(176)

Lepp, R., Rajk, Ê.

VERSUCHSLÖSUNGEN IN STOCHASTISCHEN PROGRAMMIERUNGSPROBLEMEN

Übersetzung aus:
Toimetised. Eesti NSV Teaduste Akadeemia. Füüzika. Matemaatika /
Izvestija. Akademija nauk Êstonskoj SSR. Fizika. Matematika.
Tallinn, 21 (1972), Nr 4, S. 379 - 386.

Russ.: РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Randomizirovannye rešenija v zadačach stochastičeskogo programmirovanija

The stochastic programming problem is reduced to the optimization problem in spaces of measures. By random solutions a probability measure is meant. The conditions of the existence of solution of the optimization problem are given 1) in metrical space of non-negative countably additive measures with Prokhorov's metric and 2) in Banach space of bounded additive measures.

Gegeben sei das stochastische, nichtlineare Programmierungsproblem: gesucht ist der s-dimensionale Zufallsvektor η als Lösung von

$$\min_{\eta} Ef(\eta, \xi) \tag{1}$$

unter den Bedingungen

$$Eg_i(\eta, \xi) \leqslant \gamma_i, \quad i=1, \ldots, j; \tag{2}$$
$$P[g_i(\eta, \xi) \leqslant \gamma_i] \geqslant \alpha_i, \quad i=j+1, \ldots, k; \tag{3}$$
$$P[g_i(\eta) \leqslant \gamma_i] = 1, \quad i=k+1, \ldots, l. \tag{4}$$

Hierbei ist ξ ein r-dimensionaler Zufallsvektor mit dem bekannten Bildmaß ν auf dem Raum Y $(\nu(A) = P\{\omega : \xi(\omega) \in A\})$; η ein s-dimensionaler gesuchter Zufallsvektor; $f(.,.)$, $g_i(.,.)$, $g_i(.)$ vorgegebene reelle Funktionen; γ_i, α_i vorgegebene reelle Zahlen; E, P jeweils Symbole des Erwartungswerts und der Wahrscheinlichkeit.

Unter der Lösung verstehen wir in dieser Arbeit ein gewisses Maß μ auf dem s-dimensionalen Raum X.

Wir klären, unter welchen Bedingungen das Problem (1) - (4) im Raum bestimmter Maße eine Lösung besitzt. Die Lösung kann man unabhängig oder abhängig vom Zufallsvektor ξ finden. Dies wird in erster Linie dadurch bestimmt, ob uns die Werte des Zufallvektors ξ bis zur Lösungsannahme bekannt sind oder nicht.

Wir nehmen zuerst an, daß die Lösung (Maß) nicht vom Zufallsvektor ξ abhängt. Dann verwandelt sich das Problem (1) - (4) in das folgende P r o b l e m I :
gesucht ist

$$\min_{\mu} \int_X \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \tag{5}$$

unter den Bedingungen

$$\int_X \int_Y g_i(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \leqslant \gamma_i, \quad i=1,\ \dots,\ j; \tag{6}$$

$$\iint_{g_i(x,y)\leqslant\gamma_i} d\nu(y)\,d\mu(x) \geqslant \alpha_i, \quad i=j+1,\ \dots,\ k; \tag{7}$$

$$\int_Q d\mu(x)=1, \quad Q=\{x: g_i(x)\leqslant\gamma_i, \quad i=k+1,\ \dots,\ l\}; \tag{8}$$

$$\int_X d\mu(x)=1. \tag{9}$$

Durch (9) beschränken wir uns auf alle Wahrscheinlichkeitsmaße.

Das Auffinden der Lösung, die vom Zufallsvektor ξ mit dem Maß $\nu(y)$ abhängt, ist äquivalent zum Auffinden eines Maßes m(x,y) auf dem Produktraum $X \times Y$, das für eine beliebige Menge $A \in \Sigma_Y$ (Σ_Y Borelsche σ-Algebra) die Bedingung

$$\nu(A) = \int_{X\times A} dm(x,y) \tag{10}$$

erfüllt. Dann erhalten wir anstelle von Problem I das folgende P r o b l e m II :

gesucht ist

$$\min_{m(x,y)} \int_{X\times Y} f(x,y)\,dm(x,y) \tag{11}$$

unter den Bedingungen

$$\int\limits_{X\times Y} g_i(x,y)\,dm(x,y) \leqslant \gamma_i, \quad i=1,\ldots,j; \tag{12}$$

$$\int\limits_{g_i(x,y)\leqslant\gamma_i} dm(x,y) \geqslant \alpha_i, \quad i=j+1,\ldots,k; \tag{13}$$

$$\int\limits_{Q\times Y} dm(x,y)=1, \quad Q=\{x: g_i(x)\leqslant\gamma_i, \quad i=k+1,\ldots,l\}; \tag{14}$$

$$\int\limits_{X\times Y} dm(x,y)=1; \tag{15}$$

$$\nu(A)=\int\limits_{X\times A} dm(x,y) \text{ für ein beliebiges } A\in\Sigma_Y. \tag{16}$$

Wir betrachten die Existenzbedingung für die Lösung von Problem I in dem separablen metrischen Raum D(X) der nichtnegativen abzählbar additiven Maße, die im Euklidschen Raum X definiert sind, mit der Prochorov-Metrik [1]

$$\varrho(\mu_1,\mu_2)=\max(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}). \tag{17}$$

Hier ist

$$\varepsilon_{12}=\inf\varepsilon, \quad \mu_2(F)<\mu_1(F^\varepsilon)+\varepsilon,$$
$$\varepsilon_{21}=\inf\varepsilon, \quad \mu_1(F)<\mu_2(F^\varepsilon)+\varepsilon,$$

wobei F geschlossene Menge und F^ε offene Menge von $S(F,\varepsilon)$ ist.

Wir führen nun zuerst einige Lemmata an.

L e m m a 1 [1]. Für die Konvergenz einer Folge von Maßen μ_n gegen ein Maß μ in der Metrik (17) ist es notwendig und hinreichend, daß entweder für eine beliebige stetige und beschränkte Funktion f(x)

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f(x)\,d\mu_n(x)=\int\limits_X f(x)\,d\mu(x),$$

oder für eine beliebige geschlossene Menge $F\subset X$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(F)\leqslant\mu(F), \qquad \lim_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X),$$

oder für eine beliebige offene Menge

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(G)\geqslant\mu(G), \qquad \lim_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X).$$

L e m m a 2. Das Funktional $\varphi(\mu)=\int\limits_X h(x)\,d\mu(x)$ ist dann und nur dann nach unten halbstetig, wenn die Funktion h(x) nach unten halbstetig und nach unten beschränkt ist $(h(x)\geqslant c)$.

B e w e i s. B e d i n g u n g i s t h i n r e i c h e n d: Die Funktion h(x) sei integrierbar nach μ. Dann existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $M > |c|$, sodaß

$$\int_{h(x) \geqslant M} h(x)\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Wir stellen uns die Funktion h(x) als h(x) = f(x) + g(x) vor, wobei $f(x) = \max\{0, h(x) - M\}$, $g(x) = \min\{h(x), M\}$. Damit ist $\int h(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\mu(x) + \int g(x)\, d\mu(x)$. Wir benutzen die Ungleichung (18) und erhalten

$$\int f(x)\, d\mu(x) \leqslant \int_{h(x) \geqslant M} h(x)\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon,$$

und da für ein beliebiges Maß $\lambda(x) \in D(X)$ $\int f(x)\, d\lambda(x) \geqslant 0$ ist, genügt es zu zeigen, daß das Funktional $\int g(x) d\mu(x)$ nach unten halbstetig ist, wohingegen die Funktion g(x) nach unten halbstetig und beschränkt ist, $|g(x)| \leqslant M$. Wir legen ein bestimmtes k fest und bestimmen die offene Menge

$$G_i = \left\{x : g(x) > i\frac{2M}{k} - M\right\}.$$

Dann erhalten wir für die Integralsummen

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i-1}{k}2M - M\right]\mu\left\{x : \frac{i-1}{k}2M - M < g(x) \leqslant \frac{i}{k}2M - M\right\} <$$
$$< \int g(x)\, d\mu(x) \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{k}2M - M\right]\mu\left\{x : \frac{i-1}{k}2M - M < g(x) \leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant \frac{i}{k}2M - M\right\},$$

oder

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i-1}{k}2M - M\right][\mu(G_{i-1}) - \mu(G_i)] < \int g(x)\, d\mu(x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{k}2M - M\right][\mu(G_{i-1}) - \mu(G_i)].$$

Wir wandeln diese Ungleichung um in die Form

$$\frac{2M}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu(G_i) - M\mu(X) < \int g(x)\, d\mu(x) \leqslant \frac{2M}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\mu(G_i) - M\mu(X).$$

Wir verwenden die gewonnenen Ungleichungen und Lemma 1 und erhalten

$$\varliminf_{n\to\infty} \varphi(\mu_n) = \varliminf_{n\to\infty} \int g(x)\, d\mu_n(x) \geqslant \varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{2M}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_n(G_i) - M\mu_n(X)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2M}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu(G_i) - M\mu(X) \geqslant -\frac{2M}{k}\mu(G_0) + \frac{2M}{k}\mu(G_k) + \int g(x)\, d\mu(x).$$

Wir lassen $k \to \infty$ gehen und erhalten die gewünschte Ungleichung.

B e d i n g u n g   i s t   n o t w e n d i g : die Folge x_n konvergiere gegen $\bar{x}$. Wir bestimmen die in den Punkten x_n konzentrierten Maße $\mu_n(x)$ durch die Formeln $\mu_n(x_n) = 1$ und das Maß $\bar{\mu}(x)$ durch die Formel $\bar{\mu}(\bar{x}) = 1$. Dann ist

$$\varphi(\mu_n) = \int h(x)\, d\mu_n(x) = h(x_n) \quad \text{und} \quad \varphi(\bar{\mu}) = \int h(x)\, d\bar{\mu}(x) = h(\bar{x}).$$

Da für eine beliebige stetige beschränkte Funktion $f(x)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int f(x)\, d\mu_n(x) = \int f(x)\, d\bar{\mu}(x)$ ist, konvergiert die Folge der Maße $\mu_n(x)$ gegen $\bar{\mu}(x)$ nach der Prochorov-Metrik. Aus der Halbstetigkeit des Funktionals $\varphi(\mu)$ nach unten erhalten wir die Halbstetigkeit der Funktion $h(x)$ nach unten

$$\varliminf_{n\to\infty} h(x_n) = \varliminf_{n\to\infty} \varphi(\mu_n) \geqslant \varphi(\bar{\mu}) = h(\bar{x}).$$

Die Beschränktheit der Funktion $h(x)$ nach unten beweisen wir mit Widerspruch. Für die Folge x_n sei $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = -\infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß für alle n $h(x_n) \leqslant -1$. Wir bestimmen das Maß $\bar{\mu}(x)$ durch die Formel $\bar{\mu}(\bar{x}) = 1$ und die Folge der Maße $\mu_n(x)$ durch die Formeln $\mu_n(\bar{x}) = 1 + \frac{1}{h(x_n)}$ und $\mu_n(x_n) = -\frac{1}{h(x_n)}$. Die Folge der Maße $\mu_n(x)$ konvergiert gegen das Maß $\bar{\mu}(x)$, da für eine beliebige stetige beschränkte Funktion $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\, d\mu_n(x) = \int f(x)\, d\bar{\mu}(x) \quad \text{gilt.}$$

Und für die gegebene Funktion $h(x)$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} \int h(x)\, d\mu_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h(x_n)}\right) h(\bar{x}) - 1 =$$

$$= h(\bar{x}) - 1 = \varphi(\bar{\mu}) - 1 < \varphi(\bar{\mu}).$$

Die erzielte Ungleichung widerspricht der Halbstetigkeit des Funktionals $\varphi(\mu)$. D.h., die Funktion $h(x)$ ist nach unten beschränkt. Das Lemma ist völlig bewiesen.

L e m m a   3. Die Funktion $g(x,y)$ sei nach unten halbstetig in x für fast alle y und meßbar in y für alle x, außerdem nach unten beschränkt, d.h. $g(x,y) \geqslant g_1(y)$, $g_1(y) \in L_1(Y, \Sigma_Y, \nu)$, für fast alle x. Dann ist das Funktional

$$\varphi(\mu) = \int_X \int_Y g(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$$

nach unten halbstetig.

B e w e i s. Wir zeigen, daß die Funktion $h(x)=\int\limits_Y g(x,y)d\nu(y)$ alle Bedingungen von Lemma 2 erfüllt. Die Funktion h(x) ist nach unten beschränkt

$$h(x)=\int\limits_Y g(x,y)d\nu(y)\geqslant\int\limits_Y g_1(y)d\nu(y)=c.$$

Wir wenden das Fatou-Theorem (siehe [2], S. 170, engl. Original S. 152, Theorem 19) für die Funktion $g(x,y) - g_1(y)$ an und zeigen, daß h(x) nach unten halbstetig ist:

$$\varliminf_{n\to\infty} h(x_n)-c=\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_Y [g(x_n,y)-g_1(y)]d\nu(y)\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_Y \varliminf_{n\to\infty}[g(x_n,y)-g_1(y)]d\nu(y)\geqslant\int\limits_Y [g(x,y)-g_1(y)]d\nu(y)=h(x)-c.$$

Nach Lemma 2 folgt hieraus die Halbstetigkeit des Funktionals $\varphi(\mu)$. Das Lemma ist bewiesen.

In der Arbeit [1] ist das Kompaktheitskriterium für die Menge der Maße angegeben. Die Menge $R\subset D(X)$ ist kompakt, wenn 1) die Werte $\mu(X)$, $\mu\in R$ in der Gesamtheit beschränkt sind, und 2) für ein beliebiges $\varepsilon>0$ ein Kompaktum K_ε existiert, daß für alle $\mu\in R$

$\mu(X\backslash K_\varepsilon)<\varepsilon$ gilt.

Wir benutzen dieses Kriterium zur Herleitung der Kompaktheitsbedingungen für die Menge der Maße, die durch das Integralfunktional vorgegeben wird.

L e m m a 4. Die Funktion h(x) sei nach unten halbstetig und nach unten beschränkt, $h(x)>c$ und $\varliminf h(x)=+\infty$ bei $\|x\|\to\infty$. Dann ist die Menge

$$M=\{\mu:\int\limits_X h(x)d\mu(x)\leqslant\gamma,\ \int\limits_X d\mu(x)=1\}$$

im Raum der Maße D(X) kompakt.

B e w e i s. Wir beweisen die Kompaktheit der Menge M. Die gleichgradige Beschränktheit der Menge M wird durch die Bedingung $\int\limits_X d\mu(x)=1$ vorgegeben. Wir legen $\varepsilon>0$ fest und wählen $\gamma(\varepsilon)$ so, daß

$$\varepsilon\geqslant\frac{\gamma-\min(0,c)}{\gamma(\varepsilon)}.$$

Dann ist

$$\gamma \geqslant \int_X h(x)\,d\mu(x) = \int_{h(x) > \gamma(\varepsilon)} h(x)\,d\mu(x) +$$
$$+ \int_{h(x) \leqslant \gamma(\varepsilon)} h(x)\,d\mu(x) > \gamma(\varepsilon)\,\mu\{x : h(x) > \gamma(\varepsilon)\} + \min(0, c).$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon \geqslant \frac{\gamma - \min(0, c)}{\gamma(\varepsilon)} > \mu\,\{x : h(x) > \gamma(\varepsilon)\}.$$

K_ε hat die Form

$$K_\varepsilon = \{x : h(x) \leqslant \gamma(\varepsilon)\}.$$

Die Menge K_ε ist abgeschlossen aufgrund der Halbstetigkeit nach unten der Funktion h(x) und beschränkt, da $\underline{\lim}\, h(x) = +\infty$ für $\|x\| \to \infty$. Folglich ist die Menge K_ε im Raum X kompakt.

Also ist die Menge M im Raum D(X) kompakt und wird nach Lemma 2 durch ein nach unten halbstetiges Funktional vorgegeben. Das Lemma ist bewiesen.

L e m m a 5. 1) Die Funktion g(x,y) sei nach unten beschränkt, d.h. $g(x, y) \geqslant g_1(y)$, $g_1(y) \in L_1(Y, \Sigma_Y, \nu)$, für fast alle x; 2) g(x,y) sei nach unten halbstetig in x für fast alle y und meßbar in y für alle x; 3) für fast alle y sei $\underline{\lim}\, g(x, y) = +\infty$ bei $\|x\| \to \infty$. Dann ist die Menge

$$M = \{\mu : \int_X \int_Y g(x, y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \leqslant \gamma,\ \int_X d\mu(x) = 1\}$$

im Raum der Maße D(X) kompakt.

B e w e i s. Bemerkt sei, daß die Funktion $h(x) = \int_Y g(x, y)\,d\nu(y)$ alle Bedingungen von Lemma 4 erfüllt. Die Funktion h(x) ist beschränkt

$$h(x) = \int_Y g(x, y)\,d\nu(y) \geqslant \int_Y g_1(y)\,d\nu(y) = c.$$

Wir verwenden das Fatou-Theorem [2] für die Funktion $g(x,y) - g_1(y)$ und zeigen, daß h(x) nach unten halbstetig ist:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} h(x_n) - c = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_Y [g(x_n, y) - g_1(y)]\,d\nu(y) \geqslant$$
$$\geqslant \int_Y \underline{\lim}_{n\to\infty} [g(x_n, y) - g_1(y)]\,d\nu(y) \geqslant \int_Y [g(x, y) - g_1(y)]\,d\nu(y) = h(x) - c.$$

Für die Funktion h(x) ist ebenfalls $\underline{\lim}\, h(x) = +\infty$ bei $\|x\| \to \infty$. D.h., nach Lemma 4 ist die Menge M kompakt. Das Lemma ist bewiesen.

T h e o r e m 1. 1) Die Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,j$ seien nach unten halbstetig in x für fast alle y und meßbar in y für alle x; 2) die Funktionen $g_i(x,y)$, $g_i(x)$ seien nach unten halbstetig in allen Variablen, $i = j + 1, \ldots, l$; 3) die Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,j$ seien beschränkt, d.h. $f(x,y) \geqslant f(y)$, $g_i(x,y) \geqslant g_i(y)$, $i = 1, \ldots, j$, für fast alle x, wobei $f(y)$, $g_i(y) \in L_1(Y, \Sigma_Y, \nu)$; 4) eine der Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,j$ sei der Grenzwert $\varliminf_{\|x\| \to \infty} g(x,y) = +\infty$ für fast alle y oder die Menge $Q = \{x : g_i(x) \leqslant \gamma_i,\ i = k + 1, \ldots, l\}$ beschränkt. Dann existiert eine Lösung von Problem I im Raum $D(X)$.

B e w e i s. Die Bedingungen 1 und 3 des Theorems stellen nach Lemma 3 die Halbstetigkeit der Funktionale (5) und (6) von Problem I nach unten sicher. Die Bedingung 2 des Theorems stellt zusammen mit Lemma 1 die Abgeschlossenheit der Mengen der Maße (7) und (8) sicher. Nach Lemma 1 ist die Menge der Maße (9) ebenfalls abgeschlossen. Die Bedingungen von Lemma 4 garantieren nach Lemma 5 die Kompaktheit der Menge, in der das Minimum zu suchen ist. Die Durchschnittsmenge der kompakten abgeschlossenen Menge mit den abgeschlossenen Mengen ist ein Kompaktum, und es gibt ein Minimum für das nach unten halbstetige Funktional im Kompaktum. Das Theorem ist bewiesen.

Gehen wir jetzt zur Untersuchung von Problem II über.

T h e o r e m 2. 1) Die Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,k$, $g_i(x)$, $i = k + 1,\ldots,l$ seien nach unten halbstetig in allen Variablen; 2) die Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,j$ seien nach unten beschränkt; 3) für eine der Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,j$ sei der Grenzwert $\varliminf g(x,y) = +\infty$ für $\|x\| + \|y\| \to \infty$ oder die Menge $Q = \{x : g_i(x) \leqslant \gamma_i,\ i = k + 1, \ldots, l\}$ beschränkt; 4) das Maß $\nu(y)$ sei absolut stetig bezüglich des Lebesqueschen Maßes des Raumes Y. Dann gibt es eine Lösung von Problem II im Raum

B e w e i s. Wir beweisen, daß die Beschränkungen (16) eine abgeschlossene Menge vorgeben. Infolge der Bedingung 4 des Theorems ist für eine beliebige offene Menge G $\nu(G) = \nu(\bar{G})$, wobei $\bar{G}$ der Abschluß der Menge G ist. Deshalb genügt es zu beweisen, daß für die offenen Mengen G

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X\times G} dm_n(x, y) = \int_{X\times G} dm(x, y).$$

Nach Lemma 1 ist

$$\int_{X\times G} dm(x, y) = \nu(\bar{G}) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \nu_n(\bar{G}) \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_{X\times G} dm_n(x, y) \geqslant$$
$$\geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \nu_n(G) \geqslant \nu(G) = \int_{X\times G} dm(x, y).$$

Folglich ist die Menge abgeschlossen. Der restliche Beweisteil unterscheidet sich prinzipiell nicht vom Beweis von Theorem 1. Das Theorem ist bewiesen.

Die Bedingungen für die Lösung der Probleme I und II kann man wesentlich abschwächen, wenn man sich von der Forderung nach abzählbarer Additivität der Maße löst und Problem I [Problem II] in einem Banach-Raum der beschränkten additiven Maße $ba(X, \Sigma_X)$ $[ba(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})]$ löst, wobei die Norm $\|\mu\|$ $[\|m\|]$ die totale Variation im Raum $X[X\times Y]$ ist. Da zum Raum $ba(X, \Sigma_X)$ $[ba(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})]$ auch die negativen Maße gehören, fügen wir die Beschränkungen

$$\mu(A) \geqslant 0, \quad A \in \Sigma_X \quad [m(A) \geqslant 0, \quad A \in \Sigma_{X\times Y}]. \tag{19}$$

hinzu.

T h e o r e m 3. Die Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,k$, $g_i(x)$, $i = k + 1, \ldots, l$ seien meßbar und die Funktionen $f(x,y)$, $g_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,j$ beschränkt. Dann gibt es eine Lösung von Problem I [Problem II] im Raum $ba(X, \Sigma_X)$ $[ba(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})]$.

B e w e i s. Wir beschränken uns auf den Beweis im Falle von Problem II. Die Bedingungen (15) und (19) erzeugen eine Untermenge der Einheitssphäre des Raumes $ba(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})$. Nach dem Alaoglu-Theorem (siehe [2], S. 459, engl. Original S. 424, Theorem 2) ist die Einheitssphäre schwach* kompakt.

Der zum Raum $B(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})$ duale Raum ist isometrisch isomorph zum Banach-Raum $ba(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})$ ([2], S. 280, engl. Original S. 258, Theorem 1). Der Raum $B(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})$ enthält alle beschränkten $\Sigma_{X\times Y}$--meßbaren Funktionen über $X\times Y$. Hieraus folgt, daß das Funktional

(11) schwach* stetig ist, und da die charakteristischen Funktionen der Mengen aus $\Sigma_{X\times Y}$ zu $B(X\times Y, \Sigma_{X\times Y})$ gehören, geben alle Beschränkungen (12) - (16), (19) schwach* abgeschlossene Mengen vor. Das schwach* stetige Funktional im schwachen* Kompaktum erreicht sein Minimum. Das Theorem ist bewiesen.

Die Lösung von Problem I [Problem II] kann man vereinfachen, wenn man innerhalb der Klasse der Maße, die in Bezug auf ein bestimmtes abzählbar additives nichtnegatives festes Maß $\lambda(x)$ absolut stetig sind, eine Lösung findet. Diese Klasse der Maße wollen wir nach dem Radon-Nikodým-Theorem in der Form

$$\mu(B) = \int_B \varphi(x)\, d\lambda(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) \in L_1(X, \Sigma, \lambda).$$

darstellen. Somit wird nicht mehr das Maß, sondern die Funktion $\varphi(x)$ zur Unbekannten. Es ist einfacher, die optimale Funktion zu finden als das optimale Maß. Die Schwierigkeit besteht jetzt in der Wahl des Maßes $\lambda(x)$, besonders seiner diskreten und singulären Komponenten.

Die Verfasser danken Herrn T. Tobias für die Erörterung der Ergebnisse.

L i t e r a t u r

1. Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятн. и ее прим., 1, № 2, 177 (1956).
Prochorov, Ju.V.: Schodimost' slučajnych processov i predel'nye teoremy teorii verojatnosti.
In: Teorija verojatnosti i ee primenenija. Moskva, 1 (1956), Nr 2, S. 177ff.
Engl.: Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory.
In: Theory of Probability and its Applications. Philadelphia, Pa., 1 (1956), Nr 2, S. 157 - 214.

2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, I, М., 1962.
Danford, N., Švarc, Dž.:
Linejnye operatory. Bd I.
Moskva: 1962.
Übersetzung aus dem Englischen:

Dunford, Nelson, Schwartz, Jacob T.:
Linear Operators. Part I.
New York/London: Interscience Publ., 1958.

Institut für Kybernetik
der Akad.d.Wiss.
der Estnischen SSR

Redaktionseingang
29.3.1972

Stuttgart, den 11. Juli 1978

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer