

Frenkel', V.Ja.  
(Leningrad)

AUS DER GESCHICHTE DER ANWENDUNG QUANTENMECHANISCHER DARSTELLUNGEN  
AUF DIE THEORIE DER FREIEN ELEKTRONEN

Auszugsübersetzung:

W o l f g a n g P a u l i s B e i t r a g

Deutsche Übersetzung aus:

Voprosy istorii estestvoznaniya i tehniki.  
Moskva, 3 - 4 (56 - 57) (1977), S. 57 - 62;  
hier: S. 57; 58 - 59.

Die Grundlagen zur nichtrelativistischen Quantenmechanik wurden durch die Arbeiten De Broglies, Heisenbergs, Borns, Schrödingers und Paulis gelegt.

Eine Schlüsselrolle in der Entstehung der Quantenmechanik nahm Paulis Arbeit von 1925, die das Ausschließungsprinzip enthält, und ein Aufsatz von Fermi zur Statistik des einatomigen Gases<sup>3)</sup> ein.

3) Fermi, E.: Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases.  
In: Zeitschrift für Physik. Berlin, 36(1926),  
S. 902 - 912

siehe auch:

Fermi, E.: Naučnye trudy, tom 1.  
Moskva: 1977, S. 199, 203.

<Wissenschaftliche Arbeiten, Bd 1; russ.>

In Fermis Arbeit fehlt das weitere Programm, wie die von ihm entwickelten Gedanken auf bestimmte konkrete Probleme anzuwenden seien. Außerdem wäre es nur zu natürlich gewesen, gerade beim Elektronengas (den freien Elektronen) vom "Elektronengasglockenturm" zu einer Verallgemeinerung des Paulischen Ausschließungsprinzips überzugehen.

Diesen Schritt machte Pauli, inspiriert von Fermis Arbeit, ein Jahr später (1927) selbst<sup>5)</sup>. Pauli dehnte sein Ausschließungsprinzip auf das Elektronengas in Metallen aus bzw. er wandte die Fermi-Statistik zur Beschreibung dieses Quantenkollektivs an. Das Ergebnis war die Berechnung der paramagnetischen Suszeptibilität des Elektronengases. Nach recht langen Berechnungen ermittelte er für die Größe der paramagnetischen Suszeptibilität  $\chi$  den Wert

$$\chi = \frac{M}{VH} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu^2 n}{E_0}$$

(Paulis Paramagnetismus). Hier bezeichnen  $M$  das magnetische Moment der Probe mit dem Volumen  $V$  im Feld  $H$ ,  $\mu$  das magnetische Moment des Elektrons,  $E_0$  die maximale Elektronenenergie und  $n$  die Elektronenkonzentration. Uns erscheint Paulis Herleitung kompliziert. Deshalb leiten wir sie so ab, wie Ja.I. Frenkel' dies auch in seiner Arbeit von 1928 getan hat<sup>6)</sup>. Der Titel dieses Aufsatzes sollte die Art der darin dargestellten Untersuchung unterstreichen. Gleichzeitig wurden mit dieser Arbeit, die ihrem Stil nach an Fermis Arbeitsweise erinnert, zahlreiche wichtige Ergebnisse ermittelt. Auf einige gehen wir später ein, zwei davon wollen wir jedoch sofort nennen.

Das erste ist die Berechnung der maximalen Elektronenenergie im Metall. Die Voraussetzungen sind: Paulis Ausschließungsprinzip, die Größe  $h_3$  des Volumens der elementären Zelle des Phasenraumes und die Formel für den Sphärenraum. In einem Metallstück mit dem Volumen  $V$  seien  $N$  Elektronen enthalten. Dann ist die Zahl der besetzten Zustände (unter Berücksichtigung des Spins) gleich  $N/2$ ; andererseits ist sie offensichtlich gleich  $\frac{4\pi}{3} \rho_0^3 V / h^3 = N/2$ ,

---

5) Pauli, W.: Über Gasentartung und Paramagnetismus.  
In: Zeitschrift für Physik. Berlin, 41 (1927), S. 81 - 102

6) Frenkel, J.: Elementäre Theorie magnetischer und elektrischer Eigenschaften der Metalle beim absoluten Nullpunkt der Temperatur.  
In: Zeitschrift für Physik. Berlin, 49(1928),  
S. 31 - 45

hieraus folgt

$$E_0 = \frac{p_0^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3}.$$

Ganz einfach erhält man somit tatsächlich einen Ausdruck für die maximale Elektronenenergie und ihre Abhängigkeit von der Elektronendichte.

Zur Illustration zeigen wir (hauptsächlich anhand der Darlegung des Autors), wie einfach Frenkel<sup>1</sup> die Größe der paramagnetischen Suszeptibilität ableitet.

Einer minimalen Energie des Elektronengases im Magnetfeld entspricht die Ausrichtung ihrer magnetischen Momente in Feldrichtung. Innerhalb der "paarweise" besetzten Zellen kann ein derartiger Umbau aufgrund des Paulischen Ausschließungsprinzips nicht zustandekommen. Gleichzeitig würde eine "Trennung" des Elektronenpaares einen Energieaufwand von  $2\mu H$  bedeuten. Die Besetzung eines jeden einzelnen der oberen Stockwerke des "Energieniveau-Wolkenkratzers" ist mit einem eindeutigen Verlust verbunden: die Energie nimmt um den Wert  $k\Delta\varepsilon$  zu ( $k$  Nummer des Niveaus oder Stockwerks, subtrahiert von  $N/2$ ;  $\Delta\varepsilon$  Abstand zwischen den benachbarten Niveaus). Wie lange ist eine derartige Umbesetzung dennoch vorteilhaft? Offensichtlich solange, bis die Ungleichung

$$2\mu H \geq 2S\Delta\varepsilon,$$

erfüllt ist, wobei  $S$  die Anzahl der Niveaus bezeichnet, die von dem "getrennten" Elektronen oberhalb des obersten Niveaus besetzt werden (wenn kein Magnetfeld vorhanden ist), d.h. im heutigen Sprachgebrauch, oberhalb der Fermi-Grenze. Hieraus erhalten wir den Wert  $S = \frac{\mu H}{\Delta\varepsilon}$ . Was  $\Delta\varepsilon$  betrifft, so ist dieser Abstand der "Energieniveaus"  $E_0/N$ , wobei der Wert  $E_0$  bereits bestimmt wurde. Das magnetische Moment der Probe ist  $M = S\mu$ , und die paramagnetische Suszeptibilität  $\chi$  lautet:

$$\chi = \frac{M}{HV} = \frac{S\mu}{HV} = \frac{\mu^2 H}{HV\Delta\varepsilon} = \frac{\mu^2 N}{VE_0} = \frac{\mu^2 n}{E_0}$$

Dies stimmt sehr schön mit Paulis Gleichung überein (eine genaue Übereinstimmung mit Pauli läßt sich ohne besondere Mühe erzielen, wenn man  $\Delta\varepsilon$  genauer ausrechnet).

Stuttgart, den 20. März 1981

übersetzt von

*Ottmar Pertschi*  
(Ottmar Pertschi)  
Dipl.-Übersetzer

**Übersetzungsstelle  
der Universitätsbibliothek Stuttgart**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

СОВЕТСКОЕ НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ ИСТОРИИ И ФИЛОСОФИИ  
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

# ВОПРОСЫ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

*Выпуск*

*3—4 (56—57)*

(отдельный оттиск)

Издательство «Наука»

Москва

1977

## ИЗ ИСТОРИИ ПРИЛОЖЕНИЯ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ К ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Основы нерелятивистской квантовой механики были заложены работами де Бройля, Гейзенберга, Борна, Шредингера и Паули. Советские физики в силу почти семилетней оторванности от более или менее нормально развивавшейся (даже в условиях первой мировой войны) европейской науки практически не успели включиться в работу по созданию фундаментальных основ квантовой механики. Однако это невольное отставание было успешно преодолено в процессе приложения идей и аппарата квантовой механики к решению ряда важных разделов физики, к числу которых относится в первую очередь физика твердого тела.

Последовавшая за созданием основ квантовой механики «первая квантовомеханическая пятилетка» (1926—1930) ознаменовалась во всем мире, в том числе и в СССР, большими успехами в исследовании физики металлов, точнее, физики свободных электронов, определяющих ряд их фундаментальных свойств. В следующее пятилетие основные достижения были получены в построении теории полупроводников и квазичастиц. Наконец, вторая половина 1930-х годов характеризуется сдвигом основных интересов теоретиков в сторону физики ядра. Стоит напомнить, что путь к приложению квантовомеханических методов для описания атомных ядер был проложен, как это неоднократно подчеркивал академик И. Е. Тамм, работой Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича<sup>1</sup>, в которой принцип неопределенности Гейзенберга для координат и импульсов был распространен на энергию — время.

В настоящей статье мы сосредоточим внимание на вопросах, относящихся к физике газа свободных электронов. Именно в развитие этой области советскими теоретиками был внесен особенно большой вклад.

Первая теория электронов в металлах принадлежала П. Друде, применившему к их описанию представления кинетической теории газов. Друде связал среднюю энергию  $E$  электрона с температурой металла  $T$  известным соотношением  $E = \frac{3}{2} kT$ . Он вычислил далее электропроводность электронного газа и нашел, что ее отношение к известному выражению для теплопроводности оказывается в согласии с экспериментальными данными (закон Видемана — Франца), пропорциональным температуре. Результат Друде был уточнен Лоренцом, который при рассмотрении движения свободных электронов внес поправку на статистику Максвелла — Больцмана, т. е. учел существование распределения электронов по скоростям. Вычисленное им отношение  $\kappa/\sigma$  ( $\kappa$  — удельная теплопроводность,  $\sigma$  —

электропроводность) оказалось в несколько худшем численном соответствии с данными опыта, хотя также соответствовало закону Видемана — Франца, будучи прямо пропорциональным температуре.

Однако ни Друде, ни Лоренц не могли устранить очевидного для них обоих противоречия между фактом участия электронного газа в процессах теплопроводности и отсутствием вклада, который должен был, казалось бы, вноситься электронами в теплоемкость: удельная теплоемкость металлов, как и диэлектриков, хорошо описывалась формулой Дюлонга и Пти, как бы игнорируя в случае металлов существование свободных электронов. Из сложившейся ситуации не удавалось найти выхода, и она с легкой руки Эренфеста, получила название «катастрофы с теплоемкостью». (Эренфест приложил к этому неразрешимому в рамках классической физики парадоксу такой термин по аналогии с тем, как когда-то он же назвал «ультрафиолетовой катастрофой» ситуацию, возникшую в теории излучения черного тела.)

Разрешение катастрофы с теплоемкостью было дано в рамках борновской теории атома Я. И. Френкелем в 1924 г.<sup>2</sup> Из чисто геометрических соображений, основанных на теории Бора, и данных о геометрии кристаллической решетки, Френкель показал, что происходит коллективизация валентных («кометоподобных») электронов при конденсации металлического пара. При этом значение их кинетической энергии возрастает в сравнении с тем, которое они имели в изолированных атомах (такое возрастание проще всего может быть продемонстрировано с помощью теоремы вириала). По порядку величины эта энергия равна нескольким эВ и превосходит энергию ионизации соответствующих атомов. В то же время при комнатных температурах энергия теплового движения атомов на два порядка меньше, составляя сотые доли эВ. Таким образом, повышение температуры тела не оказывает существенного влияния на электроны, и они не вносят сколько-нибудь существенного вклада в теплоемкость металла. Добавим к этому, что привлекая представления о диффузионном характере движения валентных (свободных) электронов, Френкель получил для  $\kappa/\sigma$  закон Видемана — Франца в той же количественной формулировке, что в свое время и Друде.

Одним из ключевых моментов становления квантовой механики было появление в 1925 г. работы Паули, содержащей идею принципа запрета и статьи Ферми по статистике одноатомного газа<sup>3</sup>.

Удивляет простота и прозрачность, с которой Ферми получает все свои основные

<sup>1</sup> Mandelstamm L., Leontovitch M. Zur Theorie der Schrödingerschen Gleichung.— Z. Phys., 1927, Bd 47, S. 131. См. также: Мандельштам Л. И. Полн. собр. трудов, т. 1. М., 1948, с. 286.

<sup>2</sup> Френкель Я. И. Введение в теорию металлов. Л., 1972.

<sup>3</sup> Fermi E. Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases.— Z. Phys., 1926, Bd 36, S. 902. См. также: Ферми Э. Научные труды, т. 1. М., 1971, с. 199, 203.

результаты, пользуясь минимальными математическими средствами. А ведь именно эту работу его ближайший сотрудник Ризетти считает вершиной творчества своего учителя как теоретика. Возникает вопрос, связана ли эта простота восприятия с тем, что за последние пятьдесят лет представители нового поколения привыкли к идеям Ферми по переложениям в многочисленных учебниках, или с той же легкостью она была воспринята рядовыми читателями физических журналов второй половины 1920-х годов? Позволим себе заметить, что знакомство со статьями Паули заставляет думать, что дело здесь не в привыкании, а в первоначальной прозрачности изложения Ферми.

Ризетти подчеркивает, что Дирак в работе, вышедшей в конце 1925 г., при установлении статистики — как мы теперь скажем «фермионов» — оперировал с более специальными представлениями о симметрии (антисимметричности) волновых функций. Отметим попутно, что работы Ферми и Дирака, выполненные независимо друг от друга (Дираком — несколько позднее), могут служить примером реализации «носящихся в воздухе идей» и что первое пятилетие квантовой механики вообще изобилует подобными «парными» и даже «тройными» вкладами: вспомним статистическую модель атома Томаса — Ферми, первое релятивистское уравнение Клейна — Фока — Гордона, туннельную теорию автоэлектронной эмиссии Фаулера — Нордгейма и т. д.

Ферми и Дирак в своих работах не установили, однако, связи между спином частиц описываемого коллектива и развитой ими статистикой. Л. Бриллюэн в этой связи подчеркивает, что хотя статистика Ферми и «основывается на принципе Паули, но не является непосредственным следствием, из нее вытекающим»<sup>4</sup>. Ферми применил этот принцип для атомов, описываемых тремя квантовыми числами, а не четырьмя, т. е. не учел спинового квантового числа.

Примечательно, что Ферми, как и за четверть века до него Планк, оперирует с простой моделью осцилляторов. Он полагает, что все атомы рассматривавшегося им газа колеблются около общего центра. В такой изотемпературной модели убывающая к периферии плотность атомов (осцилляторов) позволяет в пределе перейти от новой статистики, учитывающей принцип Паули, к статистике Максвелла — Больцмана, что и дает возможность найти все параметры теории.

В работе Ферми отсутствует дальнейшая программа приложения развитых им идей к определенным, конкретным задачам. Вместе с тем с «электронно-газовой колокольни» представлялось бы наиболее естественным перейти к обобщению принципа Паули именно на случай электронного газа (свободных электронов).

Соответствующий шаг был предпринят год спустя, в 1927 г., самим Паули<sup>5</sup>, вдох-

<sup>4</sup> Бриллюэн Л. Квантовая статистика. Харьков — Киев, 1934.

<sup>5</sup> Pauli W. Über Gasenartung und Paramagnetismus. — Z. Phys., 1927, Bd 41, S. 81.

новленным работой Ферми. Паули распространил свой принцип запрета на случай газа электронов в металле, или, можно сказать, приложил статистику Ферми к описанию этого квантового коллектива. Результатом его работы было вычисление парамагнитной восприимчивости электронного газа. После довольно длинных расчетов он получил для величины парамагнитной восприимчивости  $\chi$  значение

$$\chi = \frac{M}{VH} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu^2 n}{E_0}$$

(парамагнетизм Паули). Здесь  $M$  — магнитный момент образца объема  $V$  в поле  $H$ ,  $\mu$  — магнитный момент электрона,  $E_0$  — максимальная энергия электронов и  $n$  — их концентрация. Поскольку, как нам кажется, вывод Паули сложен, мы воспроизведем его в другой форме, предложенной Я. И. Френкелем и приведенной в его статье 1928 г. «Элементарная теория магнитных и электрических свойств металлов при абсолютном нуле температуры»<sup>6</sup>. Название статьи призвано было подчеркнуть характер изложения представленного в ней материала. Вместе с тем в этой статье, по стилю напоминающей работу Ферми, получен ряд важных результатов; на некоторых из них мы остановимся позднее, а два — приведем сейчас.

Первый из них — это вычисление максимальной энергии электронов в металле. Исходные предпосылки: принцип Паули, равенство  $h^3$  объема элементарной ячейки фазового пространства и... формула для объема шара. Пусть в куске металла объемом  $V$  содержится  $N$  электронов. Тогда число занятых состояний (с учетом спина) равно  $N/2$ ; с другой стороны, оно, очевидно, равно

$$\frac{4\pi}{3} \rho_0^3 V / h^3 = N/2,$$

откуда

$$E_0 = \frac{\rho_0^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3}.$$

Так действительно элементарно просто получается выражение для максимальной энергии электронов и зависимость ее от их плотности.

В качестве следующего примера покажем (по-прежнему следуя за изложением автора), как просто Френкель вычисляет величину парамагнитной восприимчивости.

Минимальности энергии электронного газа в магнитном поле соответствовала бы ориентация их магнитных моментов по направлению поля. В пределах занятых «парных» ячеек такая перестройка осуществлена быть не может из-за запрета Паули. Вместе с тем «развод» электронной пары означал бы выигрыш энергии в  $2\mu H$ . Заселение каждого из верхних этажей «небоскреба энергетических уровней» сопряжено с очевидным проигрышем — энергия повышается на величину  $k\Delta\epsilon$  ( $k$  — номер уров-

ня, или этажа  $\Delta\epsilon$  — расстояние между уровнями). До каких пор менее оказывае очевидно, пока

$$2\mu H \geq 2S\Delta\epsilon,$$

где  $S$  — число «высших» электронов (в отсутствие магнетизма) в современном

ми. Отсюда найдем

же касается  $\Delta\epsilon$ , высота «энергетической лестницы»  $E_0/N$ , где значение определено. Магнитный момент  $M = \Sigma \mu$ , а парамагнитная восприимчивость  $\chi$  запишется так

$$\chi = \frac{M}{HV} =$$

в прекрасном изложении Паули (точный бог труда полагает считать  $\Delta\epsilon$ ).

С исторической точки зрения можно заметить, что вана важная работа, которую справился... рассматривать квантовую теорию важности этой работы Я. Г. Дорфмана, число немногих 1930 г., на котором магнетизма.

Следующим в изложении квантовой физики работы Зоммерфельда, полученные им на новую годовщину в сентябре 1927 был редкий по с из 70 его делегатов лауреатами Нобелевской премии, и еще семи, ли, предстояло и

Зоммерфельд и для определения водности и электрической в результате этого. Тогда же

<sup>7</sup> Dorfmann J. Kenntnis des Erscheinungen.

<sup>8</sup> Вонсовский (ин И. К., Михе Шур Я. С. Паули Дорфмана. — Успехи физ. 705.

<sup>9</sup> Sommerfeld J. Metalle und Gr. Phys., 1928, Bd 4, theorie der Metalle 1934, Bd 22, S. 49

<sup>6</sup> Frenkel J. Elementäre Theorie magnetischer und elektrischer Eigenschaften der Metalle beim absoluten Nullpunkt der Temperatur. — Z. Phys., 1928, Bd 49, S. 31.

и Паули распро-  
бета на случай га-  
или, можно ска-  
у Ферми к описа-  
длктива. Резуль-  
числение парамаг-  
электронного газа.  
расчетов он по-  
магнитной воспри-

Здесь  $M$  — маг-  
бъема  $V$  в поле  $H$ ,  
электрона,  $E_0$  — мак-  
онов и  $n$  — их кон-  
ак нам кажется,  
воспроизведем его  
енной Я. И. Френ-  
его статье 1928 г.  
гнитных и электри-  
при абсолютном  
вание статьи при-  
характер изложе-  
ей ма...чала. Вме-  
о ст... напомина-  
лучен ряд важных  
х из них мы оста-  
приведем сейчас.  
вычисление макси-  
нов в металле. Ис-  
нцип Паули, ра-  
тарной ячейки фа-  
формула для объ-  
металла объемом  
онов. Тогда число  
етом спина) равно  
но, очевидно, равно

ентарно просто по-  
ля, максимальной  
зисимость ее от их

о примера покажем  
изл...нием авто-  
ль вычисляет вели-  
сприимчивости.  
и электронного га-  
соответствовала бы  
их моментов по на-  
мелам занятых «пар-  
тройка осуществле-  
за запрета Паули.  
электронной пары  
вергии в  $2\mu H$ . За-  
мных этажей «небо-  
уровней» сопряжено  
ем — энергия повы-  
е ( $k$  — номер уров-

re Theorie magneti-  
igenschaften der Me-  
llpunkt der Tempera-  
49, S. 31.

ня, или этажа, отсчитываемого от  $N/2$ -го;  $\Delta\epsilon$  — расстояние между соседними уровнями). До каких пор такое переселение тем не менее оказывается выгодным? До тех пор, очевидно, пока выполняется неравенство:

$$2\mu H \geq 2S\Delta\epsilon,$$

где  $S$  — число уровней, занятых «разведенными» электронами над самым верхним (в отсутствие магнитного поля), т. е. говоря современным языком, над границей Ферми. Отсюда находится величина  $S = \frac{\mu H}{\Delta\epsilon}$ . Что

же касается  $\Delta\epsilon$ , то по порядку величины эта высота «энергетического этажа» равняется  $E_0/N$ , где значение  $E_0$  было только что определено. Магнитный момент образца равен  $M = S\mu$ , а парамагнитная восприимчивость  $\chi$  запишется так:

$$\chi = \frac{M}{HV} = \frac{S\mu}{HV} = \frac{\mu^2 H}{HV\Delta\epsilon} = \frac{\mu^2 N}{VE_0} = \frac{\mu^2 n}{E_0}$$

в прекрасном соответствии с формулой Паули (точный результат Паули без особого труда получается, если аккуратнее подчитать  $\Delta\epsilon$ ).

С исторической точки зрения существенно заметить, что еще в 1923 г. опубликована важная работа<sup>7</sup> по парамагнетизму, которую справедливо полагают возможным «...рассматривать, как одну из прелюдий квантовой теории металлов»<sup>8</sup>. Признанием важности этой (и последующих) работы Я. Г. Дорфмана было приглашение его в числе немногих на Сольвеевский конгресс 1930 г., на котором обсуждались проблемы магнетизма.

Следующим важным этапом на пути приложения квантовомеханических представлений к физике электронного газа явились работы Зоммерфельда и Френкеля, дополненные ими на съезде, созванном в столетнюю годовщину со дня смерти А. Вольты в сентябре 1927 г. в Комо (Италия). Это был редкий по составу участников конгресс: из 70 его делегатов 13 уже в 1927 г. были лауреатами Нобелевской премии по физике, и еще семи, в том числе Ферми и Паули, предстояло ими стать позднее.

Зоммерфельд применил статистику Ферми для определения коэффициентов теплопроводности и электропроводности и получил в результате этого закон Видемана — Франца. Тогда же<sup>9</sup> и позднее, он отмечал,

<sup>7</sup> *Dorfmann J.* Einige Bemerkungen zur Kenntnis des Mechanismus magnetischer Erscheinungen.— *Z. Phys.*, 1923, Bd 17, S. 98.

<sup>8</sup> *Вонсовский С. В., Капица П. Л., Кикоин И. К., Михеев Н. Н., Семенов Н. Н., Шур Я. С.* Памяти Якова Григорьевича Дорфмана.— *Успехи физ. наук*, 1975, т. 117, с. 705.

<sup>9</sup> *Sommerfeld A.* Die Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermistatistik.— *Z. Phys.*, 1928, Bd 47, S. 1, 45; *Zur Elektronentheorie der Metalle.*— *Naturwissenschaften*, 1934, Bd 22, S. 49.

что вопрос о температурной зависимости и вообще о более точном определении  $\bar{l}$  (средняя длина свободного пробега электронов.— *В. Ф.*) остается здесь, так же как у Друде, открытым<sup>10</sup>. Зоммерфельд определял  $\bar{l}$  из опытного значения для коэффициента электропроводности  $\sigma = e^2 \bar{l} n / 2m\bar{v}$ . Здесь  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\bar{l}$  — средняя длина свободного пробега электронов в металле,  $n$  — их концентрация,  $\bar{v}$  — средняя скорость. Он специально подчеркивает, что рассеяние электронов должно иметь волно-механический характер, т. е. трактоваться с позиций новой квантовой механики, иначе трудно понять получившееся значение ( $\approx 10^{-6}$  см), на два порядка превышающее межатомное расстояние в решетке.

На том же съезде с докладом «Новое развитие электронной теории металлов» выступил и Я. И. Френкель. В его докладе<sup>11</sup> было, в частности, в существенной степени реализовано цитированное выше положение Зоммерфельда, относившееся к определению длины свободного пробега электронов в металле. Идеи де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме, воплощенные французским ученым в знаменитую формулу, носящую его имя, Френкель приложил не к электронам, движущимся в вакууме, а к электронам в металле, трактуя это движение как распространение электронных волн. С подобной волновой точки зрения стала понятной «прозрачность» металлов для электронных волн, т. е. тот факт, что длина свободного пробега существенно превышает межатомные расстояния. Понятна стала и зависимость сопротивления металлов от температуры и примесей. Сопоставляя коэффициент рассеяния электронных волн  $\mu$  ( $I = I_0 e^{-\mu x}$ ) и клаузиусовское соотношение для длины свободного пробега  $l$ , Френкель записывает  $l = 1/\mu$ . Что касается величины  $\mu$ , то она была им найдена из решения уравнения Шредингера, в котором потенциальная энергия записывается в виде характерного «решеточного» потенциала. Стоит заметить, что этот подход в последние годы успешно используется для описания полупроводников с малой подвижностью<sup>12</sup>.

После того как с помощью квантовомеханических представлений было объяснено явление парамагнетизма, естественно, усилия ученых оказались направленными на построение теории ферромагнетизма.

<sup>10</sup> *Бете Г., Зоммерфельд А.* Электронная теория металлов. М.— Л., 1938.

<sup>11</sup> *Frenkel J.* Nouveaux développements de la théorie électronique de métaux.— *In: Atti Congresso Internazionale dei Fisici Como, Cap. IV.* Bologna, 1927, p. 66. См. также: *Френкель Я. И.* Собр. избр. трудов, т. II, с. 71.

<sup>12</sup> *Иоффе А. Ф., Регель А. Р.* Некристаллические, аморфные и жидкие полупроводники.— В кн.: *Иоффе А. Ф.* Избр. труды, т. II. Л., 1975, с. 411.

Напомним предысторию этих работ. В 1900-х годах Вейсом была построена феноменологическая теория ферромагнитных явлений, основанная на аналогии между процессами сжижения газов и переходом от ферромагнетизма (т. е. явления существования магнитного момента образца независимо от наличия внешнего магнитного поля) к парамагнетизму. Ван дер Ваальс учел силы притяжения между молекулами на больших расстояниях, существование которых приписывалось некоему внутреннему давлению. Вейс предположил, что в ферромагнетике имеется некоторое внутреннее магнитное поле, пропорциональное намагниченности ферромагнетика. Он отмечал, что определение величины этого поля на основании его феноменологических формул показывает, что оно не может сводиться к взаимодействию магнитному, а имеет какую-то другую природу, которую он, однако, не мог себе представить.

Внутреннее поле ферромагнетиков исследовал в 1920-е годы Я. Г. Дорфман, показавший, что оно имеет электрическое происхождение. Теоретическая природа поля Вейса была выяснена уже на основе квантовомеханических представлений об обменных силах. Соответствующие идеи были высказаны в уже упомянутой работе Френкеля в 1928 г. и Гейзенберга в том же году на страницах 49 тома «Zeitschrift für Physik»<sup>13</sup> (статья Френкеля получена 30 марта и опубликована в июньской тетради журнала, статья Гейзенберга — 20 мая и опубликована в июле); Гейзенберг подверг эту идею подробной математической разработке. Мы не будем останавливаться на этой хорошо известной трактовке явления, отметив, что приоритет Френкеля в установлении физической теории ферромагнетизма, исходящей из модели коллективизированных электронов, учитывается как в советских, так и в зарубежных монографиях. Модель Гейзенберга — это модель локализованных атомных магнитных моментов; наконец, укажем и на третью модель ферромагнетизма:  $s-d$  обменную модель Вонсовского и Шубина. Каждая из этих моделей имеет свою оптимальную область применений.

Чтобы охватить весь спектр магнитных явлений, понятых в 1926—1930 гг. в свете квантовомеханических идей, следует указать и на работу Л. Д. Ландау по диамагнетизму свободных электронов<sup>14</sup>. Ландау замечает, что в силу финитного характера движения свободных электронов металла во внешнем магнитном поле — по ларморовским окружностям в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, — это движение может быть проквантовано.

Выполняя это квантование, Ландау искусным приемом избегает необходимости решать уравнение Шредингера для такого орбитального движения, а показывает, что

его энергия совпадает с функцией Гамильтона для линейного осциллятора, для которого сразу же записываются хорошо известные собственные значения энергии. С учетом поступательного движения электрона они принимают вид:

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar l}{mc} H + \frac{p_z^2}{2m},$$

где  $p_z$  — импульс электрона в направлении магнитного поля  $H$ .

Уровни энергии, определяемые этой формулой, получили в литературе название уровней Ландау. В статье Ландау учитывается и влияние на выражение для  $E$  спина электронов, сводящегося к появлению дополнительного члена  $\pm \frac{e\hbar}{2mc} H$ .

Полученный результат Ландау используется для вычисления статистической суммы  $Z$  (или, точнее, свободной энергии  $F = -kT \ln Z$ ), выделяя зависимость этой функции от  $H$ . С применением термодинамической формулы  $M = -\frac{\partial F}{\partial H}$ , он находит магнитный мо-

мент свободных электронов  $M$ , оказавшийся равным, как хорошо известно, одной трети парамагнетизма Паули. С. Бруш<sup>15</sup> обратил внимание на то, что Френсис Биттер, известный своими экспериментальными исследованиями по магнетизму, в том же 1930 г. установил наличие диамагнетизма свободных электронов, основываясь на их волновой природе и используя статистику Ферми<sup>16</sup>.

Работа Ландау по диамагнетизму свободных электронов была выполнена в 1930 г., в конце его полугодовой командировки за границу, во время пребывания в Кембридже. Можно думать, что стимулом для ее проведения были обсуждения с П. Л. Капицей работ по изучению влияния сильных магнитных полей на проводимость некоторых металлов (в частности, висмута).

В сентябрьском номере Журнала Русского физико-химического общества увидела свет работа Я. И. Френкеля и М. П. Бронштейна «Квантование свободных электронов в магнитном поле», написанная в Ленинграде в мае 1930 г. и полученная редакцией 3 июля того же года<sup>17</sup>. В этой работе задача о квантовании свободных электронов в магнитном поле решается в трех последовательных приближениях. Сначала это делается в рамках боровской квантовой теории атомов. Записывается соотношение о равенстве центробежной и лоренцевой

сил, определяющих электрон:

$$mv^2/r = evH/c.$$

После этого авторы вводят квантование орбиты в виде цилиндрической орбиты для квантования циркулярное с учетом:

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv}$$

Отсюда сразу по радиусу орбиты  $r$

$$r = \left( n \frac{hc}{2\pi eH} \right)^{1/2}$$

и чего определяется

$$E = \frac{1}{2} mv^2 =$$

Отсюда и делается квантуется.

Затем с помощью ступенчатого природу решается в цилиндрических щей цилиндрической тате чего оказывае

$$E = \frac{e\hbar}{2\pi mc} H$$

(мы опустили здесь поступательному число. Итак, в выражении для «уровня Ландау незав

Что касается в штейна, сделанный де всего на основании реходов они установило  $n$  меняется на излучение, соответствующим, характеризука  $\lambda \approx 10^4/H(\text{Гс})$ . Не говорят о возможности проверки этого нанского поглощения надо полагать, что то обстоятельство электромагнитное нуть внутри металупроводников еи ствующая возмож Явление циклот предсказано в ра и Дингля (1952 г ковскими физика ность существова са и в металла глубину которой нитные волны, ит междуток между тогда как больш

<sup>15</sup> Brush S. Francis Bitter and «Landau Diamagnetism». — J. Stat. Phys., 1970, 2, p. 195.

<sup>16</sup> Bitter F. On the Diamagnetism of Electrons in Metals. — Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1930, 16, p. 95.

<sup>17</sup> Френкель Я. И., Бронштейн М. П. Квантование свободных орбит электронов в магнитном поле. — ЖРФХО, часть физ., 1930, 17, с. 485.

<sup>13</sup> Heisenberg W. Zur Theorie des Ferromagnetismus. — Z. Phys., 1928, Bd 49, S. 619.

<sup>14</sup> Landau L. Diamagnetismus der Metalle. — Z. Phys., 1930, Bd 64, S. 629.

<sup>18</sup> См.: Лифшиц Г. Л., Питерс М. И. Элементы физики, М., 1971.



сил, определяющих «циклотронную» орбиту электрона:

$$mv^2/r = e v H / c.$$

После этого авторы применяют к этой круговой орбите видоизмененный первый боровский квантовый постулат, или правило для квантования круговых орбит, модифицированное с учетом соотношения де Бройля:

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv}.$$

Отсюда сразу получаются выражения для радиуса орбиты  $r$  и скорости электрона  $v$ :

$$r = \left( n \frac{hc}{2\pi e H} \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{m} \left( n \frac{e h H}{2\pi c} \right)^{1/2} \quad \text{после}$$

чего определяется и выражение для энергии:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = n \frac{e h}{4\pi m c} H.$$

Отсюда и делается вывод о том, что энергия квантуется.

Затем с помощью органически соответствующего природе задачи метода последовательно решается уравнение Шредингера в цилиндрических координатах (отвечающих цилиндрической симметрии), в результате чего оказывается:

$$E = \frac{e h}{2\pi m c} H \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

(мы опустили здесь член, соответствующий поступательному движению);  $n$  — целое число. Итак, в явном виде имеем здесь выражение для «уровней Ландау», полученное Ландау независимо.

Что касается выводов Френкеля и Бронштейна, сделанных ими в 1930 г., то прежде всего на основе правил отбора для переходов они установили, что квантовое число  $n$  меняется на 1. Отсюда следовало, что излучение, соответствующее таким переходам, характеризуется длиной волны порядка  $\lambda \approx 10^4 / H_{(гс)}$ . К сожалению, они ничего не говорят о возможности экспериментальной проверки этого вывода за счет резонансного поглощения. Это объясняется, надо полагать, тем, что авторы учитывали то обстоятельство, что высокочастотное электромагнитное поле не может проникнуть внутрь металла. Вместе с тем эра полупроводников еще не началась, и соответствующая возможность учтена ими не была. Явление циклотронного резонанса было предсказано в работах Дорфмана (1951 г.) и Дингля (1952 г.)<sup>18</sup>, а в 1950-х годах харьковскими физиками была показана возможность существования аналогичного резонанса и в металлах. При этом скин-слой, на глубину которого проникают электромагнитные волны, играет ту же роль, что и промежуток между дуантами в циклотроне, тогда как большую часть траектории элек-

трон движется, не взаимодействуя с высокочастотным полем, а в постоянном магнитном поле.

Добавим, наконец, что в работе Френкеля и Бронштейна дается и выражение для энергии электрона, получаемое на основе решения релятивистского квантовомеханического уравнения Дирака.

Существенно отметить, что квантование орбитального движения электронов в магнитном поле было впервые проведено не Френкелем и Бронштейном, и не Ландау, а И. Раби, на работу которого<sup>19</sup> Френкель и Бронштейн ссылаются. В 1928 г., т. е. вскоре после появления уравнения Дирака, Раби рассмотрел указанную задачу и получил для кинетической энергии электрона те же выражения, что и Френкель и Бронштейн, а также Ландау в 1930 г. Это было, по-видимому, одно из первых приложений общего уравнения Дирака к конкретным задачам. Никаких выводов из этой корректно решенной задачи Раби, однако, не сделал.

История написания статьи Френкеля и Бронштейна представляется нам следующим образом. В 1930 г. Бронштейн пришел в Физико-технический институт в качестве аспиранта Френкеля. Френкель предложил ему разобрать статью Раби. В самом начале появившейся в результате совместной статьи советских физиков есть примечательная фраза: «Для того, чтобы убедиться, что дискретный ряд уровней энергии свободных электронов не является одним из парадоксов, связанных с уравнениями Дирака, а соответствует реальному физическому явлению, хотя еще и не обнаруженному экспериментаторами, полезно показать, что такое квантование возникает во всякой форме квантовой теории — как в «полуквантовой» механике Бора, так и в волновой механике Шредингера и Дирака».

Эта фраза хорошо передает характер той эпохи: парадоксальный вывод о существовании «отрицательных электронов» Дирака не был еще подтвержден открытием позитрона (Андерсон, 1932 г.), и к некоторым выводам релятивистской теории относились как к по меньшей мере парадоксальным.

Почему работа Френкеля и Бронштейна осталась мало известной? Дело здесь, вероятно, в том, что вышла она в предпоследнем номере ЖРФХО. (После 6-го выпуска за 1930 г. этот журнал перестал выходить под прежним названием; с 1931 г. выпускается «Журнал экспериментальной и теоретической физики»). В те годы советские физики публиковали свои наиболее важные работы одновременно на русском и немецком языках, — в журнале «Zeitschrift für Physik» примерно четвертую часть объема в 1925—1930 гг. составляли их статьи. Работа Френкеля и Бронштейна, как указывалось, была окончена в мае 1930 г., накануне времени летних отпусков. А в начале сентября Френкель в качестве гостевого (приглашенного) профессора Миннеаполис-

<sup>18</sup> См.: Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М., 1971.

<sup>19</sup> Rabi I. I. Das freie Elektron im homogenen Magnetfeld nach der Diracschen Theorie.— Z. Phys., 1928, Bd 49, S. 507.

ского университета уехал в годичную командировку в США. Видимо, уже по дороге в Германию или в США по приезде, он увидел статью Ландау в свежем номере «Zeitschrift für Physik». И, ознакомившись с ней, решил не переводить для этого журнала свою совместную с Бронштейном работу.

Выше была рассмотрена лишь часть работ, посвященных проблеме свободных электронов в металлах. За недостатком места мы не упомянули о близких по проблематике работах Блоха по теории движения электронов в кристаллической решетке, цикле статей Пайерлса и А. Вильсона — все они нашли наиболее полное завершение в

знаменитых исследованиях Л. Бриллюэна<sup>20</sup>. Чрезвычайно важной была работа И. Е. Тамма, законченная им в 1929 г.<sup>21</sup>, в которой в процессе построения квантовой механической теории комбинационного рассеяния было введено понятие о «кванте звука» — фононе, первой в длинном ряду квазичастиц. Выпали из рассмотрения и первые исследования по приложению квантовой механики и статистики к теории строения звезд, выполненные Дарвиним и Френкелем (роль последнего в становлении и развитии физики звезд была недавно подчеркнута в статье Я. Б. Зельдовича<sup>22</sup> и его соавторов).

В. Я. Френкель (Ленинград)