(163)

Verchovskij, B. S.

SYMMETRISCHE MEHRDIMENSIONALE TRANSPORTPROBLEME

Übersetzung aus:

Problemy optimal'nogo planirovanija, proektirovanija i upravlenija proizvodstvom. Trudy teoretičeskoj konferencii, sostojavšejsja na ėkonomičeskom fakul'tete Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta v marte 1962 g. Moskva: Verlag "Moskovskij gosudatstvennij universitet", 1963, S. 482 - 498.

Russ.: Simmetričnye mnogoindeksnye transportnye zadači

Beim Transport eines einheitlichen Produktes zwischen den Orten, die dieses Produkt erzeugen, und den Orten, wo es benötigt wird, kommt es zu einem zweidimensionalen Transportproblem, wenn die übrigen Faktoren gleichartig sind.

Beim Transport von mehreren untereinander nicht austauschbaren Produkten kommt es zu einem dreidimensionalen Problem.

Werden jedoch zwischen den Produktionsorten und den Bedarfsorten mehrere Produkte auf verschiedene Transportarten befördert, dann führt das Transportproblem zu Unbekannten mit vier Indizes usw.

Im Allgemeinen gebe es s Faktoren:

1) die Produktionsorte mit der Anzahl n_1,
2) die Produktarten (n_2),
3) die Transportarten (n_3),
4) die Beförderungsdauer (n_4),

....

s) die Bedarfsorte (n_s).

Wir ordnen dem k-ten Faktor den Index $i_k = 1, \ldots, n_k$ zu.

Alle n_k sind ganze positive Zahlen.

Die Menge der Einheiten, die vom Produktionsort i_1 des Produktes der Art i_2 durch Transport der Art i_3 usw. zum Ort mit der Nummer i_s transportiert werden, bezeichnen wir mit $x_{i_1 i_2 i_3 \dots i_s}$, und die Transportkosten einer jeder dieser Einheiten entsprechend mit $p_{i_1 i_2 i_3 \dots i_s}$.

Natürlich tritt das Problem auf, den Transport so zu organisieren, daß seine Gesamtkosten möglichst gering sind, d.h. das lineare Funktional

$$L = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s} p_{i_1, i_2, \dots, i_s} x_{i_1, i_2, \dots, i_3} \qquad (1)$$

zu minimieren, bei dem über alle Indizes summiert wird.

In Abhängigkeit von der Art der konkreten Probleme werden dabei den gesuchten Unbekannten $x_{i_1 i_2 \dots i_s}$ unterschiedliche Beschränkungen auferlegt. Es ist vor allem wünschenswert, daß die optimale Lösung keine Rücktransporte enthält, d.h. daß alle

$$x_{i_1 \dots i_s} \geqslant 0 \qquad (2)$$

sind.

Wie jedoch im weiteren Verlauf gezeigt werden wird, ist dies nicht immer durchführbar.

Die Gesamtheit der $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_s$ Elemente, die die Punkte des s-dimensionalen Raumes bilden und durch die Koordinaten $i_1, i_2, \dots, i_s$ bestimmt sind, nennen wir s-dimensionale Matrix. Diejenigen Elemente der s-dimensionalen Matrix, bei denen die Indizes

$$i_{a_1}, i_{a_2}, \dots, i_{a_m}$$

einen festen Wert haben (wo $1 \leqslant m \leqslant s - 1$ gilt, und $a_1 < a_2 < \dots \leqslant a_m$ beliebige Zahlen von 1, 2, ..., s sind), bilden den m-fachen Schnitt der Orientierung $(i_{a_1}, i_{a_2}, \dots, i_{a_m})$; er ist eine $(s - m)$-dimensionale Matrix.

Bei $m = s - 1$ erhalten wir den Schnitt der $(s - 1)$-fachen Orientierung $(i_{a_1}, i_{a_2}, \ldots, i_{a_{s-1}})$, der eine eindimensionale Matrix ist; einen solchen Schnitt nennen wir Zeile der Richtung (i_{a_s}). Nach Einführung von notwendigen Bedingungen werden wir eine Klasse mehrdimensionaler Probleme untersuchen, bei denen die Beschränkungen bezüglich der Unbekannten symmetrisch sind in den Indizes.

<u>Fall I.</u>

$$\sum_{i_k=1}^{n_k} x_{i_1 \ldots i_s} = a^{(k)}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_s}, \tag{3}$$

$$k = 1, \ldots, s.$$

Die Summanden einer jeden solchen Summe sind die Elemente der Richtungszeile (i_k).

Damit das System (3) lösbar ist, müssen die Bedingungen

$$\sum_{i_{k_1}=1}^{n_{k_1}} a^{(k_2)}_{i_1 \ldots i_s} = \sum_{i_{k_2}=1}^{n_{k_2}} a^{(k_1)}_{i_1 \ldots i_s} \tag{4}$$

erfüllt werden, wobei $k_1 < k_2$ beliebige Zahlen von $1, 2, \ldots, s$ sind.

Gibt es in (3) keine Summierung über die Indizes $i_{\nu_1}, i_{\nu_2}, \ldots, i_{\nu_m}$, dann zerfällt die Aufgabe, das Funktional (1) zu minimieren, in $\prod_{j=1}^{m} n_{\nu_j}$ Minimierungsaufgaben für dieses Funktional, wobei in jeder dieser Minimierungsaufgaben die Summen über die Indizes $i_{\nu_1} i_{\nu_2}, \ldots$ $\ldots, i_{\nu_m}$ nicht vorkommen.

<u>Fall II.</u>

$$\sum_{i_{k_1}, \ldots, i_{k_m}} x_{i_1 \ldots i_s} = a^{(k_1, \ldots, k_m)}_{i_1 \ldots i_s}. \tag{5}$$

Die Zahlen $k_1, \ldots, k_m$ nehmen alle möglichen ganzzahligen Werte an, die den Bedingungen

$$1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant s, \qquad (6)$$
$$1 \leqslant m \leqslant s - 1$$

genügen.

Die Summanden einer jeden Summe sind Elemente der $(s - m)$-fachen Schnitte, von denen ein jeder seinerseits eine m-dimensionale Matrix ist.

Darin sind auch die entsprechenden Verträglichkeitsbedingungen eingeschlossen. Ein solches Problem nennen wir Problem T_m.

Wir wollen das Problem T_{s-1} untersuchen.

Dafür werden die Bedingungen (5) so angeschrieben:

$$\sum_{i_{k_1}, \ldots, i_{k_{s-1}}} x_{i_1 \ldots i_s} = a_{i_{k_s}}^{(k_1, \ldots, k_{s-1})} \equiv b_{i_{k_s}}^{(k_s)}, \qquad (5')$$
$$k_s = 1, \ldots, s .$$

Die Verträglichkeitsbedingungen werden dann zu:

$$\sum_{i_{k_s}=1}^{n_{k_s}} b_{i_{k_s}}^{(k_s)} = N \quad \text{für alle } k_s = 1, \ldots, s, \qquad (7)$$

mit

$$N = \sum_{i_1, \ldots, i_s} x_{i_1 \ldots i_s} .$$

<u>Theorem 1</u>. Problem T_{s-1} hat immer eine Lösung, die keine Rücktransporte enthält.

<u>Beweis</u>. Eine der Lösungen ist die folgende:

$$x_{i_1 \ldots i_s} = b_{i_1}^{(1)} b_{i_2}^{(2)} \ldots b_{i_s}^{(s)} \frac{1}{N^{s-1}} .$$

Tatsächlich ist

$$\sum_{i_{k_1},\dots,i_{k_{s-1}}} x_{i_1\dots i_s} = b_{i_{k_s}}^{(k_s)} \left(\sum_{i_{k_1}} b_{i_{k_1}}^{(k_1)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i_{k_{s-1}}} b_{i_{k_{s-1}}}^{(k_{s-1})}\right) \cdot \frac{1}{N^{s-1}} =$$

$$= b_{i_{k_s}}^{(k_s)} .$$

Wir bezeichnen mit $P_s^{(m)}$ die Zahl der unabhängigen Gleichungen des Problems T_m und mit $[b_{i_k}^{k}]$ die linke Seite der Bedingung (5').

<u>Theorem 2</u>. Für das Problem T_{s-1} gilt die folgende Ungleichung:

$$P_s^{(s-1)} \leqslant n_1 + \dots + n_s - (s - 1).$$

<u>Beweis</u>. Aus den Verträglichkeitsbedingungen (7) erhalten wir $s - 1$ Gleichungen:

$$\sum_{i_k=1}^{n_k-1} [b_{i_k}^{(k)}] + [b_{n_k}^{(k)}] = \sum_{i_s=1}^{n_s} [b_{i_s}^{(s)}] ,$$

$$k = 1, \dots, s - 1,$$

hieraus folgt

$$[b_{n_k}^{(k)}] = \sum_{i_s=1}^{n_s} [b_{i_s}^{(s)}] - \sum_{i_k=1}^{n_k-1} [b_{i_k}^{(k)}].$$

Damit werden aus dem Gleichungssystem (5'), das aus $n_1 + \dots + n_s$ Gleichungen besteht, $(s - 1)$ Gleichungen ausgeschlossen, was Theorem 2 beweist.

F o l g e r u n g 1. Das zweidimensionale Transportproblem hat immer eine Lösung, die keine Rücktransporte enthält.

F o l g e r u n g 2. Die Zahl der unabhängigen Gleichungen des zweidimensionalen Transportproblems $(P_2^{(1)})$ ist nicht größer als $n_1 + n_2 - 1$.

Theorem 3. Für das Problem T_1 gilt die folgende Ungleichung:

$$P_s^{(1)} \leq n_1 \cdot n_2 \dots n_s - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_s - 1). \quad (8)$$

Beweis. Für $s = 2$ ist $P_2^{(1)} \leq n_1 + n_2 - 1 = n_1 n_2 - (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

Das Theorem sei richtig für

$r = s - 1$ Indizes, d.h.

es sei

$$P_{s-1}^{(1)} \leq n_1 \cdot n_2 \dots n_{s-1} - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{s-1} - 1). \quad (8')$$

Wir wollen zeigen, daß es dann auch für $r = s$ Indizes richtig ist.

Dazu schreiben wir die Bedingungen (3) detaillierter aus:

$$\sum_{i_1} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s} = a^{(1)}_{i_1 \dots i_{s-1} i_s}, \quad (3_1)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i_{s-1}} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s} = a^{(s-1)}_{i_1 \dots i_{s-2} i_s}, \quad (3_{s-1})$$

$$\sum_{i_s} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s} = a^{(s)}_{i_1 \dots i_{s-1}}. \quad (3_s)$$

Da das System (3) lösbar sein soll, sind die Bedingungen (4) erfüllt.

Wir untersuchen jene von den Bedingungen (4), in denen $k_1 = k$ eine beliebige Zahl von $1, 2, \dots, s - 1$ und $k_2 = s$:

$$\sum_{i_k} \sum_{i_s} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s} = \sum_{i_s} \sum_{i_k} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s},$$

hieraus folgt:

$$\sum_{i_k} x_{i_1 \dots i_{s-1} n_s} = \sum_{i_k} \sum_{i_s} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s} - \sum_{i_s=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_k} x_{i_1 \dots i_{s-1} i_s}.$$

Somit werden von den Gleichungen (3_1) - (3_{s-1}) jene unberücksichtigt gelassen, in denen $i_s = n_s$ gilt.

Die restlichen Gleichungen werden folgendermaßen angeschrieben:

$$\sum_{i_k} x_{i_1 \ldots i_{s-1} i_s} = a^{(k)}_{i_1 \ldots i_s}, \quad k = 1, \ldots, s-1; \; i_k = 1, \ldots, n_k, \; i_s = 1, \ldots, n_s - 1; \tag{9}$$

$$\sum_{i_s} x_{i_1 \ldots i_{s-1} i_s} = a^{(s)}_{i_1 \ldots i_{s-1}}. \tag{10}$$

Für jedes feste i_s stellt das System (9) ein Problem T_1 mit $s - 1$ Indizes dar. Es gibt $s - 1$ solcher Probleme, wobei nach Voraussetzung für jedes von ihnen (8') gilt. Folglich ist die Zahl der unabhängigen Gleichungen im System (9) nicht größer als

$$(n_s - 1)[n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{s-1} - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_{s-1} - 1)].$$

Das System (10) enthält $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{s-1}$ Gleichungen. Somit ist die Gesamtmenge der unabhängigen Gleichungen in (9) und (10) nicht größer als

$$(n_s - 1)[n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{s-1} - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_{s-1} - 1)] +$$
$$+ n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{s-1} = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_s - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_s - 1),$$

was zu beweisen war.

Gilt in dem System (3)

$$P^{(1)}_s = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_s - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_s - 1),$$

dann nennen wir ein solches System nicht entartet.

Aus dem Beweis von Theorem 3 kann man leicht einen Algorithmus zur Auffindung der unabhängigen Gleichungen für das nicht entartete Problem ermitteln.

Und zwar ist

$$\sum_{i_k=1}^{n_k} x_{i_1 \ldots i_s} = a^{(k)}_{i_1 \ldots i_s}, \quad i_l = 1, \ldots, n_l \text{ für } l \leqslant k, \quad i_l = 1, \ldots, n_l - 1 \text{ für } l < k. \tag{11}$$

B e i s p i e l:

$n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 100$, und das Problem sei nicht entartet. Dann gilt

$$P_3^{(1)} = 10 \cdot 20 \cdot 100 - 9 \cdot 19 \cdot 99 = 3071 .$$

Theorem 4. Für das Problem T_m gilt die folgende Ungleichung:

$$P_s^{(m)} \leqslant \sum_{i=0}^{s-m} (-1)^i C_{m+i-1}^{m-1} (n_1 n_2 \dots n_{s-m-i} + \dots + n_{m+i+1} n_{m+i+2} \dots n_s).$$

B e i s p i e l:

$n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$, $n_4 = 2$, und das Problem ist nicht entartet:

$$P_4^{(1)} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 96 ;$$

$$P_4^{(2)} = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + n_1 \cdot n_4 + n_2 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_4 + n_3 \cdot n_4 - 2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 3 = 46 ;$$

$$P_4^{(3)} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 3 = 11 .$$

Im Unterschied zum zweidimensionalen Transportproblem, wo die Verträglichkeitsbedingungen notwendig und hinreichend sind für eine Lösung ohne Rücktransporte sind beim mehrdimensionalen Problem $T_m (s \geqslant 3, m \leqslant s - 1)$ solche Bedingungen nur notwendig.

Eine Lösung des Problems T_m, die keine Rücktransporte enthält, nennen wir zulässige Lösung.

Die einschränkendsten Bedingungen an die Unbekannten gibt es beim Problem T_1, deshalb muß ihm besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Es sei

$$m_{i_1 \dots i_s} = \min_{1 \leqslant k \leqslant s} [a^{(k)}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}].$$

Verallgemeinerung des Theorems von Schell. Das Theorem T_1 hat nur dann eine zulässige Lösung, wenn alle Ungleichungen

$$a^{(k)}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s} \leqslant \sum_{i_k=1}^{n_k} m_{i_1 \dots i_s} , \qquad (12)$$

$$k = 1, \dots, s.$$

Beweis. Da alle $x_{i_1 \ldots i_s} \geqslant 0$ sind, gilt

$$x_{i_1 \ldots i_s} \leqslant a^{(k)}_{i_1 \ldots i_s} \quad \text{für jedes einzelne } k = 1, 2, \ldots, s.$$

Folglich ist

$$x_{i_1 \ldots i_s} \leqslant m_{i_1 \ldots i_s} . \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich

$$\sum_{i_k} x_{i_1 \ldots i_s} \leqslant \sum_{i_k} m_{i_1 \ldots i_s} ,$$

d.h.

$$a^{(k)}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_s} \leqslant \sum_{i_k} m_{i_1 \ldots i_s} .$$

Dies beweist das Theorem.

A n m e r k u n g. Stehen in (13) überall Gleichungen, dann gibt es genau einen Transport

$$x_{i_1 \ldots i_s} = m_{i_1 \ldots i_s} ,$$

$$i_k = 1, \ldots, n_k , \quad k = 1, \ldots, s .$$

B e i s p i e l e i n e s P r o b l e m s , d a s k e i n e z u l ä s s i g e L ö s u n g b e s i t z t.

Es sei

$$a^{(1)}_{\bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s} > \min_{2 \leqslant k \leqslant s} [a^{(k)}_{i_1 \bar{i}_2 \ldots \bar{i}_{k-1} \bar{i}_{k+1} \ldots \bar{i}_s}] , \quad i_1 = 1, \ldots, n_1$$

(der Strich über dem Index bedeutet, daß er festgelegt ist).

Wir wählen

$$a^{(2)}_{i_1 \bar{i}_3 \ldots \bar{i}_s} \leqslant \frac{a^{(1)}_{\bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s}}{n_1} \equiv \varepsilon$$

für

$$i_1 = 1, 2, \ldots, E\left(\frac{n_1}{2}\right) ,$$

$$a^{(3)}_{i_1 \bar{i}_2 i_4 \ldots \bar{i}_s} \leqslant \varepsilon$$

für

$$i_1 = E\left(\frac{n_1}{2}\right) + 1, \ldots, n_1 - 1,$$

$$a^{(3)}_{n_1 \bar{i}_2 \bar{i}_4 \ldots \bar{i}_s} < \varepsilon .$$

Dann sind alle

$$m_{i_1 \bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s} = \min [a^{(1)}_{\bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s}, a^{(2)}_{i_1 \bar{i}_3 \ldots \bar{i}_s}, a^{(3)}_{i_1 \bar{i}_2 \bar{i}_4 \ldots \bar{i}_s}, a^{(s)}_{i_1 \bar{i}_2 \ldots \bar{i}_{s-1}}] \leqslant \varepsilon$$

$$m_{n_1 \bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s} < \varepsilon \ , \quad i_1 = 1, \ldots, n_1 - 1.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} m_{i_1 \bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s} < \varepsilon \cdot n_1 = a^{(1)}_{\bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s} ,$$

d.h. Bedingung (12) wird nicht erfüllt.

In dem oben angeführten Beispiel wurden

$$a^{(2)}_{i_1 \bar{i}_3 \ldots \bar{i}_s} \quad \text{und} \quad a^{(3)}_{i_1 \bar{i}_2 \ldots \bar{i}_s}$$

so gewählt, daß die Verträglichkeitsbedingungen nicht verletzt werden.

Folglich sind die Verträglichkeitsbedingungen nicht hinreichend für die Existenz einer zulässigen Lösung des Problems T_1 bei $s \geqslant 3$.

Z a h l e n b e i s p i e l.

$$s = 3, \quad n_1 = n_2 = n_3 = 2;$$

$$a^{(1)}_{11} = 1; \quad a^{(2)}_{11} = 1; \quad a^{(3)}_{11} = 2;$$

$$a^{(1)}_{12} = 6; \quad a^{(2)}_{12} = 7; \quad a^{(3)}_{12} = 6;$$

$$a^{(1)}_{21} = 4; \quad a^{(2)}_{21} = 4; \quad a^{(3)}_{21} = 5;$$

$$a^{(1)}_{22} = 4; \quad a^{(2)}_{22} = 3; \quad a^{(3)}_{22} = 2.$$

Alle Verträglichkeitsbedingungen sind erfüllt.

Tatsächlich gilt

$$a_{11}^{(1)} + a_{12}^{(1)} = a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(3)} = 7; \quad a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(1)} = a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(2)} = 5;$$

$$a_{21}^{(1)} + a_{22}^{(1)} = a_{12}^{(3)} + a_{22}^{(3)} = 8; \quad a_{12}^{(1)} + a_{22}^{(1)} = a_{12}^{(2)} + a_{22}^{(2)} = 10;$$

$$a_{11}^{(2)} + a_{12}^{(2)} = a_{11}^{(3)} + a_{12}^{(3)} = 8;$$

$$a_{21}^{(2)} + a_{22}^{(2)} = a_{21}^{(3)} + a_{22}^{(3)} = 7.$$

Trotzdem hat das Problem keine zulässige Lösung, denn

$$a_{12}^{(1)} = 6 > m_{112} + m_{212} = 2 + 3 = 5,$$

d.h. Bedingung (12) wird nicht erfüllt.

Die Methode der frontalen Matrix zur Ermittlung einer zulässigen Lösung

Wir wählen $n_\alpha = \min(n_1, \ldots, n_s)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha = 1$.

Die Matrix, die aus $a_{i_2 \ldots i_s}^{(1)}$ besteht, nennen wir frontal:

$$F_1 = \left\{a_{i_2 \ldots i_s}^{(1)}\right\} \equiv \left\{f_{i_2 \ldots i_s}^{(1)}\right\} .$$

Wir ermitteln

$$m_{i_1 \ldots i_s}^{(1)} = \min_{1 \leqslant k \leqslant s} [a_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_s}^{(k)}].$$

Sie bilden eine s-dimensionale Matrix. Die zugehörigen Schnitte der Orientierung (i_1) bezeichnen wir mit

$$M_1^{(1)}, \ldots, M_n^{(1)} .$$

Die gesuchten $x_{1 i_2 \ldots i_s}$ werden nach oben durch $m_{1 i_2 \ldots i_s}^{(1)}$ beschränkt und nach unten durch

$$\max[f^{(1)}_{i_2\ldots i_s} - \sum_{i_1=2}^{n_1} m^{(1)}_{i_1\ldots i_s}, 0].$$

Letzteres wird deshalb gemacht, um im weiteren Verlauf sicherzustellen, daß die Schellschen Bedingungen (12) erfüllt werden.
Somit müssen $x_{1i_2\ldots i_s}$ die Bedingungen

$$\sum_{i_k=1}^{n_k} x_{1i_2\ldots i_s} = a^{(k)}_{1i_2\ldots i_{k-1}i_{k+1}\ldots i_s} \quad ; \quad k = 2, \ldots, s$$

und

$$\max[f^{(1)}_{i_2\ldots i_s} - \sum_{i_1=2}^{n_1} m^{(1)}_{i_1\ldots i_s}, 0] \leq x_{1i_2\ldots i_s} \leq m^{(1)}_{1i_2\ldots i_s}$$

erfüllen.

Sind alle $x_{1i_2\ldots i_s}$ derart gewählt, dann ermitteln wir danach

$$F_2 = \{f^{(2)}_{i_2\ldots i_s}\} = \{f^{(1)}_{i_2\ldots i_s} - x_{1i_2\ldots i_s}\} .$$

und

$$M_2^{(2)}, \ldots, M_{m_1}^{(2)},$$

wobei alle

$$m^{(2)}_{i_1\ldots i_s} = \min[f^{(2)}_{i_2\ldots i_s}, m^{(1)}_{i_1\ldots i_s}] .$$

So geht das weiter, bis

$$F_{n_1} = \{x_{n_1 i_2\ldots i_s}\}$$

gefunden ist.

Bestimmt der Indez n_α die Orientierung der frontalen Matrizen, dann hat die Menge der Vergleichs- und Additionsoperationen zum Auffinden der zulässigen Lösung die Größenordnung

$$2n_1 \ldots n_{\alpha-1}(n_\alpha + 1)^2 n_{\alpha+1} \ldots n_s .$$

Hieraus wird klar, warum es zweckmäßig ist, n minimal zu wählen, d.h.

$$n_\alpha = \min_{1\leq k\leq s} n_k$$

zu setzen.

Beispiel eines Problems T_1, bei dem die Schellschen Bedingungen erfüllt sind, es aber keine zulässige Lösung gibt

$a_{11}^{(1)} = 2$; $a_{12}^{(1)} = 2$; $a_{13}^{(1)} = 17$; $a_{14}^{(1)} = 8$;

$a_{21}^{(1)} = 0$; $a_{22}^{(1)} = 3$; $a_{23}^{(1)} = 8$; $a_{24}^{(1)} = 2$;

$a_{31}^{(1)} = 5$; $a_{32}^{(1)} = 6$; $a_{33}^{(1)} = 5$; $a_{34}^{(1)} = 3$;

$a_{41}^{(1)} = 4$; $a_{42}^{(1)} = 0$; $a_{43}^{(1)} = 8$; $a_{44}^{(1)} = 8$;

$a_{51}^{(1)} = 3$; $a_{52}^{(1)} = 10$; $a_{53}^{(1)} = 7$; $a_{54}^{(1)} = 4$;

$a_{11}^{(2)} = 1$; $a_{12}^{(2)} = 17$; $a_{13}^{(2)} = 35$; $a_{14}^{(2)} = 6$;

$a_{21}^{(2)} = 13$; $a_{22}^{(2)} = 4$; $a_{23}^{(2)} = 10$; $a_{24}^{(2)} = 19$;

$a_{11}^{(3)} = 15$; $a_{12}^{(3)} = 4$; $a_{13}^{(3)} = 7$; $a_{14}^{(3)} = 13$; $a_{15}^{(3)} = 20$;

$a_{21}^{(3)} = 14$; $a_{22}^{(3)} = 9$; $a_{23}^{(3)} = 12$; $a_{24}^{(3)} = 7$; $a_{25}^{(3)} = 4$.

Ist eine zulässige Lösung des Problems gefunden und eine Basis (für das nichtentartete Problem ist die Menge der Basistransporte gleich $p_s^{(1)}$) für alle den Basistransporten entsprechenden $p^*_{i_1 \dots i_s}$ gewählt, dann ermitteln wir $u^{(k)}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}$, sodaß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\sum_{k=1}^{s} u^{(k)}_{i_1 \dots i_s} = p^*_{i_1 \dots i_s} .$$

Danach ermitteln wir mit den gefundenen $u^{(k)}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}$

$$\bar{p}_{i_1 \dots i_s} = \sum_{k=1}^{s} u^{(k)}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}$$

für alle Nichtbasiszellen.

Sind alle $\bar{p}_{i_1 \dots i_s} \leqslant p_{i_1 \dots i_s}$, dann ist die gefundene zulässige Lösung optimal. Enthält die zulässige Lösung positive Nichtbasistransporte, dann ist die Erfüllung der folgenden Bedingungen dafür notwendig und hinreichend, daß die zulässige Lösung optimal ist:

a) $\bar{p}_{i_1 \dots i_s} \leqslant p_{i_1 \dots i_s}$ - für Zellen mit unteren Begrenzungen;

b) $\bar{p}_{i_1 \dots i_s} \geqslant p_{i_1 \dots i_s}$ - für Zellen mit Beschränkungen nach oben.

Wenn die besagten Bedingungen auch nur für eine Zelle nicht erfüllt werden, dann ist die gefundene zulässige Lösung nicht optimal, d.h. sie muß verbessert werden. Hierzu gehen wir durch Einführen von θ in die Zelle, in der die Optimalitätsbedingung nicht erfüllt wurde, zu einer neuen Basis über. Nach dem Übergang zur neuen Basis nimmt der Wert des Funktionals ab um

$$\left| \bar{p}_{i_1 \dots i_s} - p_{i_1 \dots i_s} \right| \cdot \theta ,$$

deshalb ist es allgemein zweckmäßig, die θ-Zelle so zu wählen, daß dieser Wert beim jeweiligen Übergang maximal ist.

Die θ-Zelle sei gewählt. Für den Übergang zur neuen Basis ist es notwendig, einen s-dimensionalen geschlossenen Kreis zu konstruieren.

Eine Basisvariable, die nicht zu diesem θ-Kreis gehört, nennen wir unverbunden.

<u>Theorem 5.</u> Gibt es eine Richtungszeile (i_α), in der nur eine Basisvariable vorkommt, und befindet sich die θ-Zelle nicht in dieser Zeile, dann ist diese Basisvariable unverbunden.

<u>Beweis:</u> die besagte Basisvariable muß s Bedingungen erfüllen, die beim Übergang zur neuen Basis nicht verletzt werden dürfen. Würde sie zum θ-Kreis gehören, dann wäre die Bedingung in der Richtungszeile

$$(i_\alpha)$$

verletzt, d.h. die zu $a^{(\alpha)}_{i_1 \dots i_s}$ gehörende Bedingung.

- 15 -

Theorem 6. Wenn sich in irgendeiner Zeile, in der keine θ-Zelle vorkommt, r Basisvariablen befinden und r - 1 davon unverbunden sind, dann ist auch die r-te Basisvariable ebenfalls unverbunden.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt und basiert darauf, daß es zu einer Verletzung von einer der Bedingungen (3) führen würde, wenn die r-te Basisvariable zum θ-Kreis gehören würde.

Wir ermitteln alle unverbundenen Basisvariablen. Alle übrigen Basisvariablen gehören zum θ-Kreis. Um zu bestimmen, um wieviel die zum θ-Kreis gehörenden Basisvariablen verändert werden müssen, führen wir für die Zellen des θ-Kreises die Hilfsunbekannten $\alpha_{i_1 \dots i_s}$ ein.

Ein Teil der $\alpha_{i_1 \dots i_s}$ ist positiv, ein Teil negativ, wobei in einem mehrdimensionalen Problem $T_1 (S \geqslant 3)$, die $\alpha_{i_1 \dots i_s}$ Vielfache von θ sind, während beim zweidimensionalen Problem alle $a_{i_1 i_2}$ entweder gleich θ oder $-\theta$ sind. Deshalb gilt, daß selbst wenn alle $a^{(k)}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}$ ganzzahlig sind, trotzdem, wie später gezeigt wird, nicht gewährleistet ist, daß die Lösung ganzzahlig ist.

Die Verletzung der Ganzzahligkeit der Lösung tritt unter den folgenden Bedingungen ein:

a) es gibt ein $a_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3} = - d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}$, wobei $d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}$ eine ganze Zahl und $\geqslant 2$ ist,

b) $\dfrac{x_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}}{d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}}$ ist das Minimum unter den ungeraden Gliedern des θ-Kreises,

c) $d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3} > x_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}$, oder $x_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}$ und $d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}$ sind teilerfremd.

Dann ist $\theta = \dfrac{x_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}}{d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3}}$.

Alle oben gemachten Überlegungen über das Problem T_1 können auch für die Probleme T_m verallgemeinert werden.

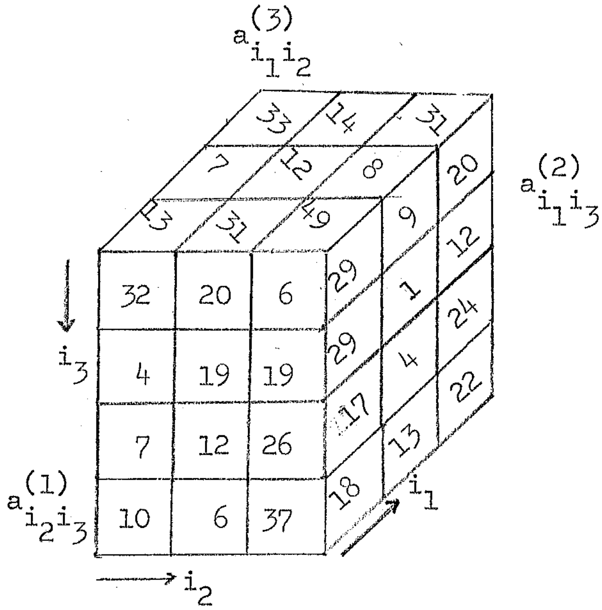

Abbildung 1.

B e i s p i e l.

Wir untersuchen das Problem T_1 bei $s = 3$. Alle $a^{(1)}_{i_2 i_3}$, $a^{(2)}_{i_1 i_3}$, $a^{(3)}_{i_1 i_2}$ sind an den Kanten angeschrieben.

Die Pfeile bezeichnen die Richtungen, in denen die Indizes $i_1 = 1, 2, 3$; $i_2 = 1, 2, 3$; $i_3 = 1, 2, 3, 4$ zunehmen. Wir ermitteln eine zulässige Lösung. Dafür bestimmen wir alle $m^{(1)}_{i_1 i_2 i_3}$.

i_2 $M^{(1)}_1$, $\downarrow i_3$

13	20	6
4	19	19
7	12	17
10	6	18

$i_1 = 1$

$M^{(1)}_2$

7	9	6
1	1	1
4	4	4
7	6	8

$i_2 = 2$

$M^{(1)}_3$

20	14	6
4	12	12
7	12	24
10	6	22

$i_1 = 3$

Die Schellschen Bedingungen sind erfüllt.
Als frontale Matrix wählen wir

$$F_1 = a^{(1)}_{i_2 i_3} = f^{(1)}_{i_2 i_3}, \quad \text{wobei} \quad n_1 = \min(n_1, n_2, n_3).$$

Wir bestimmen $x_{1 i_2 i_3}$. In jeder Zelle der Matrix

13 5 13	16 0 20	 0 6	29
 0 4	15 6 19	14 6 19	29
 0 7	 0 12	17 0 17	17
 0 10	 0 6	18 0 18	18

$X_1 = \{x_{1i_2i_3}\}$ steht in der rechten unteren Ecke jeweils die obere Schranke, d.h. $m^{(1)}_{1i_2i_3}$, und in der linken unteren Ecke die untere Schranke, d.h.

$$\max[f^{(1)}_{i_2i_3} - \sum_{i_1=2}^{n_1} m^{(1)}_{i_1i_2i_3}, 0].$$

Danach ermitteln wir $f^{(2)}_{i_2i_3}$, $m^{(2)}_{2i_2i_3}$ und $m^{(2)}_{3i_2i_3}$.

F_2

19	4	6
4	4	5
7	12	9
10	6	19

$M_2^{(2)}$

7	4	6
1	1	1
4	4	4
7	6	8

$M_3^{(2)}$

19	4	6
4	4	5
7	12	9
10	6	19

Die Schellschen Bedingungen sind wieder erfüllt.

Analog dazu finden wir $X_2 = \{x_{2i_2i_3}\}$ und

X_2

7 / 0 7	2 / 0 4	0 6	9
0 1	1 / 0 1	0 1	1
0 4	4 / 0 4	0 4	4
0 7	5 / 0 6	8 / 0 8	13
7	12	8	

$X_3 = F_3$

12	2	6
4	3	5
7	8	9
10	1	11

Damit ist eine zulässige Lösung gefunden:

i_2 (Spalten), i_3 (Zeilen)

2 / 13	5 / 16	2
5	1 / 15	1 / 14
4	5	2 / 17
6	3	5 / 18

$i_1=1$

6 / 7	1 / 2	3
2	3 / 1	4
6	2 / 4	6
3	1 / 5	4 / 8

$i_1=2$

3 / 12	5 / 2	2 / 6
4 / 4	5 / 3	1 / 5
6 / 7	4 / 8	3 / 9
6 / 10	4 / 1	1 / 11

$i_1=3$

In der rechten oberen Ecke sind die Werte $p_{i_1 i_2 i_3}$ angeschrieben.

Für diese zulässige Lösung betragen die Transportkosten $L^{(1)} = 613$ Geldeinheiten.

Nach 4 Iterationen erhalten wir die folgende zulässige Lösung Nr. 1 (siehe S. 19).

Wir ermitteln $u^{(1)}_{i_2 i_3}$, $u^{(2)}_{i_1 i_3}$, $u^{(3)}_{i_1 i_2}$ als Lösung des Systems

$$u^{(1)}_{i_2 i_3} + u^{(2)}_{i_1 i_3} + u^{(3)}_{i_1 i_2} = p^{*}_{i_1 i_2 i_3} ,$$

$\longrightarrow i_r$ i_2=1, $\downarrow i_3$

2 13	5 12	2 4	0
5	1 19	1 10	0
4	5	2 17	-1
6	3 0	5 18	4
-1	-5	0	

i_1=2

6 1	1 8	3	6
2 1	3	4	1
6	2 4	6 θ	13
3 5	1	4 8	0
-3	-15	3	

i_1=3

3 18	5	2 2	0
4 3	5	1 9	0
6 7	4 8	3 9	0
6 5	4 6	1 11	0
0	0	0	

$u^{(1)}_{i_2 i_3}$

3	10	2
4	6	1
6	4	3
6	4	1

Zulässige Lösung Nr. 1

$\longrightarrow i_2$ i_1=1, $\downarrow i_3$

2 13	5 10	2 6	4
5	1 15	1 14	0
4	5	2 17	-1
6	3 6	5 12	4
-5	-4	0	

i_1=2

6	1 9	3	-2
2	3 1	4	0
6	2 2	6 2	0
3 7	1	4 6	0
-3	-2	3	

i_1=3

3 19	5 1	2	0
4 4	5 3	1 5	0
6 7	4 10	3 7	0
6 3	4	1 19	0
0	0	0	

$u^{1}_{i_2 i_3}$

3	5	-2
4	5	1
6	4	3
6	3	1

Zulässige Lösung Nr. 2

wobei $p^{*}_{i_1 i_2 i_3}$ die spezifischen Transportkosten bezeichnen, die zu den Basiszellen gehören. Der Bequemlichkeit halber schreiben wir die Werte $u^{(1)}_{i_2 i_3}$ in die einzelnen Matrizen, die Werte $u^{(2)}_{i_1 i_3}$ rechts von den jeweiligen Matrizen und $u^{(3)}_{i_1 i_2}$ unter den entsprechenden Matrizen an. Wir führen θ in die Zelle mit den Koordinaten (2, 3, 3) ein. Unverbunden sind die folgenden Zellen: (1, 1, 1), (1, 3, 3), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (1, 3, 2), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 3, 2).

Die übrigen Zellen gehören zum -Kreis.

Wir finden $\alpha_{i_1 i_2 i_3}$:

$a_{121} = -\theta$; $a_{211} = -\theta$; $a_{223} = -\theta$; $a_{333} = -\theta$;

$a_{131} = +\theta$; $a_{221} = +\theta$; $a_{311} = +\theta$; $a_{314} = -\theta$;

$a_{124} = +\theta;$ $a_{214} = +\theta;$ $a_{331} = -\theta;$ $a_{324} = -\theta;$

$a_{134} = -\theta;$ $a_{234} = -\theta;$ $a_{323} = +\theta;$ $a_{334} = +2\theta.$

Hier ist $a_{334} = 2\theta; \ \theta = 1.$

Bei dieser Iteration wurde die Ganzzahligkeit nicht verletzt.

Nach weiteren 4 Iterationen erhalten wir die zulässige Lösung Nr. 2 (siehe S. 19).

Sie erfüllt die Optimalitätsbedingungen und braucht folglich auch nicht mehr verbessert werden:

$$L^{(9)} = L_{optim} = 525.$$

L i t e r a t u r

1. Judin, David Borisovič, Gol'štejn, E.G.:
Zadači i metody linejnogo programmirovanija.
Moskva: Verlag "Sovetskoe radio", 1961.
Deutsche Übersetzung:
JUDIN, David Borisovič, GOLSTEIN, E.G.:
Lineare Optimierung. Bd 1.2.
Berlin: Akademie-Verlag, 1968 - 1970.

2. Gass, S.:
Linejnoe programmirovanie (metody i priloženija). Pod red. D.B.Judina.
Moskva: Fizmatgiz, 1961.
Übersetzung von:
GASS, Saul I.:
Linear Programming. Methods and Applications.
New York: MacGraw-Hill, 1958.

Stuttgart, den 4.Oktober 1977

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer