(173)

Rajk, E. [= Raik, E.]

ÜBER STOCHASTISCHE PROGRAMMIERUNGSPROBLEME MIT LÖSUNGSFUNKTIONEN

Übersetzung aus:
Teaduste. Eesti NSV Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika / Izvestija. Akademija nauk Estonskoj SSR. Fizika. Matematika. Tallinn, 21 (1972), Nr 3, S. 258 - 263.

Russ.: О ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РЕШАЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

O zadačach stochastičeskogo programmirovanija s rešajuščimi funkcijami

The optimal solution function in the stochastic programming problem is found. The conditions for the existence of the optimal solution function in the spaces L_p and C are given.

1. Wir untersuchen das Minimierungsproblem nach dem k-dimensionalen Vektor x des Erwartungswertes der reellen Funktion $f(x,\xi)$, die von dem Zufallsvektor ξ abhängt, mit den Werten aus dem 1-dimensionalen Raum S

$$\min_x Ef(x,\xi) \tag{1}$$

bei den Beschränkungen

$$Eg_i(x,\xi) \leqslant \gamma_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$
$$g_i(x) \leqslant \gamma_i, \quad i=m+1, \ldots, n, \tag{3}$$

wobei γ_i vorgegebene Zahlen sind.

Die Lösungen finden wir innerhalb einer bestimmten Klasse von Funktionen von s, d.h. wir finden die Lösungsfunktion x(s). Das Auffinden der Lösung in Form einer deterministischen Funktion ist völlig gerechtfertigt, wenn alle Funktionen $f(x,\cdot)$, $g_i(x,\cdot)$, $g_i(x)$ in x konvex sind. Einerseits ist der Wert der Minimierungsfunktion (1) bei der Funktion $\bar{x}(s)$ in einem konvexen Problem für eine beliebige Versuchslösung $\tilde{x}(s)$ mit dem Erwartungswert $\bar{x}(s)=E_x\tilde{x}(s)$ geringer als bei $\tilde{x}(s)$, andererseits aber, wenn die Versuchslösung $\hat{x}(s)$ alle Beschränkungen (2), (3) erfüllt, erfüllt aufgrund der Konvexität der Funktionen $g_i(x,\cdot)$, $g_i(x)$ diese Beschränkungen auch der Erwartungswert $\bar{x}(s)$. Für ein nichtkonvexes Problem kann das Auffinden der Lösung in Form einer deterministischen Lösungsfunktion durch die technischen Wahrscheinlichkeitsbedingungen des Problems bedingt sein. Im Allgemeinfall kann man die optimale Lösungsfunktion als eine Näherungslösung des Problems (1) - (3) betrachten. Sie ist selbstverständlich leichter zu finden als die optimale Versuchslösung.

Wir identifizieren die Klasse der Lösungsfunktionen mit einem bestimmten **Funktionenraum.** Gerade dadurch erhalten wir eine sehr große Klasse von Lösungsfunktionen und können einen geeigneten, gut ausgearbeiteteten Funktionalanalysisapparat verwenden. Insbesondere ist die Menge der Lösungsmethoden von Extremalproblemen in Funktionenräumen groß.

Für das Problem (1) - (3) nimmt man zweckmäßigerweise an, daß $x(s) \in \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, wobei $1 < p < \infty$ und Σ Borelsche σ-Algebra. Dadurch wird das Problem (1) - (3) in das folgende Problem transformiert.

P r o b l e m I

$$\min \int_S f(x(s), s)\, d\mu(s) \tag{4}$$

bei den Beschränkungen

$$\int_S g_i(x(s), s)\, d\mu(s) \leqslant \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i \quad \text{für beinahe alle } s, \; i = m+1, \ldots, n. \tag{6}$$

In Problemen wirtschaftlichen Gehalts hat ein Teil der Bedingungen (6) die konkrete Gestalt $x_i \geqslant 0$, $i = m+1, \ldots, m+k$.

Für die Meßbarkeit der Subintegralfunktionen nehmen wir an, daß sie die Caratheodory-Bedingung erfüllen, d.h. $f(x,s)$ und alle $g_i(x,s)$ sind in x für fast alle s stetig und in s für alle x meßbar.

Wir leiten die Bedingungen für die Existenz der Lösung her, indem wir die Untersuchung über Integralfunktionale in [1] verwenden. Die Norm in R^k, R^l bezeichnen wir mit $|x|$ und die Norm in den Räumen L_p, C mit $\|x\|$.

T h e o r e m 1. Es seien die Bedingungen

$$f(x,s) \geqslant a_0(s) + \beta_0 |x|^p, \qquad (7)$$
$$g_i(x,s) \geqslant a_i(s) + \beta_i |x|^p, \quad i = 1, \ldots, m,$$

erfüllt, wobei $a_i(s) \in L_1(S, \Sigma, \mu)$, β_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ reelle Zahlen sind, unter denen wenigstens eine positiv ist. Die Funktionen $g_i(x)$, $i = m+1, \ldots, n$ seine nach unten halbstetig und quasikonvex.

Dann existiert die Lösung von Problem I in den Räumen

$$L_p(S, \Sigma, \mu), \quad 1 < p < \infty.$$

B e w e i s. Die Bedingungen (7) (siehe Theorem 1 [1]) garantieren die schwache Halbstetigkeit nach unten der Funktionale aus (4) und (5). Gerade dadurch ergeben die Beschränkungen (5) im Raum L_p schwach abgeschlossene Mengen.

Die Beschränkungen $g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i$, $i = m+1, \ldots, n$ erzeugen im k-dimensionalen Raum die abgeschlossenen konvexen Mengen. Diese Beschränkungen ergeben ebenfalls im Raum L_p abgeschlossene und konvexe Mengen. Aufgrund der Reflexität des Raumes L_p sind diese Mengen auch schwach abgeschlossen. Die Durchschnittsmenge der schwach abgeschlossenen Mengen ist ebenfalls schwach abgeschlossen.

Wir nehmen zunächst an, daß $\beta_1 > 0$ ist. Nach den Ungleichungen (5) und (7) erhalten wir

$$\gamma_1 \geqslant \int g_1(x(s), s)\, d\mu(s) \geqslant \int a_1(s)\, d\mu(s) + \beta_1 \int |x(s)|^p\, d\mu(s) =$$
$$= \int a_1(s)\, d\mu(s) + \beta_1 \|x\|^p,$$

oder $\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} - \dfrac{1}{\beta_1} \int a_1(s)\, d\mu(s) \geqslant \|x\|^p.$

Die durch dieses Funktional vorgegebene Menge ist beschränkt. Wenn alle β_i, $i = 1, \ldots, m$ nicht positiv sind und $\beta_0 > 0$, dann kann man formal die Beschränkung

$$\int f(\bar{x}(s), s)\, d\mu(s) \geqslant \int f(x(s), s)\, d\mu(s), \qquad (8)$$

hinzufügen, wobei $\bar{x}(s) \in L_p$.

Die Lösung des ursprünglichen Problems und das Problem mit der zusätzlichen Beschränkung (8) stimmen überein. Weil aber die durch Bedingung

(8) vorgegebene Menge beschränkt ist, existiert bekanntlich ein Minimum eines schwach nach unten halbstetigen Funktionals auf der schwach abgeschlossenen beschränkten Menge des reflexiven Raumes. Das Theorem ist bewiesen.

B e m e r k u n g. Die Forderung, daß ein bestimmtes β_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ positiv sei, kann man durch die Forderung ersetzen, daß die Bedingungen $g_i(x) \leqslant \gamma_i$, $i = m+1, \ldots, n$ im Raum R^k eine beschränkte Menge erzeugen.

T h e o r e m 2. Die Funktion $f(x, s)$ sei in x für fast alle s stark konvex, die Funktionen $g_i(x, s)$, $i = 1, \ldots, m$ seien in x für fast alle s konvex und die Funktionen $g_i(x)$, $i = m + 1, \ldots, n$ seien quasikonvex. Existiert dann eine Lösung von Problem I, so ist sie eindeutig.

B e w e i s. Es ergibt sich die starke Konvexität des minimierbaren Funktionals $\int f(x(s), s) d\mu(s)$ und die Konvexität der Funktionale der Beschränkungen $\int g_i(x(s), s) d\mu(s)$ und gerade dadurch auch eine Konvexität der Mengen $Q_i = \{x(s) : \int g_i(x(s), s) d\mu(s) \leqslant \gamma_i\}$, $i = 1, \ldots, m$. Konvex sind ebenfalls die Mengen $Q_i = \{x(s) : g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i\}$, $= m + 1, \ldots, n$ und die Durchschnittsmenge $Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Das stark konvexe Funktional auf der konvexen Menge kann jedoch nur in einem einzigen Punkt ein Minimum annehmen. Das Theorem ist bewiesen.

Wir geben einige notwendige und hinreichende Extremumsbedingungen für das Problem I an. Angenommen, die Funktionen $f(x, s)$ und $g_i(x, s)$, $i = 1, \ldots, m$ seien in x konvex und $g_i(x)$, $i = m + 1, \ldots, n$ konvex. Man kann leicht die Mengen der Stützfunktionen für das Problem I konstruieren:

$$\begin{aligned} M_0 = \{f'_x(x(s), s) \in L_q, \quad & f(x, s) - f(x(s), s) \geqslant \\ & \geqslant (f'_x(x(s), s), x - x(s)), \ x \in R^k\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} M_i = \{g'_{ix}(x(s), s) \in L_q, \ & g_i(x, s) - g_i(x(s), s) \geqslant \\ & \geqslant (g'_{ix}(x(s), s), x - x(s)), \ x \in R^k\}, \\ & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Schreibweise bedeutet, daß die Stützfunktionale zu den Funktionalen aus (4) und (5) solche Funktionen des Raumes L_q sind, bei denen für beliebige feste s die Vektoren $f'_x(x(s), s)$ Stützvektoren zu den

Funktionen $f(x, s)$ sind. Die Menge der Stützfunktionen für die Menge

$$Q_s = \{x(s),\ g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i,\quad i = m+1, \ldots, n\} \tag{11}$$

hat die Gestalt

$$M = \{\chi(s) \in L_q,\ \chi(s) = \sum_{i=m+1}^{n} (\lambda_i(s) g'_{ix}(x(s))),$$
$$\lambda_i(s)(g_i(x(s)) - \gamma_i) = 0,\quad \lambda_i(s) \leqslant 0\}, \tag{12}$$

wobei $g'_{ix}(x(s))$ die Stützvektoren zu den Funktionen $g_i(x(s))$ bei festen s sind. Die Schreibweise (12) gilt unter der Annahme, daß die Menge

$$Q = \{x,\ g_i(x) \leqslant 0,\quad i = m+1, \ldots, n\} \tag{13}$$

einen inneren Punkt besitzt. In den Ausdrücken (9), (10) und (12) sind die Stützfunktionen Gatheau- oder Fréchet-Ableitungen, wenn die entsprechenden Funktionen oder Funktionale Gatheau oder Fréchet differenzierbar sind. Für die Integralfunktionale sind die Differenzierbarkeitsbedingungen in den Räumen L_p in der Arbeit [2] angegeben.

Wir schreiben jetzt die notwendigen und hinreichenden Extremumsbedingungen für das Problem I in der Form der Euler-Lagrange-Gleichung an:

$$f'_x(x(s), s) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g'_i(x(s), s) + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(s) g'_{ix}(x(s)) = 0,$$
$$\lambda_i \int_S g_i(x(s), s)\, d\mu(s) = 0,\qquad i = 1, \ldots, m,$$
$$\lambda_i(s)(g_i(x(s)) - \gamma_i) = 0,\qquad i = m+1, \ldots, n.$$

2. Wenn in einem Problem der stochastischen nichtlinearen Programmierung neben dem Erwartungswert Wahrscheinlichkeits- oder Quantil-Funktionen beteiligt sind, dann hat es keinen Sinn mehr, die Lösungsfunktion $x(s)$ unter den Elementen des Raumes $L_p(S, \Sigma, \mu)$ zu suchen. Und zwar deshalb, weil die Eigenschaften des Wahrscheinlichkeits- und Quantil-Funktionals im Raum L_p schlecht sind [3]. So ist z.B. das Funktional $v(x) = P[x(s) \leqslant \gamma] = \int_{x(s) \leqslant \gamma} d\mu(s)$ in L_p weder nach oben noch nach unten schwach halbstetig. Außerdem ist die Menge der Unstetigkeitspunkte dieses Funktionals in den Räumen $L_p, 1 \leqslant p < \infty$ überall dicht. Es ist interessant, daß die Menge der Unstetigkeitspunkte des Funktionals $v(x)$ in den Räumen $L_p, 1 \leqslant p < \infty$ ebenfalls überall dicht ist.

Gefordert sei, daß die Lösungsfunktion $x(s)$ zum Banach-Raum der stetigen Funktionen $C(S)$ gehöre, wenn S beschränkt ist, oder zum metrischen

Raum der stetigen Funktionen $C_\rho(S)$, wenn S eine beliebige Menge ist. Die Metrik im Raum $C_\rho(S)$ bestimmen wir durch die Formel

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}, \qquad \|x-y\|_n = \max_{|s|\leqslant n} |x(s)-y(s)|. \tag{14}$$

Wir fügen dem Problem (1) - (3) die Wahrscheinlichkeitsbeschränkungen

$$P[g_i(x,s)\leqslant\gamma_i]\geqslant\alpha_i, \quad 0<\alpha_i<1, \quad i=n+1, \ldots, r \tag{15}$$

hinzu und ersetzen (wenn notwendig) die Minimierungsfunktion (1) durch die Funktion

$$P[g(x, s)\leqslant\gamma]. \tag{15'}$$

Wir schreiben die Beschränkungen (15) in Form eines Integrals um, wobei wir gleichzeitig berücksichtigen, daß wir die Lösungsfunktion x(s) suchen,

$$\int\limits_{g_i(x(s),s)\leqslant\gamma_i} d\mu(s)\geqslant\alpha_i, \quad 0<\alpha_i<1, \quad i=n+1, \ldots, r. \tag{16}$$

Für die Meßbarkeit der Superpositionen $g_i(x(s), s)$ fordern wir, daß die Funktionen $g(x, s)$ und $g_i(x, s)$, $i = n + 1,\ldots, r$ in x für fast alle s und in s für alle x meßbar sind.

P r o b l e m II

$$\min \int\limits_S f(x(s), s)\, d\mu(s) \tag{17}$$

oder

$$\min \int\limits_{g(x(s),s)\leqslant\gamma} d\mu(s) \tag{17'}$$

bei den Beschränkungen

$$\int\limits_S g_i(x(s), s)\, d\mu(s)\leqslant\gamma_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{18}$$

$$g_i(x(s))\leqslant\gamma_i, \quad i=m+1, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\int\limits_{g_i(x(s),s)\leqslant\gamma_i} d\mu(s)\geqslant\alpha_i, \quad 0<\alpha_i<1, \quad i=n+1, \ldots, r. \tag{20}$$

Die Ungleichungen (19) müssen für alle s erfüllt sein, wenn $x(s)\in C(S)$, und nur für ein bestimmtes $s\in S$, wenn $x(s)\in C_\rho(S)$.

T h e o r e m 3. 1) Für beliebige $\lambda_i>0$, $i = 0, 1,\ldots, m$ und für fast alle $s\in S$ sollen die Funktionen $f(x, s)$ und $g_i(x, s)$, $i = 1,\ldots, m$ die Ungleichungen

$$f(x,s)\geqslant a_{\lambda_0}(s), \qquad g_i(x,s)\geqslant a_{\lambda_i}(s) \tag{21}$$

für $|x|\leqslant\lambda_i$ erfüllen, wobei $a_{\lambda_0}(s)$, $a_{\lambda_i}(s)\in L_1$ sind; 2) die Menge

$$Q=\{x: g_i(x(s))\leqslant\gamma_i, \quad i=m+1, \ldots, n\} \tag{22}$$

sei beschränkt; 3) die Funktionen $g_i(x)$, $i = m + 1, \ldots, n$ seien nach unten halbstetig; 4) die Lösungsfunktionen $x(s)$ sollen die Bedingung

$$|x(s') - x(s'')| \leqslant K \max(|s' - s''|, |s' - s''|^{\beta}), \quad k > 0, \quad \beta \geqslant 1 \tag{23}$$

erfüllen. Dann gibt es eine Lösung von Problem II in den Räumen $C(S)$ und $C_\rho(S)$.

B e w e i s. Nach dem in [1] bewiesenen Theorem 1 sind die Integralfunktionale (17), (18) im Raum $C(S)$ nach unten halbstetig. Dieser Beweis ist auch für den Raum $C_\rho(S)$ anwendbar, wenn bemerkt wird, daß aus der Konvergenz im Raum $C_\rho(S)$ die Konvergenz überall folgt. Die Funktionale (17'), (20) sind nach Theorem 3 [3] in den Räumen $C(S)$ und $C_\rho(S)$ nach unten halbstetig. Folglich sind die durch die Beschränkungen (18) und (20) vorgegebenen Mengen abgeschlossen.

Infolge der Halbstetigkeit der Funktionen $g_i(x)$, $i = m + 1, \ldots, n$ ist die Menge Q im Euklidischen Raum abgeschlossen. Dann sind aber auch die durch die Beschränkungen (19) vorgegebenen Mengen in den Räumen $C(S)$ und $C_\rho(S)$ abgeschlossen. Bedingung (23) erzeugt ebenfalls die abgeschlossene Menge in $C(S)$ und $C_\rho(S)$. Die Durchschnittsmenge der abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Die Bedingungen 2) und 4) des Theorems gewährleisten, daß die Mengen, die die Bedingungen (19) und (23) erfüllen, kompakt sind. Im Raum $C(S)$ folgt dies aus dem Arzelà-Ascolli-Kriterium, und im Raum $C_\rho(S)$ erfüllen die Bedingungen (19) und (23) das Kompaktheitskriterium, das in Arbeit [3] angegeben ist. Die Bestätigung des Theorems folgt aus der bekannten Tatsache, daß das nach unten halbstetige Funktional in der abgeschlossenen kompakten Menge ein Minimum erreicht. Das Theorem ist bewiesen.

Die Differentialformel des Wahrscheinlichkeitsfunktionals (17') im Raum $C(S)$ wird genau so und unter denselben Annahmen hergeleitet wie in Arbeit [4] für den Raum R^k. Das Differential im Raum $C(S)$ wird durch das Integral

$$\int_{S_x} \frac{(g'_x(x(s), s), \bar{x}(s))}{|g'_s(x(s), s)|} p(s) \, dS_x(s) \tag{24}$$

ausgedrückt; dabei ist die Oberfläche $S_x = \{s : g(x(s), s) = \gamma\}$; $g'_x(x(s), s)$ der Vektor der partiellen Ableitungen nach x; $g'_s(x(s), s)$ der Vektor der partiellen Ableitungen nach s; $\bar{x}(s)$ eine Richtung von $x(s)$ aus; $(g'_x(x(s), s), \bar{x}(s))$ das Skalarprodukt; $p(s)$ die Dichtefunktion; $dS_x(s)$ das Flächenelement der Oberfläche S_x.

Das Differential des Integralfunktionals (17) im Raum $C(S)$ wird durch das Integral

$$\int_{S_x} (f'_x(x(s), s), \bar{x}(s))\, d\mu(s) \tag{25}$$

ausgedrückt, unter der Annahme, daß $f'_x(x, s)$ und $f(x, s)$ stetig sind.

Auch wenn wir die Ausdrücke der Differentiale (24), (25) für die Funktionale haben, ist es dennoch schwierig, Problem II zu lösen, da die Wahrscheinlichkeitsfunktionale in den Räumen $C(S)$ und $C_\rho(S)$ allgemein gesprochen nicht quasikonvex sind. Als Ergebnis stellt sich heraus, daß Problem II polyextremal ist.

Man kann es vereinfachen, wenn man die Klasse der Lösungsfunktionen durch lineare Kombinationen der bekannten Funktionen

$$x(s) = \sum_{i=1}^{N} Y_i x_i(s). \tag{26}$$

einengt. Hier werden die Vektorfunktionen $x_i(s)$ a priori vorgegeben, und die Matrixkoeffizienten Y_i werden durch Unbekannte berechnet. Die Ersetzung von (26) ist eine Verallgemeinerung des in Arbeit [5] vorgeschlagenen Verfahrens, wo Formel (26) die Gestalt $x(s) = Y \cdot s$ hat und Y eine unbekannte Matrix ist. Wir engen die Klasse der Lösungsfunktionen durch Ersetzen von (26) ein und erhalten ein Problem, dessen qualitative Analyse in Arbeit [4] durchgeführt wurde. Für dieses endlichdimensionale Problem kann man dann bereits hinreichende Quasikonvexitätsbedingungen der Wahrscheinlichkeitsfunktion $v(x) = P[f(x,s) \leqslant \gamma]$ anführen. Gerade wenn die Funktion $f(x, s)$ in der Gestalt $f(x, s) = f_1(x)f_2(s) + f_3(s)$ darstellbar ist, wobei $f_1(x)$ quasikonkav und $f_2(s)$ nicht negativ (oder $f_1(x)$ quasikonvex und $f_2(s)$ nicht positiv) sind, dann ist $v(x)$ quasikonvex.

Zum Schluß möchte der Verfasser den Herren I. Petersen und T. Tobias für ihre Bemerkungen danken.

L i t e r a t u r

1. П о л я к Б. Т., Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум, Матем. сб., 78 (120), 65 (1969).

Poljak, B.T.: Polunepreryvnost' integral'nych funkcionalov i teoremy suščestvovanija v zadačach na ėkstremum.
In: Matematičeskij sbornik. Moskva, 78(120) (1969), S. 65.
Engl.: Semincontinuity of Integral Functionals and Existence Theorems on Extremal Problems.
In: Mathematics of the USSR. Sbornik. Providence, R.I., 7 (1969), Nr 1, S. 59 - 77.

2. К а р д а ш о в В. Р., Условия дифференцируемости интегральных функционалов, Вестн. МГУ, Сер. матем. мех., № 6, 23 (1970).

Kardašov, V.R.: Uslovija differenciruemosti integral'nych funkcionalov.
In: Vestnik. Moskovskij Gosudarstvennyj Universitet. Matematika, mechanika. Moskva, 1970, Nr 6, S. 23.
⟨Die Differenzierbarkeitsbedingungen von Integralfunktionalen⟩

3. Р а й к Э. В., О задачах стохастического программирования с функционалами вероятности и квантиля, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, № 2 (1972).

Rajk, Ė.V.: O zadačach stochastičeskogo programmirovanija s funkcionalami verojatnosti i kvantilja.
In: Teaduste. Eesti NSV Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika / Izvestija. Akademija nauk Ėstonskoj SSR. Fizika. Matematika. Tallinn, 21 (1972), Nr 2, S. 142 - 148.
[On the Stochastic Programming Problem with the Probability and Quantil Functionals]

4. Р а й к Э. В., Качественные исследования в задачах стохастического нелинейного программирования, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 8 (1971).

Rajk, Ė.V.: Kačestvennye issledovanija v zadačach stochastičeskogo nelinejnogo programmirovanija.
In: Teaduste. Eesti NSV Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika / Izvestija. Akademija nauk Ėstonskoj SSR. Fizika. Matematika. Tallinn, 20 (1971), Nr 1, S. 8 - 14.
[Qualitative Research into the Stochastic Nonlinear Programming Problems]

5. C h a r n e s A., C o o p e r W. W., Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints, Operat. Res., 11, No. 1, 18 (1963).

Institut für Kybernetik
der Akademie der Wiss.
der Estnischen SSR

Redaktionseingang
15.3.1972

Stuttgart, den 30. Mai 1978

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer