Brigadirov, G.N., Matčenko, N.M. (Tula):

EINE KONSTRUKTIONSMÖGLICHKEIT FÜR DIE GRUNDBEZIEHUNGEN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE VON STOFFEN MIT INHOMOGENEN MODULN

Inženernyj žurnal. Mechanika tverdogo tela. Moskva, 1971, Nr 5, S. 109-111.
[Russ.: Variant postrojenija osnovnych sootnošenij raznomodul'noj teorii uprugosti]

(109) Basierend auf der Vorstellung, daß das elastische Verformungspotential eine quadratische Form sei, wird nach den Werten der Hauptspannungen und ihrer Moduln eine Möglichkeit der Grundbeziehungen der Elastizitätstheorie für Materialien aufgestellt, die verschiedenartig gegenüber Zug und Druck Widerstand leisten.

Es sei betont, daß die Beziehungen der Elastizitätstheorie verschiedener Moduln [1,2] aus den in dieser Arbeit dargelegten Beziehungen gewonnen werden können.

1. Wir betrachten eine Zustandsklasse isotroper Medien, bei denen die Energie der elastischen Verformung W eine Funktion der Hauptspannungen σ_k (k=1,2,3) ist und ihrer Moduln

(1.1)

mit

(1.2)

Wir fassen die Energie der elastischen Verformung als ein Potential auf und finden die Beziehungen zwischen den Hauptspannungen und den Hauptverformungen

(1.3)

mit

(1.4)

Das Symbol (1 2 3) gibt an, daß man die restlichen zwei Gleichungen durch zyklische Vertauschung erhalten kann.

Die Werte der mechanischen Charakteristiken des Stoffes kann man durch Experimente: Einachsenzug, Einachsendruck und reine Schiebung bestimmen

(1.5)

Hier ist durch E^+ und ν^+ der Youngsche Modul und die Poissonsche Zahl gekennzeichnet, die wir erhalten, wenn wir die Daten der Versuche mit dem einachsigen Zug der Proben auswerten, wohingegen E^- und ν^- den Youngschen Modul und die Poissonsche
(110) Zahl bezeichnen, die wir erhalten, wenn wir die Daten der Versuche mit dem einachsigen Druck der Proben auswerten

(1.6)

G_0 - ist der Schubmodul, den wir erhalten, wenn wir die Daten der Versuche mit dem reinen Schub auswerten.

Die Beziehung (1.3) stellt ein verallgemeinertes Hooksches Gesetz für die Medien, die gegen Zug und Druck verschiedenartig Widerstand leisten, in den Hauptrichtungen dar.

Wenn wir die bekannten Formeln zur Transformation der Komponenten der Spannungs- und Verformungszustände von einem orthogonalen Koordinatensystem in ein anderes verwenden, erhalten wir

(1.7)

(1.8)

mit c_{ij} - den Richtungskosinus der Hauptrichtungen im Koordinatensystem x_i. Die Werte c_{ij} erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen

(1.9)

wobei δ_{ij} und δ_{im} - Kronecker-Symbole sind.

Wenn wir die Gleichungen (1.7) - (1.9) in den Ausdrücken (1.3) verwenden, kann man zwischen den Spannungen und den Verformungen im Koordinatensystem x_i eine Beziehung herstellen

(1.10)

mit

(1.10a)

Die Komponenten ω_{ij} und ω_k sind mit den Beziehungen der Form (1.7), (1.8) verbunden.

Wir lösen die Gleichung (1.10) in bezug auf die Spannungen folgendermaßen

(1.11)

(1.12)

Die Hauptspannungen σ_k werden durch die Hauptverzerrungen nach den Formeln

(1.13)

ausgedrückt, mit

(1.14)

wobei Δ_{ij} - der absolute Minorwert der Determinante Δ beim Koeffizienten b_{ij} ist

(1.15)

Um reine Aufgaben der Elastizitätstheorie verschiedener Moduln zu lösen, muß man den Beziehungen (1.10) und (1.11) noch die Gleichgewichtsgleichungen

(1.16)

die Randbedingungen

(1.17)

die Abhängigkeiten zwischen den Verzerrungskomponenten und den Komponenten des Verschiebungsvektors

(1.18)

(111) und die Verträglichkeitsbeziehungen der Verzerrungen

(1.19)

zuordnen.

Hier sind X_i - die Komponenten der Massenkräfte, P_i - die Projektion der Gesamtspannung, die auf der Fläche mit der Normale n wirkt, auf die x_i-Achse.

Die Gleichungen (1.10), (1.11), (1.16) - (1.18) bilden ein geschlossenes Gleichungssystem der Elastizitätstheorie verschiedener Moduln.

Es muß noch hervorgehoben werden, daß man zur Lösung der reinen Aufgaben unbedingt die Werte a_k braucht. In dem Fall (wenn diese Werte zu Beginn der Lösung unbekannt sind), kann man folgende Näherung empfehlen. Als erste Näherung kann man die Lösung einer entsprechenden Aufgabe der klassischen Elastizitätstheorie nehmen.

2. Zur Lösung der Gleichgewichtsgleichung (1.16) in den Verschiebungen ist es notwendig, die Gleichung in der Form

(2.1)

darzustellen, wobei ∇^2 - Laplace-Operator ist.

Die Bedingung, daß die Gleichung der Komponenten e_{ij} $(i \neq j)$ in der Hauptachsenform gleich Null ist, führt zu drei Gleichungen

(2.2)

Die Beziehungen (2.2), (1.18), (1.13), (1.9), (1.8), (1.4) gestatten es, die Richtungskosinus c_{ij} und die Komponenten ω_{ij} durch die Komponenten des Verschiebungsvektors auszudrücken. Bei der Lösung von Aufgaben der Elastizitätstheorie verschiedener Moduln in Spannungen muß man die Verträglichkeitsbeziehungen in den Spannungen (1.19) unbedingt in folgender Form

(2.3)

darstellen.

Die Bedingungen, daß keine Schubspannungen in den Hauptflächen ⟨Hauptrichtungen⟩ auftreten

(2.4)

gestattet es, die Richtungskosinus c_{ij} durch die Komponenten des Spannungstensors auszudrücken.

3. Abschließend sei bemerkt, daß wir, wenn wir in den oben angeführten Beziehungen die Konstanten D und E gleich Null sein lassen, solche Beziehungen der Elastizitätstheorie verschiedener Moduln erhalten, wie sie in den Arbeiten [1,2] aufgeführt sind. Dabei nimmt die Konstante B den Wert

⟨2.4a⟩

an, doch bei gleichzeitigem Zug und Druck in den verschiedenen Hauptrichtungen bleiben die Elastizitätsmoduln entsprechend E^+ und E^-.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Möglichkeit ins Auge gefaßt, sich von diesen Voraussetzungen zu lösen. Dies gestattet es dann, die Klasse der Stoffe, auf die man die Beziehungen der Elastizitätstheorie verschiedener Moduln anwenden will, zu vergrößern. Ebenfalls betont sei, daß die Konstanten D und E unabhängig voneinander gleich Null sein können.

Redaktionseingang
4. V. 1974

Literatur

1. Ambarcumjan, S.A., Chačatrjan, A.A.: Osnovnyje uravnenija teorii uprugosti dlja materialov, raznosoprotivljajuščichsja rastjaženiju i sžatiju ⟨Grundgleichungen der Elastizitätstheorie für Stoffe, die gegenüber Zug und Druck verschiedenartig Widerstand leisten⟩. - Inž[enernyj] ž[urnal]. M[echanika] T[verdogo] T[ela]. [Moskva], 1966, Nr 2.

2. Ambarcumjan, S.A., Chačatrjan, A.A.: K raznomodul'noj teorii uprugosti ⟨Zur Elastizitätstheorie von Stoffen mit inhomogenen Moduln⟩. - Inž[enernyj] ž[urnal]. M[echanika] T[verdogo] T[ela]. [Moskva], 1966, Nr 2.

3. Lejbenzon, L.S.: Kurs teorii uprugosti ⟨Vorlesungsreihe zur Elastizitätstheorie⟩. - M[oskva]-L[eningrad]: Gostechizdat, 1947.

Anmerkungen des Übersetzers:

1. Abgesetzte Formeln und Gleichungen im Original wurden nicht in die Übersetzung übernommen. Dafür wurde ihr Platz durch Zahlen in Klammern kenntlich gemacht:
   () Klammern der Autoren wie im Original,
   ⟨⟩ Klammern des Übersetzers.
2. Bei Ausdrücken in eckiger Klammer ⟨⟩ handelt es sich um eine Übersetzungsvariante, bei denen in anderer eckiger Klammer [] um eine Ergänzung.
3. Die Literaturangaben des Originals wurden, soweit dies dem Übersetzer möglich war, berichtigt und ergänzt.

Stuttgart, den 24. September 1947

i.A.
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer

то из (5.5), (5.6) получаем

$$\mu^+ = \frac{(1-2\nu^-)E^+}{2(1-\nu^- - 2\nu^+\nu^-)}, \mu^- = \frac{(1-2\nu^+)E^-}{2(1-\nu^+ - 2\nu^+\nu^-)} \quad (5.7)$$

Таким образом, к классу разносопротивляющихся материалов типа {ε} принадлежат те материалы, которые по-разному деформируются ...

... статических испытаний ... материалов. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
3. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
4. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 6.
5. Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
6. Матченко Н. М., Толоконников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
7. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.

1971 МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА № 5

УДК 539.3

ВАРИАНТ ПОСТРОЕНИЯ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. В. БРИГАДИРОВ, Н. М. МАТЧЕНКО

(Тула)

На основе представления упругого потенциала деформаций квадратичной формой по величинам главных напряжений и их модулей строится вариант основных соотношений теории упругости для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Отмечается, что соотношения разномодульной теории упругости [1, 2] могут быть получены из соотношений, предложенных в работе.

1. Рассмотрим класс состояний изотропных сред, при которых энергия упругой деформации W является функцией главных напряжений σ_k ($k = 1, 2, 3$) и их модулей

$$W = {}^1\!/_2 A(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + B(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + {}^1\!/_2 C(\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_2^2 + \alpha_3\sigma_3^2) + D[(\alpha_1+\alpha_2)\sigma_1\sigma_2 + (\alpha_2+\alpha_3)\sigma_2\sigma_3 + (\alpha_3+\alpha_1)\sigma_3\sigma_1] + E(\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2\alpha_3\sigma_2\sigma_3 + \alpha_3\alpha_1\sigma_3\sigma_1) \quad (1.1)$$

где

$$\alpha_k = \operatorname{sign}(\sigma_k) \quad (1.2)$$

Считая энергию упругой деформации потенциалом, найдем соотношения между главными напряжениями и главными деформациями

$$e_1 = A\sigma_1 + B(\sigma_2 + \sigma_3) + \omega_1 \quad (1.3)$$

где

$$\omega_1 = C\alpha_1\sigma_1 + D[(\alpha_1+\alpha_2)\sigma_2 + (\alpha_1+\alpha_3)\sigma_3] + E(\alpha_1\alpha_2\sigma_2 + \alpha_1\alpha_3\sigma_3) \quad (123) \quad (1.4)$$

Символ (123) указывает, что остальные два уравнения можно получить путем круговых перестановок.

Значения механических характеристик материала можно определить из экспериментов на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистый сдвиг

$$2A = \frac{1}{E^+} + \frac{1}{E^-}, \quad -2B = \frac{\nu^+}{E^+} + \frac{\nu^-}{E^-}$$
$$2C = \frac{1}{E^+} - \frac{1}{E^-}, \quad 2D = -\frac{\nu^+}{E^+} + \frac{\nu^-}{E^-}$$
$$2E = \frac{1}{G_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G^+} + \frac{1}{G^-}\right) \quad (1.5)$$

Здесь через E^+ и ν^+ обозначены модуль Юнга и коэффициент Пуассона, полученные при обработке данных опытов по одноосному растяжению образцов, а E^- и ν^- — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, полученные при обработке данных опытов по одноосному сжатию образцов

$$G^+ = \frac{E^+}{2(1+\nu^+)}, \qquad G_- = \frac{E^-}{2(1+\nu^-)} \tag{1.6}$$

G_0 — модуль сдвига, полученный при обработке данных опытов на чистый сдвиг.

Соотношения (1.3) представляют обобщенный закон Гука для сред, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, в главных направлениях.

Используя известные формулы преобразования компонент напряженного и деформированного состояний от одной ортогональной системы координат к другой, получим

$$\sigma_{ij} = c_{im}c_{jm}\sigma_k \quad (k=m) \tag{1.7}$$

$$e_{ij} = c_{im}c_{jm}e_k \quad (k=m) \tag{1.8}$$

где c_{ij} — направляющие косинусы главных направлений в системе координат x_i. Величины c_{ij} удовлетворяют условиям ортогональности

$$c_{im}c_{jm} = \delta_{ij} \quad \text{или} \quad c_{ij}c_{im} = \delta_{im} \tag{1.9}$$

где δ_{ij} и δ_{im} — символы Кронекера.

Используя соотношения (1.7) — (1.9) в выражениях (1.3), можно установить связь между напряжениями и деформациями в системе координат x_i

$$e_{ij} = (A-B)\sigma_{ij} + 3B\sigma\delta_{ij} + \omega_{ij} \tag{1.10}$$

где

$$3\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$ <(1.10a)>

Компоненты ω_{ij} и ω_k связаны соотношениями вида (1.7), (1.8). Разрешим уравнения (1.10) относительно напряжений

$$\sigma_{ij} = 2\mu(e_{ij} - \omega_{ij}) + 3\lambda(e-\omega)\delta_{ij} \tag{1.11}$$

$$2\mu = \frac{1}{A-B}, \qquad \lambda = \frac{B}{(B-A)(A+2B)} \tag{1.12}$$

$$3e = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \qquad 3\omega = \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33}$$

Главные напряжения σ_k выражаются через главные деформации по формулам

$$\sigma_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \quad (123) \tag{1.13}$$

где

$$a_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \qquad \Delta = \det|b_{ij}| \tag{1.14}$$

Δ_{ij} — абсолютное значение минора определителя Δ при коэффициенте b_{ij}

$$b_{ij} = (A + \alpha_i C)\delta_{ij} + [B + D(\alpha_i + \alpha_j) + E\alpha_i\alpha_j] \tag{1.15}$$

Для решения частных задач разномодульной теории упругости к соотношениям (1.10) и (1.11) необходимо присоединить уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = 0 \tag{1.16}$$

граничные условия

$$P_i = \sigma_{ij}n_j \tag{1.17}$$

зависимости между компонентами деформации и компонентами вектора перемещения

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{1.18}$$

и уравнения совместности деформаций

$$e_{im,nj} + e_{nj,mi} - e_{ni,mj} - e_{mi,nj} = 0 \tag{1.19}$$

Здесь X_i — компоненты массовых сил, P_i — проекции на оси координат x_i полного напряжения, действующего на площадке с нормалью n.

Уравнения (1.10), (1.11), (1.16) — (1.18) образуют замкнутую систему уравнений разномодульной теории упругости.

Следует отметить, что для решения частных задач необходимы значения α_k. В том случае (если эти значения в начале решения неизвестны) можно рекомендовать последовательные приближения. В качестве начального приближения можно взять решение соответствующей задачи классической теории упругости.

2. При решении задач разномодульной теории упругости в перемещениях уравнения равновесия (1.16) необходимо представить в перемещениях

$$\mu\nabla^2 u_i + 3(\lambda+\mu)e_{,i} - 2\mu\omega_{ij,j} + 3\lambda\omega_{,i} + \rho X_i = 0 \tag{2.1}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Условия равенства нулю компонент e_{ij} $(i \neq j)$ в главных осях приводят к трем уравнениям

$$c_{mi}c_{jm}e_k = 0 \quad (k=m) \tag{2.2}$$

Соотношения (2.2), (1.18), (1.13), (1.9), (1.8), (1.4) позволяют выразить направляющие косинусы c_{ij} и компоненты ω_{ij} через компоненты вектора перемещения. При решении задач разномодульной теории упругости в напряжениях необходимо представить в напряжениях уравнения совместности деформаций (1.19)

$$(A-B)\nabla^2\sigma_{ij} + 3B\nabla^2\sigma + 3A\sigma_{,ij} + (\rho X_i)_{,i} + (\rho X_i)_{,j} =$$
$$= \nabla^2\omega_{ij} + \omega_{,ij} - \omega_{mj,in} - \omega_{mi,mj} \tag{2.3}$$

Условия отсутствия касательных напряжений на главных площадках

$$c_{im}c_{jm}\sigma_k = 0 \quad (k=m) \tag{2.4}$$

позволяют выразить направляющие косинусы c_{ij} через компоненты тензора напряжений.

3. В заключение отметим, что если в соотношениях, приведенных выше, положить равными нулю константы D и E, то получим соотношения разномодульной теории упругости, приведенные в работах [1,2]. При этом константа B принимает значение

$$-B = \nu^+/E^+ = \nu^-/E^-$$ <(2.4a)>

а при одновременном растяжении и сжатии в различных главных направлениях модули упругости остаются соответственно E^+ и E^-.

В данной работе рассмотрена возможность отказа от этих предположений, что позволяет расширить класс материалов, для которых можно использовать соотношения разномодульной теории упругости [1,2]. Отметим также, что константы D и E могут равняться нулю независимо одна от другой.

Поступила 4 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947.