Ablage

Esenin-Vol'pin, A.S.:

ÜBER DIE EXISTENZ EINES UNIVERSELLEN KOMPAKTEN RAUMES VON BELIEBIGEM GEWICHT

Doklady Akademii nauk SSSR. Matematika. Moskva, 68 (1949), Nr 4, S. 649-652.
[Russ.: O suščestvovanii universal'nogo bikompakta ljubogo vesa.]

(649) Unter einem universellen Kompakten Raum vom Gewicht τ wird in dieser Arbeit ein solcher kompakter Raum vom Gewicht τ verstanden, den man stetig auf einen beliebigen kompakten Raum vom Gewicht τ und folglich auch, was unschwer zu erkennen ist, auf einen beliebigen kompakten Raum geringeren Gewichtes abbilden kann.

P.S. Aleksandrov (1) hat bewiesen, daß jeder kompakte Raum ein stetiges Bild eines nulldimensionalen kompakten Raumes desselben Gewichts ist. Deshalb genügt es, bei der Lösung des Problems über die Existenz eines universellen kompakten Raumes vom Gewicht τ sich auf die Untersuchung nulldimensionaler kompakter Räume zu beschränken.

A sei ein nulldimensionaler kompakter Raum vom Gewicht τ; die Menge aller offen-abgeschlossenen Untermengen hat die Mächtigkeit τ und ist Basis, und in Bezug auf die theoretischen Mengenoperationen Addition und Durchschnitt Boolesche Algebra, d.h. ein kommutativer Ring mit einer Einheit, in dem jedes Element idempotent ist: $a \cdot a = a + a = a$ bei beliebigem a und für jedes Element a existiert ein einziges Element a', das Komplement von a heißt, in der Form, daß $a \cdot a' = 0,\ a + a' = 1$ ist. Dabei fungieren als Addition und Multiplikation die theoretischen Mengenoperationen Addition und Durchschnitt, und als Null und Einheit dienen folglich die leere Menge und der ganze Raum.

Wallmann (2) bewies, daß für jede Boolesche Algebra ein nulldimensionaler kompakter Raum existiert, sodaß diese Boolesche Algebra isomorph ist zur Booleschen Algebra der offen-abgeschlossenen Untermengen. Es ist unschwer zu erkennen, daß diese Boolesche Algebra den jeweiligen nulldimensionalen kompakten Raum eindeutig bestimmt, und jeder nulldimensionale kompakte Raum genau eine Basis hat, welche die Boolesche Algebra ist.

A und B seien zwei nulldimensionale kompakte Räume, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die ihnen entsprechenden Booleschen Algebren. A soll stetig auf B abgebildet werden können; dann induziert der Übergang zu den Urbildern in A der Elemente von $\mathfrak{B}$ die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, bei der 0 in 0 und 1 in 1 übergehen (diese letzte Bedingung betrachten wir immer als erfüllt, wenn wir von den Isomorphismen der Booleschen Algebra sprechen; folglich behalten die von uns untersuchten Isomorphismen die Operation der Komplementbildung) umgekehrt soll $\mathfrak{B}$ isomorph in $\mathfrak{A}$ abgebildet werden können; dann kann man A stetig in B abbilden: es genügt, jedem Punkt $x \in A$ als Bild einen Punkt (wie unschwer zu sehen ist, einen einzigen) zuzuordnen, der zu allen Elementen $\mathfrak{B}$ gehört, deren Bilder in $\mathfrak{A}$ den Punkt x enthalten.

Auf diese Weise erweist sich die Untersuchung der nulldimensionalen kompakten Räume vom Gewicht τ und ihrer stetigen Abbildungen aufeinander als äquivalent der Untersuchung der Booleschen Algebra von der Mächtigkeit τ und ihrer Isomorphismen zueinander,
(650) und das Problem von der Existenz eines universellen kompakten Raumes vom Gewicht τ erweist sich als äquivalent zum folgenden Problem: ob eine universelle Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ existiert, d.h. eine derartige Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ, in der eine beliebige Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ isomorph eingebettet werden kann.

In dieser Arbeit gebe ich eine positive Antwort auf diese Frage unter der Bedingung, daß dem Axiomensystem der Mengentheorie die verallgemeinerte Kontinuum-Hypothese angegliedert wird: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ bei beliebigem α, deren Widerspruchsfreiheit von Gödel (3) nachgewiesen wurde.

φ sei die kleinste transfinite Mächtigkeit derart, daß $\tau \leqslant \varphi$; es ist unschwer zu erkennen, daß die lexikographisch geordnete Menge der Folgen $(x_0, \dots, x_\alpha, \dots, \alpha < \varphi)$, wo jedes x_α den Wert 0, 1 und 2 annehmen kann, und, von einer bestimmten Stelle an, überall 1 steht, folgende Eigenschaft (P) besitzt: zwei einander zugeordnete Folgen (so bezeichne ich ein Paar monotoner Folgen, von denen die eine monoton zunimmt, die andere monoton abnimmt, und jedes Element der ersten Folge kleiner ist als ein beliebiges Element der zweiten) von der Mächtigkeit $< \tau$ können nicht gegen einen gemeinsamen Punkt konvergieren (4). Die Dedekind-Abschliessung dieser Menge (mit Adjunktion der Enden), die wir durch I_τ bezeichnen, hat ebenfalls die Eigenschaft (P).

Wir werden die "Portion" I_τ eine leere Menge, Intervall (a, b), Halbintervall $[a, b)$ oder $(a, b]$ oder Segment $[a, b]$ nennen; a und b werden als beliebige verschiedene Elemente angenommen. Die "Portion" mit den Enden a und b werden wir mit $<a, b>$ bezeichnen. Nach dem Zermelo-Axiom wählen wir aus jedem $<a, b>$ nach einem Punkt c_{ab} aus.

R sei ein beliebiger kompakter Raum vom Gewicht τ, $\mathfrak{R}$ die ihm entsprechende Boolesche Algebra (die auf diese Weise eine beliebige Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ ist); wir zerlegen sie in Paare komplementärer Mengen $\{F^R_\alpha, F^{R'}_\alpha\}$, wobei ' Symbol des Komplements ist, α die Ordinalzahlen $< \tau$ durchläuft und $F^R_0 = \Lambda$, $F^{R'}_0 = R$.

Das Zeichen $\bar{F}^R_\alpha$ bezeichnet ferner F^R_α oder $F^{R'}_\alpha$.

Jedem $\bar{F}^R_\alpha$ ordnen wir eine Menge $\bar{\Phi}^R_\alpha$ zu, die Summe der "Portion" I_τ ist und identisch mit der weiter unten bestimmten Φ^R_α oder $\Phi^{R'}_\alpha$ (' bezeichnet hier das

Komplement bezüglich I_τ) in Übereinstimmung damit, ob $\tilde{F}_\alpha^R$ mit F_α^R oder $F_\alpha^{R'}$ identisch ist.

Wir setzen ein $\Phi_0^R = \Lambda$, $\Phi_0^{R'} = I_\tau$.

Wir machen die Induktionsannahme, daß wir jeder $\tilde{F}_\alpha^R, \alpha < \beta < \tau$ schon eine $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ zugeordnet haben, die Summe der Portionen I_τ ist, und dabei soll jede Menge $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{\Phi}_\alpha^R$ eine Portion sein, die leer oddr nicht leer ist, und zwar je nachdem ob $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ leer oder nicht leer ist.

Die Menge $\tilde{\Phi}_\beta^R$ bestimmen wir folgendermaßen. Wie auch immer die nicht-leere Mengé $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ sei, so haben wir für $\tilde{F}_\beta^R$ drei Möglichkeiten: 1) entweder hat F_β^R einen nicht leeren Durchschnitt mit $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$; 2) oder $F_\beta^{R'}$ schneidet sich nicht mit $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$; 3) oder sowohl F_β^R als auch $F_\beta^{R'}$ schneiden sich mit $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$.

In der entsprechenden Menge $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ der nicht leeren "Portion" $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{\Phi}_\alpha^R = \langle a, b \rangle$ kennzeichnen wir eine Teilmenge auf folgende Weise: bei 1) ist die zugeordnete Menge leer; bei 2) die zugeordnete Menge die ganze "Portion" $\langle a, b \rangle$; bei 3) der gekennzeichnete Teil die "Portion" $\langle a, c_{ab}]$.

(651) Die Summe all dieser gekennzeichneten "Portionen" sei die Menge Φ_β^R , ihr Komplement bezüglich I_τ sei $\Phi_\beta^{R'}$. Offensichtlich erfüllt die Menge aller $\tilde{\Phi}_\alpha^R$, mit $\alpha < \beta + 1$, die Induktionsannahme (wobei β durch $\beta + 1$ ersetzt wurde).

Wenn γ Limes-Zahl $< \tau$ und alle $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ bei $\alpha < \gamma$ bestimmt sind, dann ist $\bigcap_{\alpha<\gamma} \tilde{\Phi}_\alpha^R$ eine "Portion", die nur in dem Fall leer ist, wenn die entsprechende Menge $\bigcap_{\alpha<\gamma} \tilde{F}_\alpha^R$ leer ist. Dies folgt aus der Bestimmung der Eigenschaft (P) und der Abgeschlossenheit der Menge $\tilde{F}_\alpha^R$ im kompakten Raum R.

Dies macht es möglich, $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ für ein beliebiges $\alpha < \tau$ zu bestimmen. Es ist leicht zu verifizieren (z.B. mit Hilfe dessen, daß aus der Übereinstimmung von $\tilde{F}_\alpha^R$ und $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ folgt, daß die Enddurchschnitte nicht leer sind), daß die Menge aller $\tilde{\Phi}_\alpha^R$, mit $\alpha < \tau$, bezüglich der theoretischen Mengenoperationen Addition und Durchschnitt eine Boolesche Algebra bildet, die isomorph zu $\mathfrak{R}$ ist.

Aus der verallgemeinerten Kontinuum-Hypothese folgt, daß die Menge aller möglichen $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ für alle R und $\alpha < \tau$ die Mächtigkeit τ hat. Dann, wählen wir die kleinste unendliche transfinite oder abzählbare Mächtigkeit p_α so, daß $\alpha < p_\alpha \leqslant \tau$; wenn $0 < \mathfrak{m} < p_\alpha = \aleph_{\gamma+1}$, dann ist $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_\gamma$ und aus der verallgemeinerten Kontinuum-Hypothese folgt $p_\alpha^{\mathfrak{m}} = \aleph_{\gamma+1}^{\mathfrak{m}} = (2^{\aleph_\gamma})^{\mathfrak{m}} = 2^{\aleph_\gamma \mathfrak{m}} = 2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1} = p_\alpha$, d.h. $p_\alpha^{\mathfrak{m}} = p_\alpha$. Wie ersichtlich ist, genügt es zu beweisen:

bei einem beliebigen $\alpha<\tau$ die Mächtigkeit $\leqslant p_\alpha$ von Φ_α^R. Wir nehmen an, daß daß dies für alle $\alpha<\beta<\tau$ schon bewiesen sei. Und wir beweisen, daß für die Mächtigkeit von allen Φ_β^R stets $\leqslant p_\beta$ ist. Denn jedes Φ_β^R ist bestimmt, wenn alle $\Phi_\alpha^R, \alpha<\beta$ bestimmt sind und ausgewiesen ist, welche Teilmengen der "Portionen" $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{\Phi}_\alpha^R$ dabei gekennzeichnet sind. Doch aufgrund der Komplementärbildung und wegen $\bar{\bar{\beta}}\leqslant\beta<p_\beta$ kann für alle Mengen $\{\tilde{\Phi}_\alpha^R; \alpha<\beta\}$ nicht mehr existieren als für alle Untermengen der Mächtigkeit $\bar{\bar{\beta}}$ der Menge aller $\tilde{\Phi}_\alpha^R, \alpha<\beta$, die die Mächtigkeit $\leqslant p_\beta$ hat, d.h. für alle Mengen $\{\tilde{\Phi}_\alpha^R; \alpha<\beta\}$ ist nicht mehr als $p_\beta^{\bar{\bar{\beta}}}=p_\beta$ vorhanden. Wir setzen jetzt $\{\tilde{\Phi}_\alpha^R; \alpha<\beta\}$ beliebig fest; Φ_β^R hängt dann nur davon ab, welcher der Fälle 1), 2), 3) im Verhalten von $\tilde{F}_\beta^R$ bezüglich seiner Durchschnitte mit verschiedenen nicht leeren $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ eintritt; dabei genügt es, aufgrund der Kompaktheit von R und der Abgeschlossenheit aller $\tilde{F}_\alpha^R$ in ihr, die Verteilung der Fälle 1'), 2'), 3') zu berücksichtigen, für welche man für jeden eine Bestimmung erhält, wenn man im entsprechenden Fall 1), 2), 3) den Ausdruck $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ durch den Durchschnitt der endlichen Zahl der Multiplikatoren des letzten Durchschnitts irgendwie ersetzt. Für diese Bestimmung kann man eine endliche Menge bilden, wenn β endlich ist; $\bar{\bar{\beta}}$ wird, wenn β unendlich ist, und in jedem anderen Falle eine bestimmte Menge $\mathfrak{m}<p_\beta$ sein; für jeden davon interessieren uns die drei möglichen Verhaltensfälle von $\tilde{F}_\beta^R$, folglich ist für alle uns interessierenden Möglichkeiten für $\tilde{F}_\beta^R$ bezüglich aller $\bigcap_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ dann $\leqslant 3^{\mathfrak{m}}\leqslant p_\beta^{\mathfrak{m}}=p_\beta$ vorhanden. Auf diese Weise ist für alle möglichen $\tilde{\Phi}_\beta^R$ dann $\leqslant p_\beta^2=p_\beta$ vorhanden, womit bewiesen ist, daß für alle möglichen $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ bei beliebigem R τ vorhanden ist. Die kleinste Boolesche Algebra Φ, die alle $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ enthält, (bezüglich der theoretischen Mengenoperationen Addition und Durchschnitt) hat die Mächtigkeit τ und enthält offensichtlich jede beliebige Boole-
(652) sche Algebra der Mächtigkeit τ; d.h. Φ ist universelle Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ; ihr entspricht der universelle kompakte Raum C_τ vom Gewicht τ.

Umgekehrt ist leicht zu erkennen, daß $2^{\mathfrak{m}}\leqslant\tau$ ist bei $\mathfrak{m}<\tau$, wenn $\bar{\bar{\Phi}}=\tau$ ist.

Bei $\tau=\aleph_0$ wird die Kontinuum-Hypothese in dieser Überlegung nicht gebraucht und ist $C_{\aleph_0}$ eine vollständige Cantor-Menge.

Redaktionseingang 18.VII.1949
Eingereicht vom Akademiemitglied A.N. Kolmogorov am 20.VII.1949.

Zitierte Literatur

1. Aleksandrov, P.S.: O ponjatii prostranstva v topologii ⟨Über den Raumbegriff in der Topologie⟩. - Uspechi matematičeskich nauk. Moskva, 2 (1947), Nr 1(17), S. 5-57.

2. Wallmann, Henry: Lattices and topological spaces. - Annals of mathematics. Princeton, 39 (1938), Nr 1, S. 112-126.

3. Gödel, Kurt: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory.
   - Annals of mathematics studies. Princeton, Nr 3, 1940.
   russische Übersetzung von A. Markov: K. Gedel': Sovmestimost' aksiomy vybora i obobščennoj kontinuum-gipotezy s aksiomami teorii množestv.
   -- Uspechi matematičeskich nauk. Moskva, 3 (1948), Nr 1 (23), S. 96-149.

4. Hausdorff, Gründzüge einer Theorie der geordneten Mengen.
   - Mathematische Annalen. Leipzig-Berlin, 65 (1908), [S. 435-505], hier: S. 494.

Stuttgart, den 4. Juli 1975 i.A.

Ullmar Pertschi

(Pertschi)
Dipl.-Übersetzer