Akivis, M.A. (Moskva)

Invariante Konstruktion der Geometrie einer Hyperfläche in einem konformen Raum

Deutsche Vollübersetzung aus:
Matematičeskij sbornik, Moskva, 31 (73) (1952), Nr. 1, S.43–75.

Russ.:

Инвариантное построение геометрии гиперпроверхности конформного пространства

Invariantnoe postroenie geometrii giperpoverchnosti konformnogo prostranstva

A partly expository paper on conformal differential geometry of a hypersurface. The first three sections are introductory and are devoted to multispherical coordinate representation and the study of the subgroups of the conformal group leaving the surface element invariant. In the next four sections is given an invariant construction of the theory by means of the stationary subgroups associated with the hypersurface. By this means it is possible to introduce conformal tensors g_{ij}, a_{ij}, c_{ij} and $B_k = b_{ijk}a^{ij}$ which determine the hypersurface to within a conformal mapping. The remainder of the paper is devoted to some special problems dealing with the order of contact of certain cyclides with the hypersurface, particularly for the critical cases of the enveloping space being of 3 and of 4 dimensions.
(M. S. Knebelman, Math. Reviews, 14, S.319 (1953))

Invariante Konstruktion der Geometrie einer Hyperfläche in einem konformen Raum

M. A. Akivis (Moskau)

Die Konstruktion der Flächengeometrie im konformen Raum, die nicht von der Wahl des beweglichen Bezugssystems abhängig ist, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der konformen Differentialgeometrie. In den Arbeiten von Blaschke [7], Takasu [8], Thomsen [9], Vessiot [10] und anderen zur konformen Differentialgeometrie und speziell in der Flächentheorie wurden nur einzelne Aufgaben über konforme Flächengeometrie gestellt und auch gelöst. Die Flächentheorie wurde von den Verfassern nur für denjenigen Einzelfall aufgestellt, bei dem die Fläche auf ein spezielles Netz bezogen ist (hauptsächlich das Netz der Krümmungslinien) und unter spezieller Parametrisierung der Fläche.

Einen großen Schritt vollbrachte A. P. Norden ([4],[5]) in der Entwicklung der konformen Differentialgeometrie von Flächen. Bei seiner Untersuchung der parametrisierten Flächen eines konformen Raumes nahm er die Tensormethoden zu Hilfe. Die Fläche wird in einem beliebigen Netz untersucht, nur ihre Parametrisierung ist festgelegt. Die dabei ermittelten Ergebnisse aus der konformen Flächentheorie stehen jedoch im allgemeinen nicht nur mit der Fläche selbst in Zusammenhang, sondern auch mit ihrer Parametrisierung, und folglich sind sie nicht invariant hinsichtlich der Wahl des beweglichen Koordinatensystems.

Von G. F. Laptev wurde in den Arbeiten [1] – [3] eine neue invariante Methode für differentialgeometrische Untersuchungen von eingebetteten Mannigfaltigkeiten entwickelt. Diese Methode kann auf die Untersuchungen von Mannigfaltigkeiten in differentialgeometrischen Räumen mit beliebiger Struktur angewandt werden. Sie stützt sich auf die Berechnung der äußeren Differentialformen und die allgemeine Theorie über die Darstellungen von endlichen Lie–Gruppen. Ihr liegt das allgemeine Prinzip zugrunde, die differentialgeometrische Untersuchung einer Mannigfaltigkeit auf die Betrachtung von Feldern gewisser geometrischer Objekte zu reduzieren.

In unserer Arbeit wird die Methode von G. F. Laptev auf die Untersuchung der Hyperflächengeometrie eines konformen Raumes angewandt. Mit dieser Methode konnten wir die Grundlagen der invarianten Hyperflächentheorie aufstellen und einige neue geometrische Ergebnisse erzielen.

Die ersten drei Abschnitte unserer Arbeit sind einleitender Art. Sie enthalten im wesentlichen Hilfsmaterialien, auf die wir im weiteren Verlauf zurückgreifen. Hier im ersten Absatz werden vor allem die Grundbegriffe der Geometrie des n–dimensionalen konformen Raumes C_n in der Form, wie wir ihn später benutzen, dargelegt. Danach wird im zweiten Absatz eine Untergruppe der Gruppe der konformen Transformationen hergeleitet, die ein ebenes Element des Raumes invariant läßt; und im dritten

Absatz werden die verschiedenen Darstellungen dieser Untergruppe mit den damit verbundenen geometrischen Objekten gegeben.

Die Absätze 4–8 umfassen das wesentliche unserer Arbeit. Hierin werden die Grundlagen der Hyperflächentheorie des konformen Raumes invariant konstruiert. Im ersten Teil wird das mit der Hyperfläche (S) des konformen Raumes C_n zusammenhängende Feld der stationären Untergruppen untersucht und der Begriff des differentialgeometrischen Objekts auf dieser Hyperfläche hergeleitet.

Im 5. Absatz wird die Folge der fundamentalen differentialgeometrischen Objekte der Hyperfläche (S) konstruiert. Im 6. Abschnitt werden mittels der fundamentalen geometrischen Objekte die einfacheren differentialgeometrischen Objekte kostruiert, unter denen die Tensoren a_{ij}, b_{ijk}, c_{ij} besonders wichtig sind; sie sind entsprechend mit den Umgebungen zweiter, dritter und vierter Ordnung auf der Hyperfläche verbunden.

Im 7. Absatz behandeln wir die einfachsten geometrischen Gebilde, verbunden mit den im vorhergehenden Absatz hergeleiteten differentialgeometrischen Objekten. Dies sind in erster Linie die Schar der zentralen Hypersphären der Hyperfläche (S) und die Hyperfläche (S'), die der zweite Mantel der Einhüllenden der Schar der zentralen Hypersphären ist. In diesem Abschnitt wird auch die spezielle nur von der Wahl des Netzes auf der Hyperfläche und von der Normierung ihrer Punkte abhängige Beinschar konstruiert. Mit dieser Beinschar läßt sich auf der Hyperfläche die konforminvariante Differentiation herleiten.

Der darauffolgende Absatz enthält den Beweis für das Fundamentaltheorem der Hyperflächentheorie, analog zum klassischen Theorem über die Vorgabe einer Fläche im euklidischen Raum durch ihre erste und zweite quadratische Form. Gerade dadurch wird bewiesen, daß der die Winkelmetrik auf der Fläche bestimmende Tensor g_{ij} und die Tensoren a_{ij}, c_{ij} und $B_k = b_{ijk}a^{ij}$ mit a^{ij} als der zum Tensor a_{ij} inversen Tensor bis auf eine konforme Transformation genau eine Hyperfläche im Raum C_n bestimmen.

In den Absätzen 9–12 wird der aufgestellte analytische Apparat zur Erörterung einiger spezieller Fragen über die Hyperflächengeometrie des konformen Raumes angewandt. So wird die Hyperfläche im 9. Abschnitt mit dem entarteten Tensor a_{ij} behandelt. Wenn der Rang m des Tensors a_{ij} kleiner als $n-2$ ist, dann zeigt sich, daß die Schar der zentralen Hypersphären der Hyperfläche nur von m Parametern abhängt, die Hyperfläche selbst durch eine m-parametrige Schar von $(n-1-m)$-dimensionalen Sphären gebildet wird; wobei die Hyperfläche längs einer jeden $(n-1-m)$-dimensionalen sphärischen Erzeugenden eine konstante zentrale Hypersphäre besitzt. Ist jedoch $m = n-2$, dann hängt die Schar der zentralen Hypersphären der untersuchten Hyperfläche im allgemeinen von $n-1$ Parametern ab, aber beide Mäntel der Einhüllenden dieser Hypersphärenschar sind mit der Hyperfläche (S) kongruent.

Die Absätze 10 und 11 befassen sich mit Fragen, die mit dem Tensor b_{ijk} zusammenhängen. Im ersten Teil werden die Zykliden behandelt, deren Berührordnung mit der Hyperfläche groß ist. Es zeigt sich, daß im allgemeinen keine Zyklide vorkommt, die mit der Hyperfläche eine Berührung dritter Ordnung besitzt; es gibt nur

Zykliden, die mit ihr eine Berührung zweiter Ordnung haben. Hat jedoch der Tensor b_{ijk} der Hyperfläche eine spezielle Form, dann gibt es auch Zykliden, die mit dieser Hyperfläche eine Berührung dritter Ordnung besitzen. Da sich zeigt, daß der Tensor b_{ijk} für $n = 3$ immer die ausgeprägte Spezialform besitzt, so läßt eine beliebige Fläche des dreidimensionalen konformen Raumes in jedem ihrer Punkte Zykliden zu, die mit ihr in diesem Punkt eine Berührung dritter Ordnung besitzen.

Und schließlich setzen wir uns im 12. Absatz mit Fragen auseinander, die mit dem Tensor c_{ij} zusammenhängen. Hier werden die verschiedenen Einzelfälle der Struktur dieses Tensors behandelt, die zu isothermen Hyperflächen, zu Hyperflächen, bei denen der Mantel der Einhüllenden der Schar der zentralen Hyperflächen konform zugeordnet ist, und zu konformminimalen Hyperflächen führen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit können ohne große Schwierigkeiten auf die Hyperflächengeometrie pseudokonformer Räume ${}^lC_n$ übertragen werden. Bei $n = 4$ und $l = 2$ ergibt dies unmittelbar die Theorie der Geradenkomplexe des dreidimensionalen projektiven Raumes, bei $n = 4$ und $l = 1$ die Theorie der Sphärenkomplexe in der Geometrie der Lie–Sphären, usw.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit sind in der Kurzmitteilung [11] dargelegt.

§1: Allgemeine Bemerkungen zum Bein des konformen Raumes, zur stationären Untergruppe eines ebenen Elememts und ihrer Darstellungen

1. Wir führen polysphärische Koordinaten im n–dimensionalen euklidischen Raum ein. Mit den p o l y s p h ä r i s c h e n K o o r d i n a t e n d e r H y p e r s p h ä r e S, deren Gleichung im kartesischen Koordinatensystem die Gestalt

$$s^0 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} s^i x^i - 2s^{n+1} = 0$$

hat, bezeichnen wir das Zahlensystem s^0, s^i, s^{n+1}. Diese Koordinaten sind offensichtlich genau bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt. Die Raumpunkte identifizieren wir mit den Hypersphären mit Radius 0. Man kann sich leicht überzeugen, daß die polysphärischen Koordinaten der Punkte die Gleichung

$$(S, S) = \sum_{i=1}^{n} (s^i)^2 + 2s^0 s^{n+1} = 0 \tag{1}$$

erfüllen müssen. Der Winkel zwischen zwei Hypersphären P und Q mit nichtverschwindendem Radius, deren polysphärische Koordinaten die Zahlen $p^0, p^1, \dots, p^{n+1}$

und $q^0, q^1, \ldots, q^{n+1}$ sind, wird bestimmt durch die Relation

$$\cos^2\varphi = \frac{(PQ)^2}{(PP)(QQ)} ,$$

wobei mit der Bilinearform (PQ) die polare quadratische Form von (1) bezeichnet wird:

$$(PQ) = \sum_{i=1}^{n} p^i q^i + p^0 q^{n+1} + p^{n+1} q^0 \quad .$$

Wir nennen den Ausdruck (PQ) das Skalarprodukt der Hypersphären P und Q. Dieser Ausdruck ist auch dann sinnvoll, wenn eine oder alle beide Hypersphären Punkte sind. Die Gleichung $(PX) = 0$ erfüllen alle zur Hypersphäre P gehörenden Punkte X.

Lineare Transformationen der polysphärischen Koordinaten, die die Gleichung (1) invariant lassen, führen die Punkte in Punkte und die Hypersphären in Hypersphären über. Diese Transformationen lassen offensichtlich den Ausdruck für $\cos^2\varphi$ unverändert, d. h. sie behalten den Winkel zwischen den Hypersphären bei. Deshalb nennen wir die untersuchten Transformationen konforme Raumtransformationen. Es ist leicht zu sehen, daß diese Transformationen eine Gruppe bilden, die Gruppe $\mathfrak{C}_n$ der konformen Raumtransformationen. Der Raum, in dem diese Gruppe Strukturgruppe ist, nennen wir den konformen Raum C_n.

Bemerkt sei, daß die analytische Bestimmung der Gruppe der konformen Transformationen völlig äquivalent ist mit der Bestimmung der Gruppe der projektiv-metrischen Transformationen im $(n+1)-$ dimensionalen projektiven Raum, die eine Hyperfläche zweiter Ordnung $(QQ) = 0$ in sich überführen.

Nehmen wir als Beispiel eines Beins des konformen Raumes zwei Punkte A_0 und A_{n+1} sowie n beliebige durch sie verlaufende, linear unabhängige Hypersphären A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Offensichtlich ist in diesem Fall

$$(A_0A_0) = (A_{n+1}A_{n+1}) = (A_0A_i) = (A_{n+1}A_i) = 0 \ . \qquad (2_1)$$

Weiter bezeichnen wir

$$(A_iA_j) = g_{ij} \qquad (2_2)$$

und wählen die Normierung der Punkte A_0 und A_{n+1} so, daß

$$(A_0A_{n+1}) = 1 \ . \qquad (2_3)$$

Eine beliebige Hypersphäre S kann man als Linearkombination der Beinelemente darstellen, da sie linear unabhängig sind.

Wir nehmen das Bein $\{A'_0, A'_i, A'_{n+1}\}$, das dem ursprünglichen Bein $\{A_0, A_i, A_{n+1}\}$ unendlich nahe ist und zerlegen es bezüglich dem ursprüglichen Bein in seine Elemente. Die wichtigsten Teile dieser Zerlegung haben die Gestalt

$$dA_\xi = \omega_\xi^\eta A_\eta \qquad (\xi, \eta = 0, 1, \ldots, n+1), \qquad (3)$$

wobei ω_ξ^η die Differentialformen der Parameter der Gruppe $\mathfrak{C}_n$ sind. Dabei ist die Zahl der linear unabhängigen Formen ω_ξ^η gerade gleich der Zahl der Parameter der Gruppe. Wir differenzieren die Relation (2) und erhalten alle linearen Abhängigkeiten, die die Formen ω_ξ^η erfüllen müssen.

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0 \tag{4_1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \omega_i^0 + g_{ij}\omega_{n+1}^j = 0, \qquad \omega_i^{n+1} + g_{ij}\omega_0^j = 0, \\ dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k, \end{array}\right\} \quad (i,j,k = 1,2,\dots,n). \tag{4_2}$$

Falls alle Formen ω_ξ^η in den Gleichungen (3) linear unabhängig sind, sind diese auch die Gleichungen infinitesimaler Transformation der Beine im $(n+1)$–dimensionalen projektiven Raum. Deshalb dürfen wir annehmen, daß die Gleichungen (4) die Gruppe $\mathfrak{C}_n$ der konformen Transformationen des n–dimensionalen Raumes aus der Gruppe der projektiven Transformationen des $(n+1)$–dimensionalen Raumes auszeichnen.

Wir benutzen die Strukturgleichungen der Gruppe der projektiven Transformationen und die Relationen (4) und ermitteln die Strukturgleichungen der Gruppe der konformen Transformationen $\mathfrak{C}_n$:

$$\left.\begin{array}{rcl} D\omega_0^0 &=& [\omega_0^i\omega_i^0]\,, \\ D\omega_0^i &=& [\omega_0^0\omega_0^i] + [\omega_0^j\omega_j^i]\,, \\ D\omega_i^j &=& [\omega_i^0\omega_0^j] + [\omega_i^k\omega_k^j] + [\omega_i^{n+1}\omega_{n+1}^j]\,, \\ D\omega_i^0 &=& [\omega_i^0\omega_0^0] + [\omega_i^j\omega_j^0]\,. \end{array}\right\} \tag{5}$$

2. A sei ein beliebiger Punkt des Raumes und S eine durch ihn verlaufende Hypersphäre mit $(SS) \neq 0$. Alle Hypersphären des Büschels $\lambda A + S$ verlaufen durch den Punkt A und berühren sich gegenseitig in diesem Punkt. Wir untersuchen die Untergruppe der Gruppe der konformen Transformationen des n–dimensionalen Raumes, die den Punkt A invariant läßt und jede Hypersphäre des Büschels $\lambda A + S$ in eine Hypersphäre desselben Büschels umwandelt. Diese Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{C}_n$ ist die stationäre Untergruppe des ebenen Elements, das durch das Sphärenbüschel $\lambda A + S$ bestimmt wird, wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{C}_n^0$. Die Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ ist von grundlegender Bedeutung für alle weiteren Ausführungen.

Wir verlagern den Punkt A_0 des allgemeinen konformen Beins in den Punkt A und machen seine Hypersphäre A_n mit einer beliebigen Hypersphäre des invarianten Büschels $\lambda A + S$ kongruent. Da $(SS) \neq 0$, kann die Sphäre A_n durch die Bedingung

$$(A_nA_n) = g_{nn} = 1 \tag{6_1}$$

normiert werden. Weil $(A_nA_n) \neq 0$ ist, gibt es $n-1$ linear unabhängige Hypersphären, die durch den Punkt A_0 verlaufen und orthogonal zur Hypersphäre A_n sind, wobei keine von ihnen mit A_n zusammenfällt. Diese Hypersphären nehmen wir als die

Hypersphären $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ des Beins. Dann gilt

$$(A_i A_n) = g_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \tag{6_2}$$

Dabei sei die Matrix der Skalarprodukte

$$(A_i A_j) = g_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{6_3}$$

nicht entartet und die mit ihr verknüpfte quadratische Form positiv definit.

Eine beliebige Transformation der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ wandelt das konstruierte Bein in ein Bein mit denselben Eigenschaften um. Wir nennen dieses Bein allgemeines Bein der stationären Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$. Mit Hilfe der Relation (6) kann man Gleichung (4_2) in diesem Bein folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{array}{c}
\omega_i^0 + g_{ij}\omega_{n+1}^j = 0,\ \omega_n^0 + \omega_{n+1}^n = 0, \\
\omega_i^{n+1} + g_{ij}\omega_0^j = 0, \omega_n^{n+1} + \omega_0^n = 0, \\
dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k, \\
\omega_i^n + g_{ij}\omega_n^j = 0,\ \omega_n^n = 0,
\end{array}\right\} \tag{$4_2'$}$$

mit i, j und k hier und im folgenden für die Werte $1, 2, \ldots, n-1$.

Weil der Punkt A_0 bei den Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ fest bleibt und die Hypersphäre A_n lediglich in eine Hypersphäre der Gestalt $\lambda A_0 + A_n$ übergehen kann, ist

$$\delta A_0 = \omega_0^0 A_0\ , \quad \delta A_n = \omega_n^0 A_0,$$

wobei mit dem Buchstaben δ die Differentiation nach den Parametern der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ bezeichnet wird. Folglich werden auf der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ die Gleichungen

$$\omega_0^n = 0\,,\ \omega_0^i = 0\,,\ \omega_n^i = 0$$

erfüllt.

Man kann leicht erkennen, daß diese Gleichungen auch umgekehrt in der Gruppe $\mathfrak{C}_n$ eine Untergruppe mit den oben genannten Eigenschaften bestimmt, dies ist die Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$. Wir bezeichnen mit π_ξ^η den Wert der Form ω_ξ^η auf der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$.

Die Matrix der Komponenten der Infinitesimalverschiebung des Beins der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ bekommt bei diesen Bezeichnungen die Gestalt

$$\|\pi_\xi^\eta\| = \left\|\begin{array}{cccc}
\pi_0^0 & 0 & 0 & 0 \\
\pi_i^0 & \pi_i^j & 0 & 0 \\
\pi_n^0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g^{ij}\pi_j^0 & -\pi_n^0 & -\pi_0^0
\end{array}\right\|\,; \tag{7_1}$$

dabei sind die Formen π_i^j durch das Relationensystem

$$\delta g_{ij} = g_{ik}\pi_j^k + g_{kj}\pi_i^k \tag{7_2}$$

verknüpft.

3. Wir untersuchen die Darstellung der stationären Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ im Raum der Variablen x^I $(I = 1, 2, \ldots, N)$. Diese Darstellung läßt sich völlig durch das vollständig integrierbare Pfaffsche Gleichungssystem

$$\delta x^I + \xi_A^I(x)\pi^A = 0 \tag{8}$$

bestimmen, wobei π^A nacheinander die Werte aller Elemente der Matrix (7_1) annimmt. Das System der Größen x^I, das das Geichungsystem (8) erfüllt, nennen wir g e o m e t r i s c h e s O b j e k t d e r s t a t i o n ä r e n U n t e r g r u p p e.

Die das geometrische Objekt bestimmende Grundbedingung ist seine Invarianz gegenüber der Wahl des zulässigen Koordinatensystems, in unserem Fall gegenüber der Wahl des allgemeinen Beins der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$. Diese Bedingung ist auch im wesentlichen im Gleichungssystem (8) enthalten.

Die Darstellung der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ im Raum der Variablen x^I nennen wir die E i n h ü l l e n d e dieser Untergruppe, wenn die Differentialformen π^A, die die Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ bestimmen, als Differentialformen der Variablen x^I ausgedrückt werden können, d. h. falls die entsprechenden Gleichungen von (8) bezüglich der Formen π^A gelöst werden können.

Wir betrachten einige Beispiele für Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$, welche uns im folgenden weiterhelfen.

Wir konzentrieren uns vor allem auf die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der Punkte des Raumes C_n. Den beliebigen Punkt X des Raumes stellen wir als Linearkombination der Elemente des allgemeinen Beins der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ dar:

$$X = x^0 A_0 + x^i A_i + x^n A_n + x^{n+1} A_{n+1}\,.$$

Die Koordinaten des Punktes X müssen die Relation (1) erfüllen, die im untersuchten Bein die Gestalt

$$(XX) = 2x^0 x^{n+1} + g_{ij} x^i x^j + (x^n)^2 = 0 \tag{1'}$$

erhält. Wir schreiben nun die Invarianzbedingung des Punktes X bei Transformation des Beins der stationären Untergruppe an. Da dieser Punkt bei einer solchen Transformation nur mit einem gewissen Faktor multipliziert werden kann, hat seine Invarianzbedingung die Gestalt $\delta X = \vartheta X$. Hieraus erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\delta x^0 &= -x^0(\pi_0^0 - \vartheta) - x^i \pi_i^0 - x^n \pi_n^0\,,\\
\delta x^i &= -x^j(\pi_j^i - \delta_j^i \vartheta) - x^{n+1}\pi_{n+1}^i\,,\\
\delta x^n &= x^n \vartheta + x^{n+1}\pi_n^0\,,\\
\delta x^{n+1} &= x^{n+1}(\vartheta + \pi_0^0)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei δ_j^i das Kronecker–Symbol ist. Da die Koordinaten des Punktes X die Gleichung $(1')$ erfüllen müssen und die quadratische Form $g_{ij}x^i x^j + (x^n)^2$ positiv definit ist, kann die Größe x^{n+1} nicht gleich 0 sein. Deshalb können wir den Punkt X durch die Bedingung $x^{n+1} = 1$ normieren. In diesem Fall liefert uns die letzte Gleichung des

Systems (9) den Wert der Differentialform ϑ : $\vartheta = -\pi_0^0$, und die übrigen Gleichungen des Systems haben die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \delta x^0 &= -2x^0\pi_0^0 - x^i\pi_i^0 - x^n\pi_n^0 \,, \\ \delta x^i &= -x^j(\pi_j^i + \delta_j^i\pi_0^0) - \pi_{n+1}^i \,, \\ \delta x^n &= -x^n\pi_0^0 + \pi_n^0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Die erste dieser Gleichungen ist mittels Gleichung (1′) und den übrigen Gleichungen des Systems identisch erfüllt. Somit wird die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ im Punktraum C_n bestimmt durch die folgenden n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta x^i &= -x^j(\pi_j^i + \delta_j^i\pi_0^0) - \pi_{n+1}^i \,, \\ \delta x^n &= -x^n\pi_0^0 + \pi_n^0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{9''}$$

Wir untersuchen nun die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in verschiedenen Untermengen der Hypersphärenmenge des Raumes C_n. Bezeichnen wir mit den Buchstaben x^0, x^i, x^n und x^{n+1} die Zerlegungskoeffizienten einer beliebigen Hypersphäre X bezüglich den Elementen des Beins der stationären Gruppe und setzen wir die Invarianz dieser Hypersphäre bei Transformationen des Beins voraus, dann erhalten wir wiederum das Gleichungssystem (9). Wir untersuchen zuerst alle Hypersphären des Raumes, die nicht durch den Punkt A_0 verlaufen. Bei diesen Hypersphären ist $x^{n+1} \neq 0$ und ihre Normierung ist durch die Bedingung $x^{n+1} = 1$ möglich. Wir benutzen diese Bedingung und erhalten aus dem Gleichungssystem (9) das Gleichungssystem (9′), das die Koordinaten der invarianten nicht durch den Punkt A_0 verlaufenden Hypersphäre erfüllen. Deshalb bestimmt das Gleichungssystem (9′) die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge aller Hypersphären des Raumes C_n, die nicht durch den Punkt A_0 verlaufen.

Wenden wir uns nun den durch den Punkt A_0 verlaufenden Hypersphären zu. Bei diesen Hypersphären ist $x^{n+1} = 0$ und die Invarianzgleichungen (9) erhalten die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \delta x^0 &= -x^0(\pi_0^0 - \vartheta) - x^i\pi_i^0 - x^n\pi_n^0 \,, \\ \delta x^i &= -x^j(\pi_j^i - \delta_j^i\vartheta) \,, \\ \delta x^n &= x^n\vartheta \,. \end{aligned}\right\} \tag{9'''}$$

Wir untersuchen zuerst die Hypersphären, bei denen $x^n \neq 0$ ist. Dies sind die Hypersphären, die zu den Hypersphären des Büschels $\lambda A_0 + A_n$ nicht senkrecht sind. Normieren wir solche Hypersphären durch die Bedingung $x^n = 1$, dann wird die Differentialform ϑ zu 0 und die Gleichungen (9‴) bekommen die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \delta x^0 &= -x^0\pi_0^0 - x^i\pi_i^0 - \pi_n^0 \,, \\ \delta x^i &= -x^j\pi_j^i \,. \end{aligned}\right\} \tag{9''''}$$

Die Gleichungen bestimmen die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der durch den Punkt A_0 verlaufenden und nicht senkrecht auf den Hypersphären des Büschels $\lambda A_0 + A_n$ stehenden Hypersphären.

Nehmen wir in Gleichung (9'''') insbesondere $x^i = 0$ an, dann erhalten wir die einzige Gleichung

$$\delta x^0 \;=\; -x^0\pi_0^0 - \pi_n^0 \,, \tag{9'''''}$$

die die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ im Büschel der Hypersphären $\lambda A_0 + A_n$ bestimmt.

Schließlich erfüllt die Menge der zu den Sphären des Büschels $\lambda A_0 + A_n$ senkrechten Hypersphären die Bedingung $x^n = 0$ daraus folgt, daß die Gleichungen (9''') nach Normierung der Hypersphäre X durch die Bedingung $x^0 = 1$ zum Gleichungssystem

$$\delta x^i = -x^j(\pi_j^i - \delta_j^i\pi_0^0) + x^i x^j \pi_j^0$$

führen, das die Darstellung der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der zu den Sphären des Buschels $\lambda A_0 + A_n$ senkrechten Hypersphären bestimmt.

Wir untersuchen desweiteren die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der Zykliden des konformen Raumes. Bekanntlich nennt man eine Hyperfläche, deren Gleichung in polysphärischen Koordinaten die Gestalt

$$P(XX) = p_{\xi\eta}x^\xi x^\eta = 0 \quad (\xi, \eta = 0, 1, \ldots, n+1) \tag{10}$$

hat, eine Z y k l i d e . Offensichtlich kann man diese Zyklide auch durch eine beliebige Gleichung der Art:

$$\rho P(XX) + \sigma(XX) = \rho p_{\xi\eta}x^\xi x^\eta + \sigma g_{\xi\eta}x^\xi x^\eta = 0$$

vorgeben. Folglich sieht die Invarianzbedingung der Zykliden folgendermaßen aus:

$$\delta(p_{\xi\eta}x^\xi x^\eta) = \vartheta_1 p_{\xi\eta}x^\xi x^\eta + \vartheta_2 g_{\xi\eta}x^\xi x^\eta \,.$$

Hieraus erhalten wir das folgende Gleichungssystem, das die Koeffizienten $p_{\xi\eta}$ erfüllen müssen:

$$\delta p_{\xi\eta} = p_{\xi\zeta}\pi_\eta^\zeta + p_{\zeta\eta}\pi_\xi^\zeta + \vartheta_1 p_{\xi\eta} + \vartheta_2 g_{\xi\eta} \,.$$

Wir schreiben dieses System für die verschiedenen Werte ξ und η an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\delta p_{00} &= p_{00}(2\pi_0^0 + \vartheta_1) \,, \\
\delta p_{0i} &= p_{0j}\pi_i^j + p_{0i}(\pi_0^0 + \vartheta_1) + p_{00}\pi_i^0 \,, \\
\delta p_{0n} &= p_{0n}(\pi_0^0 + \vartheta_1) + p_{00}\pi_n^0 \,, \\
\delta p_{0,n+1} &= p_{0,n+1}\vartheta_1 + p_{0i}\pi_{n+1}^i - p_{0n}\pi_n^0 + \vartheta_2 \,, \\
\delta p_{ij} &= p_{ik}\pi_j^k + p_{kj}\pi_i^k + p_{ij}\vartheta_1 + p_{i0}\pi_j^0 + p_{j0}\pi_i^0 + g_{ij}\vartheta_2 \,, \\
\delta p_{in} &= p_{jn}\pi_i^j + p_{in}\vartheta_1 + p_{i0}\pi_n^0 + p_{n0}\pi_i^0 \,, \\
\delta p_{i,n+1} &= p_{j,n+1}\pi_i^j - p_{i,n+1}(\pi_0^0 - \vartheta_1) + p_{ij}\pi_{n+1}^j + p_{n+1,0}\pi_i^0 - p_{ni}\pi_n^0 \,, \\
\delta p_{nn} &= p_{nn}\vartheta_1 + 2p_{n0}\pi_n^0 + \vartheta_2 \,, \\
\delta p_{n,n+1} &= p_{n,n+1}(\vartheta_1 - \pi_0^0) - (p_{nn} - p_{n+1,0})\pi_n^0 + p_{ni}\pi_{n+1}^i \,, \\
\delta p_{n+1,n+1} &= p_{n+1,n+1}(\vartheta_1 - 2\pi_0^0) + 2p_{n+1,i}\pi_{n+1}^i - 2p_{n+1,n}\pi_n^0 \,.
\end{aligned}$$

Wie oben könnten wir auch hieraus wie bei der Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der Hypersphären eine Darstellung dieser Gruppe in verschiedenen Zyklidenmengen des Raumes C_n ermitteln. Wir untersuchen jedoch nur eine einzige: die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der durch den Punkt A_0 verlaufenden und alle Hypersphären des invarianten Büschels $\lambda A_0 + A_n$ berührenden Zykliden. Man kann leicht sehen, daß bei derartigen Zykliden $p_{00} = 0$, $p_{0i} = 0$ ist. Angenommen, der Koeffizient p_{0n} sei verschieden von 0, dann normieren wir die Gleichung der Zykliden durch die Bedingung $p_{0n} = 1$. Weiter wählen wir auf eine entprechende Weise die Faktoren ρ und σ und bringen den Koeffizienten $p_{0,n+1}$ der Zyklidengleichung auf Null. Diese zwei Bedingungen liefern uns demnach: $\vartheta_1 = -\pi_0^0$, $\vartheta_2 = \pi_n^0$, und unser Gleichungssystem hat folgendes Aussehen:

$$\left.\begin{aligned}
\delta p_{ij} &= p_{ik}\pi_j^k + p_{kj}\pi_i^k - p_{ij}\pi_0^0 + g_{ij}\pi_n^0 \, , \\
\delta p_{in} &= p_{jn}\pi_i^j - p_{in}\pi_0^0 + \pi_i^0 \, , \\
\delta p_{i,n+1} &= p_{j,n+1}\pi_i^j - 2p_{i,n+1}\pi_0^0 + p_{ij}\pi_{n+1}^j - p_{ni}\pi_n^0 \, , \\
\delta p_{nn} &= -p_{nn}\pi_0^0 + 3\pi_n^0 \, , \\
\delta p_{n,n+1} &= -2p_{n,n+1}\pi_0^0 - p_{nn}\pi_n^0 + p_{ni}\pi_{n+1}^i \, , \\
\delta p_{n+1,n+1} &= -3p_{n+1,n+1}\pi_0^0 - 2p_{n+1,n}\pi_n^0 + 2p_{n+1,i}\pi_{n+1}^i \, .
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dieses Gleichungssystem bestimmt auch die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in der Menge der durch den Punkt A_0 verlaufenden und alle Hypersphären des Büschels $\lambda A_0 + A_n$ berührenden Zykliden.

Bemerkt sei, daß der vernachlässigte Fall $p_{0n} = 0$ zu einer Entartung der Zyklide (10) führt. Wir werden dies nicht untersuchen.

Wir untersuchen noch ein einziges wichtiges Beispiel der Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$, die Darstellung in der Menge der Punkte A', die dem Punkt A_0 unendlich nahe sind und die genau bis auf die Infinitesimalen zweiter Ordnung zu allen Sphären des invarianten Büschels $\lambda A_0 + A_n$ gehören. Man kann leicht erkennen, daß der Punkt A' folgendermaßen durch die Elemente des Beins ausgedrückt wird:

$$A' = (1 + \alpha^0)A_0 + \alpha^i A_i + o(\alpha) \, ,$$

wobei α^0 und α^i infinitesimale Größen sind. Vernachlässigt man die Infinitesimalen höher als von zweiter Ordnung, führt die Invarianzbedingung des Punktes A' zu der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\alpha^0 &= -\alpha^i\pi_i^0 \, , \\
\delta\alpha^i &= -\alpha^j(\pi_j^i - \delta_j^i\pi_0^0) \, .
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Dieses Gleichungssystem ist auch für die untersuchte Darstellung bestimmend. Das geometrische Objekt α^i nennen wir k o n t r a v a r i a n t e r V e k t o r.

Mit dieser Darstellung sind die sogenannten Tensordarstellungen der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$

verbunden. Es sei

$$\Phi = T_{ij\dots k}\,\alpha^i\beta^j\dots\gamma^k$$

die invariante Multilinearform der Variablen α^i , $\beta^j,\dots,\gamma^k$, die das Gleichungssystem (12) erfüllen. Die Invarianzbedingung der Form Φ hat die Gestalt $\delta\Phi = 0$. Hieraus erhalten wir ein Gleichungssystem, das die Koeffizienten der Form Φ erfüllen:

$$\delta T_{ij\dots k} = T_{lj\dots k}(\pi_i^l - \delta_i^l\pi_0^0) + T_{il\dots k}(\pi_j^l - \delta_j^l\pi_0^0) + \dots + T_{ij\dots l}(\pi_k^l - \delta_k^l\pi_0^0)\,.$$

Insbesondere erfüllen die Koeffizienten der invarianten linearen Form $\lambda_i\alpha^i$ das Gleichungssystem

$$\delta\lambda_i = \lambda_j(\pi_i^j - \delta_i^j\pi_0^0)\,. \tag{13}$$

Das geometrische Objekt λ_i nennen wir k o v a r i a n t e r V e k t o r . Wir untersuchen nunmehr die invariante Multilinearform

$$\Psi = S^{ij\dots k}\,\lambda_i\mu_j\dots\nu_k$$

der Variablen λ_i , $\mu_j,\dots,\nu_k$, die das Gleichungssystem (13) erfüllen. Die Invarianzbedingung der Form Ψ liefert ein Gleichungssystem, das ihre Koeffizienten erfüllen müssen:

$$\delta S^{ij\dots k} = -S^{lj\dots k}(\pi_l^i - \delta_l^i\pi_0^0) - S^{il\dots k}(\pi_l^j - \delta_l^j\pi_0^0) - \dots - S^{ij\dots l}(\pi_l^k - \delta_l^k\pi_0^0)\,.$$

Analog dazu ermitteln wir das Gleichungssystem, welches die Koeffizienten ${R_{ij\dots k}}^{lm\dots n}$ der invarianten Multilinearform der Variablen α_i , $\beta_j,\dots,\gamma_k$, $\lambda^l,\dots,\mu^m$, ν^n erfüllen.

Die ermittelten vollständig integrierbaren Gleichungssysteme bestimmen die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$, die wir T e n s o r darstellungen nennen. Die mit diesen Darstellungen zusammenhängenden geometrischen Objekte $T_{ij\dots k}$, $S^{ij\dots k}$, ${R_{ij\dots k}}^{lm\dots n}$ nennen wir T e n s o r e n . Man kann leicht beweisen, daß die von uns bestimmten Tensoren alle die auf gewöhnliche Weise bestimmten Tensoreigenschaften besitzen.

Bezeichnet man mit $\widetilde{\delta}{R_{ij\dots k}}^{lm\dots n}$ den Ausdruck

$$\delta {R_{ij\dots k}}^{lm\dots n} - {R_{pj\dots k}}^{lm\dots n}(\pi_i^p - \delta_i^p\pi_0^0)\dots + {R_{ij\dots k}}^{pm\dots n}(\pi_p^l - \delta_p^l\pi_0^0)\dots\,,$$

dann nimmt das Gleichungssystem, welches der Tensor ${R_{ij\dots k}}^{lm\dots n}$ erfüllt und die Verallgemeinerung der Gleichungssysteme ist, die die Tensoren $T_{ij\dots k}$ und $S^{ij\dots k}$ erfüllen, die Gestalt

$$\widetilde{\delta}{R_{ij\dots k}}^{lm\dots n} = 0$$

an.

Im weiteren Verlauf wollen wir auch die relativ invarianten Multilinearformen der Variablen untersuchen, die die Gleichungen (12) und (13) erfüllen, d. h. die Formen, welche die Bedingung $\delta\Phi = \Theta\Phi$ erfüllen. Man kann leicht das Gleichungssystem ermitteln, das die Koeffizienten ${T_{ij\dots k}}^{lm\dots n}$ der relativ invarianten Multilinearform erfüllen müssen:

$$\widetilde{\delta}{T_{ij\dots k}}^{lm\dots n} = \Theta{T_{ij\dots k}}^{lm\dots n}\,.$$

Das geometrische Objekt $T_{ij\ldots k}{}^{lm\ldots n}$ nennen wir r e l a t i v e r T e n s o r vom Gewicht $\frac{\Theta}{\pi_0^0}$.

Als Beispiel für den relativen Tensor vom Gewicht 2 kann das oben eingeführte geometrische Objekt g_{ij} dienen, das das Gleichungssystem (7_2) erfüllt und folgendermaßen umgeschrieben werden kann:

$$\widetilde{\delta} g_{ij} = 2 g_{ij} \pi_0^0 \, .$$

Dieser Tensor bestimmt die Winkelmetrik in der Umgebung des Punktes A_0 für die die Hypersphären des invarianten Büschels $\lambda A_0 + A_n$ berührenden Richtungen.

§2. Invariante Konstruktion der Grundlagen der Hyperflächentheorie

4. Wir untersuchen die nichtisotrope Hyperfläche (S) im konformen Raum C_n, bezogen auf das krummlinige Koordinatensystem $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$. Mit jedem Punkt dieser Hyperfläche ist eine stationäre Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ der Gruppe $\mathfrak{C}_n$ verbunden, die diesen Punkt und das Büschel der die Hyperfläche in diesem Punkt berührenden Hypersphären invariant läßt. Somit erhalten wir ein Feld von Untergruppen $\mathfrak{C}_n^0$. Wir verbinden mit jedem Punkt der Hyperfläche die Menge der Beine der entsprechenden Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$. Man kann leicht sehen, daß sich die ermittelte Beinschar von der allgemeinen Beinschar der Gruppe $\mathfrak{C}_n$ durch die Pfaffsche Gleichung

$$\omega^n = 0 \tag{14}$$

unterscheidet, die somit die Differentialgleichung der Hyperfläche (S) ist. Aufgrund dieser Gleichung sowie der Relationen (4_1) und $(4_2')$ bekommt die Matrix der Komponenten der Infinitesimalverschiebung des Beins auf der Hyperfläche (S) die Gestalt

$$\|\omega_\xi^\eta\| = \left\| \begin{matrix} \omega_0^0 & \omega^j & 0 & 0 \\ \omega_i^0 & \omega_i^j & \omega_i^n & -g_{ik}\omega^k \\ \omega_n^0 & -g^{jk}\omega_k^n & 0 & 0 \\ 0 & -g^{jk}\omega_k^0 & -\omega_n^0 & -\omega_0^0 \end{matrix} \right\| \; ; \tag{15_1}$$

dabei sind die Formen ω_i^j durch das Gleichungssystem

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k \tag{15_2}$$

verknüpft.

Fixieren wir den Punkt A_0, dann wird aus der allgemeinen Schar der mit der Hyperfläche (S) verbundenen Beine die Beinschar der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ ausgesondert. Die Matrix (15_1) geht dabei in die Matrix (7_1) der Komponenten der Infinitesimalverschiebung des Beins der Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ über. Analytisch unterscheidet sich die

Beinschar der stationären Untergruppe aus der allgemeinen Schar der mit der Fläche (S) verbundenen Beine durch das Gleichungssystem

$$\omega^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1) ,$$

das die Unbeweglichkeitsbedingung von A_0 verkörpert.

Das System der Funktionen $x^I(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$ $(I = 1, 2, \ldots, N)$, *vorgegeben auf der Hyperfläche* (S) *und geometrisches Objekt der stationären Untergruppe bei beliebigem fixiertem Wert der Variablen* $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$, *nennen wir differentialgeometrisches Objekt.* Aus dieser Definition geht hervor, daß bei fixierten Werten u^i, d. h. bei $\omega^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, die Komponenten des differentialgeometrischen Objekts das vollständig integrierbare Gleichungssystem vom Typ (8) erfüllen. Bei sich verändernden u^i erfüllen folglich die Komponenten des differentialgeometrischen Objekts das Gleichungssystem vom Typ

$$dx^I + \xi^I_A(x)\omega^A = Y^I_i \omega^i ,$$

wobei die Form ω^A nacheinander die Werte der Formen $\omega^0_0, \omega^0_i, \omega^j_i, \omega^0_n$ annimmt, und die äußeren Differentiale dieses Gleichungssystems haben die Gestalt

$$[\triangle Y^I_i \, , \, \omega^i] = 0 ,$$

wobei $\triangle Y^I_i$ gewisse Pfaffsche Formen sind.

Das differentialgeometrische Objekt x^I bestimmt auf der Hyperfläche (S) das Feld der Darstellungen der stationären Untergruppe $\mathfrak{C}^0_n$. Ist das differentialgeometrische Objekt $T_{ij\ldots k}{}^{lm\ldots n}(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$ Tensor bei beliebig fixiertem Wert der Variablen $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$, dann erfüllen seine Komponenten das Pfaffsche Gleichungssystem

$$\widetilde{d}T_{ij\ldots k}{}^{lm\ldots n} = \Theta T_{ij\ldots k}{}^{lm\ldots n} + S_{ij\ldots k}{}^{lm\ldots n}{}_p \, \omega^p ,$$

wobei der Operator $\widetilde{d}$ zum Operator $\widetilde{\delta}$ analog ist, jedoch bestimmt bei beliebiger Verschiebung in der Schar der mit der Hyperfläche (S) verbundenen Beine. Das Objekt $T_{ij\ldots k}{}^{lm\ldots n}$ nennen wir d e n a u f d e r H y p e r f l ä c h e (S) v o r g e g e b e n e n T e n s o r oder einfach T e n s o r .

Als Beispiel für einen auf der Hyperfläche (S) vorgegebenen Tensor kann das geometrische Objekt g_{ij} dienen, welches das Gleichungssytem (15_2) erfüllt und folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\widetilde{d}g_{ij} = 2g_{ij}\omega^0_0 .$$

Aufgrund des am Ende des vorhergehenden Absatzes Bewiesenen bestimmt dieser Tensor die Winkelmetrik auf der Hyperfläche (S).

5. Wir wollen die Geometrie der Hyperfläche (S) untersuchen, indem wir die mit ihr verbundenen Felder von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{C}^0_n$ konstruieren und die geometrische Bedeutung der dabei ermittelten geometrischen Objekte aufzeigen. Hauptquelle, aus der die mit der Hyperfläche verbundenen geometrischen Objekte hervorgehen, sind die Differentialerweiterungen der Hyperflächengleichung (Gleichung(14)).

Untersuchen wir Gleichung (14), so können wir uns leicht davon überzeugen, daß es eine Lösung dieser Gleichung gibt, die von einer einzigen Funktion mit $n-1$ Variablen abhängt. Nach der allgemeinen Theorie der Pfaffschen Formen [6] existiert eine Folge von Differentialerweiterungen der Gleichung (14), die aus ihr durch sukzessive äußere Differentiation und Entwicklung nach den linear unabhängigen Formen $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ resultieren. Jede Erweiterung von Gleichung (14) stellt ein lösbares System Pfaffscher Gleichungen dar, und das System ihrer äußeren Differentiale hat die Gestalt $[\varphi_{Ai}\omega^i] = 0$, wobei der Index A der Differentialform φ_{Ai} die Werte eines gewissen bestimmten Indexsystems durchläuft.

Wir führen nacheinander die äußere Differentiation und Entwicklung nach den linear unabhängigen Formen $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ durch und erhalten aus der Gleichung (14) folgende Gesamtheit von Systemen Pfaffscher Gleichungen:

$$\begin{aligned} \omega_i^n &= \alpha_{ij}\omega^j\,, && (16)\\ \widetilde{d}\alpha_{ij} &= \alpha_{ij}\omega_0^0 - g_{ij}\omega_n^0 + \beta_{ijk}\omega^k\,, && (17)\\ \widetilde{d}\beta_{ijk} &= \beta_{ijk}\omega_0^0 + 3(\alpha_{(ij}g_{k)l} - g_{(ij}\alpha_{k)l})\omega_{n+1}^l + (-3g^{pq}\alpha_{(ij}\alpha_{k)p}\alpha_{ql} + \gamma_{ijkl})\omega^l && (18) \end{aligned}$$

usw., wobei α_{ij}, β_{ijk} und γ_{ijkl} Größen sind, die in allen Indizes symmetrisch sind, und die runden Klammern bei den Indizes zyklische Vertauschung bedeuten.

Die Gleichungen (14) und (16) bilden die erste Differentialerweiterung von Gleichung (14), die Gleichungen (14), (16) und (17) die zweite, die Gleichungen (14), (16), (17) und (18) die dritte Erweiterung usw. Jede Differentialerweiterung von Gleichung (14) führt ein neues Größensystem ein. So führt die erste Erweiterung das Größensystem α_{ij}, die zweite β_{ijk}, die dritte γ_{ijkl} ein, usw.

Das bei der ersten Erweiterung eingeführte Größensystem α_{ij} erfüllt die Gleichung (17), bei $\omega^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ die Gleichung

$$\widetilde{\delta}\alpha_{ij} = \alpha_{ij}\pi_0^0 - g_{ij}\pi_n^0\,, \tag{18$'$}$$

und stellt folglich an sich kein geometrisches Objekt dar. Untersuchen wir dieses Größensystem jedoch zusammen mit dem Tensor g_{ij}, dann erhalten wir ein geometrisches Objekt mit $(n-1)(n-2)$ Komponenten, welches das aus den Gleichungen (7_2) und (18′) bestehende Gleichungssystem erfüllt. Dieses geometrische Objekt nennen wir fundamentales geometrisches Objekt der Klasse A.

Analog dazu zeigen wir, daß *das System der Größen g_{ij}, α_{ij} und β_{ijk} ein geometrisches Objekt bildet,* das fundamentale geometrische Objekt der Klasse B. Genauso bildet *das System der Größen $g_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ijk}$ und γ_{ijkl} ein geometrisches Objekt,* das fundamentale geometrische Objekt der Klasse C, usw.

Jedes fundamentale geometrische Objekt bestimmt das Feld der Darstellungen der stationären Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$. Dabei ist *bereits das durch die fundamentalen geometrischen Objekte der Klasse C bestimmte Feld von Darstellungen umfassend.* Für die Untersuchung der Geometrie der der Fläche (S) ist es deshalb hinreichend, sich auf die Untersuchung der Darstellungen und geometrischen Objekte der Klassen A, B und C zu beschränken.

6. Die Struktur der fundamentalen geometrischen Objekte ist ziemlich kompliziert. Deshalb ist ihre direkte geometrische Interpretation schwierig. Wir wollen einfachere geometrische Objekte konstruieren, deren geometrische Bedeutung sich weitaus leichter feststellen läßt und die insgesamt auch die Geometrie der Hyperfläche (S) ausmachen.

Alle auf algebraische Weise aus dem fundamentalen Objekt der Klasse A ermittelten geometrischen Objekte nennen wir g e o m e t r i s c h e O b j e k t e d e r K l a s s e A . Genauso bestimmen wir die geometrischen Objekte der Klassen B und C.

Wir untersuchen gewisse geometrische Objekte der Klasse A. Wir konstruieren vor allem die Größe

$$a = \frac{1}{n-1} g^{ij} \alpha_{ij} \, ,$$

wobei g^{ij} der Tensor ist, der zum Tensor g_{ij} invers ist. Wir differenzieren diesen Ausdruck und benutzen die Gleichung (15_2) und (17) und können leicht eine Gleichung ermitteln, welche die Größe a erfüllt:

$$da = -a\omega_0^0 - \omega_n^0 + \beta_k \omega^k \, . \tag{19}$$

Folglich ist *die Größe a ein skalares geometrisches Objekt* . Das Größensystem β_k wird durch die Elemente des fundamentalen geometrischen Objekts der Klasse B ausgedrückt:

$$\beta_k = \frac{1}{n-1} g^{ij} \beta_{ijk} \, . \tag{20}$$

Mit dem geometrischen Objekt a läßt sich in der Klasse A *der zweifach kovariante relative Tensor*

$$a_{ij} = \alpha_{ij} - a\, g_{ij}$$

konstruieren, der das Differentialgleichungssystem

$$\widetilde{d} a_{ij} = a_{ij}\omega_0^0 + \overline{\beta}_{ijk}\omega^k \tag{21}$$

erfüllt, wobei $\overline{\beta}_{ijk} = \beta_{ijk} - g_{ij}\beta_k$ ist. *Der Tensor a_{ij} ist apolar zum Tensor g_{ij}*, da $a_{ij}g^{ij} = 0$.

Für den weiteren Verlauf nehmen wir an: wenn das Gegenteil nicht besonders vorbehalten ist, dann ist der Tensor a_{ij} in allen Punkten des untersuchten Bereichs der Fläche (S) nicht entartet, und folglich existiert in diesem Bereich der Tensor a^{ij}, der zum Tensor a_{ij} invers ist.

Mit dem Tensor a_{ij} läßt sich die Größe $a_0 = \left(\frac{\det a_{ij}}{\det g_{ij}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ konstruieren. Wir verwenden die Determinantenableitungsregel und ermitteln die Differentialgleichung, die diese Größe erfüllt:

$$da_0 = a_0(-\omega_0^0 + \overline{\beta_k}\omega^k)\ , \tag{22}$$

wobei $\overline{\beta_k} = \frac{1}{n-1} a^{ij}\overline{\beta}_{ijk}$ ist. Folglich *ist die Größe a_0 relativer Skalar vom Gewicht -1.*

Wir untersuchen das oben ermittelte Größensystem β_k. Das Differentialgleichungssystem, das es erfüllt, könnten wir finden, indem wir die Relation (20) differenzieren. In diesem Fall ist es jedoch einfacher, die äußere Ableitung der Gleichung (19) zu berechnen und die dabei ermittelte quadratische Gleichung nach den Basisformen $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ zu entwickeln. So oder anders kommen wir zum System der Pfaffschen Gleichungen

$$\widetilde{d}\beta_i = -\beta_i\omega_0^0 - a_{ij}\omega_{n+1}^j + \overline{\gamma}_{ij}\omega^j\ , \quad \overline{\gamma}_{ij} = \overline{\gamma}_{ji}\ , \tag{23}$$

das zeigt, daß das einzeln genommene Größensystem β_i kein geometrisches Objekt ist. Mit diesem Größensystem lassen sich jedoch zwei wichtige geometrische Objekte der Klasse B konstruieren. Und zwar nehmen wir $b^i = a^{ij}\beta_j$ und $b_i = g_{ij}b^j$ an. Wir differenzieren diese Relationen und erhalten zwei Systeme Pfaffscher Gleichungen:

$$\widetilde{d}b^i = -2b^i\omega_0^0 - \omega_{n+1}^i + \gamma_j^i\omega^j\ , \tag{24}$$

$$\widetilde{d}b_i = \omega_i^0 + \gamma_{ij}\omega^j\ . \tag{25}$$

Hieraus folgt, daß *die Größen b^i und b_i* tatsächlich *geometrische Objekte sind.* Die in den Gleichungssystemen (23), (24) und (25) enthaltenen Größen $\overline{\gamma}_{ij}, \gamma_j^i$ und γ_{ij} können algebraisch durch die Komponenten des fundamentalen geometrischen Objekts der Klasse C ausgedrückt werden. Bemerkt sei, daß die Größe γ_{ij} allgemein nicht symmetrisch ist, daß jedoch ihre Komponenten durch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ algebraische Relationen verknüpft sind.

Mit dem geometrischen Objekt b^i läßt sich in der Klasse B ein dreiwertiger Tensor konstruieren: Wir vergleichen die Gleichungssysteme (18) und (24) und können leicht feststellen, daß *die Größe*

$$b_{ijk} = \beta_{ijk} + 3\left\{a_{(ij}g_{k)l} - g_{(ij}a_{k)l}\right\} b^l$$

ein Tensor ist, der das Pfaffsche Gleichungssystem

$$\widetilde{d}b_{ijk} = b_{ijk}\omega_0^0 + \overline{\gamma}_{ijkl}\omega^l$$

erfüllt, wobei die Größe $\overline{\gamma}_{ijkl}$ algebraisch durch die Komponenten des fundamentalen geometrischen Objekts der Klasse C ausgedrückt wird. Leicht zu erkennen ist, daß *der Tensor b_{ijk} symmetrisch und apolar zum Tensor g_{ij} ist.*

Wir konstruieren schließlich den zweiwertigen Tensor in der Klasse C. Wir berechnen die äußere Ableitung des Gleichungssystems (25), entwickeln die dabei resultierenden quadratischen Gleichungen nach den linear unabhängigen Formen $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ und erhalten ein Gleichungssystem, das die Größe γ_{ij} erfüllt:

$$\widetilde{d}\gamma_{ij} = \alpha_{ij}\omega_n^0 - b_i\omega_j^0 - b_j\omega_i^0 + g_{ij}b^k\omega_k^0 + \delta_{ijk}\omega^k\ , \tag{26}$$

wobei δ_{ijk} eine zur Klasse D gehörende Größe ist. Wir vergleichen das ermittelte Gleichungssystem mit den Systemen (18) und (25) und stellen fest, daß *die Größe*

$$c_{ij} = \gamma_{ij} + a a_{ij} - \frac{1}{2}\left(g_{kl} b^k b^l - a^2\right) g_{ij} + b_i b_j$$

ein zweifach kovarianter absoluter Tensor ist, der die Gleichung

$$\widetilde{d} c_{ij} = \overline{\delta}_{ijk} \omega^k$$

erfüllt. Dieser Tensor ist bereits nicht mehr symmetrisch, obwohl man beweisen kann, daß er die Bedingung $g^{kl} c_{k[i} a_{j]l} = 0$ erfüllt.

Mit dem relativen Skalar a_0 lassen sich aus den Tensoren g_{ij}, a_{ij} und b_{ijk} die absoluten Tensoren

$$G_{ij} = a_0^2 g_{ij}\,, \ A_{ij} = a_0 a_{ij}\,, \ B_{ijk} = a_0 b_{ijk}$$

konstruieren. Der Gleichförmigkeit wegen bezeichnen wir bisweilen den absoluten Tensor mit c_{ij} wie mit dem Großbuchstaben, d. h. nehmen $C_{ij} = c_{ij}$ an.

Die oben konstruierten geometrischen Objekte a, b_i, b^i und die Tensoren g_{ij}, a_{ij}, b_{ijk} und c_{ij} werden in der gesamten weiteren Darlegung eine grundlegende Rolle spielen.

7. Wir untersuchen auf der Hyperfläche (S) einige invariante geometrische Formen, die mit den oben eingeführten geometrischen Objekten zusammenhängen.

Wir vergleichen Gleichung (19), die das geometrische Objekt a erfüllt, mit der im 4. Absatz eingeführten Gleichung der invarianten Tangentialhypersphäre und können uns davon überzeugen, daß die Tangentialhypersphäre

$$C_n = a A_0 + A_n \tag{27$_1$}$$

invariant mit dem Punkt A_0 der Hyperfläche (S) verbunden ist. Diese Hypersphäre nennen wir zentrale Hypersphäre des Tangentialhypersphärenbüschels. Mit den zentralen Hypersphären hängt auch der Tensor a_{ij} zusammen. Die aus dem Punkt A_0 hervorgehenden Richtungen, entlang denen die zentrale Hypersphäre C_n eine Berührung zweiter Ordnung mit der Hyperfläche (S) besitzt, erfüllen nämlich die Gleichung $a_{ij}\omega^i\omega^j = 0$, weil die Berührbedingung $(d^2 A_0\,,\, C_n) = 0$ auf diese Gleichung hinausläuft.

Mit den Tensoren a_{ij} und g_{ij} kann man den symmetrischen Affinor $a_i^j = a_{ik} g^{kj}$ einführen. Einer beliebigen aus dem Punkt A_0 hervorgehenden und durch die Parameter $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ bestimmten Richtung auf der Hyperfläche (S) ordnet der Affinor a_i^j eine durch die Parameter $\mu^j = a_i^j \lambda^i$ bestimmte Richtung zu. Die aus dem Punkt A_0 hervorgehenden und bezüglich des Affinors a_i^j invarianten Richtungen nennen wir Hauptrichtungen auf der Hyperfläche (S). Da die Tensoren a_{ij} und g_{ij} im Punkt A_0 nicht entartet sind und außerdem der Tensor g_{ij} positiv definit ist, gibt es in diesem Punkt $n-1$ zueinander orthogonale Hauptrichtungen. Die Linien, welche die Hauptrichtungen der Hyperfläche (S) einhüllen, nennen wir ihre

K r ü m m u n g s l i n i e n . Durch jeden Punkt der Hyperfläche verlaufen exakt $n-1$ Krümmungslinien.

Wir untersuchen desweiteren die invarianten geometrischen Formen, die mit den geometrischen Objekten der Klasse B zusammenhängen. Wir vergleichen die Relationen (19) und (24) mit dem Gleichungssystem (9″), das die Koordinaten des invarianten Punktes erfüllen, und können uns davon überzeugen, daß *der Punkt*

$$C_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(g_{ij}b^i b^j + a^2\right) A_0 + b^i A_i - aA_n + A_{n+1} \tag{27$_2$}$$

sich nur dadurch vom Punkt A_0 unterscheidet, daß er invariant mit diesem Punkt der Hyperfläche (S) verbunden ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $(C_{n+1}\,,\, C_n) = 0$ ist und folglich daß der Punkt C_{n+1} zur zentralen Hypersphäre gehört. *Geometrischer Ort der Punkte C_{n+1} ist der zweite Mantel der Einhüllenden der zentralen Hypersphärenschar C_n.* Diese Behauptung geht aus der Gleichung $(C_{n+1}\,,\, dC_n) = 0$ hervor, was durch einfache Berechnungen beweisbar ist. Wir bezeichnen die Hyperfläche, die geometrischer Ort der Punkte C_{n+1} ist, mit (S').

Wir beweisen desweiteren, daß *das Hypersphärenbüschel, als dessen Basis die $n-1$ linear unabhängigen Hypersphären*

$$C_i = -b_i A_0 + A_i \tag{27$_3$}$$

dienen, ein invariantes Büschel ist. Differenzieren wir den Ausdruck für C_i nach den Parametern der stationären Untergruppe, erhalten wir tatsächlich $\delta C_i = \pi_i^j C_j$. Folglich gehen die Hypersphären C_i bei Transformationen der stationären Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ in Hypersphären desselben Büschels über. Man kann leicht sehen, daß die Hypersphären C_i orthogonal zur Hyperfläche (S) sind und durch die Punkte A_0 und C_{n+1} verlaufen.

Somit erfüllen der Punkt A_0, den wir hier der Gleichförmigkeit wegen mit C_0 bezeichnen, der Punkt C_{n+1} und die Hypersphären C_i und C_n alle Relationen (6) und sind folglich Elemente des mit dem Punkt A_0 der Hyperfläche (S) verbundenen invarianten Beins erster Ordnung. Wir nennen dieses Bein s p e z i e l l e s B e i n .

Wir schreiben die Gleichungen der Infinitesimalverschiebung des speziellen Beins in der Gestalt

$$dC_\xi = \overline{\omega}_\xi^\eta C_\eta \quad (\xi, \eta = 0, 1, \ldots, n+1)\,.$$

Wir differenzieren Relation (27) und ermitteln folgende Ausdrücke für die invarianten Differentialformen $\overline{\omega}_\xi^\eta$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega}^i = \omega^i, \qquad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 + \omega^i b_i\,, \\ \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j - g_{ik}(b^k\omega^j - b^j\omega^k)\,, \end{aligned}\right\} \tag{28$_1$}$$

$$\overline{\omega}^n = 0, \qquad \overline{\omega}_n^0 = 0, \qquad \overline{\omega}_i^n = a_{ij}\omega^j, \qquad \overline{\omega}_i^0 = -c_{ij}\omega_0^j\,. \tag{28$_2$}$$

Mit dem speziellen Bein läßt sich auf der Hyperfläche (S) eine konforminvariante

Differentiation einführen. Wir konstruieren nämlich den Operator $\widetilde{d}$ mit Hilfe der Pfaffschen Formen

$$\overline{\vartheta}_i^j = \overline{\omega}_i^j - \delta_i^j \overline{\omega}_0^0 = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0 - (\delta_i^j b_k + \delta_k^j b_i - g_{ik} g^{jl} b_l)\omega^k$$

und bezeichnen ihn mit dem Symbol $\overline{\widetilde{d}}$. Die Anwendung dieses Operators auf den absoluten Tensor führt zu einem Ergebnis, das nicht von der Wahl des ursprünglichen Koordinatensystems abhängt. Wenn $T_{ij\ldots k}$ absoluter Tensor ist, dann zeigen Berechnungen tatsächlich, daß $\widetilde{\delta}(\overline{\widetilde{d}} T_{ij\ldots k}) = 0$ ist.

Wir benutzen den Operator $\overline{\widetilde{d}}$ und können die Gleichungen (15_2) und (21) in der Form

$$\overline{\widetilde{d}} g_{ij} = 2\, g_{ij}\, \overline{\omega}_0^0 \,, \tag{$15_2'$}$$

$$\overline{\widetilde{d}} a_{ij} = a_{ij}\, \overline{\omega}_0^0 + b_{ijk}\omega^k \tag{21'}$$

umschreiben. Bemerkt sei noch, daß wir unter Anwendung der Form $\overline{\omega}_0^0$ der Gleichung (22) die folgende Gestalt geben:

$$da_0 = a_0(-\overline{\omega}_0^0 + B_k\omega^k)\,, \tag{22'}$$

wobei $B_k = \frac{1}{n-1} b_{ijk} a^{ij}$ ist.

Wir schreiben hier auch die Kongruenzbedingungen an, die die Haupttensoren der Hyperfläche (S) erfüllen, und daraus hervorgehen, daß die Komponenten der Infinitesimalverschiebung des speziellen Beins die Strukturgleichungen des konformen Raumes erfüllen. Diese Bedingungen sehen folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{array}{l} [\overline{\widetilde{d}} b_{ijk} - b_{ijk}\overline{\omega}_0^0 + 3\{(g_{(ij}a_{k)p} - a_{(ij}g_{k)p})g^{pq}c_{ql} + a_{(ij}a_{k)p}g^{pq}a_{ql}\}\omega^l \,,\, \omega^k] = 0\,, \\ [\overline{\widetilde{d}} c_{ij} \,,\, \omega^j] = 0\,. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Somit sonderten wir aus der Gesamtheit der Beine der stationären Gruppe, verbunden mit dem Punkt A_0, eine kleinere Gesamtheit von Beinen aus, die Gesamtheit der speziellen Beine. Fixieren wir den Punkt A_0, d. h. nehmen wir $\omega^i = 0$ an, dann bleiben von den Komponenten $\overline{\omega}_\xi^\eta$ der Infinitesimalverschiebung des speziellen Beins nur die von Null verschiedenen Formen $\overline{\omega}_0^0$ und $\overline{\omega}_i^j$, deren Werte wir bei $\omega^i = 0$ mit $\overline{\pi}_0^0$ und $\overline{\pi}_i^j$ bezeichnen. Hieraus folgt, daß die Schar der mit dem Punkt A_0 der Hyperfläche (S) verbundenen speziellen Beine von $1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Parametern abhängt. Mit der Schar der speziellen Beine ist die Gruppe $\overline{\mathfrak{C}}_n^0$ verbunden, die zur Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen des $(n-1)$–dimensionalen euklidischen Raumes, die nur einen einzigen Punkt dieses Raumes invariant lassen, isomorph ist.

Die weitere Kanonisierung der Schar der mit der Hyperfläche (S) verbundenen Beine kann aufgrund der Normierung des Beins und der Wahl des Netzes auf der Hyperfläche erfolgen. Wir beziehen z. B. die Hyperfläche (S) auf das Netz der

Krümmungslinien. In diesem Fall bekommen die Tensoren g_{ij} und a_{ij} die kanonische Gestalt:

$$g_{ij} = \delta_{ij}\,,\ a_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{für} \quad j = i\,, \\ 0 & \text{für} \quad j \neq i\,. \end{cases}$$

Die Gleichungssysteme ($15'_2$) und ($21'$) bekommen infolgedessen die Gestalt:

$$\overline{\omega}_i^j + \overline{\omega}_j^i = 0\,,$$

$$\overline{\omega}_i^j = \frac{1}{a_i - a_j}\, b_{ijk}\omega^k\,,$$

$$da_i = -a_i\overline{\omega}_0^0 + b_{iik}\omega^k\,.$$

Somit lassen sich die Pfaffschen Formen $\overline{\omega}_i^j$, wenn die Hyperfläche (S) auf Krümmungslinien bezogen ist, sehr einfach durch die Komponenten der Tensoren a_{ij} und b_{ijk} ausdrücken.

Schließlich zeigt Gleichung ($22'$), daß die Normierung des Beins durch die Bedingung $a_0 = \text{const.}$ dazu führt, daß die Form $\overline{\omega}_0^0$ in der Gestalt

$$\overline{\omega}_0^0 = B_k\omega^k$$

geschrieben wird.

Bezieht man die Hyperfläche auf Krümmungslinien und normiert man das Bein durch die Bedingung $a_0 = \text{const.}$, so lassen sich alle Komponenten der Infinitesimalverschiebung des speziellen Beins durch die Komponenten der Tensoren g_{ij}, a_{ij}, b_{ijk} und c_{ij} ausdrücken.

8. Wir beweisen nun das Fundamentaltheorem der Hyperflächentheorie.

Der Bereich D des analytischen Raumes der Variablen $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$ sei vorgegeben, worin in jedem Punkt das System der linear unabhängigen Formen

$$\omega^i = K_j^i du^j$$

vorgegeben sei; außerdem seien im Bereich D die Systeme der analytischen Funktionen G_{ij}, A_{ij}, C_{ij} und B_k vorgegeben, die sich tensoriell bei linearen Transformationen der Formen ω^i umformen und folgende Systeme von endgültigen Relationen erfüllen:

$$\begin{gathered} G_{[ij]} = A_{[ij]} = G^{kl}C_{k[i}A_{j]l} = 0\,, \\ A_{ij}G^{ij} = 0\,, \quad A_0 = \left(\frac{\det A_{ij}}{\det G_{ij}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \text{const.} \end{gathered} \tag{31}$$

Wir zeigen, *wenn außerdem die vorgegebenen Funktionensysteme gewisse äußere Differentialgleichungen erfüllen, die wir in den Beweis einführen, dann bestimmen sie im konformen Raum C_n genau eine Hyperfläche (S) bis auf eine konforme Transformation, bei der G_{ij}, A_{ij} und C_{ij} jeweils erster, zweiter und vierter absoluter Fundamentaltensor sind, und der Tensor B_k Resultat der Faltung ihrer Tensoren b_{ijk} und a^{ij} ist: $B_k = b_{ijk}a^{ij}$.*

Da sich die Hyperfläche genau bis auf eine konforme Transformation durch die Komponenten ω_ξ^η der Infinitesimalverschiebung des mit der Hyperfläche verbundenen Beins bestimmen läßt, ist für uns hinreichend zu beweisen, daß sich mit den Tensoren G_{ij}, A_{ij}, C_{ij} und B_i alle Formen ω_ξ^η der gesuchten Hyperfläche bestimmen lassen.

Wir nehmen zunächst

$$\omega_0^0 = B_i \omega^i \tag{32_1}$$

an. Wir bestimmen dann die Formen $\vartheta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0$. Da der Tensor G_{ij} erster Fundamentaltensor der Hyperfläche (S) sein muß, müssen auch die Relationen $(A_i A_j) = G_{ij}$ erfüllt werden, mit denen wir durch Differentiation das Gleichungssystem

$$dG_{ij} - G_{ik}\vartheta_j^k - G_{kj}\vartheta_i^k = 2G_{ij}B_k\omega^k$$

erhalten. Dieses Gleichungssystem ist jedoch noch lange nicht hinreichend, um die Formen ϑ_i^j bestimmen zu können. Wir bestimmen diese Formen vollständig, wenn wir ihm ein System äußerer quadratischer Gleichungen hinzufügen, die sich bei äußerer Differentiation von Gleichungssystem (30) ergeben:

$$[\omega^i \vartheta_j^i] = \frac{\partial K_l^i}{\partial u^m} \overline{K}_j^l \overline{K}_k^m [\omega^j \omega^k]$$

mit $\overline{K}_i^j$ für die zur Matrix K_i^j inverse Matrix.

Wir stellen die unbekannte Form ϑ_j^i in der Gestalt

$$\vartheta_j^i = (L_{jk}^i + M_{jk}^i)\omega^k \tag{32_2}$$

dar, wobei $L_{[jk]}^i = 0, M_{(jk)}^i = 0$ ist. Wir bezeichnen außerdem mit $\partial_k G_{ij}$ die Zerlegungskoeffizienten der Differentiale dG_{ij} nach den linear unabhängigen Formen ω^k. Aus dem zweiten Gleichungssystem erhalten wir nach einfachen Rechnungen

$$M_{jk}^i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial K_l^i}{\partial u^m} - \frac{\partial K_m^i}{\partial u^l}\right) \overline{K}_j^l \overline{K}_k^m .$$

Das erste Gleichungssystem liefert als Ergebnis von Berechnungen den Ausdruck für L_{jk}^i:

$$\begin{aligned} L_{jk}^i = {} & \frac{1}{2} G^{il}(\partial_j G_{kl} + \partial_k G_{jl} - \partial_l G_{jk}) - \\ & - G_{jl}G^{im}M_{km}^l - G_{kl}G^{im}M_{jm}^l - (\delta_j^i B_k + \delta_k^i B_j - G^{il}G_{jk}B_l) . \end{aligned}$$

Wir setzen die Ausdrücke für L_{jk}^i und M_{jk}^i in Gleichung (32_2) ein und erhalten die Werte der Formen ϑ_i^j.

Wir nehmen weiter

$$\left.\begin{aligned} \omega^n = 0, \quad \omega_n^0 = 0, \quad \omega_i^{n+1} = -G_{ij}\omega^j , \\ \omega_i^n = A_{ij}\omega^i, \quad \omega_i^0 = -C_{ij}\omega^j \end{aligned}\right\} \tag{32_3}$$

an und verlangen, daß bei allen Formen (32) die Strukturgleichungen des konformen Raumes erfüllt sind. Offenbar ist die Hyperfläche (S), bei der diese Formen Komponenten der Infinitesimalverschiebung des mit der Hyperfläche verbundenen Beins $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$ sind, die einzige Hyperfläche, bei der die Tensoren G_{ij}, A_{ij} und C_{ij} die Bedeutung eines ersten, zweiten und vierten Fundamentaltensors haben und $B_k = b_{ijk}a^{ij}$ ist, und folglich ist diese Hyperfläche die einzige, genau bis auf eine konforme Transformation bestimmte, gesuchte Hyperfläche. Infolge der Gleichungen (31) und (32) ist das Bein $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$ das spezielle normierte Bein der Hyperfläche (S).

Die Strukturgleichungen des konformen Raumes, welche von der Form (32) erfüllt werden müssen, führen zu Bedingungen, welche zu den Gauß–Codazzi–Gleichungen der klassischen Flächentheorie analog sind:

$$\left.\begin{aligned} D\vartheta_j^i - [\vartheta_j^k \vartheta_k^i] &= \{-G^{ik}A_{jl}A_{km} + C_{jm}\delta_l^i + C_{lm}\delta_j^i - G_{il}C^{ik}C_{km}\}[\omega^l \omega^m]\,, \\ [\tilde{d}A_{ij} - A_{ij}B_k\omega^k\,,\, \omega^j] &= 0\,, \\ [\tilde{d}B_i + C_{ij}\omega^j\,,\, \omega^i] &= 0\,, \\ [\tilde{d}C_{ij}\,,\, \omega^j] &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

wobei der Operator $\tilde{d}$ mittels den Formen ϑ_j^i gebildet ist.

§3. Einige geometrische Fragen im Zusammenhang mit den Tensoren a_{ij}, b_{ijk} und c_{ij}.

9. Wir wenden uns dem oben erwähnten Entartungsfall zu, einem Fall, bei dem der Rang des Tensors a_{ij} bis auf den Wert $m < n - 1$ abnimmt. Der einfacheren Schreibweise wegen bezeichnen wir die Indizes mit den Werten 1 bis m mit den Buchstaben $a, b, c, \ldots$, die Indizes mit den Werten von $m+1$ bis $n-1$ mit den Buchstaben $p, q, r, \ldots$ und behalten bei den Indizes, die sich von 1 bis $n-1$ verändern, die Bezeichnung $i, j, k \ldots$ bei.

Weil der Rang des Tensors a_{ij} gleich m ist, kann man das mit dem Punkt A_0 der Hyperfläche (S) verbundene Bein erster Ordnung so wählen, daß $a_{ip} = 0$ ist. Die Hypersphären A_a des Beins bleiben nun unverändert, und wir wählen die Hypersphären A_p so, daß sie orthogonal zu den Hypersphären A_a sind. In diesem Fall ist $g_{ap} = (A_a A_p) = 0$. Offensichtlich ist mit dem Punkt A_0 der Hyperfläche (S) ein ganzer Komplex von Beinen erster Ordnung verbunden, in denen die Relationen $a_{ip} = 0, g_{ap} = 0$ erfüllt werden. Die konformen Transformationen, die ein gewisses Bein dieser Menge in ein Bein derselben Menge überführen, bilden eine Gruppe, die wir mit $\tilde{\mathfrak{C}}_n^0$ bezeichnen und die eine Untergruppe der stationären Untergruppe $\mathfrak{C}_n^0$ ist.

Etwas ausführlicher geschrieben erhalten die Gleichungssysteme (15_2), (21) und

(23) nun folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} dg_{ab} &= g_{ac}\omega_b^c + g_{cb}\omega_a^c\,, \\ g_{ab}\omega_p^b &+ g_{pq}\omega_a^q = 0\,, \\ dg_{pq} &= g_{pr}\omega_q^r + g_{rq}\omega_p^r\,; \end{aligned}\right\} \tag{$15''_2$}$$

$$\left.\begin{aligned} & da_{ab} = a_{ac}\omega_b^c + a_{cb}\omega_a^c - a_{ab}\omega_0^0 + \overline{\beta}_{abk}\omega^k\,, \\ & a_{ab}\omega_p^b + \overline{\beta}_{apk}\omega^k = 0\,, \\ & \overline{\beta}_{pqk} = 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{21''}$$

$$\left.\begin{aligned} d\beta_a &= \beta_b\omega_a^b - 2\beta_a\omega_0^0 - a_{ab}\omega_{n+1}^a + \beta_q\omega_a^q + \overline{\gamma}_{ai}\omega^i\,, \\ d\beta_p &= \beta_q\omega_p^q - 2\beta_p\omega_0^0 + \beta_a\omega_p^a + \overline{\gamma}_{pi}\omega^i\,. \end{aligned}\right\} \tag{23''}$$

Hieraus folgt, daß die Differentialformen ω_p^a und ω_a^p im konstruierten Bein für $\omega^k = 0$ Null werden, d.h. $\pi_p^a = \pi_a^p = 0$. Infolgedessen erhält das Gleichungssystem (12), das die Differentialformen ω^i erfüllen, die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \delta\omega^a &= -\omega^b(\pi_b^a - \delta_b^a\pi_0^0)\,, \\ \delta\omega^p &= -\omega^q(\pi_q^p - \delta_q^p\pi_0^0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit dem Gleichungssystem, das die Größen g_{ab}, a_{ab}, g_{pq} und β_p erfüllen, und schließen daraus, daß diese Größen bei Transformationen der Gruppe $\tilde{\mathfrak{C}}_n^0$ Tensoren sind.

Aus dem letzteren zum System (21″) gehörenden Gleichungssubsystem folgt, daß $\beta_{pqk} = g_{pq}\beta_k$ ist. Hieraus erhalten wir aufgrund der Symmetrie der Größe β_{pqr} :

$$\beta_{pqr} = g_{pq}\beta_r = g_{qr}\beta_p = g_{rp}\beta_q\,.$$

Wir falten diese Relation mit dem zum Tensor g_{pq} inversen Tensor g^{pq} und ermitteln, daß

$$(n-1-m)\beta_r = \beta_r$$

ist. Daraus folgt, daß der Tensor β_p für $m < n-2$ identisch verschwindet.

Um die geometrische Bedeutung dieser Relationen aufzudecken, untersuchen wir die Schar der zentralen Hypersphären der Hyperfläche (S). Wir differenzieren die Relation (27_1), durch die die zentrale Hypersphäre bestimmt ist, und erhalten im allgemeinen Fall:

$$dC_n = (\beta_i A_0 - a_{ij}g^{jk}A_k)\omega^i\,.$$

Für $m < n-2$ wird diese Relation in der Form

$$dC_n = (\beta_a A_0 - a_{ab}g^{bc}A_c)\omega^a$$

geschrieben. Folglich *hängt die zentrale Hypersphäre nur von m Parametern ab.* Ist jedoch $m = n-2$, dann wird die Infinitesimalverschiebung der zentralen Hypersphäre in der Form

$$dC_n = (\beta_a A_0 - a_{ab} g^{bc} A_c)\omega^a + \beta_{n-1}\omega^{n-1} A_0$$

geschrieben, aus der deutlich hervorgeht, daß *die zentrale Sphäre in diesem Fall allgemein von $n-1$ Parametern abhängt.* Es zeigt sich, daß *in diesem Fall der zweite Mantel (S') der Einhüllenden der Schar der zentralen Hypersphären mit der Hyperfläche (S) übereinstimmt.* Wenn $P = x^\xi A_\xi$ ein Punkt der Einhüllenden ist, dann erfüllt er tatsächlich die Gleichungen

$$(PP) = 0\,, \qquad (PC_n) = 0\,, \qquad (P\,dC_n) = 0\,,$$

und wir erhalten, in Koordinaten geschrieben:

$$2x^0 x^{n+1} + g_{ab} x^a x^b + (x^{n-1})^2 + (x^n)^2 = 0\,,$$
$$x^n = 0\,, \qquad \beta_a x^{n+1} - a_{ab} x^b = 0\,, \qquad \beta_{n-1} x^{n+1} = 0\,.$$

Einzige Lösung dieses Gleichungssystems für $\beta_{n-1} \neq 0$ sind die Koordinaten des Punktes A_0. Wenn $\beta_{n-1} = 0$ ist, dann hängt die Schar der zentralen Hypersphären der Fläche von $n-2$ Parametern ab.

Wir benutzen den allgemeinen Ausdruck für dC_n und können leicht zwei reziproke Sätze beweisen: *Wenn die Schar der zentralen Hypersphären der Hyperfläche (S) von $m < n-1$ Parametern abhängt, dann hat der Tensor a_{ij} dieser Hyperfläche den Rang m; wenn die Schar der zentralen Hypersphären der Hyperfläche (S) von $n-1$ Parametern abhängt, aber beide Mäntel der Einhüllenden der Schar der zentralen Hypersphären mit dieser Hyperfläche übereinstimmen, dann ist der Rang ihres Tensors a_{ij} gleich $n-2$.*

Wir untersuchen auf der Hyperfläche (S) das Pfaffsche Gleichungssystem $\omega^q = 0$. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dieses System vollständig integrierbar ist und folglich die von ihm bestimmten $(n-m-1)$-dimensionalen Integralmannigfaltigkeiten von m Parametern abhängen und einzeln durch jeden Punkt der Hyperfläche (S) verlaufen. Man kann beweisen, daß diese integralen Mannigfaltigkeiten für $m < n-2$, aber auch für $m = n-2$ und $\beta_{n-1} = 0$, $(n-m-1)$-dimensionale Sphären sind, die der Durchschnitt der zentralen Hypershäre C_n mit den Hypersphären $C_a = -b_a A_0 + A_a$ sind, wobei $b_a = g_{ab} a^{bc} \beta_c$ ist. Somit ist in diesem Fall *die Hyperfläche (S) durch die m-parametrige Familie von $(n-m-1)$-dimensionalen Spären gebildet. Längs jeder $(n-m-1)$-dimensionalen sphärischen Erzeugenden hat die Hyperfläche dabei eine konstante zentrale Hypersphäre.*

Es muß noch besonders auf den Fall hingewiesen weden, bei dem die Zahl m gleich Null ist. Aus dem obigen Bewiesenen folgt, daß die Hyperfläche (S) in diesem Fall eine Hypersphäre ist. Hinzugefügt sei auch noch: weil der Tensor a_{ij} apolar zum positiv definiten Tensor g_{ij} ist, läßt sich der Fall $m = 1$ nicht darstellen.

10. Wir kommen nun zur Untersuchung der geometrischen Gebilde, die mit den Objekten der Klasse B zusammenhängen. Wir betrachten die Schar der die Hyperfläche im Punkt A_0 berührenden Zykliden. Aus dem im 3. Absatz Bewiesenen folgt, daß die Koeffizienten p_{00} und p_{0i} der allgemeinen Zyklidengleichung (10) bei derartigen Zykliden gleich Null ist, und die übrigen Koeffizienten das Gleichungssystem (11) erfüllen. Wir sondern aus der untersuchten Zyklidenschar diejenigen aus, die mit der Hyperfläche (S) eine Berührung zweiter Ordnung besitzen. Nach der Definition einer Berührung zweiter Ordnung muß die nach Einsetzen des Punktes $A_0' = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2A_0$ in die Zyklidengleichung ermittelte Gleichung bezüglich der Pfaffschen Formen ω^i genau bis auf die Infinitesimalen zweiter Ordnung identisch erfüllt werden. Wir erhalten hieraus die bereits bekannten Relationen $p_{00} = 0$ und $p_{0i} = 0$ und außerdem das Gleichungssystem

$$p_{0n}\alpha_{ij} - p_{0n+1}g_{ij} + p_{ij} = 0\,,$$

die die Koeffizienten p_{0n}, p_{0n+1} und p_{ij} der Gleichung der berührenden Zyklide erfüllen. Wie bereits im 3. Absatz bewiesen, kann die Gleichung der Tangentialzyklide durch die Bedingungen

$$p_{0n} = 1, \qquad p_{0n+1} = 0$$

normiert werden. Wir erhalten dann für eine Zyklide mit Berührung zweiter Ordnung

$$p_{ij} = -\alpha_{ij}\,.$$

Wie zu erwarten war, erfüllt dieser Wert des Koeffizienten p_{ij} die Gleichung (11_1).

Wir schreiben nun die Gleichungen an, die die Koeffizienten p_{in}, p_{in+1} der Gleichung der berührenden Zyklide erfüllen. Dafür setzen wir die ermittelten Werte der Koeffizienten p_{ij} in die entsprechenden Gleichungen (11) ein. Wir gehen außerdem in diesen Gleichungen auf den Operator $\tilde{\delta}$ über und erhalten

$$\tilde{\delta} p_{in} = \pi_i^0\,, \tag{$11_2'$}$$

$$\tilde{\delta} p_{in+1} = -p_{in+1}\pi_0^0 - \alpha_{ij}\pi_{n+1}^j - p_{ni}\pi_n^0\,. \tag{$11_3'$}$$

Wir ermitteln die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems. Dafür nehmen wir $q_{in} = p_{in} - b_i$ an. Wir differenzieren diese Relation und kommen aufgrund von $(11_2')$ zum Gleichungssystem

$$\tilde{\delta} q_{ni} = 0\,,$$

das die Größe q_{ni} erfüllt. Dieses Gleichungssystem zeigt, daß die Größe q_{ni} absoluter kovarianter Vektor ist, den wir mit m_i bezeichnen. Folglich läßt sich die allgemeine Lösung des Systems $(11_2')$ in der Form

$$p_{in} = b_i + m_i$$

schreiben. Wir setzen diesen Wert der Koeffizienten p_{in} in die Gleichung $(11_3')$ ein und erhalten ein Gleichungssystem, das die Koeffizienten p_{in+1} erfüllen. Wir nehmen

$q_{in+1} = p_{in+1} - \alpha_{ij}b^j - am_i$ an. Wir differenzieren diese Relation und erhalten das Gleichungssystem

$$\tilde{\delta} q_{in+1} = -q_{in+1}\pi_0^0 ,$$

das die Größe q_{in+1} erfüllt. Wir integrieren dieses Gleichungssystem und erhalten, daß

$$q_{in+1} = a_0 n_i ,$$

wobei n_i ein beliebiger absoluter kovarianter Vektor ist. Hieraus erhalten wir die allgemeine Lösung des Systems $(11'_3)$ in der Form:

$$p_{in+1} = \alpha_{ij}b^i + am_i + a_0 n_i .$$

Analog könnten wir auch die übrigen Koeffizienten der Gleichung der berührenden Zyklide ermitteln. Zu diesem Zeitpunkt würde eine weitere Suche jedoch zu umfangreichen Berechnungen führen.

Wir ermitteln jene, aus dem Punkt A_0 hervorgehenden Richtungen auf der Hyperfläche (S), längs derer die Berührordnung der Hyperfläche mit der Berührzyklide hoch ist; wir nennen diese Richtungen c h a r a k t e r i s t i s c h . Längs dieser Richtung muß die Gleichung (10), genau bis auf die Infinitesimalen dritter Ordnung einschließlich, erfüllt werden durch den Punkt $A' = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2A_0 + \frac{1}{6}d^3A_0$. Vernachlässigt man die Komponenten mit der Ordnung größer als der dritten bei den Formen ω^i, führt das Einsetzen dieses Ausdruckes in Gleichung (10) zur Gleichung

$$\sum_{(i,j,k)} \left\{\beta_{ijk} + 3p_{n(k}a_{ij)} + 3(ap_{n(k} - p_{n+1(k)})g_{ij)}\right\} \omega^i\omega^j\omega^k = 0 ,$$

die die charakteristischen Richtungen erfüllen; hier wird über die Kombinationen der Indizes i, j und k summiert. Somit bilden die charakteristischen Richtungen einen Konus dritter Ordnung mit der Spitze im Punkt A_0.

Wir bezeichnen mit $\bar{b}_{ijk}$ die Koeffizienten der Gleichung des ermittelten Konus. Ersetzen wir im Ausdruck für $\bar{b}_{ijk}$ die Größen p_{nk} und p_{n+1k} durch ihre oben bestimmten Werte, so erhalten wir, daß

$$\bar{b}_{ijk} = b_{ijk} + 3\{a_{(ij}m_{k)} - a_0 g_{(ij}n_{k)}\}$$

ist.

Wir erkennen hieraus, daß die Gleichung des charakteristischen Konus der berührenden Zyklide nur von den Vektoren m_k und n_k und nicht von den Koeffizienten p_{nn}, p_{nn+1} und p_{n+1n+1} dieser Zyklide abhängt. Folglich *entspricht jedem fixierten Wert der Vektoren* m_k *und* n_k *eine dreiparametrige Schar von berührenden Zykliden mit ein und demselben charakteristischen Konus.* Wir nennen diese Schar B ü n d e l v o n b e r ü h r e n d e n Z y k l i d e n , entsprechend dem vorgegebenen Wert der Vektoren m_k und n_k.

Wir sondern aus der Schar der berührenden Zykliden diejenigen Zykliden aus, bei denen der Konus der charakteristischen Richtungen mit dem invarianten Konus

$b_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0$ übereinstimmt. Bei derartigen Zykliden ist $\overline{b}_{ijk} = \sigma b_{ijk}$, woraus folgt, daß

$$(\sigma - 1)b_{ijk} = 3\{a_{(ij}m_{k)} - a_0 g_{(ij}n_{k)}\}$$

ist. Wenn $\sigma \neq 1$ ist, kann der Tensor b_{ijk} in der Form

$$b_{ijk} = \frac{3}{\sigma - 1}\{a_{(ij}m_{k)} - a_0 g_{(ij}n_{k)}\}$$

dargestellt werden. Die Berechnung der Parameter zeigt, daß diese Form des Tensors b_{ijk} für $n > 3$ sich nicht als allgemeingültig erweist. Folglich haben wir es hier für $n > 3$ mit einem Spezialfall der Hyperfläche (S) zu tun. Diesen lassen wir vorläufig beiseite.

Es sei $\sigma = 1$. In diesem Fall wird die Kongruenzbedingung des charakteristischen Konus der berührenden Zyklide mit dem durch den Tensor b_{ijk} erzeugten invarianten Konus reduziert auf die Form

$$a_{(ij}m_{k)} - a_0 g_{(ij}n_{k)} = 0\,.$$

Diese Relationen können untersucht werden als Gleichungen bezüglich der Vektoren m_k und n_k, die, wie man leicht beweisen kann, dann und nur dann erfüllt werden, wenn $m_k = n_k = 0$ ist.

Somit *stimmt bei* $n > 3$ *und nichtsingulärer Struktur des Tensors* b_{ijk} *der Hyperfläche* (S) *der charakteristische Konus der berührenden Zyklide dann und nur dann mit dem durch den Tensor* b_{ijk} *erzeugten Konus überein, wenn diese Zyklide zum Bündel der berührenden Zykliden gehört, das dem Wert Null der Vektoren* m_k *und* n_k *entspricht.*

11. Wir untersuchen diejenigen Hyperflächen des konformen Raumes, deren Tensor b_{ijk} eine im vorhergehenden Punkt ausgezeichnete spezielle Struktur besitzt. Wir ändern die Bezeichnungen, benutzen die Apolaritätsbedingung der Tensoren b_{ijk} und g_{ij} und schreiben in diesem Fall den Tensor b_{ijk} folgendermaßen:

$$b_{ijk} = 3\left\{\frac{2}{n+1}g_{(ij}a_{k)p} - a_{(ij}g_{k)p}\right\} l^p\,.$$

Wie bereits gezeigt, kann der Tensor b_{ijk} für $n = 3$ immer so dargestellt werden, aber für $n > 3$ sondert unsere Bedingung einige spezielle Hyperflächen aus.

Die Gleichungskoeffizienten des dem Bündel der berührenden Zykliden entsprechenden charakteristischen Konus, welcher einem gewissen Wert der Vektoren m_k und n_k entspricht, werden im vorliegenden Fall folgendermaßen geschrieben:

$$\overline{b}_{ijk} = 3\left\{\frac{2}{n+1}g_{(ij}a_{k)p} - a_{(ij}g_{k)p}\right\} l^p + 3\{a_{(ij}m_{k)} - a_0 g_{(ij}n_{k)}\}\,.$$

Wir ermitteln diejenigen Werte der Vektoren m_k und n_k, bei denen der charakteristische Konus des Bündels der sich berührenden Zykliden übereinstimmt mit dem durch den Tensor b_{ijk} erzeugten invarianten Konus. Aus der Kongruenzbedingung der durch die Tensoren $\bar{b}_{ijk}$ und b_{ijk} bestimmten Tensoren ermitteln wir die gesuchten Werte der Vektoren m_k und n_k:

$$m_k = (1-\sigma)l_k\,, \qquad n_k = \frac{2(1-\sigma)}{(n+1)a_0}a_{kp}\,l^p\,,$$

wobei σ der Proportionalitätsfaktor zwischen den Tensoren $\bar{b}_{ijk}$ und b_{ijk} und ein invarianter Parameter bezüglich den Transformationen der Gruppe $\mathfrak{C}_n^0$ ist.

Hieraus folgt, *daß es bei der speziellen Struktur des Tensors b_{ijk} eine einparametrige Schar von Bündeln der berührenden Zykliden gibt, als deren charakteristischer Konus der Konus $b_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0$ dient.*

Wenn dieser Konus charakteristisch ist für Zykliden von mehr als einem Bündel, dann gilt umgekehrt, daß die Struktur des Tensors b_{ijk} eine spezielle ist.

Für $n = 3$ erhalten wir hieraus folgende Sätze: *Für jeden Punkt einer beliebigen Fläche des dreidimensionalen konformen Raumes gibt es eine einparametrige Schar von Bündeln von Zykliden, die eine Berührung zweiter Ordnung mit der Fläche in diesem Punkt haben und bei denen der durch den Tensor b_{ijk} erzeugte Konus charakteristisch ist.*

Für $\sigma = 0$ bekommt der Vektor m_k dann den Wert l_k und der Vektor n_k den Wert $\frac{2}{(n+1)a_0}a_{kp}l^p$. Diese Werte der Vektoren m_k und n_k lassen die Koeffizienten $\bar{b}_{ijk}$ des charakteristischen Konus identisch verschwinden. Hieraus folgt, daß die Zykliden des Bündels der berührenden Zykliden, das diesen Werten der Vektoren m_k und n_k entspricht, mit der Hyperfläche eine Berührung dritter Ordnung besitzen.

Man kann leicht erkennen, daß auch umgekehrt, wenn es für jeden Punkt der Hyperfläche (S) eine Zyklide gibt, die mit ihr eine Berührung dritter Ordnung in diesem Punkt hat, die Struktur des Tensors b_{ijk} dieser Fläche dann eine spezielle ist. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß der Tensor b_{ijk} in diesem Fall bei einem gewissen Wert der Vektoren m_k und n_k verschwinden muß.

Somit *ist die spezielle Struktur des Tensors b_{ijk} der Hyperfläche (S) in jedem Punkt der Hyperfläche eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Bündels von Zykliden, die mit ihr eine Berührung dritter Ordnung in diesem Punkt haben.*

Für $n = 3$ erhalten wir insbesondere, daß *es für jeden Punkt einer beliebigen Fläche des dreidimensionalen konformen Raumes ein Bündel von Zykliden gibt, die mit der Fläche eine Berührung dritter Ordnung in diesem Punkt haben.*

12. Wir erläutern die Bedeutung des Tensors c_{ij} für die Hyperfläche (S).

Wir untersuchen zuerst diejenigen Hyperflächen, auf denen der Tensor c_{ij} symmetrisch ist. Wir beweisen, daß *diese Hyperflächen charakteristisiert werden durch die Übereinstimmung der Krümmungslinien beider Mäntel der Einhüllenden der zentralen Hypersphärenschar,* d.h. durch Übereinstimmung der Krümmungslinien auf den Hyperflächen (S) und (S'). Diese Behauptung geht unmittelbar aus dem folgenden Hilfstheorem hervor:

Die Symmetrie des Tensors c_{ij} der Hyperfläche (S) ist gleichbedeutend mit der Kommutativität ihrer Affinore a_i^j und $c_i^j = g^{jk}c_{ki}$.

Tatsächlich kann die Bedingung $g^{kl}c_{k[i}a_{j]l} = 0$, die der Tensor c_{ij} einer beliebigen Hyperfläche (S) erfüllt, umgeschrieben werden in

$$a_i^l c_{lj} = c_i^l a_{lj}\,.$$

Wir falten diese Relation mit dem Tensor g^{jk} und erhalten:

$$a_i^l c_{lj} g^{jk} = c_i^l a_l^k\,. \tag{34}$$

Bei Symmetrie des Tensors c_{ij} ist aber

$$c_{lj}g^{jk} = c_{jl}g^{jk} = c_l^k\,,$$

damit erhalten wir aus der Relation (34) die Bedingung

$$a_i^l c_l^k = c_i^l a_l^k\,,$$

die die Kommutativität der Affinore a_i^j und c_i^j bedeutet. Umgekehrt führt diese Gleichung aufgrund der Relation (34) zur Symmetrie des Tensors c_{ij}.

Die Kommutativität der Affinore a_i^j und c_i^j bedeutet aber geometrisch, daß es in jedem Punkt der Hyperfläche (S) eine orthogonale Basis gibt, in der diese Affinore simultan auf Diagonalform reduziert werden. Man kann leicht erkennen, daß diese Basis die Basis der Hauptrichtungen sowohl der Hyperfläche (S) als auch der Hyperfläche (S') ist, da in ihr die quadratischen Formen (dC_0, dC_0), (dC_n, dC_n) und (dC_{n+1}, dC_{n+1}) gleichzeitig in Form von Quadratsummen dargestellt werden. Hieraus geht unmittelbar die Übereinstimmung der Krümmungslinien auf den Hyperflächen (S) und (S') hervor. Im dreidimensionalen Raum dient die Übereinstimmung der Krümmungslinien der Hyperflächen (S) und (S') als charakteristisches Merkmal dafür, daß die Fläche (S) isotherm ist (vgl. z. B. [7]). Deshalb kann man Hyperflächen mit dem symmetrischen Tensor c_{ij} auch i s o t h e r m nennen.

Hingewiesen sei noch auf einige Eigenschaften der isothermen Hyperflächen. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß die Differentialform $\overline{\omega}_0^0$ auf derartigen Hyperflächen ein vollständiges Differential ist, da bei $c_{ij} = c_{ji}$

$$D\overline{\omega}_0^0 = [\omega^i \overline{\omega}_i^0] = c_{ij}\,[\omega^i\omega^j] \equiv 0$$

ist. Wir normieren entsprechend die Diskriminante a_0 des Tensors a_{ij} und reduzieren die Form $\overline{\omega}_0^0$ auf Null. Folglich induziert die Schar der speziellen Beine auf den isothermen Hyperflächen die Riemannsche innere Geometrie (vgl. Norden, [4]).

Auch die folgende Behauptung ist evident:

Induziert die Schar der speziellen Beine auf der Hyperfläche (S) die Riemannsche innere Geometrie, dann ist diese Hyperfläche isotherm.

Wir untersuchen schließlich eine einzige geometrische Eigenschaft der isothermen Hyperfläche: *für eine derartige Hyperfläche ist die mit ihr verbundene Kongruenz der Kreise*

$$P = C_0 - tC_n + \frac{1}{2}t^2 C_{n+1}$$

normal. Tatsächlich zeigen Berechnungen, daß sich die Normalitätsbedingungen der untersuchten Kongruenz der Kreise reduzieren lassen auf die vollständige Integrierbarkeit der Gleichung $d\ln t + \overline{\omega}_0^0 = 0$, die aus der Symmetrie des Tensors c_{ij} folgt.

Wir untersuchen dann diejenigen Hyperflächen, auf denen der Affinor c_i^j sich nur durch einen Faktor vom orthogonalen unterscheidet, d. h. die Bedingung $c_i^k \; {}^*c_k^j = \lambda\delta_i^j$ erfüllt, wobei ${}^*c_k^j$ der zum Affinor c_k^j symmetrische Affinor ist: ${}^*c_k^j = g^{jl} \; {}^*c_{lk} = g^{jl}c_{kl}$. Wir bezeichnen in diesem Fall den Affinor c_i^j kurz als f a s t o r t h o g o n a l.

Wir beweisen, daß *die Fastorthogonalität des Affinors c_i^j eine notwendige und hinreichende Bedingung der konformen Übereinstimmung zwischen den Hyperfläche (S) und (S') ist,* den beiden Mänteln der Einhüllenden der zentralen Hypersphärenschar. Tatsächlich sehen die die Winkelmetrik der Hyperflächen (S) und (S') bestimmenden quadratischen Formen entsprechend folgendermaßen aus:

$$(dC_0, dC_0) = g_{ij}\omega^i\omega^j\,, \qquad (dC_{n+1}, dC_{n+1}) = g^{kl}c_{ki}c_{lj}\omega^i\omega^j\,.$$

Die Hyperflächen (S) und (S') haben dann und nur dann identische Winkelmetrik, wenn diese quadratischen Formen proportional sind, d. h. wenn $g^{kl}c_{ki}c_{lj} = \lambda g_{ij}$ ist. Man kann jedoch leicht erkennen, daß diese Bedingung gleichbedeutend ist mit der Fastorthogonalitätsbedingung des Affinors c_i^j.

Wir untersuchen nun diejenigen Hyperflächen, auf denen der Tensor c_{ij} gleichzeitig symmetrisch und fast orthogonal ist. In diesem Fall kann man leicht beweisen: Überträgt man unsere Hyperfläche auf Krümmungslinien, dann bekommt ihr Affinor c_i^j die Gestalt $c_i^j = \mu\, {}^m\varepsilon_i^j$, wobei

$${}^m\varepsilon_i^j = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{für} \quad i = j \leq m, \\ -1 & \text{für} \quad i = j > m \end{cases}$$

ist. Wenn jedoch die Signatur $n-1-m$ des Affinors c_i^j von Null verschieden ist, d. h. wenn $m < n-1$ ist, dann entartet unsere Hyperfläche in eine Hypersphäre, und nur bei $m = n-1$ erhalten wir eine nichttriviale Klasse von Hyperflächen.

Tatsächlich führt die Verträglichkeitsbedingung (29_2), die auf einer beliebigen Hyperfläche des konformen Raumes erfüllt ist, in diesem Fall zu der Form

$$\left[\overline{\overline{d}}\; {}^m\varepsilon_j^i + {}^m\varepsilon_j^i(d\ln\mu + 2\overline{\omega}_0^0),\; \omega^j\right] = 0\,. \tag{$29_2'$}$$

Die hieraus hervorgehenden Ausdrücke $\overline{\overline{d}}\; {}^m\varepsilon_j^i$ erhalten, wie Berechnungen zeigen, bei verschiedenen Werten der Indizes folgende Werte:

$$\overline{\overline{d}}\; {}^m\varepsilon_a^b = \overline{\overline{d}}\; {}^m\varepsilon_p^q = 0\,, \quad \overline{\overline{d}}\; {}^m\varepsilon_a^p = 2\overline{\omega}_a^p\,, \quad \overline{\overline{d}}\; {}^m\varepsilon_p^a = -2\overline{\omega}_p^a\,,$$

wobei $a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, m$; $p, q, \ldots = m+1, \ldots, n-1$ ist. Daher kann das Gleichungssystem $(29'_2)$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left[d \ln \mu + 2\overline{\omega}_0^0,\ \omega^a\right] - 2\left[\overline{\omega}_p^a \omega^p\right] = 0\,,$$
$$-2\left[\overline{\omega}_a^p \omega^a\right] + \left[d \ln \mu + 2\,\overline{\omega}_0^0,\ \omega^p\right] = 0\,.$$

Dieses System der äußeren quadratischen Gleichungen führt aufgrund der Gleichheit $\overline{\omega}_p^a + \overline{\omega}_a^p = 0$ zu dem folgenden Pfaffschen Gleichungssystem:

$$d \ln \mu + 2\,\overline{\omega}_0^0 = 0\,, \qquad \overline{\omega}_a^p = 0\,. \tag{35}$$

Die erste Gleichung ist ein vollständiges Differential (aufgrund der Gleichheit $c_{ij} = c_{ji}$), und die äußeren Differentiale der übrigen Gleichungen werden nach einigen einfachen Umformungen in der Gestalt:

$$\left[\overline{\omega}_{n+1}^a \omega^p\right] + \left[\omega^a \overline{\omega}_{n+1}^p\right] + \left[\overline{\omega}_n^a \overline{\omega}_n^p\right] = 0$$

geschrieben; aber es ist $\overline{\omega}_{n+1}^a = c_k^a \omega^k = \omega^a, \overline{\omega}_{n+1}^p = c_k^p \omega^k = -\omega^p$, und dieses System von quadratischen Gleichungen wird in das folgende umgewandelt:

$$\left[\overline{\omega}_n^a \overline{\omega}_n^p\right] = 0\,.$$

Aus diesem letzten Gleichungssystem geht für $m < n-1$ die Proportionalität aller Formen $\overline{\omega}_n^i$ hervor, woraus folgt, daß unsere Hyperfläche eine Hypersphäre ist.

Wir schließen diesen Trivialfall aus und erhalten, daß *die Hyperfläche* (S) *gleichzeitig isotherm sein und sich nur in dem Fall in konformer Übereinstimmung mit der Hyperfläche* (S') *befinden kann, wenn ihr Affinor* c_i^j *nur durch einen Faktor vom Einheitsaffinor abweicht.* Wir wollen diesen Fall etwas näher untersuchen. So sei $c_i^j = \mu \delta_i^j$ oder $c_{ij} = \mu g_{ij}$, wobei der Faktor μ die erste der Gleichungen (35) erfüllt. Die Differentiale der Punkte C_0 und C_{n+1} sehen daher folgendermaßen aus:

$$dC_0 = \overline{\omega}_0^0 C_0 + \omega^i C_i\,, \qquad dC_{n+1} = -\overline{\omega}_0^0 C_{n+1} + \mu \omega^i C_i\,.$$

Hieraus folgt, daß die Hypersphäre $C_{n+1} - \mu C_0$ des Hypersphärenbüschels $C_{n+1} - \sigma C_0$ bei Verschiebung des Beins auf der Hyperfläche (S) invariant bleibt. Tatsächlich ist

$$d(C_{n+1} - \mu C_0) = -\omega_0^0 (C_{n+1} - \mu C_0)\,.$$

Da $(C_n C_0) = (C_n C_{n+1}) = 0$ ist, sind alle zentralen Hypersphären unsere Hyperfläche orthogonal zur konstanten Hypersphäre $D = C_{n+1} - \mu C_0$. Hieraus folgt, daß die Hyperfläche (S') aus der Hyperfläche (S) durch eine Inversion bezüglich der invarianten Hypersphäre D ermittelt werden kann.

Man kann umgekehrt auch leicht beweisen: *Ist die Hyperfläche* (S) *so, daß der zweite Mantel* (S') *der Einhüllenden der Schar ihrer zentralen Hypersphären aus einer Inversion bezüglich einer gewissen invarianten Hypersphäre* D *ermittelt werden kann, dann unterscheidet sich der Tensor* c_i^j *dieser Hyperfläche nur durch einen Faktor vom*

Einheitstensor. Tatsächlich ist in diesem Fall $C_{n+1} = D + \mu C_0$, wobei $\mu = -\frac{(D,D)}{2(D,C_0)}$ und $dD = (d \ln \mu + \varpi_0^0)D$ ist; hieraus folgt, daß

$$dC_{n+1} = (d \ln \mu + \varpi_0^0)C_0 + \mu\omega^i C_i$$

ist. Wir vergleichen diesen Ausdruck für dC_{n+1} mit seinem üblichen Ausdruck und schließen hieraus, daß

$$d \ln \mu + 2\omega_0^0 = 0\,, \qquad c_i^j = \mu\delta_i^j$$

ist. Von uns wurde aber bereits bewiesen, daß die erste dieser Relationen eine Folgerung der zweiten ist, deshalb ist unsere Behauptung völlig bewiesen.

Hyperflächen, bei denen sich der Affinor c_i^j nur durch einen Faktor vom Einheitsaffinor unterscheidet, kann man in drei Klassen zerlegen, je nachdem ob der Proportionalitätsfaktor μ positiv, negativ oder gleich Null ist.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Fall $\mu = 0$. In diesem Fall verschwindet der Tensor c_{ij} auf der Hyperfläche (S) identisch. Wir beweisen, *daß eine diese Eigenschaft besitzende Hyperfläche (S) aus der Sicht der euklidschen Geometrie entweder minimal ist oder durch eine konforme Transformation aus einer solchen Hyperfläche ermittelt werden kann.* Wenn auf der Hyperfläche (S) $c_{ij} = 0$ ist, dann gilt für sie in der Tat $\varpi_i^0 = 0$ und $dC_{n+1} = -\varpi_0^0 C_{n+1}$, und folglich bleibt der Punkt C_{n+1} bei Verschiebung des speziellen Beins auf der Hyperfläche invariant. Wir führen eine konforme Transformation des Raumes durch, die den Punkt C_{n+1} in einen unendlich entfernten Punkt überführt. Mit (S_1) bezeichnen wir die Hyperfläche, in die die Hyperfläche (S) bei dieser Transformation übergeht. Die Hypersphären C_n gehen dabei in die Tangentialhyperebenen der Hyperfläche (S_1) über, und die quadratische Form $a_{ij}\omega^i\omega^j$ geht in die zweite quadratische Form dieser Hyperfläche über. Die Apolarität des Tensors a_{ij} zum Tensor g_{ij} bezeichnet nun das Verschwinden der mittleren Krümmung der Hyperfläche (S_1). Folglich ist die Hyperfläche (S_1) aus der Sicht der euklidischen Geometrie minimal, und die Hyperfläche (S) ist eine konforme Transformation der minimalen Hyperfläche.

Umgekehrt sei die Hyperfläche (S) aus der Sicht der euklidischen Geometrie minimal. Wir beweisen, daß ihr Tensor c_{ij} identisch verschwindet. Wir konstruieren auf dieser Hyperfläche ein derartiges System von Beinen erster Ordnung, so daß der Punkt A_{n+1} jedes Beins mit dem unendlich entfernten Raumpunkt übereinstimmt. Die quadratische Form $\alpha_{ij}\omega^i\omega^j$ stimmt in diesem Fall mit der üblichen zweiten quadratischen Form der Hyperfläche überein. Da die Hyperfläche (S) minimal ist, ist ihre mittlere Krümmung $\alpha_{ij}g^{ij} = 0$, und folglich stimmt die Größe α_{ij} im konstruierten Bein mit dem Tensor a_{ij} überein. Hieraus geht hervor, daß die Hypersphäre A_n dieses Beins die zentrale Hypersphäre C_n der Hyperfläche (S) ist. In unserem Bein ist somit $a = 0$. Folglich ist $\omega_n^0 = \beta_k\omega^k$. Aber $\omega_n^0 = (A_{n+1}\, dA_n) = -(A_n\, dA_{n+1})$ und, da der Punkt A_{n+1} invariant bleibt, ist $\omega_n^0 = 0$. Deshalb ist $\beta_k = 0, b_k = b^k = 0$. Folglich stimmt der Punkt A_{n+1} mit der Spitze C_{n+1} des speziellen Beins überein. Da dieser Punkt invariant bleibt, ist $\varpi_i^0 = c_{ij}\omega^j = 0$, woraus auch folgt, daß der Tensor c_{ij} auf der Hyperfläche (S) verschwindet.

Bei der Untersuchung der Fälle $\mu < 0$ und $\mu > 0$ beweisen wir analog, daß im ersten Fall die Hyperfläche (S) minimale Hyperfläche in der hyperbolischen Geometrie bleibt bzw. sich aus einer solchen Hyperfläche durch eine konforme Transformation ergibt, und im zweiten Fall minimale Hyperfläche in der elliptischen Geometrie ist bzw. sich aus einer solchen Hyperfläche durch eine konforme Transformation ergibt.

(Redaktionseingang 8/I 1952)

Literatur

[1] Г. Ф. Лаптев, Инвариантное построение проективно-дифференциальной геометрии поверхности, ДАН СССР, т. LXV, № **2** (1949), 121–124.
Laptev, G.F.: Invariantnoe postroenie proektivno–differencial'noj geometrii poverchnosti.
In: Doklady. Akademija Nauk SSSR. Moskva, 65 (1949), Nr 2, S. 121–124.
/Invariante Konstruktion der projektiven Differentialgeometrie einer Fläche; russ./

[2] Г. Ф. Лаптев, О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью, ДАН СССР, т. LXXIII, № **1** (1950), 17–20.
Laptev, G.F.: O mnogoobrazijach geometrićeskich élementov s differencial'noj svjaznost'ju.
In: Doklady. Akademija Nauk SSSR. Moskva, 73 (1950), Nr 1, S.17–20.
/Über die Mannigfaltigkeiten geometrischer Elemente mit einem Differentialzusammenhang; russ./

[3] Г. Ф. Лаптев, О многообразиях геометрических элементов, Диссертация, МГУ, 1950.
Laptev, G.F.
O mnogoobrazijach geometrićeskich élementov. Dissertacija.
Moskva, Moskovskij gosudarstvennyj universitet, 1950.
/Über die Mannigfaltigkeiten geometrischer Elemente. Diss.; russ./

[4] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, М.–Л., 1950.
Norden, A.P.
Prostranstva affinnoj svjaznosti.
Moskva/Leningrad: Gostechizdat, 1950.
/Räume mit affinem Zusammenhang; russ./

[5] А. П. Норден, О нормализованных поверхностях конформного пространства, Изв. АН СССР, серия матем., т. 14, № **2** (1950), 105–122.
Norden, A.P.: O normalizovannych poverchnostjach konformnogo prostranstva.
In: Izvestija. Akademija Nauk SSSR. Serija matematićeskaja.
Moskva, 14 (1950), Nr 2, S. 105–122.
/Über normalisierte Flächen eines konformen Raumes; russ./

[6] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.–Л., 1948.
Finikov, S.P.
Metod vneśnich form Kartana.

Moskva/Leningrad: 1948.
/Methode der äußeren Cartanschen Formen; russ./

[7] Blaschke, W.
Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie.
Berlin: Springer, 1929, Bd. 3: Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln.
(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 29)

[8] Takasu, T.
Differentialgeometrie in den Kugelräumen.
Tokyo: 1939.

[9] Thomsen, G.: Über konforme Geometrie. 1. Grundlagen der konformen Flächentheorie.
In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Göttingen, 3 (1924), S. 31–56.

[10] Vessiot, M.E.: Contribution à la géométrie conforme. Théorie des surfaces.
In: Bulletin de la Société mathématique de France. Paris, 54 (1926), S. 139–179; 55 (1927), S. 39–79.

[11] М. А. Акивис, Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного простпанства, ДАН СССР, т. LXXXII, № **3** (1952), 325–328.
Akivis, M. A.: Invariantnoe postroenie geometrii giperpoverchnosti konformnogo prostranstva.
In: Doklady. Akademija Nauk SSSR. Moskva, 82 (1952), Nr 3, S. 325–328.
/Invariante Konstruktion der Geometrie einer Hyperfläche eines konformen Raumes; russ./

übersetzt von

Stuttgart, den 13. Dezember 1991

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.–Übersetzer