

161

Kapica, P.L.:

DAS WELLENFÖRMIGE FLIESSEN DÜNNER SCHICHTEN EINER  
VISKOSEN FLÜSSIGKEIT

1. DER FREIE FLUSS

Übersetzung aus:

Žurnal eksperimental'noj i teoretičeskoj fiziki. Moskva,  
18 (1948), Nr 1, S. 3 - 18.

Russ.:

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ТОНКИХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

I. СВОБОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Volnovoe tečenie tonkich sloev vjazkoj židkosti  
1. Svobodnoe tečenie

Das Fließen dünner Schichten einer viskosen Flüssigkeit unter dem Einfluß der Massenkraft bei Berücksichtigung der Oberflächenspannung wurde theoretisch untersucht. Gefunden wurde die näherungsweise Lösung einer Strömungsgleichung, die angibt, daß der von einer Reihe von Verfassern festgestellte wellenförmige Zustand stabiler ist als der laminare. Die Form des Wellenprofils, die Phasengeschwindigkeit und die Amplitude wurden ermittelt. Die gefundenen theoretischen Größen der kritischen Werte  $Re_k$ , bei denen der Wellenzustand eintritt, stimmen mit dem Versuch überein. Durch die wellenförmige Art der Strömung konnte die von Friedman und Miller beobachtete schnelle Farbausbreitung längs des flüssigen Stromes quantitativ erklärt werden.

Übersetzungsteils  
der Universitätsbibliothek Stuttgart

### Einleitung

Bei einer durch eine feste Wand und eine freie Oberfläche begrenzten Flüssigkeitsströmung mit geringer Schichtdicke (bis 1 - 2 mm) nimmt man selbstverständlich an, daß die Viskosität der Flüssigkeit der Hauptfaktor ist, der ihren Strömungsverlauf beeinflußt. Strömungstechnisch läuft die Aufgabe auf den einfachsten Fall einer laminaren Strömung hinaus, und man erhält die wohlbekannte kubische Beziehung zwischen der Schichtdicke und der Flüssigkeitsmenge bezogen auf die Einheitsbreite des Stromes  $Q$ . Als Stabilitätskriterium dieser laminaren Strömung wird die Reynolds-Zahl verwendet, die gleich

$$Re = 4Q\nu^{-1}, \quad (1)$$

ist, mit  $\nu$  - kinematische Viskosität. Experimentell am gründlichsten untersucht wurde der Fall der Flüssigkeitsströmung an einer senkrechten Wand unter Einfluß der Schwerkraft. Die Untersuchungen einiger Verfasser [1] haben gezeigt, daß das kubische Gesetz der laminaren Strömung quantitativ gut durch den Versuch bestätigt wird in einem Reynoldszahlenbereich bis 1 500, wo turbulente Strömung auftritt. In diesen Untersuchungen wurde die Schichtdicke durch Messungen des sich an der Wand befindenden Flüssigkeitsvolumens bestimmt.

Kirkbride [2] hat die Dicke der Flüssigkeitsschicht mit dem Mikrometer gemessen und festgestellt, daß sie größer ausfällt als nach dem Gesetz für laminare Strömung; er hat dies damit erklärt, daß über die freie Oberfläche Wellen laufen.

Der wellenförmige Fließcharakter wurde auch von Fallah, Hunter und Nash [3] festgestellt. Der Versuch zeigt, daß dieser wellenförmige Bewegungscharakter schon bei Werten von  $Re$  um 20 - 30 auftritt. Auf diese Weise wurde ermittelt, daß jene Bewegung, von der angenommen wurde, daß sie beinahe im gesamten  $Re$ -Bereich eine einfachste laminare sei, in Wirklichkeit eine wellenförmige Bewegung ist. Um diesen Fließcharakter zu untersuchen haben Friedmann und Miller [1] Farbe in den Flüssigkeitsstrom gegeben, um auf diese Weise die maximale Fließgeschwindigkeit zu bestimmen. Der Versuch zeigte, daß die Geschwindigkeit, mit der sich die Farbe ausbreitet, ungefähr anderthalb mal so groß ist wie die Fließgeschwindigkeit der äußeren Flüssigkeitsschicht, welche beim laminaren Fließen den größten Wert besitzt.

Diese Untersuchungen zeigen, daß das Gesetz für laminares Fließen nur grob eingehalten wird und sich auf die durchschnittliche Schichtdicke bezieht, sich der Fließcharakter aber gleichzeitig vom einfachen laminaren unterscheidet. Den Grund für diesen Unterschied muß man offenbar darin suchen, daß bei der Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen die Kraft der Oberflächenspannung nicht berücksichtigt wurde, welche beim Fließen einer Flüssigkeit mit geringer Viskosität und in dünnen Schichten, und sogar bei geringfügiger Krümmung der freien Oberfläche, einen beträchtlichen Wert annimmt, der mit den Werten der Viskositätskräfte vergleichbar ist. In der folgenden Darlegung wird gezeigt werden, daß das wellenförmige Fließen, wenn man die Kapillarkräfte berücksichtigt, tatsächlich auch bei geringen Geschwindigkeiten stabiler ist als das einfache laminaire Fließen.

Wenn ein stabileres wellenförmiges Fließen vorhanden ist, dann hat dies jene wichtige Bedeutung, daß eine Reihe bekannter physikalischer Erscheinungen, welche beim Fließen in dünnen Schichten beobachtet werden und die bislang wenig verstanden wurden, erklärt und beschrieben werden können. Aus diesen Erscheinungen wählen wir in der vorliegenden Arbeit das Fließen einer Flüssigkeit bei Einwirkung eines Gasstromes auf ihre freie Oberfläche und die Wärmeübertragung in ihr aus.

#### Die Hauptgleichungen

Eine physikalische Größe, die das zu untersuchende Fließen bestimmt, ist außer der Dichte  $\rho$  und der Viskosität  $\mu$  noch die Oberflächenspannung  $\sigma$ . Der Bequemlichkeit wegen führen wir die Größe  $\delta$  (kinematische Oberflächenspannung) ein; für sie gilt:

$$\delta = \sigma/\rho. \quad (2)$$

Wir nehmen an, daß die Bewegung durch die konstante Massenkraft unterstützt wird. Mit  $j$  bezeichnen wir die Beschleunigungskomponente dieser Kraft, die in Fließrichtung angenommen wird. Gewöhnlich ist  $j$  entweder Beschleunigungskomponente der Trägheitskraft oder der Fliehkraft. Wir nehmen an, daß das Fließen zweidimensional ist und daß es in Richtung der  $x$ -Achse verläuft, und messen die Koordinate  $y$  im Ab-

stand  $a_0$  von der Wand ab (Abb. 1). Die veränderliche Schichtdicke bezeichnen wir mit  $a$ . Die Geschwindigkeitskomponente im jeweiligen Fließpunkt bezeichnen wir mit  $v_x$  und  $v_y$ . Die Durchschnittsgeschwindigkeit

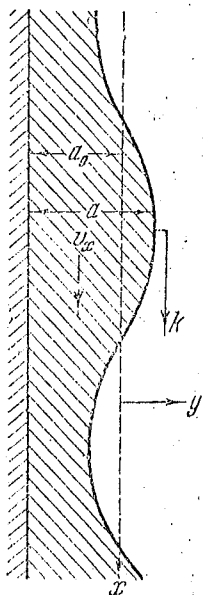


Abb. 1

auf der x-Achse im jeweiligen Querschnitt bezeichnen wir mit  $v$ ; sie ist gleich

$$v = \frac{1}{a} \int_0^a v_x dy. \quad (3)$$

Wir untersuchen das Stoffgleichgewicht des Stromes durch das Element  $dx$  und erhalten

$$\frac{\partial va}{\partial x} = - \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (4)$$

Die Gleichung der freien Oberfläche der fließenden Schicht wird durch die Kurvengleichung

$$y = a_0 \varphi \quad (5)$$

bestimmt; die Schichtdicke ist gleich

$$a = a_0(1 + \varphi). \quad (6)$$

Die Größe  $\varphi$  ist eine Funktion von  $x$  und der Zeit  $t$ . Wenn man annimmt, daß das Profil der freien Oberfläche ohne sich zu verändern sich mit der konstanten Phasengeschwindigkeit  $k$  bewegt, dann kann man  $\varphi$  als Funktion von einer einzigen Variablen betrachten, die gleich  $x - kt$  ist; dann erfüllen auch alle Werte, die Funktionen von ihr sind,  $F = F(\varphi)$ , die folgende Gleichung in den partiellen Ableitungen:

$$k \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (7)$$

Im Folgenden werden wir die Differenzierung nach  $x$  durch Punkte bezeichnen.

Unter den Durchschnittswerten der Funktionen von  $\varphi$ , die für die Länge und die Zeit angenommen sind, gibt es noch die folgende Gleichung:

$$\overline{f(\varphi)} = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} f dx = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f dt; \quad x_0 = -kT_0. \quad (8)$$

Die Mittelung nach der Länge  $x$  werden wir durch einen Strich bezeichnen.

Bei der Untersuchung liefern uns diese Bedingungen die Möglichkeit, sie von einer Variablen abzuleiten, die wir  $x$  nennen, indem wir in den Ausdruck für  $\varphi$  die Zeit  $t = 0$  einsetzen. Wir werden den Vorgang dann als stabil ansehen, wenn die Schichtdicke  $a$  einen konstanten Mittelwert besitzt, für den wir annehmen

$$a_0 = \overline{a}. \quad (9)$$

Daher folgt aus dem Ausdruck (6)

$$\overline{\varphi} = 0. \quad (10)$$

Aus den Beziehungen (7) und (4) erhalten wir

$$\frac{\partial a(k - v)}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Die Differenz zwischen den Geschwindigkeiten  $k$  und  $v$  bezeichnen wir mit  $u$ ; dies ist die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt, bezogen auf den Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit der Wellenfront  $k$  bewegt. Dann erhalten wir

$$v = k - u; \quad v_0 = k - u_0, \quad (12)$$

wobei  $v_0$  und  $u_0$  die Geschwindigkeiten im mittleren Fließquerschnitt  $a_0$  bezeichnen. Aus (11) folgt

$$ua = u_0 a_0 = \text{const.} \quad (13)$$

Die durchschnittliche Flüssigkeitsmenge  $Q$  wird, nach Ausdruck (8) bestimmt, zu

$$Q = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v a dt = \overline{va}. \quad (14)$$

Wir setzen den Wert  $v$  aus (12) bei stabilem Fließen ein und erhalten für  $Q$

$$Q = \overline{ka} - \overline{ua} = k a_0 - u_0 a_0 = v_0 a_0. \quad (15)$$

### Die Fließgleichungen

Bei gewöhnlichem laminarem Fließen einer Flüssigkeit wird die konstante Massenkraft in jedem Punkt durch die Viskositätskraft ausgeglichen, für die gilt  $\mu (\partial^2 v_x / \partial y^2)$ . Wir integrieren diesen Ausdruck und nehmen als Randbedingungen an, daß die Geschwindigkeit an der Wand gleich Null ist und daß auf der freien Oberfläche keine Schubspannungen vorhanden sind, und da hier das Geschwindigkeitsgefälle ebenfalls gleich Null ist, erhalten wir die bekannte quadratische Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt:

$$v_x = 1,5v \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right), \quad (16)$$

wobei  $v$  die durchschnittliche Geschwindigkeit im Querschnitt ist, die durch den Ausdruck (3) bestimmt wird.

Bei wellenförmiger Bewegung, an der auch noch die Kapillar- und Trägheitskräfte beteiligt sind, kann diese Verteilung gestört werden. Bei der Untersuchung des Fließens in dünnen Schichten beschränken wir uns auf den Fall, wenn die Wellenlänge beträchtlich größer ist als die Schichtdicke. Da die Viskositätskräfte in diesem Fall die Hauptrolle spielen, muß die durch sie bestimmte Randbedingung (daß die Geschwindigkeit an der Wand gleich Null ist) beachtet werden. Deshalb kann man annehmen, daß die quadratische Verteilung der Geschwindigkeit ohne Berücksichtigung des Gliedes höherer Ordnung nach  $y/a$  hinreichend genau das Fließen auch beim wellenförmigen Zustand charakterisiert.

Da der Querschnitt gegenüber der Wellenlänge sehr klein ist, kann man ebenfalls den Einfluß der Geschwindigkeitskonstanten  $v_y$  vernachlässigen. Dann nimmt die Gleichung von Navier und Stokes auf der  $x$ -Achse folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + j + \nu \nabla^2 v_x \quad (17)$$

Um diese Gleichung zu lösen, führen wir in sie für jedes der Glieder den im Querschnitt mittleren Wert der Größen  $v_x$  und  $v_x^2$  ein. Für  $v_x$  ergibt sich die Lösung durch den Ausdruck (3), und für  $v_x^2$  erhalten wir nach (16)

$$\frac{1}{a} \int_0^a v_x^2 dy = \frac{6}{5} v^2 \quad (18)$$

Wenn wir entsprechend (7) die Ableitung nach der Zeit durch die Ableitung nach  $x$  ersetzen, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{3}{5} v^2 - kv \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + j - 3\nu \frac{v}{a^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (19)$$

Wir suchen die näherungsweise Lösung für die Funktion  $\psi$ , die diese Gleichung erfüllt und die einen stabilen periodischen Charakter besitzt. Dabei nehmen wir an, daß die Schwingungsamplitude der Wel-

lenoberfläche im Ausdruck (5) immer kleiner sein wird als die durchschnittliche Schichtdicke  $a_0$ , woraus folgt, daß die Amplitude  $|\varphi|$  immer kleiner als Eins sein wird:

$$|\varphi| < 1. \quad (20)$$

Dem Signifikanzgrad werden wir durch den Index bezeichnen, mit dem  $\varphi$  in die Glieder mit gleichen Koeffizienten eingeht. Wir nehmen ebenfalls an, daß die Größenordnung der Ableitungen von  $\varphi$  durch die Beziehungen

$$|\varphi|^2 \geq a_0 |\dot{\varphi}|; \quad |\varphi|^3 \geq a_0^2 |\ddot{\varphi}| \quad \text{usw.} \quad (21)$$

bestimmt wird.

In dem von uns untersuchten Fließen einer Flüssigkeit kann das Druckgefälle in Gleichung (19) aus zwei Gründen entstehen: 1) durch den Druck des Gasstroms, der ihre freie Oberfläche umströmt, 2) durch die Kräfte der Oberflächenspannung.

Zuerst untersuchen wir das Fließen ohne Einwirkung des Gasstromes. Nach dem bekannten Ausdruck für das Druckgefälle, das durch die Kapillarkräfte erzeugt wird, gilt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ddot{a}}{(1+a^2)^{3/2}}. \quad (22)$$

Nach Bedingung (21) kann man, mit einer Genauigkeit bis einschließlich Größen zweiter Ordnung annehmen, daß der Betrag des Nenners gleich Eins ist.

### Erste Näherung

Wir führen in Gleichung (19) die Funktion  $\varphi$  ein. Nach (6), (12) und (13) drücken wir die Geschwindigkeit  $v$  und ihre Ableitung nach  $x$  in der Form

$$v = k - \frac{u_0}{1+\varphi}; \quad \dot{v} = \frac{u_0}{(1+\varphi)^2} \dot{\varphi} \quad (23)$$



aus. Wir führen die Bezeichnung für das Verhältnis der Phasengeschwindigkeit  $k$  zur Geschwindigkeit  $v_0$  ein:

$$z = k/v_0; \quad (24)$$

Wir lassen bei allen Koeffizienten nur die Glieder höherer Ordnung unberücksichtigt und erhalten aus Gleichung (19) die folgende:

$$\delta a_0 \ddot{\varphi} + v_0^2 (z-1)(z-1,2) \dot{\varphi} + 3 \left( j - z \frac{v_0}{a_0^2} \right) \varphi + \left( j - 3 \frac{v_0}{a_0^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Wenn  $\varphi = 0$  ist, dann haben wir das einfache laminare Fließen. Wir bezeichnen die Schichtdicke des Stroms mit  $m$ , die durchschnittliche Geschwindigkeit mit  $w$ , führen den Wert  $Q$  aus (15) ein und erhalten aus diesem Ausdruck die einfache Gleichung

$$j = 3v_0 w m^{-2} = 3v_0 Q m^{-3}. \quad (I)$$

Wenn  $\varphi$  nicht gleich Null ist, dann erhalten wir eine lineare Gleichung dritter Ordnung. Damit sie eine stabile periodische Lösung hat, ist notwendig, daß das konstante Glied und das Glied mit  $\varphi$  gleich Null wird. Hieraus folgt, daß Gleichung (I) dann erfüllt sein muß, und deshalb kommt die Schichtdicke  $a_0$  in erster Näherung beim wellenförmigen Fließen der Dicke  $m$  nahe, die man bei gewöhnlichen laminaren Fließen vorfindet. Und auch die Geschwindigkeit  $v_0$  wird im mittleren Querschnitt in erster Näherung gleich der Geschwindigkeit  $w$  sein.

Wenn der Koeffizient beim Glied  $\varphi$  gleich Null ist, erhalten wir

$$j = z v_0 a_0^{-2}. \quad (II)$$

Diese Gleichung ist für die Existenz des stabilen Fließens mit periodischem Zustand wichtig. Wir setzen in sie den Wert  $j$  aus (I) ein und sehen, daß  $z$  in jedem Fall positiv und in erster Näherung  $z \approx 3$  sein muß; folglich ist die Phasengeschwindigkeit  $k$

längs des Fließens gerichtet und gleich der dreifachen Geschwindigkeit  $v_0$  im mittleren Fließquerschnitt.

Wenn man die Wellenlänge mit  $\lambda$  bezeichnet und den Wert

$$n = 2\pi/\lambda, \quad (III)$$

einführt, dann ist die gesuchte periodische Lösung

$$\varphi = \alpha \sin nx. \quad (26)$$

Die Größe  $\alpha$  nennen wir bedingt Amplitude. Die Größe  $n$  wird bestimmt als

$$n^2 = (z-1)(z-1,2) v_0^2 (\delta a_0)^{-1}. \quad (IV)$$

Bei gegebenem  $z$  und  $a_0$  legt dieser Ausdruck die Wellenlänge fest. Die Größe  $v_0$  wird aus (15) aus der Durchflußmenge  $Q$  bestimmt. Im weiteren Verlauf wird die Abhängigkeit des Fließens von der Durchflußmenge  $Q$  untersucht.

### Zweite Näherung

Um die Genauigkeit der ersten Näherung und jene Grenzwertbedingungen, bei denen das wellenförmige Fließen auftreten kann, zu beurteilen, muß man die folgende Näherung finden. Die zweite Näherung erhält man, wenn man in Gleichung (25) die Glieder mit  $\varphi$  von zweiter Größenordnung einsetzt. Wir verfahren so und erhalten folgende nichtlineare Gleichung:

$$\delta a_0 \ddot{\varphi} (1+3\varphi) + v_0^2 (z-1)(z-1,2) \left(1 - \frac{z}{5z-6} \varphi\right) \dot{\varphi} + 3j\varphi^2 + 3 \left(j - z \frac{v_0}{a_0^2}\right) \varphi + \left(j - 3 \frac{v_0}{a_0^2}\right) = 0. \quad (27)$$

Wir suchen die stabile periodische Lösung dieser Gleichung, wobei wir der Lösung (26) jene Glieder zufügen, die verdoppelte Periodizität besitzen. Man kann die Glieder von zweiter Größenordnung identisch zu Null werden lassen, wenn man annimmt:

$$\varphi = \alpha \sin nx + 0,28\alpha^2 \cos 2nx - \frac{j}{4n^3 a_0^3} \alpha^2 \sin 2nx + \dots \quad (V)$$

Damit diese Lösung gilt, ist notwendig, daß die frühere Bedingung (II), welche beinhaltet, daß die Glieder der Größenordnung  $\varphi$  gleich Null sind, erfüllt wird. Wenn die von  $\varphi$  unabhängigen Glieder gleich Null sind, dann ergibt sich beim Einsetzen von (V) in Gleichung (27):

$$j \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha^2 \right) = 3\nu v_0 a_0^{-2}. \quad (28)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die durchschnittliche Schichtdicke  $a_0$  in zweiter Näherung schon von der Amplitude  $\alpha$  abhängt. Wir bezeichnen das Verhältnis der durchschnittlichen Schichtdicke  $a_0$  zu Schichtdicke  $m$  bei laminarem Zustand, der bei derselben Menge  $Q$  eintritt, mit  $\beta$ :

$$a_0 = \beta m. \quad (29)$$

Dann erhalten wir aus den Ausdrücken (28) und (I)

$$\beta^{-3} = 1 + \frac{3}{2} \alpha^2. \quad (30)$$

Aus diesem Ausdruck ist zu ersehen, daß  $\beta$  von der Amplitude abhängt und immer kleiner als Eins sein wird, und folglich wird die durchschnittliche Schichtdicke bei wellenförmigem Zustand geringer sein als bei laminarem. Wie im weiteren Verlauf zu erkennen sein wird, liefert dies einen stationären wellenförmigen Zustand, der stabiler ist als der laminare. Der Ausdruck (IV), der  $n$ , d.h. die Wellenlänge bestimmt, bleibt in zweiter Näherung unverändert.

In Ausdruck (V) tritt für  $\varphi$  ein zweites harmonisches Glied mit  $\cos 2nx$  auf, weil in den Bedingungen über das Fließen der Flüssigkeit die Symmetrie fehlt. Wenn die Größe  $a$  kleiner wird als ihr Durchschnittswert  $a_0$ , dann weichen die Fließbedingungen von jenen Bedingungen ab, wo  $a$  einen Wert hat, der größer als  $a_0$  ist. Der Koeffizient bei  $\cos 2nx$  ist gering; dies zeigt, daß die einfache sinusoidale Form der Wellen auch bei bedeutenden Amplituden nicht wesentlich verzerrt wird.

Das Glied mit  $\sin 2nx$  tritt bei wellenförmigem Zustand aufgrund dessen auf, daß längs des Flusses kein Gleichgewicht zwischen den Viskositäts- und den Volumenkräften vorhanden ist. Bei Beachtung von Bedingung (II) wird dieser Gleichgewichtsmangel sich nur auf die Entstehung von Harmonischen zweiter und höherer Größenordnung auswirken. Die Größe des Koeffizienten bei diesem Glied fällt mit zunehmendem  $n$  (d.h. mit Abnahme der Wellenlänge) rapide ab, da  $n$  in einen Koeffizienten in dritter Potenz eingeht; einen merklichen Einfluß auf die Form der Wellen hat dieses Glied nur dann, wenn wellenförmiger Zustand eintritt. Deshalb kann man den Einfluß des Glieds mit  $\sin 2nx$  auf die Form der Wellen praktisch im gesamten Bereich des wellenförmigen Zustands vernachlässigen. Dieses Glied ist notwendig, um die kritischen Bedingungen für die Entstehung des wellenförmigen Zustands aufzustellen. Somit zeigt die zweite Näherung, daß die Sinuslinie die Form der wellenförmigen Oberfläche gut darstellt. Man kann voraussetzen, daß die Glieder der folgenden Größenordnung noch weniger Einfluß haben, ihre Berechnung ist jedoch zu umfangreich.

Wenn man in den Ausdruck (V) die Zeit einführt, dann sieht die periodische Lösung in zweiter Näherung für  $a$  in voller Gestalt so aus:

$$a = a_0 \left[ 1 + \alpha \sin n(x - kt) + 0,28\alpha^2 \cos 2n(x - kt) - \frac{J'}{4\alpha_0 \delta n^3} \alpha^2 \sin 2n(x - kt) + \dots \right]. \quad (\text{Va})$$

#### Bestimmung der Amplitude

Die Amplitude  $\alpha$  kann aus den Stabilitätsbedingungen des wellenförmigen Fließens und seines Energiegleichgewichts bestimmt werden. Bei der zu untersuchenden Fließbeding. wird die Dissipation der Energie nur infolge der Viskositätskräfte eintreten. Die Größe der Energiedissipation über den gesamten Querschnitt im Strom in einem Element der Länge  $dx$  bezeichnen wir mit  $dE_{\mu}$ ; nach der bekannten hydrodynamischen Formel [4] und unter den gemachten Annahmen ist sie dann gleich

$$dE_{\mu} = -dx_{\mu} \int_0^a \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (31)$$

Wir setzen  $v_x$  aus (16) ein, integrieren und erhalten die Dissipationsenergie auf die Länge  $dx$

$$dE_{\mu} = -3\mu \frac{v^2}{a} dx.$$

Die durchschnittliche Dissipation pro Längeneinheit ist gleich

$$\bar{E}_{\mu} = -3\mu \overline{v^2 a^{-1}}. \quad (32)$$

Nachdem wir die Werte  $v$  und  $a$  aus den Ausdrücken (6) und (23) und  $z$  aus (24) eingesetzt und mit  $F$  die Funktion

$$F = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{(1+z\varphi)^2}{(1+\varphi)^3} dx \quad (33)$$

bezeichnet haben, ermitteln wir, daß die durchschnittliche Energiedissipation pro Längeneinheit beim Durchfluß  $Q$  gleich

$$\bar{E}_{\mu} = -3\mu Q^2 a_0^{-3} F \quad (34)$$

ist. Wenn  $\varphi = 0$  ist, d.h. wenn kein wellenförmiges Fließen vorhanden ist, ist  $F = 1$  und die Energiedissipation ist die gleiche wie auch beim gewöhnlichen laminaren Fließen.

Die dissipierte Energie wird nur infolge der Volumenkräfte "abgedeckt". Das Mittel pro Längeneinheit beim Durchfluß  $Q$  ist gleich

$$\bar{E}_j = j\rho \bar{v} a = j\rho Q. \quad (35)$$

Bei gegebenem Durchfluß ist dies eine konstante Größe, deshalb hat die Menge der dissipierten Energie beim stationären Zustand  $\bar{E}_{\mu}$  einen konstanten Wert. Wenn wir dies und den vorhergehenden Ausdruck gleichsetzen, erhalten wir für die durchschnittliche Schichtdicke:

$$a_0^3 = 3\nu Q j^{-1} F. \quad (36)$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich: je geringer  $F$ , desto geringer ist auch  $a_0$ , die durchschnittliche Schichtdicke.

Wir berechnen die Größe  $F$ . Angenommen sei, daß ein bestimmtes Integral folgender Art

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{dx}{b + c\varphi} = f(c, b) \quad (37)$$

bekannt sei. Wir differenzieren  $f$  nach dem Parameter  $c$  oder  $b$  und nehmen danach an, daß diese Parameter gleich Eins sind; wenn man die Klammern des Zählers auflöst, dann kann man alle drei Integralformen erhalten, in die Ausdruck (33) zerfällt, z.B.:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \Big|_{\substack{b=1 \\ c=1}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{dx}{(1+\varphi)^3} \quad (38)$$

usw.

Da wir nur den stationären periodischen Zustand untersuchen, führen wir die Funktion  $\varphi$  aus (V) in Ausdruck (37) ein und beschränken uns zuerst auf die Glieder mit der ersten Harmonischen; dann erhalten wir das bekannte Integral:

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{dx}{b + c\alpha \sin nx} = (b^2 - c^2\alpha^2)^{-1/2}. \quad (39)$$

Auf besagte Weise führen wir die Berechnung durch und erhalten für  $F$  den Ausdruck

$$F = \frac{1}{2} \{2 + \alpha^2 [1 - 6z + z^2 (1 + 2\alpha^2)]\} (1 - \alpha^2)^{-1/2}. \quad (40)$$

Die errechnete Kurve  $F = 1$  ist in Abb. 2 in den Koordinaten  $z$  und  $\alpha^2$  dargestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß diese Kurve zusammen mit der Achse  $z$  eine geschlossene Fläche begrenzt; Punkte die innerhalb dieser Fläche liegen, entsprechen  $F < 1$ .

Um den kleinsten Wert  $F$  herauszufinden, konstruieren wir die Kurven  $\partial F / \partial (\alpha^2) = 0$  und  $\partial F / \partial z = 0$  (Abb. 2). Der Schnittpunkt dieser Kurven liefert Punkt  $M$  mit den Koordinaten  $z = 1,5$  und  $\alpha^2 = 0,5$ ; für

ihn ist  $F \approx 0,7$ , also der kleinst mögliche Wert dieser Funktion.

Wenn man sich vorstellt, daß beim Fließen einer Flüssigkeit im gewöhnlichen laminaren Zustand eine sinusförmige Schwingung auftritt, die derart ist, daß ihre Phasengeschwindigkeit eine Größe besitzt, die in den Bereich der durch die Kurve  $F = 1$  begrenzte Fläche fällt, dann ist die dissipierte Energie  $\bar{E}_\mu$  kleiner als die der Strömung mitgeteilte Energie  $\bar{E}_j$ . Deshalb beginnt die kinetische und kapillare Energie anzusteigen, was zu einer Zunahme der Schwingungsamplitude führt. Dieser Vorgang dauert solange, bis  $F$  einen bestimm-

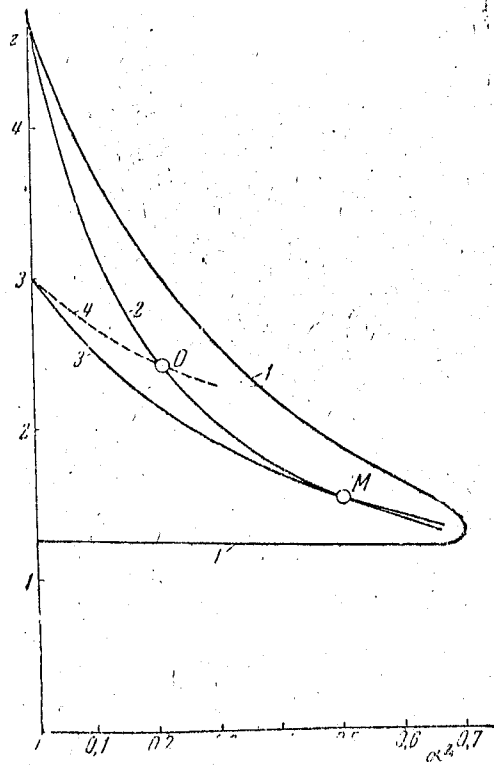


Abb. 2. 1 —  $F=1$ , 2 —  $\partial F/\partial(\alpha^2)=0$ ,  
3 —  $\partial F/\partial z=0$ , 4 —  $3F_m=z$

ten Mindestwert angenommen hat, und die Dicke der Strömung wird auf den Wert reduziert, der durch Ausdruck (36) bestimmt wird.

Da wir uns in dieser Arbeit auf die Untersuchung der stationären periodischen Lösung beschränken, ist außerdem - damit  $F$  den kleinsten Wert hat - noch notwendig, daß der Wert  $z$  die Bedingung

(II) erfüllt, nämlich daß der Koeffizient bei  $\psi$  in der Hauptgleichung (25) gleich null ist.

Wir setzen den Wert  $j$  aus (I) und  $a_0$  aus (29) in Ausdruck (II) ein und erhalten

$$z = 3\beta^3. \quad (41)$$

Wenn man Ausdruck (36) bei wellenförmigem Zustand mit dem gewöhnlichen laminaren (I) vergleicht und das Verhältnis von Dicke  $a_0$  zu  $m$  aus (29) einführt, dann erhält man

$$\beta^3 = F = \frac{1}{3}z. \quad (42)$$

Diese Gleichung bestimmt zusammen mit der Minimalitätsbedingung  $F$  die Größen  $\alpha^2$  und  $z$ . Um diese Aufgabe zu lösen, berechnen wir den Wert  $F_m$  auf der Kurve  $\partial F / \partial (\alpha^2) = 0$ . Wir konstruieren die Kurve  $z = 3F_m$  und suchen ihren Schnittpunkt mit der Kurve  $\partial F / \partial (\alpha^2) = 0$ ; er ist in Abb. 2, als 0 bezeichnet und liefert die gesuchten Werte der Größen  $z$  und  $\alpha^2$ . Wenn man die Zahlen, die innerhalb Rechen-schiebergengenauigkeit errechnet wurden, aufrundet, dann erhält man

$$\alpha^2 = 0,21; \alpha = 0,46; z = 2,4; F = \beta^3 = 0,8; \beta = 0,93. \quad (VI)$$

Somit wird nach Ausdruck (29) ermittelt, daß die durchschnittliche Dicke der Strömung  $a_0$  bei wellenförmigem Zustand unter stabilem periodischem wellenförmigem Fließen bei gleichen Durchflusssmengen annähernd um 7 % geringer ist als  $m$  beim laminaren Zustand. Aus dem ermittelten Wert  $\alpha$  kann man ersehen, daß die Amplitude der Wellen bei allen Durchflusssmengen eine beträchtliche Größe annimmt, die gleich 0,46 von der durchschnittlichen Strömungsdicke  $a_0$  ist, und die Phasengeschwindigkeit gleich dem 2,4-fachen der Geschwindigkeit  $v_0$  im mittleren Querschnitt ist, d.h. beträchtlich größer als sie ist.

Wenn wir die erste Näherung für  $\alpha^2$  nehmen, können wir den Fehler abschätzen, der dadurch entsteht, daß bei Berechnung der Integrale (39) die Glieder der zweiten Harmonischen in Ausdruck (V) für  $\psi$  weggelassen wurden. Man kann aufzeigen, daß dieser Fehler bei der Bestimmung der untersuchten Größen im Bereich des Zustands der höchsten Wellen gleich dem Wert der Größenordnung



$$(0,28\alpha)^2 = 0,018, \quad (43)$$

d.h. weniger als 2 % ist.

Angenommen, die Länge der Wand, an der die Flüssigkeit vom Ausgangspunkt herabfließt, ist gleich  $x_0$  und ausreichend groß, daß der Zustand im größten Längenbereich stationär ist. Dann ist bei gegebener Durchflußmenge  $Q$  der Potentialverbrauch dieser Schicht gleich

$$\frac{1}{2} a_0 x_0^2 j \rho. \quad (44)$$

Bei vollem Gleichgewicht aller übrigen Energieformen wird jener Fließzustand der stabilste stationäre Zustand sein, bei dem diese Größe den kleinsten Wert hat und folglich die durchschnittliche Schichtdicke  $a_0$  minimal ist. Deshalb ist bei vorgegebenem Durchfluß  $Q$  - da  $a_0$  kleiner  $m$  ist - der untersuchte wellenförmige Zustand der stabilere, und nicht der laminare.

Es ist noch hinzuzufügen, daß die durchgeführte Analyse sogar innerhalb der gewählten Näherungen es nicht ermöglicht festzustellen, ob die aus Gleichung (27) ermittelte stationäre sinusartige Wellenform [Ausdruck (V)] die stabilste Art des wellenförmigen Fließens ist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß eine vollständigere Untersuchung dieses Fließtypus dazu führt, daß man wellenförmige Zustände findet, die bei noch geringeren Schichtdicken auftreten und folglich noch stabiler sind. Man könnte sich vorstellen, daß diese Fließtypen sozusagen Entstellungen des ermittelten sinusförmigen Fließens sind, in dem sich die Wellen gewissermaßen in Gruppen sammeln; dabei ist die Amplitude der Wellen etwas größer und die Phasengeschwindigkeit geringer. Auf erster Stufe der Untersuchung dieser Art des Fließens kann die ermittelte periodische Lösung, wie es der Versuch zeigt, als ausreichende Näherung zur Beschreibung jener physikalischen Erscheinungen dienen, über die in der Einleitung gesprochen wurde.

Grenzwerte des wellenförmigen Zustands

Wir setzen in Ausdruck (IV) die ermittelten Werte für  $z$  und  $F$  aus (VI) ein, bringen die Durchflußmenge  $Q$  ein und erhalten unter Verwendung von Ausdruck (36) für  $n^2$ :

$$n^2 = (z - 1)(z - 1,2) \frac{1}{3F} \frac{jQ}{\delta v} = 0,7 \frac{jQ}{v\delta}. \quad (45)$$

Aus Ausdruck (III) erhalten wir die Wellenlänge

$$\lambda = 7,5 \left( \frac{v\delta}{Qj} \right)^{1/2}. \quad (VII)$$

Die durchschnittliche Schichtdicke wird aus Ausdruck (36) durch Substitution des Wertes  $F = 0,8$  bestimmt:

$$a_0 = 1,34 \left( \frac{vQ}{j} \right)^{1/2}. \quad (VIII)$$

Mit diesen zwei Ausdrücken kann man jenen Wert von  $Re$  und der Durchflußmenge  $Q$  festlegen, in dem die Annahme gerechtfertigt ist, die für die näherungsweise Lösung gemacht wurde. Die Beschränkung der Werte der Ableitungen (21) bestimmt die Grenze der Wellenlänge  $\lambda_{gr}$ , die sich durch die gemachten Annahmen ergibt. Nachdem wir die Werte  $\psi$  und  $\alpha$  eingesetzt haben, erhalten wir aus (21)

$$\frac{\lambda}{a_0} > \frac{\lambda_{gr}}{a_0} = \frac{2\pi}{a} = 13,7. \quad (46)$$

Dieser Ausdruck bestimmt die geringste Wellenlänge, bis zu der man annehmen kann, daß  $\alpha$  und  $z$  in geringem Grade von der Wellenlänge abhängen; je kürzer die Wellenlänge ist, desto weniger sicher erweist sich die angenommene Näherung. Selbstverständlich schränkt diese Bedingung die Existenz des wellenförmigen Zustands auch bei geringeren Wellenlängen nicht ein, man könnte, wie es die Analyse zeigt, sich vorstellen, daß  $\alpha$  mit Abnahme der Wellenlänge zunimmt und  $z$  ab. Die Bedingung (46) stimmt auch mit den anderen von uns gemachten Annahmen überein, nämlich daß die Wellenlänge beträchtlich größer sein muß als die Dicke der Strömung.

Die Herleitung des Grenzwertes der größten Wellenlänge, bei dem der wellenförmige Zustand beginnt, ist, da wir keine genaue Lösung haben, mit Schwierigkeiten verbunden, die es nicht zulassen, diese Aufgabe zuverlässig durchzuführen. Am natürlichsten wäre es, jene Werte der Koeffizienten zu bestimmen, die die Größe  $n$  im Ausdruck (V) enthalten, und bei denen eine vollständige Lösung zustande kommt. Da wir nur die ersten zwei Glieder dieser Zerlegung haben, kann man nur von der Voraussetzung ausgehen, daß die Konvergenz der Reihe abgesichert ist, wenn der Koeffizient bei  $\alpha^2 \sin 2nx$  kleiner Eins ist. Dann erhalten wir

$$j/4n^3 a_0 \delta \leq 1. \quad (47)$$

Diese Ungleichung bestimmt den geringsten Wert  $n$ .

Den Grenzwert, bei dem der wellenförmige Zustand eintritt, kann man auch noch feststellen, wenn man von folgender physikalischer Voraussetzung ausgeht. Wir ermitteln die auf die Einheit der Wellenlänge bezogene mittlere Potentialenergie der Oberflächenspannung. Sie ist gleich der Wellenoberfläche, multipliziert mit  $\sigma$ :

$$\bar{E}_\sigma = \sigma [1 + (a_0 \varphi)^2]^{1/2}. \quad (48)$$

Wir setzen  $\varphi$  aus (V) ein und schreiben nur die größten Glieder auf, die von  $n$  abhängen; dann erhalten wir

$$\bar{E}_\sigma = \frac{1}{4} \sigma a_0^2 \alpha^2 n^2 \left[ 1 + 4 \left( \frac{j\alpha}{4a_0 \delta} \right)^2 n^{-6} + \dots \right]. \quad (49)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Oberflächenenergie  $\bar{E}_\sigma$  mit zunehmendem  $\lambda$  und folglich mit Abnahme von  $n$  abnimmt, solange der Wert in Klammern gering ist.

Aber wenn das Glied in Klammern groß wird, dann tritt bei einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda_k$  eine Veränderung des Vorzeichens der Ableitung  $\partial \bar{E}_\sigma / \partial n$  auf, und die Energie beginnt zuzunehmen. Physikalisch stimmt dies damit überein, daß auf den Wellenkämmen Bereiche mit einer beträchtlichen Rückkrümmung auftreten, und die Wellen sozusagen brechen. Man kann voraussetzen, daß solche Wellenformen instabil sind,

und deshalb die maximale Wellenlänge festgelegt wird durch die Gleichung:

$$\frac{\partial E_s}{\partial n} = 0. \quad (50)$$

Wir vernachlässigen die Veränderung von  $a_0$  mit der Wellenlänge und erhalten aus (42)

$$j/4n^3 a_0 \delta \leq 0,77. \quad (51)$$

Da  $n$  durch die Kubikwurzel aus der Größe von rechts bestimmt wird, liefern die beiden Ausdrücke (47) und (51) annähernde Werte für die kritische Wellenlänge. Wir nehmen die Ungleichung (51) und führen den Wert  $n$  aus Ausdruck (45) ein; dann ist das Grenzverhältnis  $\lambda_k$  und  $a_0$  gleich

$$\frac{\lambda}{a_0} \leq \frac{\lambda_k}{a_0} = 13,5 v^{-1} Q_k. \quad (52)$$

Wir bringen den Wert der Zahl  $Re$  aus (1) ein und erhalten für die Grenze des wellenförmigen Zustandes, wenn wir die Werte aus (VII) und (VIII) einsetzen,

$$Re_k = 2,43 \left( \frac{\delta^3}{j \nu^4} \right)^{1/11} = 0,3 \frac{\lambda_k}{a_0}. \quad (IX)$$

Der auf diese Weise ermittelte kritische Wert der  $Re$ -Zahl legt den Moment des Übergangs vom laminaren zum wellenförmigen Fließen gut fest, wie dies aus den Versuchsangaben ersichtlich ist.

#### Beschreibung des wellenförmigen Fließens

Die gewonnenen Ergebnisse geben uns die Möglichkeit, das periodische wellenförmige Fließen einer Flüssigkeitsschicht zu beschreiben. In Abb. 3 ist der Querschnitt einer Strömung dargestellt, der für einen bestimmten Zeitpunkt auf der Grundlage von Ausdruck (V) errechnet wurde. Zur besseren Darstellung wurden  $a_0$  und  $\lambda$  so ge-

wählt, daß die Zeichnung gestaucht ausfällt, in Wirklichkeit ist das Verhältnis von Wellenlänge zum Querschnitt wesentlich größer als in der Abbildung dargestellt. Die Kurve bezieht sich auf den Fall, wenn der Koeffizient von  $\sin 2nx$  gleich null ist; da dieses Glied von  $n^3$  abhängt, nimmt sein Wert nach Eintritt des wellenförmigen Strömungsvorgangs mit Zunahme der Durchflußmenge  $Q$  schnell ab, und die Wellenform kommt der dargestellten Kurve nahe. In Abb. 3 ist die durchschnittliche Schichtdicke  $a_0$  gekennzeichnet, und auch die Schichtdicke ist angegeben, für den Fall gilt, daß gewöhnliches laminares Fließen vorliegt.

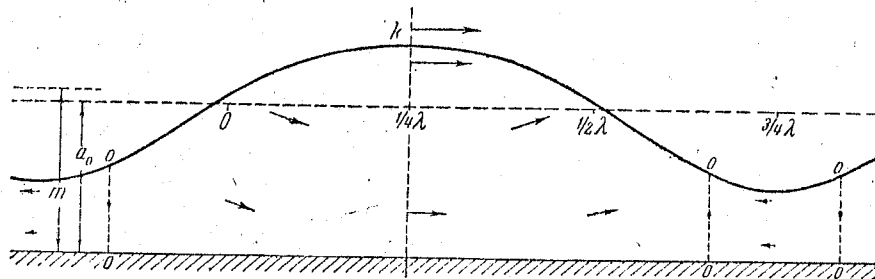


Abb. 3.

Die durchschnittliche Geschwindigkeit in einem beliebigen Querschnitt der Strömung wird nach den Ausdrücken (12), (23) und (24) bestimmt:

$$v = v_0 \left( z - \frac{z-1}{1+\varphi} \right). \quad (53)$$

Wenn man die Werte  $z$  und  $\varphi$  einsetzt, dann kann man die Geschwindigkeit in einem beliebigen Querschnitt errechnen. Die Maximalgeschwindigkeit  $v_m$  wird im breitesten Strömungsabschnitt erreicht. Im engsten Abschnitt ist die durchschnittliche Geschwindigkeit  $v_a$  nicht nur gering, sie verläuft auch in umgekehrter Richtung. Die auf die Länge der Strömung bezogene durchschnittliche Geschwindigkeit  $\bar{v}$  kann aus Ausdruck (35) errechnet werden, unter Verwendung des Integralwertes von (39). Die für die Wellenform in Abb. 3 errechneten Größen sind gleich:

$$v_m = 1,44v_0; \quad v_a = -0,2v_0; \quad \bar{v} = 0,83v_0. \quad (54)$$

In einem bestimmten Wellenquerschnitt ist die Geschwindigkeit  $v$  gleich null. Die Lage dieses Querschnitts wird aus Ausdruck (53) bestimmt; wir setzen ihn gleich Null. In Abb. 3 sind die Querschnitte, wo die Geschwindigkeit gleich Null ist, durch die Geraden 00 gekennzeichnet.

In jedem Querschnitt ist die Geschwindigkeitsverteilung ausgehend von der Achse nach Ausdruck (17) quadratisch. Deshalb hat die Geschwindigkeit an der Oberfläche der Strömung ihren größten Wert, und sie ist um 1,5 mal größer als die durchschnittliche. In Abb. 3 ist schematisch durch Pfeile die Geschwindigkeit in den verschiedenen Punkten angedeutet. Wenn wir das gewonnene Bild der Geschwindigkeitsverteilung betrachten, können wir erkennen, daß man Strömung nicht als wellenförmige charakterisieren kann, sondern eher als Herabfallen von Flüssigkeitstropfen in länglicher Form an der Wand.

Somit zeigt die durchgeführte Analyse, daß nach einer bestimmten Schichtdicke, die beim kritischen Wert der Reynoldszahl  $Re_k$  (IX) erreicht wird, das stabilere Fließen dem Aufsplintern der Strömung in einzelne Tropfen entspricht. Obwohl die gefundene periodische Lösung stabiler ist als die laminare, kann, wie bereits bemerkt wurde, dennoch der Fall eintreten, daß eine vollständigere und genauere Analyse erkennen läßt, daß auch ein weniger regelmäßiger Aufbau der Wellenoberfläche möglich ist. Somit ist nicht ausgeschlossen, daß die Abmessungen und Verteilung der "Tropfen" in Wirklichkeit nicht so regelmäßig sind, wie dies in Abb. 3 dargestellt ist, obwohl sich die durchschnittlichen Werte der Amplitude, der Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit nicht viel von den angegebenen unterscheiden dürften. Es ist auch durchaus möglich, daß das Bestreben zur Ansammlung in "Tropfen" in der Strömung nicht nur an der Achse  $x$  in Strömungsrichtung auftritt, sondern auch senkrecht zu ihr. Dabei hört die Aufgabe auf zweidimensional zu sein, und ihre Lösung stößt auf weitere mathematische Schwierigkeiten. Die experimentelle Untersuchung des wellenförmigen Zustands kann die weitere Analyse dieses komplizierten Fließtypus beträchtlich fördern.

Vergleich mit den Versuchsdaten

In Abb. 4 sind die Größen der Relation  $\lambda/a_0$  abgetragen, die aus den Ausdrücken (VII) und (VIII) in Abhängigkeit von der Re-Zahl [1] für Wasser, Toluol und flüssige Luft für ein Fließen, das unter dem Einfluß der Schwerkraft ( $j = 981$ ) an einer senkrechten Wand eintritt, errechnet wurden. Die angenommenen physikalischen Konstanten sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	$\rho$	$\mu$	$\sigma$	$Re_k$	$Re_{gr}$
Wasser . . . . .	1	$0,9 \cdot 10^{-2}$	71	23	200
Toluol . . . . .	0,86	$0,55 \cdot 10^{-2}$	29	21	170
flüssige Luft . . . . .	0,9	$0,174 \cdot 10^{-2}$	9,4	24	215

In Abb. 4 wurde eine Gerade gezogen, die durch die Gleichung (IX) bestimmt wird; ihre Schnittpunkte mit der Kurve liefern den Wert der kritischen Reynoldszahl  $Re_k$  und des Verhältnisses  $\lambda_k/a_0$ . Die ermittelten Größen sind in der Tabelle angegeben; wie man sehen kann, liegen diese  $Re_k$  nahe bei dem Wert, der im Versuch [1],  $25 \pm 5$ , beobachtet wurde. In der Abbildung wurde auch eine horizontale Gerade gezogen, die sich durch Gleichung (46) ergibt; sie schneidet die Kurven in den Punkten, die  $\lambda_{gr}/a_0$  entsprechen, bis zu denen man die in den angegebenen Berechnungen gemachten Annahmen für erfüllt halten kann.  $Re_{gr}$ , das diesen Werten entspricht, ist ebenfalls in der Tabelle aufgeführt.

Die Genauigkeit der Daten für die Dicke der Strömung, welche von verschiedenen Verfassern angeführt wird, gibt uns nicht die Möglichkeit, den Unterschied von 7 % zwischen der Filmdicke, welche für den laminaren (I) und den wellenförmigen Zustand (VIII) errechnet wurden, mit Sicherheit zu bestätigen.

Beim wellenförmigen Zustand bewegt sich die auf der Oberfläche befindliche Flüssigkeit mit maximaler Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ist immer kleiner als die Phasengeschwindigkeit, deshalb be-

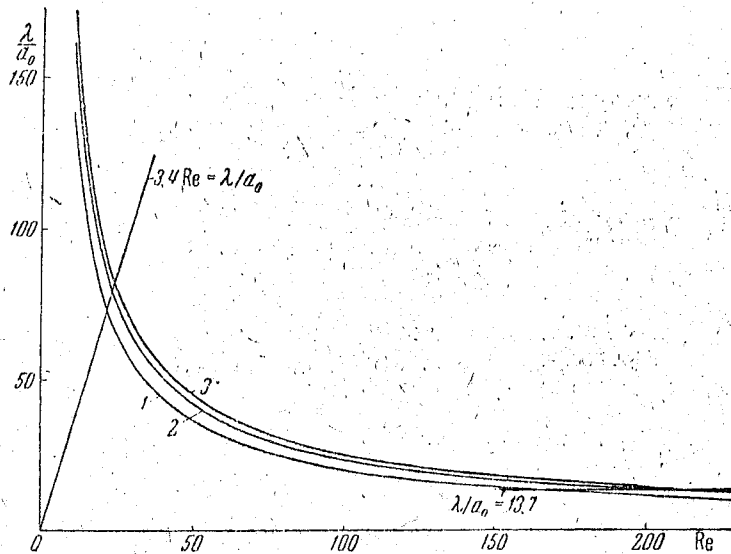


Abb. 4. 1 - Toluol, 2 - Wasser,  
3 - flüssige Luft.

finden sich die Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche folglich in verschiedenen Abschnitten des Wellenprofils, und ihre Geschwindigkeit ändert nicht nur ihre Größe, sondern, wie gezeigt wurde, auch ihre Richtung. Die durchschnittliche Geschwindigkeit der Teilchen an der Oberfläche ist nach Ausdruck (16) gleich  $1,5 \bar{v}$  und nach den angegebenen Daten (54) gleich  $1,24 v_0$ . Verglichen mit dem laminaren Fließen ist sie geringer als die Geschwindigkeit  $1,5 w$ , da die Geschwindigkeit  $v_0$  bei gleicher Durchflussmenge nur um 7 % größer ist als  $w$ .

Am Anfang dieses Artikels wurde darauf hingewiesen, daß Friedman und Miller [1] die Ausbreitung von Farbe in einer Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit von  $2,4 w$  beobachtet haben; somit kann der hohe Wert dieser Größen nicht einfach durch die Zunahme der Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeitsteilchen beim wellenförmigen Zustand auf der Oberfläche bewegen, erklärt werden. Der Vorgang dieser schnellen Farbausbreitung in der Strömung ist tatsächlich durch den wellenförmigen Fließcharakter bestimmt, sein Ursprung jedoch ist ein anderer, und um seinen Mechanismus zu klären, betrachten wir das in Abb. 5 dargestellte Modell.

Angenommen, der schmale parallele Spalt zwischen den Platten 1 und 2 sei mit einer Flüssigkeit gefüllt, und im linken, dunkel gezeichneten Abschnitt sei die Flüssigkeit bis zur Grenze, die durch die Linie  $cd$  gekennzeichnet sei, stark gefärbt (Abb. 5A). Jetzt verleihen



wir der oberen Platte 1 eine waagrechte Schwingbewegung mit dem Schwingungsaus-  
schlag  $b$  und der Periode  $T$ . Dann nimmt die obere Platte nach  
der Zeit  $1/2 T$  die in Abb. 5B dargestellte Stellung ein, die Grenze  
des gefärbten Abschnittes  $cd$  ist jetzt schräg und nach rechts verscho-  
ben. Dadurch, daß die Schicht dünn ist, gelingt es der Farbe nach ei-  
ner Verschiebungszeit von  $1/2 T$ , quer durch die Schicht zu diffundie-  
ren und in die tiefer gelegene Flüssigkeit vorzudringen; die Grenze  
des gefärbten Raumes erstreckt sich bis zur Linie  $c_1d$ . Nach der Zeit  
 $T$  kehrt die obere Platte in ihre Ausgangsstellung zurück (Abb. 5C),  
doch infolge der Diffusion quer durch die dünne Schicht bleibt die  
Flüssigkeit bis zur Grenze  $c_1d_1$  gefärbt. Bei darauffolgender Schwin-  
gung wiederholt sich der Vorgang (Abb. 5D), aber jetzt befindet sich  
die Grenze  $c_1d$ , von wo aus die Farbe sich auszubreiten beginnt, im Ab-  
stand  $b$  vom linken Ende der Platte und breitet sich um  $2b$  aus. Nach

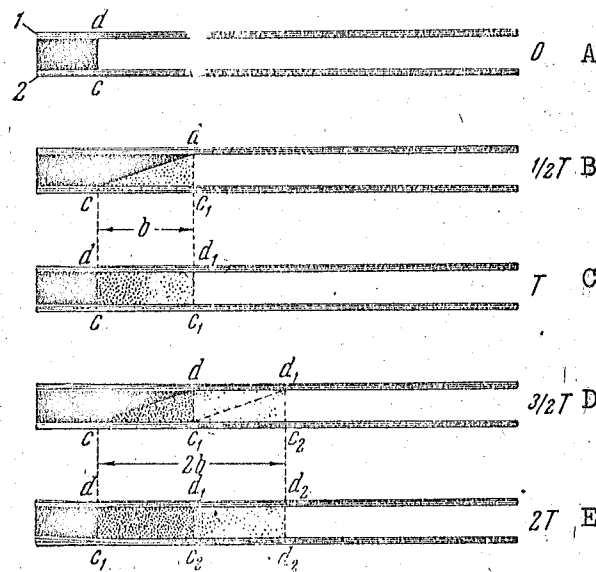


Abb. 5.

Beendigung der zweiten Schwingung (Abb. 5E) wird erstens die Fär-  
bung der Flüssigkeit im Spalt im Abstand  $b$  stärker, und zweitens  
breitet sich die Grenze um den Abstand  $2b$  aus. Der Vorgang setzt  
sich so fort, und man ersieht daraus, daß, ungeachtet dessen, daß

die Flüssigkeit im Durchschnitt keine Längsströmung besitzt, sich dennoch die Farbe mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit  $b/T$  ausbreitet. Und schließlich ist bei einem solchen Vorgang die Intensität der Färbung längs des Ausbreitungsweges inhomogen und nimmt die ganze Zeit über bis zum Ende ab.

Man kann annehmen, daß die analoge Erscheinung auch bei Ausbreitung von Farbe längs einer dünnen Schicht einer fließenden Flüssigkeit beim wellenförmigen Zustand auftritt. Hier wird die gefärbte Grenze mit der Geschwindigkeit übertragen, die gleich der maximalen in der Strömung vorhandenen ist. Nach (53) beträgt sie  $V_m = 1,5 v_m = 2,1 v_0$  oder annähernd  $2,3 w$  von der durchschnittlichen bei laminarem Zustand, wenn er mit derselben Durchflußmenge ablaufen kann.

Wenn wir die Geschwindigkeit an der Flüssigkeitsoberfläche, die bei laminarem Zustand am größten ist, mit  $W = 1,5 w$  bezeichnen, dann erhalten wir aus dem Ausdruck für den Durchfluß (15)

$$W = 1,5 Q/m. \quad (55)$$

Wenn wir den Wert  $m$  aus (I) einsetzen, dann erhalten wir unter Annahme von  $j = 981$  bei laminarem Zustand

$$(Wv)^3 = 1100 (Qv)^3. \quad (56)$$

Auf analoge Weise erhalten wir für den wellenförmigen Zustand

$$V_m = 2,1 Q a_0^{-1}. \quad (57)$$

Wir setzen den Wert  $a_0$  aus (VIII) ein und erhalten

$$(V_m v)^3 = 3800 (Qv)^3. \quad (58)$$

Wenn die in den Ausdrücken (56) und (58) in Klammern stehenden Größen als Koordinaten angesehen werden, dann erhalten wir zwei Kurven. Im laminaren Bereich folgt die Ausbreitung der Farbe der Kurve (56), und nach dem Wert  $Q_k$  (52), bei dem sich der wellenförmige Zustand einstellt, nach Kurve (58). Die auf diese Weise ermittelte Kurve ist

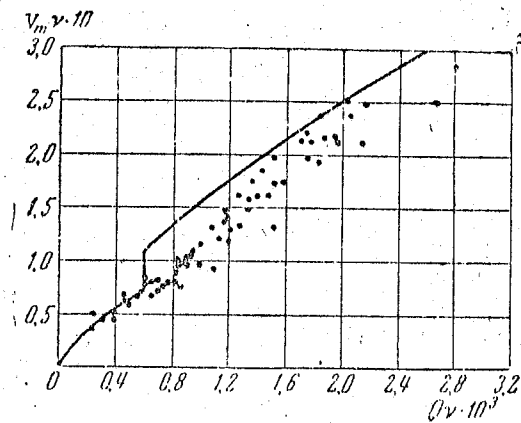


Abb. 6.

in Abb. 6 abgebildet. Friedman und Miller haben das beschriebene Diagramm zur Darstellung der Ergebnisse ihrer Experimente mit Wasser gewählt. Die von ihnen für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Farbe erzielten Punkte sind in Abb. 6 eingetragen.

Wenn wir in Betracht ziehen, wie schwierig es ist, den verwaschenen Farbrand visuell zu beobachten, der anscheinend auch die starke Streuung der Punkte in Abb. 6 hervorruft, dann kann man die Übereinstimmung der Versuchsdaten mit der errechneten Kurve für befriedigend halten. Die Richtigkeit des vorgestellten Mechanismus über den Vorgang der Farbausbreitung wird auch dadurch bekräftigt, daß die Autoren der genannten Versuche betonen, daß der Rand der Farbausbreitung stark verwaschen war.

Redationseingang  
11. Juli 1949

#### L i t e r a t u r

- [1] S. J. Friedman a. C. D. Miller. *Ind. a. Engin. Chem.*, July, 885, 1941. —  
[2] C. G. Kirkbride. *Transac. Am. Inst. Chem. Engrs.*, 30, 170, 1933/34. — [3] Fallah, Hunter a. Nash. *Journ. Soc. Chem. Ind.*, 53, 369, 1934. — [4] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. *Механика сплошных сред*, стр. 53, ГТТИ, 1944.

1. Friedman, S.J., Miller, C.O.: Liquid Films in the Viscous Flow Region.  
In: Industrial and Engineering Chemistry. Washington, 33 (1941), Nr 7, S. 885 - 891.
  2. Kirkbride, C.G.: Heat Transfer by Condensing Vapor on Vertical Tubes.  
In: Transactions of the American Institute of Chemical Engineers. New York, 30 (1933/34), S. 170 - 193.
  3. Fallah, R., Hunter, T.G., Nash, A.W.: The Application of Physico-Chemical Principles to the Design of Liquid-Liquid Contact Equipment. Part III. Isothermal Flow in Liquid Wetted-Wall Systems.  
In: Journal of the Society of Chemical Industry. Transactions. London, 53 (1934), S. 369 - 379.
  4. Landau, Lev Davydovic, Lifsic, Evgenij Michajlovic:  
Mechanika splosnych sred.  
Moskva: Gosudarstvennoe izdatel'stvo techniko-teoreticeskoj literatury, 1944, S. 53.  
<Die Mechanik der kontinuierlichen Medien>
- 

Stuttgart, den 25. August 1977

übersetzt von

*Ottmar Pertschi*  
(Ottmar Pertschi)  
Dipl.-Übersetzer