

11/124

B e k i n, N. G., L i t v i n o v, V. V.,
P e t r u š a n s k i j, V. Ju.

METHODE ZUR BERECHNUNG DER ENERGIEDYNAMISCHEN UND
HYDRODYNAMISCHEN CHARAKTERISTIKEN DES KALANDRIERENS
POLYMERER STOFFE

Übersetzung aus: Kaučuk i rezina. Moskva, 34 (1975), Nr 8,
S. 32 - 36.

Russ.: Метод расчета энергосиловых и гидродинамических
характеристик процесса каландрования полимерных
материалов.

Metod rasčeta ěnergosilovych i gidrodinamičeskich
charakteristik processa kalandrovanija polimernych
materialov.

Einer der wichtigsten Vorgänge beim Verarbeiten von polymeren Stoffen ist das Kalandrieren. Gegenwärtig stellt sich die Aufgabe, die Produktionsvorgänge bei der Verarbeitung von Polymeren durch eine wissenschaftlich begründete Wahl technologischer Verfahrensweisen zu intensivieren und den Produktionsablauf zu optimieren. In der Literatur gibt es Hinweise auf die Theorie der Walzwerke [1, S.232; 2], die eine Bestimmung der dynamischen und energetischen Kennwerte des Verarbeitungsvorganges von Polymeren erlauben; es ist notwendig, diese für die Berechnung der Festigkeit der Anlage zu kennen. In den letzten Jahren wurden einige Untersuchungsergebnisse der Wärmevorgänge im Bereich der Materialverformung in Walzwerken veröffentlicht [3, 4].

Der Fließvorgang des polymeren Stoffes beim Kalandrieren kann durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben werden, das die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes-Gleichung und die Energiegleichung miteinschließt. Wir nehmen den

Die Komponenten des Metrik-Tensors sehen folgendermaßen aus:

$$g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} = h^2 \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = 0 \quad (2)$$

d.h. das Koordinatensystem ist orthogonal. Das im bipolaren Koordinatensystem angeschriebene Gleichungssystem kann man wesentlich vereinfachen, wenn man in Betracht zieht, daß der Abstand zwischen den Walzenoberflächen viel kleiner ist als der Verformungsbereich. Außerdem ist die Viskosität der meisten polymeren Stoffe so, daß die Trägheitsglieder in der Bewegungsgleichung vernachlässigt werden können, da die angeführte Reynoldszahl [7, S.116] die Größenordnung 10^{-3} - 10^{-4} hat. Wann man die Relation der Breite des Verformungsbereiches des polymeren Stoffes ($2\alpha_0$) zu seiner Länge (β') als klein ansieht und die beiden Geschwindigkeitskomponenten v und u (wobei v und u Projektionen der Geschwindigkeit auf den Achsen α und β sind) und den Metrik-Tensor h nach den Potenzen des Parameters $\varepsilon = 2\alpha_0/\beta'$ zerlegt, so erhalten wir unter Vernachlässigung der Glieder der Größenordnung ε^2 das ursprüngliche Gleichungssystem⁺[6]:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (hu) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (hv) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \mu \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right|^n \cdot \operatorname{sign} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right] \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\lambda}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{\rho c_v}{h} \left(u \frac{\partial T}{\partial \beta} + v \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \mu \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right|^{n+1} \quad (6)$$

mit P - hydrostatischer Druck;

μ - Viskosität des Stoffes;

γ - Wärmeleitfähigkeitskoeffizient des Stoffes;

T - Temperatur des Stoffes;

ρ - Dichte des Stoffes;

c_v - Wärmekapazität des Stoffes;

n - Fließindex.

⁺ Für die in der Industrie verwendeten Walzen ist $\alpha_0 \approx 0,04 + 0,05$, $\beta' \approx 2,5$ und folglich $\varepsilon = 0,015 + 0,020$.

Die Randbedingungen für den Fall symmetrischen Kalandrierens sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} P=0, T=T_0 & \text{ bei } -\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 \\ T=T_1 & \text{ bei } \alpha = \alpha_0 \\ T=T_2 & \text{ bei } \alpha = -\alpha_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Um die Abgangskoordinate β_- und den Durchsatz $2Q$ zu finden, nehmen wir an, daß bei seinem Austritt aus dem Verformungsbereich der Druck und seine Ableitung $\frac{\partial P}{\partial \beta}$ gleich Null sind:

$$P = \frac{\partial}{\partial \beta} P = 0 \quad \text{bei } \beta = \beta_- \quad (8)$$

$$u = V, v = 0 \quad \text{bei } \alpha = \pm \alpha_0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) = v = 0 \quad \text{bei } \alpha = 0 \quad (10)$$

Die Randbedingung (10) ist eine Näherung, da sie die Verformung des Geschwindigkeitsfeldes im Zentrum der kalandrierte Platte bei asymmetrischer Randbedingung je nach Temperatur nicht berücksichtigt (7). Es sei jedoch hinzugefügt, daß sich das Geschwindigkeitsfeld industrieller Kunststoffe mit schwacher Abhängigkeit des Fließindex u von der Temperatur unwesentlich ändert.

Die Temperaturabhängigkeit der rheologischen Koeffizienten μ und n wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu_0 \exp \{ -b(T - T_0) \}, \\ n &= n_0 \exp \{ +a(T - T_0) \} \end{aligned} \quad (11)$$

beschrieben, mit a, b - empirische Koeffizienten [1, S. 51].

Die Lösung des Gleichungssystems (3) - (6) mit den Randbedingungen (7) - (11) wird durch numerische Verfahren durchgeführt.

Untersuchen wir jetzt die Lösung des Gleichungssystems (3) bis (6) mit den Randbedingungen (7) - (11) in einem Allgemeinfall. Gleichung (3) integrieren wir nach α unter Berücksichtigung der Randbedingung (9)

$$\int_0^{\alpha_0} (hu) d\alpha = Q = \text{const} \quad (12)$$

Bei $\beta = \beta_-$ ist im Abgangsquerschnitt $h_* = h(\beta_-) = \frac{a}{1 - \cos(\beta_-)}$ und der Durchsatz $2Q$ kann auf folgende Weise bestimmt werden:

$$Q = \langle u \rangle h_* \alpha_0 = V h_* \alpha_0 \quad (13)$$

wobei mit der verwendeten rheologischen Gleichung die Geschwindigkeit $\langle u \rangle$ mit der Rotationsgeschwindigkeit der Walzen übereinstimmt. Die Abgangskoordinate β^- bekommen wir aus Gleichung (14) und der Randbedingung (8)

$$\int_{\beta_+}^{\beta_-} (\partial P / \partial \beta) d\beta = 0 \quad (14)$$

Wir integrieren die Bewegungsgleichung (4) nach α :

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial \beta} = \mu \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right|^n \cdot \text{sign} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right] \right\} + C(\beta) \quad (15)$$

Aufgrund von Randbedingung (10) ist die Integrationskonstante $C(\beta) = 0$.

Wir integrieren Gleichung (15) nach α und erhalten unter der Annahme, daß $m = 1/n$,

$$\int_0^{\alpha_0} \alpha^m \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|^m \cdot \text{sign} \left[\frac{\partial P}{\partial \beta} \right] d\alpha = \frac{u}{h} + C_1(\beta) \quad (16)$$

Da wir wissen, daß $u = V$ an der Walzenoberfläche ($\alpha = \pm \alpha_0$) bei Berücksichtigung der Randbedingung (9), läßt sich der Wert $C_1(\beta)$ bestimmen:

$$u = V + h^2 \int_{\alpha}^{\alpha_0} \alpha^m \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|^m \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial P}{\partial \beta} \right) d\alpha \quad (17)$$

Nachdem wir den Ausdruck (17) in die Beziehung (12) eingesetzt haben, erhalten wir unter Berücksichtigung von Gleichung (13) die Gleichung zur Bestimmung der Größe $\frac{\partial P}{\partial \beta}$:

$$V \alpha_0 h_* = \int_{\alpha}^{\alpha_0} V h d\alpha - \int_0^{\alpha_0} h^2 \int_{\alpha}^{\alpha_0} \alpha^m \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|^m \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial P}{\partial \beta} \right) d\alpha d\alpha \quad (18)$$

Da der Parameter h in der verwendeten Näherung nur von β abhängt, sieht Gleichung (18) folgendermaßen aus:

$$\frac{\alpha_0 V (h_* - h)}{h^2} = \int_0^{\alpha_0} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \alpha^m \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|^m \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial P}{\partial \beta} \right) d\alpha d\alpha \quad (19)$$

Weil die Parameter $m=1/n$ und μ Funktionen der Temperatur sind, und folglich auch von α abhängen, ist es nicht möglich, den Wert $(\partial P/\partial \beta)$ auf analytischem Wege aus der Integralgleichung (19) zu erzielen. Deshalb wird die Lösung von Gleichung (19) durch numerische Verfahren durchgeführt.

Die Größe der Geschwindigkeitskomponente u erhalten wir aus Gleichung (17) und die Komponente v aus der Kontinuitätsgleichung (3).

Wir untersuchen das zweidimensionale Gitter im Verformungsbereich, das für jede der Variablen gleich ist:

$$\begin{aligned} \beta_j &= j\Delta\beta & \Delta\beta &= (\beta_+ - \beta_-)/K & j &= 0, 1, \dots, K \\ \alpha_i &= i\Delta\alpha & \Delta\alpha &= \alpha_0/N & i &= 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

Für einen gewissen festen Wert β ($j=\text{const}$) finden wir nach dem oben dargelegten Verfahren die Größe $(\partial P/\partial \beta)$, da wir die Temperaturverteilung in diesem Querschnitt kennen, und danach die Werte $u_j^i, v_j^i, \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h}\right)\right]^i$. Die Temperaturverteilung im folgenden Querschnitt untersuchen wir nach der Differenzengleichung:

$$A_i T_{i-1}^{i+1} - C_i T_i^{i+1} + B_i T_{i+1}^{i+1} = F_i \quad (20)$$

wobei die Koeffizienten A_i, B_i, C_i, F_i durch $u_j^i, v_j^i, \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h}\right)\right]^i, n_i^i, \mu_i^i$ und die wärmephysikalischen Koeffizienten ausgedrückt werden [8].

Die Lösung von Gleichung (20) führen wir nach der Methode der "Differenzenfaktorisierung" in zwei Schritten durch: zuerst bestimmen wir nach den Rekursionsformeln die Differenzenfaktorisierungskoeffizienten (direkte Differenzenfaktorisierung), und dann

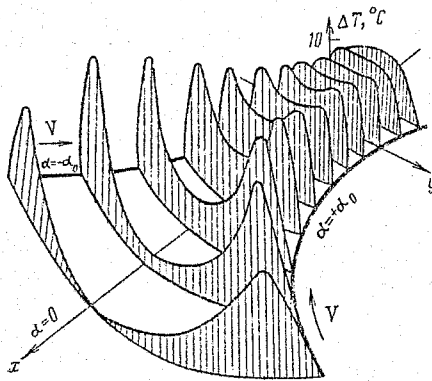


Abb. 2. Temperaturverteilung im Verformungsbereich eines Gummigemischs auf Naturkautschuk-Basis bei $\mu=4,16 \text{ kp}\cdot\text{n}/\text{cm}^2$, $n=0,2$, $b=0,0448$, $a=0,003$, $T_0=T_1=T_2=40^\circ\text{C}$, $R=30 \text{ cm}$, $V=38,0 \text{ cm/s}$, $2h_0=0,02 \text{ cm}$, $\beta=0,64$.

die Temperaturverteilung (umgekehrte Differenzenfaktorisierung) in der Schicht $j+1$. Die Anzahl der Gitterknotenpunkte variiert in einem Bereich von 10×100 + 100×1000 . In den Abb. 2 - 5 sind die Ergebnisse der Rechnung, welche unter Verwendung eines Gitters mit den Maßen 40×200 durchgeführt wurde, dargestellt.

Weiteres Zerkleinern des Gitters garantierte keine merkliche Steigerung der Rechengenauigkeit. Der unbekannte Wert der Abgangskordinate β_- wurde in erster Näherung mittels Lösung des isothermen Problems (3) - (5) bestimmt, und danach wurde er verbessert, indem das Gleichungssystem (3) - (6) für den ganzen Verformungsbereich gelöst wurde. Die Komponenten des Wärmegleichgewichts errechnet man nach den folgenden Formeln:

die Wärmemenge, welche dem Stoff infolge von Dissipation zugeführt wird,

$$Q_g = L \int_{\beta_-}^{\beta_+} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(\mu(T) \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) \right|^{n+1} \right) h d\alpha h d\beta \quad (21)$$

die Wärmemenge, welche vom Stoff mitgeführt wird [Konvektion],

$$Q_m = L \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \rho c_v T u h d\alpha - \int_{\alpha_0}^{\alpha_0} \rho c_v T u (\alpha, \beta_+) h d\alpha \quad (22)$$

die Wärmemenge, welche vom Stoff an die Walze abgegeben [Konduktion] oder infolge von Wärmeaustausch von ihr aufgenommen wird,

$$Q_\alpha = L \int_{\beta_+}^{\beta_-} \lambda \left(\frac{\partial T(\alpha_0, \beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial T(-\alpha_0, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta \quad (23)$$

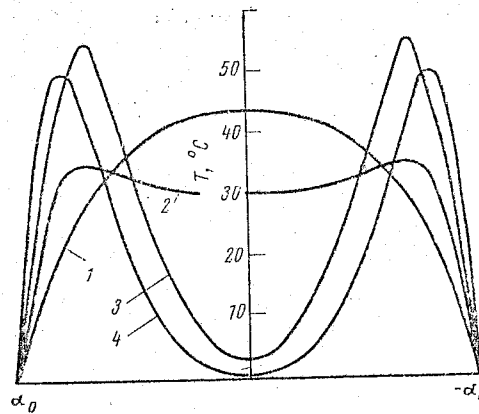


Abb. 3. Temperaturverteilung im kleinsten Querschnitt bei verschiedenen Werten von $2h_0$:

1 - $2h_0 = 0,012$ cm; 2 - $2h_0 = 0,02$ cm; 3 - $2h_0 = 0,1$ cm; 4 - $2h_0 = 0,15$ cm.

mit L - Walzenlänge.

Damit kann man eine beliebige Komponente des Wärmegleichgewichts bestimmen, wenn man die beiden anderen kennt, da

$$Q_m + Q_\alpha + Q_g = \text{const}$$

Die Größe der Schubspannung errechnet man als Integral des lokalen Druckes für den gesamten Verformungsbereich, wobei der lokale Druck aus Gleichung (17) bestimmt wird. Die benötigte Leistung ist numerisch gleich der Größe des Integrals (21) [5].

Die Ergebnisse der Berechnung des Temperaturfeldes im Verformungsbereich zeigen (siehe Abb. 2), daß die Temperaturverteilung im Anfangsbereich des Verformungsbereiches dadurch gekennzeichnet ist, daß es zwei Maxima an der Walzenoberfläche gibt, wo die Wärmeausstrahlungen maximal sind, und zwei Minima im Plattenzentrum. Je nach Transport nimmt die Temperatur im Plattenzentrum infolge der Wärmeleitfähigkeit des Stoffes zu. Die Bestimmung der höchsten Temperaturen im Verformungsbereich ermöglicht eine Prognose über die Wahrscheinlichkeits des Anvulkanisierens der Gummigemische oder des thermischen Abbaus der Kunststoffe.

Vom Stoff hängt die Dicke der kalandrierten Platte und folglich auch die Temperaturverteilung im Verformungsbereich ab. Wenn die Spaltgröße zwischen den Walzen verringert wird, z.B. beim

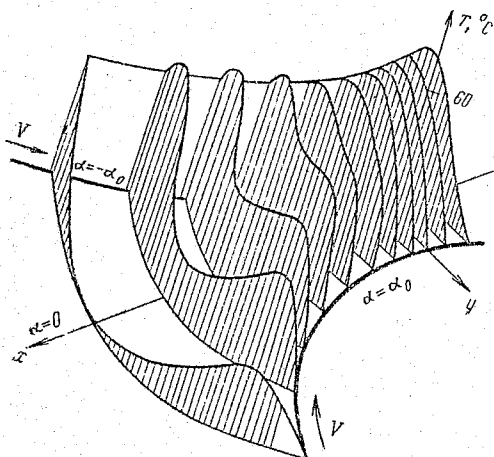


Abb. 4. Temperaturverteilung im Verformungsbereich eines Gummigemisches auf Naturkautschukbasis bei $T_0 = T_1 = 40^\circ\text{C}$, $T_2 = 60^\circ\text{C}$, $2h_0 = 0,01 \text{ cm}$.

Walzen von dünnen Folien, dann verformt sich das Temperaturfeld und nimmt eine Parabelform an (siehe Abb. 3). Ein Temperaturmaximum im Verformungsbereich beim Verarbeiten von Gummigemischen beobachtet man am einem Querschnitt maximalen Drucks [3], beim Walzen von dünnen Folien am Anfang des

Verformungsbereiches (siehe Abb. 2). Es muß noch hinzugefügt werden, daß das Viskositätsfeld des Stoffes als Funktion der Temperatur eine spiegelbildliche Darstellung des Temperaturfeldes ist.

Beim industriellen Kalandrieren verwendet man für den richtigen Übergang des Materials von einer Walze zur anderen eine kleine kinematische Friktion, bei der $f=V_1/V_2=1,05 \pm 1,1$. Wie die Berechnungen zeigen, kann man anstelle der kinematischen

Friktion eine Wärme-"Friktion" einsetzen, d.h. verschiedene Temperaturen der Walzen vorgeben. Dabei wird das Temperaturfeld asymmetrisch (siehe Abb. 4). In diesem Fall tritt die maximale Temperaturzunahme, welche durch Wärmeaustausch- und Dissipationsvorgänge erklärt werden kann, immer an der Oberfläche der wärmeren Walze auf. Bei einer temperaturbedingten Asymmetrie hängt das Profil des Temperaturfeldes ebenfalls beträchtlich von der Dicke der kalandrierten Platte ab (siehe Abb. 5).

Auf diese Weise macht es die erarbeitete Rechenmethode möglich, nicht nur die dynamischen und energetischen, sondern auch die technologischen Parameter des Kalandrierens, wie auch die Komponenten des Wärmegleichgewichts zu bestimmen. Dies liefert uns die Möglichkeit, den Produktionsprozess des Kalandrierens im elektronischen Digitalrechner zu simulieren, um die Dynamik der Einrichtung zu berechnen, moderne Heiz- und Kühlsysteme herstellen zu können und rationelle technische Verfahren unter Berücksichtigung der rheologischen und wärmephysikalischen Eigen-

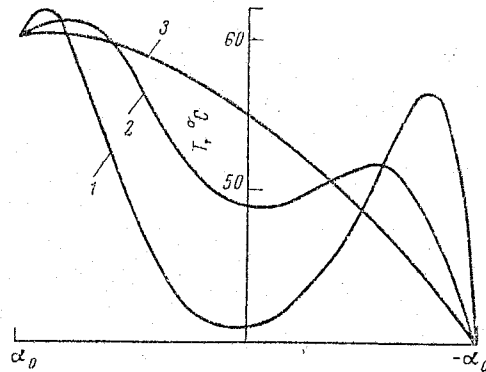


Abb. 5. Temperaturverteilung im Querschnitt des kleinsten Spalts bei asymmetrischer Randbedingung für die Temperatur ($T_1=T_0=40^{\circ}\text{C}$, $T_2=60^{\circ}\text{C}$) bei verschiedenen $2h_0$:

- 1 - $2h_0=0,01$ cm; 2 - $2h_0=0,025$ cm;
- 3 - $2h_0=0,1$ cm.

schaften des zu verarbeitenden Stoffes auszuwählen, wie auch für die Optimierung des Prozesses im Gesamten.

L I T E R A T U R

1. Мак Келви Д.М. Переработка полимеров. Пер. с англ. М., «Химия», 1965, 444 с.
 2. Красовский В.Н., Мирзоев Р.Г., Розе Н.В. В кн.: Машины и технология переработки полимеров. Л., ЛТИ им. Ленсовета, 1967.
 3. Бекин Н.Г. и др. «Каучук и резина», 1971, № 6, с. 28—32.
 4. Лукач Ю.Е., Доброногова С.И. В кн.: Машины и технология переработки полимеров. Л., ЛТИ им. Ленсовета, 1972, с. 19—25.
 5. Fredricson A.G. Principles and Application of Rheology. Prentice — Hall, Englewood Cliffs., 1964, № 1, s. 316.
 6. Литвинов В.В., Бекин Н.Г. В кн.: Машины и технология переработки каучуков, полимеров и резиновых смесей. Ярославль, ЯПИ, 1974.
 7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с нем. Под ред. Л.Г. Лойцянского. М., «Наука», 1974, 712 с.
 8. Тихонов А.Н., Самарский А.Д. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
-
1. M a k K e l v i, D.M.: Pererabotka materialov. Moskva: Verlag "Chimija", 1965.
Übersetzung von: M c K e l v e y, James M.: Polymer processing. New York: Wiley, 1962.
 2. R o z e, N.V., K r a s o v s k i j, V.N., M i r z o e v, R.G.: Kačestvennaja kartina tečenija polimerov v zazore meždu valkami.
In: Mašiny i tehnologija pererabotki polimerov. (Tezisy dokladov k konferencii 28 - 29 sentjabrja 1967 g.). Leningrad: Leningradskij ordena trudovogo krasnogo znamenija Tehnologičeskij Institut imeni Lensoвета, 1967, S. 183 - 189.
<Qualitatives Bild des Fließens der Polymere im Spalt zwischen den Walzen.>
 3. B e k i n, N.G., T o r n e r, R.V., P e t r u š a n s k i j, V.Ju., S u c h a e v, A.I.: Metod rasčeta temperaturnych polej pri kalandrovanii rezinovyh smesej.
- Kaučuk i rezina. Moskva, 30 (1971), Nr 6, S. 28 - 32.
<Methode zur Berechnung der Wärmefelder beim Kalandrieren von Gummigemischen.>
 4. L u k a č, Ju.E., D o b r o n o g o v a, S.I.; Issledovanie temperaturnogo polja pri nesimetričnom tečenii polimera v mežvalkovom zazore.
In: Mašiny i tehnologija pererabotki polimerov. (Mežvuzovskij sbornik naučnyh trudov.) Leningrad: Leningradskij ordena trudovogo krasnogo znamenija Tehnologičeskij Institut imeni Lensoвета, 3 (1972), S. 19 - 25.
<Untersuchung des Wärmefeldes bei asymmetrischem Fließen der Polymere im Spalt zwischen den Walzen.>
 5. F r e d r i c k s o n, Arnold G.: Principles and Application of Rheology. Prentice-Hall, Englewood Cliffs., 1964, Nr 1, S. 316.

6. L i t v i n o v, V.V., B e k i n, N.G.: O razrabotke matematičeskoj modeli processa tečenija psevdoplastikov meždju dvumja vraščajuščimisja cilindrami s proizvol'nom vchodom. In: Mašiny i tehnologija pererabotki kaučukov, polimerov i rezinovyh smesej. (Mežvuzovskij sbornik naučnyh trudov.) Jaroslavl': Jaroslavskij Politečničeskij Institut, 1974, S. 3 - 8.
(Über die Erstellung eines mathematischen Modells des Fließens von pseudoplastischen Stoffen zwischen zwei rotierenden Zylindern mit beliebigem Eingang.)
7. Š l i c h t i n g, G.: Teorija pograničnogo sloja. Pod red. L.G. Lojčjanskogo. Moskva: Verlag "Nauka", 1974.
Übersetzung von: S c h l i c h t i n g, Hermann: Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Braun, 1965.
8. T i c h o n o v, Andrej Nikolaevič, S a m a r s k i j, Aleksandr Andreevič: Uravnenija matematičeskoj fiziki. Moskva: Verlag "Nauka", 1972.
Deutsche Übersetzung: T i c h o n o v, N.N., S a m a r s k i j, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaft, 1974.

Polytechnisches Institut
Jaroslavl'

Redaktionseingang: 4.11.1974

Stuttgart, den 4.6.1976

Übersetzung von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer