(196)

Rusanov, V.V.

ÜBERPRÜFUNGSTESTS FÜR DIFFERENZENMETHODEN ZUR DURCHLAUFENDEN BERECHNUNG UNSTETIGER LÖSUNGEN DER GASDYNAMISCHEN GLEICHUNGEN

Übersetzung aus:

Proceedings. VI. International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, June 20 - 25, 1978, Tbilisi, Band 2, S. 173 - 180.

Russ.: Тесты для проверки разностных методов сквозного счета разрывных решений уравнений газовой динамики
Testy dlja proverki raznostnych metodov skoznogo sčeta razryvnych rešenij uravnenij gazovoj dinamiki

1. Einleitung

Zur Berechnung unstetiger Lösungen der gasdynamischen Gleichungen gibt es eine große Anzahl von Differenzenverfahren, in denen die Unstetigkeiten während des Rechenvorgangs nicht festlegbar sind; außerdem treten sie als Bereiche mit großen Gradienten der gasdynamischen Funktionen auf, und die Unstetigkeitslinien oder -flächen sind über einige Gittermaschen "verschmiert".

Um die Eigenschaft derartiger Differenzenverfahren überprüfen zu können, testet man sie gewöhnlich an einfachen, bekannten Modellen, z.B. über eine Stoßwelle hinweg, die sich über einen konstanten Untergrund ausbreitet, oder über den Zerfall einer Unstetigkeit. Im einen wie im anderen Fall besteht die Lösung in der Umgebung der Unstetigkeit aus einer Treppenfunktion, die auf beiden Seiten der Unstetigkeit konstant ist. In realen Problemen hingegen sind gasdynamische Funktionen normalerweise in der Umgebung der Unstetigkeit nicht konstant; und dies kann sich sehr stark auf die Qualität der durchlaufenden Berechnung auswirken. Die Schemata für solche Fälle werden gewöhnlich getestet, indem man sie untereinander und nicht mit einer genauen Lösung vergleicht, was natürlich kein vollständiges Bild von der Qualität des einzelnen Schemas wiedergibt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Prinzip zur Aufstellung von Tests vorgestellt, mit dem eindimensionale Differenzenschemata überprüft werden können; dieses Prinzip beruht auf dem Modell einer isoentropischen Gasströmung mit dem Adiabatenindex $k = 3$. Bekanntlich zerfallen in diesem Fall die Gleichungen der Gasdynamik im Stetigkeitsbereich, und deshalb kann man leicht die genaue Lösung der Gleichungen in dem Bereich finden, in welchem die Werte der gasdynamischen Funktionen nicht konstant sind.

2. Gleichungen im Stetigkeitsbereich der Lösung

Wir untersuchen ein System, das aus den Stetigkeitsgleichungen der instationären eindimensionalen Strömung gebildet wird:

$$\begin{aligned} &\rho_t + (pu)_z = 0 \\ &(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_z = 0 , \end{aligned} \tag{1}$$

mit u Geschwindigkeit, ρ Dichte, p statischem Druck und den unabhängigen Variablen z, t, wobei die Indizes z, t die Differentiation nach den entsprechenden Variablen bezeichnen. Desweiteren nehmen wir an, daß $p = A\rho^k$ und $A = \text{const}$ ist, woraus folgt, daß die Entropie im gesamten Strömungsbereich konstant ist (nomentrope Strömung). Infolgedessen können wir die Energiegleichung weglassen und das System (1) schließen.

Nach einfachen Transformationen des Systems (1) kommen wir zu folgender charakteristischer Form:

$$\begin{aligned} &c[\rho_t + (u + c)\rho_z] + \rho[u_t + (u + c)u_z] = 0 \\ &c[\rho_t + (u - c)\rho_z] - \rho[u_t + (u - c)u_z] = 0 , \end{aligned} \tag{2}$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit bezeichnet, die nach der Formel

$$c^2 = (dp/d\rho)_{s\ =\ \mathrm{const}} = kp/\rho = kA\rho^{k-1}$$

bestimmt wird.

Als neue unabhängige Variable führen wir die Riemannschen Invarianten

$$\tau = u + 2c/(k-1), \quad \mathcal{S} = u - 2c/(k-1)$$

ein und schreiben die charakteristischen Gleichungen folgendermaßen an:

$$\begin{aligned} &\tau_t + \{[(k+1)\tau + (3-k)\mathcal{S}]/4\}\tau_z = 0 \\ &\mathcal{S}_t + \{[(3-k)\tau + (k+1)\mathcal{S}]/4\}\mathcal{S}_z = 0\ . \end{aligned} \qquad (3)$$

Bei $k = 3$, $A = 1/3$ erhält das System (1) die Gestalt:

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_z = 0 \\ &(\rho u)_t + (pu^2 + \rho^3/3)_z = 0\ . \end{aligned} \qquad (4)$$

Im Stetigkeitsbereich der Lösung entspricht das System (4) dem zerfallenden System

$$\begin{aligned} &\tau_t + \tau\tau_z = 0 && \mathcal{S}_t + \mathcal{S}\mathcal{S}_z = 0 \\ &\tau = u + \rho && \mathcal{S} = u - \rho \\ &u = (\tau + \mathcal{S})/2 && \rho = c = (\tau - \mathcal{S})/2\ . \end{aligned} \qquad (5)$$

Da die Schallgeschwindigkeit c numerisch gleich der Dichte ρ ist, verwenden wir im folgenden nur noch die Bezeichnung ρ, und zwar unabhängig von der Bedeutung des Werts in der Formel.

Anmerkungen:

a) Da ρ nach physikalischen Vorstellungen ein positiver Wert ist, untersuchen wir nur jene Lösungen (5), bei denen überall $\tau > \mathcal{S}$ erfüllt ist.

b) Auf den Charakteristiken des Systems (5), die Geraden sind, sind die Größen τ und $\mathcal{S}$ konstant. Wenn also im Punkt (z_0, t_0), $\tau = \tau_0$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$, dann ist

$$\begin{aligned} r &= r_0 \quad \text{auf der Geraden} \quad (z - z_0) - r_0(t - t_0) = 0 \\ s &= s_0 \quad \text{auf der Geraden} \quad (z - z_0) - s_0(t - t_0) = 0 \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieser Umstand erleichtert die Berechnung der genauen Lösung wesentlich; darauf beruht auch die Aufstellung der vorgeschlagenen Tests.

3. Beziehungen auf der Stoßwelle

Aufgrund der Annahme $A = \text{const}$ sind die "Stoßwellen" in unserem Modell keine wirklichen gasdynamischen Stoßwellen, sondern einfachere isoentropische Unstetigkeiten der Funktionen u, ρ. Dennoch bleiben die wesentlichsten Besonderheiten der gasdynamischen Unstetigkeiten erhalten, wodurch eine realistische Grundlage zur Untersuchung der Rechenmethoden gewährleistet ist.

Die Beziehungen zwischen den Unstetigkeiten der Funktionen u, ρ und der Unstetigkeitsgeschwindigkeit D erhält man auf bekannte Weise aus dem System (4), das in konservativer Form angeschrieben ist. Bekanntlich besitzt das System (4) eine unendliche Menge konservativer Formen, und die Art der Beziehungen auf der Stoßwelle hängt hauptsächlich von der gewählten Form ab. So kann z.B. das System (5) leicht in konservativer Form angeschrieben werden:

$$r_t + (r^2/2)_z = 0 \qquad s_t + (s^2/2)_z = 0 \,. \tag{7}$$

In stetigen Lösungen sind die Systeme (4) und (7) äquivalent; wenn man jedoch Unstetigkeiten in die Untersuchung miteinbezieht, dann wird diese Äquivalenz verletzt. Insbesondere zerfallen die Beziehungen an der Unstetigkeit beim System (7) in zwei unabhängige: für r und s; das gleiche gilt auch für die Gleichungen von (7). Beim System (4) zerfallen die Beziehungen an der Unstetigkeit nicht nach r und s, und deshalb führen die unstetigen Lösungen des Systems (4) nicht zu Lösungen von zwei unabhängigen Systemen bezüglich der Invarianten r und s. Im weiteren Verlauf werden nur Unstetigkeiten untersucht, die vom System (4) erzeugt wurden, da sie dem physikalischen Zweck dieser Arbeit mehr entsprechen.

D sei die Geschwindigkeit der Stoßwelle; mit dem Index 1 bezeichnen wir den Zustand vor der Wellenfront und mit dem Index 2 danach. D.h. wir vereinbaren, daß das Gas aus dem Bereich 1 in den Bereich 2 strömt. Die Beziehungen auf der Stoßwelle für das in konservativer Form geschriebene System (4) haben die Gestalt:

$$\begin{aligned} \rho_2 v_2 &= \rho_1 v_1 \\ \rho_2 v_2^2 + \rho_2^3/3 &= \rho_1 v_1^2 + \rho_1^3/3 , \end{aligned} \tag{8}$$

mit $v_k = u_k - D$, $k = 1, 2$.
Entsprechend der Bezeichnung ist $v_i > 0$, wenn der Bereich 1 links vom Berech 2 liegt, und $v_i < 0$ im entgegengesetzten Fall.

Wir messen die Stärke der Stoßwelle durch das Dichteverhältnis x:

$$\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = x , \qquad |v_k|/\rho_k = M_k \qquad k = 1, 2 .$$

Dann erhalten wir aus (8)

$$(v_1/\rho_1)^2 = x(x^2 + x + 1)/3 \equiv [\psi(x)]^2 .$$

Wenn u_1, ρ_1 und x bekannt sind, dann gilt

$$\begin{aligned} &\rho_2 = x\rho_1 , \quad u_2 = u_1 \pm \rho_1 \varphi(x) , \quad v_2 = v_1/x \\ &D = u_1 \mp \rho_1 \psi(x) , \quad M_1 = |v_1|/\rho_1 = \psi(x) \\ &M_2 = M_1/x^2 , \quad \varphi(x) = (x - 1)\sqrt{(x^2 + x + 1)/(3x)} . \end{aligned} \tag{9}$$

Wir untersuchen zwei Grundfälle:

1) $M_1 < 1$: die Strömungsgeschwindigkeit vor der Welle liegt unter der Schallgeschwindigkeit, dann ist

$$\begin{aligned} &x = \rho_2/\rho_1 < 1 , \quad |v_1| = |u_1 - D| < \rho_1 \\ &M_2 > 1 , \quad |v_2| = |u_2 - D| > \rho_2 . \end{aligned} \tag{10}$$

Dieser Fall entspricht einer Verdünnungswelle und ist instabil. In tatsächlichen Gasströmungen kommt er nicht vor.

2) $M_2 > 1$: die Strömungsgeschwindigkeit vor der Welle liegt über der Schallgeschwindigkeit, dann ist

$$\begin{aligned} &x = \rho_2/\rho_1 < 1 , \quad |v_1| = |u_1 - D| > \rho_1 \\ &M_2 < 1 , \quad |v_2| = |u_2 - D| < \rho_2 . \end{aligned} \tag{11}$$

Je nach Wahl des Vorzeichens in den Gleichungen (9) und (11) können zwei Unterfälle zur Anwendung kommen:

$$\text{a) } v_1 > \rho_1 > 0 \qquad \text{und b) } v_1 < -\rho_1 < 0 \, .$$

Im Unterfall a) nennen wir die Unstetigkeit der Stoßwelle vom Typ "$\mathfrak{s}$" und im Fall b) der Stoßwelle vom Typ "$\mathfrak{r}$". Es gelten die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) Welle vom Typ "}\mathfrak{s}\text{"} & \text{b) Welle vom Typ "}\mathfrak{r}\text{"} \\[6pt]
v_1 > \rho_1 > 0 & v_1 < -\rho_1 < 0 \\
D < u_1 - \rho_1 = \mathfrak{s}_1 & D > u_1 + \rho_1 = \mathfrak{r}_1 \\
M_1 = v_1/\rho_1 & M_1 = -v_1/\rho_1 \\
D = u_1 - \rho_1 \psi(x) & D = u_1 + \rho_1 \psi(x) \\
v_2 = \rho_1 \psi(x)/x & v_2 = -\rho_1 \psi(x)/x \\
u_2 = u - \rho_1 \varphi(x) < u_1 & u_2 = u_1 + \rho_1 \varphi(x) > u_1 \\
\mathfrak{r}_2 = u_1 + [x - \varphi(x)]\rho_1 & \mathfrak{r}_2 = u_1 + [x + \varphi(x)]\rho_1 \\
\mathfrak{s}_2 = u_1 - [x + \varphi(x)]\rho_1 & \mathfrak{s}_2 = u_1 - [x - \varphi(x)]\rho_1 \, .
\end{array} \qquad (12)$$

Es gelten die folgenden Ungleichungen:

bei $1 < x \leq x_0$

$$\mathfrak{s}_2 < D < \mathfrak{s}_1 \leq \mathfrak{r}_2 < \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{s}_2 \leq \mathfrak{r}_1 < D < \mathfrak{r}_2 \, ,$$

bei $x_0 \leq x < +\infty$

$$\mathfrak{s}_2 < D < \mathfrak{r}_2 \leq \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{r}_1 \leq \mathfrak{s}_2 < D < \mathfrak{r}_2 \, ,$$

wobei $\mathfrak{r}_0$ die Sprungstärke in der Grenzsituation der Charakteristiken $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{r}_2$ (a) oder $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{s}_2$ (b) ist. In diesem wie im anderen Unterfall erfüllt x_0 die Gleichung $1 + x_0 = \varphi(x_0)$; hieraus folgt

$$x_0 = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = 5.274510\ldots$$

Hinzugefügt sei, daß der Typ der Welle ("$\mathfrak{r}$" oder "$\mathfrak{s}$") nicht mit der Richtung zusammenhängt, in der sie sich fortpflanzt; diese wird durch D bestimmt (die Welle läuft "nach rechts", wenn $D > 0$, und "nach links", wenn $D < 0$).

4. Berechnung der Stoßwellentrajektorie

Die Stoßwellentrajektorie werde durch die Gleichung $z = Z(t)$ beschrieben, und die Welle sei vom Typ "r". Wir betrachten einen bestimmten Punkt P auf der Welle und berechnen in diesem Punkt die Ableitung dZ/dt. Die Werte der Invarianten r_1, s_1, r_2 setzen wir als bekannt voraus, da sie bei $t < t_P$ durch die Werte r, s bestimmt werden. Aus den Gleichungen (12b) erhalten wir $u_1 = [x + \varphi(x)]\rho_1 = r_2$. Wir ersetzen in dieser Gleichung den Ausdruck u_1 durch ρ_1, r_1 und erhalten

$$\omega(x) \equiv (x - 1)\left(1 + \sqrt{(x^2 + x + 1)/(3x)}\right) = (r_2 - r_1)/\rho_1 . \tag{13}$$

Nach Bestimmung von x aus Gleichung (13) erhalten wir D und s_2 nach den Gleichungen (12):

$$D = dZ/dt = u_1 + \rho_1\psi(x) , \qquad s_2 = u_1 - [x - \varphi(x)]\rho_1 . \tag{14}$$

Die Funktion $\omega(x)$, die auf der rechten Seite von Gleichung (13) steht, ist monoton und positiv bei $x > 1$.

Der beschriebene Algorithmus zur Berechnung von dZ/dt gibt uns die Möglichkeit, die Stoßwellentrajektorie durch numerische Integration der Differentialgleichung für $Z(t)$ zu ermitteln. Wesentlich ist dabei, daß die Charakteristiken des Systems (1) Geraden sind, was das Auffinden von r_1, s_1 und r_2 im Punkt P sehr vereinfacht.

Der Ausgangspunkt der Stoßwellentrajektorie bei ihrer Entstehung aus der Druckwelle bestimmt sich aus der Bedingung, daß in diesem Punkt (zeitlich) zum ersten Mal die Ableitung $\partial r/\partial z = \infty$ ist (für die Welle vom Typ "r").

5. Verdünnungswellen

Um die Gleichungen, die die zentrierte Verdünnungswelle beschreiben, ermitteln zu können, nehmen wir in (5) an:
$r = r(\xi)$, $s = s(\xi)$, mit $\xi = (z - z_0)/(t - t_0)$, der Punkt (z_0, t_0) ist das Wellenzentrum. Dann ist

$$(\xi - r)r_\xi = 0 \qquad (\xi - s)s_\xi = 0 .$$

Es sind zwei Fälle möglich:

a) Welle vom Typ "s":

$$s = \xi, \quad r = \text{const}$$
$$s_1 < s_2, \quad \xi_1 < \xi_2$$

b) Welle vom Typ "r":

$$r = \xi, \quad s = \text{const}$$
$$r_1 > r_2, \quad \xi_1 > \xi_2 \,.$$

Wenn man die Stärke der Verdünnungswelle $x = \rho/\rho_1$ hinzunimmt, die sich längs der Trajektorie von 1 bis $\rho_2/\rho_1 = x_2 = 1$ verändert, erhält man:

$$u = u_1 - \rho_1(x - 1) \qquad\qquad u = u_1 + \rho_1(x - 1)$$
$$\rho = x\rho_1 \qquad\qquad \rho = x\rho_1 \tag{15}$$
$$\xi = u - \rho = u_1 - (2x - 1)\rho_1 \qquad \xi = u + \rho = u_1 + (2x - 1)\rho_1 \,.$$

6. Zerfall einer beliebigen Unstetigkeit

Für das System (5) sei die unstetige Anfangswertaufgabe von Cauchy gestellt mit den Werten

$$u = u_{\Lambda}\,, \quad \rho = \rho_{\Lambda} \quad \text{bei} \quad z < z_0\,; \quad u = u_{\Pi}\,, \quad \rho = \rho_{\Pi} \quad \text{bei} \quad z > z_0\,.$$

Aus der allgemeinen Theorie über quasilineare Gleichungen ist bekannt, daß eine solche Unstetigkeit instabil ist und zerfällt, wobei sie zwei Wellen bildet, die nach rechts (Typ r) und nach links (Typ s) laufen: Stoßwellen bzw. Verdünnungswellen (dementsprechend sind 4 Arten des Zerfalls der Unstetigkeit möglich). Im Endergebnis bilden sich drei Bereiche mit konstanten Werten: ein linker (u_{Λ}, ρ_{Λ}), ein zentraler (u_0, ρ_0) und ein rechter (u_{Π}, ρ_{Π}).

Wir führen die Bezeichnungen $x = \rho_0/\rho_{\Lambda}$, $y = \rho_0/\rho_{\Pi}$ ein. Die Größen x und y beschreiben vollständig den Zerfall der Unstetigkeit. Dabei gilt: wenn $x > 1$, dann verläuft im linken Bereich die Stoßwelle, und bei $x < 1$ die Verdünnungswelle; die analogen Werte y bestimmen die Art der Welle im rechten Bereich.

Die Berechnung des Zerfalls der Unstetigkeit wird in zwei Schritten durchgeführt.

I. Wir ermitteln x und y, u_0, ρ_0 aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= x\rho_\Lambda & \rho_0 &= y\rho_\Pi \\ u_0 &= u_\Lambda - \rho_\Lambda \phi(x) & u_0 &= u_\Pi + \rho_\Pi \phi(y)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

wobei die Funktion $\phi(\sigma)$ durch die Gleichungen

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \psi(\sigma) = (\sigma - 1)\sqrt{(\sigma^2 + \sigma + 1)/(3\sigma)} & \sigma \geqslant 1 \\ \sigma - 1 & \sigma \leqslant 1 \end{cases}$$

bestimmt wird.

II. Wir errechnen D_Λ (oder $\xi_{\Lambda 0}$) und D_Π (oder $\xi_{\Pi 0}$) nach den Gleichungen

$$x \geqslant 1 : \quad D_\Lambda = u_\Lambda - \rho_\Lambda \psi(x); \quad y \geqslant 1 : \quad D_\Pi = u_\Pi + \rho_\Pi \psi(y)$$

$$x \leqslant 1 : \quad \xi_{\Lambda 0} = u_0 - \rho_0 \quad ; \quad y \leqslant 1 : \quad \xi_{\Pi 0} = u_0 + \rho_0 \,.$$

Die Besonderheit des untersuchten Modells liegt darin, daß in ihm keine Kontaktunstetigkeiten vorkommen, was die Berechnung des Zerfalls der Unstetigkeit wesentlich vereinfacht.

7. Aufstellung der Tests zur Überprüfung der Differenzenschemata

Im Intervall $[Z_1, Z_2]$ seien für das System (4) stetige Anfangswerte $u = u^0(z)$, $\rho = \rho^0(z)$ gegeben, und an den Rändern $z = Z_1$ und $z = Z_2$ die entsprechenden Randbedingungen (möglicherweise zeitabhängig). Infolge der Nichtlinearität des Systems hängt die Anzahl der Randbedingungen links und rechts von den Werten u, ρ, (r, s) ab, und sie können sich, allgemein gesprochen, zeitlich verändern. Wir wählen die Funktionen $u^0(z)$, $\rho^0(z)$, (bzw. $(r^0(z), s^0(z))$ und die Randbedingungen derart, daß mit wachsender Zeit innerhalb des Intervalls $[Z_1, Z_2]$ die gewünschten Wirkungen eintreten (Entstehung von Stoßwellen, von Verdünnungswellen, Wechselwirkung derselben usw); dann kann man mit Hilfe von Gleichung (10) die Werte r, s im gesamten Bereich $[Z_1, Z_2]$, $t \geqslant 0$ ermitteln, wenn man vorher die Lage aller Stoßwellen bis zu dem uns interessierenden Zeitpunkt berechnet hat.

Somit besteht die Testinformation aus einigen Funktionen (Anfangs- und Randbedingungen, Wellentrajektorien und den Werten r, s, u, ρ auf der Welle) einer einzigen Variablen, mit deren Hilfe man mit Leichtigkeit

r, s und folglich auch u, ϱ in jedem beliebigen Punkt des Bereiches $Z_1 \leq zZ_2$, $t^0 \leq t \leq T$ ermitteln kann. Das konkrete Verfahren zur Berechnung der genannten Funktionen hängt vom gewählten Fall ab.

Institut für
angewandte Mathematik
der Akademie der Wissenschaften
der UdSSR (Moskau)

Stuttgart, den 29.5.1979

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer