(182)

Verchovskij, B. S.

ÜBER EIN MEHRDIMENSIONALES TRANSPORTPROBLEM MIT AXIALSUMMEN

(Eingereicht am 6.6.1963 von A.I. Berg, Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR)

Übersetzung aus:

Doklady Akademii nauk SSSR. Moskva, 156 (1964), Nr 2, S. 282 - 285.

Russ.: **О МНОГОИНДЕКСНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ С АКСИАЛЬНЫМИ СУММАМИ**

O mnogoindeksnoj transportnoj zadače s aksial'nymi summami

A multiple index problem is considered, whose constraints are given by sums over all indices except one. It is shown, on the basis of the Dantzig-Wolf expansion method, how to reduce the problem to the solution of certain classical transportation problems. It is shown how to find the initial values of the admissible solution, the estimation vector, the basis columns, and the elements of the inverse matrix. A special method for eliminating degeneracy is described. (Author)

Untersucht wird ein Minimierungsproblem der linearen Form

$$\sum_{i_1,\ldots,i_s} P_{i_1,\ldots,i_s} x_{i_1,\ldots,i_s} \tag{1}$$

unter den Bedingungen $x_{i_1\ldots i_s} \geqslant 0$ und

$$\sum_{i_2,\ldots,i_s} x_{i_1\ldots i_s} = a_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_1,\ldots,i_{s-2},i_s} x_{i_1\ldots i_s} = a_{i_{s-1}}^{(s-1)}, \sum_{i_1,\ldots,i_{s-1}} x_{i_1\ldots i_s} = a_{i_s}^{(s)}, \tag{2}$$

wobei über alle angegebenen i_k von 1 bis n_k summiert wird, und ferner $i_l = 1, \ldots, n_l$ für $l = 1, \ldots, s$ gilt sowie $0 \leqslant a_{i_l}^{(l)} < \infty$. Ein solches Problem nennen wir P r o b l e m m i t A x i a l s u m m e n o d e r P r o b l e m $T_{s-1}(s)$. Auf solche $T_{s-1}(s)$- Probleme lassen sich insbesondere Mehrschritt-Transportprobleme reduzieren.

T h e o r e m 1. Für die Existenz einer Lösung des Problems $T_{s-1}(s)$ ist notwendig und hinreichend, daß die Kongruenzbedingungen

$$\sum_{i_{l_1}=1}^{n_{l_1}} a_{i_{l_1}}^{(l_1)} = \sum_{i_{l_2}=1}^{n_{l_2}} a_{i_{l_2}}^{(l_2)} \quad \text{für alle } 1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant s. \tag{3}$$

erfüllt werden.

Die N o t w e n d i g k e i t ist offensichtlich, da $\sum_{i_1} \left(\sum_{i_2, \ldots, i_s} x_{i_1 \ldots i_s} \right) = \ldots = \sum_{i_s} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_{s-1}} x_{i_1 \ldots i_s} \right)$.

H i n l ä n g l i c h k e i t. Durch unmittelbares Vertauschen kann leicht verifiziert werden, daß $x_{i_1 \ldots i_s} = T^{1-s} \prod_{l=1}^{s} a_{i_l}^{(l)}$ alle Bedingungen (3) erfüllt, wobei $T \equiv \sum_{i_l=1}^{n_l} a_{i_l}^{(l)}$.

Wir untersuchen die Bedingungen

$$\sum_{i_2, \ldots, i_s} x_{i_1 \ldots i_s} = a_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_1, \ldots, i_{s-2}, i_s} x_{i_1 \ldots i_s} = a_{i_{s-1}}^{(s-1)}. \tag{4}$$

Da $0 \leqslant x_{i_1 \ldots i_s} \leqslant \min_{1 \leqslant l \leqslant s} a_{i_j}^{(l)} < \infty$, erzeugen die Bedingungen (4) im $\prod_{l=1}^{s} n_l$-dimensionalen Raum ein begrenztes konvexes Polyeder G. Wir bezeichnen mit $\xi^{(\sigma)}$ die Eckpunkte von G, $\sigma = 1, \ldots, h$, wobei h die Anzahl aller Ecken des Polyeders G angibt. Ist $(x_{11 \ldots 1}, \ldots, x_{n_1 n_2 \ldots n_s}) \in G$, dann gilt

$$x_{i_1 \ldots i_s} = \sum_{\sigma=1}^{h} \xi_{i_1 \ldots i_s}^{(\sigma)} \lambda_\sigma, \tag{5}$$

wobei

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \lambda_\sigma = 1, \quad \lambda_\sigma \geqslant 0. \tag{6}$$

Wir setzen (5) in (1) ein und erhalten in der s-ten Gruppe der Bedingungen (2) das folgende Problem:

Gesucht ist das Minimum

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{h} \gamma^{(\sigma)} \lambda_\sigma \right) \tag{7}$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{\sigma=1}^{h} g_{i_s}^{(\sigma)} \lambda_\sigma = a_{i_s}^{(s)} \tag{8}$$

und (6). Hier bedeutet

$$\gamma^{(\sigma)} \equiv \sum_{i_1,\ldots,i_s} p_{i_1\ldots i_s}\xi^{(\sigma)}_{i_1\ldots i_s}, \quad g^{(\sigma)}_{i_s} \equiv \sum_{i_1,\ldots,i_{s-1}} \xi^{(\sigma)}_{i_1\ldots i_s}. \tag{9}$$

T h e o r e m 2. Die Bedingungen (6) folgen aus Theorem 1 und den Bedingungen (8).

B e w e i s. Wir summieren (8) über alle Werte i_s und erhalten

$$\sum_{i_s} a^{(s)}_{i_s} = \sum_{i_s,\sigma} g^{(\sigma)}_{i_s}\lambda_\sigma = \sum_\sigma \lambda_\sigma \sum_{i_s} g^{(\sigma)}_{i_s} = T\sum_\sigma \lambda_\sigma.$$

Da $\sum_{i_s} a^{(s)}_{i_s} = T$ ist, ist $\sum_\sigma \lambda_\sigma = 1$. Das Theorem ist damit bewiesen.

A l g o r i t h m u s zur Ermittlung einer Basislösung des Problems $T_{s-1}(s)$. Wir wählen $x_{1\ldots 1} = \min\limits_{1\leqslant l\leqslant s} a^{(l)}_1$ und bilden $\bar{a}^{(l)}_1 = a^{(l)}_1 - x_{1\ldots 1}$. Dabei verschwindet mindestens eines der $\bar{a}^{(l)}_1$. Wir nehmen an, es sei $\bar{a}^{(1)}_1 = 0$. Nun ermitteln wir $x_{21\ldots 1} = \min\,(a^{(1)}_2, \bar{a}^{(2)}_2, \ldots, \bar{a}^{(s)}_1)$. Allgemein sei $x_{\tau_1\ldots\tau_s} = \min\limits_{1\leqslant l\leqslant s} (\tilde{a}^{(l)}_{\tau_l}) = \tilde{a}^{(l_*)}_{\tau_{l_*}}$ gefunden. Hier bedeuten $\tilde{a}^{(l)}_{\tau_l}$ verschiedene Werte. Wir gehen zur Ermittlung von $x_{\omega_1\ldots\omega_s} = \min\limits_{1\leqslant l\leqslant s} (\tilde{a}^{(l)}_{\omega_l})$ über, wobei

$$\omega_k = \begin{cases} \tau_k, & \text{wenn } k \neq l_*, \\ \tau_k + 1, & \text{wenn } k = l_*; \end{cases}$$

$$\tilde{a}^{(k)}_{\omega_k} = \begin{cases} \tilde{a}^{(k)}_{\tau_k} - x_{\tau_1\ldots\tau_s}, & \text{wenn } k \neq l_*, \\ a^{(k)}_{\omega_k}, & \text{wenn } k = l_*. \end{cases}$$

Der Vorgang ist beendet, wenn $\tau_k = n_k$ für alle $k = 1,\ldots, s$ ist.

Aus dem Algorithmus zur Ermittlung einer Basislösung folgen zwei Theoreme:

T h e o r e m 3. Sind alle $a^{(l)}_{i_l}$ ganze Zahlen, dann hat das Problem $T_{s-1}(s)$ mindestens eine ganzzahlige Basislösung.

B e m e r k u n g. Leider gibt es nicht immer eine optimale ganzzahlige Lösung.

T h e o r e m 4. Eine Basislösung des Problems $T_{s-1}(s)$ enthält nicht mehr als $\sum_{l=1}^{s} n_l - s + 1$ nichtverschwindende Komponenten.

Man kann zeigen, daß man bei der Lösung des Problems (7) - (8) zur Bildung der ursprünglichen n_s Spalten $g^{(1)}, \ldots, g^{(n_s)}$ nicht nur die Eckpunkte von G verwenden kann, sondern auch innere Punkte.

Wir wählen n_s Punkte von G:

$$x^{(j)}_{i_1 \ldots i_s} = \begin{cases} T^{2-s} \prod\limits_{l=1}^{s-1} a^{(l)}_{i_l}, & \text{wenn} \quad j = i_s, \\ 0, & \text{wenn} \quad j \neq i_s. \end{cases}$$

Dann ist

$$g^{(j)}_{i_s} = \begin{cases} T, & \text{wenn} \quad j = i_s, \\ 0, & \text{wenn} \quad j \neq i_s. \end{cases} \tag{10}$$

Wir setzen (10) in (8) ein und erhalten $\lambda_{i_s} = \frac{a^{(s)}_{i_s}}{T}$,

$$\gamma^{(j)} = \sum_{i_1, \ldots, i_s} p_{i_1 \ldots i_s} x^{(j)}_{i_1 \ldots i_s} = T^{2-s} \sum_{i_1, \ldots, i_{s-1}} p_{i_1 \ldots i_{s-1} j} \prod_{l=1}^{s-1} a^{(l)}_{i_l}. \tag{11}$$

Infolge (10) hat die Matrix B der ursprünglichen n_s Vektoren $g^{(1)}, \ldots, g^{(n_s)}$ die Struktur B = T • E, wobei E Einheitsmatrix von der Ordnung n_s ist; hieraus wird der Bewertungsvektor $\bar{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_{n_s})$ so berechnet:

$$\pi = \gamma_B B^{-1} = \gamma_B T^{-1} E, \quad \text{mit} \quad \gamma_B = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n_s)}).$$

Infolge (11) ist

$$\pi_j = T^{1-s} \Bigg(\sum_{i_1, \ldots, i_{s-1}} p_{i_1 \ldots i_{s-1} j} \prod_{l=1}^{s-1} a^{(l)}_{i_l} \Bigg).$$

Aus dem Dualitätstheorem folgt, daß die Lösung des Problems (7) - (8) optimal ist, wenn der Bewertungsvektor $\bar{\pi}$ die Ungleichungen

$$\gamma^{(\sigma)} \geqslant \bar{\pi}\, g^{(\sigma)} \tag{12}$$

erfüllt.

In ausführlicher Form lauten die Ungleichungen (12):

$$\sum_{i_1, \ldots, i_s} (p_{i_1 \ldots i_s} - \pi_{i_s})\, \xi^{(\sigma)}_{i_1 \ldots i_s} \geqslant 0, \quad \sigma = 1, \ldots, h. \tag{13}$$

Man kann mit Leichtigkeit erkennen, daß zur Erfüllung von (13) notwendig und hinreichend ist, daß

$$\min \sum_{i_1,\dots,i_s} (p_{i_1\dots i_s} - \pi_{i_s})\, \xi^{(\sigma)}_{i_1\dots i_s} \geqslant 0, \quad \xi^{(\sigma)} \in G. \tag{14}$$

Wir betrachten das folgende Problem:

Gesucht ist

$$\min \left[\sum_{i_1,\dots,i_{s-1}} q_{i_1\dots i_{s-1}} \eta^{(\sigma)}_{i_1\dots i_{s-1}} \right] \tag{15}$$

unter den Bedingungen

$$\eta^{(\sigma)}_{i_1\dots i_{s-1}} \geqslant 0, \quad \sum_{i_2,\dots,i_{s-1}} \eta^{(\sigma)}_{i_1\dots i_{s-1}} = a^{(1)}_{i_1}, \dots, \quad \sum_{i_1,\dots,i_{s-2}} \eta^{(\sigma)}_{i_1\dots i_{s-1}} = a^{(s-1)}_{i_{s-1}}. \tag{16}$$

Es sei $r \in R$, sodaß $\min\limits_{1 \leqslant i_s \leqslant n_s} (p_{i_1\dots i_s} - \pi_{i_s}) = p_{i_1\dots i_{s-1} r} - \pi_r$. Offenkundig ist R allgemein für verschiedene Indexmengen $i_1, \dots, i_{s-1}$ verschieden. Wir bezeichnen $r^* = \min\limits_{r \in R(i_1,\dots,i_{s-1})} r$.

T h e o r e m 5. Das Problem (15) - (16) ist äquivalent zum Problem (14), wenn

$$q_{i_1\dots i_{s-1}} = p_{i_1\dots i_{s-1} r^*} - \pi_{r^*}$$

gilt, wobei

$$\xi^{(\sigma_0)}_{i_1\dots i_s} = \begin{cases} \eta^{(\sigma_0)}_{i_1\dots i_{s-1}}, & \text{wenn } i_s = r^*, \\ 0, & \text{wenn } i_s \neq r^*, \end{cases} \tag{17}$$

und $\eta^{(\sigma_0)}$ optimale Lösung des Problems (15) - (16) ist.

Zum Beweis siehe [2].

Somit läuft die Lösung des Problems $T_{s-1}(s)$ auf eine Lösung des Problems $T_{s-2}(s - 1)$ hinaus (siehe (1), (2), (15), (16)). Diese Prozedur kann solange fortgesetzt werden, bis man zur Lösung des Problems $T_1(2)$ kommt, d.h. des klassischen Transportproblems. Die Lösung von $T_1(2)$ kann mit dem allgemeinen Algorithmus ermittelt werden, jedoch können auch beliebige andere Algorithmen zur Lösung des klassischen Transportproblems verwendet werden. Insbesondere dann, wenn eine der beiden Zahlen n_1 und n_2 wesentlich größer ist als die andere, ist es zweckmäßig, den oben beschriebenen Algorithmus zu verwenden [1].

Wir kehren jetzt zur Lösung des Problems (15), (16) zurück. Gilt

$$\min\left[\sum_{i_1,\ldots,i_{s-1}} q_{i_1\ldots i_{s-1}}\eta^{(\sigma_0)}_{i_1\ldots i_{s-1}}\right]<0,$$

dann ermitteln wir nach (17) alle $\xi^{(\sigma_0)}_{i_1\ldots i_s}$ und danach nach (9) alle $g^{(\sigma_0)}_{i_s}$ und $\gamma^{(\sigma_0)}$, wobei $\bar{g}^{(\sigma_0)}$ diejenige Spalte ist, die unten an der Basis liegt. Um zu bestimmen, welche Spalte aus der Basis ausscheidet, und um zu einer neuen Basislösung und zu einem neuen Bewertungsvektor zu kommen, wird eine modifizierte Simplex-Methode angewandt. Somit ist bei jeder Iteration des Problems $T_{s-1}(s)$ ein Problem $T_{s-2}(s-1)$ zu lösen und die Matrix von der Größe $n_s\times(n_s+1)$ umzuformen.

In nichtentarteten Problemen enthält die Basislösung genau $\sum_{l=1}^{s} n_l-s+1$ positive Komponenten. Aus dem Algorithmus zur Ermittlung der Basislösung ist ersichtlich, daß es für die Nichtentartetheit des Problems hinreichend ist, daß für beliebige $1\leqslant k<l\leqslant s$ keine solche Teilmengen I_k, I_l der Indexwerte i_k und i_l existieren, für die

$$\sum_{i_k\in I_k} a^{(k)}_{i_k}=\sum_{i_l\in I_l} a^{(l)}_{i_l} \tag{18}$$

gilt.

Man kann durch die Methode der kleinen Störungen sicherstellen, daß (18) nicht erfüllt ist, indem man $\hat{a}^{(l)}_{i_l}$ anstelle von $a^{(l)}_{i_l}$ untersucht, wobei

$$\hat{a}^{(l)}_{i_l}=\begin{cases} a^{(l)}_{i_l}+R_l, & i_l<n_l,\\ a^{(l)}_{n_l}+T_l, & i_l=n_l,\end{cases}\qquad R_l=\begin{cases}\dfrac{R_{l+1}}{n_l}, & l=s-1,\ldots,2,\\ T_s=\varepsilon, & l=s,\\ 0, & l=1\end{cases} \tag{19}$$

ist.

Alle $\hat{a}^{(l)}_{i_l}$ erfüllen die Kongruenzbedingungen (3), und hieraus folgt

$$(n_l-1)\,R_l+T_l=(n_k-1)\,R_k+T_k \text{ für alle } 1\leqslant k<l\leqslant s. \tag{20}$$

Aus (19) folgt

$$(n_k-1)\,R_k<R_l \quad \text{für alle } k<l. \tag{21}$$

Aus (20) und (21) ermittelt man leicht, daß $T_k>T_l+(n_l-2)\,R_l$ für alle $k<l$. Man kann zeigen, daß bei beliebigen I_k und I_l

$$\sum_{i_l\in I_l}\hat{a}^{(l)}_{i_l}\neq\sum_{i_k\in I_k}\hat{a}^{(k)}_{i_k},$$

wenn $\varepsilon<\frac{\delta}{n_s}$, wobei $\delta=\min\limits_{I_k,I_l}\left|\sum_{i_l\in I_l} a^{(l)}_{i_l}-\sum_{i_k\in I_k} a^{(k)}_{i_k}\right|>0$ ist.

Der Verfasser dankt den Herren D.B. Judin und E.G. Gol'dštejn für ihre wertvollen Hinweise.

Literaturverzeichnis

[1] S. W i l l i a m s, J. Soc. Ind. and Appl. Math., 10, № 1 (1962). [2] Б. С. В е р х о в с к и й, ДАН, 151, № 3, 515 (1963).

1. Williams, A.C.: A Treatment of Transportation Problems by Decomposition.
   In: Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Pa., 10 (1962), Nr 1, S. 35 - 48.

2. Verchovskij, B.S.: Mnogomernye zadači linejnogo programmirovanija tipa transportnoj.
   In: Doklady Akademii nauk SSSR. Moskva, 151 (1963), Nr 3, S. 515 bis 518.
   Deutsch: Mehrdimensionale Transportprobleme der linearen Optimierung. - Übersetzung Nr. 181 der Übersetzungsstelle der Universitätsbibliothek Stuttgart, 6 Seiten.

Stuttgart, den 10. Oktober 1978

übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer