156

Liber, A.E.

ZUR FLÄCHENTHEORIE IM ZENTROAFFINEN (VEKTOR-)RAUM

Übersetzung aus:

Doklady Akademii Nauk SSSR. Moskva, 85 (1952), Nr 1, S. 37 - 40.

Russ.: К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЦЕНТРАЛЬНО-АФФИННОМ (ВЕКТОРНОМ) ПРОСТРАНСТВЕ

K teorii poverchnostej v central'no-affinnom (vektornom) prostranstve.

1. Den n-dimensionalen Vektorraum B_n kann man als einen geometrischen n-Raum mit der Fundamentalgruppe GL(n) betrachten, die die Automorphismengruppe des Raumes B_n ist; dieser geometrische Raum ist isomorph zum zentroaffinen n-Raum E_n. Die Begriffe m-Fläche, m-Ebene usw. werden auf den n-Vektorraum übertragen; insbesondere entspricht einer durch das Zentrum von E_n verlaufenden m-Ebene ein m-dimensionaler Unterraum B_m des Raumes B_n. Die Untersuchung der geometrischen Formen im B_n ist in jener Hinsicht geeignet, daß die ermittelten Ergebnisse gleichzeitig für Punkt- und für Hyperebenenformen im zentroaffinen n-Raum interpretiert werden können.

Eine m-dimensionale Fläche S (m-Fläche) im B_n ist durch eine Abbildung $\mathrm{l}(\eta^a)$ $(a, b, c, d, e = 1, \ldots, m)$ eines Bereiches des arithmetischen m-Raumes auf den Vektorraum B_n bestimmt, wobei angenommen wird, daß die Komponenten $\mathrm{l}(\eta^a)$ bezüglich einer bestimmten konstanten Basis Funktionen von η^a der Klasse C_N sind, und die Vektoren $\mathrm{l}_a = \partial_a \mathrm{l}$ $(\partial_a = \partial / \partial \eta^a)$ bei jeder Wahl von η^a linear unabhängig sind. Unter der Voraussetzung der Regularität der Transformationen $\eta^{a'} = f^{a'}(\eta^b)$ assoziieren wir mit der m-Fläche S den geometrischen m-Raum X_m. Den Unterraum B_m, der von den Vektoren l_a aufgespannt wird, nennen wir Tangentialraum der m-Fläche S im Punkt η^a; der tangentiale B_m ist isomorph zum lokalen tangentialen $E_m(\eta^a)$ des assoziierten Raumes X_m, deshalb steht der m-Fläche S die tangentiale zusammengesetzte Mannigfaltigkeit $E_m(X_m)$ gegenüber [3].

Wir werden sagen, daß ein Zusatz zur Normalisierung[1] der m-Fläche S gegeben ist, wenn von jedem Punkt η^a die Zerlegung von B_n in die direkte Summe $B_n = B_m + B_1 + B_{n-m-1}$ gegenübergestellt wird, wobei B_m Tangentialraum, B_1 radialer Unterraum, der von dem Vektor l aufgespannt wird, und B_{n-m-1} zusätzlich normalisierender Unterraum ist. Der Zusatz zur Normalisierung existiert nur für die Flächen, die nicht "zentrokonisch" sind, d.h. für die der radiale B_1 nicht zum tangentialen B_m gehört. Da alle zusätzlich normalisierten Unterräume B_{n-m-1} zu einem bestimmten zentroaffinen E_{n-m-1} isomorph sind, wird einem jeden Punkt des assoziierten X_m ein bestimmter E_{n-m-1} gegenübergestellt, was zu der zusätzlich normalisierten zusammengesetzten Mannigfaltigkeit $E_{n-m-1}(X_m)$ führt, die mit der m-Fläche S assoziiert ist. Genauso werden wir auch sagen, daß eine Normalisierung der m-Fläche S gegeben ist, wenn von jedem Punkt η^a die Zerlegung von B_n in die direkte Summe: $B_n = B_m + B_{n-m}$ gegenübergestellt wird, wobei B_m Tangentialraum und B_{n-m} normalisierender Unterraum ist; analog zum vorhergehenden bestimmen wir die normalisierende zusammengesetzte Mannigfaltigkeit $B_{n-m}(X_m)$, die mit der m-Fläche S assoziiert wird. Es ist offensichtlich, daß der Zusatz zur Normalisierung ein Sonderfall der Normalisierung ist. Im weiteren Verlauf gehen wir von der Voraussetzung aus, daß $1 < m < n-1$, da die Fälle m = n - 1 und m = 1 ausführlich untersucht sind [2].

2. Es sei n_p (p, q = 1, ..., n-m-1; p_1, q_1 = 1, ..., n-m) Basis des zusätzlich normalisierenden B_{n-m-1}, dann bilden $\mathrm{l}, \mathrm{l}_a, n_p$ eine Basis des Raumes B_n, die Koeffizienten Γ^c_{ab} bei l_c in der Zerlegung der Vektoren $\partial_a \mathrm{l}_b$ nach der besagten Basis bilden die Komponenten eines affinen Zusammenhangs in der tan-

[1] wörtlich übersetzt: Ausstattung. Dieser Ausdruck, früher gebräuchlich, wurde wie andere heute überholte Termini durch die heute gebräuchlichen ersetzt.- Anm. d. Übers.

gentialen zusammengesetzten Mannigfaltigkeit $E_m(X_m)$ und analog dazu bilden die Koeffizienten Γ_{ap}^{q} bei $\mathfrak{n}_q$ in der Zerlegung der Vektoren $\partial_a \mathfrak{n}_p$ nach der besagten Basis die Komponenten eines affinen Zusammenhangs in der zusätzlich normalisierten zusammengesetzten Mannigfaltigkeit $E_{n-m-1}(X_m)$ [3]; wir verwenden diese Komponenten zur Operation der kovarianten Differentiation in den entsprechenden zusammengesetzten Mannigfaltigkeiten und erhalten die Derivationsformeln für die zusätzlich normalisierte Fläche in folgender Form:

$$D_a \mathfrak{l}_b = h_{ab\cdot}^{\ \ p} \mathfrak{n}_p + g_{ab}\mathfrak{l}, \quad D_a \mathfrak{n}_p = h_{ap\cdot}^{\ \ b} \mathfrak{l}_b + w_{ap}\mathfrak{l}, \quad (h_{[ab]\cdot}^{\ \ \ \ p} = 0, \quad g_{[ab]} = 0). \quad (1)$$

Wir verwenden die kovariante Differentiation dieses Zusammenhangs und erhalten die Integrierbarkeitsbedingungen des Systems (1):

$$\begin{aligned} R_{abc\cdot}^{\ \ \ \ d} &= 2h_{[a|c|}^{\ \ \ \ \ p} h_{b]p\cdot}^{\ \ \ \ d} - 2\delta_{[a}^{d} g_{b]c}, \quad D_{[a} h_{b]c}^{\ \ \ \ p} = 0, \quad D_{[a} g_{b]c} = -h_{c[a}^{\ \ \ \ p} w_{b]p}, \\ R_{abp\cdot}^{\ \ \ \ q} &= 2h_{[a|p|}^{\ \ \ \ \ c} h_{b]c\cdot}^{\ \ \ \ q}, \quad D_{[a} h_{b]p}^{\ \ \ \ c} = \delta_{[a}^{c} w_{b]p}, \quad D_{[a} w_{b]p} = h_{[a|p|}^{\ \ \ \ \ e} g_{b]e}, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei $R_{abc\cdot}^{\ \ \ \ d}$ und $R_{abp\cdot}^{\ \ \ \ q}$ Krümmungsgrößen der besagten Komponenten des affinen Zusammenhangs sind. Hieraus folgt: die Objekte Γ_{ab}^{c}, Γ_{ap}^{q} und die verbindenen Grössen $h_{ab\cdot}^{\ \ p}$, $h_{ap}^{\ \ b}$, g_{ab}, w_{ap}, die die Bedingungen (2) erfüllen, bestimmen genau bis auf die Automorphismen des Vektorraumes die zusätzlich normalisierte m-Fläche im n-Vektorraum B_n. Deshalb bilden die aufgezählten Objekte das Fundamentalsystem der Objekte der zusätzlich normalisierten m-Fläche im B_n.

Genauso können auch die Derivationsformeln, die Integrierbarkeitsbedingungen und das Grundtheorem für die normalisierte m-Fläche ermittelt werden. Formal können die Derivationsformeln der normalisierten m-Fläche aus den Gleichungen (1) ermittelt werden, wenn man $g_{ab} = 0$, $w_{ap} = 0$ annimmt und die Indizes p, q durch p_1, q_1 ersetzt und die endlichen Relationen: $\mathfrak{l} = v^a \mathfrak{l}_a + v^{p_1} \mathfrak{n}_{p_1}$ hinzufügt. Entsprechende Änderungen sind in den Gleichungen (2) vorzunehmen, damit man aus ihnen die Integrierbarkeitsbedingungen der normalisierten Fläche erhält; ihnen müssen die Relationen

$$D_a v^b + h_{ap_1}{}^b v^{p_1} = \delta^b_a, \quad D_a v^{p_1} + h_{ab}{}^{p_1} v^b = 0. \qquad (3)$$

hinzugefügt werden. Auf diese Weise ermitteln wir: durch die Objekte $\Gamma^c_{ab}, \Gamma^{q_1}_{ap_1}$ und die verbindenden Größen $h_{ab}{}^{p_1}, h_{ap_1}{}^b, v^a, v^{p_1}$, die die besagten Bedingungen erfüllen, wird die normalisierte m-Fläche im B_n genau bis auf die Automorphismen des Vektorraumes bestimmt.

Die m-Fläche S wird regulär genannt, wenn die Menge ihrer tangentialen Ebenen von m Parametern abhängt, anderenfalls wird die m-Fläche singulär genannt. Man kann zeigen, daß die m-Fläche dann und nur dann singulär sein wird, wenn es im assoziierten X_m ein solches Vektorfeld v^a gibt, daß $h_{ba}{}^p v^a = 0, g_{ab} v^a = 0$.

3. Zur Konstruktion der Geometrie der nichtnormalisierten m-Fläche im B_n ist es notwendig, an dieser Stelle eine invariante Zusatznormalisierung oder Normalisierung zu bezeichnen, d.h. eine solche Zusatznormalisierung oder Normalisierung, die durch die m-Fläche selbst bestimmt wird. B_{n-m-1} sei ein bestimmter beliebig ausgewählter zusätzlich normalisierender Unterraum und $^*B_{n-m-1}$ ein bestimmter anderer zusätzlich normalisierender Unterraum und $^*\mathfrak{n}_p$ sei seine Basis, die der Basis $\mathfrak{n}_p$ in B_{n-m-1} entspricht; dann ist

$$^*\mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}_p + T^a_p \mathfrak{l}_a + S_p \mathfrak{l}. \qquad (4)$$

Die verbindenden Größen T^a_p, S_p bestimmen den Übergang von einer zusätzlichen Normalisierung zur anderen eindeutig. Bei Transformation der Zusatznormalisierung werden, allgemein gesagt, die fundamentalen geometrischen Objekte der zusätzlich normalisierten m-Fläche transformiert. Man kann leicht zeigen, daß jedem invarianten Zusatz zur Normalisierung auf einer beliebig zusätzlich normalisierten m-Fläche die verbindenden Größen P^a_p, Q_p

entsprechen, die bei Transformation von (4) transformiert werden nach dem Gesetz $^{*}P_p^a = P_p^a + T_p^a$, $^{*}Q_p = Q_p + S_p$. Umgekehrt bestimmen alle beiden verbindenden Größen P_p^a, Q_p, die auf einer beliebig zusätzlich normalisierten m-Fläche bestimmt sind und die bei Transformation von (4) nach dem oben genannten Gesetz transformiert werden, den invarianten Zusatz zur Nomalisierung, nämlich den, für den $P_p^a = 0$, $Q_p = 0$.

Wir wollen eine Menge relativer Invarianten der verbindenden Größe $h_{ab}{}^{p}$ untersuchen und nehmen dafür an, daß irgendeine solche von Null verschiedene Invariante I mit dem Gewicht k_1 bezüglich des tangentialen E_m und dem Gewicht k_2 bezüglich des zusätzlich normalisierten E_{n-m-1} existiert, wobei $k_1 k_2 \neq 0$. In die Betrachtung führen wir dann die verbindenden Größen ein:

$$h^{ab}{}_{p} = \frac{\partial \ln I}{\partial h_{ab}{}^{p}}, \quad h^{abcd}{}_{pq} = -\frac{\partial h^{ab}{}_{p}}{\partial h_{cd}{}^{q}}. \qquad (5)$$

Mann kann zeigen, daß die Bedingungen

$$\text{a) } P_p^a \equiv \frac{2}{k_1 - 2k_2}\left\{h^{bcda}{}_{qp} + \frac{1}{k_2 - k_1} h^{bc}{}_{q} h^{da}{}_{p}\right\} D_b h_{cd}{}^{q} = 0, \quad \text{б) } Q_p \equiv -h^{ab}{}_{p} g_{ab} = 0 \qquad (6)$$

den invarianten Zusatz zur Normalisierung der m-Fläche im B_n bestimmen.

Da die Transformation der Normalisierung nach dem Gesetz $^{*}\mathrm{n}_{p_1} = \mathrm{n}_{p_1} + T^a_{p_1} \mathrm{l}_a$ durchgeführt wird, so ist das analoge Verfahren auch für die invariante Bestimmung der Normalisierung geeignet; formal wird sie durch die Bedingungen (6,a) bestimmt, in denen p, q durch p_1, q_1 zu ersetzen sind. Diese Ergebnisse sind unmittelbar für die Flächen und Hyperflächenscharen im zentroaffinen n-Raum und für die Flächen im affinen m-Raum anwendbar (vgl. [4]). Das besagte Bestimmungsverfahren der invarianten Zusatznormalisierung (oder Normalisierung) mit Hilfe der Bedingungen (6) sind nicht für alle m-Flächen bei $m^2 + 3m < 2n - 2$ (oder bei $m^2 + 3m < 2n$) geeignet. In einem solchen Fall sind für die Konstruktion der verbindenden Größen P_p^a, Q_p, die die invariante Zusatznormalisierung (Normalisierung) bestimmen, die Differentialfortsetzungen [1] der fundamentalen Objekte höherer Ordnung zu verwenden. Angemerkt sei, daß man $Q_p = \frac{1}{m}(h_{ap}{}^{a} - D_a P_p^a - h_{ab}{}^{q} P_q^a P_p^b)$ annehmen kann, wenn die verbindende Größe P_p^a konstruiert ist.

4. Für eine bestimmte Klasse m-Flächen im B_n kann man (bei $2m<n$) den invarianten Zusatz zur Normalisierung auf folgende Weise ermitteln. Wir untersuchen im B_n die m-lineare symmetrische skalare Funktion aus m Vektorargumenten $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$. Die Menge der Vektoren x, für die $\varphi(x, \ldots, x) = 1$ ist, nennen wir Tensorhyperfläche der m-ten Ordnung im B_n. Nach Auswahl einer bestimmten Basis im B_n nimmt die Gleichung der Tensorhyperfläche der m-ten Ordnung in Koordinatenform folgende Gestalt an: $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_m} = 1$; folglich wird die Tensorhyperfläche durch Vorgabe der Komponenten $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots = 1, \ldots, n)$ s Tensors der m-ten Wertigkeit im B_n bestimmt. $1(\eta^a)$ sei eine bestimmte m-Fläche S im B_n. Wir sagen, daß die Tensorhyperfläche der m-ten Ordnung mit der m-Fläche S im Punkt η_0^a Berührung hat in mindestens (n-1)-ter Ordnung, wenn

$$\varphi(\eta_0^a) = 1, \quad [\partial a_1 \ldots \partial a_s \varphi]_{\eta^a = \eta_0^a} = 0$$
$$(\varphi(\eta^a) \equiv \varphi(1(\eta^a), \ldots, 1(\eta^a))), \quad s = 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Das Gleichungssystem (7) ist ein lineares System aus $\binom{n+m-1}{n-1}$ Gleichungen bezüglich $\binom{n+m-1}{n-1}$ Koeffizienten $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, nämlich (siehe [1], S. 179):

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} l^{\alpha_1} \ldots l^{\alpha_m} = 1,$$
$$\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k!} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \sum_{(i_1 + \ldots + i_1 = s)} \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} l^{\alpha_1}_{(a_1 \ldots a_{i_1}} \ldots l^{\alpha_k}_{a_{s-i_k+1} \ldots a_s)} = 0,$$
$$s = 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

wo der Kürze halber bezeichnet ist

$$\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0 \quad \text{bei} \quad m < k;$$

$$\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = m(m-1) \ldots (m-k+1)\, a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1} \ldots \alpha_m} l^{\alpha_{k+1}} \ldots l^{\alpha_m} \quad \text{bei} \quad m \geqslant k.$$

H sei Determinante des Systems (8). Wenn $H \neq 0$ (was nur bei $2m < n$ möglich ist), dann hat das System (8) eine einzige Lösung, die eindeutig die berührende Tensorhyperfläche der m-ten Ordnung im Punkt η_0^a bestimmt. Wir untersuchen ein Stück der m-Fläche S, längs dessen $H \neq 0$ ist, und $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ sei ein invariant durch das System (8) bestimmbarer Tensor. Wir benutzen diesen Tensor und konstruieren in jedem Punkt des untersuchten Stücks der m-Fläche S die quadratisch Form: $\psi(X, X) = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}\beta\gamma} l^{\alpha_1} \ldots l^{\alpha_{m-2}} x^\beta x^\gamma$, hinsichtlich dieser bestimmen wir die Orthogonalität (Kontingenz) der Richtungen und konstruieren einen Unterraum, der zum Tangentialraum B_m und radialen Unterraum B_1 orthogonal ist. Wenn der so konstruierte Unterraum zusätzlich normalisiert ist, dann nennen wir das untersuchte Stück der m-Fläche r e g u l ä r . Man kann leicht zeigen, daß die Regularitätsbedingung in der Nichtentartetheit des Tensors $g_{ab} = (m-1)\psi(l_a, l_b)$ enthalten ist.

Die Hyperflächenschar $\psi(l, X) = 1$ bestimmt längs der regulären m-Fläche die reguläre Hyperzone [5], denn es kann ohne Schwierigkeiten gezeigt werden, daß der oben bestimmte Tensor g_{ab} Regularitätstensor [5] der besagten Hyperzone ist. Hieraus kann die weitere Konstruktion der Geometrie der regulären m-Fläche im B_n nach der von V.V. Vagner [5] vorgeschlagenen Untersuchungsmethode der regulären Hyperzone im B_n durchgeführt werden.

Eingereicht am 20.11.1951
vorgeschlagen am 30.4.1952
von I.G. Petrovskij,
Mitglied der Akademie der
Wissenschaften der UdSSR

L i t e r a t u r

[1] В. В. Вагнер, Приложение к кн. Веблена и Уайтхеда «Основания дифференциальной геометрии», М., 1949. [2] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 7, 65 (1949); Н. Ф. Ржехина, ДАН, 72, № 3 (1950). [3] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 11 (1950). [4] K. H. Weise, Math. Zs., 44, 161 (1938). [5] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 197 (1950).

1. Vagner, V.V.: Priloženie k knige Veblena i Uajtcheda "Osnovanija differencial'noj geometrii". Moskva: 1949.
〈Anhang zum Buch von Oswald VEBLEN, J.H.C. WHITEHEAD: The Foun-

dations of Differential Geometry. Cambridge: University Press, 1932.〉

2. Vagner, V.V. Geometrija Finslera kak teorija polja lokal'nych giperpoverchnostej v X_n.
In: Trudy. Seminar po vektornomu i tenzornomu analizu s ich priloženijami k geometrii, mechanike i fizike. Moskva/Leningrad, 7 (1949), S. 65 - 166.
〈Die Finsler-Geometrie als Feldtheorie der lokalen Hyperflächen im X_n〉

Ržechina, N.F.: K teorii polja lokal'nych krivych v X_n.
In: Doklady Akademii nauk SSSR. Moskva, 72 (1950), Nr 3, S. 461 - 464.
〈Zur Feldtheorie der lokalen Kurven im X_n〉

3. Vagner, V.V.: Teorija sostavnogo mnogoobrazija.
In: Trudy. Seminar po vektornomu i tenzornomu analizu s ich priloženijami k geometrii, mechanike i fizike. Moskva/Leningrad, 8 (1950), S. 11 - 72.
〈Theorie der zusammengesetzten Mannigfaltigkeit〉

4. Weise, Karl Heinrich: Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n (Teil I).
In: Mathematische Zeitschrift. Berlin, 43 (1938), S. 469 - 480.
Weise, Karl Heinrich: Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n (Teil II).
In: ebenda, 44 (1939), S. 161 - 184.

5. Vagner, V.V.: Teorija polja lokal'nych giperpolos.
In: Trudy. Seminar po vektornomu i tenzornomu analizu s ich priloženijami k geometrii, mechanike i fizike. Moskva/Leningrad, 8 (1950), S. 196 - 272.
〈Feldtheorie der lokalen Hyperstreifen〉

Stuttgart, den 21.Juni 1977

übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer