ü/84

Janenko, N.N., Šokin, Ju.I.
(Rechenzentrum SO AN SSSR*),
Novosibirsk)

ÜBER DIE GRUPPENKLASSIFIKATION VON DIFFERENZSCHEMATA FÜR EIN SYSTEM EINDIMENSIONALER GLEICHUNGEN DER GASDYNAMIK

Nekotoryje problemy matematiki i mechaniki.
Otdel'nyj ottisk.**)
Moskva: Izdatel'stvo "Nauka", 1970.
UDK 518:517. 944/947.
S. 277 - 283.

[277]

1. Die Arbeit befasst sich mit der Gruppenklassifikation von Differenzenschemata, die das Gleichungssystem der Gasdynamik in den Eulerschen Koordinaten

(1)

annähern, mit

, (1a)

für ρ - die Dichte, u - die Geschwindigkeit, p - den Druck, $E = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$, ε - die innere Energie. Die Zustandsgleichung sieht dann folgendermaßen aus:

. (1b)

Die Klassifikation von Differenzenschemata wird mit Hilfe ihrer ersten Differentialapproximationen [1,2] durchgeführt. Dies ist insbesondere deshalb notwendig, damit ⟨weil⟩ die parabolische Form der ersten Differentialapproximation alle Transformationsgruppen zuläßt, die das gasdynamische Originalsystem zuläßt [3,4].

Dies ist ausserdem notwendig, damit ⟨weil⟩ in der ersten Differentialapproximation der Satz von der Erhaltung der Masse erfüllt wird.

[278]

[278]

2. Wir schreiben das Gleichungssystem auf folgende zwei äquivalente Weisen:

(2)

, (3)

wobei

(3a)

Wir nähern das Gleichungssystem (1) mit folgendem Differenzenschema an:

. (4)

Hier ist $t = n\tau$, τ - Zeitschritt, h - Schritt in x-Richtung, $\Omega = \|\Omega_{ij}\|_1^3$ - solange die Matrix unbekannt ist, wobei $\Omega = \Omega(W)$, $\Omega(x) = \Omega(W^n(x))$ und $\|\Omega\| = O(\tau)$,

. (4a)

Die parabolische Form der ersten Differentialapproximation des Differenzenschemas (4) sieht dann folgendermaßen aus:

, (5)

mit

(5a)

[279]

. (5a)

Wir prüfen die Matrix C und den Vektor N mit Hilfe der Beziehung

. (5b)

Dann schreiben wir das Gleichungssystem (5) folgendermaßen:

, (6)

bzw.

. (6')

[280]

[280]

Die Forderung, daß in der ersten Differentialapproximation (6) der Satz von der Erhaltung der Masse erfüllt wird, führt auf die Bedingung $N_2 = 0$, d.h. $\partial_{2\alpha} = 0 \ (\alpha = 1, 2, 3)$ und folglich auf

. (7)

Dann nimmt das Gleichungssystem (6') folgende Form an:

. (8)

3. Das Gleichungssystem (1) bzw. (3) läßt einen Operatorenraum mit der Basis [3,4] zu:

, (9)

welche die folgenden Transformationen homolog ausdrücken, wobei das Gleichungssystem (1) invariant bleibt: 1) Verschiebung in der Zeit, 2) Verschiebung auf der Koordinate, 3) Streckung, 4) Galileitransformation.

Gefordert sei, daß das Gleichungssystem (8) ebenfalls diesen Operatorenraum zuläßt, was bestimmte Bedingungen für die unbestimmt bleibenden Elemente der Matrix $\mathfrak{N}$ nachsichzieht.

Das Gleichungssystem (8) läßt einen Operatorenraum mit der Basis (9) dann und nur dann zu, wenn die Gleichungen

(10)

erfüllt sind,
wobei $\widetilde{L}_\alpha$ - der Verlängerungsoperator ist, der durch Verlängerung des Operators L_α erhalten wird (siehe [3,4]).

[281]

Die Bedingung, daß die Gleichungen (10) erfüllt werden, führt auf die Beziehungen

(11)

(12)

und zu der Forderung, daß die Funktionen $N_{1\alpha}$, $N_{3\alpha}$ und folglich auch die Koeffizienten $\Omega_{1\alpha}$, $\Omega_{3\alpha}$ $(\alpha = 1,2,3)$ von den Variablen x und t unabhängig sind.

Die erste Gleichung in (12) bedeutet, daß die Funktion $N_{1\alpha}$ nicht von der Funktion u abhängt. Daraus folgt, daß die Koeffizienten ∂_{11}, ∂_{12}, ∂_{13} nicht von u abhängen. Dies führt auf:

, (13)

wobei Ω'_{11}, Ω'_{12}, Ω'_{13} nicht von u abhängen. Dann ist

. (13a)

Aus der zweiten Gleichung in (12) (unter Berücksichtigung der ersten) folgt, daß

, (13b)

d.h.

, (14)

wobei R nicht von der Funktion u abhängt.

Aus dem Dargelegten folgt die Richtigkeit folgender Behauptung.

T h e o r e m 1. Wenn die Elemente der Matrix Ω im Differenzenschema (4) die Gleichungen (7), (11), (13), (14) erfüllen, dann ist in der ersten Differentialapproximation der Satz von der Erhaltung der Masse erfüllt, und das Gleichungssystem (8) lässt einen Operatorenraum mit der Basis (9) zu.

[282]

4. Aus dem Gleichungssystem (1) folgt ⟨die Gleichung⟩:

, (15)

die die Erhaltung der Entropie S längs der charakteristischen Kurve mit der Neigung u ausdrückt. Formal erhält man diese Gleichung durch Linksmultiplikation [von (1)] mit dem Vektor $X = \frac{1}{\rho}(-u,\ u^2 - E - \frac{p}{\rho},\ 1)$, der der linke Eigenvektor der Matrix Λ ist und dem Eigenwert $-u$ entspricht. Dabei wird der zweite Hauptsatz der Thermodynamik angewandt.

Bekanntlich führt das Fehlen der physikalischen Zähigkeit, die zusätzlich zu p dazukommt, zur Entropievermehrung in Stoßwellen, d.h. anstelle der Gleichung (15) gilt in Stoßwellen:

. ⟨15a⟩

In dem zu prüfenden Fall ist folgendes Theorem richtig.

Theorem 2. Wenn die Elemente der Matrix Ω die Bedingungen (7), (11), (13), (14) und $R = u_x N_1$ erfüllen, tritt im Gleichungssystem der ersten Differentialapproximation (6) zusätzlich die Approximationszähigkeit auf, und unter der Bedingung $u_x N_1 > 0$ führt diese Zähigkeit zu einer Entropievermehrung.

Wenn die Bedingungen des Theorems erfüllt werden, kann das Gleichungssystem (6) tatsächlich auf folgende Weise geschrieben werden:

, ⟨15b⟩

wobei $\bar{p} = p + N_1$. Wenn wir dieses Gleichungssystem mit dem Vektor X von links multiplizieren, erhalten wir

. ⟨15c⟩

Von hieraus ist die Richtigkeit auch des letzten Theorems ersichtlich.

Wenn die Bedingung $R = u_x N_1$ nicht erfüllt ist, kommt die Approximationszähigkeit, analog zur physikalischen Zähigkeit, nicht mehr zusätzlich zu p dazu; dabei gilt ⟨die Beziehung⟩:

. (16)

Wenn $N_1 = 0$, dann ist $N_{3x} = R$, und wir haben eine Approximationszähigkeit, die nur zur Energiegleichung hinzukommt; dabei gilt Gleichung (16). Entsprechende Differenzenschemata werden bei der numerischen Lösung von Aufgaben der Gasdynamik verwandt [5].

[283]

5. In den Arbeiten [2,6] ist die Eigenschaft K von Differenzenschemata erklärt, die hyperbolische Gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten annähern. Wir wollen die analoge Eigenschaft auch im Falle eines zu prüfenden nichtlinearen Gleichungssystems der Gasdynamik einführen.

Definition. Das Differenzenschema (4) besitzt die Eigenschaft K, wenn die Gleichung $XC = 0$ gilt.

Theorem 3. Wenn die Elemente der Matrix Ω die Bedingungen (7), (13), (14) und $R = u_x N_1$ erfüllen, läßt das Gleichungssystem der ersten Differentialapproximation (8) einen Operatorenraum mit der Basis L_1, L_2, L_4 zu, und das Differenzenschema selbst besitzt die Eigenschaft K.

6. Es wurde eine Familie von Differenzenschemata abgeleitet; ihre Stabilität wurde durch die Methode der ersten Differentialapproximation erforscht, d.h. es fanden sich Bedingungen, unter denen $C \geqslant 0$ ist, und das Abhängigkeitsgebiet des Gleichungssystems der hyperbolischen Form der ersten Differentialapproximation

⟨16a⟩

nicht über das Abhängigkeitsgebiet des Differenzenschemas hinausgeht. Dies führt zu den Ungleichungen

, ⟨16b⟩

die zusätzliche Bedingungen bei der Auswahl der Matrix Ω und der Maschenweiten τ, h des Koordinatennetzes liefern. Insbesondere hieraus folgt, daß für die Stabilität

⟨16c⟩

notwendig ist.

Literatur

1. Janenko, N.N., Šokin, Ju.I. — O korrektnosti pervych differencial'nych približenij raznostnych schem ⟨Über die Korrektheit erster Differentialapproximationen von Differenzenschemata⟩. - Dokl. AN SSSR, 1968, 182, 4.

2. Janenko, N.N., Šokin, Ju.I. — O pervom differencial'nom približenii raznostnych schem dlja giperboličeskich sistem uravnenij ⟨Über die erste Differentialapproximation von Differenzenschemata für hyperbolische Gleichungssysteme⟩. - "Sib. matem. ž." ⟨Sibirskij matematičeskij žurnal⟩, 1969, 10, 5.

3. Ovsjannikov, L.V. — Gruppovyje svojstva differencial'nych uravnenij ⟨Gruppeneigenschaften von Differentialgleichungen⟩, 1962.

4. Ovsjannikov, L.V. — Lekcii po teorii gruppovych svojstv differencial'nych uravnenij ⟨Vorlesungen zur Theorie der Gruppeneigenschaften von Differentialgleichungen⟩, 1966.

5. Janenko, N.N., Anučina, N.N., Petrenko, V.Je., Šokin, Ju.I. — O metodach rasčeta zadač gazovoj dinamiki s bol'šimi deformacijami ⟨ Über die Methoden der Berechnung von Aufgaben der Gasdynamik mit großen Veränderungen⟩. - Inform. bjull. "Čislennyje metody mechaniki splošnoj sredy", 1970, 1, 1.

6. Janenko, N.N., Šokin, Ju.I. — Ob approksimacionnoj vjazkosti raznostnych schem ⟨Über die Approximationszähigkeit von Differenzenschemata⟩. - Dokl. AN SSSR, 1968, 182, 2.

<u>Anmerkungen des Übersetzers</u>

1. Abgesetzte Formeln und Gleichungen im Original wurden nicht in die Übersetzung übernommen. Dafür wurde ihr Platz durch Zahlen in Klammern kenntlich gemacht:
   ( ) Klammern der Autoren wie im Original,
   ⟨⟩ Klammern des Übersetzers.
2. Bei Ausdrücken in eckiger Klammer ⟨⟩ handelt es sich um eine Übersetzungsvariante.
3. Da die Autoren keine Anmerkungen gemacht haben, gehen alle Anmerkungen ~~im der~~ Übersetzung auf den Übersetzer zurück.

*) SO AN SSSR = Sibirische Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

**) Einige Probleme der Mathematik und Mechanik. Sonderdruck.

Stuttgart, den 21. April 1974

i.A.

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer

Dr. Forester

Ю. Шокин
7.2.74

УДК 518:517. 944/947

On group classification of difference schemes

О ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

for system of one dimensional equ. of gas dynamics

Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин

(Вычислительный центр СО АН СССР, Новосибирск)

1. Работа посвящена групповой классификации разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах

$$W_t = f_x, \tag{1}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho \\ \rho E \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} -p - \rho u^2 \\ -\rho u \\ -\rho u\left(E + \frac{p}{\rho}\right) \end{pmatrix}, \tag{1a}$$

ρ — плотность, u — скорость, p — давление газа, $E = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$, ε — удельная внутренняя энергия. Уравнение состояния газа имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \tag{1c}$$

Классификация разностных схем проводится с помощью их первых дифференциальных приближений [1, 2]. В частности, требуется, чтобы параболическая форма первого дифференциального приближения допускала все группы преобразований, которые допускает исходная газодинамическая система [3, 4].

Кроме того, требуется, чтобы в первом дифференциальном приближении был выполнен закон сохранения массы.

system

2. Запишем систему уравнений (1) в следующих двух эквивалентных видах:

$$W_t = AW_x, \tag{2}$$

$$\overline{W}_t = \overline{A}\,\overline{W}_x, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -u\left(2 - \frac{p_\varepsilon}{\rho}\right) & u^2 - p_\rho - u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho} + E\frac{p_\varepsilon}{\rho} & -\frac{p_\varepsilon}{\rho} \\ -1 & 0 & 0 \\ -E - \frac{p}{\rho} + u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho} & u\left[E + \frac{p}{\rho} - p_\rho - u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho} + E\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right] & -u\left(1 + \frac{p_\varepsilon}{\rho}\right) \end{pmatrix} \text{(3a)}$$

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} u \\ \rho \\ p \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 \\ -\rho & -u & 0 \\ -\frac{p - \rho^2\varepsilon_\rho}{\rho\varepsilon_p} & 0 & -u \end{pmatrix}$$

Approxim system

Аппроксимируем систему уравнений (1) следующей разностной схемой:

$$\frac{\Delta_0 W^n(x)}{\tau} = \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} f^n(x) + \frac{\Omega\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\Delta_1}{h} - \Omega\left(x - \frac{h}{2}\right)\frac{\Delta_{-1}}{h}}{h} W^n(x). \tag{4}$$

Здесь $t = n\tau$, τ — шаг по времени, h — шаг сетки по оси x, $\Omega = \|\Omega_{ij}\|_1^3$ — пока неизвестная матрица, причем $\Omega = \Omega(W)$, $\Omega(x) = \Omega(W^n(x))$ и $\|\Omega\| = O(\tau)$,
Matrix

$$\Delta_0 = T_0 - E, \quad T_0\varphi(x, t) = \varphi(x, t + \tau),$$ Δ_0 zeitl. Vorwärtsdiff.

$$\Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1},$$ $\Delta_{1,-1}$ räuml. Rückwärtsdiff. (4a)

$$T_1\varphi(x, t) = \varphi(x + h, t), \quad T_{-1}\varphi(x, t) = \varphi(x - h, t),$$

$$E\varphi(x, t) = \varphi(x, t).$$ E Identität

Параболическая форма первого дифференциального приближения разностной схемы (4) имеет вид

$$W_t = f_x + (CW_x)_x, \tag{5}$$

где

$$C = \Omega - \frac{\tau}{2}A^2 = \|\mu_{ij}\|_1^3, \quad \text{(5a)}$$

$$\mu_{11}=\Omega_{11}-\frac{3u^2\tau}{2}\left(1-\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right)-\frac{\tau}{2}p_\rho-\frac{\tau}{2}\frac{p_\varepsilon p}{\rho^2},$$

$$\mu_{12}=\Omega_{12}+\frac{\tau}{2}u\left[2u^2-2p_\rho-3u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho}+3E\frac{p_\varepsilon}{\rho}+\frac{pp_\varepsilon}{\rho^2}\right],$$

$$\mu_{13}=\Omega_{13}-\frac{3}{2}\tau u\frac{p_\varepsilon}{\rho},\quad \mu_{21}=\Omega_{21}-\frac{\tau}{2}u\left(2-\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right),$$

$$\mu_{22}=\Omega_{22}+\frac{\tau}{2}u^2-\frac{\tau}{2}p_\rho-\frac{\tau}{2}u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho}+\frac{\tau}{2}E\frac{p_\varepsilon}{\rho}, \tag{5a}$$

$$\mu_{23}=\Omega_{23}-\frac{\tau}{2}\frac{p_\varepsilon}{\rho},$$

$$\mu_{31}=\Omega_{31}-\tau u\left(E+\frac{p}{\rho}-u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right)-\frac{\tau}{2}u\left(p_\rho-E\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right),$$

$$\mu_{32}=\Omega_{32}+\frac{\tau}{2}\left(2u^2+E\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right)\left(E+\frac{p}{\rho}\right)-\frac{\tau}{2}(u^2+E)\,p_\rho-$$

$$-\frac{\tau}{2}\frac{pp_\rho}{\rho}-\frac{\tau}{2}u^2(2u^2-E)\frac{p_\varepsilon}{\rho},$$

$$\mu_{33}=\Omega_{33}-\frac{\tau}{2}u^2\left(1+2\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right)-\frac{\tau}{2}\frac{p_\varepsilon}{\rho}\left(E+\frac{p}{\rho}\right).$$

Введем в рассмотрение матрицу C и вектор N с помощью соотношения

$$CW_x=C\overline{W}_x=N=\begin{pmatrix}\partial_{11}u_x+\partial_{12}\rho_x+\partial_{13}p_x\\ \partial_{21}u_x+\partial_{22}\rho_x+\partial_{23}p_x\\ \partial_{31}u_x+\partial_{32}\rho_x+\partial_{33}p_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\end{pmatrix} \tag{5б}$$

$$\partial_{i1}=\rho(\mu_{i1}+u\mu_{i3}),$$
$$\partial_{i2}=u\mu_{i1}+\mu_{i2}+(E+\rho\varepsilon_\rho)\mu_{i3},$$
$$\partial_{i3}=\rho\varepsilon_p\mu_{i3},\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Тогда систему уравнений (5) запишем следующим образом:

$$W_t=f_x+(C\overline{W}_x)_x, \tag{6}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned}&u_t+uu_x+\frac{1}{\rho}p_x-\frac{1}{\rho}N_{1x}+\frac{u}{\rho}N_{2x}=0,\\ &\rho_t+u\rho_x+\rho u_x-N_{2x}=0,\\ &p_t+\frac{p-\rho^2\varepsilon_\rho}{\rho\varepsilon_p}u_x+up_x+\frac{\varepsilon+\rho\varepsilon_\rho-\frac{1}{2}u^2}{\rho\varepsilon_p}N_{2x}+\frac{u}{\rho\varepsilon_p}N_{1x}-\frac{1}{\rho\varepsilon_p}N_{3x}=0.\end{aligned} \tag{6'}$$

Требование выполнения закона сохранения массы в первом дифференциальном приближении (6) приводит к условию: $N_2 = 0$, т. е. $\partial_{2\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\Omega_{21} &= -\frac{1}{2}\tau u \frac{p_\varepsilon}{\rho} + \tau u, \\
\Omega_{22} &= \frac{\tau}{2} p_\rho - \frac{\tau}{2}\varepsilon \frac{p_\varepsilon}{\rho} - \frac{\tau}{2} u^2 + \frac{\tau}{2} u^2 \frac{p_\varepsilon}{\rho}, \\
\Omega_{23} &= \frac{\tau}{2}\frac{p_\varepsilon}{\rho}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Тогда система уравнений (6′) примет вид:

$$
\left\{
\begin{aligned}
F_1 &= u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x - \frac{1}{\rho} N_{1x} = 0, \\
F_2 &= \rho_t + u \rho_x + \rho u_x = 0, \\
F_3 &= p_t + u p_x + \frac{p - \rho^2 \varepsilon_\rho}{\rho \varepsilon_p} u_x + \frac{u}{\rho \varepsilon_p} N_{1x} - \frac{1}{\rho \varepsilon_p} N_{3x} = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{8}
$$

$w_t = f_x$ $\qquad$ $\overline{w}_t = \overline{A}\,\overline{w}_x$

3. Система уравнений (1), или, что то же, (3) допускает пространство операторов, базис которого равен [3, 4]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{L}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \\
\mathbf{L}_3 &= x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{L}_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

которым соответственно отвечают следующие конечные преобразования, сохраняющие систему уравнений (1): 1) перенос по времени, 2) перенос по координате, 3) растяжение, 4) преобразование Галилея.

Потребуем, чтобы система уравнений (8) допускала это же пространство операторов, что приведет к некоторым ограничениям на оставшиеся неопределенными элементы матрицы Ω.

Система уравнений (8) допускает пространство операторов с базисом (9) тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$
\widetilde{\mathbf{L}}_\alpha F_k \big|_{F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0} = 0, \tag{10}
$$

$$
\alpha = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3,
$$

где $\widetilde{L}_\alpha$ — продолженный оператор, полученный продолжением оператора $\mathbf{L}_\alpha$ (см. [3, 4]).

Условие выполнения равенств (10) приводит к соотношениям

$$\left(u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + p_x \frac{\partial}{\partial p_x}\right) N_{\alpha x} = N_{\alpha x}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} N_{1x} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}(uN_{1x}) = \frac{\partial}{\partial u} N_{3x} \tag{12}$$

и к требованию независимости функций N_{1x}, N_{3x}, а следовательно, коэффициентов $\Omega_{1\alpha}$, $\Omega_{3\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ от переменных x и t.

Первое равенство в (12) означает, что функция N_{1x} не зависит от функции u. Отсюда следует, что коэффициенты ∂_{11}, ∂_{12}, ∂_{13} не зависят от u. Это приводит к соотношениям:

$$\Omega_{11} = \Omega'_{11} - u\Omega'_{13} + \frac{3}{2}\tau u^2\left(1 - \frac{p_\varepsilon}{\rho}\right),$$

$$\Omega_{12} = \Omega'_{12} - u\Omega'_{11} + \frac{1}{2}u^2\Omega'_{13} - \frac{\tau}{2}u\left[2u^2 - 3p_\rho - 3u^2\frac{p_\varepsilon}{\rho} + 3E\frac{p_\varepsilon}{\rho}\right], \tag{13}$$

$$\Omega_{13} = \Omega'_{13} + \frac{3}{2}\tau u\frac{p_\varepsilon}{\rho}$$

где Ω'_{11}, Ω'_{12}, Ω'_{13} — не зависят от функции u. Тогда

$$\partial_{11} = \rho\Omega'_{11} - \frac{\tau}{2}\rho p_\rho - \frac{\tau}{2}\frac{p_\varepsilon p}{\rho}, \quad \partial_{12} = \Omega'_{12} + (\varepsilon + \rho\varepsilon_\rho)\Omega'_{13}, \quad \partial_{13} = \rho\varepsilon_p\Omega'_{13}. \tag{13a}$$

Из второго равенства в (12) с (учетом первого) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u} N_{3x} = N_{1x}, \tag{13б}$$

т. е.

$$N_{3x} = uN_{1x} + R = (uN_1)_x + R - u_x N_1, \tag{14}$$

где R не зависит от функции u.

Из изложенного следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если элементы матрицы Ω в разностной схеме (4) удовлетворяют равенствам (7), (11), (13), (14), то в первом дифференциальном приближении выполнен закон сохранения массы и система уравнений (8) допускает пространство операторов с базисом (9).*

4. Следствием системы уравнений (1) является уравнение

$$S_t + uS_x = 0, \qquad (15)$$

выражающее сохранение энтропии S вдоль характеристики с наклоном u. Формально это уравнение получается умножением слева на вектор $X = \frac{1}{\rho}\left(-u,\ u^2 - E - \frac{p}{\rho},\ 1\right)$, являющийся левым собственным вектором матрицы A и соответствующий собственному значению $-u$. При этом используется второй закон термодинамики.

Известно, что наличие физической вязкости, аддитивно входящей в p, приводит к возрастанию энтропии на ударных волнах, т. е. вместо уравнения (15) на ударных волнах выполняется соотношение

$$S_t + uS_x = q, \quad q > 0. \qquad \langle 15a\rangle$$

В рассматриваемом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если элементы матрицы Ω удовлетворяют условиям (7), (11), (13), (14) и $R = u_x N_1$, аппроксимационная вязкость входит в систему уравнений первого дифференциального приближения (6) аддитивно, и при условии $u_x N_1 > 0$ эта вязкость приводит к возрастанию энтропии.*

Действительно, при выполнении условий теоремы система уравнений (6) может быть записана в виде

$$\begin{gathered}(\rho u)_t + (\bar{p} + \rho u^2)_x = 0,\\ \rho_t + (\rho u)_x = 0,\\ (\rho E)_t + (\rho u E + u\bar{p})_x = 0,\end{gathered} \qquad \langle 15b\rangle$$

где $\bar{p} = p + N_1$. Умножая эту систему уравнений слева на vektor вектор X, получим

$$S_t + uS_x = \frac{1}{\rho}\, u_x N_1. \qquad \langle 15c\rangle$$

Отсюда видна справедливость и последнего утверждения теоремы.

Если условие $R = u_x N_1$ не выполнено, аппроксимационная вязкость уже не входит аддитивно в p, аналогично физической вязкости, при этом имеет место соотношение

$$S_t + uS_x = \frac{1}{\rho} R. \qquad (16)$$

Если $N_1 = 0$, то $N_{3x} = R$, и мы имеем аппроксимационную вязкость, входящую только в уравнение энергии, при этом справедливо соотношение (16). Разностные схемы с аналогичной вязкостью используются при численном решении задач газовой динамики [5].

5. В работах [2, 6] определено свойство K разностных схем, аппроксимирующих гиперболические системы уравнений с постоянными коэффициентами. Введем аналогичное свойство и в случае рассматриваемой нелинейной системы уравнений газовой динамики.

Определение. Разностная схема (4) обладает свойством K, если справедливо равенство $XC = 0$.

Теорема 3. Если элементы матрицы Ω удовлетворяют условиям (7), (13), (14) и $R = u_x N_1$, система уравнений первого дифференциального приближения (8) допускает пространство операторов с базисом $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_4$, а сама разностная схема обладает свойством K.

6. Устойчивость полученного семейства разностных схем исследовалась методом первого дифференциального приближения, т. е. находились условия, при которых $C \geqslant 0$, и область зависимости системы уравнений гиперболической формы первого дифференциального приближения

$$\frac{\tau}{2} W_{tt} + W_t = A W_x + \Omega W_{xx} + \Omega_x W_x \qquad \langle 16a \rangle$$

не превосходит области зависимости разностной схемы. Это приводит к неравенствам

$$\frac{\tau}{2} A^2 \leqslant \Omega \leqslant \frac{h^2}{2\tau} I, \qquad \langle 16b \rangle$$

которые дают дополнительные ограничения на выбор матрицы Ω и шагов сетки τ, h. В частности, отсюда следует, что для устойчивости необходимо

$$\frac{\tau^2 u^2}{h^2} \leqslant 1, \quad \frac{\tau^2 (u \pm a)^2}{h^2} \leqslant 1, \quad a^2 = \frac{p - \rho^2 \varepsilon_\rho}{\rho \varepsilon_p}. \qquad \langle 16c \rangle$$

Литература

1. Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем. — Докл. АН СССР, 1968, 182, 4.
2. Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений. — «Сиб. матем. ж.», 1969, 10, 5.
3. Л. В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений, 1962.
4. Л. В. Овсянников. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений, 1966.
5. Н. Н. Яненко, Н. Н. Анучина, В. Е. Петренко, Ю. И. Шокин. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями. — Информ. бюлл. «Численные методы механики сплошной среды», 1970, 1, 1.
6. Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин. Об аппроксимационной вязкости разностных схем. — Докл. АН СССР, 1968, 182, 2.

Перепечатано Заказ 839 тираж 6 ВЦ СО АН СССР