181

Verchovskij, B.S.

MEHRDIMENSIONALE TRANSPORTPROBLEME DER LINEAREN OPTIMIERUNG

(Eingereicht am 31.10.1962 von A.I. Berg, Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR)

Übersetzung aus:

Doklady. Akademija nauk SSSR. Moskva, 151 (1963), Nr 3, S. 515 - 518.

Russ.: МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ТИПА ТРАНСПОРТНОЙ

Mnogomernye zadači linejnogo programmirovanija tipa transportnoj

A formal description is given of a certain generalization of a problem posed by Schell, *Ref. Zh. Mat.* 1960, 10689. For motivation of the results of the article cf. *Ref. Zh. Mat.* 1963, 8V122. A. Sobolev

Es werden die Elemente einer s-dimensionalen Matrix untersucht; jedes Element (Zelle) dieser Matrix ist durch s Koordinaten (Indizes) $i_1, \ldots, i_s$ bestimmt, wobei die k-te Koordinate die Werte $i_k = 1, \ldots, n_k$ annimmt; alle $n_k \geqslant 2$.

$M = \{1, \ldots, s\}$ sei die Menge der Nummern aller Koordinaten; R die Klasse der Teilmengen von M; $M_j \in R$ die j-te Teilmenge und $|M_j| = m(j)$ die Anzahl ihrer Elemente; $j = 1, \ldots, t$.

Wir betrachten eine beliebige Zelle. Wir bezeichnen mit $j(i_1, \ldots, i_s)$ jene Koordinaten der Zelle, deren Nummern keine Elemente von M_j sind. Weiter soll $\sum\limits_{k \in M_j}$ eine Summation über sämtliche Werte aller jener Koordinaten bezeichnen, deren Nummern zu M_j gehören.

Gegeben seien jetzt die Elemente der Matrix $\{p_{i_1\ldots i_s}\}$. Man untersucht nun das Problem, alle Elemente der Matrix $\{x_{i_1\ldots i_s}\}$ zu ermitteln, die den Bedingungen

$$\sum_{k\in M_j} x_{i_1\ldots i_s} = a_{j(i_1\ldots i_s)}, \quad x_{i_1\ldots i_s} \geqslant 0 \tag{1}$$

genügen und für die das Funktional

$$L = \sum_{k\in M} p_{i_1\ldots i_s} x_{i_1\ldots i_s}. \tag{2}$$

zum Minimum wird. Dabei seien alle $a_{j(i_1,\ldots,i_s)} \geqslant 0$ vorgegeben.

A n m e r k u n g. Gilt $1 \leqslant m(1) = \ldots = m(t) \leqslant s-1;\ t = C_s^{m(j)}$, so erhalten wir ein symmetrisches mehrdimensionales Transportproblem vom Typ T_m [3].

T h e o r e m 1. Damit das Problem eine zulässige Lösung besitzt, ist notwendig, daß die folgenden Kongruenzbedingungen erfüllt werden:

$$\sum_{k\in(M_{j_1}\cup M_{j_2})\setminus M_{j_1}} a_{j_1(i_1,\ldots,i_s)} = \sum_{k\in(M_{j_1}\cup M_{j_2})\setminus M_{j_2}} a_{j_2(i_1,\ldots,i_s)}, \text{ für alle } 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant t. \tag{3}$$

B e w e i s.

$$\sum_{k\in(M_{j_1}\cup M_{j_2})\setminus M_{j_1}} a_{j_1(i_1,\ldots,i_s)} = \sum_{k\in(M_{j_1}\cup M_{j_2})\setminus M_{j_1}} \sum_{k\in M_{j_1}} x_{i_1\ldots i_s} =$$
$$= \sum_{k\in M_{j_1}\cup M_{j_2}} x_{i_1\ldots i_s} = \sum_{k\in(M_{j_1}\cup M_{j_2})\setminus M_{j_2}} a_{j_2(i_1,\ldots,i_s)},$$

was zu beweisen war.

In den Theoremen 2 - 5 werden im folgenden Fälle aufgezeigt, wo das Problem (1) - (2) auf eines oder mehrere einfachere Probleme zurückgeführt werden kann, und konstruktive Beweise dafür angegeben.

T h e o r e m 2. Gibt es M_{j_1} und M_{j_2} mit $M_{j_1} \subset M_{j_2}$ $(j_1 \neq j_2)$, dann sind die Bedingungen $\sum_{k\in M_{j_2}} x_{i_1\ldots i_s} = a_{j_2(i_1,\ldots,i_s)}$ abhängig.

B e w e i s. Alle Bedingungen $\sum_{k\in M_{j_2}} x_{i_1\ldots i_s} = a_{j_2(i_1,\ldots,i_s)}$ können aus den Bedingungen $\sum_{k\in M_{j_1}} x_{i_1\ldots i_s} = a_{j_1(i_1,\ldots,i_s)}$ gebildet werden, wenn letztere über diejenigen Indizes aufsummiert werden, deren Nummern zu der Menge $M_{j_2} \setminus M_{j_1}$ gehören.

T h e o r e m 3. Bildet die Vereinigung aller M_j keine Überdeckung von M, dann zerfällt das Problem (1) - (2) in mehrere Probleme; dabei ist die Anzahl der Indizes eines jeden Problems gleich $|\bigcup_{j=1}^{t} M_j|$.

B e w e i s. Die Vereinigung aller M_j ergibt die Gesamtheit der Nummern aller jener Indizes, über die wenigstens einmal in einer Bedingung (1) summiert wird. Ist aber $|\bigcup_{j=1}^{t} M_j| < s$, dann gibt es folglich solche Indizes, über die nicht summiert wird. Es sei $M \setminus \bigcup_{j=1}^{t} M_j = \{1, 2, \ldots, r\}$. Dann zerfällt das Ausgangsproblem in $\prod_{k=1}^{r} n_k$ Probleme, von denen ein jedes nicht von den ersten r Koordinaten abhängt.

T h e o r e m 4. Gibt es eine Teilmenge $\widetilde{M}$ derart, daß $|\widetilde{M}| = r \geqslant 2$ und $|M_j \cap \widetilde{M}| = \{^r_0$ für alle j = 1,..., t, aber $|\bigcap_{j=1}^{t} M_j| = 0$, dann reduziert sich das Problem (1) - (2) auf ein Problem, dessen Indexanzahl gleich s - r + 1 ist.

B e w e i s. Es sei $\widetilde{M} = \{1, 2, \ldots, r\}$. Dann wird anstelle der Indizes $i_1, \ldots, i_r$ der Feldindex $l = i_1 + n_1(i_2 - 1) + n_1 n_2 (i_3 - 1) + \ldots + n_1 n_2 \ldots n_{r-1}(i_r - 1)$ eingeführt. Die Werte $i_1, \ldots, i_r$, die dann einem gegebenen Wert l entsprechen, werden nach dem folgenden Algorithmus gefunden.

O p e r a t i o n 1, λ:

$$\frac{u_\lambda - u_{\lambda-1}}{n_1 \ldots n_{\lambda-1}} = d_\lambda \rightarrow \text{ wenn } u_{\lambda-1} = \begin{cases} 0, & \text{dann ist } i_\lambda = d_\lambda,\ i_1 = n_1, \ldots, i_{\lambda-1} = n_{\lambda-1}, \\ > 0 & \text{dann ist } i_\lambda = d_\lambda + 1, \\ & \text{Übergang zur Operation } 2, \lambda. \end{cases}$$

O p e r a t i o n 2, λ:

$$\text{Wir vergleichen } \lambda \text{ und } 2 \rightarrow \text{ wenn } \lambda = \begin{cases} 2, & \text{dann ist } i_1 = u_1 \text{ und alle} \\ & i_k \text{ sind gefunden,} \\ > 2, & \text{dann Übergang zur Operation} \\ & 1, \lambda - 1. \end{cases}$$

$\lambda = r, \ldots, 1$, wobei $u_r = l$.

T h e o r e m 5. Ist der Durchschnitt aller M_j eine nichtleere Menge, dann reduziert sich das Problem (1) - (2) auf ein anderes Problem, dessen Indexanzahl $|M \setminus \bigcap_{j=1}^{t} M_j|$ ist.

B e w e i s. Es sei $\bigcap_{j=1}^{t} M_j = \{s-r+1, s-r+2, \ldots, s\} = \overline{M}.$ Dann kann man die Bedingungen (1) und (2) in etwas anderer Form anschreiben:

$$\sum_{k \in M_j \setminus \overline{M}} \Big(\sum_{k \in \overline{M}} x_{i_1 \ldots i_s} \Big) = a_{j(i_1 \ldots i_s)}; \tag{1'}$$

$$L = \sum_{k \in M \setminus \overline{M}} \Big(\sum_{k \in \overline{M}} p_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1 \ldots i_s} \Big). \tag{2'}$$

Wir bezeichnen

$$\sum_{k \in \overline{M}} x_{i_1 \ldots i_s} = y_{i_1 \ldots i_{s-r}}; \tag{4}$$

$$q_{i_1 \ldots i_{s-r}} = \min_{1 \leqslant i_k \leqslant n_k,\ s-r+1 \leqslant k \leqslant s} p_{i_1 \ldots i_s}. \tag{5}$$

Dann ist aus dem Optimalitätsprinzip unschwer zu erkennen, daß das Problem (1') - (2') auf das folgende hinausläuft:

Gesucht ist das Minimum des Funktionals

$$L = \sum_{k \in M \setminus \overline{M}} q_{i_1 \ldots i_{s-r}} y_{i_1 \ldots i_{s-r}}, \quad y_{i_1 \ldots i_{s-r}} \geqslant 0 \tag{6}$$

unter der Bedingung, daß

$$\sum_{k \in M_j \setminus \overline{M}} y_{i_1 \ldots i_{s-r}} = a_{j(i_1, \ldots, i_s)}. \tag{7}$$

$y^{(0)}_{i_1 \ldots i_{s-r}}$ erfülle alle Bedingungen (7) und liefere das Minimum (6). Dann sind alle $x^{(0)}_{i_1 \ldots i_s}$, deren Koordinaten mit den Koordinaten $\min_{1 \leqslant i_k \leqslant n_k, s-r+1 \leqslant k \leqslant s} p_{i_1 \ldots i_s}$ übereinstimmen, gleich $y^{(0)}_{i_1 \ldots i_{s-r}}$, und die übrigen $x^{(0)}_{i_1 \ldots i_s}$ sind gleich Null. Somit gelingt es im letzten Fall, das Problem nicht nur auf ein einfacheres zu reduzieren, sondern auch die Anzahl der Unbekannten zu verringern.

D e f i n i t i o n. Probleme, die die Bedingungen des Theorems 2 - 5 nicht erfüllen, nennen wir n i c h t r e d u z i e r b a r. Alle symmetrischen Probleme vom Typ T_m sind nichtreduzierbar.

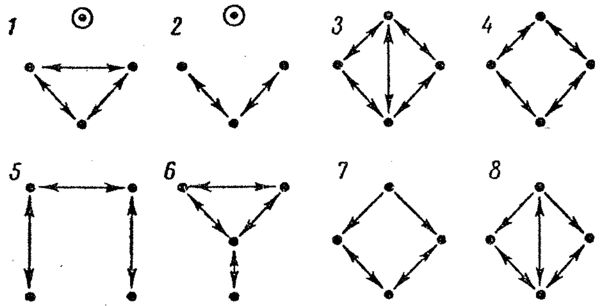

Abbildung 1.

Bei $s = 4$ gibt es 8 nichtreduzierbare asymmetrische Probleme. Schematisch kann jedes dieser Probleme folgendermaßen dargestellt werden: jeden Index bezeichnen wir mit einem Punkt; die Pfeile zwischen den Indizes bedeuten eine Summation über alle diejenigen Indizes, die an den Pfeilspitzen und innerhalb dieser liegen, und die Kreise um die Punkte geben an, daß nur über einem Index summiert wird. Alle Schemata sind symmetrisch aufgebaut (siehe Abb. 1).

$x^{(0)}_{i_1 \ldots i_s}$ sei die optimale Lösung des Problems mit den Bedingungen (1), (2).

T h e o r e m 6. Multipliziert man alle $a_{j(i_1,\ldots,i_s)}$ mit derselben Zahl $c > 0$, dann hat die optimale Lösung des geänderten Problems die Gestalt $cx^{(0)}_{i_1 \ldots i_s}$.

B e w e i s. Die Richtigkeit der Behauptung ist leicht zu erkennen, wenn man berücksichtigt, daß die Multiplikation aller $a_{j(i_1,\ldots,i_s)}$ mit c dem gleichwertig ist, daß eine neue Maßeinheit gewählt wird, was sich nicht auf die Optimalität auswirken darf.

T h e o r e m 7. Multipliziert man alle $p_{i_1 \ldots i_s}$ mit derselben Zahl $c > 0$, dann ist die optimale Lösung des neuen Problems dieselbe wie die des Ausgangsproblems, der Wert der Linearform vergrößert sich aber um den Faktor c.

B e w e i s. Analog zu Theorem 6.

T h e o r e m 8. Wir betrachten das veränderte Problem, bei dem zu allen denjenigen $p_{i_1 \ldots i_s}$, die zu den $x_{i_1 \ldots i_s}$ gehören, welche in einer beliebigen Bedingung vorkommen, eine (beliebige) Zahl c addiert wird. Dann ist die optimale Lösung des neuen Problems dieselbe wie die des ursprünglichen, der Wert der Linearform vergrößert oder vermindert sich dabei aber um eine konstante Größe.

B e w e i s. Es sei $M_1 = \{1, 2, \ldots, r\}$. Wir addieren zu allen $p_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1}$, die zu den $x_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1}$ der Bedingung $\sum\limits_{k \in M_1} x_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1} = a_{1(1,\ldots,1)}$ gehören, die konstante Zahl c hinzu. Dann nimmt das Funktional die Gestalt

$$L_1 = \sum_{k \in M} p_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1 \ldots i_s} - \sum_{k \in M_1} p_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1} x_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1} + \\ + \sum_{k \in M_1} (p_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1} + c) \, x_{i_1 \ldots i_r 1 \ldots 1} = \sum_{k \in M} p_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1 \ldots i_s} + c a_{1(1,\ldots,1)} .$$

an.

Somit ist $L_1 = L + c a_{1(1,\ldots,1)}$, was zu beweisen war.

Die letzten drei Eigenschaften können beim Auffinden der optimalen Lösungen von sehr großem Nutzen sein.

L I T E R A T U R

[1] E. S h e l l, Proc. 2-d Symposium in linear Programming, Washington, 1, 1955. [2] Progress in the Operation Research, 1961. [3] Б. С. В е р х о в с к и й, Об одном алгоритме решения многоиндексной задачи транспортировки на ЭВМ, Новосибирск, 1962.

1. Shell, E.: Distribution of a Product by Several Properties. In: Proceedings of the 2-nd Symposium in Linear Programming. Ed. by H.A. Antosiewicz. Washington, 1 (1955), S. 615 - 642.

2. Progress in Operations Research. Ed. by Russell L. Ackoff. New York/ London: John Wiley, 1 (1961).

3. Verchovskij, B.S.:
Ob odnom algoritme rešenija mnogoindeksnoj zadači transportirovki na ĖVM.
Novosibirsk: 1962.
⟨Über einen Algorithmus zur rechnergestützten Lösung eines mehrdimensionalen Transportproblems⟩

Stuttgart, den 9. Oktober 1978

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer