

M/119 Ablage

Zacharov, Ju.N., Šokin, Ju.I., Janenko, N.N.

ÜBER EINE METHODE ZUR BESCHLEUNIGUNG DER KONVERGENZ  
VON ITERATIONSSCHEMATA

Übersetzung aus:

Čislennye metody mehaniki splošnoj sredy. Novosibirsk:  
Akademija nauk SSSR Sibirskoe otdelenie. Vyčislitel'nyj  
centr, 5 (1974), Nr 5, S. 57 - 62.

Russ.: ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ  
Ob odnom metode uskorenija schodimosti iteracionnych  
schem.

1. In der vorliegenden Arbeit wollen wir zeigen, daß man ein Iterationsschema aufstellen kann, dessen Kovergenzgeschwindigkeit größer ist als die des Schemas

$$B \frac{u^{R+1} - u^R}{\tau} = \Lambda u^R, \quad (1)$$

mit

$$B = (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2),$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = a^2 \left( \frac{\Delta_1 \Delta_1}{h_1^2} + \frac{\Delta_2 \Delta_2}{h_2^2} \right),$$

welches ein Differenzenschema mit universalem Algorithmus ist [1].

2. Wir untersuchen im rechtwinkligen Bereich G die Dirichlet-Aufgabe

$$\Lambda u = 0, \quad (2)$$

$$u(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma, \quad (3)$$

mit  $\gamma$  - Grenze von G,  $G = \{0 < x_i < x_i, i=1,2\}$ . Zusammen mit der Aufgabe (2), (3) untersuchen wir die instationäre Aufgabe

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = (1 + f_n) \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n, \quad (4)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = (1 + f_n) \Lambda_2 u^{n+1} - \Lambda_2 u^n, \quad (5)$$

$$u^0 = u_p,$$

mit denselben stationären Randwerten (3). Hier ist  $f_n$  eine gewisse positive Funktion.

Als Ganzschritt-Algorithmus hat das Differenzenschema (4) folgendes Aussehen

$$(E - \tau(1 + f_n)\Lambda_1)(E - \tau(1 + f_n)\Lambda_2) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (1 + f_n)\Lambda_1 u^n - \tau f_n (1 + f_n) \Lambda_1 \Lambda_2 u^n. \quad (6)$$

Es ist offensichtlich, daß die Lösung der Aufgabe (4), (5), (3) gegen die Lösung der Aufgabe (2), (3) konvergiert, wenn  $f_n \rightarrow 0$  bei  $n \rightarrow \infty$ .

Es seien  $n$  Iterationen vollzogen. Dann multipliziert sich die Amplitude der Harmonischen  $\sin \lambda_1 x_1 \sin \lambda_2 x_2$  mit dem Wert [1], [2]

$$P_{f_n}(\lambda_1, \lambda_2) = \rho_{f_n}^1 \cdots \rho_{f_n}^n,$$

mit

$$\rho_{f_n}^i = \frac{1 + (1 + f_n) \lambda_1 \lambda_2}{1 + (1 + f_n) (\lambda_1 + \lambda_2) + (1 + f_n)^2 \lambda_1 \lambda_2},$$

$$\lambda_i = \frac{4\tau \sin^2 \frac{\kappa_i h_i}{2}}{h_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Bei

$$f_n = 0, \quad P_n(\lambda_1, \lambda_2) = \rho^n = \left( \frac{1 + \lambda_1 \lambda_2}{1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2} \right)^n.$$

Wir vergleichen  $P_{f_n}$  und  $P_n$  und sehen, daß

$$P_{f_n} < P_n.$$

Folglich konvergiert das Differenzenschema (4) bei  $f_n \neq 0$  schneller als mit  $f_n = 0$ .

3. Die Rechnungen wurden in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 und mit  $a^2 = 10^{-3}$  durchgeführt. In den Tab. 1, 2, 3 sind die Ergebnisse mit  $h = 0,02$ , in den Tab. 4, 5, 6 mit  $h = 0,1$  aufgeführt. In den Tab. 1, 2, 4, 5 sind die Angaben

mit

$$f_n = a^2 \left( \beta \max_{i,j} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| / n^{\delta} + \beta_1 \max_{i,j} |u_{ij}^{n-1} - u_{ij}^{n-2}| / n^{\delta_1} \right),$$

und in den Tab. 3, 6 mit  $f_n = a^2 \exp(\beta - n^{\gamma})$ , wobei  $\beta, \beta_1, \gamma, \delta, \delta_1$  mehrere positive Konstanten sind.

Desweiteren werden typische Verläufe von

$$\epsilon_1 = \max_{i,j} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}|, \quad \epsilon_2 = \max_{i,j} |u_{ij}^n - U|, \quad \epsilon_3 = \max_{i,j} |u_{ij}^n - 1|$$

in Abhängigkeit von der Zahl der Iterationsschritte abgebildet, wobei U die Lösung ist, die durch ein Differenzenschema stabilisierender Korrektur mit  $\gamma = 5$  nach 68 Iterationen mit der Genauigkeit  $\epsilon = 10^{-4}$  erzielt wird. Als Abszisse ist die Zahl der Iterationsschritte aufgetragen, als Ordinate die Größenordnung von  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ .

Die Iteration wurde solange fortgesetzt, bis die Bedingung  $\max_{i,j} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| < 10^{-4}$  für alle i, j erfüllt war.

Tabelle 1

$\tau$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\delta_1$	$\max  u^2 - u^{n-1} $	$\max  u^n - 1 $	$n$
$0.4 \cdot 10^{-3}$	$10^3$	0	1	0	-	-	$0.7 \cdot 10^{-5}$	$0.9 \cdot 10^{-6}$	5
$0.4 \cdot 10^{-3}$	$10^5$	0	1	0	-	-	$0.2 \cdot 10^{-10}$	$0.8 \cdot 10^{-8}$	4
$0.4 \cdot 10^{-3}$	$10^8$	0	1	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-6}$	$0.9 \cdot 10^{-6}$	3
$0.4 \cdot 10^{-3}$	$10^9$	0	1	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-11}$	$0.9 \cdot 10^{-9}$	3
$0.4 \cdot 10^{-3}$	$10^{11}$	0	1	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-10}$	$0.9 \cdot 10^{-10}$	3
$0.4 \cdot 10^{-3}$	$10^{12}$	0	1	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-10}$	$0.9 \cdot 10^{-10}$	3
I	$10^3$	0	1	0	-	-	$0.8 \cdot 10^{-5}$	$0.9 \cdot 10^{-5}$	3
I	$10^4$	0	1	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-6}$	$0.8 \cdot 10^{-6}$	4
I	$10^{12}$	0	1	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-10}$	$0.8 \cdot 10^{-10}$	3

Tabelle 2

$\tau$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\delta_1$	$\max  u^n - U $	$n$
I	$10^2$	2	1	0	-	-	$0.5 \cdot 10^{-2}$	19
5	$10$	0	1	$10^2$	0	1	$0.9 \cdot 10^{-3}$	15
5	$10^2$	1	1	$10$	0	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	13
5	$10^2$	2	1	$10$	0	1	$0.9 \cdot 10^{-3}$	14
5	$10^3$	2	1	$10$	0	1	$0.5 \cdot 10^{-2}$	13
5	$10^3$	4	1	$10$	0	1	$0.4 \cdot 10^{-2}$	14
5	$10^3$	1	1	$10$	0	1	$0.5 \cdot 10^{-2}$	14
5	$10^3$	2	1	$10^3$	1	1	$0.4 \cdot 10^{-2}$	16
5	$10^3$	2	1	$10^3$	2	1	$0.3 \cdot 10^{-2}$	15

Tabelle 2 (Fortsetzung)

$\tau$	$\rho$	$r$	$\delta$	$\beta_1$	$\eta_1$	$\phi$	$\max u^n-U $	$n$
5	$10^8$	0	8	0	-	-	$0.9 \cdot 10^{-2}$	18
5	$10^8$	0	8	$10^2$	2	1	$0.5 \cdot 10^{-2}$	15
5	$10^8$	0	8	$10^4$	2	1	$0.2 \cdot 10^{-2}$	17
5	$10^8$	0	10	$10^2$	2	1	$0.7 \cdot 10^{-2}$	15
5	$10^8$	0	10	$10^4$	2	1	$0.7 \cdot 10^{-2}$	16
5	$10^8$	0	10	$10^6$	2	2	$0.9 \cdot 10^{-2}$	20
5	$10^8$	10	0	0	-	-	$0.5 \cdot 10^{-2}$	16
5	$10^8$	12	0	0	-	-	$0.5 \cdot 10^{-2}$	17
10	$10^2$	0	1	10	0	1	$0.8 \cdot 10^{-2}$	13
10	$10^2$	1	1	10	0	1	$0.9 \cdot 10^{-2}$	11
10	$10^2$	0	1	$10^2$	0	1	$0.8 \cdot 10^{-2}$	15

Tabelle 3

$\tau$	$\rho$	$r$	$\max u^n-U $	$n$
5	5	1	$0.7 \cdot 10^{-3}$	16
5	10	1	$0.5 \cdot 10^{-2}$	18
5	20	1	$0.9 \cdot 10^{-2}$	28
5	20	2	$0.4 \cdot 10^{-2}$	18
5	20	4	$0.5 \cdot 10^{-2}$	16

Tabelle 4

$\tau$	$\rho$	$r$	$\delta$	$\beta_1$	$\eta_1$	$\phi$	$\max u^n-u^{n-1} $	$\max u^n-f $	$n$
5	$10^3$	1	1	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	3
5	$10^3$	2	1	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	3
5	$10^3$	4	1	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	3
5	$10^8$	0	10	$10^2$	2	1	$0.1 \cdot 10^{-7}$	$0.1 \cdot 10^{-7}$	2
5	$10^{10}$	12	0	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-9}$	$0.1 \cdot 10^{-11}$	2
5	$10^{15}$	0	1	0	-	-	$0.1 \cdot 10^{-11}$	$0.3 \cdot 10^{-11}$	2

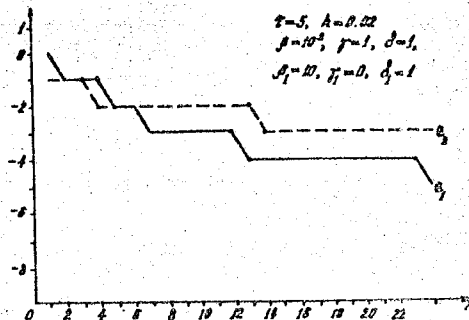
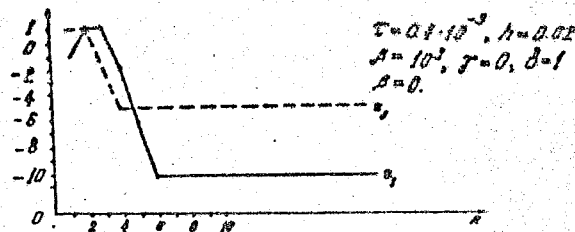
Tabelle 5

$\tau$	$\rho$	$r$	$\delta$	$\beta_1$	$\eta_1$	$\phi$	$\max u^n-U $	$n$
5	$10^3$	1	1	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	13
5	$10^3$	2	1	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	13
5	$10^3$	4	1	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	14
5	$10^8$	0	10	$10^2$	2	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	15
5	$10^{10}$	12	0	10	0	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	17

Tabelle 6

$\tau$	$\beta$	$\gamma$	$\max u^2-U $	$n$
5	5	1	$0.2 \cdot 10^{-2}$	16
5	10	1	$0.1 \cdot 10^{-2}$	18
5	10	2	$0.1 \cdot 10^{-2}$	16
5	15	2	$0.1 \cdot 10^{-2}$	18
5	20	4	$0.1 \cdot 10^{-2}$	15

(Darstellungen der Abhängigkeit)



Zum Vergleich bringen wir auch Tab. 7, welche Angaben über die Zahl der Iterationsschritte nach den verschiedenen Lösungsmethoden der Aufgabe (2), (3) mit den Grenzwertbedingungen  $u|_{r=1}$  und der Anfangsfunktion  $u^0 = 0$  enthält. Für jede Methode sind Angaben je nach den Größen der Iterationskennwerte angegeben, welche nahe an ihre optimalen Werte herankommen [3].

Tabelle 7

Methode Bereich	Gauß- Seidel	ÜR	DÜR	DWR	DW	ZVD	VDTB	VDMA
Quadrat 50 x 50	1531	327	190	60	101	61	38	25

In diesem Fall bezeichnen: ÜR - Methode der schrittweisen Überrelaxation; DÜR - Methode der zeilenweisen Differenzfaktorisierung mit Überrelaxation; DWR - Methode der Differenzfaktorisierung wechselnder Richtung (implizite Peaceman-Rachford-Methode); DW - Dreiecksmethode wechselnder Richtung (explizites Schema der variablen Richtungen); ZVD - zweiparametrische variable Dreiecksmethode; VDTB - variable Dreiecksmethode mit Tschebyscheff-Beschleunigung; VDMA - variable Dreiecksmethode mit minimalen Abweichungen.

#### L i t e r a t u r


1. Н.Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. "Наука", Новосибирск, 1967.  
Janenko, Nikolaj Nikolaevič: Metod drobných šagov rešenija mnogomerných zadač matematičeskoj fiziki. Novosibirsk: Verlag "Nauka", 1967.  
engl. Übersetzung: The method of fractional steps; the solution of problems of mathematical physics in several variables by N.N. Yanenko.  
Berlin/New York: Springer-Verlag, 1971.
2. А.А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", 1971.  
Samarskij, Aleksandr Andreevič: Vvedenie v teoriju raznostnyh schem. Moskva: Verlag "Nauka", 1971.  
<Einführung in die Theorie der Differenzen-Schemata.>
3. В.П. Ильин. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Лекции для студентов НГУ, Новосибирск, 1970.  
Il'in, Valerij Pavlovič: Raznostnye metody rešenija èlliptičeskich uravnenij. Lekcii dlja studentov Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Novosibirsk: 1971.  
<Differenzen-Lösungsmethoden für elliptische Gleichungen.>

Redaktionseingang  
15.10.1974

Rechenzentrum der  
Sibirischen Abteilung der  
Ak.d.Wis. der UdSSR, Novosibirsk

Stuttgart, den 26.4.1976

Übersetzung von

  
(Ottmar Pertschi)  
Dipl.-Übersetzer