Šokin, Ju.I.

NOTWENDIGE UND AUSREICHENDE BEDINGUNG DER INVARIANZ VON DIFFERENZEN-SCHEMATA IN DEN TERMINI DER ERSTEN DIFFERENTIALNÄHERUNG

Übersetzung aus:

Čislennye metody mechaniki splošnoj sredy. Novosibirsk: Akademija nauk SSSR Sibirskoe otdelenie. Vyčislitel'nyj centr, 5 (1974), Nr 5, S. 120 - 122.

Russ.: НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ТЕРМИНАХ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
Neobchodimoe i dostatočnoe uslovie invariantnosti raznostnych schem v terminach pervogo differantial'nogo približenija.

1. In den Arbeiten [1] - [2] wurde auf der Grundlage der ersten Differentialnäherung (e.Dn.) eine Gruppenklassifikation der Differenzenschemata für Gleichungen der Gasdynamik untersucht. Es wurden ausreichende Bedingungen der Invarianz der Differenzenschemata gefunden, d.h. es gibt Bedingungen, bei denen die e.Dn. eben jene Transformationengruppe zuläßt wie auch das ursprüngliche Gleichungssystem der Gasdynamik.

In der vorliegenden Arbeit wird die notwendige und ausreichende Bedingung der Invarianz der Differenzenschemata dargelegt, wobei die Veränderung der Parameter des Differenzengitters bei Gruppentransformationen berücksichtigt wird. Diese Bedingung wurde aufgrund der Ergebnisse der Theorie der Gruppeneigenschaften von Differentialgleichungen erzielt [3].

2. Im gleichmäßigen Gitter nähern wir das Differentialgleichungssystem

$$\mathcal{F}^{\gamma}(x,u,p)=0 \quad (\gamma=1,\dots,q) \tag{1}$$

durch das folgende Differenzenschema 1-ter Ordnung an:

$$\Lambda^{\gamma}(x,u,h,Tu)=0. \tag{2}$$

Hier ist (x, u) Punkt des Euklidraumes $\mathcal{E}(x,u)$ der unabhängigen Variablen x^i (i=1,..., m) und der abhängigen Variablen u^k (k=1, ..., q),

$$T=(T_1,\dots,T_m),\ h=(h^1,\dots,h^m),\ T_j u=u(x^1,\dots,x^{j-1},x^j+h^j,x^{j+1},\dots,x^m),$$
$$p_i^k=\frac{\partial u^k}{\partial x^i}.$$

Die e.Dn. des Differenzenschemas (2) hat die Form [4]

$$\mathcal{P}^{\gamma}(x,u,h,p^{(1)},\dots,p^{(\rho)})=\mathcal{F}^{\gamma}(x,u,p)+(h^i)^l R_i^{\gamma}(x,u,p^{(1)},\dots,p^{(\rho_{\gamma i})}), \tag{3}$$

mit

$$p^{(\beta)k}_{\beta_1\dots\beta_m}=\frac{\partial^{\beta}u^k}{\partial^{\beta_1}x^1\dots\partial^{\beta_m}x^m},\ \beta=\beta_1+\dots+\beta_m\ (\beta=1,\dots,\rho),$$

$$p_i^k=p^{(1)k}_{0\dots010\dots0},\quad \rho=\max_{i,\gamma}\rho_{\gamma i}.$$

3. Das Gleichungssystem (1) soll die Gruppe G_r der Transformationen des Raumes $\mathcal{E}(x,u)$ mit den Basisoperatoren [3]

$$L_{\alpha}=\xi_{\alpha}^{i}\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_{\alpha}^{k}\frac{\partial}{\partial u^k} \qquad (\alpha=1,\dots,r)$$

zulassen, und diese Transformationen werden definiert durch die Gleichungen

$$x'^i=f^i(x,u,a),$$
$$u'^k=\varphi^k(x,u,a).$$

Der Gruppe G_r entspricht die Gruppe G'_r der Transformationen des Raumes $\mathcal{E}(x,u,h)$, die sich von der Gruppe G_r durch die Transformationen für h unterscheidet, welche aus den Transformationen für x und u hervorgehen

$$h'^i=\psi^i(x,u,h,a).$$

Dann haben die Basisoperatoren L'_α der Gruppe G'_r folgendes Aussehen

$$L'_\alpha = L_\alpha + \theta^i_\alpha \frac{\partial}{\partial h^i},$$

mit

$$\theta^i_\alpha = \frac{\partial \psi^i}{\partial a^\alpha}\bigg|_{a=0}.$$

Hieraus folgt, daß sich Gruppe G_r der Transformationen des Raumes $\mathcal{E}(x,u)$ und Gruppe $\tilde{G}_r^{\prime(\rho)}$ der Transformationen des Raumes $\mathcal{E}(x, u, h, p^{(1)}, \ldots, p^{(\rho)})$ entsprechen. Die Basisoperatoren der Gruppe $\tilde{G}_r^{\prime(\rho)}$ haben die Form

$$\tilde{L}_\alpha^{\prime(\rho)} = L'_\alpha + \sigma^{(\beta)k}_{\beta_1\ldots\beta_m} \frac{\partial}{\partial p^{(\beta)k}_{\beta_1\ldots\beta_m}}.$$

Die Gleichungen (3) geben eine gewisse Mannigfaltigkeit im Raum $\mathcal{E}(x, u, h, p^{(1)}, \ldots, p^{(\rho)})$ vor. Notwendige und ausreichende Bedingung der Invarianz des Gleichungssystems (3) bezüglich der Transformationen der Gruppe $\tilde{G}_r^{\prime(\rho)}$ ist die Erfüllung der folgenden Beziehungen:

$$L_\alpha^{\prime(\rho)} \mathcal{P}^\gamma \Big|_{\mathcal{P}^\gamma = 0} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r; \ \gamma = 1, \ldots, q). \qquad (4)$$

Gleichungen (4) können transformiert werden

$$\tilde{L}_\alpha^{\prime(\rho)} \mathcal{P}^\gamma = \tilde{L}_\alpha^{\prime(\rho)} \left[\mathcal{F}^\gamma + (h^i)^l R_i^\gamma\right] = \tilde{L}_\alpha \mathcal{F}^\gamma + \tilde{L}_\alpha^{\prime(\rho)} \left[(h^i)^l R_i^\gamma\right],$$

wobei $\tilde{L}_\alpha$ erste Fortsetzung des Operators L_α ist.

Richtig ist deshalb das folgende

THEOREM. Notwendige und ausreichende Bedingung der Invarianz des Differenzenschemas (2) bezüglich der Gruppe, welche von System (1) zugelassen wird, ist die Erfüllung der folgenden Beziehungen:

$$\left[\tilde{L}_\alpha \mathcal{F}^\gamma + \tilde{L}_\alpha^{\prime(\rho)} (h^i)^l R_i^\gamma\right]\Big|_{\mathcal{P}^\gamma = 0} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r; \gamma = 1, \ldots, q).$$

Literatur

I. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. О групповой классификации разностных схем для системы одномерных уравнений газовой динамики. Сборник "Некоторые проблемы математики и механики". Л., "Наука", 1970.

Janenko, N.N., Šokin, Ju.I.: O gruppovoj klassifikacii raznostnych schem dlja sistemy odnomernych uravnenij gazovoj dinamiki.
In: Nekotorye problemy matematiki i mechaniki. Leningrad: Verlag "Nauka", 1970, S. 277 - 283.
"Über die Gruppenklassifizierung von Differenzenschemata für ein System eindimensionaler Gleichungen der Gasdynamik".
(Übersetzung der Übersetzungsstelle der Universitätsbibliothek Stuttgart vom 21.4.1974, Nr 84).

2. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. О групповой классификации разностных схем для систем уравнений газовой динамики. Труды МИАН СССР, 122, 85-97, 1973.

2. Janenko, N.N., Šokin, Ju.I.: O gruppovoj klasifikacii raznostnych schem dlja sistem uravnenij gazovoj dinamiki.
- Trudy Matematičeskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii nauk SSSR. Moskva/Leningrad: 122 (1973), S. 85 bis 97.
⟨Über die Gruppenklassifikation von Differenzenschemata für Gleichungssysteme der Gasdynamik⟩.

3. Л.В.Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений. "Наука", Новосибирск, 1962.

Ovsjannikov, Lev Vasil'evič: Gruppovye svojstva differencial'nych uravnenij.
Novosibirsk: Verlag "Nauka", 1962.
⟨Gruppeneigenschaften von Differentialgleichungen.⟩

4. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем.ДАН СССР, 182, 776-778, 4, 1968.

Janenko, N.N., Šokin, Ju.I.: O kerrektnosti pervych differancial'nych priblizenij raznostnych schem.
- Doklady Akademii nauk SSSR. Moskva, 182 (1968), Nr 4, S. 776 - 778.
engl.: Correctness of First Differential Approximations of Difference Schemes.
- Soviet Mathematics. Providence, 9 (1968), Nr 5, S. 1215 bis 1217.

Redanktionseingang
8.12.1974

Rechenzentrum der
Sibirischen Abteilung der
Ak.d.Wiss. der UdSSR, Novosibirsk

Stuttgart, den 26.4.1976

Übersetzung von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer