплекс*. Можно показать, что стационарные подгруппы образов косимметрии, определяемых кодвижениями (13) и (14), соответственно, изоморфны группе движений дукватернионного пространства $\overline{S}_{\frac{n-1}{2}}(i, j, \varepsilon)$ и прямому произведению группы движений дукватернионного пространства $\overset{\frown}{S}_{\frac{n-1}{2}}(i, j, \varepsilon)$ на группу движений прямой R_1; пространство $\overset{\frown}{S}_n(i, j, \varepsilon)$, определенное Н. Д. Пецко [5] и аналогичное пространство $\overline{S}_n(i, j, \varepsilon)$ представляют собой проективное пространство $P_n(i, j, \varepsilon)$ под алгеброй дукватернионов (дуальных кватернионов), в котором заданы проективные метрики с помощью эрмитовых квадрик

$$\sum \overset{\backsim}{\bar{x}}{}^i x^i = 0 \quad \text{и} \quad \sum \bar{x}^i x^i = 0,$$

где $x \longrightarrow \bar{x}$ — переход к сопряженному кватерниону, а $x \longrightarrow \overset{\backsim}{x}$ — замена дуальных координат дуокватерниона сопряженными дуальными числами.

Приведем полный список образов симметрии и косимметрии пространства $\bar{S}_n{}^m(i, j)$. В первом столбце мы укажем канонический вид инволюционного движения или кодвижения, во втором — название образа симметрии или косимметрии, в третьем — пространство, фундаментальной группой которого является стационарная подгруппа образа. Здесь $a = 0, 1,\ldots,p$; $u = p+1,\ldots,n$; α пробегает p произвольных индексов $0, 1,\ldots,n$ отличных от $0, 1,\ldots,m$, φ пробегает остальные индексы $0, 1,\ldots,n$.

$\bar{S}_n{}^m(i, j)$

$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p<m)$	Эллиптическая p-плоскость малой размерности	$\bar{S}_p(i,j) \times \bar{S}^{m-p-1}_{n-p-1}(i,j)$
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p=m)$	Эллиптическая m-плоскость	$\bar{S}_m(i,j) \times \bar{S}_{n-m-1}(i,j)$
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p>m)$	Квазиэллиптическая p-плоскость большой размерности	$\bar{S}_p{}^m(i, j) \times \bar{S}_{n-p-1}(i, j)$
$'x^\alpha = x^\alpha,\ 'x^\varphi = -x^\varphi$	Поляризованная параболическая p-плоскость	$\bar{S}_p{}^k(i, j) \times \bar{S}^{m-k-1}_{n-p-1}(i, j)$
$'x = i x^i i^{-1}$	Нормальная комплексная n-цепь	$\bar{S}_n{}^m(i) \times S_1$
$u_{2i} = \bar{x}^{2i+1},\ u_{2i+1} = \bar{x}^{2i}$	Метрическая эрмитова квадрика	$\bar{S}_{\frac{n-1}{2}}(i, j, \varepsilon)$
$u_{2i} = \bar{x}^{2i+1},\ u_{2i+1} = -\bar{x}^{2i}$	Метрический эрмитов комплекс	$\overset{\backsim}{S}(i, j, \varepsilon) \times R_1$

Заметим, что прямая $\bar{R}_1(i, j)$ изоморфна пространству R_4 ([3], стр. 576), а группа движений прямой $\bar{R}_1(i, j)$, представляющихся кватернионными преобразованиями $'x = axb + c$ ($|a| = |b| = 1$), изоморфна группе движений пространства R_4 ([3], стр. 497). Приведем сравнительную таблицу образов симметрии и косимметрии прямой $\bar{R}_1(i, j)$ и образов симметрии пространства R_4 с изоморфными стационарными подгруппами. В первом столбце этой таблицы указывается канонический вид инволюционного движения или кодвижения; во втором — название образа симметрии или косимметрии прямой $\bar{R}_1(i, j)$, в третьем — название соответствующего образа симметрии пространства R_4; в четвертом — пространство, фундаментальной группой которого являются стационарные подгруппы этих образов.

	$\bar{R}_1(i,j)$	R_4	
$'x = -x$	Точка	Точка	S_3
$'x = \bar{x}$	Метрический эрмитов комплекс	Прямая	$S_2 \times R_1$
$'x = i x i^{-1}$	Нормальная комплексная цепь	2-плоскость	$R_1(i) \times S_1 = R_2 \times S_1$
$'x = -\bar{x}',\ \bar{x} = i\bar{x}i^{-1}$	Метрическая эрмитова квадрика	3-плоскость	R_3

§ 2. Кватернионные квазигиперболические пространства

Определение кватернионного эрмитова квазигиперболического n-пространства $k^l\bar{S}_n{}^m$ (i, j) отличается от определения вещественного пространства $^{kl}S_n{}^m$ [2] тем, что в этом определении пространство P_n заменено кватернионным проективным пространством P_n (i, j), а квадратичные формы $\sum_a \varepsilon_a (x^a)^2 = x_0^T E_0 x_0$ и $\sum_u \varepsilon_u (x^u)^2 = x_1^T E_1 x_1$ в уравнениях конуса Q_0 и квадрики Q_1 заменяются здесь эрмитовыми формами $\sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a x^a = \bar{x}_0^T E_0 x_0$ и $\sum_u \varepsilon_u \bar{x}^u x^u = \bar{x}_1^T E_1 x_1$, вследствие чего конус Q_0 и квадрика Q_1 здесь являются эрмитовыми конусом и квадрикой. Если нормировать координаты x^i точек, не лежащих на плоскости A_0, условием

$$\sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a x^a = \bar{x}_0^T E_0 x_0 = 1, \tag{15}$$

расстояние δ между точками x и y, для которых знак в формуле (15) одинаков, определяется по формуле

$$\cos^2 \delta = \bar{x}_0^T E_0 y_0 \cdot \bar{y}_0^T E_0 x_0 \tag{16}$$

В том случае, когда прямая xy пересекается с конусом Q_0 в мнимых или вещественных точках, не принадлежащих к плоскости A_0, она называется, соответственно, эллиптической или гиперболической, в этом случае $\delta \neq 0$. В том случае, когда прямая xy пересекается с плоскостью A_0, она называется параболической; в этом случае $\delta = 0$, и между точками x и y определяется расстояние d:

$$\alpha^2 = (\overline{x}_1^{\mathrm{T}} - \overline{y}_1^{\mathrm{T}}) E_1 (x_1 - y_1) \tag{17}$$

Движения пространства ${}^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$, определяемые так же, как в пространстве ${}^{kl}S_n^m$ и при $n = 2m + 1$ и $k = 1$, кодвижения этого пространства, определяемые так же, как в пространстве ${}^{el}S_{2m-1}^m$ [3], можно записать, соответственно, в виде (5) и (6), где матрицы U_0 и U_1 — псевдоунитарные матрицы, в первом случае, индексов k и l, а во втором случае индекса l.

Образы симметрии и косимметрии определяются так же, как в случае пространства ${}^{kl}S_n^m$, **причем матрицы инволюционных движений пространства** ${}^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$, **как и в случае** пространства $\overline{S}_n^m(i, j)$, приводятся к одному из видов (7—10), а также к виду (12).

При $n = 2m + 1$ и $k = l$, когда пространство ${}^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$, соответствует самому себе по принципу двойственности, в нем имеются инволюционные кодвижения, приводящиеся к виду (13) и (14).

Приведем полный список образов симметрии и косимметрии пространства ${}^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$ в виде таблицы такого же вида, как в § 1 (стр. 49).

§ 3. Антикватернионное квазиэллиптическое и вещественное квазисимплектическое пространство

Определение антикватернионного эрмитова квазиэллиптического пространства $\overline{S}_n^m(i, e)$ [6] отличается от определения пространства $\overline{S}_n^m(i, j)$ заменой пространства $P_n(i, j)$ антикватернионным пространством $P_n(i, e)$ ([3], стр. 578). Расстояния δ и d между точками пространства $\overline{S}_n^m(i, e)$ определяются по формулам (3) и (4), а движения и кодвижения имеют вид (5) и (6). Образы симметрии и косимметрии пространства $\overline{S}_n^m(i, e)$ определяются так же, как в пространстве $\overline{S}_n^m(i, j)$.

Пространства $\overline{S}_n(i, e, \varepsilon)$ и $\hat{\overline{S}}_n(i, e, \varepsilon)$ над алгеброй дуоантикватернионов (дуальных антикватернионов) определяются так же, как аналогичные пространства над алгеброй дуокватернионов.

Приведем полный список образов симметрии и косимметрии пространства $\overline{S}_n^m(i, e)$ в виде таблицы такого же вида, что и в § 1 (стр. 50).

${}^{kl}\overline{S}_n^m(i, j)$

$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p < m)$	гиперболическая или эллиптическая p-плоскость малой размерности	${}^h\overline{S}_p(i, j) \times {}^{k-h, l}\overline{S}_{n-p-1}^{m-p-1}(i, j)$
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p = m)$	гиперболическая или эллиптическая m-плоскость	${}^k\overline{S}_m(i, j) \times {}^l\overline{S}_{n-m-1}(i, j)$
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p > m)$	квазигиперболическая или квазиэллиптическая p-плоскость большой размерности	${}^{kh}\overline{S}_p^m(i, j) \times {}^{l-h}\overline{S}_{n-p-1}(i, j)$
$'x^a = x^a,\ 'x^\varphi = -x^\varphi$	поляризованная параболическая p-плоскость	${}^{gh}\overline{S}_p^j(i, j) \times {}^{k-g,\ l-h}\overline{S}_{n-p-1}^{m-j-1}(i, j)$
$x^i = i x^i i^{-1}$	комплексная нормальная n-цепь	${}^{kl}S_n^{\overline{m}}(i) \times S_1$
$u_{2l} = \overline{x}^{l+1},\ u_{2l+1} = \overline{x}^{2l}$	метрическая эрмитова квадрика	${}^l\overline{S}_{\frac{n-1}{2}}(i, j, \varepsilon)$
$u_{2l} = \overline{x}^{2l+1},\ u_{2l+1} = \overline{x}^{l}$	метрический эрмитов комплекс	${}^l\overline{S}_{\frac{n-1}{2}}(i, j, \varepsilon) \times R_1$

	$\bar{S}_n{}^m(i, e)$	
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p<m)$	эллиптическая p-плоскость малой размерности	$\bar{S}_p(i, e) \times \bar{S}^{m-p-1}_{n-p-1}(i, e)$
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p=m)$	эллиптическая m-плоскость	$\bar{S}_m(i, e) \times \bar{S}_{n-m-1}(i, e)$
$'x^a = x^a,\ 'x^u = -x^u (p>m)$	квазиэллиптическая p-плоскость большой размерности	$\bar{S}_p{}^m(i, e) \times \bar{S}_{n-p-1}(i, e)$
$'x^\alpha = x^\alpha,\ 'x^\varphi = -x^\varphi$	поляризованная параболическая p-плоскость	$\bar{S}_p{}^k(i, e) \times \bar{S}^{m-k-1}_{n-p-1}(i, e)$
$'x^l = i x^l i^{-1}$	нормальная комплексная n-цепь	$\bar{S}_n{}^m(i) \times S_1$
$'x^\alpha = i x^\alpha i^{-1}$ $x^\varphi = -i x^\varphi i^{-1}$,	нормальная комплексная n-псевдоцепь	${}^{kl}\bar{S}_n{}^m(i) \times S_1$
$'x^i = e x^i e$	нормальная **двойная n-цепь**	$\bar{S}_n{}^m(e) \times {}^1S_1$
$u_{2i} = \bar{x}^{2i+1},\quad u_{2i+1} = \bar{x}^{2i}$	метрическая эрмитова квадрика	$\bar{S}^{\frac{m-1}{2}}_{\frac{n-1}{2}}(i, e, \varepsilon)$
$u_{2i} = \bar{x}^{2i+1},\quad u_{2i+1} = -\bar{x}^{2i}$	метрический эрмитов комплекс	$\overset{\backsim}{S}{}^{\frac{m-1}{2}}_{\frac{n-1}{2}}(i, e, \varepsilon) \times R_1$

	Sp_{2n+1}	$S_n{}^m(i, e)$	
$'x^{2a}=x^{2a},\ 'x^{2a+1}=x^{2a+1}$ $'x^{2u}=-x^{2u},\ 'x^{2u+1}=-x^{2u+1}(p<m)$	ненулевая $(2p+1)$-плоскость малой размерности	эллиптическая p-плоскость малой размерности	$Sp_{2p+1} \times Sp^{2m-2p-1}_{2n-2p-1} =$ $=\bar{S}_p(i, e) \times \bar{S}^{m-p-1}_{n-p-1}(i, e)$
$'x^{2a}=x^{2a},\ 'x^{2a+1}=x^{2a+1}$ $'x^{2u}=-x^{2u},\ 'x^{2u+1}=-x^{2u+1}(p=m)$	ненулевая $(2m+1)$-плоскость	эллиптическая m-плоскость	$Sp_{2m+1} \times Sp_{2n-2m-1} =$ $=\bar{S}_m(i, e) \times \bar{S}_{n-m-1}(i, e)$
$'x^{2a}=x^{2a},\ 'x^{2a+1}=x^{2a+1}$ $'x^{2u}=-x^{2u},\ 'x^{2u+1}=-x^{2u+1}(p>m)$	ненулевая $(2p+1)$-плоскость большой размерности	квазиэллиптическая p-плоскость большой размерности	$Sp^{2m+1}_{2p+1} \times Sp_{2n-2p-1} =$ $=\bar{S}_p{}^m(i, e) \times \bar{S}_{n-p-1}(i, e)$
$'x^{2\alpha}=x^{2\alpha},\ 'x^{2\alpha+1}=x^{2\alpha+1}$ $'x^{2\varphi}=-x^{2\varphi},\ 'x^{2\varphi+1}=-x^{2\varphi+1}$	параболические $(2p+1)$-плоскость и $(2n-2p-1)$-плоскость соответствующие друг другу в абсолютной нуль-системе	поляризованная параболическая p-плоскость	$Sp^{2k+1}_{2p+1} \times Sp^{2m-2k-1}_{2n-2p-1} =$ $= \bar{S}_p{}^k(i, e) \times \bar{S}^{m-k-1}_{n-p-1}(i, e)$
$'x^{2l}=x^{2l+1},\ 'x^{2l+1}=-x^{2l}$		нормальная комплексная n-цепь	$\bar{S}_n{}^m(i) \times S_1$
$'x^{2\alpha}=x^{2\alpha+1},\ 'x^{2\alpha+1}=-x^{2\alpha}$ $'x^{2\varphi}=-x^{2\varphi+1},\ 'x^{2\varphi+1}=x^{2\varphi}$	симплектические конгруэнции	нормальная комплексная n-псевдоцепь	${}^{kl}\bar{S}_n{}^m(i) \times S_1$
$'x^{2l}=x^{2l+1},\ 'x^{2l+1}=x^{2l}$		нормальная двойная n-цепь	$\bar{S}_n{}^m(e) \times {}^1S_1$
$u_{4l}=x^{4l+3},\ u_{4l+1}=-x^{4l+2}$ $u_{4l+2}=x^{4l+1},\ u_{4l+3}=-x^{4l}$	симплектический линейный комплекс	метрическая эрмитова квадрика	$\bar{S}^{\frac{m-1}{2}}_{\frac{n-1}{2}}(i, e, \varepsilon)$
$u_{4l}=x^{4l+3},\ u_{4l+1}={}^{4l+2}$ $u_{4l+2}=x^{4l+1},\ u_{4l+3}=x^{4l}$	симплектическая квадрика	метрический эрмитов комплекс	$\overset{\backsim}{S}{}^{\frac{m-1}{2}}_{\frac{n-1}{2}}(i, e, \varepsilon) \times R_1$

Sp^1_3	$\overline{R}_1(i, e)$		$^2R_4$	
Ненулевая прямая	$'x = -x$	Точка	Точка	$^2S_3$
Симплектическая квадрика	$'x = \overline{x}$	Метрический эрмитов комплекс	Прямая	$^1S_2 \times R_1$
	$'x = lxi^{-1}$	Нормальная комплексная цепь	Евклидова 2-плоскость	$\overline{R}_1(l) \times S_1 = R_2 \times S_1$
Симплектические конгруэнции	$'x = exe$	Нормальная двойная цепь	Псевдоевклидова 2-плоскость	$\overline{R}_1(e) \times {}^1S_1 = R_2 \times {}^1S_1$
Симплектический линейный комплекс	$'x = -\overline{x}$	Метрическая эрмитова квадрика	3-плоскость	$^1S_2(e) = {}^1R_3$

Приведем с[illegible]внительную таблицу образов симметрии и косимметрии пространства $\overline{S}_n^m\ (i, e)$ и вещественного квазисимплектического пространства Sp^{2m+1}_{2n+1}, группа симплектических преобразований которого, как показано в [6], изоморфна группе движений пространства $\overline{S}_n^m(i, e)$ (стр. 51).

Заметим, что прямая $R_1(i, e)$ изометрична пространству $^2R_4$ ([3], стр. 576), а группа движений прямой $\overline{R}_1(i, l)$, представляющихся антикватернионными преобразованиями $'x = axb + c\,(|a| = |b| = 1$ или $i)$ изоморфна группе движений пространства $^2R_4$. ([3], стр. 497). Приведем сравнительную таблицу образов симметрии и косимметрии прямой $\overline{R}_1(i, e)$ и пространства $Sp_3{}^1$ и образов симметрии пространства $^2R_4$ с изоморфными стационарными подгруппами (стр. 52).

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Климанова (-Богуславская). Унитарные полуэллиптические пространства. Известия АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 3, 1963, стр. 21—29.

2. Б. А. Розенфельд, Н. И. Адамушко, Л. М. Карпова и Л. В. Львова. Образы симметрии и антисимметрии вещественных квазинеевклидовых пространств. Ученые записки МОПИ, этот выпуск (стр. 3—22).

3. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. М., 1955.

4. Л. М. Карпова, Л. В. Коняева и Л. В. Львова. Кодвижения и образы косимметрии пространств с проективной метрикой. Ученые записки Орехово-Зуевского пединститута, т. 30, № 4, 1967, стр. 163—172.

5. Н. Д. Пецко. Бикватернионные эллиптические пространства и их применение к вещественным геометриям. «Проективные метрики». Ученые записки КПИ, т. 8, 1965, стр. 144—164.

6. Л. П. Андреева и Л. В. Шестырева. Предельные симплектические пространства. «Проективные метрики». Ученые записки КПИ, т. 8, 1965, стр. 23—24.